职业教育规划教材

三年制中职

数学 第一册

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

三年制中职数学第一册教师教学用书/人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2018. 7 (2019.7重印)

ISBN 978-7-107-32724-7

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①人… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ①G633. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 180072 号

职业教育规划教材 三年制中职 数学 第一册 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081)
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 山东汇文印务有限公司
版 次 2018 年 7 月第 1 版
印 次 2019 年 7 月第 2 次印刷
开 本 787 毫米 × 1 092 毫米 1/16
印 张 6. 25
字 数 110 千字
定 价 13. 00 元

前　言

为了贯彻全国、全省职业教育工作会议精神，落实《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》和《教育部关于深化职业教育教学改革全面提高人才培养质量的若干意见》等要求，遵照山东省教育厅关于教材开发的有关规定，人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心发扬科学、严谨的传统作风，组织职教专家、教研员和有丰富教学实践经验的教师编写了这本与教材配套的教师教学用书.

教师教学用书主要阐述教材的编写理念，各章内容、例题及习题的设计思路；明确各章的教学重点、难点、教学要求以及要达到的教学目标；进行教材分析，帮助教师理解教材，为教师教学提供参考.

本书按教材的章节顺序，以章为单位进行编写. 每章包括“知识导图”“教学要求”“教材分析和教学建议”“参考教案”“习题答案、提示或解答”五部分：知识导图直观地揭示了每章各知识点之间的联系，教师通过知识导图能对每章的知识结构有一个整体的认识；教学要求设置的主要依据是《山东省中等职业教育数学课程标准》，按照上述课程标准，教学要求分为基本要求和发展要求；教材分析和教学建议部分，分析了每章的内容结构，知识间的递进关系和作用、地位，指出了每章内容的重点、难点，给出了每章总体的教学建议及课时分配，并针对各节内容给出了较为具体的教法与学法建议；参考教案的主要目的是帮助教师更加准确地理解教材的编写意图，并给出教学参考示例；最后的习题答案、提示或解答给出了教材中所有练习、习题的解答或提示，以供教师参考.

本书由祁志卫、王琳主编，副主编为杜红梅、李增华、刘心灵，参加编写的人员还有崔东芳、谢涛、吕平丽、郭云、王青仁、周丽萍、梁鹏、董瑞玲、王加霞、于立莉、姜永靓、胡鹏.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请使用本书的读者批评指正，联系电话：010-58758532，邮箱：longzw@pep. com. cn.

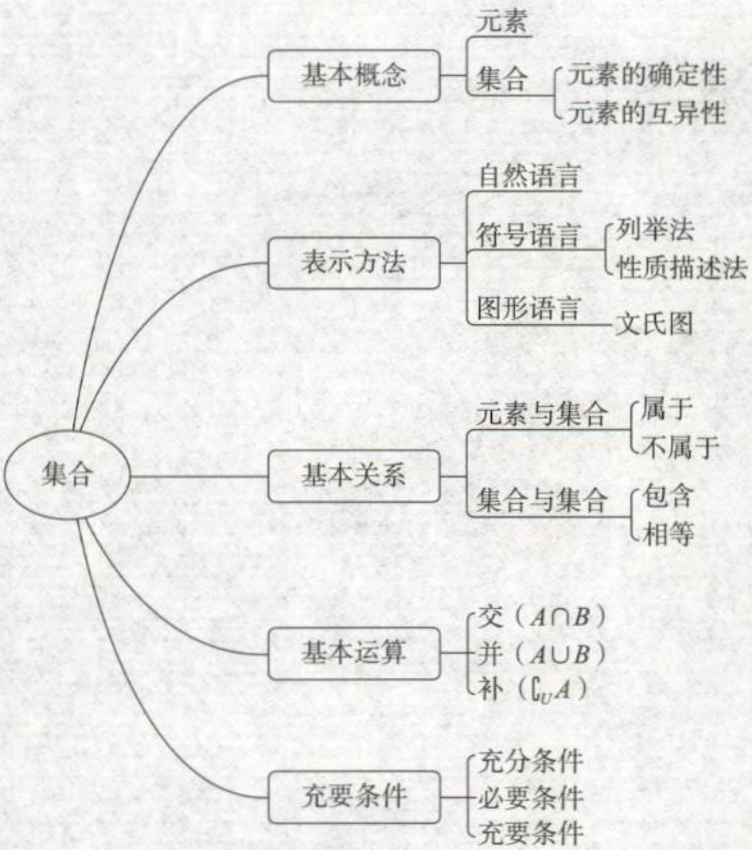
目录

第一章
集合

思想火花

种花须知百花异，育人要懂百人心.

知识导图



教学要求

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解集合的含义，理解元素与集合之间的从属关系并会用符号表示，理解集合元素的确定性和互异性，了解有限集、无限集、空集的概念，识记常见数集的字母表示.

2. 了解集合的两种表示方法——列举法和性质描述法，能选择恰当的方法表示集合，能根据需要选择自然语言、图形语言、符号语言描述不同的具体对象，感受学习集合语言的意义和作用.

3. 理解集合之间包含、相等的含义，知道空集与其他集合的关系，能识别给定集合的子集、真子集，会使用符号语言表示两个集合之间的关系.

4. 掌握两个集合的交集、并集运算，在理解全集概念的基础上，会求一个集合在全集中的补集.

5. 了解“推出”与“充分条件”“必要条件”的关系，了解“等价”与“充要条件”是同一逻辑关系.

（二）发展要求

对集合相等、子集、真子集的概念，要求掌握如下结论：

（1）$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$；

（2）包含关系具有传递性.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：集合的概念，集合的表示方法，集合之间的关系，集合的交、并、补运算，充要条件.

本章教材在学生学过初中数学并对基本数集（自然数集、整数集、有理数集、实数集）和点集（几何图形）已有一定感性认识的基础上，正式介绍了集合的概念、集合的表示方法，讨论了两个集合之间的关系，介绍了集合的交、并、补运算以及这些运算的性质，最后给出了充分条件、必要条件和充要条件.

集合知识是数学的基础之一. 集合的术语是数学的通用语言，是自然语言的提高和抽象，它比自然语言更确切，应用更广泛. 它可以帮助学生更准确、更深刻地理解有关数学知识，为学好数学打好基础. 许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计等，都建立在集合理论的基础上. 随着基础数学的发展和计算机的广泛应用，集合已逐渐成为人们工作和学习的通用语言. 学好本章内容对学生的后续学习及今后的工作都有重要作用.

本章重点是：集合的表示方法，集合之间的关系及集合的运算.

本章难点是：集合的性质描述法，充分条件、必要条件.

本章内容新概念多、符号多，有些概念和符号容易混淆，为了便于教学，提出以下教学建议供教师们参考.

1. 注意从实例出发，使学生在获得一定的感性认识的基础上再提高理性认识，以形成完整的概念.

2. 注意运用对比的方法，反复比较几个意义相近的或有从属关系的概念的异同，从而帮助学生弄清这些概念的含义、区别和联系，使学生加深对概念的理解和掌握.

3. 初学时不宜对学生要求过高，应引导学生通过后续不断地学习与应用，逐步掌握集合的相关知识，并会用其解决相关问题.

本章教学约需 11 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1	集合及其表示	约 2 课时
1.2	集合之间的关系	约 2 课时
1.3	集合的基本运算	约 3 课时

1.4　充要条件　　约 2 课时

小结与复习　　约 2 课时

1.1　集合及其表示

1.1.1　集合

1. 本小节内容的重点是集合的概念，难点是集合的元素必须具备确定性和互异性，以及借此进一步理解集合是由它的元素所唯一确定的.

2. 集合是数学中最原始的概念之一，和几何中的点、线、面等概念一样，只能做描述性说明，不能用其他更基本的概念来定义，所以人们一般称集合为不定义的概念或原始概念.

虽然学生在初中已接触过集合的概念，但他们还不太了解这个词的意义. 为了便于学生接受集合的概念，教学时应从学生已有的知识和经验出发，多举实例来说明集合的概念如同其他数学概念一样，也是从现实世界中抽象出来的.

3. 要理解集合的“确定性”和“互异性”，这是正确理解集合概念的关键. 关于集合元素的确定性和互异性，可以这样来理解：

确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是集合 A 的元素，或者不是集合 A 的元素，二者必居其一，不允许模棱两可. 例如，教材中所举的班上性格开朗的同学的全体就不能组成集合，这是因为“性格开朗”没有确定的标准.

互异性：互异性是指属于集合的元素一定互不相同. 因此，集合中相同的对象应看成同一元素，列举时不应重复出现. 例如，五位数 23 243 中所用阿拉伯数字的全体组成的集合应写成 $\{2, 3, 4\}$，而不能写成 $\{2, 3, 2, 4, 3\}$.

教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流.

4. 教材中明确地介绍了“属于”和“不属于”这两个概念. $a\in A$ 还是 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 的元素. 根据集合中元素的确定性，可知对任何元素 a 和集合 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中，有且只有一种成立.

应使学生初步掌握符号 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 的意义.

5. 教师可借助实例“由平方小于 0 的所有实数组成的集合”帮助学生理解 $\varnothing$ 的概念，并引导学生通过举例来加深理解.

6. 以数或点为元素的集合，分别称为数集或点集，这是中学数学中研究的两类主要集合. 教材中所列举的 $\mathbf{N}$，$\mathbf{N}_+$（或 $\mathbf{N}^*$），$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 等符号所代表的数集是最重要、最常用的数集，对它们各自代表的意义，应要求学生熟记.

1.1.2 集合的表示方法

1. 本小节的主要内容是表示集合的列举法和性质描述法（简称为描述法）. 难点是理解集合的特征性质. 在本小节中，只要求学生理解什么是集合的特征性质和性质描述法的意义，在以后的应用中再要求学生巩固与掌握.

2. 用描述法表示集合的常用形式是

$$A=\{x\in U \mid p\}.$$

竖线前面的 $x\in U$ 表示该集合中的元素 x 及其取值范围，竖线后面的 p 表示元素 x 所具有的特征性质. 换句话说，属于集合 A 中的元素 x 都具有特征性质 p，不属于集合 A 的元素都不具有特征性质 p.

在教学中，一定要讲清一个集合的特征性质的意义. 通过这一内容的学习使学生懂得，认识事物的关键是抓住事物的本质属性. 在教学中应通过列举适量的例子，引导学生讨论，并创设适当的情境，让学生自主探索一些常见的集合的特征性质，以加深学生对集合特征性质的理解.

如果元素 x 在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值，则元素 x 的取值范围可略去不写. 例如，$\{x \mid p\}$ 表示在实数集 $\mathbf{R}$ 中，具有特征性质 p 的元素组成的集合.

3. 一个集合是用列举法表示还是用性质描述法表示，一般要根据我们研究问题的特点而定. 当要着重研究集合的特征性质时，用性质描述法比较好. 当只是观察集合的一些元素，又可方便地列出该集合的元素时，则可用列举法.

习题中，要求学生用适当的方法表示集合，就是要求学生用两种方法中较好的一种来表示集合. 但不论学生用哪种方法表示集合，都应当算正确. 这里的要求不宜过高.

4. 在教学中，要注意随时纠正学生常犯的一些错误. 例如，集合 $\{x \mid x$ 是整数$\}$ 不应写成 {全体整数}，因为大括号对“{}”已表示“全体”的意思；实数集 $\mathbf{R}$，不能写成 $\{\mathbf{R}\}$；等等.

5. 有时为了形象、直观起见，可用平面上的一条封闭曲线所包含的区域表示一个集合，这种方法通常称为文氏图法. 还可以用这种方法表示集合之间的关系.

6. 例 1 中的第（3）题是一个点集，在讲课时一定要给学生讲清楚为什么要那样表示. 讲完后可利用课后的练习进行巩固.

7. 要帮助学生正确理解 0 与 $\{0\}$ 的关系. 0 是一个数，它可以是一些集合（数集）的元素. 如 $0\in\{0, 1\}$，$0\in\{0, 5, 7\}$ 等；而 $\{0\}$ 是一个集合，它只含有一个元素 0，即 $0\in\{0\}$.

1.2 集合之间的关系

1. 本节内容是两个集合之间的包含关系和相等关系，其中最重要的是包含关系. 子集是本节的重点.

2. 要正确阐述子集的概念，“A 是 B 的子集”的意义是，A 的任意元素都是 B 的元素，即由 $x\in A$ 可推出 $x\in B$.

要讲清子集和真子集的区别. 真子集的特征性质“A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A”中的两个条件是缺一不可的. 在子集的教学中，对概念的解释，语言必须确切.

3. 要注意区分包含于、包含、真包含于、真包含这些概念不同的含义和不同的表示方法.

$A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 是互逆的，$A\subseteq B$ 是 $A\subsetneqq B$ 的必要条件而非充分条件，而 $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是同义的.

$A\subseteq B$ 包括 $A\subsetneqq B$ 与 $A=B$ 两种情况，其中有且必有一种成立.

$A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 这对互逆的命题，一般不同时成立，如果同时成立，则 $A=B$.

4. 本节有两个发展要求.

(1) 集合包含关系的传递性，它是对子集、真子集概念的进一步理解和应用.

(2) 两个集合的相等，教材中是通过两个集合的元素完全相同的例子来说明的，用“如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个集合相等”来描述两个集合相等的本质比较直观，容易理解. 实际上，因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素又都是 A 的元素. 这就是说，集合 A 与集合 B 的元素完全相同，因而我们说 A 与 B 是相等的集合. 这样有利于学生理解两个集合相等的合理性. 由此，我们还可以得到一种证明方法：如果要证明 $A=B$，只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可. 但一般不要求学生使用上述方法证明两个集合相等，只要求学生明白两个集合相等的含义即可.

