职 业 教 育 规 划 教 材

三 年 制 中 职

数 学 第二册

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

三年制中职数学第二册教师教学用书/人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2020.1

ISBN 978-7-107-34470-1

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①人… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 015138 号

职业教育规划教材 三年制中职 数学 第二册 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 ×××印刷厂印装
版 次 年 月第 1 版
印 次 年 月第 次印刷
开 本 毫米× 毫米 1/16
印 张
字 数 千字
定 价 元

前　言

为了贯彻全国、全省职业教育工作会议精神，落实《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》和《教育部关于深化职业教育教学改革全面提高人才培养质量的若干意见》等要求，遵照山东省教育厅关于教材开发的有关规定，人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心发扬科学、严谨的传统作风，组织职教专家、教研员和有丰富教学实践经验的教师编写了这本与教材配套的教师教学用书.

教师教学用书主要阐述教材的编写理念，各章内容、例题及习题的设计思路；明确各章的教学重点、难点、教学要求以及要达到的教学目标；进行教材分析，帮助教师理解教材，为教师教学提供参考.

本书按教材的章节顺序，以章为单位进行编写. 每章包括“知识导图”“教学要求”“教材分析和教学建议”“参考教案”“习题答案、提示或解答”五部分：知识导图直观地揭示了每章各知识点之间的联系，教师通过知识导图能对每章的知识结构有一个整体的认识；教学要求设置的主要依据是《山东省中等职业教育数学课程标准》，按照上述课程标准，教学要求分为基本要求和发展要求；教材分析和教学建议部分，分析了每章的内容结构，知识间的递进关系和作用、地位，指出了每章内容的重点、难点，给出了每章总体的教学建议及课时分配，并针对各节内容给出了较为具体的教法与学法建议；参考教案的主要目的是帮助教师更加准确地理解教材的编写意图，并给出教学参考示例；最后的习题答案、提示或解答给出了教材中所有练习、习题的解答或提示，以供教师参考.

本书由祁志卫、刘心灵主编，副主编为李增华、崔东芳、杜红梅，参加编写的人员还有王琳、臧会圣、宋晓君、李宗芹、孙傈、姜永靓、尉玉杰.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请使用本书的读者批评指正，联系电话：010-58758532，邮箱：longzw@pep.com.cn.

目录

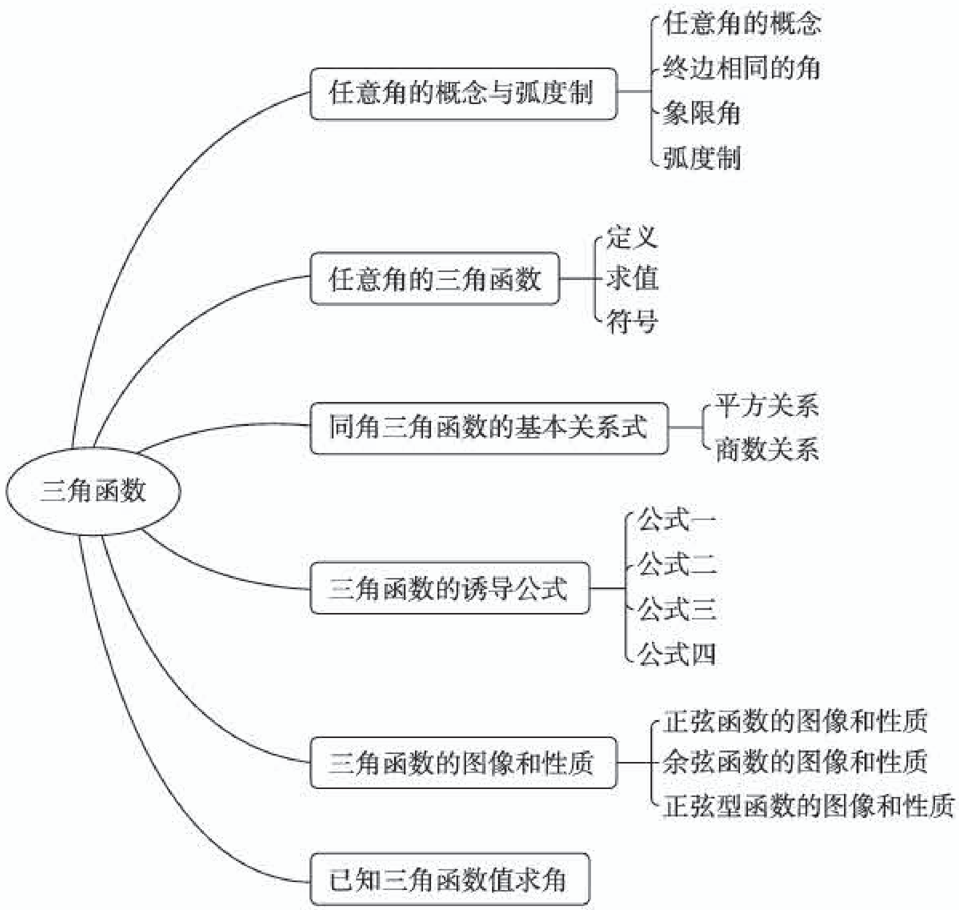
第七章
三角函数

思想火花

没有哪门学科能比数学更为清晰地阐明自然界的和谐性.

——卡洛斯

知识导图



教学要求

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解任意角的概念，会判断任意角所在的象限.

2. 了解弧度的概念，知道角度与弧度的换算关系，能利用函数型计算器进行角度与弧度的换算.

3. 理解任意角的三角函数（正弦函数、余弦函数、正切函数）的定义，能够利用定义、借助函数型计算器求任意角的三角函数值，并会判断任意角的三角函数值的符号.

4. 理解同角三角函数的两个基本关系式，并能已知一个三角函数值，会求其余两个三角函数值（简称“知一求二”）.

5. 了解诱导公式，会根据诱导公式求特殊角的三角函数值.

6. 了解正弦曲线的作法，认识正弦曲线的特征，会利用五点法作出正弦函数的

图像.

7. 理解正弦函数的性质.

8. 会利用函数型计算器，已知正弦值求在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$内的角，已知余弦值求在$[0,\ \pi]$ 内的角，已知正切值求在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内的角.

（二）发展要求

1. 会用集合表示终边相同的角，并会求指定范围内的角.

2. 理解单位圆中正弦线和余弦线的概念.

3. 会根据诱导公式对三角函数式进行化简、求值和证明.

4. 了解余弦曲线的作法，认识余弦曲线的特征，了解余弦曲线与正弦曲线的关系，会用五点法作出余弦函数的图像.

5. 了解余弦函数的性质.

6. 能作出形如函数 $y=a\pm\sin x$ 的图像，会求形如函数 $y=a+b\sin x$，$y=a+b\cos x$ 的周期、最值等，其中 a，b 为常数，$b\neq0$.

7. 能用五点法作出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图像，理解正弦型函数的性质.

8. 了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）与函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系.

9. 已知三角函数值，求任意指定范围内的角.

教材分析和教学建议

本章主要内容包括：任意角的概念与弧度制，任意角的三角函数，同角三角函数的基本关系式，诱导公式，三角函数的图像和性质以及已知三角函数值求角.

本章首先通过设置“转动钟表指针来校准时间”的问题情境，将角的概念推广到任意角，进而介绍了终边相同的角、象限角等概念. 通过弧度制，角与实数之间建立了一一对应的关系，而任意角的三角函数就是以实数为自变量的函数，这为研究三角函数的图像和性质奠定了基础.

通过复习锐角的三角函数引入任意角的三角函数的定义，温故知新，使学生较为自然地认识一个新的函数. 本章利用单位圆上点的坐标定义了任意角的正弦函数、余弦函数，这能够帮助学生更加直观地理解三角函数所反映的数与形的关系，为研究三角函数之间的关系和三角函数的性质提供了依据. 接下来在三角函数定义的基础上，推导出同角三角函数的两个最基本的关系式以及诱导公式，利用这些关系式可以解决一些三角函数式的求值与化简问题.

三角函数的图像和性质是本章的主要内容. 教材在介绍了三角函数的定义、同角

三角函数的基本关系式、诱导公式等知识的基础上，接着介绍了三角函数的图像和性质，这使三角函数的有关知识更具系统性.

教材根据正弦函数的定义，利用正弦线作出正弦函数的图像. 通过观察函数的图像，引导学生发现可以通过五点法作出正弦函数的图像，进而由正弦曲线和正弦函数的定义得出正弦函数的性质，包括定义域、值域、周期性、单调性. 余弦函数的图像可以通过正弦函数的图像平移得到，它们的图像形状一样，只是位置不同，所以余弦函数的图像也可以用五点法作出. 余弦函数的性质与正弦函数的性质类似，故可通过观察图像和类比正弦函数的性质对其进行总结，但要注意区别. 对于正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$），除了会用五点法作出它的图像外，还要从三种基本的图像变换（即平移变换、伸缩变换、对称变换）的角度认识它与函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系.

已知三角函数值求角一节，教材主要介绍了利用函数型计算器等工具由已知三角函数值求角，为后面学习解三角形等内容服务.

三角函数是基本初等函数，它是一种描述周期现象的数学模型，认识这种数学模型对于提高学生的思维素质和认知能力是非常有必要的. 另外，三角函数在其他研究领域中也有着重要的作用. 通过本章的教学，引导学生体会数形结合的数学思想，逐步学会探索、归纳、类比、分析、综合等常用的数学方法.

本章的重点是：任意角的三角函数的概念，同角三角函数的两个关系式，用五点法作正弦函数的图像，正弦函数的图像和性质，正弦型函数的图像和性质.

本章的难点是：弧度制和周期函数的概念，用正弦线作正弦函数的图像，正弦型函数的图像和性质，已知三角函数值求角.

使学生熟练、牢固掌握三角函数的定义及正弦函数的图像和性质，是本章教学的关键.

本章教学的建议如下：

1. 在本章教学中，教师应根据学生的生活经验或专业特点，通过单摆、弹簧振子、音乐、潮汐、四季变化等方面的实例，创设丰富的情境，使学生体会三角函数是刻画周期现象的重要模型，培养学生建立数学模型的能力.

2. 三角函数把数与形结合了起来，在教学中，应充分发挥单位圆的作用，帮助学生直观认识任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数的基本关系式以及三角函数的图像和基本性质. 借助单位圆的直观性，教师还可以引导学生自主地探究有关三角函数的其他性质，培养他们分析问题、解决问题的能力.

3. 正弦函数的图像和性质有关知识的教学，可以类比指数函数、对数函数等内容的教学思路，即先介绍定义，再作出图像，然后总结性质，最后讲解应用. 余弦函数和正弦型函数的教学，可以类比正弦函数的教学.

4. 函数型计算器以及计算机软件等是学习本章的重要工具，在教学中可以根据具体情况适当地应用现代信息技术帮助学生理解、解决问题，提高学生学习数学的兴趣.

本章教学约需 19 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1　任意角的概念与弧度制	
7.1.1　任意角的概念	约 2 课时
7.1.2　弧度制	约 2 课时
7.2　任意角的三角函数	约 3 课时
7.3　同角三角函数的基本关系式	约 2 课时
7.4　三角函数的诱导公式	约 2 课时
7.5　正弦函数与余弦函数的图像和性质	
7.5.1　正弦函数的图像和性质	约 2 课时
7.5.2　余弦函数的图像和性质	约 1 课时
7.6　正弦型函数的图像和性质	约 2 课时
7.7　已知三角函数值求角	约 1 课时
小结与复习	约 2 课时

7.1　任意角的概念与弧度制

7.1.1　任意角的概念

1. 本节的主要内容是角的概念的推广、终边相同的角、象限角的概念等，本节的重点是任意角及象限角的概念，难点是终边相同的角的集合. 理解任意角的概念，会在平面内建立适当的直角坐标系，进而通过数形结合的方法来认识角的几何表示和终边相同的角的集合，是学好本节的关键.

2. 本节的教学要求是：了解任意角的概念，会判断任意角所在的象限，会用集合表示终边相同的角，并会求指定范围内的角，会表示各象限角的集合.

3. 这一节首先设置了“校准钟表时间”的问题情境，引出角的概念的推广问题，引发学生的认知冲突，然后将初中学过的角的概念推广到任意角，这样可以使学生在已有经验（生活经验、数学学习经验等）的基础上，更好地认识任意角、象限角、终边相同的角等概念.

4. 对于任意角的概念的教学，应注意以下问题：

（1）由于学生过去接触的角都在 $[0°, 360°)$ 内，对角的认识已经形成一定的思维定式，所以除了教材中的例子，教学时还可以再举一些实际例子，说明引入新概念

的必要性和实际意义，同时，还可以借助一些信息技术工具（如几何画板），让学生在动态过程中体会“既要知道旋转量，又要知道旋转方向，才能准确刻画角的形成过程”的含义.

（2）本节利用初中几何角的旋转来研究角，角的大小表示旋转量的大小，正角、负角用来刻画旋转方向，其中，正、负的规定是出于习惯.

5. 对于象限角的教学，应注意以下问题：

（1）引入象限角便于讨论三角函数，其必要性可以在三角函数定义的教学中引导学生体会.

（2）在学习象限角的概念时，应规定角在直角坐标系中的位置，即角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合. 将角的始边处于同一个位置，可以使角的讨论得到简化，由此还能直观地表现出角的终边位置“周而复始”的现象.

（3）准确区分 $0°\sim90°$ 的角、锐角、小于 $90°$ 的角、第一象限角这几个概念：

$0°\sim90°$ 的角是指满足 $0°\leqslant\alpha<90°$ 的角；

锐角是指满足 $0°<\alpha<90°$ 的角；

小于 $90°$ 的角是指满足 $\alpha<90°$ 的角，它包括锐角、零角和负角；

锐角一定是第一象限角，而第一象限角不一定是锐角，如 $-330°$ 和 $750°$ 角都是第一象限角，但它们都不是锐角.

6. 终边相同的角的教学：

在用集合表示终边相同的角的推导过程中，涉及任意角、象限角、终边相同的角等新概念，所以这是本节学习的难点. 讲解时，可以让学生观察图形，遵循由特殊到一般的思路，归纳出与角 α 终边相同的角的一般形式是 $\alpha+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$）. 另外，也可以利用信息技术，在平面内建立适当的直角坐标系，作出任意角，并测出角的大小，同时，旋转角的终边，观察角变化的规律，从而将数、形联系起来，直观感受到终边相同的角相差 $360°$ 的整数倍. 讲解终边相同的角的概念时，应强调：

（1）k 是任意整数；

（2）α 是任意角（包括正角、负角和零角）；

（3）相等的角终边一定相同，但终边相同的角不一定相等. 终边相同的角有无数个，它们相差 $360°$ 的整数倍.

7. 例题讲解：

例 2 要求学生能在指定范围内，找出与已知角的终边相同的角，并判断其所在的象限，为后面利用诱导公式求三角函数值等知识打下基础. 解答类似例 2 的问题还有一种方法，以例 2 中的第（3）题为例，在 $[0°, 360°)$ 内，找出与 $-950°$ 角终边相同的角，并判定它是第几象限角.

解：与 $-950°$ 角终边相同的角的集合为

$$\{x \mid x=-950°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

令 $0°\leqslant -950°+k\cdot 360°<360°$，可知当 $k=3$ 时，得 $x=130°$.

由此可见，在 $[0°,\ 360°)$ 内，与 $-950°$ 角终边相同的角是 $130°$，它是第二象限角.

事实上，解题的关键是根据不等式，选取适当的 k 值.

8. 各象限角的集合和轴线角的集合：

（1）象限角的集合：

象限角	角的集合
第一象限角	$\{x \mid k\cdot 360°<x<90°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
第二象限角	$\{x \mid 90°+k\cdot 360°<x<180°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
第三象限角	$\{x \mid 180°+k\cdot 360°<x<270°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
第四象限角	$\{x \mid 270°+k\cdot 360°<x<360°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$

（2）轴线角的集合：

终边位置	角的集合
终边在 x 轴的正半轴上	$\{x \mid x=k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在 x 轴的负半轴上	$\{x \mid x=180°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在 x 轴上	$\{x \mid x=k\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴的正半轴上	$\{x \mid x=90°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴的负半轴上	$\{x \mid x=-90°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴上	$\{x \mid x=90°+k\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\}$
终边在坐标轴上	$\{x \mid x=k\cdot 90°,\ k\in \mathbf{Z}\}$

需要指出的是，象限角集合和轴线角集合的表示形式不是唯一的，还有其他的表示形式，例如，第四象限角的集合还可以表示为 $\{x \mid -90°+k\cdot 360°<x<k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$，终边在 y 轴的负半轴上的角的集合还可以表示为 $\{x \mid x=270°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$.

7.1.2　弧度制

1. 本节的重点是弧度制、弧度与角度的换算方法，难点是理解弧度制的概念. 讲清 1 弧度的角的意义是建立弧度概念的关键.

2. 本节的教学要求是：了解弧度的概念，知道弧度与角度的换算关系，能利用函数型计算器进行角度和弧度的换算.

3. 这一节可类比长度、速度的不同度量制引出弧度制，给出1弧度的角的定义，引导学生通过探究得到角度制和弧度制的换算方法. 这样可以尽量自然地引入弧度制，并让学生在探究和解决问题的过程中，更好地理解弧度的概念，建立角的集合与实数集的一一对应关系，为学习任意角的三角函数奠定基础.

4. 对于弧度制概念的教学，建议如下：

（1）本节在复习角度制的基础上引出了弧度制的概念，教师有必要引导学生回顾初中学过的角度制，它是一种重要的度量角的制度. 规定周角的$\frac{1}{360}$为1度角，记作$1°$. 且规定，$1°=60'$，$1'=60''$.

（2）弧度制是本章的难点之一，为增强学生对“1弧度的角”的感性认识，教师可以引导学生分组合作：在卡纸画出一个圆，找一段与半径相等的无弹力的细绳，弯曲绳子成一个弧形，使该弧与圆周上的某段曲线重合，分别连接圆心与弧的两个端点. 向学生指出绳子所在的弧所对的圆心角就是1弧度的角，这种方式有利于加深学生对概念的理解和记忆.

5. 要注意引导学生进行弧度制与角度制的比较：

（1）弧度制是以弧度为单位，角度制是以度为单位来度量角的.

（2）1 rad是等于半径长的圆弧所对的圆心角的大小，而$1°$是圆周的$\frac{1}{360}$所对的圆心角的大小.

（3）不管是以弧度为单位还是以度为单位的角的大小都是一个与半径长无关的定值.

（4）以弧度为单位表示角的大小时，“弧度”二字或rad可以省略不写，如$\sin 2$是指$\sin(2\ \text{rad})$，$\pi=180°$是指$\pi\ \text{rad}=180°$；但如果以度为单位表示角时，则不能省去单位，如$\sin 30°$不可写为$\sin 30$.

（5）用弧度为单位表示角时，常常把弧度数写成关于π的表达式，如无特殊要求，不必把π写成小数，如$45°=\frac{\pi}{4}$，不必写成$45°\approx 0.785$.

（6）无论是利用角度制还是弧度制表示角的集合，整个表达式采用的度量制必须一致，不能将角度制与弧度制混用. 例如，只能写成$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$或$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$的形式，不能写成$\{\alpha|\alpha=45°+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$或$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{\pi}{4}+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$的形式.

6. 公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$的主要作用是推导角度制与弧度制的换算公式，而对于它的另外两个推导式$\left(l=|\alpha|r\text{ 和 }r=\frac{l}{|\alpha|}\right)$的应用，教师可根据学情适当讲解.

7. 关于一个角的弧度数与角度数的换算，教学时应抓住

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad}，180^\circ=\pi\ \text{rad}$$

这两个关系式. 这样，其他角的弧度数与角度数的换算就不困难了.

8. 本节例题和习题主要是角度制与弧度制的换算练习，其中又以特殊角的换算为主. 另外，本节还训练学生利用函数型计算器进行一般角的换算. 应通过这些练习让学生做到熟练、准确地进行角度制与弧度制的换算，熟记特殊角的角度与弧度的换算关系式.

7.2　任意角的三角函数

1. 本节的教学重点是任意角的三角函数（正弦函数、余弦函数、正切函数）的定义. 本节的难点是用角的终边上的点的坐标来刻画三角函数，三角函数值的符号，正弦线和余弦线的概念.

2. 本节的教学要求是：理解任意角的三角函数（正弦函数、余弦函数、正切函数）的定义，能够利用定义、借助函数型计算器求任意角的三角函数值，会判断任意角三角函数值的符号，理解单位圆中正弦线和余弦线的概念.

3. 本节以锐角三角函数来引入，介绍了用单位圆上点的坐标表示锐角三角函数的方法，在此基础上定义任意角的三角函数，并且用定义研究了三角函数值的符号. 教学时，应引导学生体会任意角三角函数概念的形成过程中所包含的数形结合的思想.

4. 对于任意角三角函数定义的教学，应注意以下问题：

（1）教材是借助单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数的，这样定义有许多优点，其中最主要的是使正弦函数、余弦函数从自变量（即角的弧度数）到函数值（即单位圆上点的纵、横坐标）之间的对应关系更清楚、简单，突出了三角函数的本质，有利于学生利用已有的函数概念来理解三角函数；其次是使三角函数所反映的数形关系更为直观，为后面讨论其他问题（例如，三角函数的定义域、函数值符号的变化规律、诱导公式、周期性、单调性、最大值、最小值以及同角三角函数的基本关系式等）奠定基础.

（2）需要规定单位圆在平面直角坐标系中的位置：单位圆的圆心与坐标原点重合.

（3）教学中，可根据教材的安排，在学生已有的对锐角三角函数几何直观认识的基础上，先建立直角三角形中的锐角与第一象限角的联系，在平面直角坐标系中考察锐角三角函数，发现可以用终边上点的坐标来表示锐角三角函数，然后再“特殊化”，

引出用单位圆上的点的坐标表示锐角三角函数. 做了以上铺垫后，再定义任意角的三角函数.

教学中应当向学生指出，“设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$”实际上给出了关于实数 α（弧度）的两个对应关系，即

$$x=\cos\alpha,$$

$$y=\sin\alpha,$$

认识清楚上述对应关系，是理解三角函数定义的关键.

（4）由相似三角形的知识可知，对于一个确定的角，它的三角函数值仅与角的大小有关，而与它终边上点的位置无关.