5. 教学中要提醒学生注意“$\in$”与“$\subseteq$”这两个符号的不同含义. 其中，“$\in$”是属于符号，只能用在元素与集合的关系上，表示元素与集合间的从属关系；而符号“$\subseteq$”只能用在两个集合之间，表示集合间的包含关系.

另外，教师还要帮助学生区分$\varnothing$和 $\{0\}$. $\varnothing$是不含任何元素的集合，而 $\{0\}$ 是只含有数 0 的集合.

6. 要强调空集$\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

1.3 集合的基本运算

本节重点是集合的交、并、补运算，难点是补集的概念和集合的运算.

1.3.1 交集与并集

1. 教材首先用实例给出两个集合的交集，进而用文字叙述给出了交集的定义. 对于两个集合交集的理解，不仅要会用自然语言描述，还要学会用符号表示，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

2. 由交集的定义，教材给出了以下性质：

(1) $A\cap B=B\cap A$；

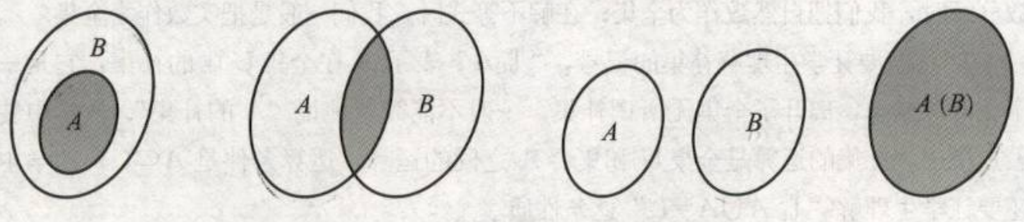
(2) $A\cap A=A$；

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(4) 如果 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

3. 对交集概念和性质的教学可通过文氏图引导学生讨论.

当集合 A，B 都不是空集时，它们之间的关系可用下图表示：



(1)　(2)　(3)　(4)

当集合 A 或 B 为空集时，教师可通过实例引导学生讨论.

4. $A\cup B$ 是由属于集合 A 或 B 的所有元素组成的集合. A 与 B 的公共元素在 $A\cup B$ 中只能出现一次. 对于两个集合并集的理解，不仅要求学生会用自然语言描述，还要学会用符号表示，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

5. 由并集的定义可直接推出以下性质：

(1) $A\cup B=B\cup A$；

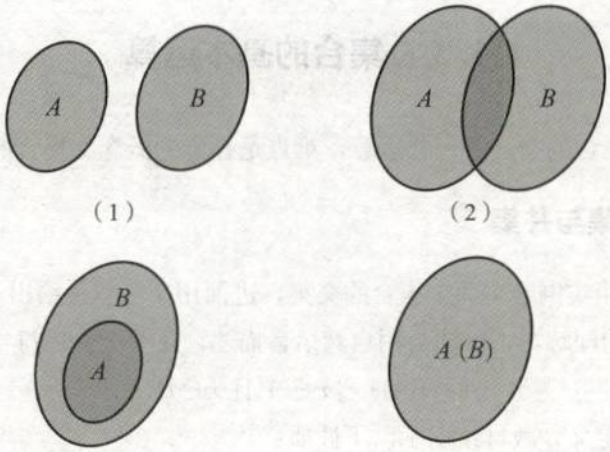
(2) $A\cup A=A$；

(3) $A\cup\varnothing=A$；

(4) 如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

6. 对并集概念和性质的教学也可以通过文氏图引导学生讨论.

当集合 A，B 都不是空集时，它们之间的关系可用下图表示：



(1) (2) (3) (4)

当集合 A 或 B 为空集时，教师可通过实例引导学生讨论.

1.3.2 补集

1. 讲补集的概念时，首先要让学生了解全集的概念. 在数学研究中，明确在什么范围内讨论问题是非常重要的，这是学习全集概念的意义. 例如，在研究自然数的因数分解时，我们把自然数作为全集；在解不等式时，我们一般是把实数作为全集.

2. 注意要让学生理解补集的记号，“$\complement_U A$”表示 A 在全集 U 中的补集，它是一个相对的概念，离开了全集无所谓补集，一般不能简单地说“A 的补集”. 教学中要着重指出，补集的运算是全集 U 和集合 A 之间的运算，运算条件是 $A \subseteq U$，教学中还要让学生理解“$\complement_U A \cup A = U$”这条性质.

对于补集的定义可以这样来理解：如果从全集 U 中取出它的一个子集 A 的全部元素，则所剩下来的元素组成的集合就是 $\complement_U A$. 由此，我们很容易想起“差”的概念，事实上，补集 $\complement_U A$ 就是全集 U 与它的一个子集 A 的差集. 教学时可多用文氏图的直观性帮助学生理解.

1.4 充要条件

1. 本小节的重点是充分条件、必要条件与充要条件. 本小节的难点是正确理解这三个概念，并在分析中做出正确判断.

2. 本小节要求学生理解充分条件、必要条件和充要条件的概念，并能正确地将“如果 p，那么 q”形式的真命题改写为用充分条件或必要条件表述的命题，能对命题的同一逻辑关系做不同形式的表达.

要注意，在本教材中，命题“如果 p，那么 q”为真时，才与“p 推出 q”“p 是

q 的充分条件”和“q 是 p 的必要条件”表达的是同一逻辑关系.

3. 本节内容中，在学生已学过的知识范围内，要求学生能根据给出的条件，判断一个命题是另一个命题的什么条件，但一般不要求证明.

判断 p 是 q 的什么条件，主要根据是“$p \Rightarrow q$”或“$q \Rightarrow p$”是否成立. 若“$p \Rightarrow q$”为真，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；如果“$p \Rightarrow q$”且“$q \Rightarrow p$”同时成立，则称 p 是 q 的充要条件或 q 是 p 的充要条件.

4. 充分或必要条件不是新的知识，只是“推出”的另一种说法.

教学开始时，只要求学生能把形如“$p \Rightarrow q$”的真命题改用“p 是 q 的充分条件”“q 是 p 的必要条件”来叙述就可以了. 不要在“充分”和“必要”两个词上做过多的解释. 这两个词在日常生活中也经常用到，并且表达的意义与数学上的意义相同. 即使如此，学生也未必对这两个词有清晰的理解. 如果过多地用自然语言进行解释，反而会使学生糊涂. 教师只要指出，“$p \Rightarrow q$”与“p 是 q 的充分条件”“q 是 p 的必要条件”这三句话表达的是同一逻辑关系就可以了.

经过一段时间的练习，学生能逐步加深对充分条件、必要条件的理解.

‖参考教案‖

1.1.1 集　　合

教学目标

1. 初步理解集合概念，理解集合中元素的性质.

2. 理解集合与元素的关系.

3. 培养学生分析、比较、归纳的逻辑思维能力.

教学重点

集合的概念.

教学难点

正确地理解集合的概念.

教学方法

问题教学法.

教学过程

一、创设情境、导入教学

1. “物以类聚，人以群分”“西藏高原上的所有藏羚羊”“中国的所有大熊猫”“我们班级的所有同学”……这些都给我们以集合的印象.

2. 引导学生回顾初中学过的集合.

问题 1：初中学过哪些集合？

问题 2：初中哪些几何图形是用点的集合来定义的？

给出一些例子，师生一起分析，为给出集合的定义做好准备.

(1) 某中等职业学校高一年级学生的全体；

(2) 方程 $x^2=4$ 的所有实数根；

(3) 所有的平行四边形；

(4) 平面上到一条线段的两个端点距离相等的点的全体.

那么，集合的含义是什么呢？

二、提出问题、自学阅读

教师提出以下问题，要学生带着问题自学教材：

(1) 什么叫集合、元素？

(2) 元素与集合之间的关系是什么？用什么符号来表示？

(3) 集合中元素有什么性质？

(4) 集合的分类有哪些？

(5) 特殊数集用什么符号来表示？

三、师生互动、提炼知识

1. 集合与元素

(1) 集合的概念.

一般地，把一些能够确定的对象看成一个整体，我们就说，这个整体是由这些对象的全体组成的集合（简称为集）. 组成集合的每个对象都称为集合的元素.

(2) 集合与元素的表示方法.

一个集合，通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，它的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示.

(3) 请同学举出一些集合的例子.

教师板书，并让学生说出所给例子中的元素.

注：教师要在学生自学的基础上把集合与元素的定义讲透彻.

2. 元素与集合之间的关系

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

强调个体与整体之间的关系，用符号"$\in$""$\notin$"表示.

这里可要学生结合前面的例子，用符号"$\in$""$\notin$"表示元素与集合之间的关系. 要重点指出符号连接的是元素与集合.

3. 集合中元素的性质

关于数学中的集合概念，要再做如下说明：

(1) 确定性：作为集合的元素，必须是能够确定的. 这就是说，不能确定的对象，就不能组成集合. 例如，高一（1）班高个子同学的全体，就不能组成集合. 这

是由于没有规定多高才算是高个子，因而“高个子同学”不能确定.

（2）互异性：由一些元素组成集合时，每个元素不能重复出现．这就是说，集合中的任意两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素．例如：由555这个数的所有数字组成一个集合，这个集合中只有一个元素5，而不是三个元素.

4. 集合的分类

集合可按元素的个数进行分类.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**.

特别地，我们把不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$．例如由平方等于-1的所有实数组成的集合是空集.

5. 常用的数集

我们约定用一些大写英文字母表示数学中一些常用的数集.

常用数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

四、演练反馈

进行题组练习.

题组一：

说出下面集合中的元素：

（1）大于2且小于7的偶数组成的集合；

（2）平方等于1的实数组成的集合.

题组二：

下列符号表示的关系是否正确？

（1）$0\in\mathbf{N}_+$；　（2）$-\dfrac{3}{2}\in\mathbf{Q}$；　（3）$\pi\notin\mathbf{Q}$；

（4）$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$；　（5）$-3\notin\mathbf{Z}$；　（6）$0\in\mathbf{N}$；

（7）$0\in\varnothing$；　（8）$-3\notin\varnothing$.

题组三：

下列语句描述的对象是否能组成一个集合？

（1）小于10的自然数的全体；

（2）某中等职业学校高一（1）班所有性格开朗的女生；

（3）构成英文单词“happy”的所有字母；

（4）非常接近1的实数；

（5）小于2且大于3的自然数的全体；

(6) 山东省所有的小河流.

题组四：

用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 1 ______ **N**，0 ______ **N**，-4 ______ **N**，0.3 ______ **N**，$\sqrt{2}$ ______ **N**；

(2) 1 ______ **Z**，0 ______ **Z**，-4 ______ **Z**，0.3 ______ **Z**，$\sqrt{2}$ ______ **Z**；

(3) 1 ______ **Q**，0 ______ **Q**，-4 ______ **Q**，0.3 ______ **Q**，$\sqrt{2}$ ______ **Q**；

(4) 1 ______ **R**，0 ______ **R**，-4 ______ **R**，0.3 ______ **R**，$\sqrt{2}$ ______ **R**；

(5) 1 ______ $\varnothing$，0 ______ $\varnothing$，-4 ______ $\varnothing$.

五、小结

与学生一起对本节课进行总结.

六、布置作业

练习册中集合的练习题.

七、板书设计

1.1.1 集　合	
1. 集合	**4.** 集合的分类
2. 元素与集合之间的关系	**5.** 特殊数集的表示
3. 集合中元素的性质	

习题答案、提示或解答

练习 1.1.1

1. (1) 4，6；　(2) -1，1.

2. (1) $\in\in\notin\notin\notin$；　(2) $\in\in\in\notin\notin$；

(3) $\in\in\in\in\notin$；　(4) $\in\in\in\in\in$；

(5) $\notin\notin\notin$.

3. (1) 能；　(2) 能；

(3) 否，违背集合元素的确定性；　(4) 能；

(5) 否，违背集合元素的确定性.

练习 1.1.2

1. (1) $\{4, 6, 8\}$；　(2) $\{-1, 1\}$；　(3) $\{5\}$；

(4) {1 月，3 月，5 月，7 月，8 月，10 月，12 月}；

(5) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

2. (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；

(2) $\{(0, 0), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (-2, 3), (-1, -2), (2, -3)\}$.

3. (1) $\{x \mid x$ 是山东省省会$\}$;

(2) $\{x|x=2n-1,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{x|x=2n+1,\ n\in \mathbf{Z}\}$;

(3) $\{x||x|=3\}$;

(4) $\{x|4x-5<3\}$.

练习 1.2

1. (1) $A=B$; (2) $C\subsetneqq D$; (3) $E\supsetneqq F$.

2. (1) $\in$; (2) $=$; (3) $\subsetneqq$;

(4) $\supsetneqq$; (5) $\subsetneqq$; (6) $\supsetneqq$;

(7) $\in$; (8) $\subsetneqq$; (9) $\subsetneqq$;

(10) $\notin$.

3. 集合 A 的所有子集为：$\varnothing$，$\{s\}$，$\{t\}$，$\{s,\ t\}$.

在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{s,\ t\}$，剩下的都是 A 的真子集.

4. (1) $A=B$; (2) $D\subsetneqq B\subsetneqq A$，$D\subsetneqq C\subsetneqq A$.

练习 1.3.1

1. $A\cap B=\{5,\ 7\}$，$A\cup B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$.

2. $A\cap B=\{b,\ d\}$，$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$.

3. $A\cap B=\{x|x<-1\}$，$A\cup B=\{x|x<3\}$.

4. $A\cap B=\{x|2<x<6\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.

5. $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{-3,\ 3\}$.

6. $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{1,\ 2\}$.

练习 1.3.2

1. $\complement_U A=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\complement_U B=\{1,\ 2,\ 7,\ 8\}$.

2. $\complement_U A=\{x|x\geqslant 0\}$.

3. $\complement_U A=\{3,\ 4,\ 6\}$，$\complement_U B=\{1,\ 6\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{6\}$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$.

4. $\complement_U A=B$，$\complement_U B=A$.

练习 1.4

1. (1) 充要; (2) 略.

2. (1) 充分条件; (2) 充分条件;

(3) 充要条件; (4) 必要条件.

3. (1) “x 是 12 的约数”是“x 是 36 的约数”的充分条件，“x 是 36 的约数”是“x 是 12 的约数”的必要条件;

(2) “$x^2=y^2$”是“$x+y=0$”的必要条件，“$x+y=0$”是“$x^2=y^2$”的充分条件.

4. 略.

习题一

1. (1) {红色，黄色}；

(2) {珠穆朗玛峰}；

(3) $\{x\in\mathbf{Z}\,|\,1<x<100\}$；

(4) $\{x\,|\,x=4n,\ n\in\mathbf{N}\}$；

(5) $\{0\}$；

(6) $\{-2,\ 2\}$；

(7) $\{(x,\ y)\,|\,y=2x+1\}$；

(8) $\{-3,\ 3\}$.

2. (1) 正确；

(2) 错误；

(3) 错误；

(4) 正确.

3. (1) $A\cap B=\{3,\ 4\}$，$B\cap C=\{6,\ 7\}$，$A\cap C=\varnothing$；

(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$B\cup C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

4. $A\cap B=B$，$A\cup B=A$.

5. (1) $\complement_U A=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\complement_U B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{1,\ 2,\ 6\}$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$；

(2) 略.

6. (1) $\notin$；

(2) $\in$；

(3) $\supsetneqq$；

(4) $\subsetneqq$；

(5) $\supsetneqq$；

(6) $\subsetneqq$.

7. (1) 充分条件；

(2) 必要条件；

(3) 必要条件；

(4) 充要条件；

(5) 充分条件；

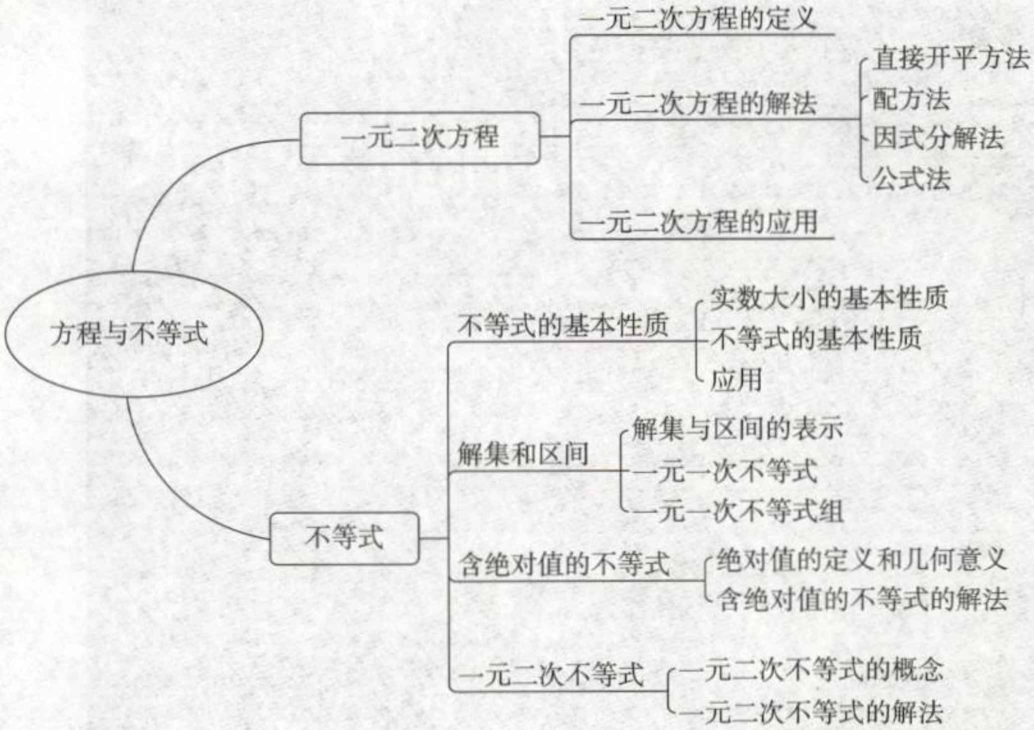
(6) 充分条件.

第二章
方程与不等式

思想火花

身教胜于言教，蛮教不如不教.

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

(一) 基本要求

1. 掌握用配方法解一元二次方程的方法，并能熟练地解一元二次方程.

2. 理解实数大小的基本性质和不等式的基本性质.

3. 掌握用作差比较法判断实数大小的基本方法.

4. 明确不等式与集合的联系，掌握一元一次不等式（组）的解法，掌握区间的概念，会用区间和集合的描述法表示不等式的解集.

5. 会解简单的含有绝对值的不等式和一元二次不等式.

(二) 发展要求

会用配方法解一元二次不等式.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：一元二次方程，不等式的基本性质，含绝对值的不等式，一元二次不等式.

本章首先复习了用配方法解一元二次方程；然后通过实例介绍了实数大小的比较，从而引入了作差比较的方法，并给出不等式的基本性质，为后续解不等式打下基础；通过复习初中学过的一元一次不等式（组），介绍用区间表示解集的方法；最后是含有绝对值的不等式的解法，并把一元二次不等式通过配方法转化为等价的含有绝对值的不等式，从而得到相关的解集.

不等式与方程、函数密不可分，它们都是反映客观事物变化规律及其关系的模型. 不等关系是现实世界中的一种基本数量关系. 建立不等观念、处理不等关系是非常重要的. 不等式的解法是数学教学的重点之一，涉及的知识较多且应用广泛，它几乎可渗透到中学数学的所有领域中，涉及数形结合、类比、分类讨论等数学思想，对数学教学产生广泛而深远的影响.

配方法是中学数学中的一种重要数学方法，它主要适用于：二次方程、二次不等式、二次函数、二次代数式的变形与求解，缺 xy 项的二次曲线的平移变换等问题. 在学习本章前，建议教师对配方法进行复习.

本章重点是：不等式的解集和区间，一元二次不等式的解法.

本章难点是：一元二次不等式的解法.

学好本章的关键是：熟练掌握配方法和不等式的基本性质.

本章共分两部分内容. 第一部分是一元二次方程，第二部分是不等式. 这两部分内容在初中阶段学生已有初步认识，为了帮助学生进一步学习本章内容，便于教师教学，提出以下教学建议供教师们参考.

1. 通过实例和练习让学生复习、掌握配方法.

2. 要注意配方法的统领作用，让学生学会用配方法解一元二次方程、解一元二次不等式.

3. 本章教学中，可让学生通过具体情境，感受在日常生活和现实世界中存在大量的不等关系，理解不等式对于刻画不等关系的意义和价值.

4. 要注意在表示区间时体现数形结合的思想方法.

本章教学约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1	一元二次方程	约 1 课时
2.2	不等式	约 6 课时
小结与复习		约 1 课时

2.1 一元二次方程

1. 本节的主要内容是解一元二次方程. 重点要求学生能熟练、准确地用配方法解出简单的一元二次方程. 这是后续学习一元二次不等式解法的基础.

2. 本节的教学要求是：掌握用配方法解一元二次方程，体会化归的数学思想.

3. 这一节首先用实例引入一元二次方程，旨在给学生呈现数学建模的思想，在本节中要求学生了解这种建模思想. 解一元二次方程的方法有很多，但在本节中要求学生必须掌握用配方法解一元二次方程. 通过讲解例题使学生能够熟练地应用配方法解一元二次方程. 教师可根据学生的实际水平增加或减少例题. 教学中要注意引导学生分析总结一元二次方程解的情况. 对于因式分解法解一元二次方程，这里不做要求.

4. 在本节教学中应该注意下面的问题：

对于缺少一次项或常数项的一元二次方程，用直接开平方或因式分解的方法解方程，而不用配方法或求根公式去解. 如果学生基础较差，不会用直接开平方法解类似于 $x^2=4$ 或 $(x-1)^2=4$ 的一元二次方程，则应该在本节课的开始以例题形式加以讲解.

一元二次方程的实数根或者有两个，或者没有，在解一元二次方程时注意不要失根. 例如 $x^2=2x$，不能把 x 从等号的两边消去，否则会丢失 $x=0$ 这一个根.

5. 本节中体现了把未知转化为已知的化归思想，在用配方法解方程中体现了把二次方程转化成一次方程的化归思想.

2.2 不 等 式

2.2.1 不等式的基本性质

1. 本小节的主要内容是比较两个实数的大小和不等式的基本性质. 重点是作差比较法.

2. 本小节的教学要求是：

(1) 理解实数大小的基本性质，并掌握作差比较法；

(2) 进一步巩固配方法；

(3) 掌握不等式的三个基本性质以及推论.

3. 这一小节首先用实例引入比较实数大小的方法，旨在引起学生的兴趣，并让学生体会到数学与生活联系的紧密性，同时让学生了解数学建模的思想. 然后通过实例的解决引出用作差比较的方法判断两个实数的大小，要求学生能判断简单的实数或代数式值的大小. 在化简过程中需要用到配方的题目，要作为重点讲解，以便使学生继续巩固配方法. 教师可根据学生水平增加这部分的例题和练习. 最后把不等式的基本性质呈现给学生，对于不等式的基本性质，本节只是回顾初中所学的不等式的基本性质，但对不等式的基本性质不要求证明，教学中要求学生掌握性质的简单应用. 不

等式的其他性质如下（供教师参考）：

（1）对称性：如果 $a>b$，则 $b<a$；

（2）传递性：如果 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

（3）如果 $a+c>b$，则 $a>b-c$；

（4）如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；

（5）如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$；

（6）如果 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}_+$，$n>1$）；

（7）如果 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}_+$，$n>1$）；

（8）如果 $a>b$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

教师要注意教材中的性质，这是讲解不等式解法的理论依据，要让学生掌握.

4. 本小节例 1（2）（3）（4）是比较两个代数式的大小，教学时应该指出比较两个代数式的大小，实际上是比较它们值的大小，而这又归结为判断它们差的符号.

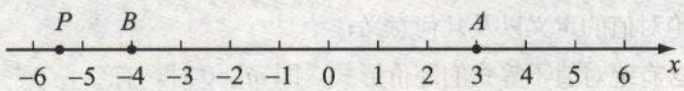
讲解例 1（3）（4）时，应该强调变形的方法——配方法. 将两个代数式的差进行配方转化为几个非负实数之和，然后判断正负. 代数式中的配方与解方程中的配方略有不同：代数式中的配方是恒等变形，为把二次项系数化为 1，各项都提出二次项系数；解方程中的配方是同解变形，为把二次项系数化为 1，各项都除以二次项系数.

5. 在教学中要注意下面的几个问题：

要明确“大于”“小于”“不大于”“不小于”“不超过”“至多”“至少”等等这些描述不等关系的语言所对应的不等号各是什么. 要让学生正确理解和使用表示不等关系的关键词语.

在教学时，教师也可以用人民教育出版社编写的中等职业教材“数学（提高版）”的处理方式，即先结合数轴介绍实数大小的性质，再介绍开始的例题和作差比较法. 参考内容如下：

数轴就是规定了原点、正方向和单位长度的直线. 我们知道，实数与数轴上的点之间可以建立一一对应关系. 例如，点 A 与数 3 对应，点 B 与数 -4 对应等，如图所示. 可以看到，当数轴上一动点 P 从左向右移动时，它对应的实数就从小到大变化. 即数轴上的任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大.



在类似上图的数轴上，如果点 A 在点 B 的右边，点 A 对应的实数为 a，点 B 对应的实数为 b，那么表示 b 需要加上一个正数才能得到 a，即 a 减去 b 的差是一个正数，因此，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了. 于是我们得到实数大小的性质.

2.2.2 不等式的解集与区间

1. 本小节的主要内容是一元一次不等式（组）的解法，用集合描述不等式的解（集）和区间的概念. 重点是一元一次不等式（组）的解法，难点是用区间表示不等式的解集.

2. 本小节的教学要求是：

（1）掌握一元一次不等式（组）的解法，明确它们与方程的解的区别，会利用数轴表示（确定）不等式的解集；

（2）掌握用区间表示一元一次不等式（组）解集的方法；

（3）体会数形结合、类比等数学思想方法.

3. 本小节首先通过实例建立学生所熟知的一元一次不等式，根据不等式的基本性质，类比方程的解法来研究不等式的解法，然后给出了一元一次不等式组的概念，并研究了它的解法，最后介绍了用区间表示不等式解集的方法. 在教学过程中，穿插了在数轴上表示（确定）不等式解集的内容.