（5）在定义了三角函数后，要强调一下三角函数的记号. 三角函数的记号 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 是一个整体，不能分离. sin，cos，tan 分别是英语单词 Sine（正弦），Cosine（余弦），Tangent（正切）的缩写.

5. 三角函数值在各象限的符号的教学，应注意以下问题：

（1）点 $P(x, y)$ 在各象限内的坐标符号为

第一象限：$x>0$，$y>0$；

第二象限：$x<0$，$y>0$；

第三象限：$x<0$，$y<0$；

第四象限：$x>0$，$y<0$.

（2）三角函数值在各象限内的符号是根据三角函数的定义和各象限内点的坐标符号推导出来的. 在讲本节内容时，建议先复习点 $P(x, y)$ 在各象限内的坐标符号，再复习三角函数在单位圆上的定义，即若角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$. 可以发现：正弦符号取决于纵坐标 y 的符号；余弦符号取决于横坐标 x 的符号；正切符号取决于纵坐标 y 和横坐标 x 是同号还是异号.

（3）由于三角函数值在各象限内的符号至关重要，为后面学习利用平方关系求三角函数值奠定基础，必须要求学生在理解的基础上牢记. 教材中把正负号规律总结为图 7-13 中的三个图，以帮助学生记忆，这三个图分别说明当角在不同象限时，各函数值应取的符号. 另外，也可以用口诀“一全正，二正弦，三正切，四余弦”来记忆，这个口诀表示的是，在第一象限，正弦、余弦、正切这三种三角函数值的符号全为正，在第二象限只有正弦为正，在第三象限只有正切为正，在第四象限只有余弦为正.

6. 正弦线、余弦线的教学：

教材中利用三角函数的定义，将正弦、余弦用单位圆中的有向线段来表示，使数与形密切结合起来，以加强学生对三角函数的理解. 用有向线段研究三角函数时，要

注意它的方向，分清始点和终点，始点和终点的书写顺序不能颠倒.

7. 例题讲解：

例 1 需利用三角函数在单位圆上的定义进行求解，设置的目的是加深学生对定义的理解，提高学生数形结合能力和分析问题的能力. 结合本节例 1 和练习题，引导学生总结下表：

角 α						
角 α	**度数**	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$		0	不存在	0	不存在	0

这几个特殊角的三角函数值非常重要，应当让学生掌握推证方法，并让学生牢记. 因为利用五点法作正弦（或正弦型）函数和余弦函数的图像时要用到这些特殊值.

例 2 是已知角 α 终边上一点的坐标，求角 α 的三角函数值. 可以先根据三角形相似，将这一问题转化到单位圆上，再由三角函数的定义得出. 通过这道题的求解，可以使学生认识到，只要知道角的终边上的任意一点，就可以得出相应的三角函数值，于是用角的终边上任一点的坐标来定义三角函数与利用单位圆上点的坐标来定义三角函数是等价的，由此可引导学生给出新的定义：一般地，设点 $P(x, y)$ 是角 α 终边上任意一点，点 P 与原点 O 的距离为 r，$r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r>0)$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$. 这样的定义突出了点 P 的任意性，说明任意角 α 的三角函数值只与角 α 有关，而与点 P 在角 α 终边上的位置无关.

例 3、例 4 需要学生利用函数型计算器求一般角的三角函数值. 其主要步骤为：

（1）调整函数型计算器的使用状态：

如果是求以度为单位的三角函数值，计算时应将函数型计算器置于 DEG（以度为单位）的计算状态；如果是求以弧度为单位的三角函数值，计算时应将函数型计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态.

（2）正确掌握运算程序.

不同的函数型计算器的使用程序可能有所差异，与教材中的操作步骤不同，应向学生明确这一点.

例 5 需要确定已知角的三角函数值的符号. 它有两种解法：一种是先确定已知角所在的象限，再确定三角函数值的符号；另一种是直接利用函数型计算器确定三角函

数值，从而得出其符号.

例 6 是已知角 α 的两个三角函数值的符号，确定角 α 的范围. 此题要用求两个集合的交集的方法来处理. 需要特别注意的是，当 $\sin\theta<0$ 时，θ 是第三象限角或第四象限角或终边在 y 轴的负半轴上，千万不要漏掉“终边在 y 轴的负半轴上”这种情形.

7.3 同角三角函数的基本关系式

1. 本节的主要内容是同角三角函数的两个基本关系式及其应用. 重点是会根据一个角的某个三角函数值求这个角的其他三角函数值，难点是灵活运用两个基本关系式. 在教学过程中，需要着重培养学生转化的思想，锻炼思维的灵活性.

2. 从定义出发，与圆的几何性质建立联系，从中获得研究三角函数的思路，是学习三角函数的重要思想方法. 本节从三角函数在单位圆上的定义出发，结合几何中的勾股定理推导出了同角三角函数的两个主要公式. 利用单位圆的直观，推导同角三角函数的关系式，这一过程是“数”与“形”的一次完美结合. 数形结合的思想在讨论同角三角函数的基本关系中，起着非常重要的作用.

3. 对于同角三角函数的基本关系式的教学，还应注意以下几点：

(1) 讲同角三角函数的基本关系式时，应突出“同角”两字. 需提醒学生注意，这些关系式都是对使它们有意义的那些角而言的，以后遇到的关系式也作同样理解.

(2) $\sin^2\alpha=(\sin\alpha)^2$，读作“$\sin\alpha$ 的平方”. 但 $\sin^2\alpha\neq\sin\alpha^2$，前者是“角 α 正弦的平方”，后者是“角 α 平方的正弦”，应使学生弄清它们的区别.

(3) 掌握公式的变形. 如公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可变形为 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$可变形为 $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$ 等.

4. 例题讲解：

(1) 例 1 和例 2 是根据一个角的某个三角函数值求这个角其他的三角函数值. 目的是让学生进一步熟悉同角三角函数的基本关系式. 解决这类问题时，要注意角是第几象限角，进而确定所求三角函数值的符号，然后再具体求解.

讲解例 1 时，对照已知和两个基本关系式，引导学生找出解题过程：

已知正弦（或余弦）$\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$求余弦（或正弦）$\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$求正切.

需要指出的是，由于角所在象限是确定的，应当只有一组解.

如果没有“α 是第二象限角”这个条件，则由 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$可知，α 是第一或第二象

限角，所以

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\frac{3}{5}.$$

当 α 是第一象限角时，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$；

当 α 是第二象限角时，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

讲解例 2 时，引导学生把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 当作未知数，通过列方程组来求解. 要特别强调题目中的隐含条件（$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$），并指出由于角所在象限是确定的，应当只有一组解.

本题如果没有“α 是第四象限角”这个条件，则由 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$ 可知，α 是第二或第四象限角，最后结果应有两组解：

当 α 是第二象限角时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}$；

当 α 是第四象限角时，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

（2）例 3 中已知 $\tan\alpha$ 的值，求三角函数式的值. 本例题要求较高，教师可根据学生学习情况选择是否讲解. 解此类问题的方法不唯一，可以将 $\sin\alpha=-3\cos\alpha$ 代入所求三角函数式，这样式子的分子分母都只含有 $\cos\alpha$，再利用分式的性质进行化简求值；也可以将分子分母同时除以 $\cos\alpha$，将分式化为关于 $\tan\alpha$ 的式子，然后进行求值计算. 这两种方法的本质都是将三角函数式化为同名函数，体现了转化的数学思想.

5. 本教材把理解同角三角函数的两个基本关系式，会根据关系式“知一求二”作为基本要求，利用关系式对三角函数式进行化简求值作为发展要求，而这组公式在三角恒等式的证明方面的应用，不用过多讲解.

7.4　三角函数的诱导公式

1. 本节的重难点是四组诱导公式的理解以及应用. 通过公式可以将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数，让学生从中体会转化的数学思想.

2. 本节的基本要求是了解诱导公式，会根据诱导公式求特殊角的三角函数值；发展要求是会根据诱导公式对三角函数式进行化简、求值等.

3. 教材主要介绍了四组诱导公式. 本节内容为后面学习三角函数的图像和性质、已知三角函数值求角以及解三角形等内容做准备. 教材中，诱导公式的推导是以几何的中心对称和轴对称为基础的，充分体现了诱导公式的几何意义. 有些诱导公式实际

上表示的是终边所在的直线关于原点对称或坐标轴对称的两个角之间的三角函数的关系. 诱导公式通过单位圆推导得出，体现了数形结合的数学思想.

4. 所有诱导公式中的 α 表示的都是任意角.

5. 诱导公式一的教学：

诱导公式一是根据三角函数的定义直接得出的，它揭示正弦函数、余弦函数和正切函数的周期性质. 若要用旋转对称的观点讲公式一，可首先引导学生通过作图发现：以任意角 α 的终边为始边，旋转 $2k\pi$ 后得到 $2k\pi+\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$），其终边与角 α 的终边重合. 因此，它们的同名三角函数值相等.

利用公式一，可以把绝对值大于 2π 的任意角的三角函数值问题转化为 $[0, 2\pi)$ 内角的同名三角函数值问题，关键是找出 $[0, 2\pi)$ 内与已知角终边相同的角.

6. 诱导公式二的教学：

$-\alpha$ 角的诱导公式是由关于 x 轴对称的两点坐标之间的关系推出的，它揭示了正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数的重要性质. 讲解此公式的关键是结合单位圆、三角函数的定义，使学生理解以下三点：

（1）点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$；

（2）点 P 和点 P' 关于 x 轴对称；

（3）点 P 和点 P' 相应的横坐标相等，纵坐标互为相反数.

7. 诱导公式三的教学：

$\pi+\alpha$ 角的诱导公式是由关于原点对称的两点坐标之间的关系推出的，讲解此公式的关键是结合单位圆、三角函数的定义，使学生理解以下三点：

（1）点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$；

（2）点 P 和点 P' 关于原点对称；

（3）点 P 和点 P' 相应的横坐标和纵坐标都互为相反数.

8. 诱导公式四的教学：

受学生所学知识的限制，诱导公式四的推导会有很大的困难. 教材把公式四的推导过程当作阅读内容，教师在课堂上可不推导，但需要学生记住公式四.

如果要推证这个关系式，需要注意以下四点：

（1）点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 Q 的坐标是 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$；

（2）推证 $\triangle QNO\cong\triangle OMP$，由此得到 $|OM|=|NQ|$，$|MP|=|ON|$；

（3）得到 $|\cos\alpha|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right|$，$|\sin\alpha|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right|$；

（4）如果 α 是某个象限（如第一象限）的角，容易看出 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 就一定是下一个象限（如第二象限）的角，且 $\cos\alpha$ 与 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 同号，$\sin\alpha$ 与 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 异号，由

此得出 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

9. 本节教材的例题、习题主要考查诱导公式的应用：

（1）直接应用各组公式求任意角的三角函数值；

（2）综合应用各组公式求任意角的三角函数值；

（3）应用各组公式对较复杂的代数式化简或求值.

讲解过程中，要让学生明白，一个角的三角函数值是唯一确定的，在求一个角的三角函数值时，无论选用哪组诱导公式进行计算，解题过程可能不完全一样，但结果一定是一样的.

7.5　正弦函数与余弦函数的图像和性质

7.5.1　正弦函数的图像和性质

1. 本节的主要内容是正弦函数的图像和性质. 重点是用五点法作出正弦函数的图像，理解正弦函数的性质.

2. 本节的教学要求是：了解正弦函数图像的作法，认识正弦曲线的特征，会用五点法作出正弦函数的图像，理解正弦函数的性质，能作出形如函数 $y=a\pm\sin x$ 的图像，会求形如函数 $y=a+b\sin x$（a，b 为常数，$b\neq0$）的最值、周期等.

3. 类比以前学习函数的一般思路：首先给出函数的定义，再作出函数的图像，然后结合图像总结函数的性质. 学习正弦函数时也是这样：首先给出正弦函数的定义，然后用正弦线作出正弦函数的图像，进而分析图像特征，总结一种作正弦函数图像的方法——五点法，之后通过图像研究正弦函数的性质.

4. 对于正弦函数的图像和性质的教学，应注意以下问题：

（1）正弦函数的定义：角在弧度制下，任意一个实数都对应着一个角，每一个角 x 都能求出它的正弦值 $\sin x$，这样，任意一个角 x 都有唯一确定的值 $\sin x$ 与之对应. 由这个对应法则所确定的函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数.

（2）正弦函数的图像：在讲正弦函数的图像时，可以先借助几何画板等工具，作出正弦函数的图像，让学生对它有一个初步的认识，然后再讲解如何应用正弦线作出正弦函数的图像.

用正弦线作正弦函数的图像时，其自变量是用弧度制来表示的，自变量和函数值都统一使用十进制实数，两条坐标轴上的单位长度应该相同，否则所作图像形状将会各不相同，影响学生认识正弦函数的图像. 教学时，教师应边讲解边作图，力求准确，以起到示范作用. 通常的作法是，首先确定 y 轴的单位长度，然后以 y 轴的单位

长度为标准，在 x 轴上量出约 3 个单位长度，近似地作为 π，接着作出$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，2π，等等，具体的作图过程请参考教材.

用正弦线作正弦函数的图像比较麻烦，还有一种简单的作法，即五点法，这是学生在平时常用的一种方法，也是本节的重点. 首先让学生观察正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像，找出关键的五个点，即最高点、最低点和图像与 x 轴的交点. 有了这五个点，图像的基本形状就确定了，因此，在精确度要求不高时，常采用这种五点法作图，但要注意纠正学生可能常犯的错误，如作图不光滑、图形不对称、位置不正确等.

(3) 正弦函数的性质：作出正弦曲线后，类比以前学过的二次函数、指数函数、对数函数等的研究思路，引导学生说出正弦函数的定义域、值域、奇偶性和在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上的单调性. 在整个定义域内，函数的单调性与之前学习的二次函数等不同. 引导学生体会正弦函数是增减交替、周期重复的，如最大值每隔 2π 即出现一次，在此基础上，给出周期的严格定义.

在讲周期的定义时，注意讲清以下几个问题：

①当“定义域内的每一个 x，都满足 $f(x+T)=f(x)$”时，函数 $f(x)$ 才是周期函数. 若只对定义域内的某个 x 值成立，则不能说函数 $f(x)$ 是周期函数，如：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$，但 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{2}$不是正弦函数的周期. 同样地，分析函数的奇偶性时，也应注意这个问题.

②关于周期函数的定义需要注意：“如果存在”说明并非所有函数都有周期，若存在周期，周期 T 要满足“非零”和“常数”这两个条件.

③教学时，可以将函数的周期性与奇偶性放在一起进行讲解. 有些函数只是奇函数，如正比例函数 $y=kx$（k 为常数，$k\neq0$）；有些函数只是偶函数，如二次函数 $y=ax^2+c$（a，c 为常数，$a\neq0$）；有些函数既具有奇偶性，又具有周期性，如正弦函数 $y=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$）；有些函数既不具有奇偶性，也不具有周期性，如一次函数 $y=ax+b$（a，b 为常数，且 $a\neq0$，$b\neq0$）. 另外，在授课时，可以把这两种函数性质的定义对照讲解：

如果函数 $f(x)$ 对于其定义域内的每一个值，都有

$f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$为奇函数；

$f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$为偶函数；

$f(x+T)=f(x)$，其中 T 是非零常数，则函数 $f(x)$为周期函数.

④最小正周期的概念是指对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它的所有周期中，存在一个最小的正数，那么这个最小的正数称为最小正周期，如果不特别说明，教材中今后所涉及的周期，一般指函数的最小正周期.

并非每个周期函数 $f(x)$ 都有最小正周期，如常数函数 $f(x)=c$（c 为常数），$x\in\mathbf{R}$，这个函数对定义域内的每一个 x，都满足 $f(x+T)=f(x)=c$，因此，该函数是周期函数，周期 T 可以是任意非零常数，然而正数集合中没有最小元素，所以该函数没有最小正周期.

5. 例题讲解：

例 1 要求用五点法作函数的图像，正确的列表是关键. 首先，可以让学生列出决定正弦函数图像的五个关键点的坐标，然后列出所求函数的相应关键点后再作图. 作图时，应指出学生常犯的错误，如连成折线、图形不对称、位置不正确等.

例 2、例 3 主要考察正弦函数的性质，包括判断函数的单调性、求函数的最值和周期，这也是本节的重点.

7.5.2　余弦函数的图像和性质

1. 本节的主要内容是余弦函数的图像和性质，属于发展要求. 本节重点是用五点法作出余弦函数的图像，会求形如函数 $y=a+b\cos x$（a，b 为常数，$b\neq 0$）的周期、最值等.

2. 本节的教学要求是：了解余弦曲线的作法，认识余弦曲线的特征，会用五点法作出余弦函数的图像，了解余弦函数的性质，会求形如函数 $y=a+b\cos x$（a，b 为常数，$b\neq 0$）的最值、周期等.

3. 类比正弦函数的定义，容易引导学生得出余弦函数的定义.

4. 对于余弦函数的图像和性质的教学，应注意以下问题：

（1）由于公式 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$（$x\in\mathbf{R}$）成立，余弦函数的图像可以由正弦函数的图像平移得到. 在授课时，可以结合二次函数 $y=x^2$ 与 $y=(x+2)^2$ 图像之间的关系，先作出这两个二次函数的图像，引导学生发现，把函数 $y=x^2$ 的图像向左平移 2 个单位，就与函数 $y=(x+2)^2$ 的图像重合. 在此基础上，类比得出余弦函数 $y=\cos x$ 的图像是由正弦函数 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到的.

（2）教师可以借助几何画板等软件，作出正弦函数和余弦函数的图像，引导学生去发现余弦函数与正弦函数图像的差异，总结余弦函数图像的特征，培养学生总结归纳的能力.

（3）正弦函数的图像可用五点法作出，余弦函数的图像也可用五点法作出，但要注意引导学生分析，在同一个周期内，这两个图像的五个关键点并不相同.

余弦函数的性质是在学习正弦函数性质的基础上，引导学生通过观察、类比，进而逐一总结得出的，要提醒学生注意两个函数性质的区别.

5. 例题讲解：

例 4 要求用五点法作函数的图像，并求函数的最值和周期，例 5 是利用余弦函数的性质，比较两个余弦值的大小，除利用余弦函数的性质外，还可以让学生借助函数型计算器来完成.

7.6 正弦型函数的图像和性质

1. 本节的主要内容是正弦型函数的图像和性质. 重点是用五点法作出正弦型函数的图像，理解正弦型函数的性质.

2. 本节知识属于发展要求. 教学要求是：能用五点法作出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图像，理解正弦型函数的性质，了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像之间的关系.

3. 对于本节内容的教学，应注意以下问题：

（1）关于正弦型函数的图像的教学思路：可以引导学生在学习正弦函数 $y=\sin x$ 图像的基础上，用几何画板分别作出函数 $y=A\sin x$，$y=\sin\omega x$ 和 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像，观察上述图像与函数 $y=\sin x$ 图像的关系，理解 A，ω，φ 的意义及其对函数图像的影响.

（2）在用五点法作正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图像时，列表是关键. 教材通过变量替换，令 $X=\omega x+\varphi$，X 分别取 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π 时，解出对应的 x 值，而对应的 y 值分别为 0，A，0，$-A$，0. 在教学中，变量替换的数学思想必须给予足够的重视. 在描点时，同样应避免出现连成折线、图形不对称、位置不正确等问题.

（3）可以结合图像，仿照正弦函数的性质，引导学生总结正弦型函数的性质，重点是函数的最值、周期、单调性.

4. 例题的讲解：

例 1 要求用五点法作正弦型函数的图像. 教学时，引导学生结合变量替换的数学思想，作出正弦型函数的图像；例 2 选取了一个生活中的现象，通过分析数据，建立正弦型函数模型，这里可以向学生渗透数学建模的思想，引导学生感悟数学在生活中的应用.

5. 教学中应尽可能多地介绍、讲解正弦型函数在生活中的应用等内容，激发学生的学习热情.

7.7　已知三角函数值求角

1. 本节的主要内容是已知三角函数值求角.

2. 本节的基本要求是：已知正弦值利用函数型计算器求在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内的角；已知余弦值利用函数型计算器求在 $[0, \pi]$ 内的角；已知正切值利用函数型计算器求在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内的角. 已知三角函数值求指定范围内的角属于发展要求.

3. 已知三角函数值求角是已知角求三角函数值的逆运算. 教师在授课时要结合函数的图像或诱导公式，让学生理解：在实数域内，某一三角函数值所对应的角可以有多个，而根据函数的周期性，只要求出一个周期内的满足条件的角，便可以求出所有满足条件的角.

4. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时，正弦函数 $y = \sin x$ 是单调增函数，因此，已知正弦值求在此范围内的角只有一个；当 $x \in [0, \pi]$ 时，余弦函数 $y = \cos x$ 是单调减函数，因此，已知余弦值求在此范围内的角只有一个；当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$时，正切函数 $y = \tan x$ 是单调增函数，因此，已知正切值求在此范围内的角只有一个. 需要注意的是，无论是否为特殊角，我们都可以借助函数型计算器求出满足条件的角.

因为角的度量有角度制和弧度制两种，在使用函数型计算器时，要注意首先根据题意，把计算器置于相应的度量模式下，再求解.

5. 求在指定范围内的角，属于发展要求. 在求解时，首先根据三角函数值判断角所在的象限，然后求出满足条件的锐角 α，再根据诱导公式或三角函数图像，求出指定范围内的角.

6. 例题的讲解：

例 1 是已知正弦值，利用函数型计算器求角的问题. 在使用函数型计算器时，一定要注意度量模式的设定. 例 2 是在三角形中，已知正弦值求角的问题，要注意引导学生分析角的范围. 可以先利用函数型计算器求出满足条件的锐角，再把另外一个满足条件的角求出. 例 3 是已知余弦值或正切值求角的问题，可以类比例 1 的求解方法，引导学生自己完成，培养学生解决问题的能力. 例 4 是已知三角函数值求实数范围内的角的问题，属于发展要求，在讲解时，可以按照以下步骤完成：

（1）将函数型计算器置于所要求的弧度制或角度制的模式下；

（2）利用函数型计算器求出默认范围内的角；

（3）利用诱导公式求出符合条件的一个周期内的其他对应角，特别地，当

$\sin x=\pm1$ 或 $\cos x=\pm1$ 时，一个周期内只有一个对应角；

（4）最后写出所求角的集合.