4. 解不等式就是以不等式的基本性质为依据，利用数与式的运算法则，对所给的不等式进行变形、化简，直到能表明未知数的取值范围为止. 解不等式组的基本思路是先求出组成这个不等式组的各个不等式的解集，再求它们的交集. 这部分内容虽然学生在初中学过，但不一定掌握得好，我们要通过复习和练习，力求使学生达到熟练掌握的程度.

5. 区间是一种集合的表示方法，教学时要紧密结合不等式的表示方法帮助学生加以理解记忆.

6. 通过例题分析，有意识地向学生渗透数形结合、类比、分类讨论等重要的数学思想，培养学生的数学思维能力和数学语言表达能力.

2.2.3 含有绝对值的不等式

1. 本小节的重点是含有绝对值的不等式的解法. 难点是理解绝对值的几何意义. 熟练掌握含有绝对值的不等式的解法是学习下一小节解一元二次不等式的前提.

2. 本小节的教学要求是：

（1）理解绝对值的定义以及几何意义；

（2）掌握含有绝对值不等式的等价形式，即 $m>0$ 时，有

$$|x|<m \Leftrightarrow -m<x<m,$$

$$|x|>m \Leftrightarrow x<-m \text{ 或 } x>m;$$

（3）掌握简单的含有绝对值不等式的解法.

3. 本小节首先复习初中所学实数绝对值的定义和几何意义，然后由特殊到一般，

给出了含有绝对值的不等式的等价形式，给出含有绝对值不等式的解集. 在教学中，不要加深题目的难度，只限于绝对值号内为一元一次的代数式，并且是数字系数的题目.

4. 解含有绝对值不等式的关键是，把含有绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式，这样就把解含有绝对值的不等式归结为解一般的不等式.

5. 教材中，不等式的解集都已用数轴表示，这旨在让学生体会数形结合的思想，并从几何的角度理解含有绝对值不等式解集的意义.

2.2.4　一元二次不等式

1. 本小节的重点是掌握一元二次不等式的解法.

2. 本小节教学的基本要求：

(1) 了解绝对值不等式与一元二次不等式的联系，在此基础上，会解简单的一元二次不等式；

(2) 进一步理解用数轴表示不等式解集的方法；

(3) 体会类比、转化等数学思想方法.

本小节教学的发展要求：

会用配方法解一元二次不等式.

3. 本小节首先给出一元二次不等式的定义，然后给出了一个等价不等式的结论，即 $m>0$ 时，有

$$x^2>m\Leftrightarrow|x|>\sqrt{m}\,,$$

$$x^2<m\Leftrightarrow|x|<\sqrt{m}\,,$$

这是不等式的基本性质的推论，也是把一元二次不等式转化为含有绝对值不等式的依据.

4. 教材中的例 8 (1) (2) 是直接利用 $m>0$ 时，由

$$x^2>m\Leftrightarrow|x|>\sqrt{m}\,,$$

$$x^2<m\Leftrightarrow|x|<\sqrt{m}$$

进行解题，为下面解一般形式的一元二次不等式打基础. 建议让学生练习熟练之后，再进行下面的例题讲解. 而例 9 和例 10 为本节的发展要求，教师要根据学生的实际情况进行讲解. 这两个例题，教师可以对比用配方法解一元二次方程的步骤进行讲解，得到 $(x+s)^2>t$ 或 $(x+s)^2<t$ 的形式后，如果 $t>0$，转化成等价的含有绝对值的不等式，然后解含有绝对值的不等式. 当 $t=0$ 或 $t<0$ 时，教师要注意有意识地把下面的情况给学生讲解清楚.

	$(x+s)^2>t$	$(x+s)^2\geqslant t$	$(x+s)^2<t$	$(x+s)^2\leqslant t$
$t=0$	$(-\infty, -s)\cup(-s, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\{x\mid x=-s\}$
$t<0$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\varnothing$

但这个表格不要求学生记忆，而是要求学生根据实数的特点，理解上面的 8 种情况，从而能熟练地得到正确的解集.

用配方法解一元二次不等式不用讨论 $\Delta>0$、$\Delta<0$、$\Delta=0$ 三种不同情况，只要看 t 的符号即可.

5. 用配方法解一元二次不等式 $x^2+bx+c>0$ （$b\neq 0$）的一般步骤为：

（1）移项，配方得 $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2>\dfrac{b^2-4c}{4}$；

（2）如果 $\dfrac{b^2-4c}{4}>0$，则等价于 $\left|x+\dfrac{b}{2}\right|>\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$，即

$$x+\frac{b}{2}<-\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}\text{或}x+\frac{b}{2}>\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2},$$

解得 $x<-\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$ 或 $x>-\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$，得出原不等式的解集；

（3）如果 $\dfrac{b^2-4c}{4}=0$，则原不等式的解集为 $\left\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2}\right\}$；

（4）如果 $\dfrac{b^2-4c}{4}<0$，则原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

如果二次项系数不为 1，则首先两边同除以二次项系数，使其变为 1. 对于一元二次不等式的其他情况，可以采取与此类似的办法求解. 这个一般步骤教师不必要求学生掌握，让学生在以后的学习中自己总结即可.

6. 本小节中只介绍用配方法解一元二次不等式，其他方法不再向学生介绍. 在第三章中运用二次函数的知识，介绍用图像法解一元二次不等式，可以简化解一元二次不等式的步骤. 这样的安排，既承前启后，又分散了难点.

‖参考教案‖

2.2.4　一元二次不等式

教学目标

1. 理解一元二次不等式的概念.

2. 能通过配方把一元二次不等式转化为同解的含有绝对值的不等式，并求其解集.

3. 进一步理解用数轴表示不等式解集的方法.

4. 体会数形结合、转化、分类讨论等数学思想方法，提高运算能力、逻辑思维能力.

教学重点

掌握一元二次不等式的解法，并准确地求出一元二次不等式的解集.

教学难点

将一元二次不等式转化为同解的含有绝对值的不等式.

教学方法

启发式、讲练结合.

教学过程

一、复习回顾

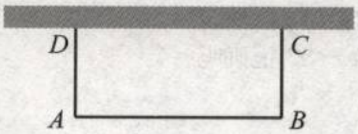
1. 用配方法解一元二次方程.

2. 不等式性质的推论：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$.

3. 含有绝对值的不等式的解法.

二、引入新课

用一堆木板制成 8 米长的栅栏，围成一个矩形的院子 $ABCD$（如图所示），院子的一侧 CD 是房屋的墙（足够长，不必再用栅栏去围），如果要使围成的矩形院子的面积不小于 6 平方米，求与墙正对的栅栏材料 AB 的长度的取值范围.



教师引导学生得到以下结果：

(1) 矩形面积公式 $S_{ABCD}=AB\times BC$；

(2) $AB+BC+AD=8$ 米；

(3) 如果设 AB 的长度是 x 米，那么 BC 的长度是 $\dfrac{8-x}{2}$ 米；

(4) 用含有 x 的代数式表示出矩形 $ABCD$ 面积是 $x\times\dfrac{8-x}{2}$ 平方米.

教师板书，进行解题.

解 设与墙正对的栅栏材料 AB 长度为 x 米，则 BC 的长度是 $\dfrac{8-x}{2}$ 米.

由矩形院子的面积不小于 6 平方米可得

$$x\times\frac{8-x}{2}\geqslant 6,$$

$$8x-x^2\geqslant 12,$$

$$x^2-8x+12\leqslant 0.$$

教师设疑：如何解这个不等式？引出一元二次不等式.

三、讲授新课

1. 一元二次不等式的概念

只含有一个未知数，未知数的最高次项的次数是 2 的整式不等式称为一元二次不等式，它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 \ (a\neq 0).$$

教师给出下列式子，要学生判断是否是一元二次不等式.（学生口答.）

(1) $x^2-3x+5\leqslant 0$；　(2) $x^2-9\geqslant 0$；　(3) $3x^2-2x>0$；

(4) $x^2+5<0$；　(5) $x^2-2x\leqslant 3$；　(6) $3x+5>0$；

(7) $(x-2)^2\leqslant 4$；　(8) $x^2<4$.

2. 解形如 $x^2<m$ 或 $x^2>m$ $(m>0)$ 的一元二次不等式

(1) 师问：你能写出 $x^2<4$ 的解集吗？

(学生思考，尝试回答.)

师问：$x^2<4$ 和 $|x|<2$ 的解集相同吗？

(学生思考，教师让学生讨论，并让学生说出自己所得到的结论，并说明为什么.)

教师提示：不等式性质的推论：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$.

(学生继续讨论.)

师问：$x^2<4\Leftrightarrow x^2<2^2\Leftrightarrow x<2$ 正确吗？

(学生发表不同的意见.)

教师给出结论：这是错误的. 原因是忽略了推论的条件“$a>0$，$b>0$”.

师问：怎么解决这个问题呢？

(学生思考.)

教师提示：用绝对值解决.

教师讲解：$x^2<4\Leftrightarrow |x|^2<2^2\Leftrightarrow |x|<2$.

(学生得到正确的答案：解 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$，所以原不等式的解集为 $(-2, 2)$，学生在数轴上表示出解集.)

(2) 师问：你能写出 $x^2\geqslant 9$ 的解集吗？

(学生仿照上面的提问，自己独立解决.)

教师给出正确答案：原不等式等价于 $|x|\geqslant 3$，得到原不等式的解集为 $(-\infty, -3]\cup[3, +\infty)$.

一般情况：当 $m>0$ 时，有

$$x^2>m\Leftrightarrow |x|>\sqrt{m},$$

$$x^2<m\Leftrightarrow |x|<\sqrt{m}.$$

课堂练习：练习 2.2.4　1.（1）（2）.

3. 解简单的一元二次不等式

例 8　解不等式：

（1）$(x+2)^2<4$；　　　　（2）$(x-1)^2\geqslant 9$.

教师给出（1）的解题步骤，（2）学生自行尝试解决，部分学生板演. 教师给予指导.

课堂练习：练习 2.2.4　2.（1）（2）.

4. 发展要求：解一般形式的一元二次不等式

例 9　解不等式：

（1）$x^2-2x-3\leqslant 0$；　　　　（2）$2x^2-5x-3>0$.

教师分析：怎样把这些题中的不等式转化成我们会解的形式？

类比用配方法解一元二次方程，学生口答，教师板演.

解：（1）原不等式左边配方，得

$$x^2-2x+1^2\leqslant 3+1^2,$$

即 $(x-1)^2\leqslant 4$.

学生独立完成题目的后半部分，并在数轴上表示解集.

课堂练习：解决本节课引入的问题，解不等式 $x^2-8x+12\leqslant 0$，得到与墙正对的栅栏材料 AB 的长度取值的范围是 $[2, 6]$.

（2）教师提示学生，第一步应该两边除以 2，得到等价不等式.

学生口答，教师板演，共同完成题目.

课堂练习：练习 2.2.4　3.（3）（4）.

四、课堂小结

本节课主要内容：

（1）一元二次不等式的定义；

（2）形如 $x^2>t$，$(x+s)^2>t$，$x^2<t$，$(x+s)^2<t$ 的一元二次不等式的解.

求解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq 0$）为发展要求，教师可根据学生的实际情况讲解.

五、课外作业

1. 预习内容：教材上的例 10.

2. 习题二　8.（3）（4）.

六、板书设计

2.2.4 一元二次不等式

1. 一元二次不等式的概念
2. 当 $m>0$ 时，有

$x^2>m \Leftrightarrow |x|>\sqrt{m}$

$x^2<m \Leftrightarrow |x|<\sqrt{m}$

3. 求解的一般步骤

习题答案、提示或解答

练习 2.1

1. (1) $x_1=2$，$x_2=-2$； (2) $x_1=0$，$x_2=3$； (3) $x_1=-1$，$x_2=2$；

(4) $x_1=x_2=1$； (5) 无实数根； (6) 无实数根.

2. (1) $x_1=-3+\sqrt{2}$，$x_2=-3-\sqrt{2}$； (2) $x_1=-1$，$x_2=8$；

(3) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=3$； (4) $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$；

(5) $x_1=x_2=3$； (6) 无实数根.

3. (1) $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$； (2) $x_1=-9$，$x_2=0$；

(3) $x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{5}$； (4) $x_1=-1$，$x_2=7$；

(5) $x_1=1$，$x_2=5$； (6) $x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$.

4. 实数 a 的值是 0 或 4.

练习 2.2.1

1. (1) 正确； (2) 错误； (3) 错误； (4) 正确.

2. (1) $<$； (2) $<$； (3) $>$； (4) $>$； (5) $>$； (6) $<$.

3. (1) $<$； (2) $>$； (3) $>$； (4) $>$； (5) $<$； (6) $<$.

4. a，ab^2，ab.

练习 2.2.2

1. (1) $(1, +\infty)$； (2) $(-\infty, 3)$；

(3) $[2, +\infty)$； (4) $(-\infty, -3)$；

(5) $(-\infty, 2]$； (6) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

2. (1) $(2, +\infty)$； (2) $(-\infty, 3)$；

(3) $(-2, 4)$； (4) $\varnothing$；

(5) $\{1\}$； (6) $(-1, 1)$.

3. (1) $(-3, +\infty)$； (2) $(2, +\infty)$；

(3) $(-\infty, 4]$； (4) $(12, +\infty)$.

4. (1) $(-\infty, -4)$； (2) $\varnothing$；

(3) $\left(-\frac{5}{3}, 5\right]$； (4) $\left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$.

5. 略.