‖参考教案‖

正弦函数的图像和性质（第一课时）

教学目标

1. 知识与技能目标：理解正弦函数的定义，了解正弦函数图像的作法，认识正弦函数图像的特征，会用五点法作正弦函数的图像.

2. 过程与方法目标：让学生经历正弦函数图像的产生过程，向学生渗透数形结合的思想，增强学生的数学意识，提高其观察、归纳、分析、总结的能力.

3. 态度、情感与价值观目标：通过应用现代信息技术手段，激发学生学习数学的兴趣，提高学生的观察能力，以及分析问题、解决问题的能力.

教学重点

用五点法作正弦函数的图像.

教学难点

用正弦线作正弦函数的图像.

教学方法

为了以学生发展为本，遵循学生的认知规律，体现循序渐进与启发式的教学原则，本节课主要采用由一般到具体，由局部到整体的教学方法，用计算机作图等方式提高学生的直观想象能力与观察能力，并通过问题启发学生思考.

教学过程

课题引入：

前面我们学习了角的概念的推广及其度量，了解到角在弧度制下，每一个实数都对应着一个角. 学习了三角函数、单位圆、正弦线和余弦线的定义. 学会了求任意角的三角函数值，掌握了特殊角的三角函数值.

在第一册教材中，我们学习了二次函数、幂函数、指数函数、对数函数等，并通过函数的图像，学习了函数的性质，那么，正弦、余弦、正切是否也是函数？如果是，它们的图像是什么样子的，又有哪些性质呢？

一、复习提问

1. 函数的定义；

2. 单位圆的定义；

3. 在单位圆上作出$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$的正弦线.

二、讲授新课

1. 正弦函数的概念：

师问：实数集与角的集合之间可以建立一一对应关系，而一个确定的角又对应着唯一确定的正弦值．你能根据函数的定义，给出正弦函数的定义吗？（学生思考，让学生尝试回答．）

教师纠正，写出正弦函数的定义：任意给定一个实数 x，有唯一确定的值 $\sin x$ 与之对应，由这个对应法则所确定的函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数．

师问：正弦函数的定义域是什么？（学生思考，学生回答．）

2. 作正弦函数的图像：

师问：正弦函数的图像是什么样的？（学生思考，小组讨论，个别小组回答．）

教师给出答案，并用几何画板演示．

师问：我们在黑板上如何作出正弦函数的图像呢？

教师讲解演示，用正弦线作一个周期内的正弦函数的图像．

第 1 步：平分单位圆．在平面直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆，从这个圆与 x 轴的交点 A 起把圆分成 12 等份（份数越多，作出的图像越精确）．

第 2 步：作出各角的正弦线．过圆上的 12 个分点分别作 x 轴的垂线，得到 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π 对应的正弦线．

第 3 步：平分 x 轴．教师在 x 轴上标出 2π 的位置，并强调，取 $2\pi\approx6$．

师问：$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，$\frac{11\pi}{6}$在哪里？（小组讨论，让小组抢答，分别在 x 轴上标出$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，$\frac{11\pi}{6}$的位置．）

第 4 步：平移正弦线．把角 x 的正弦线向右平行移动，使正弦线的起点与 x 轴上的点 x 重合，如将角$\frac{\pi}{6}$的正弦线移动到 x 轴上$\frac{\pi}{6}$的位置．

教师提示，其余角的正弦线应如何移动，引导学生齐答，共同完成．

第 5 步：连线．用光滑曲线把这些正弦线的终点连接起来，即可得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像．

教师强调，需用光滑的曲线连接，而不是线段．

第 6 步：平移．

由诱导公式 $\sin(x+k\cdot2\pi)=\sin x$（$k\in\mathbf{Z}$）得，函数 $y=\sin x$ 在 $[-2\pi,\ 0]$，$[2\pi,\ 4\pi]$，$[4\pi,\ 6\pi]$ 上的图像与在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图像形状完全相同，只是位置不同．因此，我们把函数 $y=\sin x$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图像，沿 x 轴分别向左、向右平移

2π，4π，…，即可得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，如图 1 所示.

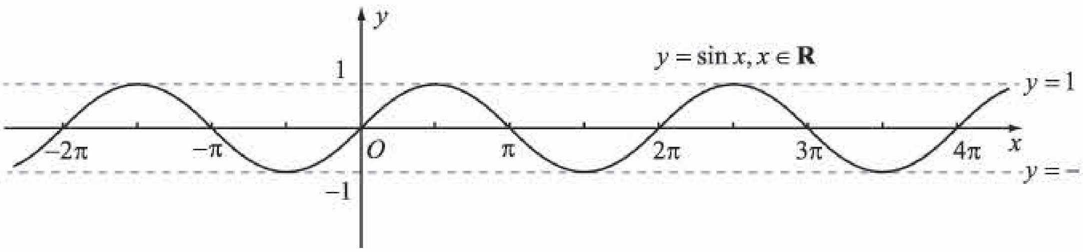


图 1

3. 五点法作图：

师引导：观察 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像，最高点是哪个？最低点是哪个？图像与 x 轴有几个交点？分别是什么？（学生思考，小组讨论，抢答. 教师和其余同学纠正.）

师问：在 $[0,\ 2\pi]$ 这一区间上，哪几个点对图像的形状起着关键的作用？有几个？（学生思考，回答.）

师讲解：在精确度要求不高的情况下，我们常常先描出这关键的五个点，然后用平滑的曲线将它们连接起来，这种作图方法称为五点法. 五点法是常用的作正弦函数图像的方法.

师问：在用五点法作正弦函数的图像时，各个点间的部分是线段吗？（学生回答，教师强调图像的特点.）

三、例题精讲

例 作出下列函数的图像：

(1) $y=1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$；

(2) $y=-\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$.

解：(1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图，得到函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像，如图 2 所示.

师问：$y=1+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 和 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像有什么关系？（学生思考，一起回答，教师总结.）

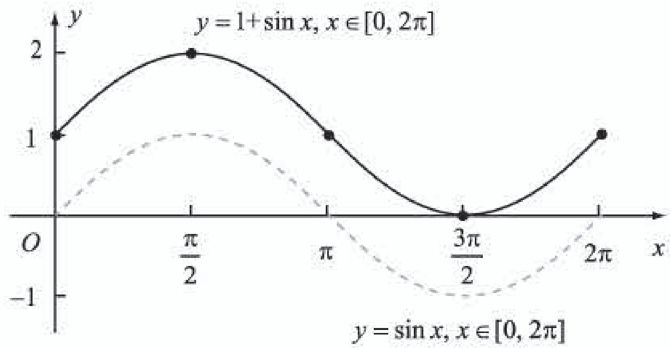


图 2

（2）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=-\sin x$	0	-1	0	1	0

描点作图，得到函数 $y=-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如图 3 所示.

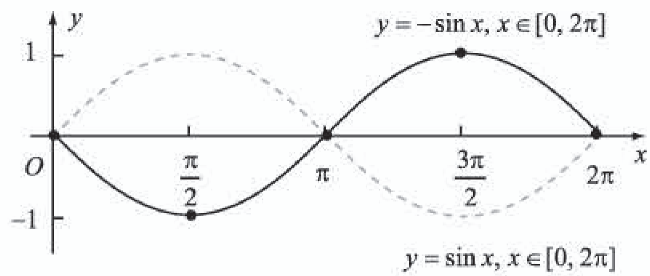


图 3

师问：$y=-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 和 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像有什么关系？（学生思考，一起回答，教师总结.）

四、课堂练习

练习 7.5.1

作出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的图像：

（1）$y=2+\sin x$；　　（2）$y=2\sin x$.

（组织学生到黑板上练习，之后，教师和同学进行讲评.）

五、课堂小结

师问：本堂课，我们学习了哪些知识？（小组讨论，抢答，教师和同学一起讲评、总结.）

师问：本节课，哪个小组表现最佳？哪些同学表现最佳？（教师和同学共同评选出本节课的最佳小组和同学.）

六、布置作业

1. 预习作业：正弦函数的性质

2. 练习 7.5.1　1.（3）（4）

七、板书设计

7.5.1　正弦函数的图像和性质（一）	
1. 正弦函数的概念	**3.** 五点法作图
2. 正弦函数的图像： 单位圆 正弦线	**4.** 例题 1

习题答案、提示或解答

练习 7.1.1

1.（1）错误；　（2）错误；　（3）正确；　（4）错误；　*（5）错误.

2. $-90°$，$-1\,080°$.

3. 略.

***4.**（1）$\{x|x=45°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，第一象限角；

（2）$\{x|x=-50°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，第四象限角；

（3）$\{x|x=-135°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，第三象限角.

***5.**（1）315°，第四象限角；　（2）40°，第一象限角；

（3）240°，第三象限角；　（4）150°，第二象限角.

***6.**

	角的集合
第一象限角	$\{x|k\cdot 360°<x<90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第二象限角	$\{x|90°+k\cdot 360°<x<180°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第三象限角	$\{x|180°+k\cdot 360°<x<270°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第四象限角	$\{x|270°+k\cdot 360°<x<360°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

***7.** 提示：在 $[0°,\ 360°)$ 内，终边在 x 轴上的角有两个，即 0°和 180°，与这两个角终边相同的角组成的集合分别为

$$S_1=\{x|x=0°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{x|x=2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$
$$S_2=\{x|x=180°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{x|x=(2k+1)\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\},$$

所以终边在 x 轴上的角的集合为

$$\begin{aligned}S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{x \mid x = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{x \mid x = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{x \mid x = k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

同样地，可以得出终边在 y 轴上的角的集合为 $\{x \mid x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

练习 7.1.2

1. (1) $\frac{3\pi}{4}$；　(2) 6π；　(3) $-\frac{3\pi}{2}$；　(4) $-\frac{11\pi}{6}$.

2. (1) 60°；　(2) -90°；　(3) 150°；　(4) -120°.

3. (1) 57.30°，171.89°，297.94°.　(2) 1.45，2.41，4.85.

4. 60°，1.05.

练习 7.2

1. (1) $\frac{1}{2}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\sqrt{3}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；$-\frac{\sqrt{2}}{2}$；-1

(3) $\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$　(4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

2.

角 α	角度	0°	90°	180°	270°	360°
	弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$		0	不存在	0	不存在	0

3. (1) α 是第一象限角. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$，$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) α 是第二象限角. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha = -1$.

(3) α 是第三象限角. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$，$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$，$\tan\alpha = \frac{4}{3}$.

(4) α 是第四象限角. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\alpha = -\sqrt{3}$.

4. (1) 7；　(2) 4.

5. (1) 0.35；　(2) 0.97；　(3) -1.73；　(4) 0.71.

6. (1) 因为$-\frac{\pi}{3}$是第四象限角，所以$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$；

(2) 因为$260°$是第三象限角，所以$\cos 260°<0$；

(3) 因为$-930°=150°-3\times360°$，所以$-930°$是第二象限角，$\tan(-930°)<0$；

(4) 因为$\frac{15\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+4\pi$，所以$\frac{15\pi}{4}$是第四象限角，$\cos\frac{15\pi}{4}>0$.

7. (1) 第四象限角；　(2) 第三象限角；

(3) 第二或第三象限角；　(4) 第一或第三象限角.

练习 7.3

1. (1) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

(2) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(4) $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$. 当$\alpha$是第一象限角时，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$；

当α是第四象限角时，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

2. (1) 2；　(2) $\frac{4}{15}$；　(3) $\frac{8}{17}$.

练习 7.4

1. (1) 1　(2) -1　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\frac{1}{2}$

(5) 1　(6) $-\frac{1}{2}$　(7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(3) $-\sqrt{3}$；　(4) 0；

(5) $-\frac{1}{2}$；　(6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 略.

***4.** (1) 1；　(2) $\sin\alpha$.

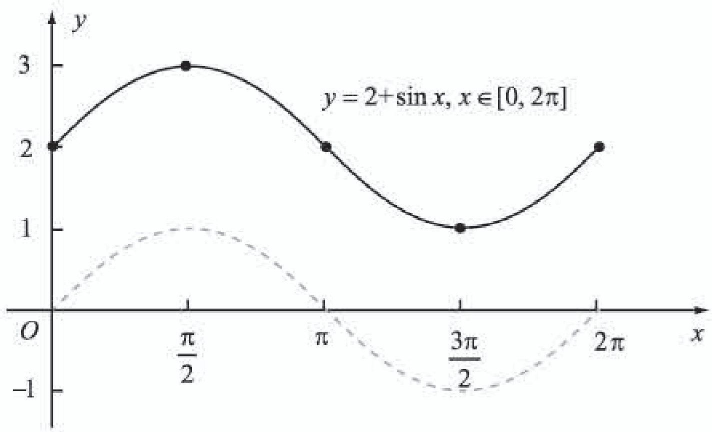
***5.** $\frac{17}{23}$.

练习 7.5.1

*1. (1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2+\sin x$	2	3	2	1	2

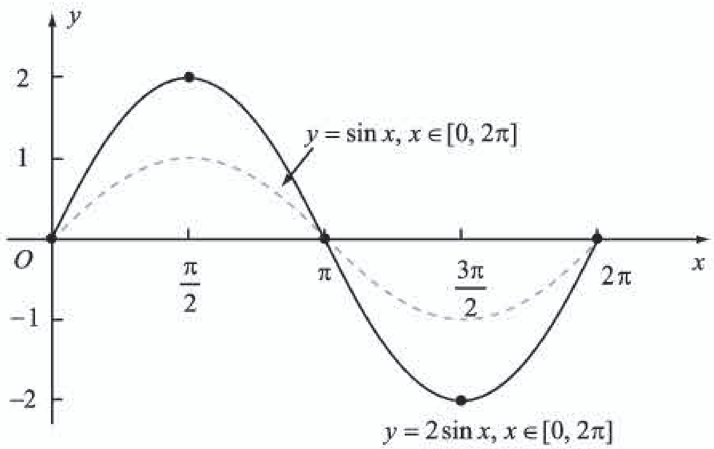
描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=2+\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像，如下图所示.



(2) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0

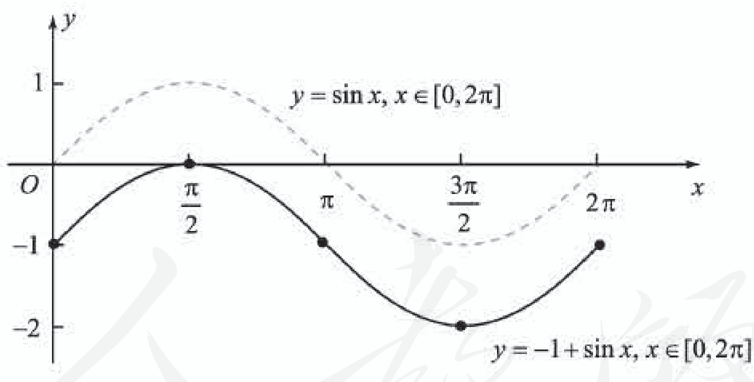
描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=2\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图像，如下图所示（见下页）.



（3）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=-1+\sin x$	-1	0	-1	-2	-1

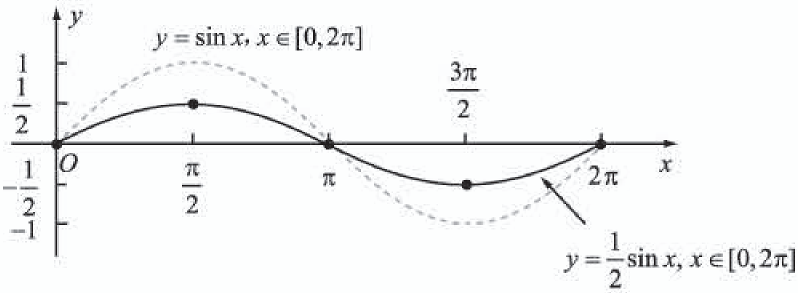
描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=-1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如下图所示.



（4）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如下图所示.



*2. (1) 当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=4$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=2$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

函数的周期 $T=2\pi$.

(2) 当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\max}=2$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

当 $\sin x=1$ 时，$y_{\min}=-2$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

函数的周期 $T=2\pi$.

(3) 当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=1$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=-3$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

函数的周期 $T=2\pi$.

(4) 当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\max}=5$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

当 $\sin x=1$ 时，$y_{\min}=1$，此时 x 的集合是 $\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

函数的周期 $T=2\pi$.

3. (1) $\sin 250°>\sin 260°$；　(2) $\sin 310°<\sin 326°$；

(3) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$；　(4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)<\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$.

练习 7.5.2

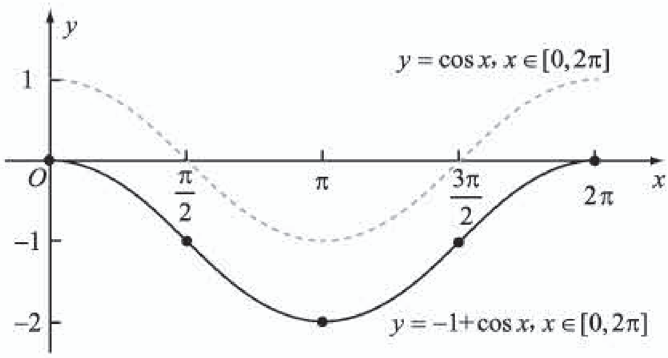
*1. (1) $y_{\max}=4$，$y_{\min}=2$，$T=2\pi$；　(2) $y_{\max}=2$，$y_{\min}=-2$，$T=2\pi$；

(3) $y_{\max}=4$，$y_{\min}=2$，$T=2\pi$；　(4) $y_{\max}=-\frac{1}{2}$，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，$T=2\pi$.

*2. (1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=-1+\cos x$	0	-1	-2	-1	0

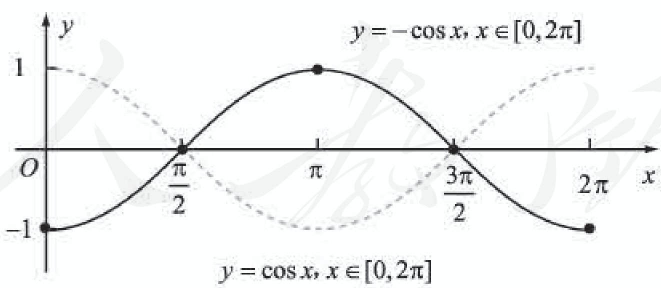
描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=-1+\cos x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图像，如下图所示.



(2) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点，并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=-\cos x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图像，如下图所示.



*3. (1) $\cos 125^\circ>\cos 155^\circ$； (2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)<\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$；

(3) $\cos 515^\circ>\cos 535^\circ$； (4) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)>\cos\left(-\frac{14\pi}{9}\right)$.

*4. 函数 $y=2\cos x$ 在区间 $[0，\pi]$ 上，从 2 减小到 -2，是减函数；在区间 $[\pi，$

$2\pi]$ 上，从 -2 增大到 2，是增函数.

练习 7.6

*1. (1) $y_{\max}=\frac{3}{4}$，$y_{\min}=-\frac{3}{4}$，$T=2\pi$；(2) $y_{\max}=8$，$y_{\min}=-8$，$T=\pi$；

(3) $y_{\max}=3$，$y_{\min}=-3$，$T=2\pi$；　　(4) $y_{\max}=5$，$y_{\min}=-5$，$T=8\pi$.

*2. 略.

*3. 可以先将函数 $y=\sin x$ 的图像沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再将图像上各点的纵坐标变为原来的 2 倍（横坐标不变），即可得到函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像.

*4. 可以先将函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像；再将函数 $y=\sin 2x$ 的图像上所有点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变），得到函数 $y=3\sin 2x$ 的图像；然后将函数 $y=3\sin 2x$ 的图像沿 x 轴向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，即可得到函数 $y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$的图像，也就是函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像.

*5. (1) 函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

(2) 当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$) 时，即当

$$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}$$

时，函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$单调递增，所以函数的单调增区间是$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

练习 7.7

1. (1) 0.85；　(2) 1.94；　(3) -0.98.

*2. (1) $205.6°$，$334.4°$；　(2) $80.4°$，$-80.4°$.

*3. (1) $210°$，$330°$；　(2) $45°$，$315°$.

*4. 1.89.

习题七

1. (1) 第一象限角；　(2) 第二象限角；

(3) 第一象限角；　(4) 第三象限角.

图略.

2. $11.25°$，0.20.

3. （1）α 是第四象限角. $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

（2）α 是第二象限角. $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-2$.

4. （1）负号；　　（2）负号；　　（3）负号.

5. 若 α 是三角形的一个内角，则 α 是第一或第二象限角，或是终边在 y 轴正半轴上的角，所以 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 可能取负值.

6. （1）$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

（2）$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

（3）当 α 是第三象限角时，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

当 α 是第四象限角时，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（4）$\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{17}}{17}$.

7. （1）（方法一）$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=3$.

（方法二）$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-\cos\alpha}=3$.

（2）由$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2,\end{cases}$ 可得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.

（3）$\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha=\frac{2}{5}$.

8. （1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　（2）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　（3）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

***9.** 略.

***10.** （1）当 $x\in\left\{x\,|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\max}=6$；

当 $x\in\left\{x\,|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\min}=-4$.

（2）当 $x\in\{x\,|\,x=2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\max}=\frac{5}{2}$；

当 $x\in\{x\,|\,x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\min}=\frac{3}{2}$.

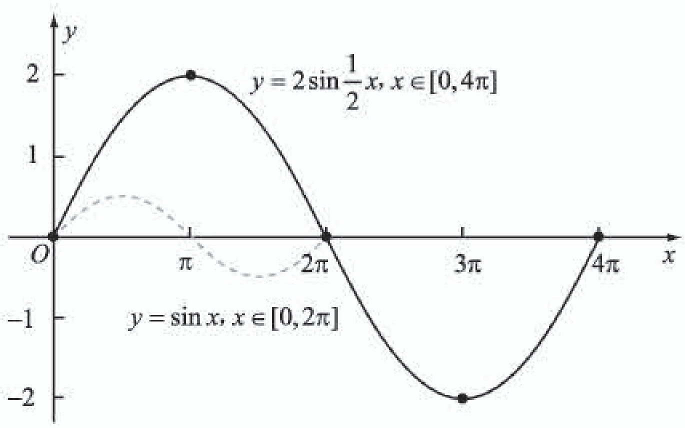
11. (1) $\sin 100^\circ > \sin 121^\circ$;　　(2) $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right) < \sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$;

*(3) $\cos 600^\circ < \cos(-612^\circ)$;　　*(4) $\cos\frac{43\pi}{10} > \cos\frac{47\pi}{9}$.