练习 2.2.3

1. (1) $(-1, 1)$； (2) $(-\infty, -5]\cup[5, +\infty)$；

(3) $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$； (4) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$；

(5) $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$； (6) $\varnothing$.

2. (1) $(-5, 13)$； (2) $(-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$；

(3) $[-1, 2]$； (4) $(-\infty, -4]\cup[3, +\infty)$.

3. $a=3$，$b=6$.

练习 2.2.4

1. (1) $(-4, 4)$； (2) $(-\infty, -4)\cup(4, +\infty)$；

(3) $(-9, 7)$； (4) $(-\infty, -8)\cup(12, +\infty)$.

2. (1) $\{x \mid x\neq 3\}$； (2) $\varnothing$；

(3) $\mathbf{R}$ (4) $\varnothing$.

3. (1) $(-\infty, -2)\cup(5, +\infty)$； (2) $(-7, 2)$；

(3) $\{x|x=-2\}$； (4) $(-\infty, -2)\cup(-2, +\infty)$；

(5) $\varnothing$； (6) $\mathbf{R}$.

4. $(-\infty, -1)\cup(5, +\infty)$.

5. $(-\infty, -2\sqrt{2}-1)\cup(2\sqrt{2}-1, +\infty)$.

习题二

1. (1) $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$； (2) $x_1=0$，$x_2=1$；

(3) $x_1=-3$，$x_2=-2$； (4) $x_1=-1$，$x_2=6$；

(5) $x_1=x_2=-1$； (6) $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=1$；

(7) $x_1=1$，$x_2=3$； (8) $x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2. (1) $<$； (2) $<$； (3) $\geqslant$； (4) $>$.

3. (1) $\{x|x>2\}$； (2) $\{x|x>1\}$；

(3) $\{x|-2<x<9\}$； (4) $\{x|-1<x\leqslant 0\}$；

(5) $\{x|x\leqslant -6\}$； (6) $\{x|x\geqslant 8\}$.

4. (1) $\left\{x \mid x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$; (2) $\left\{x \mid x>-\frac{2}{5}\right\}$;

(3) $\{x \mid 4<x<5\}$; (4) $\left\{x \mid -\frac{28}{3}<x<-2\right\}$.

5. 略.

6. (1) $[-2, 1)$, $\{x \mid -2\leqslant x<1\}$;

(2) $(-1, +\infty)$, $\{x \mid x>-1\}$;

(3) $(-\infty, 1)\cup[2, +\infty)$, $\{x \mid x<1$ 或 $x\geqslant 2\}$;

(4) $[-2, -1]\cup(0, +\infty)$, $\{x \mid -2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $x>0\}$.

7. (1) $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$; (2) $(-\infty, 1)\cup(4, +\infty)$;

(3) $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$; (4) $\left[-1, \frac{13}{3}\right]$;

(5) $\{x \mid x=3\}$; (6) $\mathbf{R}$.

8. (1) $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$; (2) $(-1, 11)$;

(3) $(-\infty, -6)\cup(-6, +\infty)$; (4) $\varnothing$;

(5) $\mathbf{R}$; (6) $\varnothing$.

9. $(-\infty, 0)\cup(0, 4)$.

10. 设李明同学数学考了 x 分，由题意得

$$92\times 2+x\geqslant 90\times 3,$$

解得 $x\geqslant 86$.

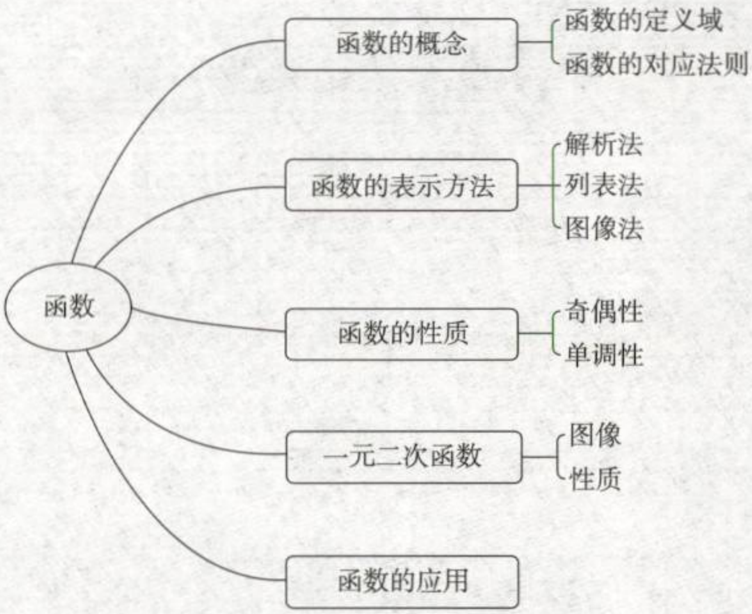
李明同学数学至少考了 86 分.

第三章 函数

思想火花

至乐莫如读好书，至要不如教学子.

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 理解函数的概念并会用集合语言进行表述，了解分段函数，能借助计算器求函数值.

2. 了解函数的三种表示方法：解析法、列表法、图像法，会用恰当的方法表示函数.

3. 通过函数图像的特征认识增函数、减函数和奇函数、偶函数，了解函数单调性、奇偶性的含义.

4. 了解一元二次函数的定义，理解一元二次函数的图像和性质.

（二）发展要求

1. 知道函数解析式有意义的约定，会求简单函数的定义域.

2. 理解函数单调性和奇偶性的有关概念，会进行函数单调性的证明及函数奇偶性的判断.

3. 理解一元二次函数、一元二次方程及一元二次不等式之间的联系，会用图像法解一元二次不等式，初步学会运用函数图像理解和研究函数性质的方法.

4. 体会一元一次函数、一元二次函数等初等函数与现实生活的密切联系，了解其在解决实际问题中的作用，体验建立函数模型解决实际问题的过程与方法.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：函数的概念及其表示方法，函数的性质（单调性、奇偶性），一元二次函数的图像和性质，函数的实际应用.

本章教材在两个实例的基础上，给出了用集合语言刻画的函数概念；通过实例介绍了函数的列表法、图像法及解析法等表示方法；在感知电梯升降的基础上，分别借助两个具体的函数，给出了增函数、减函数和奇函数、偶函数的概念，定义了函数的单调性和函数的奇偶性；对于一元二次函数，进一步研究了它的图像和性质；最后给出了函数应用的实例.

函数与方程的思想是中学数学中的一种重要的思想. 函数能够刻画事物的两个量之间对应变化的过程，是数学中最重要的基本概念之一. 本章提出的概念、符号较多，比较抽象，难以理解，是数学中最基本的内容之一. 学生学好这一章，对学好后面各章有重要的意义.

本章重点是：函数概念，函数的性质（奇偶性和单调性），一元二次函数的图像和性质.

本章难点是：用集合的观点来理解函数的概念，函数的性质（奇偶性和单调性），函数的应用.

在教学中，要注意初中与中等职业学校数学知识之间的衔接. 在教学中应当注意以下几点：

1. 加强概念的教学，引入概念应注意从学生熟悉的事物入手. 教师每讲授一个新概念时，要给学生提供能反映概念本质属性的实例素材，使学生能从大量的实例中抽象概括出概念. 对容易混淆的概念，适当采用对比的方法，使学生能从正误两种例子中加深对概念的理解.

2. 在引进和运用新知识时，应当尽量从已学过的知识出发，使已学过的知识得到不断地重现，切实做到温故知新.

3. 要注意数形结合思想方法的培养和运用. 对中等职业学校的学生来说，把一个问题用数形结合的方法来分析和解决，是具有特殊意义的. 分析函数性质时，尽量作出函数的简图，便于增强学生对函数直观的感知；结合函数的图像，用分析的方法研究函数的性质，使直观的感知上升到理性的认识. 培养学生的数形结合思想是一个长期的过程，教师在课堂上应当尽量地加以引导.

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1	函数的概念	约 2 课时
3.2	函数的表示方法	约 2 课时
3.3	函数的单调性	约 2 课时

3.1　函数的概念

1. 本节的重点是在初中变量观点下理解函数概念的基础上，理解集合观点下的函数的概念，难点是理解函数符号 $y=f(x)$.

2. 本节通过两个例子让学生用对应的观点来理解函数，从初中学过的变量观点的函数概念说起，通过列举实际生活中常见的问题，把问题中两个变量存在的依赖关系抽象为一种对应关系，然后用集合的语言来刻画函数的概念. 其中的路程问题是“一对一”的实例，面积问题是“多对一”的实例，教师可引导学生理解“对于非空数集 A 中任意一个 x，在对应法则 f 的作用下，都有唯一确定的 y 与之对应”这一函数的本质，教师可适当引导学生再举一些实际例子，帮助学生理解对应观点下的函数定义.

3. 函数的近代定义是这样叙述的：设 A，B 都是非空数集，如果按某个对应法则 f，使集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 f：$A \to B$ 为从 A 到 B 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 $x \in A$，$y \in B$. 集合 A 称为函数 $f(x)$ 的定义域，函数值的集合 C 称为函数 $f(x)$ 的值域，显然 $C \subseteq B$.

这个定义与教材上的定义在叙述上有一定的区别，教材之所以不采用函数的近代定义主要有两个原因，一是本教材没有映射的内容，二是为了降低难度. 课程标准对于函数 $f(x)$ 的值域没有提出要求，所以本教材用了一个折衷的定义，即在教材中的函数定义中只出现了一个非空的数集 A，而没有给出非空数集 B.

对于教材中“函数关系实质上是两个非空数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系”这一句话，有同学可能对“两个数集”产生疑问，教师可以在讲解完函数的概念后，结合定义域和值域进行适当说明.

函数的近代定义与传统定义（用变量叙述的定义）在实质上是一致的，两个定义中的定义域和值域完全相同，两个定义中的对应法则实际上也一样，只不过叙述的出发点不同. 传统定义是从变化的观点出发，其中的对应法则是将自变量 x 的每一取值与唯一确定的函数值对应起来；近代定义是从集合与对应的观点出发，其中的对应法则是将原象集合中的任一元素与象集合中的唯一确定的元素对应起来. 从历史上来

看，传统定义来源于物理公式，最初的函数概念几乎等同于解析式. 后来，人们逐渐意识到对定义域与值域的研究受到了不必要的限制. 如果只根据变量观点，有些函数就很难进行深入研究. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\text{ 是有理数},\\0,\ x\text{ 是无理数},\end{cases}$$

对于这个函数，如果用变量的观点来解释，会显得十分勉强，也说不出 x 的物理意义是什么，但是用集合与对应的观点来解释，就十分自然，从这个意义上来说，函数的近代定义更具有一般性. 实际上，我们在这里说的传统定义，已经渗透了集合与对应的观点. 如"按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值与 x 对应"，已经十分接近近代定义了. 不过，由于用变量观点描述函数比较生动、直观，所以现在仍然广泛使用着传统定义. 今后，为了方便，我们有时也仍然使用传统定义. 为了使学生理解引入新定义的必要性，可以采用比较的方式，引导学生分析实例，获得体验.

4. 定义域、对应法则是函数的两个要素.

函数 $f(x)$ 的定义告诉我们，对于定义域中的任意一个自变量 x 的值，在"对应法则 f"的作用下，可得到因变量 y 唯一的值. 这也表明在对应法则的作用下，只要函数的定义域确定，函数的值域也随之确定，所以教材只提函数的两要素，也就是函数的定义域、对应法则. 要判断两个函数是否为同一函数，就要看两个函数的定义域和对应法则是否完全相同.

对应法则 f 可用一个解析式来表示. 但有时候，对应法则 f 也可能不便用或不能用一个解析式来表示，这时就必须采用其他方式，如数表或图像等. 两个函数的对应法则相同是指两个对应法则等价，例如函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与函数 $y=|x|$ 的对应法则是相同的，函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ $(x\neq0)$ 的对应法则也是相同的.

定义域是自变量 x 的取值集合，它是函数的一个不可缺少的组成部分. 定义域不同而对应法则相同的函数要看成不同的函数. 例如，一元二次函数 $y=x^2$，它的定义域通常是实数集；但当考察正方形的边长 x 与面积 y 的关系时，它的解析式也是 $y=x^2$，可它的定义域是正实数集，由于它们的定义域不同，显然，这两个函数是不同的函数. 其实，它们的不同还可从图像相异来得到验证. 在中学阶段所研究的函数，大都可用解析式来表示. 如果未加特别说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合. 在实际问题中，还必须考虑自变量 x 代表的具体量的允许取值范围.

5. 函数符号 $y=f(x)$ 是学生学习的难点. 这是一个抽象的数学符号，教学时首先要强调符号"$y=f(x)$"为"y 是 x 的函数"这句话的数学表示，它仅仅是函数

的符号，不是表示“y 等于 f 与 x 的乘积”，$f(x)$ 也不一定是解析式. 需要说明的是，符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别又有联系，$f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $y=f(x)$ 的值，它是一个常量，而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数，在一般情况下，它是一个变量.

6. 计算器的应用是现代数学教学的新突破. 本节针对计算器的使用增加了相应的例题，强化了计算器的应用. 本节练习第 4 题设置的目的就是为了让学生熟悉计算器的使用.

3.2 函数的表示方法

1. 本节的重点是函数的表示方法和分段函数，难点是分段函数的理解.