***12.** (1) 列表.

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=2\sin\frac{1}{2}x$	0	2	0	-2	0

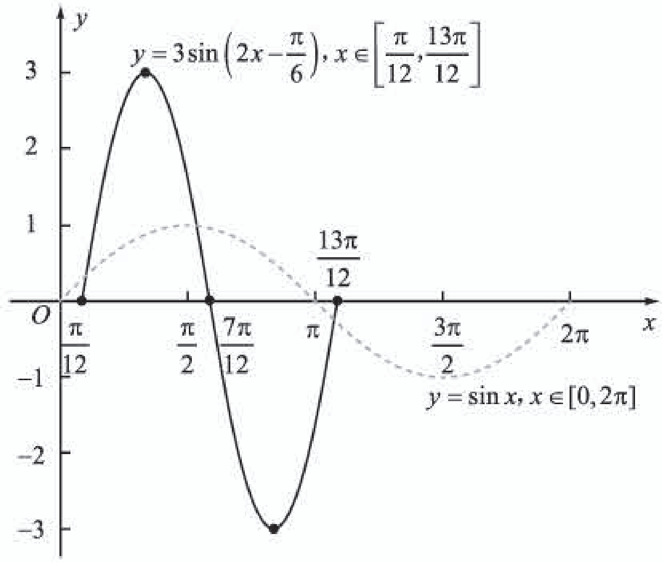
描点作图，可以得到函数 $y=2\sin\frac{1}{2}x$，$x\in[0, 4\pi]$ 的图像，如下图所示.



(2) 列表.

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图，可以得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right]$的图像，如下图所示（见下页）.



*13. 可先将函数 $y=\sin x$ 的图像上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像；再将函数 $y=\sin 2x$ 的图像沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，得到函数 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$的图像，即函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像；之后将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像上各点的纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变），即可得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像.

*14. （1）当 $x\in\left\{x\mid x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{18},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\max}=4$；

当 $x\in\left\{x\mid x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{18},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\min}=-4$.

（2）当 $x\in\left\{x\mid x=4k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\max}=\frac{1}{2}$；

当 $x\in\left\{x\mid x=4k\pi-\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\min}=-\frac{1}{2}$.

15. （1）0；（2）$\frac{5\pi}{6}$；（3）$-\frac{\pi}{4}$.

16. （1）0.24；（2）2.14；（3）0.98.

*17. （1）$-20.27°$，$-159.73°$；（2）$-70.53°$，$70.53°$.

*18. （1）函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，因为函数的图像过点（0，1），所以 $2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2) 因为函数 $y=\sin x$ 的单调增区间是$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，当

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}$$

时，解得

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi，k\in\mathbf{Z}.$$

所以函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的单调增区间是$\left[k\pi-\frac{\pi}{3}，k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

***19.** (1) 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$；

(2) 因为 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$，又 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以$\sqrt{2}\sin\alpha=1$，即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，注意到 $0<\alpha<\pi$，故 $\alpha=\frac{\pi}{4}$或 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

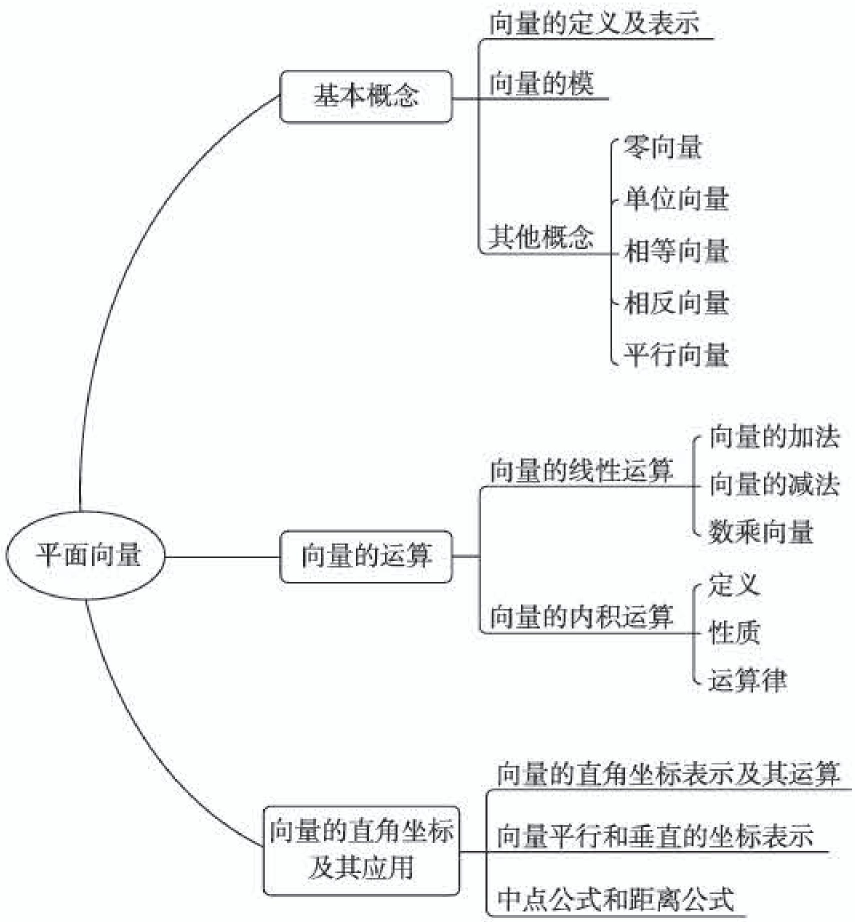
第八章
平面向量

思想火花

数学发明创造的动力不是推理，而是想象力的发挥.

——德·摩根

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解向量及有关概念，会用有向线段表示向量.

2. 了解相等向量、相反向量、单位向量、零向量的含义.

3. 会进行向量的加法、减法和数乘运算，并理解其几何意义.

4. 了解平行向量的概念及平行向量基本定理.

5. 了解向量内积的定义，会求两个向量的内积，了解平面向量内积的性质.

6. 了解平面向量的直角坐标表示，会进行平面向量的直角坐标运算.

7. 能根据两个向量的坐标判断它们是否平行或垂直.

8. 掌握中点公式和距离公式.

（二）发展要求

1. 掌握平行向量基本定理在判断平行问题中的应用.

2. 能根据内积的性质判断两个向量是否平行或垂直.

3. 会求两个向量的夹角.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：向量的概念，向量的线性运算及内积运算，平面向量的直角坐标运算.

本章从物理背景和几何背景入手，抽象出向量的概念，介绍了向量的模、相等向量等相关概念及向量的几何表示方法.

关于向量的线性运算，教材首先研究了向量加法的三角形法则、平行四边形法则及运算律，接着通过向量加法引出向量的减法，并把向量的加法和减法统一起来，之后通过向量加法引出数乘向量，并给出相应的运算律.

关于向量的内积运算，教材通过物理学中“功”的概念引出，并给出了运算律及内积的性质，为解决有关向量的长度、向量的垂直关系以及向量之间夹角等问题提供了方便.

教材通过具体例子引出向量的直角坐标表示，建立了平面向量与直角坐标的对应关系，然后给出了向量的加法、减法、数乘向量及向量内积的坐标运算，为用“数”的运算处理“形”的问题搭起了桥梁，最后推导出平面直角坐标系中两向量平行和垂直的坐标表示、中点公式和距离公式等.

向量是近代数学中较为重要和基本的数学概念之一，它既是代数的对象，又是几何的对象. 作为代数对象，向量可以运算，它有自己独特的运算结构和系统，学习向量有助于发展学生对“数、量和运算”的认识. 作为几何对象，向量有方向，可以刻画直线、平面、切线等；向量也有大小，可以表示长度、面积、体积等，它从数学机械化的角度提供了一种认识图形的新方法.

本章的重点是：向量的概念，向量的几何表示和直角坐标表示，向量的线性运算，向量的内积运算及性质.

本章的难点是：向量的概念及表示，向量运算法则的理解和应用.

本章的概念较多，且向量又不同于数量，为了便于教学，以下教学建议可供参考：

1. 向量概念的教学应从物理背景和几何背景入手，物理背景可以是力、位移、速度等概念，几何背景是有向线段. 了解这些物理背景和几何背景，对于学生理解向量的概念和运用向量解决实际问题都是十分重要的.

在教学中，还可以利用向量知识来解释一些客观现象，比如，“逆水行舟，不进

则退”等，这有助于学生认识向量在实际问题中的应用，学会用数学思维方式去观察、分析现实世界，发展数学的应用意识.

2. 渗透类比的数学思想. 向量与以往学过的数量既有区别又有联系. 在教学中，可以通过类比的方式，让学生体会向量与数量在概念、运算体系、处理方法等方面的区别与联系. 通过类比，加深学生对向量概念的认识，减少或防止负迁移的产生. 这种类比还可以打开学生研究向量问题的思路，同时能使向量的学习找到合适的固着点.

3. 向量集数形于一身，向量的大小反映了向量“数”的特征，方向反映了向量“形”的特征，它本身具有的代数和几何形式的双重特点是数学中数形结合思想的典型体现. 在教学中要及时引导学生捕捉知识与问题的数形信息，提示数与形的内在联系与转换方法，帮助学生养成“遇数思形”“以形助数”的良好思维习惯，从而加深对知识的理解. 比如在处理有关长度、夹角、平行、垂直等问题时，运用向量知识可以使问题直观化、符号化、数量化，从而把定性研究转化为定量研究.

本章教学约需 17 课时，具体分配如下（仅供参考）：

8.1　向量的概念	约 2 课时
8.2　向量的线性运算	
8.2.1　向量的加法	约 1 课时
8.2.2　向量的减法	约 1 课时
8.2.3　数乘向量	约 2 课时
8.3　向量的内积	约 2 课时
8.4　平面向量的直角坐标及其应用	
8.4.1　平面向量的直角坐标及其运算	约 3 课时
8.4.2　平面向量平行和垂直的坐标表示	约 2 课时
8.4.3　中点公式和距离公式	约 2 课时
小结与复习	约 2 课时

8.1　向量的概念

1. 本节的主要内容有向量的概念、有向线段、向量的表示、零向量、单位向量、相等向量、平行向量（共线向量）等.

2. 本节的教学要求是：了解向量的有关概念，会用有向线段表示向量，了解相等向量、单位向量、零向量、平行向量的含义. 重点是向量的概念及几何表示，难点是向量的概念.

3. 在本节教学中，教师应展现向量从不同的物理情境到数学概念的抽象过程，

通过力、位移、速度等典型实例，引导学生辨析归纳出这些量的共同特征（既有大小又有方向），引导学生抽象概括出向量的概念，重点说明向量与数量的区别.

4. 本节要重视用联系的观点、类比的方法组织教学. 学生与本节内容相关的已有经验有：数的抽象过程、实数的绝对值、数的相等、0 和 1 的特殊性、线段的长度、平行直线等，这些将为学生自觉、有序、有效地认知向量概念提供固着点. 具体教学时，可通过类比数的概念获得向量的概念，类比直线（段）的基本关系认识向量的基本关系，类比数的相等定义向量的相等，类比 0 和 1 定义零向量和单位向量，类比线段平行或共线定义平行向量（共线向量），等等.

5. 两个大小相等、方向相同的向量称为相等向量. 对于一个向量，只要不改变它的大小和方向，是可以任意平移的，这就是我们常说的自由向量. 因此，我们用有向线段表示向量时，可以任意选取有向线段的起点，这为以后用向量处理几何问题带来方便.

6. 向量和实数的区别：向量是既有大小又有方向的量，两个向量是不能比较大小的，所以“$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$”是没有意义的；而向量的模是非负实数，可以比较大小，所以“$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$”有意义.

7. 向量的表示方法分为几何表示和字母表示. 几何表示为向量处理几何问题奠定了基础，而字母表示则为向量的运算提供了方便，因此，这两种表示都要求学生掌握. 用一个字母表示向量时，教材印刷时用黑体小写字母如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等来表示，在手写时相应表示为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等，注意实数 0 和向量 $\boldsymbol{0}$（手写时应该用 $\vec{0}$ 来表示）是两个不同的量. 学生在书写向量时，经常忘记箭头符号，教师应强调正确的书写方式.

8. 关于例题的教学，注意引导学生从相等向量和平行向量的概念进行分析.

8.2　向量的线性运算

8.2.1　向量的加法

1. 本节的主要内容是向量加法的三角形法则、平行四边形法则及运算律.

2. 本节的教学要求是：通过实例掌握向量的加法运算，并理解其几何意义，掌握向量加法的运算律. 重点是向量的加法法则.

3. 向量的线性运算包括向量的加法、向量的减法、数乘向量，以及它们之间的混合运算. 在平面向量的线性运算中，向量的加法运算是最基本、最重要的运算，向量的减法运算、数乘向量都是以向量的加法运算为基础，都可以归结为向量的加法运算.

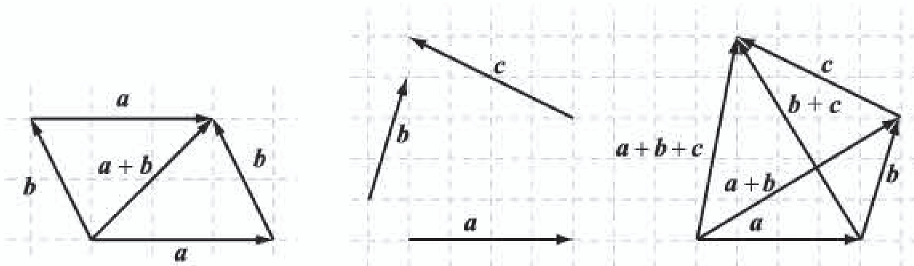
4. 向量的加法运算是以位移的合成为背景，教学时，教师可以引导学生从大小

和方向两个方面考虑，使学生体会向量运算与数的运算的区别和联系，有利于学生更好地把握向量加法的特点.

5. 向量的加法遵循三角形法则和平行四边形法则，向量加法的三角形法则和平行四边形法则实际上就是向量加法的几何意义，它们实质上是相同的. 对于两个非零共线向量，要注意如何作出它们的和向量.

6. 向量的几何属性为向量的教与学提供了便利，向量的线性运算宜采用几何作图的方式展开，教学时可让学生多作图，通过图形辨析各向量之间的关系是向量学习入门的重要途径.

7. 向量加法的运算律可以类比数的运算律. 学习向量加法的运算律时，教师可引导学生结合下图（1）（2）加以验证.



（1）　　　　　　　　　　（2）

8. 关于例题的教学，需要注意：

（1）例 1 是向量加法的作图题，教学中要注意对学生作图语言的训练.

例 1 中的第（1）题是通过三角形法则作图，可以引导学生再利用平行四边形法则作图，比较两种作法的不同之处；例 1 中的第（2）题给出了两向量同向时，和向量的作法，可以引导学生思考，两向量反向时，如何作出它们的和向量.

（2）例 2 中的向量是利用有向线段起点和终点字母表示的，可结合图形及运算律进行分析，从而总结用这种方法表示向量时，向量加法的运算规律.

（3）例 3 首先结合向量加法的三角形法则，作出两次位移的和向量. 向量有大小和方向，因此，教学时，要引导学生从大小和方向两方面分析.

8.2.2　向量的减法

1. 本节的主要内容是向量的减法运算及其几何意义，相反向量的概念.

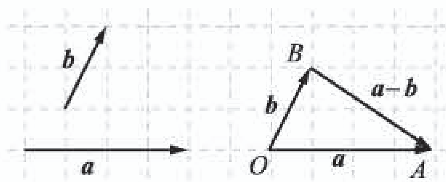
2. 本节的教学要求是：掌握向量的减法运算，理解其几何意义，理解相反向量的概念. 重点是向量的减法法则，难点是向量的减法法则和向量的加法法则的区别.

3. 关于向量的减法，通常有两种定义方法.

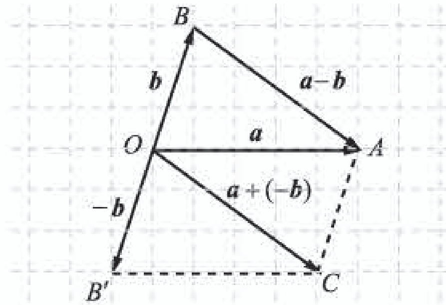
第一种方法是将向量的减法定义为向量加法的逆运算，即：如果 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{x}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其几何意义就是在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=$

$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（如下图（1）所示），则由向量加法的三角形法则得，$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

第二种方法是先定义相反向量，再将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量的和，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，如下图（2）所示. 求向量差的运算，就称为向量的减法.



（1）



（2）

比较向量减法的这两种定义，可以发现第一种定义更便于学生作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，因此，教材采用第一种方法定义了向量的减法.

4. 向量的减法是向量加法的逆运算，由向量加法的三角形法则可以得出向量减法的三角形法则. 在讲课过程中，可引导学生比较向量加法的三角形法则与向量减法的三角形法则的不同之处，总结规律，避免学生混淆.

5. 等式 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 表明，减去一个向量 $\boldsymbol{b}$ 等于加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量 $-\boldsymbol{b}$，这样就把向量的减法转化成向量的加法，使二者统一起来.

6. 例 4 目的是巩固向量的减法法则，例 5 是用两个已知的不平行向量表示几何图形中的其他向量，这是用向量解决几何问题的基础，教学中要加强对这类问题的练习.

8.2.3　数乘向量

1. 本节的主要内容是数乘向量及其运算律，平行向量基本定理.

2. 本节的教学要求是：通过实例掌握数乘向量，并理解其几何意义，掌握数乘向量的运算律，了解平行向量基本定理. 重点是数乘向量的定义、运算律及平行向量基本定理，难点是平行向量基本定理的应用.

3. 数乘向量可类比数与数的乘积进行教学. 本节教材先通过向量加法的运算，逐步引导出实数与向量的乘积运算，然后过渡到数乘向量的定义. 教学时要注意强调 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，大小为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向与 λ 的符号有关.

4. 数乘向量运算律与实数乘法的运算律类似，只是数乘向量的分配律，由于因子不同，分为第一分配律（即 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$）和第二分配律（即 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$）. 数乘向量运算律的证明有较大的难度，只要求学生理解并能运用即可. 例 6

即为数乘向量运算律的简单应用.

5. 教材没有证明平行向量基本定理，教学时，建议教师通过具体例子帮助学生理解定理的内容. 定理的应用是本节的难点，是解决几何中三点共线和两条直线平行问题的常用手段. 例如，不重合三点 A，B，C，如果已知 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$，那么可知 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，进而可知 A，B，C 三点共线.

6. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是指与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，通常记作 $\boldsymbol{a}_0$. 教学过程中可以让学生通过作图找出向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_0$ 的关系. 另外要提醒学生注意的是，向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量与任意单位向量的区别与联系.

7. 关于例题和习题的教学，需要注意：

(1) 例 7 通过作图使学生进一步理解数乘向量的几何意义，教学时要注意训练学生的作图语言.

(2) 例 8、例 9 及练习 8.2.3 中的第 3 题是平行向量基本定理的具体应用，属于发展要求，教师可根据学生实际掌握情况灵活处理.

(3) 练习 8.2.3 中的第 2 题一方面巩固了向量的线性运算，另一方面为向量的线性表示提供了直观的样例. 对于基底的概念不要求教师补充，避免增加难度.

8.3　向量的内积

1. 本节的主要内容是向量内积的定义、运算律及性质.

2. 本节的教学要求是：了解向量内积的定义和运算律，会求两个向量的内积，了解向量内积的性质及应用. 重点是内积的定义、运算律、性质及应用，难点是内积的概念.

3. 教材通过物理中“功”的问题引入向量的内积，体现了数学与其他学科的联系，通过此例让学生了解所学内容在实际生活中的具体运用.

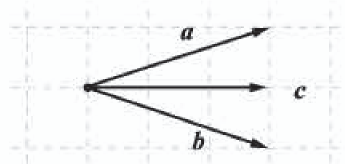
因为大部分中职学校不设物理课，学生只会计算力的方向与物体位移方向一致时，力对物体所做的功，所以教学中只需说明力与位移都是向量，而功是数量，启发学生联想到两个向量之间也存在着一种运算，从而理解引入向量内积运算的必要性即可.

4. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，两向量之间的实心圆点“$\cdot$”不能省略，也不能写为“$\times$”，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示外积，是一个向量. 书写时还要注意的是，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 中的 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 不能写成 $\boldsymbol{a}^2$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积的几何意义是，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的乘积，教师应该了解向量内积的几何意义.

5. 两个向量的内积是两向量间乘法的一种，它与实数乘法的概念、性质和运算律有联系也有区别，运算法则、运算律都要重新建立，这是教学的重点也是学生学习

的难点.

比如，实数乘法运算满足结合律 $(ab)c=a(bc)$，而向量的内积不满足结合律；实数乘法中，若 $c\neq 0$，则 $ac=bc\Rightarrow a=b$，而向量的内积不满足这种推出关系. 如右图所示，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 是成立的，但显然 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 不成立.



6. 向量的内积与距离、夹角有密切联系，用它可以解决有关距离、角度和垂直等几何问题.

7. 本节例题研究：

(1) 例 1 要求得出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值，是向量内积公式的应用，在讲课时，需注意复习特殊角的三角函数值. 讲解例 1 中的第 (3) 题时，应注意 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同和相反两种情况，要分类讨论.

(2) 例 2 中，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，这一形式与多项式的运算律相同，但实质上是向量内积的运算律的应用. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，显示了向量内积与向量的模之间的关系，由此可知，在计算向量的模时可以先计算向量与自身的内积，然后求算术平方根即可.

(3) 例 3 中需证明两向量垂直，例 4 要算出两向量的夹角，它们都是内积性质的应用，可根据学生基础有选择性地讲解.

8.4 平面向量的直角坐标及其应用

8.4.1 平面向量的直角坐标及其运算

1. 本节的主要内容是理解平面向量的坐标表示，掌握平面向量的坐标运算. 向量的坐标表示是向量的代数形式，它为用“数”的运算处理“形”的问题搭起了桥梁，使向量的运算完全代数化，提供了一种解决几何问题的方法.

2. 本节的重点是理解平面向量的坐标表示，掌握向量的坐标运算. 学生理解向量与坐标之间的对应关系时可能有些困难，由于向量无特定位置，可以规定表示它的有向线段的始点位置（不妨以坐标原点为始点），降低学生理解向量与坐标间对应关系的难度. 教学中应使学生明确，任意一个向量都与唯一的一组实数对相对应，并且向量的坐标与表示向量的有向线段的始点和终点的位置没有关系.

3. 在教学过程中可采用类比的教学方法，从平面上点的坐标入手，通过例子引出向量的坐标问题，这样便于学生接受并正确理解这一概念. 向量是数形结合的一个典范，通过讲解向量的坐标表示，促进学生对代数与几何之间关系的理解，使学生进

一步了解数形结合的思想，认识事物之间的相互联系. 在研究向量坐标运算及其简单应用时，教师应有意识地向学生渗透数形结合的思想.

4. 在本节的教学内容中，符号（x，y）在直角坐标系中就有了双重意义，它既可以表示一个固定的点，又可以表示一个向量，为了加以区分，在叙述中，一般称点（x，y）或向量（x，y），教师应注意让学生把点的坐标与向量的坐标区别开来.

（1）点 $A(x, y)$ 的坐标（x，y）表示点 A 在平面直角坐标系中的位置，$\boldsymbol{a}=(x, y)$ 的坐标（x，y）既表示向量的大小也表示向量的方向. 学生在学习过程中，常常混淆这两种坐标的表示，如 $A(x, y)$ 错写为 $A=(x, y)$，$\boldsymbol{a}=(x, y)$ 错写为 $\boldsymbol{a}(x, y)$. 另外，对于 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1, y_1)-(x_2, y_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2)$ 和 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 这两种情况，教师要引导学生正确理解，避免混淆.

（2）相等向量的坐标是相同的.

（3）当表示向量的有向线段的始点在原点时，平面向量的坐标与向量终点的坐标相同.

5. 向量内积的坐标表达式的推导：

如果 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，那么 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

因为涉及的知识点较多，推导难度较大，所以需要在引入新知识之前复习前面的有关知识，如向量的坐标表示、内积的性质和运算律等内容.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$ 这两个式子表明了向量是数与形的结合体，它们互相渗透、彼此作用. 引入向量内积的坐标表达式时，应向学生指出，对平面向量内积的研究不能仅仅停留在几何角度，还要寻求其坐标表示. 无论是向量的线性运算还是向量的内积运算，最终都可以归结为向量的坐标运算. 教学中教师要引导学生抓住这条线索，不断使学生的平面向量知识系统化、条理化，这样有利于学生知识体系的形成.

6. 向量内积的坐标运算对以后的数学学习是非常重要的，教师在教学中应向学生讲明. 判断两向量是否垂直、求向量的长度和夹角都是向量内积的坐标运算的具体应用.

7. 关于例题教学：

（1）例 1 中，将向量用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 来表示后，再要求学生写出向量的坐标，这样可以加深学生对向量坐标的理解. 在讲解时，应使学生明确任意一个向量都与唯一的一组实数对相对应.

（2）例 2 的目的是强化学生对坐标运算的掌握.

（3）对于例 3，可引导学生先找出平行四边形中的相等向量，再列出坐标的等量关系进行求解.

8.4.2　平面向量平行和垂直的坐标表示

1. 本节的主要内容是通过向量的坐标判断两个向量是否平行或垂直，以及向量平行和垂直的坐标表示.

2. 本节的重点是能够根据平面向量的坐标判断向量是否平行或垂直.

3. 在讲解向量平行的坐标表示时，可以在复习平行向量基本定理的基础上，利用相等向量坐标相同，引导学生自主探究向量平行的坐标表示，注意规定零向量与任意向量平行. 在讲解向量垂直的坐标表示时，可以先复习向量内积的重要性质及其坐标运算，为学生新知识的学习做准备，在此基础上，应充分发挥学生的主体作用，引导学生得到向量垂直的坐标表示.

4. 关于例题教学：

关于例 7，可以鼓励学生先作图示，以确定两个向量的垂直关系.

8.4.3　中点公式和距离公式

1. 本节课的主要内容是识记中点公式、向量长度的计算公式、距离公式，并应用公式解决相应的问题，了解由坐标求向量夹角的计算方法.

2. 通过线段中点的向量表达式得到中点公式，要求学生识记公式. 中点公式蕴含着对称的思想，在教学中教师要注意引导学生初步掌握这种思想，可以适当补充点关于坐标原点对称、关于 x 轴和 y 轴对称的情形.

3. 通过向量内积的性质引出向量长度的计算公式后，教材利用向量的坐标运算推导出了两点间的距离公式. 要求学生体会公式的证明过程，这些公式在以后的学习中会经常用到，教师要让学生熟练地使用. 结合向量内积的定义、向量的坐标表示和向量长度的计算公式，教师可引导学生分步求向量夹角，求向量夹角时，要注意向量夹角的范围.

4. 关于例题教学：

（1）例 8 是中点公式的应用.

（2）例 9 设计的目的之一是通过例题巩固向量长度的计算公式，目的之二是让学生了解 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 三者之间的大小关系. 教材没有给出如下结论：$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 教师在讲解例题过程中，可以根据学情组织学生进行探究学习，并结合平行四边形法则，得出此结论.

（3）例 10 是中点公式和距离公式的综合应用.

‖参考教案‖

8.2.3　数乘向量（一）

教学目标

1. 通过实例识记并掌握数乘向量的定义，理解数乘向量的几何意义.

2. 掌握数乘向量的运算律，熟练运用其进行运算.

3. 培养学生规范的作图习惯、数形结合的能力，向学生渗透类比的数学思想.

教学重点

数乘向量的定义以及运算律.

教学难点

数乘向量定义的理解，运用运算律进行向量线性运算.

教学方法

启发式教学法、讲练结合法、多媒体辅助教学法.

教学过程

一、复习回顾，引入新课

一架飞机从 A 地出发，向东飞行了 10 km 到达 P 地，继续向东飞行了 10 km 到达 Q 地，又继续向东飞行了 10 km 到达 B 地：

1. 求这架飞机的位移，并作图；

2. 如果这架飞机从 B 地返回 A 地，求这架飞机的位移，并作图.

教师引导学生在复习向量加法的同时，自主探索、发现新知识，引出课题.

二、讲授新课

1. 数乘向量的定义

一般地，实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为数乘向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）的长度与方向规定如下：

（1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

（2）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

显然 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

教师结合上述位移的作图，强调数乘向量的结果是一个向量，紧扣向量的两要素，引导学生发现它的大小和方向与 λ 有关，尤其是在数乘向量方向的讨论过程中，引导学生体会分类讨论的思想，为理解数乘向量的几何意义做铺垫.

实数与向量可以进行数乘运算，但不能进行加减运算，$\lambda-\boldsymbol{a}$，$\lambda+\boldsymbol{a}$ 没有意义.

课堂练习：

练习一：任作向量 $\boldsymbol{a}$，作出向量 $-2\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

学生参考引入课题时位移的作图，进一步体会数乘向量的大小和方向与 λ 的关系. 学生自主讨论完成练习一，教师巡视指导.

例 1 如图 1 所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出向量$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解：在平面内任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，作$\overrightarrow{AC}=3\boldsymbol{b}$，如图 2 所示. 则

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}.$$

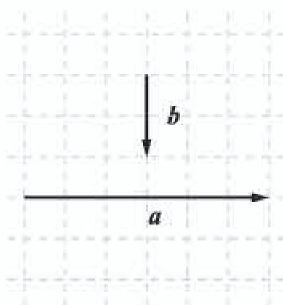


图 1

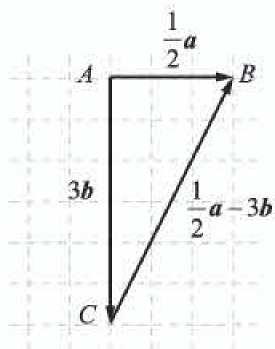


图 2

2. 数乘向量的几何意义

教师通过练习一以及例 1，一方面巩固了数乘向量的定义和向量减法的运算法则，另一方面引出了数乘向量的几何意义，并利用多媒体动画演示，加深了学生对数乘向量的几何意义的理解.

数乘向量的几何意义就是把向量沿着它的方向或反方向放大或缩小. 如练习一中，$-2\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的反方向，长度放大到原来的 2 倍；$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，长度缩小到原来的$\frac{1}{2}$；$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的反方向，长度缩小到原来的$\frac{1}{2}$.

要求学生从方向和大小两个要素，分别口述完成练习一中三个数乘向量的几何意义.

3. 数乘向量的运算律

教师先设置问题，引发学生思考，借此作图验证数乘向量的运算律.

问题 1：飞机甲向东飞了 20 km 后，又继续向东飞了 30 km；飞机乙向东飞了 50 km. 若在纸上以 1 cm 线段表示 10 km 的实际长度，试用有向线段分别表示出这两架飞机的位移，并进行比较.

问题 2：如图 3 所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，求作 $2(3\boldsymbol{a})$ 和 $6\boldsymbol{a}$.

图 3

可以验证，数乘向量满足下列运算律：

设 λ、$\mu\in\mathbf{R}$，则有

（1）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$（向量对实数的分配律）；

（2）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$（实数的结合律）；

（3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（实数对向量的分配律）.

特别地，我们有

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a});$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}.$$

教师分别通过作图来分析问题 1 和问题 2 中两个向量的关系，得到向量对实数的分配律与实数的结合律. 通过作图验证的方法，引导学生积极思考、发现数乘向量运算与多项式运算的类似之处，由特殊到一般，尝试对数乘向量的运算律进行概括，得到结论.

向量的加法、减法和数乘向量的综合运算，通常称为向量的线性运算.

向量线性运算的结果仍是一个向量，与代数多项式的运算类似，遵循括号优先的原则，主要方式是"合并同类项""提取公因式"等，但这里的"同类项""公因式"指的是向量，而实数可以看成向量的系数.

例 2　计算：

（1）$(-2)\times3\boldsymbol{a}$；

（2）$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解：（1）原式$=(-2\times3)\boldsymbol{a}=-6\boldsymbol{a}$.

（2）原式$=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2-3)\boldsymbol{a}+(2+3)\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

课堂练习：

练习二：练习 8.2.3 中的第 1 题.

有实数运算作基础，学生容易解决这部分问题，教师在教学中提醒学生注意：不要漏掉向量箭头符号，计算时要细心.

通过例 2 及课堂练习，学生既能发现数乘运算与多项式运算的相似之处，又能注意到它与多项式运算的不同，从而较好地掌握数乘向量的运算律.

三、课堂小结

教师和学生对本节课所学内容进行总结，这有利于学生系统地掌握本节课的内容，同时，教师有针对性地对学生易出错的地方进行强调，总结时可参照下页给出的方式进行.

数乘向量		
数乘向量的基本概念	定义	
	长度	
	方向	
数乘向量的几何意义		
数乘向量的运算律	结合律	
	分配律	
向量的线性运算		注意向量的书写方式，类比代数多项式的运算

四、课外作业

练习 8.2.3 中的第 2 题.

五、板书设计

8.2.3　数乘向量（一）

1. 数乘向量的定义

例 1

2. 数乘向量的几何意义

3. 数乘向量的运算律

例 2

4. 小结

‖习题答案、提示或解答‖

练习 8.1

1. 略.

2. （1）相同；　（2）不相同.

3. （1）$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{FC}$；　（2）$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$.

练习 8.2.1

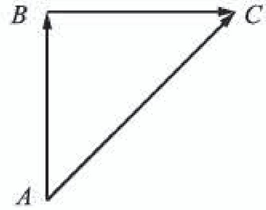
1. （1）$\overrightarrow{MN}$；　（2）$\mathbf{0}$；　（3）$\overrightarrow{AD}$；　（4）$\overrightarrow{A_1A_4}$.

2. 略.

3. 略.

4. （1）如图，$\overrightarrow{AB}$表示小船在静水中的速度，$\overrightarrow{BC}$表示水速，则$\overrightarrow{AC}$表示小船的实际航行速度.

（2）由题意知，$\angle ABC$ 是直角. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=10$，$|\overrightarrow{BC}|=10$，所以$\angle BAC=45°$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$.



（第 4 题）

因此，小船的实际航行速度的大小为 $10\sqrt{2}$ km/h，方向为东北方向.

练习 8.2.2

1. （1）$\overrightarrow{DB}$；　（2）$\overrightarrow{CA}$；　（3）$\overrightarrow{BA}$；　（4）$\overrightarrow{DA}$.

2. 略.

3. （1）$\mathbf{0}$；　（2）$\overrightarrow{AB}$；　（3）$\overrightarrow{AC}$；　（4）$\mathbf{0}$.

练习 8.2.3

1. （1）$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　（2）$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；　（3）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

2. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

***3.** 因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{b},$$

所以 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$，故 A，B，C 三点共线.

练习 8.3

1. （1）0；　（2）-32；　（3）4；　（4）$-30\sqrt{3}$.

2. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=3^2-3\times4\times\cos 60°-6\times4^2=-93$.

3. $2\sqrt{13}$.

***4.** （1）$60°$；　（2）$120°$；　（3）$180°$；　（4）$90°$.

***5.** 因为

$$(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=2\times1\times1\times\cos 60°-1=0,$$

所以 $(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\perp\boldsymbol{m}$.

练习 8.4.1

1. 略.

2. $x=3$，$y=-1$.

3. （1）$(7,\ 1)$；　（2）$(-3,\ 5)$；
（3）$(16,\ 5)$；　（4）-23.

4. （1）$\overrightarrow{AB}=(9,\ -6)$，$\overrightarrow{BA}=(-9,\ 6)$；
（2）$\overrightarrow{AB}=(-5,\ 12)$，$\overrightarrow{BA}=(5,\ -12)$；
（3）$\overrightarrow{AB}=(-3,\ -7)$，$\overrightarrow{BA}=(3,\ 7)$；
（4）$\overrightarrow{AB}=(-8,\ -15)$，$\overrightarrow{BA}=(8,\ 15)$.

5. $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$.

6. $(2,\ 1)$.

练习 8.4.2

1. (1) 不平行; (2) 平行;

(3) 平行; (4) 平行.

2. 4.

3. -1.

4. 因为$\overrightarrow{AB}=(2,\ -6)$,$\overrightarrow{CD}=(-4,\ 12)$,又因为

$$2\times12-(-6)\times(-4)=0,$$

所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

5. (1) 垂直; (2) 垂直;

(3) 垂直; (4) 不垂直.

6. $\dfrac{2}{3}$.

7. $\overrightarrow{AB}=(-5,\ -2)$,$\overrightarrow{BC}=(2,\ -5)$,因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,$\triangle ABC$是直角三角形.

练习 8.4.3

1. (1) $\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$; (2) $\left(\dfrac{5}{2},\ -2\right)$;

(3) $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$; (4) $(-6,\ 7)$.

2. $(4,\ -1)$.

3. $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=-\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$.

4. (1) $\sqrt{10}$; (2) 13;

(3) 17; (4) $4\sqrt{2}$.

5. $(6,\ 0)$ 或 $(-2,\ 0)$.

***6.** (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$,$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{10}$,$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=1$,$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=0°$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=33$,$|\boldsymbol{a}|=13$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{33}{65}$,$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=59.49°$.

习题八

1. 略.

2. (1) $\overrightarrow{MN}$; (2) $\boldsymbol{0}$;

(3) $\overrightarrow{AN}$; (4) $\overrightarrow{MB}$.

3. (1) $-10\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$; (2) $-\boldsymbol{a}$;

(3) $\dfrac{5}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{3}\boldsymbol{b}$; (4) $8\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

4. $-6\sqrt{2}$.

5. (1) -6;　　(2) 15;

(3) -1;　　(4) $\sqrt{97}$.

6. 因为$\overrightarrow{AB}=(1, -3)$，$\overrightarrow{DC}=(1, -3)$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，四边形$ABCD$是平行四边形.

7. (1) 垂直;　　(2) 平行;

(3) 平行;　　(4) 垂直.

8. $a=12$，$b=-5$.

9. (1) $(-4, 11)$;　　(2) $(5, -12)$;

(3) -19;　　(4) $\sqrt{5}$.

10. (1) $\overrightarrow{AB}=(2, 0)$，$|\overrightarrow{AB}|=2$;　　(2) $\overrightarrow{AB}=(0, 6)$，$|\overrightarrow{AB}|=6$;

(3) $\overrightarrow{AB}=(12, 5)$，$|\overrightarrow{AB}|=13$;　　(4) $\overrightarrow{AB}=(3, 4)$，$|\overrightarrow{AB}|=5$.

11. $(-1, -1)$ 或 $(13, 13)$.

***12.** (1) 0;　　(2) π;

(3) $\frac{3\pi}{4}$;　　(4) $\frac{\pi}{2}$.

***13.** $\boldsymbol{b}=(4, 2)-2\boldsymbol{a}=(2, 0)$，$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

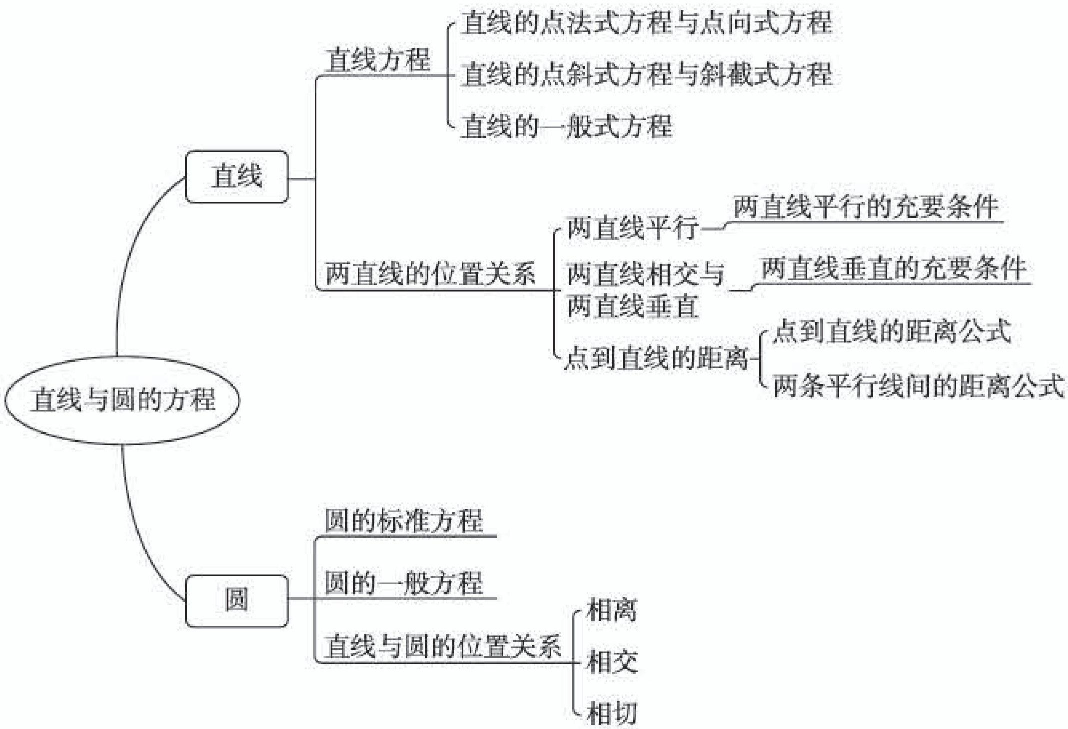
第九章
直线与圆的方程

思想火花

在数学中，我们发现真理的主要工具是归纳和模拟.

——拉普拉斯

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解直线的方向向量、法向量、倾斜角、斜率的含义.

2. 理解直线的点法式方程.

3. 掌握直线的点斜式和斜截式方程.

4. 理解直线的一般式方程，了解直线方程与二元一次方程的关系.

5. 理解两条直线平行、垂直的条件，会判断两条直线的位置关系.

6. 会求两条相交直线的交点坐标.

7. 了解点到直线的距离公式的推导过程，会利用公式求点到直线的距离.

8. 掌握圆的标准方程，理解圆的一般方程.

9. 会进行圆的标准方程与一般方程之间的互化.

（二）发展要求

1. 了解直线的点向式方程.

2. 了解不同形式的直线方程之间的内在关系.

3. 能灵活应用两条直线平行或垂直的条件解决有关问题.

4. 会求两条平行直线间的距离.

5. 会用待定系数法求圆的一般方程.

6. 理解直线与圆的三种位置关系，会用坐标法判断直线与圆的位置关系.

7. 能用直线与圆的方程解决一些简单的实际问题.

‖教材分析和教学建议‖

本章是平面解析几何的基础部分，通过本章的教学，使学生初步学会用解析法研究几何问题.

解析几何产生于17世纪初. 法国数学家笛卡儿和费马是解析几何的创始人，他们在平面内引进坐标，把平面上的点与实数对（x，y）建立起一一对应的关系，然后在点动成线的思想下，进一步将曲线与方程一一对应，从而通过方程来研究曲线. 解析几何的产生在数学史上是一重大进展，它用变量的观点研究曲线，使得数学的研究从以常量的观念为中心转变为以变量的观念为中心. 同时，它又将原来彼此独立发展的代数和几何通过坐标巧妙地结合在一起，开创了用代数方法研究几何问题的新思路，这种思想和方法对几何问题的研究产生了较大的推动作用，使人们彻底清楚了直线是一次曲线、圆锥曲线是二次曲线. 解析几何的产生还为数学的进一步发展——微积分的诞生创造了条件.

解析几何是数形结合的典范，而向量是研究数与形的有力工具. 我们在本章教材中将充分应用向量工具来处理问题.

本章内容共分五大节.

第一大节是“直线的方程”，这部分从一次函数及其图像入手，建立了直线方程的概念，然后抓住“一点和一个方向确定一条直线”这一主线，利用向量工具，推导了直线的点法式方程，继而得到了点向式方程和点斜式方程. 直线的法向量、方向向量和斜率都是描述方向的量，教材强调了这些概念之间的联系，使学生对直线的不同形式的方程能有一个整体的概念. 在导出直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为零）的同时，得出向量（A，B）是直线的一个法向量.