2. 解析法就是将两个变量的函数关系，用一个式子表示. 解析法有两个优点：一是简明、全面地概括了两个变量之间的关系，函数关系清楚；二是可以通过解析式求出定义域内任意一个自变量所对应的函数值.

列表法就是列出表格表示两个变量的函数关系. 列表法的优点是不需要计算就可以直接得到与自变量的值对应的函数值. 列表法在实际生产和生活中也有广泛应用，如银行利率表等.

图像法就是用图像来表示两个变量的函数关系. 这种方法的优点是能够直观地表示当自变量变化时相应的函数值的变化趋势，有利于我们通过图像来研究函数的某些性质. 图像法在生产和生活中也常常用到，如工厂的生产进度图、股市的股价示意图等.

函数的三种表示方法各有优点，有的函数能用三种表示方法表示，有的函数则只能用某种表示方法表示. 对具体的问题，应当教会学生选择恰当的方法来表示问题中的函数关系. 最常用到的是解析法，所以在教函数表示方法时，应让学生多用描点法画一些给定函数解析式的图像，这不仅有利于三种表示方法的综合应用，帮助学生加深对解析式的理解，而且可以向学生渗透数形结合的数学思想.

3. 函数的图像是一种特殊的图形. 根据函数的定义，自变量 x 在定义域内取每一个值时，相应的函数值 y 是唯一的，反映到图像上，是与 y 轴平行的直线与函数的图像至多有一个交点，因此如果有两个或两个以上的交点，则这个图形必定不是函数的图像. 本节教材最后的判断图形是否为函数图像的内容，能够帮助学生认清函数图像的本质特征.

4. 例 1、例 3 是两个特殊的函数，可以向学生进一步说明，函数的图像不一定是一条或几条无限长的平滑曲线，也可以是一些点、一些线段、一段曲线等. 针对学生的情况，教师可以再选取几个例子讲解.

5. 分段函数的理解是本节的一个难点，这是因为分段函数的定义要求函数在定义域内不同的取值区间有不同的对应法则. 学生往往理解为“对应法则不同则是不同的函数”，此时，教师可以用多个法则合并成一个大的法则去帮助学生理解分段函数其实是一个函数.

6. 在讲解本节例 2 时，教师应先由函数解析式分析图像的大体位置与总体趋势，然后再列表、描点，以克服作图的盲目性. 教学中，应通过类似题目培养学生分析问题、解决问题的能力. 有两点需要提醒学生注意：一是 x 的取值分布要恰当，二是连线时要用光滑的曲线连接，不能把光滑的曲线画成锯齿状.

7. 教学时教师应注重避免将本节内容简单化. 通过教学和课后练习，要使学生熟练掌握一元一次函数、一元二次函数、反比例函数的图像，以便于以它们为载体，研究函数的单调性和奇偶性. 另外，图像是进行数形结合的基础，教学时应尽量培养学生利用数形结合的方法与思想来观察、分析和解决问题的能力.

教学时教师应在指导学生分析图像上多下功夫，如图像中反映出来的最值、变化趋势（单调性）、对称问题等，为以后学习函数的性质以及指数函数、对数函数、三角函数的图像与性质打下基础.

3.3 函数的单调性

1. 本节的重点是增函数、减函数及函数单调性的概念，判断某些函数的单调性的方法. 由于判断或证明函数的单调性时，常常要综合运用一些知识，如不等式的性质、配方法以及数形结合的思想方法等，因此函数的单调性的判断或证明也是本节的一个难点.

2. 为了研究函数的单调性，教材首先给出了两幅乘客乘坐电梯的画面，并且由此引出乘客分别在上行和下行时所处的高度 h 如何随着时间 t 的变化而变化的问题，通过生活中常见的事例让学生直观感受到函数图像上升或下降时函数值的变化的规律. 利用学生较为熟悉的函数 $y=2x$，$y=-2x$，$y=x^2$ 的图像，逐步由形到数，引导学生发现函数图像变化的规律，然后再推广到一般函数，从而得出增、减函数的定义.

3. 函数的单调性是针对某个区间而言的，应从以下两个方面来理解：

（1）对于单个的点，不存在单调性问题. 对于闭区间上的连续函数来说，只要在开区间上单调，它在闭区间上也就单调. 因此，在考虑它的单调区间时，包括不包括端点都可以. 但习惯上，我们在讲函数的单调区间时，一般是指保持函数单调性的最大区间，如果端点使函数有意义，则单调区间包括端点. 但需要注意的是，对于在某些点上不连续的函数，单调区间不包括不连续点. 例如函数

$$y=\begin{cases}x+1, & x>0, \\ -x+2, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数，而不能说成函数在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

(2) 有些函数在整个定义域内具有单调性，如例 2；有些函数在整个定义域上不单调，只有在定义域的某些区间上是单调函数，如例 1；也有的函数没有严格单调区间，如 $f(x)=2$；还有函数的定义域根本就不是区间，如 3.2 函数的表示方法中的例 1.

4. 在判断函数的单调性时，除利用单调性的定义外，还可以借助函数的图像、函数值的变化情况等多方面进行. 但要证明一个函数的单调性时，仅由函数的图像或一些函数值的变化情况来说明是不够的，必须由函数单调性的定义来加以证明.

5. 为了有利于以后利用函数单调性比较有关数值大小，建议教学中除了讲清增、减函数的定义外，还要明确一下它们的等价说法，即增函数的函数值在给定的区间上随着自变量的增大而增大（或减小而减小），减函数的函数值随着自变量的增大而减小（或减小而增大）.

3.4　函数的奇偶性

1. 本节的重点是理解奇函数、偶函数以及函数奇偶性的概念，会判断函数的奇偶性. 难点是对奇函数、偶函数概念的理解.

2. 奇函数和偶函数的解析定义与图像性质的紧密结合，是本节教学的主要内容. 奇函数、偶函数与其图像的对称性密切相关. 从代数、几何两个方面描述函数的性质，可强化学生对奇函数、偶函数性质的理解.

3. 教材在给出奇函数和偶函数定义之前，首先通过山东剪纸等图片，引导学生发现轴对称图形和中心对称图形，然后通过两个特殊函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$，引导学生发现规律 $f(-x)=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，$g(-x)=x^2=g(x)$，由此再给出奇函数和偶函数的定义. 讲完奇函数和偶函数的定义后，可让学生再列举一些奇函数和偶函数的例子，加深学生对奇偶性概念的理解.

4. 在讲授奇函数与偶函数的定义时，要引导学生充分理解定义，教师可采用设问等多种形式，使学生理解以下几个问题：

(1) 函数的奇偶性是函数一个整体性质，不同于函数的单调性. 函数的单调性是局部性质：函数在整个定义域内可不具有单调性，而在某些区间上是增函数或者是减函数；函数的奇偶性是指函数在整个定义域上的一种对称性.

(2) 函数的奇偶性，是指一个函数自身具有的一种性质，只能说一个函数是否具有奇偶性.

(3) 函数的定义域是否关于原点对称，是判断一个函数是否为奇函数或偶函数的必要条件. 考察一个函数的奇偶性一定要先考察它的定义域是否关于原点对称. 如果定义域关于原点不对称，那么该函数就没有奇偶性可言. 例如函数 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 既不是奇函数也不是偶函数，因为它们的定义域分别是 $[0,+\infty)$，和 $(0,+\infty)$，即自变量取负值时无意义，所以不能满足奇函数与偶函数的定义.

事实上，奇函数和偶函数的定义中，已经在式子 $f(-x)=-f(x)$ 和 $f(-x)=f(x)$ 中隐含了函数的定义域关于原点对称这一条件，如果定义域关于原点不对称，那么对于定义域内的自变量 x，至少有一个 $-x$ 不在其定义域内，此时 $f(-x)$ 就失去了意义，也就不能满足 $f(-x)=-f(x)$ 和 $f(-x)=f(x)$ 中的任意一个.

5. 教材中“奇函数的图像关于原点成中心对称，偶函数的图像关于 y 轴成轴对称”这两个结论是通过观察图像得出的，因此，引导学生读图是一个很重要的过程.

如果我们知道一个函数是奇函数或偶函数，那么只要把这个函数的定义域分成关于坐标原点对称的两部分，由函数在其中一部分上的性质和图像，就可推知这个函数在另一部分上的性质和图像.

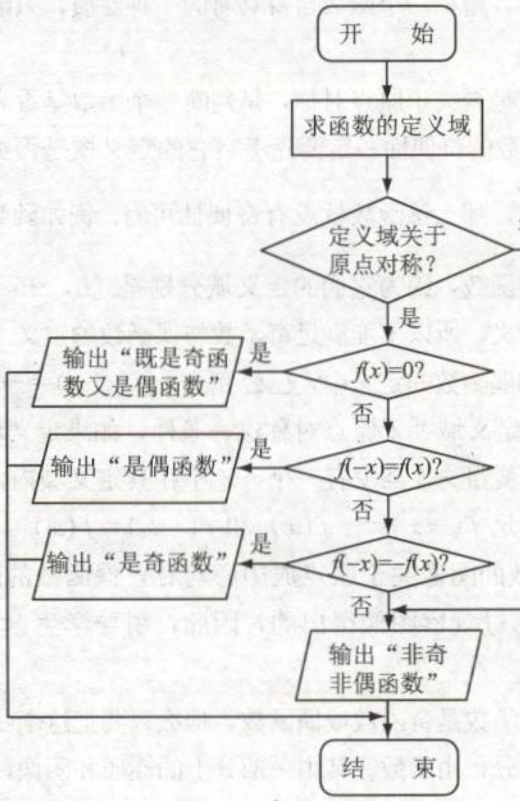
6. 对于教材中函数 $f(x)=0$ 的奇偶性的认识，教师可以通过函数图像（即 x 轴）的对称性来加以说明，不必给出严格的证明过程.

如果一个函数既是奇函数又是偶函数，那么这个函数在其定义域内恒为 0. 因为对于定义域内的任一个 x，由于 $f(-x)=f(x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$，可得 $f(x)=0$.

7. 对于一个函数的奇偶性来说，有四种可能：

是奇函数但不是偶函数，
是偶函数但不是奇函数，
是偶函数又是奇函数，
既不是奇函数也不是偶函数.

8. 教师在讲授完本节内容后，可以结合下面的流程图来理顺判断函数奇偶性的步骤.



3.5　一元二次函数的图像和性质

1. 本节的重点是一元二次函数的图像与性质，难点是数形结合思想的应用.

2. 学生在初中已学习过一元二次函数，当时主要是通过观察函数的图像得出一元二次函数的性质的. 也就是说，当时学生的认识还是感性的，因此现在有进一步研究一元二次函数性质的必要. 一元二次函数是进一步学习数学的基础，熟练掌握一元二次函数的性质以及研究方法，对提高学生的数学素养非常重要.

3. 教材先给出了一元二次函数的定义，然后通过两个具体的例子，讲了一元二次函数图像的画法. 其中例题 1 利用配方进行变形，对函数式进行分析，得出它的最大值或最小值，然后以取得最值时 x 的值来对称取自变量的值进行列表，作函数图像，最后运用数形结合的方法，推广得出一般一元二次函数的图像和性质. 例题 2 是配方变形后，运用电子表格的方法作出函数图像.

4. 在本节的教学中，应当突出数形结合的思想，要强调列表、描点作图的重要性，配合代数分析，使学生掌握用数形结合方法研究函数性质的步骤，同时让学生体会到信息技术作图的快速、准确，便于函数性质的提炼和总结.

5. 一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的系数 a，b，c 决定着函数的图像和

性质：

(1) 二次项系数 a 决定了函数图像的开口方向、开口的大小和单调性：当 $a>0$ 时，开口向上，函数在对称轴左右两侧先减后增；当 $a<0$ 时，开口向下，函数在对称轴左右两侧先增后减.

(2) 一次项系数 b 是否为零决定着函数的奇偶性：当 $b=0$ 时，函数为偶函数；当 $b\neq 0$ 时，函数既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 常数项 c 是否为零决定着函数的图像是否经过原点，c 也就是图像与 y 轴交点的纵坐标，c 也称作函数图像在 y 轴上的截距.

另外，a 和 b 共同决定着函数的对称轴，a，b 和 c 三者共同决定着函数的顶点位置.

6. 教材中的例 1 和例 3 运用了两种方法——配方法和公式法. 教学中，教师讲解完公式法后，可让学生尝试用配方法去解决例题.

7. 教材中的例 4 把一元二次方程、一元二次不等式与一元二次函数有机地结合在一起，揭示了这三者之间的联系，充分体现了数形结合的思想. 通过例 4 也给出了解一元二次不等式的区间分析法和图像法的思想，教师可根据学生的实际情况进行讲解和拓展.

3.6　函数的应用

1. 本节的重点是一元一次函数、一元二次函数在实际问题中的应用. 难点是依据实际问题建立函数模型解决问题.

2. 学生学习函数的应用，目的就是利用已有的函数知识分析问题和解决问题. 函数的应用对完善学生的数学思想、激发应用意识、培养分析问题和解决问题的能力、增强理论联系实践的能力等，都有很大的帮助.

3. 值得注意的是，利用函数建模时，要读题弄清各个量之间的关系，给出函数的解析式，同时要根据实际意义给出自变量的取值范围，从而建立函数的模型，通过模型求解的结果，然后还要进行评价，判断结果的合理性，最后作答完成问题的解决.

4. 例 1 是一次函数模型的应用，关键是审题，时间 t 是匀速运动的时间，一定要注意在计时以前火车已经行驶了 13 公里. 对于一次函数模型问题，我们一般利用待定系数法，常设 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$，然后通过方程（组）的思想求出 k，b 的值.

5. 例 3 是一元二次函数模型的应用，涉及求最值的问题，但一定要注意，因为已有一面墙（长度够用）作为一边，围成一块矩形菜地实际上只需要围三边的篱笆墙

即可，这一点学生有可能忽视，教师在教学时应注意加强引导. 教师还可以延伸至在空地建设矩形菜地篱笆墙，让学生体会其差异.

‖参考教案‖

3.4 函数的奇偶性

教学目标

1. 使学生理解奇函数、偶函数的概念，学会运用定义判断函数的奇偶性.

2. 通过设置问题情境培养学生判断、推理的能力.

3. 通过绘制和展示优美的函数图像来陶冶学生的情操. 通过组织学生分组讨论，培养学生主动交流的合作精神. 使学生学会认识事物的特殊性与一般性之间的关系，培养学生善于探索的思维品质.

教学重点

理解奇函数、偶函数的概念，会判断函数的奇偶性.

教学难点

函数奇偶性概念的理解.

教学方法

观察、归纳、启发、探究等.

教学过程

用多媒体辅助教学.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
情境导入	在多媒体屏幕上展示山东剪纸等图片.	先让学生观察展示的图片并总结特点.	引导学生由图片发现轴对称图形和中心对称图形.
	展示函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 与 $g(x)=x^2$ 的图像.	让学生观察函数的图像，并说出函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图像关于坐标原点对称，函数 $g(x)=x^2$ 的图像关于 y 轴对称.	思维迁移，让学生通过观察发现两个已学函数的图像的对称性.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
知识初探	分别设置关于原点对称的实数 $x=\pm3$，$x=\pm2$，$x=\pm1$，…，要求学生计算函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 与 $g(x)=x^2$ 的对应的函数值. 让两个函数图像上对应的点在两个函数图像上闪现，让学生发现两个函数的对称性反映到函数值上时具有的特征，即 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$. 然后通过解析式给出证明，进一步说明这两个特征对定义域内的任意一个 x 都成立.	教师巡回观察学生求函数值的过程. 教师操作课件，引导学生发现规律、总结规律，然后要求学生给出证明；学生通过观察和运算，逐步发现两个函数具有的不同特征.	学生通过计算两个函数的函数值，能够发现函数自变量关于原点对称时函数值的关系. 通过特殊值让学生认识两个函数各自的对称性实质：自变量互为相反数时，函数值互为相反数或相等.
概念形成	奇函数、偶函数的定义： （1）如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为奇函数； （2）如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为偶函数.	教师引导归纳：像函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 这样的函数为奇函数，像函数 $g(x)=x^2$ 这样的函数为偶函数. 学生根据对奇函数和偶函数的初步认识，用自己的语言说出奇函数、偶函数的定义. 学生讨论后回答，然后教师引导学生，使定义完善. 在屏幕展示奇函数和偶函数的定义. 教师：根据定义，哪位同学能举出另外一些奇函数和偶函数的例子？ 学生回答.	通过引例使学生对奇函数和偶函数的形和数的特征有了初步的认识，此时再让学生给奇函数和偶函数下定义，应是水到渠成.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念辨析	(1) 强调定义中"任意"二字，说明函数的奇偶性是函数在定义域上的一个整体性质.	教师提出问题，学生讨论、思考、回答. 问题 1：奇函数、偶函数的定义中有"任意"二字，说明函数的奇偶性是怎样的一个性质？与单调性有何区别？	通过对两个问题的探讨，引导学生认识以下两点： (1) 函数的奇偶性是函数的一个整体性质，它不同于单调性； (2) 函数的定义域关于原点对称是一个函数为奇函数或偶函数的必要条件.
	(2) 奇函数与偶函数的定义域的特征是关于原点对称.	问题 2：$-x$ 与 x 在几何上有何关系？具有奇偶性的函数的定义域有何特征？	层层深入提出问题，加深对定义的理解.
图像特征	一个函数为奇函数的充要条件是，它的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形； 一个函数为偶函数的充要条件是，它的图像是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.	师生共同研究奇函数图像的对称规律，学生类比研究偶函数图像的对称规律. 对于任意一个奇函数 $f(x)$，图像上的点 $P(a, f(a))$ 关于原点的对称点 P' 的坐标是什么？点 P' 是否也在函数 $f(x)$ 的图像上？	经过由形到数再由数到形的过程，可使学生加深对本节内容的理解.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 1　根据已知条件，完成下列各题： (1) 已知 $f(x)$ 是奇函数，若 $f(2)=-3$，求 $f(-2)$； (2) 已知 $f(x)$ 是偶函数，若 $f(-4)=9$，求 $f(4)$； (3) 已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，若 $f(2)=-3$，$g(-4)=-9$，求 $f(-2)+g(4)$ 的值.	学生抢答.	通过例题 1 的练习，让学生熟悉奇函数和偶函数的特征.
	例 2　判断下列函数是否具有奇偶性： (1) $f(x)=x+x^3+x^5$； (2) $f(x)=x^2+1$； (3) $f(x)=x+1$； (4) $f(x)=x^2, x\in[-1, 2]$.	教师在黑板上板书，示范解题的步骤，教师要适时引导学生做好总结归纳.	通过例题 2 的讲解，总结根据定义判断一个函数是奇函数还是偶函数的方法和步骤.
达标练习	出示达标练习题，对学生进行检测.	学生练习，教师巡视指导.	检测知识达标情况，及时反馈补救.
归纳小结	从知识、方法两个方面对本节课的内容进行归纳总结.	让学生谈本节课的收获，并进行反思.	关注学生的自主体验，反思和发表本堂课的体验和收获.
布置作业	练习 3.4　第 3 题、第 4 题.		
板书设计	3.4　函数的奇偶性 一、奇函数与偶函数的定义 二、奇函数与偶函数的图像特征 三、知识应用 例 1 例 2		

‖习题答案、提示或解答‖

练习 3.1

1. (1) 自变量是 x，因变量是 y，定义域为 $[0,3]$；

(2) -1；

(3) 定义域和对应法则.

2. (1) $y=4x$，其定义域为 $\mathbf{N}$；

(2) $S=\pi r^2$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

3. (1) $f(1)=1$，$f(-1)=1$，$f(0)=-1$，$f(b)=2b^2-1$；

(2) $f(0)=\frac{1}{2}$，$f(3)=4$，$f(-2)=-\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

4. $f(-1.2)\approx-7.17$，$f(3.7)\approx32.96$.

5. (1) $\{x\,|\,x\neq5\}$； (2) $\{x\,|\,x\geqslant1\}$；

(3) $\{x\,|\,x\neq3\}$； (4) $\{x\,|\,x\geqslant-3$ 且 $x\neq1\}$.

练习 3.2

1. (1) 列表法、解析法和图像法；

(2) $f(0)=1$，$f(-1)=-1$，定义域是 $[-1,2]$，值域是 $[-1,2]$.

2. (1) 定义域为 $\mathbf{R}$，图略；

(2) 定义域为 $\{x\,|\,x\neq0\}$，图略；

(3) 定义域为 $\mathbf{R}$，图略；

(4) 定义域为 $\mathbf{R}$，图略.

3. (3) 和 (4).

4. 图略.

练习 3.3

1. 函数 $y=f(x)$ 的单调区间有：$[-2,-1]$，$[-1,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$.

函数在区间 $[-1,0]$，$[1,2]$ 上是增函数，在区间 $[-2,-1]$，$[0,1]$ 上是减函数.

函数 $y=g(x)$ 的单调区间有：$[-3,-1.5]$，$[-1.5,1.5]$，$[1.5,3]$.

函数在区间 $[-1.5,1.5]$ 上是增函数，在区间 $[-3,-1.5]$，$[1.5,3]$ 上是减函数.

2. (1) 增函数；

(2) 增函数.

3. 设 x_1，x_2是任意两个不相等的正实数，$\Delta x=x_2-x_1$，则

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$$

$$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$

$$=-\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$$

$$=-\frac{\Delta x}{x_1x_2},$$

又因为 $x_1x_2>0$，所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_1x_2}<0,$$

因此，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

练习 3.4

1. (1) 是；　(2) 偶函数；　(3) $h(1)=2$.

2. $f(-2)=-2$，$g(1)=1$. 图略.

3. (1) 奇函数；　(2) 偶函数；

(3) 既不是奇函数又不是偶函数；　(4) 既不是奇函数又不是偶函数；

(5) 奇函数；　(6) 既不是奇函数又不是偶函数.

4. 减函数.

练习 3.5

1. (1) 直线；　(2) 抛物线；　(3) 直线；　(4) 抛物线.

2. (1) $y_{\min}=-4$；　(2) $y_{\max}=-\frac{7}{8}$.

3. (1) 对称轴 $x=1$，顶点坐标 $(1,-4)$，函数在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数，在区间 $(-\infty,1]$ 上是减函数；

(2) 图略；

(3) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

4. (1) $(-1,2)$；　(2) $\{x\,|\,x\leqslant-4 \text{ 或 } x\geqslant3\}$.

练习 3.6

1. 略.

2. 设汽车行驶的时间为 t h，则汽车行驶的路程 S km 与时间 t h之间的函数关系为

$$S=vt.$$

当 $t=1.5$ 时，$S=90$，则 $v=60$.

因此，所求的函数关系为 $S=60t$，$t>0$.

当 $t=3$ 时，$S=180$，所以汽车 3 h 所行驶的路程为 180 km.

3. 设售出件数与定价之间的函数关系为 $y=kx+b$.

由于直线过点（80，30），（120，20），代入上式，可得

$$k=-\frac{1}{4}，b=50.$$

即 $y=-\frac{1}{4}x+50$，$x\in(0，200)$.

4. 设超市的利润为 y 元，若每件售价为 x 元，则每件利润为 $x-20$ 元，超市每天的利润为

$$y=(100-x)(x-20)=-(x-60)^2+1\ 600.$$

所以每件定价 60 元时，超市利润最大，最大利润为 1 600 元.

5. 设矩形的长为 x 米，则宽为

$$\frac{1}{2}(100-2x)=(50-x)\text{米},$$

因此得矩形场地的面积为

$$\begin{aligned}S&=x(50-x)=-x^2+50x\\&=-(x^2-50x+25^2-25^2)\\&=-(x-25)^2+625,\end{aligned}$$

由此可得，当矩形的长为 25 米，矩形的宽为 $\frac{1}{2}(100-2x)=25$ 米时，矩形的面积最大，最大面积为 625 平方米.

6. $y=\begin{cases}0.5，x\leqslant 0.5，\\1，0.5<x\leqslant 1，\\1.5，1<x\leqslant 1.5，\\2，1.5<x\leqslant 2.\end{cases}$

习题三

1. $f(-2)=-\frac{1}{7}$，$f(0)=-1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

2. 函数 $y=f(x)$ 的单调区间有：$[-5，-2)$，$[-2，1)$，$[1，3)$，$[3，5]$.

而且，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-5，-2)$，$[1，3)$ 上是减函数，在区间 $[-2，1)$，$[3，5]$ 上是增函数.

3. 略.

4. （1）奇函数；（2）既不是奇函数又不是偶函数；

（3）偶函数；（4）既不是奇函数又不是偶函数.

5. （1）$a=\pm1$；（2）$a=0$.

6. （1）定义域为 $\{x|x\neq-4\}$；（2）$\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1\}$；

（3）定义域为 $\{x|x<1\}$；（4）$\{x|x\geqslant0$ 且 $x\neq2\}$.

7. (1) 增函数；　　(2) 减函数.

8. (1) $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$；　　(2) $[-3, 2]$.

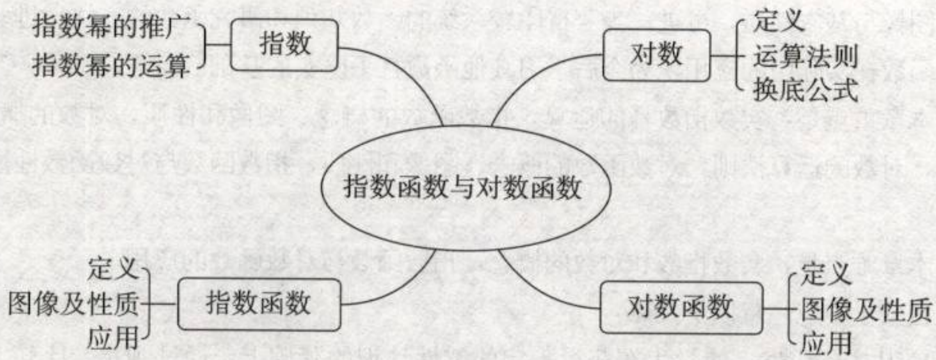
9. $y=\begin{cases}x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-(2-x)^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

第四章
指数函数与对数函数

思想火花

要纠正别人之前，先反省自己有没有犯错误.

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解有理指数幂、实数指数幂的含义，会对根式、分数指数幂进行互化，能利用计算器求实数指数幂的值.

2. 理解指数函数的概念，理解指数函数的图像和性质.

3. 理解对数概念（含常用对数、自然对数），了解换底公式，能利用计算器求对数值.

4. 理解对数函数的概念，了解对数函数的图像和性质.

（二）发展要求

1. 掌握实数指数幂的运算法则，会利用它们进行化简、运算.

2. 能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图像.

3. 掌握对数的基本性质和运算法则.