第二大节是“两条直线的位置关系”，主要利用数形结合的思想，通过严谨的证明，得出两条直线平行、垂直的充要条件.

第三大节是“点到直线的距离”，点到直线的距离公式可以运用勾股定理等知识来证明，还可以利用向量的知识来证明. 另外，由点到直线的距离公式可以导出两条平行线间的距离公式.

第四大节是“圆的方程”，介绍了圆的标准方程、一般方程，以及相关应用. 把圆的方程放在本章学习，是为以后进一步研究其他二次曲线打基础.

第五大节是“直线与圆的位置关系”，这一节重点介绍判定直线与圆的位置关系

的两种方法，为通过方程研究曲线的位置关系做好了铺垫.

直线与圆的方程是本章教学的重点.

建议教师在本章教学中注意以下几点：

（1）教师在教学时，不断地强调数形结合的数学思想，并结合学生所学专业，适当运用本章知识，解决一些实际问题.

（2）要求学生对公式进行灵活运用. 熟悉公式的推导过程能够加强对公式的记忆.

（3）在教学中要特别注意培养学生的计算能力. 解计算题既要求计算准确无误，又要求解题的规范化，以训练学生严谨的学习态度.

（4）要培养学生在解题时作图的习惯，使学生明确：正确地作出图形，不仅有助于理解题意、找到解题方法，而且能够大致判断计算结果是否正确.

本章教学约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

9.1　直线的方程	
9.1.1　直线的点法式方程与点向式方程	约 2 课时
9.1.2　直线的点斜式方程与斜截式方程	约 1 课时
9.1.3　直线的一般式方程	约 1 课时
9.2　两条直线的位置关系	
9.2.1　两条直线平行	约 2 课时
9.2.2　两条直线相交	约 1 课时
9.3　点到直线的距离	约 1 课时
9.4　圆的方程	
9.4.1　圆的标准方程	约 1 课时
9.4.2　圆的一般方程	约 2 课时
9.5　直线与圆的位置关系	约 1 课时
小结与复习	约 2 课时

9.1　直线的方程

9.1.1　直线的点法式方程与点向式方程

1. 本节的重点是在理解直线的方程与方程的直线的基础上，掌握直线的点法式方程和点向式方程，其中点向式方程属于发展要求. 难点是当方向向量平行于坐标轴时，即 v_1，v_2 中有一个为零的情况下，准确写出直线的方程. 方向向量和法向量之间的关系也是学生感觉困难的地方，应通过实例讲解透彻.

2. 通过讲解直线的方程与方程的直线的概念，使学生初步了解直线的点集与方

程的解集之间的一一对应关系，这是解析几何的精髓和灵魂.

3. 几何公理中有“两点确定一条直线”，而直线上任意两点可以构成一簇非零共线向量，基于这两个事实，可得“一点和一个非零向量确定一条直线”. 与直线垂直的非零向量称为这条直线的法向量，显然直线的法向量不是唯一的，教学中应使学生对直线的法向量有准确的理解.

4. 点向式方程属于发展要求，教材对直线的点向式方程分情况进行了讨论，即将直线分为方向向量不平行于坐标轴和平行于坐标轴这两种情形，并且分别举例. 教学中，对于方向向量平行于坐标轴时，即 v_1，v_2 中有一个为零的情况下，应训练学生的直观想象能力，直接判断直线平行于哪一个坐标轴（或在哪一个坐标轴上）.

5. 已知直线上两点的坐标，可以写出直线的一个方向向量，从而写出直线的点向式方程，而不必一定写成直线的两点式方程.

9.1.2 直线的点斜式方程与斜截式方程

1. 直线的倾斜角和斜率也是确定直线方向的量，直线的斜率是个重要的概念，因此，在学习直线方程时，需要让学生掌握好这一概念.

2. 学习直线的倾斜角这一概念时，要强调定义中的三个要求：“向上的方向”“x 轴正方向”“最小正角”. 由定义可得倾斜角 α 的取值范围是 $[0°, 180°)$. 这个定义保证了任何一条直线都有唯一的倾斜角.

3. 要使学生熟练掌握斜率的概念，理解倾斜角和斜率之间的关系.

4. 对于基础好的学生，可要求他们根据斜率的定义，自己推出斜率与倾斜角的关系.

5. 由直线上一点的坐标和直线的斜率，可以写出直线的点斜式方程. 若该点是直线与 y 轴的交点，则可得到直线的斜截式方程，它类似初中学过的一次函数的解析式.

6. 已知直线上两点的坐标，可以写出直线的斜率，从而写出直线的点斜式方程. 可引导学生总结，已知直线上两点的坐标，确定直线方程的方法都有哪些.

9.1.3 直线的一般式方程

1. 本小节的重点是建立直线与二元一次方程的对应关系，建议教师重视这一节的教学，向学生证明两者之间的对应关系是必要的. 每一条直线的方程都是一个二元一次方程，这一结论可以通过每一条直线都能写出它的斜截式方程或 $x=x_0$ 而得以证明；而每一个二元一次方程都表示一条直线，这一结论可以通过任何一个二元一次方程均可化成一条直线的点法式方程来证明，证明中实际上用到了以方程的解 (x_0, y_0) 为坐标的点 $P_0(x_0, y_0)$ 在方程的图像上这一知识.

2. 证明每一个二元一次方程都表示一条直线的同时，还得到了直线的一般式方

程中一次项系数的几何意义，即直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(A,B)$. 这个结论十分重要，是直线方程的一系列应用的基础.

3. 可以发现，不同形式的直线方程的系数都有明确的几何意义. 教学中反复强调各种直线方程中的具有方向意义的系数，可以使学生对“一点和一个方向确定一条直线”有深刻的认识，从而对各类直线方程有一个整体的认识. 教材中还对刻画直线方向的几个量之间的关系进行了整合，这是对前面知识的一个总结，也是本节的难点所在，教师讲解时要讲清楚法向量、方向向量、斜率三者之间的关系，此知识点属于发展要求.

4. 本节是直线方程的最后一节，教材设计了作直线的例题. 作直线只需找出直线上任意两点即可，通常是求出直线与坐标轴的交点. 需要注意的是，训练学生求曲线与坐标轴的交点坐标是设计此例题的目的之一.

9.2　两条直线的位置关系

9.2.1　两条直线平行

1. 两条直线是否平行可以根据直线的斜截式方程来判定：斜率相等时，两条直线平行或重合，否则相交；进一步地，在斜率相等的条件下，若在 y 轴上的截距相等，则两条直线重合，否则平行. 当出现斜率不存在的情况时，提倡直观判断.

2. 两条直线是否平行也可以根据直线的一般式方程中的对应系数是否成比例来判定. 设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 平行，那么两条直线对应的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 也平行，因此，两条直线的法向量满足 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$.

例如，设直线 l_1：$x+2y+3=0$，l_2：$3x+6y-3=0$，可知直线 l_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,2)$ 与 l_2 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(3,6)$ 满足 $\boldsymbol{n}_1=\frac{1}{3}\boldsymbol{n}_2$，于是有 $l_1\parallel l_2$.

已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，我们来讨论 $l_1\parallel l_2$ 的充要条件.

直线 l_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1)$，$l_2$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2)$，若 $l_1\parallel l_2$，则 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$，即存在一个非零常数 λ，使 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$，此时 $C_1\neq\lambda C_2$；反之，若存在一个非零常数 λ，使 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$，并且 $C_1\neq\lambda C_2$，则 $l_1\parallel l_2$. 所以有

$$\boxed{l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\text{存在一个非零常数 }\lambda\text{，使 }\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2\text{，且 }C_1\neq\lambda C_2.}$$

上述结论也可用直线方程的系数表示为

$$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=\lambda A_2,\\B_1=\lambda B_2,\\C_1\neq\lambda C_2.\end{cases}$$

特别地，如果直线 l_1 与 l_2 的方程中 x 和 y 的系数及常数项都不为零，则有

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

教师可以引导学生利用课余时间完成上述结论的推导.

3. 根据本节知识，求过一点且与已知直线平行的直线方程就可以结合例 3 的结论，通过待定系数法求解.

9.2.2　两条直线相交

1. 在求出两条直线的交点之前，首先应判断两条直线是否相交，即分析两条直线的斜率是否相等、系数是否对应成比例等.

2. 两条直线的交点坐标就是两条直线方程构成的方程组的解，因此，求两条直线的交点问题就转化为求方程组的解的问题.

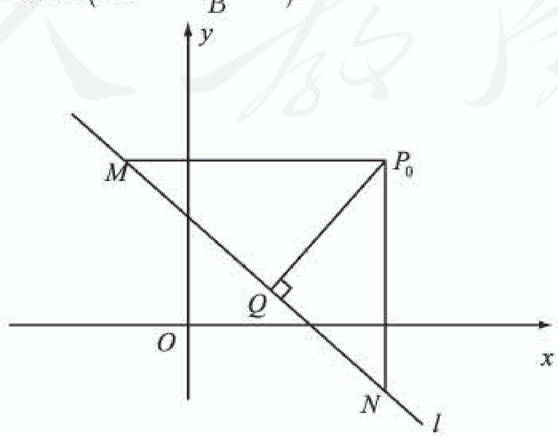
3. 两条直线的垂直关系可转化为两条直线的斜率之间的关系，即两条直线的斜率存在时，垂直的两条直线斜率之积为 -1.

4. 根据本节的知识，求过一点且与已知直线垂直的直线方程时，可以用待定系数法解决.

9.3　点到直线的距离

1. 教材直接给出点到直线的距离公式，教师可根据学生的情况选择不同的证明方法.

证法一：如下图所示，设 $A\neq0$ 且 $B\neq0$，则直线 l 与 x 轴和 y 轴都相交，线段 P_0Q 垂直于直线 l. 过点 P_0 分别作 x 轴和 y 轴的平行线，交直线 l 于点 N 和点 M，则直线 P_0M 的方程是 $y=y_0$，点 M 的坐标为 $\left(\frac{-By_0-C}{A},\ y_0\right)$；直线 P_0N 的方程是 $x=x_0$，点 N 的坐标为 $\left(x_0,\ \frac{-Ax_0-C}{B}\right)$.



于是有

$$|P_0M|=\left|-\frac{By_0+C}{A}-x_0\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|},$$

$$|P_0N|=\left|-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|},$$

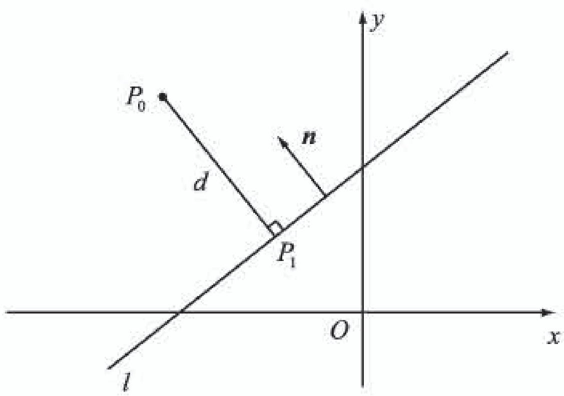
则 $|MN|=\sqrt{|P_0M|^2+|P_0N|^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|A||B|}|Ax_0+By_0+C|$，设 $|P_0Q|=d$，由三角形的面积公式可得

$$d\cdot|MN|=|P_0M|\cdot|P_0N|,$$

于是得

$$d=\frac{|P_0M|\cdot|P_0N|}{|MN|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2. 证法二：如下图所示，过点 $P_0(x_0, y_0)$ 作直线 l 的垂线，垂足为点 $P_1(x_1, y_1)$.



设点 P_0 到直线 l 的距离为 d，直线 l 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B)$. 取 $\boldsymbol{n}$ 的单位向量 $\boldsymbol{n}_0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{(A, B)}{\sqrt{A^2+B^2}}$，根据向量内积的几何意义可得

$$\boxed{d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}_0|.}$$

上述公式可用坐标表示为

$$\begin{aligned}d&=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}_0|\\&=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|\\&=\left|(x_0-x_1, y_0-y_1)\cdot\frac{(A, B)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\\&=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

因为点 $P_1(x_1, y_1)$ 在直线 l 上，所以

$$Ax_1+By_1+C=0,$$

从而得 $C=-(Ax_1+By_1)$，故有

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

3. 点到直线的距离公式适用于任何情况，但当直线平行于坐标轴时，建议用观察的方法. 例如，l 是平行于 x 轴的直线，方程为 $y=y_1$，则点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 l 的距离 $d=|y_1-y_0|$.

4. 求两条平行直线的距离时，一般方法是在一条直线上任取一点，求该点到另一条直线的距离，也可以利用两条平行线间的距离公式求得.

5. 两条平行线间的距离公式的推导不作为重点，公式的应用是关键.

9.4　圆的方程

9.4.1　圆的标准方程

1. 本节主要内容是研究怎样根据已知条件建立圆的标准方程. 要求学生一方面能够根据圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程，而另一方面能够根据圆的标准方程熟练地写出圆心坐标和半径.

2. 在用解析法推导圆的标准方程时，应引导学生明确步骤：建系—设点—写点集—列方程—整理方程. 鼓励学生通过合作讨论推导出圆的标准方程，借此初步介绍求轨迹方程的基本方法. 同时教师要强化学生对圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的认识，其中半径为 r，圆心坐标为 (a, b)，防止学生误认为半径为 r^2，圆心坐标为 $(-a, -b)$.

3. 例 1 是根据已知条件，写出圆的标准方程. 求解时，教师应引导学生确定圆的两要素：圆心和半径.

9.4.2　圆的一般方程

1. 本节的教学要求是：掌握圆的一般方程的特点；能将圆的一般方程化为圆的标准方程，从而求出圆的圆心坐标和半径；能用待定系数法，由已知条件求出圆的一般方程.

2. 应引导学生运用曲线与方程的一般概念说明圆的标准方程与圆的一般方程之

间的对应关系. 首先，通过圆的标准方程推知，所有圆的方程都可以写成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

的形式. 然后，在研究方程（1）是否一定表示圆时，通过配方，将其化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \tag{2}$$

此时，引导学生讨论方程（2）的轨迹是什么，通过讨论得知它可能表示圆、点或不表示任何图形. 最后得出，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程（1）才表示圆.

这部分的学习重点应放在分析和推理的过程上，包括认识圆的一般方程的特点，以及学会用配方法求出圆心坐标和半径. 这里不仅介绍了圆的一般方程及其与圆的标准方程的联系，还显示出用代数方法研究几何问题的魅力.

3. 可以引导学生对比圆的一般方程，总结出二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的必要条件：

（1）x^2和 y^2的系数相同，且不等于零，即 $A=C\neq 0$；

（2）没有含 xy 的二次项，即 $B=0$.

4. 例 2 是关于圆的一般方程的巩固性题目. 教师应强调配方法的应用：将一般方程化为标准方程，并求出圆心坐标和半径. 这类题目的训练有助于学生数学运算能力的提高.

5. 与圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 一样，圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 也有三个参数，因此，必须具备三个独立条件才能确定圆的方程. 如果已知圆上三个点的坐标，通常用待定系数法求出圆的一般方程；如果已知条件与圆心坐标、半径有关，往往通过圆的标准方程来求解.

9.5　直线与圆的位置关系

1. 本节的教学要求是：理解直线与圆的三种位置关系，会用坐标法判断直线与圆的位置关系，能用直线与圆的方程解决一些简单的问题.

2. 教材首先通过“推铁环”这一问题背景，引导学生观察直线与圆的交点个数，并得出直线与圆的三种位置关系. 接着，教材介绍了两种方法来判断直线与圆的位置关系，方法一是通过圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系判断，方法二是将直线方程与圆的方程联立，得到方程组，通过方程组是否有解来判断直线与圆的位置关系. 可以发现，方法一是从“形”的角度来判断的，方法二是通过“数”的角度来判断的，这体现了数形结合的思想方法.

3. 在判断直线与圆的位置关系时，应重点引导学生采用上述方法一来判断，适当引导学生采用方法二. 方法二体现了解析法在研究平面解析几何问题中的应用，为

下一步研究直线与圆锥曲线的位置关系做了铺垫.

4. 例 1 是关于直线与圆的位置关系的分类讨论题，教师应引导学生分别应用方法一和方法二来解决问题，巩固学生对这两种方法的掌握，同时，注意向学生渗透分类讨论的数学思想.

5. 例 2 是求经过圆上一点的圆的切线方程. 方法一是借助圆心和切点得到圆的切线的法向量，继而写出圆的切线的点法式方程，教材中就介绍了此解法；教师可适当补充方法二：设出直线的点斜式方程，利用圆心到切线的距离与半径相等来确定斜率，从而得到圆的切线方程. 利用方法二时，要提醒学生注意斜率是否存在. 方法二中蕴含着待定系数法、解析法和分类讨论法等数学方法，教学中要引起重视.

6. 求经过圆上一点的圆的切线方程时，可以根据学情，引导学生总结：过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2,$$

一般地，过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$

‖参考教案‖

9.4.1　圆的标准方程

教学目标

1. 理解并掌握圆的标准方程，会根据不同条件求得圆的标准方程，能根据圆的标准方程熟练地写出它的圆心坐标和半径.

2. 通过对圆的标准方程的推导，向学生渗透数形结合的思想. 介绍待定系数法，进一步提高学生的观察、比较、分析、概括等能力.

3. 运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题，培养学生的探究能力.

教学重点

圆的标准方程的推导以及根据具体条件正确写出圆的标准方程.

教学难点

运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题.

教学方法

数学学习不是一个“授予—吸收”的过程，而是学习者主动建构的过程. 学生通过之前的学习已具备了一定的基础知识和技能，因此，本节课主要采用了“诱思探究”的教学方法，即借助学生已有的知识引出新知. 在圆的标准方程的推导过程中，以一系列的问题为主线，采用讨论式教学法，引导学生主动探索、独立构建新知识. 通过层层深入的例题配置，使学生思路逐步开阔，提高学生解决问题的能力.

借助多媒体可以增强教学的直观性，有利于渗透数形结合的思想，提高课堂

效率.

教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 引导学生回顾： 第九章前三节主要是介绍了直线的相关内容，包括直线方程、两条直线的位置关系以及点到直线的距离. 引导学生对比研究直线的思路，尝试研究圆的方程.	教师引导，学生回顾.	通过对直线相关内容的回顾，使学生厘清知识脉络，尝试发现需要研究的问题，这样可以激发学生的求知欲，增强问题意识，同时使学生注意到知识之间的相互联系.
	2. 具有什么性质的点的轨迹是圆? 强调确定一个圆所需要的条件，即圆心与半径，它们分别确定了圆的位置和大小.	教师提问，学生回答，同时教师借助几何画板作出一个圆心为 C，半径为 r 的圆.	回顾圆的定义及确定圆的几何要素，为建立圆的标准方程做铺垫.
概念的形成	1. 提出问题：求以点 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程. 设 $M(x, y)$ 是一动点，点 M 在该圆上的充要条件是 $\|CM\|=r$，由两点间的距离公式得 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \quad (1)$ 将方程(1)两边平方得 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad (2)$ 方程(2)就是以点 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程. 2. 上述两个方程均是圆的方程吗?	学生分析研究，解决问题. 教师巡视，加强对个别学生的指导. 由学生讲解思路，并相互补充. 教师利用多媒体展示学生的解法. 引导学生提出该问题并解答.	数学教学的核心是学生的“再创造”，即由学生根据自己的经验，用自己的思维方式把要学的知识“创造”出来. 因此，在教学中应塑造自主探索与合作交流的学习环境，让学生有充分的时间和空间去观察、分析、动手实践，从而主动发现和“创造”所学的数学知识. 圆的标准方程的推导是本节课的一个重点，其推导方法也是求轨迹

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念的形成			方程的一个基本方法.把该推导过程交给学生探索，让学生经历知识的形成过程，体会数形结合的思想，可加深学生对知识的理解并逐步提高其用代数方法解决几何问题的能力.
概念深化	1. 根据上述解法，总结求曲线方程的步骤：设点—列式—整理—证明(可省略，验证即可). 2. 如何表示平面上任意一点 $M(x, y)$ 与圆的位置关系?	学生总结，教师完善. 学生解答.	提炼方法，使学生在探索中领会，在总结中提高，为后面圆锥曲线方程的学习奠定基础. 帮助学生发散思维、开阔视野，同时再次渗透数形结合的思想.
应用举例	例 1　根据下列条件，求圆的标准方程： (1) 圆心在点 $C(-2, 1)$，并且过点 $A(2, -2)$ 的圆； (2) 以点 $A(2, 3)$，$B(4, 9)$ 为直径的两个端点的圆.	学生解答，师生点评.	例 1 是知识巩固性题目，比较基础，可以由学生自主完成.
巩固练习	练习 9.4.1 第 1～3 题； 第 4 题.	第 1～3 题由学生自主完成. 第 4 题小组讨论后完成.	第 1～3 题属于基础性题目，由学生自主完成. 第 4 题可在讨论出圆的圆心和半径的确定方法后，再解决.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
总结回顾	一、知识： 1. 圆的定义和两要素； 2. 圆的标准方程. 二、方法： 数形结合法、待定系数法等.	学生回顾归纳	

习题答案、提示或解答

练习 9.1.1

1. 点 A，D 在直线 $x-y=0$ 上.

2. （1）$3x+4y-5=0$；（2）$3x-4y-5=0$；（3）$3x+4y+8=0$；

（4）$3x-4y+3=0$；（5）$x=2$；（6）$y=1$.

3. 边 AB 上的高所在直线的方程是 $2x-5y+4=0$，边 BC 上的高所在直线的方程是 $2x+3y-8=0$，边 AC 上的高所在直线的方程是 $2x-y-2=0$.

4. $2x-3y-1=0$.

***5.** （1）$2x+3y+7=0$；（2）$2x-y-6=0$；（3）$y=4$；（4）$x=4$.

***6.** （1）$x-3y+10=0$；（2）$5x+2y-10=0$.

练习 9.1.2

1. （1）存在，斜率为 $-\frac{3}{4}$；（2）存在，斜率为 0；

（3）不存在；（4）存在，斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. （1）$2x-y-7=0$；（2）$x+y-3=0$；（3）$x=2$；

（4）$y=1$；（5）$x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+3=0$；（6）$2x+y-2=0$.

3. （1）-2；4　（2）1；45°；-4

4. $\frac{5}{6}$.

5. $k=-\frac{4}{3}$，$b=\frac{13}{3}$.

6. （1）$x-2y+5=0$；（2）$5x-3y+11=0$.

7. 1.

练习 9.1.3

1. （1）$3x-4y-1=0$；（2）$x+4y-17=0$；（3）$y-3=0$；

(4) $x+2=0$;　　(5) $2x-y-3=0$;　　*(6) $4x+3y+1=0$.

2. (1) $(-3, 0)$，$(0, 2)$；(2) $(5, 0)$，$(0, -4)$. 图略.

***3.** (1) 1　　(2) -1

***4.** (1) 一个法向量的坐标为 $(1, -3)$，一个方向向量的坐标为 $(3, 1)$，斜率为$\frac{1}{3}$；

(2) 一个法向量的坐标为 $(3, -1)$，一个方向向量的坐标为 $(1, 3)$，斜率为 3；

(3) 一个法向量的坐标为 $(2, 0)$，一个方向向量的坐标为 $(0, 2)$，斜率不存在；

(4) 一个法向量的坐标为 $(0, 4)$，一个方向向量的坐标为 $(4, 0)$，斜率为 0；

(5) 一个法向量的坐标为 $(1, 0)$，一个方向向量的坐标为 $(0, 1)$，斜率不存在；

(6) 一个法向量的坐标为 $(0, 1)$，一个方向向量的坐标为 $(1, 0)$，斜率为 0.

练习 9.2.1

1. (1) 平行；　(2) 不平行；　(3) 平行；　(4) 平行.

2. (1) $2x+y-7=0$;　　(2) $2x-3y-10=0$.

3. $-\frac{1}{2}$.

练习 9.2.2

1. (1) 相交，交点坐标为 $(-1, -3)$；　(2) 相交，交点坐标为 $(1, -1)$；
(3) 不相交，无交点.

2. (1) 垂直；　(2) 不垂直；　(3) 垂直；　(4) 不垂直.

3. (1) $x+y-5=0$;　　(2) $2x+y+1=0$.

4. 3.

5. $x+y-2=0$.

练习 9.3

1. (1) 5；　(2) 12；　(3) 1；　(4) 13.

2. (1) 1；　(2) $\sqrt{2}$；　(3) 0；　(4) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

***3.** $2\sqrt{13}$.

***4.** $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

练习 9.4.1

1. (1) 圆心坐标为 $(0, 0)$，半径为 3；　(2) 圆心坐标为 $(3, -1)$，半径为 2；
(3) 圆心坐标为 $(0, -1)$，半径为$\sqrt{2}$；　(4) 圆心坐标为 $(1, 0)$，半径为$\sqrt{5}$.

2. (1) $x^2+y^2=16$；　　(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$；

(3) $(x-2)^2+y^2=5$；　　(4) $x^2+(y+1)^2=4$.

3. (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=100$；　　(2) $(x-3)^2+(y+1)^2=45$.

练习 9.4.2

1. (1) 圆的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=9$，圆心坐标为 $(3,\ 0)$，半径为 3；

(2) 圆的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=9$，圆心坐标为 $(0,\ 2)$，半径为 3；

(3) 圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆心坐标为 $(2,\ 3)$，半径为 1；

(4) 圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{5}{2}$，圆心坐标为 $(1,\ -2)$，半径为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. (1) 表示圆，圆心坐标为 $(1,\ 1)$，半径为$\sqrt{5}$；

(2) 表示原点 $(0,\ 0)$；

(3) 不表示任何图形.

***3.** $x^2+y^2+4x-13y=0$.

练习 9.5

***1.** (1) 相交；　　(2) 相切；　　(3) 相离.

***2.** $\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$.

***3.** 相交，交点坐标为 $(3,\ 2)$ 和 $(-2,\ -3)$.

***4.** 当$-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$时，直线与圆有两个交点；

当 $C=2\sqrt{2}$ 或 $C=-2\sqrt{2}$时，直线与圆只有一个交点；

当 $C>2\sqrt{2}$ 或 $C<-2\sqrt{2}$时，直线与圆没有交点.

***5.** $2x+\sqrt{6}y-10=0$.

习题九

1. (1) $3x-2y+21=0$；　　(2) $x-2y-12=0$；

(3) $x-y-2=0$；　　(4) $y-4=0$；

(5) $x+2=0$；　　(6) $7x-4y-1=0$；

*(7) $3x+2y-7=0$.

2. (1) 一个方向向量的坐标为$\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$，一个法向量的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$，斜率为$-\frac{1}{2}$；

(2) 一个方向向量的坐标为 $(2,\ 3)$，一个法向量的坐标为 $(3,\ -2)$，斜率为$\frac{3}{2}$；

(3) 一个方向向量的坐标为 (1，0)，一个法向量的坐标为 (0，1)，斜率为0；

(4) 一个方向向量的坐标为 (0，2)，一个法向量的坐标为 (2，0)，斜率不存在.

3. (1) 与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别为 $(-2，0)$，$\left(0，\dfrac{4}{3}\right)$；

(2) 与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别为 (2，0)，(0，12)；

(3) 与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别为 (4，0)，(0，5)；

(4) 与 x 轴和 y 轴的交点坐标均为 (0，0).

图略.

4. (1) $x-2y-7=0$； (2) $4x+y-5=0$.

5. (1) 平行； (2) 垂直； (3) 平行； (4) 平行.

6. (1) (1，6)； (2) $\left(-1，\dfrac{7}{3}\right)$.

7. (1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$； (2) $\dfrac{8\sqrt{29}}{29}$； (3) 3； (4) $\dfrac{1}{2}$.

8. $\dfrac{13}{10}$.

9. -1.

10. (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=40$； (2) $(x-2)^2+(y-1)^2=2$；

*(3) $x^2+(y+5)^2=25$； *(4) $(x-3)^2+(y+5)^2=32$.

***11.** $x^2+y^2-8y+6=0$.

提示：(方法一) 设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Ey+F=0$，代入 A，B 两点的坐标，列出关于 E，F 的二元一次方程组，可解.

(方法二) 设圆的标准方程为 $x^2+(y-b)^2=r^2$，代入 A，B 两点的坐标，列出关于 b，r 的二元二次方程组，可解.

***12.** $x^2+y^2-8x+2y+12=0$.

提示：(方法一) 设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，代入 A，B，C 三点的坐标，列出关于 D，E，F 的三元一次方程组，可解.

(方法二) 设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，代入 A，B，C 三点的坐标，列出关于 a，b，r 的三元二次方程组，可解.

***13.** (1) 相切； (2) 相离； (3) 相交.

***14.** $5\sqrt{5}$ 或 $-5\sqrt{5}$.

***15.** $2\sqrt{5}$.

***16.** $x-\sqrt{3}y+4=0$.

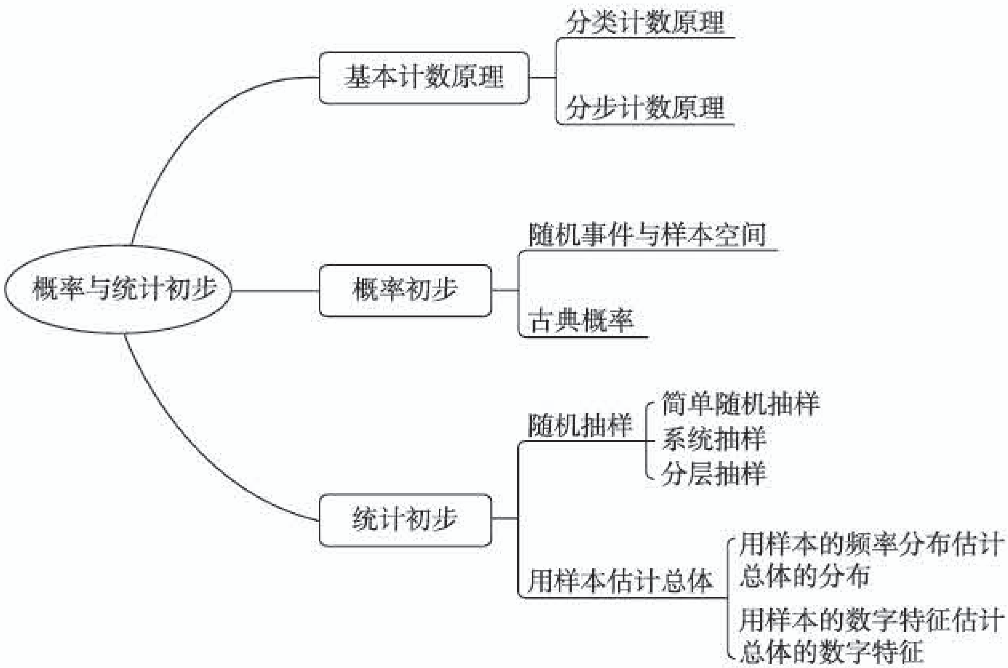
第十章
概率与统计初步

思想火花

解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研来掌握它.

——波利亚

知识导图



教学要求

本章的教学要求分基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 理解两个基本计数原理，能运用两个基本计数原理解决简单的实际问题.

2. 了解随机现象、随机试验、样本空间、基本事件的含义，理解并会判断随机事件、必然事件和不可能事件.

3. 理解古典概型、古典概率的概念，会运用古典概率解决一些简单的实际问题.

4. 了解总体、个体、样本、样本容量等概念，了解随机抽样的意义和常用的方法.

5. 了解频率分布直方图和茎叶图.

6. 会计算样本数据的平均数和标准差，能通过样本的数字特征估计总体的数字特征.

（二）发展要求

1. 能熟练写出常见的随机试验（如掷硬币、掷骰子、抽取产品等）的样本空间.

2. 理解简单随机抽样、系统抽样和分层抽样.

3. 会求极差和频率，能根据频率分布直方图进行简单的数据分析.

4. 会使用函数型计算器计算样本的平均数和标准差.

5. 了解样本平均数、标准差与频率分布直方图的关系.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：分类计数原理，分步计数原理，随机事件与样本空间，古典概率，随机抽样，用样本的频率分布估计总体的分布，用样本的数字特征估计总体的数字特征.

本章教材以小学数学中数数的“枚举法”“搭配法”开始，引出了分类计数原理和分步计数原理，为以后样本空间中基本事件总数的计算、古典概率的求解、样本数据的分析等奠定了基础. 有关概率初步的知识，教材通过一个有奖销售的实例，引出了随机现象的概念，并列举了日常生活的一些情形，说明随机现象的广泛性，目的是使初学者明确概率学的研究对象. 接下来，教材通过对简单的随机现象进行分析，引入了随机试验、基本事件、样本空间、随机事件、古典概型和古典概率的定义. 有关统计初步的知识，教材首先介绍了简单随机抽样、系统抽样、分层抽样这三种常用的抽样方法，在学生学会用随机抽样的方法在总体中抽取样本后，接着介绍如何用样本估计总体，这主要包括两方面的内容：一是如何用样本的频率分布估计总体的分布；二是如何用样本的数字特征估计总体的数字特征. 有关直方图、平均数的内容在初中已有介绍，本章内容是初中相关内容的拓展和深入.

本章有关概率这部分内容是概率论的初步知识，概率论是研究随机现象的数量规律的数学学科. 在现实世界中，随机现象广泛存在，而随机现象中存在着数量规律，从而使人们可以运用数学方法来定量地研究随机现象. 目前，概率与统计知识已成为研究自然现象和规律、处理工程乃至公众事业等问题的重要工具. 统计学是研究如何合理地收集、整理、分析数据的学科，是培养学生数据分析素养的重要内容，它可以为人们认识事物内在规律、制定合理的决策提供依据，是当代公民的必备常识. 同时，通过对数据的收集、整理和分析，能够锻炼学生的社会实践能力以及解决问题的能力，增强学生学习的兴趣. 统计学虽然不能确切地预知未来，但可以帮助人们有效规避风险，正确认识和处理各种不确定的因素，这对于学生未来的工作、生活或进一步学习有所裨益.

本章重点是：分类计数原理，分步计数原理，随机事件与样本空间，古典概率的计算，随机抽样的方法，用样本估计总体.

本章难点是：两个基本计数原理的熟练运用，随机抽样方法的合理使用，频率分布直方图的绘制与分析，标准差意义的理解与计算.

本章教学约需 15 课时，具体分配如下（仅供参考）：

10.1	基本计数原理	约 2 课时
10.2	概率初步	

10.2.1	随机事件与样本空间	约 1 课时
10.2.2	古典概率	约 2 课时
10.3	随机抽样	
10.3.1	简单随机抽样	约 2 课时
10.3.2	系统抽样	约 1 课时
10.3.3	分层抽样	约 1 课时
10.4	用样本估计总体	
10.4.1	用样本的频率分布估计总体的分布	约 2 课时
10.4.2	用样本的数字特征估计总体的数字特征	约 2 课时
小结与复习		约 2 课时

10.1 基本计数原理

1. 本节的重点是分类计数原理和分步计数原理以及二者的应用，难点是分类计数原理和分步计数原理的理解.

2. 分类计数原理和分步计数原理以小学内容中关于数数的“枚举法”和“搭配法”为衔接，真正体现低起点、高观点的教学观. 在熟悉的问题情境中提炼出“分类”和“分步”的原理，是本节教学设计的关键.

3. 分类计数原理即加法原理. 如果完成一件事有 n 类办法，这 n 类办法之间是相互独立的，不论用哪一类办法中的哪一种方法，都能单独完成这件事，那么完成这件事的方法总数，是把每类办法中的所有方法数相加. 教学时，为使学生理解 n 类办法之间的相互独立性，可以类比物理中并联电路的相关内容来学习.

分步计数原理即乘法原理. 如果完成一件事需要分成 n 个步骤，这 n 个步骤之间是相互关联的，只有依次完成所有的步骤，才能完成这件事，如果缺少其中的任何一个步骤，这件事都无法完成，那么完成这件事的方法总数是每一个步骤的所有方法数之积. 教学时，为使学生理解 n 个步骤之间的相互关联性，可以类比物理中串联电路的相关内容来学习.

4. 使用分类计数原理时，要对能够完成这件事的所有方法进行分类. 分类时，要根据这件事的特点确定一个分类的标准，做到不重不漏，使得完成这件事的任何一种方法必须包含于某一类之中，且仅包含于该类之中.

使用分步计数原理时，要对能够完成这件事的过程进行分步. 分步时，要根据这件事的特点确定一个分步的标准，使得完成这件事需要且仅需 n 个步骤.

在教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流，以加深对分类计数原理和分步计数原理的理解. 同时，引导学生正确区分两个计

数原理.

10.2　概率初步

10.2.1　随机事件与样本空间

1. 本节的重点是理解随机现象的特点，理解基本事件、样本空间和随机事件. 本节的难点是写出一个随机事件的样本空间.

2. 随机现象是概率学研究的对象. 随机事件、样本空间和概率这三者可以较为全面地描述一个随机现象，它们是概率论中最基本、最重要的概念.

3. 教材首先用“商场抽奖”的实例，让学生体会获奖的不确定性，从而引出了随机现象这一概念. 这里可以让学生再举出一些随机现象的例子，以加深学生对随机现象概念的理解和认识.

所谓随机现象，就像做一个试验，这个试验有 n（$n>1$）种可能的结果，但每做一次试验只出现这 n 个结果中的一个，至于出现哪一个结果，在试验前是无法确定的. 这是随机现象的一个重要特征，这也说明了“随机现象”这个名称中“随机”二字的含义.

4. 随机现象除了具有定义中所说的“具有多种结果可能发生，但事先不能确定哪一种结果将会发生”的特征外，它还有另一个重要的特征，即“大数属性”. 这一点教师应该清楚，以便更好地指导教学.

初学概率的人，容易对概率产生两个错误的认识：一个是把随机现象看成一种莫名其妙的现象，它有时出现这个结果，有时出现那个结果，毫无规律可言；另一个是用一次预测的结果来衡量概率的功效. 事实上，这两个错误认识都出于同一根源，就是没有掌握随机现象的“大数属性”. 随机现象是有规律的，不过它的规律不是做一次、两次或少数几次的试验（或观察）就能觉察出来，必须做“大数”次才能发现，而概率的功效也应从“大数”的观点来理解. 例如，从一批次品率（次品出现的概率）为 0.03 的产品中任抽一件，在没检测以前，预测它是合格品的准确性一般很高，这是因为在“大数”次中，平均每 100 次有 97 次预测准确，而仅 3 次不准确. 再以掷一枚骰子为例，掷得 4 点的概率为$\frac{1}{6}$，若预测一次投掷中掷得 4 点，在“大数”次中，平均每 6 次有 1 次预测准确，而有 5 次不准确. 从以上两个例子来看，预测的准确性与随机现象本身的概率有关，若从“大数”的观点来理解，我们对概率的功效是没有怀疑的.

由于过去学习、接触较多的是确定性现象，学生习惯于用观察确定性现象的思维方式考虑问题，现在转入学习随机现象，必须引导学生用新的思维方式考虑问题.

5. 在教学中不能把随机现象的两个特征生硬地灌输给学生，而应该通过大量的

实例让学生透彻地了解随机现象具有的这两个特征及其含义.

6. 样本空间是一个随机试验的一切可能结果的集合. 对于这一概念，由于学生已具备了集合的相关知识，学习起来应该不会太困难，关键是让学生在确定样本空间中所包含的元素时做到既不重复也不遗漏. 可以说，选择样本空间是建立一个概率模型的首要工作.

例如，按先后顺序抛掷两枚质地均匀的硬币，观察正反面出现的情况，要把两枚硬币看成是“不同”的，分别是第一枚硬币和第二枚硬币，样本空间可记为

$$\Omega=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\},$$

这是一个古典概型的样本空间.

若两枚硬币不加区别，只考察两枚硬币的朝上的面的结果，其不同的结果就只有3个，样本空间可记为

$$\Omega=\{(正，正)，(正，反)，(反，反)\},$$

这不是一个古典概型的样本空间.

7. 本教材对随机事件的定义使用了集合语言，充分直观地揭示了随机事件与样本空间之间的关系.

8. 如果一个事件包含了它所在的随机试验中所有可能的结果，那么这个事件就是必然事件. 若一个事件不包含它所在的随机试验中的任何结果，那么这个事件就是不可能事件. 我们把随机试验的结果定义为随机事件，实际上已经把必然事件和不可能事件看作随机事件的两种特殊情况了.

10.2.2 古典概率

1. 古典概型是人们最早研究的、最简单、最常用的一种基本概型，同时它又是解决某些较复杂概率问题的基础. 因此，古典概率是本节、也是概率这一部分内容的重点.

由于本节概念与学生原有知识、经验和思维习惯（或者说原有的认知结构）有较大的差距，因而，对古典概率有关概念的理解是难点.

2. 教材首先给出了一个简单的“摇奖”问题，引导学生从中分析、归纳、总结问题的特征，引出古典概型. 这样安排的目的主要有两个：一是便于学生理解有关概念；二是说明古典概率问题来源于生活，增强学生对数学理论来源于实践的认识，培养学生应用数学的意识.

3. 判断一个随机试验是否为古典概型有两个条件：（1）结果有限；（2）各个结果出现的机会相等. 学生往往容易忽视条件（2），从而得出错误的结论.

4. 正确地确定样本空间是求古典概率的关键. 在确定随机试验的样本空间中基本事件的总数以及某一随机事件中基本事件的个数时，应注重讲清道理，不必拘泥于复

杂的运算.

5. $P(A)=\frac{m}{n}$既是古典概率的定义，又是计算古典概率的基本方法. 在确定随机试验是古典概型的前提下，分别求出样本空间中基本事件的总数 n 和事件 A 所含基本事件的个数 m 后，即可计算出事件 A 的概率.

6. 概率客观地反映了随机事件发生的可能性的大小，这一结论应放在给出古典概率的定义和例题之后，即在学生对概率有了一定感性认识的基础上再介绍给学生. 实际上，事件的概率就是事件发生的可能性大小的一个数量刻画. 概率大，事件发生的可能性就大；概率小，事件发生的可能性就小. 这个数量是客观存在的，是随机现象本身的属性.

10.3　随机抽样

10.3.1　简单随机抽样

1. 本节的重点是随机抽样的概念，抽签法和随机数表法，难点是如何理解随机抽样的科学性，随机数表法的应用.

2. 教材在本节的序言中通过家庭用水调查的实例，给学生介绍了总体、样本、样本容量的概念. 通过抽样不合理带来错误预测的事例，说明随机抽样的重要性.

3. 在统计中涉及的抽样方法很多，教学时可通过学生熟知的实例，让学生了解多种抽样方法. 简单随机抽样可分为不放回抽样和放回抽样，本章介绍的是不放回抽样.

4. 在学习简单随机抽样的定义时，应注意以下特点：

(1) 它要求总体中的个体数有限；

(2) 它是从总体中逐个地进行抽取，在抽样实践中便于操作；

(3) 它是一种不放回抽样，由于抽样实践中多采用不放回抽样，使其具有较强的实用性，而且由于所抽取的样本中没有被重复抽取的个体，便于进行有关分析和计算.

5. 当用简单随机抽样从含有 N 个个体的总体中抽取一个容量为 n 的样本时，在整个抽样过程中，每个个体被抽到的可能性是相等的. 保证“等可能性”的前提是样本被搅拌均匀.

6. 进行简单随机抽样，主要有两种方法：抽签法和随机数表法. 抽签法比较简单，学生比较熟悉，教材没有过多介绍，而是主要介绍了用随机数表法进行抽样的三个步骤：

第 1 步：将总体中的个体编号. 所谓的编号，实际上就是编数字号码. 例如，将 100 个个体编号成 00，01，02，…，99，而不是编号成 0，1，2，…，99，这样编号

便于运用随机数表. 此外，将起始号码选为 00，而不是 01，可使 100 个个体都可用两位数字号码表示，否则将会出现三位数字号码 100，这样确定起始号码的目的也是便于我们使用随机数表.

第 2 步：选定开始的数字. 为了保证所选定的数字的随机性，应在查看随机数表之前就确定出开始数字的位置.

第 3 步：获取样本号码. 需要注意的是，所取号码应在样本编号的范围内，并且避免与前面取出的号码重复.

10.3.2　系统抽样

1. 本节的重点是通过实例了解系统抽样的方法.

2. 关于系统抽样，在教学中可强调如下几点：系统抽样适合于总体中的个体数较多的情况，因为这时采用简单随机抽样不方便；系统抽样与简单随机抽样之间存在着密切的关系，即在将总体中的个体均分成几部分后，在每一部分进行抽样时，采用的是简单随机抽样；与简单随机抽样一样，系统抽样也属于等可能抽样.

3. 如果涉及总体中的个体数不能被样本容量整除的情形，可先用简单随机抽样的方法从总体中随机剔除几个个体，使剩下的个体数能被样本容量整除，然后再按系统抽样的步骤进行操作.

10.3.3　分层抽样

1. 本节的重点是通过实例了解分层抽样的方法.

2. 分层抽样在内容上与系统抽样是平行的. 在教学过程中强调：分层抽样适用于总体由差异明显的几部分组成的情况；在每一层进行抽样时，采用简单随机抽样或系统抽样；分层抽样也是等可能抽样.

3. 建议将三种抽样方法的联系和区别做个总结，如下表所示.

<table>
<tr><th>类别</th><th>共同点</th><th>特点</th><th>相互联系</th><th>使用范围</th></tr>
<tr><td>简单随机抽样</td><td rowspan="3">抽样过程中每个个体被抽到的可能性相等</td><td>从总体中逐个抽取</td><td></td><td>总体中的个体数较少</td></tr>
<tr><td>系统抽样</td><td>将总体均分成几部分，按事先确定的规则在各部分抽取</td><td>在起始部分抽样时采用简单随机抽样</td><td>总体中的个体数较多</td></tr>
<tr><td>分层抽样</td><td>先将总体分成几层，再分层进行抽样</td><td>在各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样</td><td>总体由差异明显的几部分组成</td></tr>
</table>

10.4　用样本估计总体

10.4.1　用样本的频率分布估计总体的分布

1. 本节的重点是通过实例体会数据分布的意义和作用；在表示样本数据的过程中，学会制作频率分布表，绘制频率分布直方图、茎叶图，体会它们各自的特点.

2. 在初中，学生已经接触过把样本数据表示成频率分布表和频率直方图的形式，会从图表上直观地看出样本数据的分布情况. 本节具体给出了列频率分布表、作频率分布直方图的步骤：

（1）计算极差

教材提供的样本数据中，最大值是 25.56，最小值是 25.24，它们的差为 $25.56-25.24=0.32$，所以极差为 0.32.

（2）决定组数与组距

可将样本数据分为 11 组，则

$$组距=\frac{极差}{组数}=\frac{0.32}{11}\approx 0.03.$$

（3）决定分点

一般要求分点比样本数据多一位小数，第 1 小组的起点要比最小值稍小一点，那么，所分的 11 个小组可以是 $[25.235,25.265)$，$[25.265,25.295)$，…，$[25.535,25.565]$.

（4）列频率分布表

（5）绘制频率分布直方图

3. 关于频率分布表和频率分布直方图，应向学生指出频率分布表是直接列出样本数据在不同区间内的取值频率，而相应的直方图是用矩形面积的大小来表示不同区间内的取值频率.

4. 在得到样本数据的频率分布后，教材介绍了样本的频率分布与相应的总体分布之间的关系，即样本的频率分布将随着样本容量的增大更加接近总体的分布. 在教学中，可向学生强调：一般情况下，我们并不知道一个总体的分布，但是基于样本的频率分布与相应的总体分布的关系，可以从总体中抽取一个样本，用样本的频率分布去估计相应的总体分布.

5. 教材还介绍了茎叶图，并指出了茎叶图的优点：一是所有的数据信息都可以从茎叶图中得到，保留了全部的原始信息；二是茎叶图可以随时记录和表示.

10.4.2　用样本的数字特征估计总体的数字特征

1. 本节的重点是通过实例理解样本标准差的意义和作用，学会计算样本标准差. 本节的难点是理解样本标准差的意义和作用，学习数据分析的有关内容.

2. 在初中已经学过，平均数描述了数据的平均水平，定量地反映了数据的集中趋势. 教材以实例的方式解释了如何用样本平均数估计总体平均数.

3. 在频率分布直方图中，平均数是直方图的“平衡点”.

4. 标准差和方差反映了数据的离散、波动的程度. 如果标准差较大，表明数据的波动程度较大、数据离散程度较高；如果标准差较小，表明数据的波动程度较小、数据离散程度较低.

5. 教材中给出了标准差的算法，可以借此培养学生的数学运算能力. 同时，教材通过例题演示了如何借助函数型计算器计算样本平均数和样本标准差，此外，可以鼓励学生尝试使用计算软件来得到样本的数字特征，培养学生的实践能力.

‖参考教案‖

10.1　基本计数原理

教学目标

1. 正确理解和掌握分类计数原理和分步计数原理.

2. 能准确地应用两个基本计数原理分析和解决一些简单的实际问题.

3. 注重发展学生的思维能力，培养学生分析问题和解决问题的能力.

教学重点

两个基本计数原理的理解和掌握.

教学难点

两个基本计数原理的正确区分.

教学方法

采用发现、探究和类比的教学方法.

教学过程

一、新课引入

随着社会的发展和科学的进步，问题解决的方式变得多样化，一个问题到底有多少种不同的解决方法，这常常需要通过数学中的两个基本计数原理计算得出，进一步地，可以研究在一定条件下，哪种方法是最佳方案. 那么，什么才是基本计数原理呢？

二、知识新授

1. 分类计数原理

问题 1　（1）如图 1 所示，以 A，B，C，D，E，F，G 为端点，共有多少条

不同的线段？

（2）如图 2 所示，由若干个边长为 1 的小等边三角形构成的图中，共有多少个三角形？

图 1

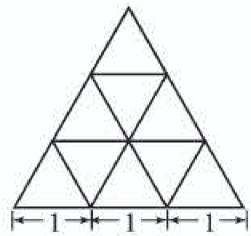


图 2

分析：在图 1 中，以 A 为左端点的不同线段分别为 AB，AC，AD，…，AG，有 6 条，以 B 为左端点的线段有 5 条，以 C 为左端点的线段有 4 条，以 D 为左端点的线段有 3 条，以 E 为左端点的线段有 2 条，以 F 为左端点的线段有 1 条. 因此，共有不同的线段 $6+5+4+3+2+1=21$ 条.

在图 2 中，可以这样分类计数：

第 1 类，边长为 1 的三角形，有 9 个；

第 2 类，边长为 2 的三角形，有 3 个；

第 3 类，边长为 3 的三角形，有 1 个.

因此，共有三角形 $9+3+1=13$ 个.

问题 2　某人从甲地去乙地，可以乘汽车，也可以乘火车，还可以乘轮船. 一天中，从甲地直达乙地的汽车有 3 班，火车有 5 班，轮船有 3 班. 那么，一天中此人乘坐上述交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的选择方法？

分析：在一天中，某人从甲地到乙地可以选择的交通工具有 3 类，不同的选择方法共有 $3+5+3=11$ 种.

由以上问题可以得出分类计数原理：

分类计数原理　如果完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

2. 分类计数原理应用举例

例 1　图 3 是由若干个正方形和一个笑脸图案构成的图形.

（1）图中共有多少个正方形？

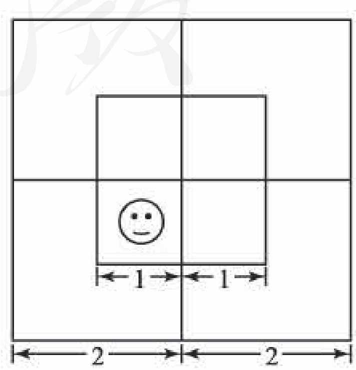


图 3

（2）笑脸图案最多可在几个正方形中？

分析：类比图 2 中数三角形的问题，可将正方形按照边长分为三种情况，进而应用分类计数原理.

解：（1）将图 3 中的正方形按边长分为 3 类：

第 1 类，边长为 1 的正方形，有 4 个；

第 2 类，边长为 2 的正方形，有 5 个；

第 3 类，边长为 4 的正方形，有 1 个.

根据分类计数原理，共有正方形的个数为

$$N=4+5+1=10.$$

（2）笑脸图案所在的正方形可按边长分为 3 类：

第 1 类，在边长为 1 的正方形中，有 1 个；

第 2 类，在边长为 2 的正方形中，有 2 个；

第 3 类，在边长为 4 的正方形中，有 1 个.

根据分类计数原理，笑脸图案最多可在 $1+2+1=4$ 个正方形中.

3. 学生练习：本节教材中的例 2

4. 分步计数原理

问题 3　小萌同学某天要外出，如果从如图 4 所示的上衣、下衣中各选一件，再挑选一双鞋子，形成一种着装方案，那么共有多少种不同的着装方案呢？

图 4

分析：上述问题中，我们不妨摆一摆所有不同的着装方案，可发现共有 12 种，如图 5 所示.

如图 5 所示，如果先选上衣，有 2 种不同的选择；再选下衣，对应每一件上衣都有 3 种不同的选择；最后选鞋子，对应每一套上衣和下衣，都有 2 种不同的选择. 因此，共有 $2\times3\times2=12$ 种不同的着装方案.

由上述问题 3，可以总结分步计数原理：

分步计数原理　如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的

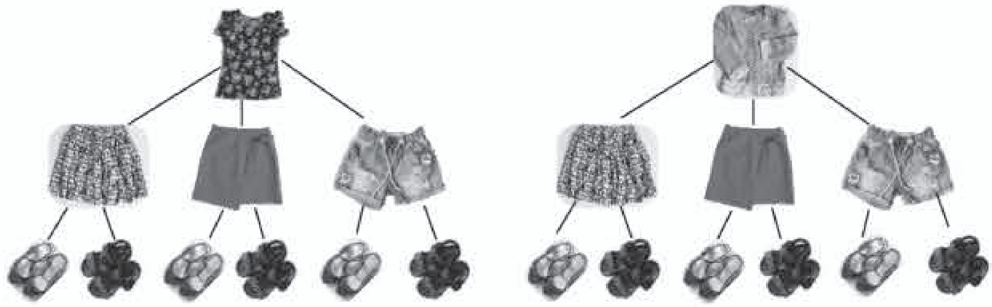


图 5

方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

5. 分步计数原理的应用

例 2 如图 6 所示，某人从甲地去丙地，中间必须经过乙地. 已知由甲地到乙地有 3 条路通行，再由乙地到丙地有 2 条路通行. 那么此人由甲地经过乙地到丙地，共有多少种不同的走法?

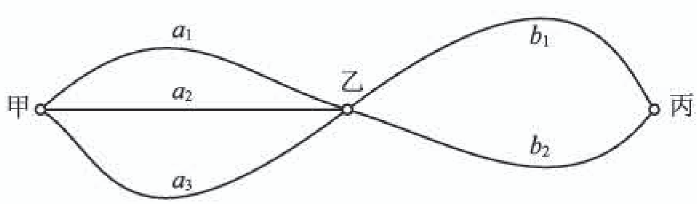


图 6

分析：从甲地到丙地不能由一个步骤完成，必须分成两个步骤：第 1 步，从甲地到乙地，有 3 种不同的走法，分别用 a_1，a_2，a_3 表示；第 2 步，从乙地到丙地，有 2 种不同的走法，分别用 b_1，b_2 表示. 由甲地经过乙地到丙地，全部的走法分别为

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_3b_2,$$

共计 6 种.

解：根据分步计数原理，由甲地经过乙地到丙地的走法数为

$$N=3\times2=6.$$

例 3 在我们的现实生活中，经常会遇到用数字设置个人密码的问题. 若要用 0～9 这 10 个数字设置一个六位数字的密码，则共能设置出多少个不同的密码?

分析：如图 7 所示，要设置一个由六位数字组成的密码，自前向后依次记为第 1 位，第 2 位，…，第 6 位，可以分成六个步骤完成：第 1 步，设置第 1 位数，有 10 种不同的设法；第 2 步，设置第 2 位数，因为每个数位上的数字可以重复，所以也有

10 种不同的设法；……；第 6 步，设置第 6 位数，有 10 种不同的设法.

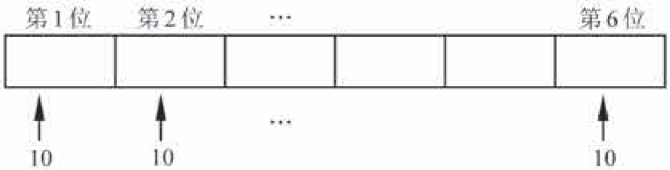


图 7

解：根据分步计数原理，不同的六位数字密码的个数为

$$N=10\times10\times10\times10\times10\times10=10^6.$$

6. 学生练习：练习 10.1 中第 1 题、第 2 题、第 3 题

7. 两个基本计数原理的联系与区别

分类计数原理与分步计数原理的共同点是：都是研究关于完成一件事，共有多少种不同的方法的问题. 它们的区别在于一个与“分类”有关，一个与“分步”有关. 如果完成一件事共需分成 n 类办法，每类办法之间是相互独立的，并且每类办法都能单独完成这件事，那么计算完成这件事的方法数需使用分类计数原理；如果完成一件事共需分成 n 个步骤，每个步骤之间相互关联，缺少任何一个步骤，这件事都无法完成，那么计算完成这件事的方法数需使用分步计数原理.

8. 综合应用举例

例 4　甲班有三好学生 8 名，乙班有三好学生 6 名，丙班有三好学生 9 名，则：

(1) 从这 3 个班中任选 1 名三好学生出席表彰会，有多少种不同的选法？

(2) 从这 3 个班中各选 1 名三好学生出席表彰会，有多少种不同的选法？

分析：(1) 从这 3 个班中任选 1 名三好学生，可以从甲班的 8 名中任选 1 名，也可以从乙班的 6 名中任选 1 名，还可以从丙班的 9 名中任选 1 名. 每一类办法都可以完成这件事，故有三类完成的办法，符合分类计数原理.

(2) 从这 3 个班中各选 1 名三好学生，要先从甲班的 8 名中任选 1 名，再从乙班的 6 名中任选 1 名，然后从丙班的 9 名中任选 1 名，分为三个步骤，缺少其中的任何一个步骤，都不能完成这件事，符合分步计数原理.

解：(1) 根据分类计数原理，不同的选法数为

$$N=8+6+9=23.$$

(2) 根据分步计数原理，不同的选法数为

$$N=8\times6\times9=432.$$

三、课堂小结

1. 分类计数原理

2. 分步计数原理

3. 两个原理的正确区分：“分类”与“分步”

解题时应紧扣原理，弄清事情完成的过程，分清是“分类”“分步”，或“分类中含分步”“分步中含分类”.

四、布置作业

练习 10.1：第 4 题、第 5 题.

五、板书设计

10.1　基本计数原理	
1. 分类计数原理	**2.** 分步计数原理
两个基本计数原理的联系与区别：	

‖习题答案、提示或解答‖

练习 10.1

1. (1) 15；　(2) 30.

2. (1) 9；　(2) 15；　(3) 15；　(4) 6；

(5) 12；　(6) 20.

3. 依题意，这样的真分数为$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{5}{7}$，共 6 个.

4. (1) 19；　(2) 480.

5. (1) 5；　(2) 6；　(3) 20；　(4) 25.

练习 10.2.1

1. (1) 是；　(2) 是；　(3) 是；　(4) 否；

(5) 否.

2. (1) Ω={发芽，不发芽}；　(2) Ω={胜，负}；

(3) $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. (1) Ω={(石头，石头)，(石头，剪刀)，(石头，布)，(剪刀，石头)，(剪刀，剪刀)，(剪刀，布)，(布，石头)，(布，剪刀)，(布，布)}；

(2) 共有 9 个基本事件；

(3) {(石头，石头)}，{(剪刀，剪刀)}，{(布，布)}.

练习 10.2.2

1. (1) $\frac{1}{2}$；　(2) $\frac{3}{8}$；　(3) $\frac{1}{2}$；　(4) $\frac{1}{6}$.

2. $\frac{3}{10}$.

3. (1) $\frac{3}{5}$；　*(2) $\frac{3}{10}$.

*4. $\frac{3}{5}$.

练习 10.3.1

1. （1）每个个体被抽到的可能性是相等的；

（2）能；

（3）与抽签法相比，随机数表法的优点是，当总体中的个体数较多时，抽取样本较为方便，缺点是生成随机数表和从中挑选号码比较麻烦.

（4）抽样调查的好处是节省人力、物力和财力. 可能出现的问题是，如果抽取的样本不能很好地代表总体，那么由样本分析出的结果就会与实际情况有偏差. 抽样调查和普查的区别如下表所示.

抽样调查	普查
节省人力、物力和财力	需要大量的人力、物力和财力
可以用于带有破坏性的检查	不能用于带有破坏性的检查
结果与实际情况之间有误差	在操作正确的情况下，能得到准确的结果

2. （1）抽签法：对职业中专二年级全部的 500 名学生进行编号，将学生的名字和对应的编号分别写在卡片上，并把 500 张卡片放入一个容器中，搅拌均匀后，每次不放回地从中抽取一张卡片，连续抽取 50 次即可.

（2）随机数表法：

第 1 步：先将 500 名学生编号，可以编为：000，001，…，499.

第 2 步：在下面的随机数表中任选一个数，例如，选出第 1 行第 7 列的数 2.

43021	92980	27768	26916	27783	84572	78483	39820
61459	39073	79242	20372	21048	87088	34600	74636
63171	58247	12907	50303	28814	40422	97895	61421
42372	53183	51546	90385	12120	64042	51320	22983
81500	13219	57941	74927	32798	98600	55225	42059
59408	66368	36016	26247	25967	49487	26968	86021

第 3 步：从选定的数 2 开始向右读，得到一个三位号码 298，在 000～499 的范围内，将它取出；继续向右读，得到 027，也在 000～499 的范围内，将它取出；继续向右读，得到 768，不在 000～499 的范围内，将它跳过. 按照这种方法继续向右读，读出的三位号码与前面取出的数重复时，就跳过不取，取到一行末尾时转到下一行从左到右继续读数，直到取出符合要求的 50 个号码即可.

3. 随机数表法：

第 1 步：先将 730 户居民编号，可以编为：001，002，…，730.

第 2 步：在下面的随机数表中任选一个数，例如，选出第 1 行第 2 列的数 3.

43021	92980	27768	26916	27783	84572	78483	39820
61459	39073	79242	20372	21048	87088	34600	74636
63171	58247	12907	50303	28814	40422	97895	61421
42372	53183	51546	90385	12120	64042	51320	22983
81500	13219	57941	74927	32798	98600	55225	42059
59408	66368	36016	26247	25967	49487	26968	86021

第 3 步：从选定的数 3 开始向右读，得到一个三位号码 302，在 001～730 的范围内，将它取出；继续向右读，得到 192，也在 001～730 的范围内，将它取出；按照这种方法继续向右读，读出的三位号码在 001～730 的范围内且不与前面取出的数重复时，把它取出，否则就跳过不取，取到一行末尾时转到下一行从左到右继续读数. 按照上述规则，得到编号：302，192，277，682，691，627，727，339，614，593，379，242，203，722，104，088，346，007，463，663，171，582，471，290，303，上述编号所对应的 25 户家庭的收入，即为所抽取的随机样本.

练习 10.3.2

1. 由系统抽样获得的样本编号成等差数列.

2. 样本中其他的编号为：55，105，155，205，255，305，355，405，455，505，555，605，655，705，755，805，855，905，955.

3. 由于身份证号码中的倒数第二位表示性别，奇数表示男性，偶数表示女性，而后三位数是 321 的观众全部是女性，因此，这样的样本缺乏代表性，不能充分地反映总体的情况.

练习 10.3.3

1. (1) 分层抽取的比例为$\frac{1}{20}$.

(2) 应抽取 4 个乙地西瓜.

2. 可采用分层抽样法.

因为抽样比例为$\frac{26}{45+20+50+15}=\frac{1}{5}$，所以甲地区应抽取 $45\times\frac{1}{5}=9$ 个销售点；乙地区应抽取 $20\times\frac{1}{5}=4$ 个销售点；丙地区应抽取 $50\times\frac{1}{5}=10$ 个销售点；丁地区应抽取 $15\times\frac{1}{5}=3$ 个销售点.

3. 因为抽样比例为$\frac{100}{500}=\frac{1}{5}$，所以不到 35 岁的应抽取 $125\times\frac{1}{5}=25$ 人；35 岁至 49 岁的应抽取 $280\times\frac{1}{5}=56$ 人；50 岁及以上的应抽取 $95\times\frac{1}{5}=19$ 人.

练习 10.4.1

*1. (1) 略.　(2) 略.　(3) 65%.

*2.

甲		乙
	6	9
9 7 4 1	7	2 4 8
8 4	8	0 3 4 9 9
5 4 2 0	9	7

*3. 略.

练习 10.4.2

1. $s^2=3.8$，$s\approx1.95$.

2. 略.

*3. 略.

4. $s_{甲}\approx0.10$，$s_{乙}\approx0.16$. 因为 $s_{甲}<s_{乙}$，所以甲的成绩比较稳定.

*5. (1) 提示：若学生分组情况不同，则相应的频率分布表、频率分布直方图有所不同. 图表略.

(2) $\overline{x}=170.1$，$s\approx5.61$.

习题十

1. (1) 12;　(2) 35.

2. 提示：按分步计数原理考虑，每个人都有 3 种不同的选法，所以共有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$ 种游览方法.

3. 16.

4. 7.

5. $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

6. $\frac{1}{2}$.

7. $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{5}{36}$.

9. 统计的总体是指该地 10 000 名学生的体重；个体是指这 10 000 名学生中每一名学生的体重；样本指从这 10 000 名学生中抽出的 200 名学生的体重；样本容量为 200.

10. 略.

11. 应采用分层抽样法进行抽取. 因为抽样比例为$\frac{21}{210}=\frac{1}{10}$，所以应抽取大型商店 $20\times\frac{1}{10}=2$ 家；抽取中型商店 $40\times\frac{1}{10}=4$ 家；抽取小型商店 $150\times\frac{1}{10}=15$ 家.

* **12.** 可列频率分布表如下.

分组	频数	频率
[20，80)	10	0.17
[80，140)	4	0.07
[140，200)	6	0.10
[200，260)	6	0.10
[260，320)	14	0.23
[320，380)	17	0.28
[380，440]	3	0.05
合计	60	1.00

频率分布直方图略.

13. $\overline{x}=206.45$，$s\approx10.63$.