4. 能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图像.

5. 了解函数模型的广泛应用，能够运用指数函数、对数函数知识解决某些简单的实际应用问题.

‖教材分析和教学建议‖

本章的主要内容包括：指数和对数的概念及其运算法则，指数函数与对数函数的概念、图像、性质等.

本章教材在复习正整数指数幂及其运算法则的基础上，引入负整数指数幂、分数指数幂，给出了实数指数幂的运算法则，然后给出了指数函数的概念、图像和性质；在指数幂的基础上，给出了对数的概念、对数的性质及对数的运算法则，进而给出了

对数函数的概念、图像和性质；最后通过例题说明指数函数和对数函数的应用.

指数函数、对数函数都是基本的初等函数，学生学习指数函数和对数函数的概念、图像与基本性质，可进一步获得比较系统的函数知识和研究函数的方法，进一步了解函数在实际中的应用，为今后学习其他函数打下坚实的基础.

本章重点是：实数指数幂的运算，指数函数的概念、图像和性质，对数的概念、性质，对数的运算法则，对数函数的概念、图像和性质，指数函数与对数函数性质的应用.

本章难点是：实数指数和对数的概念，指数函数与对数函数的应用.

在教学中应注意以下几点：

1. 从实际出发，使学生在获得一定的感性认识的基础上，通过观察、比较、归纳，提高到理性认识，以形成完整的概念.

2. 应用类比的方法，通过比较指数和对数的定义、指数函数和对数函数的图像、性质，弄清它们的区别和联系，加深学生对这两个函数的认识.

3. 应注意鼓励学生运用信息技术学习知识、探索和解决问题，提倡借助计算器或计算机画出具体指数函数、对数函数的图像，并通过函数的图像来研究函数的性质，培养学生运用数形结合的思想方法解决问题的意识.

4. 引导学生充分利用函数型计算器、计算机等工具进行实数指数幂及对数的求值运算，降低计算的难度.

5. 教学中要采取温故知新的方法，本章要从复习整数指数幂开始学习，逐步扩大指数幂的概念，推广相应的运算法则. 幂和幂的运算是学习本章的基础，一定要使学生掌握好.

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　实数指数	约 1 课时
4.2　指数函数	约 2 课时
4.3　对数及其运算	约 4 课时
4.4　对数函数	约 2 课时
4.5　指数函数与对数函数的应用	约 1 课时
小结与复习	约 2 课时

4.1 实数指数

1. 本节的内容是实数指数幂及运算法则，本节的重点是实数指数幂的概念及运算法则，难点是指数幂运算法则的应用.

2. 实数指数幂及其运算法则是在复习正整数指数幂及其运算法则的基础上进行

学习的，这是学习指数函数和对数函数的基础.

3. 本小节主要讲有理指数幂，根据学生的学习兴趣和愿望，也可介绍无理指数幂的含义，如 $3^{\sqrt{2}}$ 是一个确定的实数，它可通过两列有理指数幂的近似值去无限地逼近，即：

指数取$\sqrt{2}$的不足近似值构成的有理指数幂 $3^{1.4}$，$3^{1.41}$，$3^{1.414}$，…；

指数取$\sqrt{2}$的过剩近似值构成的有理指数幂 $3^{1.5}$，$3^{1.42}$，$3^{1.415}$，….

4. 通过适当的练习，要使学生熟练掌握分数指数幂的意义.

5. 本章为避免产生歧义，要求分数指数的最后结果一定要化成既约分数.

6. 本节要求学生会利用函数型计算器、计算机等工具进行实数指数幂的求值运算，例如会利用计算器求 a^b（$a>0$）的值.

4.2 指数函数

1. 本节的重点是指数函数的图像与性质，难点是指数函数性质的应用.

2. 教材是从一个关于细胞分裂的具体问题引入指数函数概念的，这既说明指数函数的概念来自实践，也便于学生接受. 教材主要通过两个具体例子 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像归纳出指数函数的性质. 因此，要紧密联系实数指数幂的性质与指数函数的图像学习指数函数的性质.

3. 学习指数函数的性质，可引导学生从定义域、值域、单调性、奇偶性、最值等诸方面去研究，逐步使学生掌握研究函数性质的一般方法.

4. 指数函数的定义，要求底数 a 是一个大于零且不等于 1 的常量. 这一点，学生容易忽略，教学中可引导学生讨论这一规定，理解为什么这样规定，以加深学生的印象.

规定底数 a 大于零且不等于 1 的理由：

如果 $a=0$，当 $x>0$ 时，a^x 恒等于 0，当 $x\leqslant 0$ 时，a^x 无意义；

如果 $a<0$，比如 $y=(-2)^x$，这时对于 $x=\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$ 等，$(-2)^x$ 都无意义；

如果 $a=1$，对于任意实数 x，$y=1^x=1$ 是一个常量.

5. 根据职业学校学生的实际，建议从指数函数的图像着手研究指数函数的性质. 教学时，提倡借助计算器或计算机画出具体指数函数的图像，也可以与学生互动完成一些指数函数图像的绘制. 为了使图像较为准确，所描的点可多取一些. 要引导学生研究 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况下的图像特征，并能迅速地画出草图.

6. 为了研究指数函数的一般性质，按照从特殊到一般的规律，先在同一坐标系中，画出几个（至少两个）指数函数的图像. 由于 a 是不等于 1 的正数，既应取 a 为

大于 1 的正数（如 $a=2$），也应取 a 为小于 1 的正数（如 $a=\frac{1}{2}$），这样有利于引导学生观察、比较所画的图像，归纳出图像所具有的特征，并由图像的特征得出相应函数的性质，也有利于帮助学生理解记忆指数函数的性质. 因此，掌握函数图像的特征是非常重要的，这样的方法也适用于以后各类函数的教学.

7. 在指数函数性质的教学中，应着重强调底数有 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种不同的情况.

8. 指数函数的图像特征和性质可列表如下：

图像的特征	函数的性质
(1) 图像向左、向右无限延伸	(1) 定义域：**R**
(2) 图像在 x 轴的上方，向上无限伸展，向下无限趋近于 x 轴	(2) 值域：$(0,+\infty)$
(3) 图像都经过 $(0,1)$ 点	(3) $x=0$ 时，$y=1$
(4) $a>1$，从左向右看，图像逐渐上升；$0<a<1$，从左向右看，图像逐渐下降	(4) 当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减

9. 本节要强化对运算、作图、处理数据、科学计算器的使用等基本技能的训练.

10. 要充分利用本节内容，加强数形结合、分类讨论等数学思想的渗透.

4.3 对数及其运算

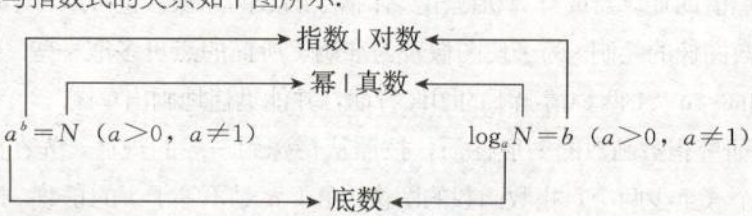
4.3.1 对数

1. 本小节的重点是对数的概念、性质、运算法则及换底公式，难点是理解对数概念.

2. 引进对数的定义后，要说明两点：

(1) 要让学生弄清楚对数式 $b=\log_a N$ 的含义. 要清楚指数式 $a^b=N$ 与对数式 $b=\log_a N$ 不过是同一关系的两种不同表达形式，它们是等价的.

对数式与指数式的关系如下图所示.



(2) 要注意对数式 $b=\log_a N$ 中字母的取值范围 ($a>0$ 且 $a\neq 1$，$N>0$)，这些条件在解题或变形中常常用到.

在 $b=\log_a N$ 中，必须有 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数. 因而，$a^b=N$ 中，N 总是正数. 因此要特别强调：零和负数没有对数.

教材通过大量的例子和练习，促使学生熟悉由指数形式向对数形式的转化.

3. 要求学生记住常用对数和自然对数，并熟练利用计数器求 $\lg N$ 和 $\ln N$ 的值. 其中 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$，e 与 π 一样是无理数. 由上式可求 e 的具有确定精确度的近似值.

4. 换底公式的引入，应使学生明确它是出自实际运算的需要，以提高学生的学习兴趣和学习的主动性. 在对数计算中，常常需要把底数不同的对数化为底数相同的对数才能进行. 由于对数的底数可为不等于 1 的任意正数，一般对数表或计算器没有计算任意正数为底的对数功能，所以在计算不是以 10 或 e 为底的对数时，常常需要把它转化为以 10 或 e 为底的对数，这就要借助于换底公式来完成.

5. 换底公式的证明如下.

设 $\log_b N=x$，则 $b^x=N$，两边取以 a 为底的对数，得 $x\log_a b=\log_a N$，所以 $x=\frac{\log_a N}{\log_a b}$，即

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

教师教学时可根据学生情况进行灵活调整. 要求学生要理解换底公式的意义，并运用换底公式进行较简单的计算和化简.

6. 要求学生熟练掌握由对数定义推出的对数的三个性质.

4.3.2 对数运算的运算法则

1. 对数运算法则的推导方法是把对数式转化为指数式，再应用指数运算法则去得出对数运算法则，要求学生了解推导过程.

2. 对数运算法则，其实可归纳为 (1) (3) 两条，第 (2) 条可由 (1) (3) 两条得到，即

$$\begin{aligned}\log_a \frac{M}{N}&=\log_a (MN^{-1})\\&=\log_a M+\log_a N^{-1}\\&=\log_a M+(-1)\log_a N\\&=\log_a M-\log_a N.\end{aligned}$$

为了使用方便，教材仍保留了第 (2) 条.

3. 利用对数的运算法则时，要注意各个字母的取值约束：$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq1$. 要注意只有所列等式中的对数都存在时，等式才有意义.

例如，$\log_2[(-3)(-5)]$ 是存在的，但 $\log_2(-3)$ 和 $\log_2(-5)$ 都不存在，因此，不能得出 $\log_2[(-3)(-5)]=\log_2(-3)+\log_2(-5)$.

4. 学生初学这几个运算法则时，容易出现下面的错误：

$$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N,$$

$$\log_a(MN)=\log_a M\log_a N,$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\frac{\log_a M}{\log_a N}.$$

产生这些错误的原因是将积、商、幂的对数与对数的积、商、幂混淆了，把对数符号当成表示数的字母进行运算了. 所以，在教对数运算法则时，宜进行用语言叙述运算法则的训练，这样有利于学生正确理解和应用对数运算法则，也容易讲清楚产生错误的根源，防止出现错误.

5. 针对职业学校学生的实际，教学时要求学生主要掌握对数的运算法则，并强调法则的逆向运用.

6. 利用对数的运算法则，可把两数积的对数转化为对数和的运算，把幂的对数转化成其底的对数与幂指数的乘法运算，从而使运算降级. 对数的发明曾被恩格斯列为十七世纪数学的三大成就之一，在历史上起着重要的作用. 由于计算器和计算机的普及，数学中大量的对数计算工作，可由计算机代劳，因而教学重点应放在学生掌握对数的计算原理上，对数计算的训练可适当减弱.

4.4　对数函数

1. 本节的重点是对数函数的图像与性质，难点是对数函数性质的应用.

2. 教材从一个细胞分裂的具体问题引出对数式 $n=\log_2 w$，然后根据对数式 $n=\log_2 w$ 的意义及函数的概念给出对数函数的定义.

3. 在对数函数的定义中，$a>0$ 且 $a\neq1$ 的条件，要向学生作适当的说明，以加深学生对对数函数的理解.

4. 函数图像是研究函数性质的直观工具，利用图像便于学生理解并掌握函数的性质和变化规律，所以首先要通过计算列出对数函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的对应值表，然后用描点法画它们的图像，通过对图像的观察，得到对数函数的性质. 教学中，教师可以利用计算机展示一些对数函数的图像，也可以与学生互动完成一些对数函数的图像. 要引导学生研究 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况下的图像特征，并能迅速地画出草图.

对数函数的图像特征和性质可列表如下：

图像特征	函数性质
(1) 图像都在 x 轴的右边	(1) 定义域是$(0, +\infty)$
(2) 图像都经过$(1, 0)$点	(2) 1 的对数是 0
(3) 当底数 $a>1$ 时，图像在$(1, 0)$点右边的纵坐标都大于零，在$(1, 0)$点左边的纵坐标都小于零； 当底数 $0<a<1$ 时，图像在$(1, 0)$点右边的纵坐标都小于零，在$(1, 0)$点左边的纵坐标都大于零	(3) 当底数 $a>1$ 时， $\begin{cases} x>1, \text{则} \log_a x>0, \\ 0<x<1, \text{则} \log_a x<0; \end{cases}$ 当底数 $0<a<1$ 时， $\begin{cases} x>1, \text{则} \log_a x<0, \\ 0<x<1, \text{则} \log_a x>0 \end{cases}$
(4) 从左向右看，当底数 $a>1$ 时，图像逐渐上升； 当底数 $0<a<1$ 时，图像逐渐下降	(4) 当底数 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在$(0, +\infty)$上是增函数； 当底数 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在$(0, +\infty)$上是减函数

在教学中，还应结合解析式、函数对应值表进行分析，以加深学生对对数函数性质的理解.

5. 在对数函数性质的教学中，应着重强调有底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况，以利于对比、区别记忆. 教学时可同时用语言和用数学符号表达同一性质，以加深学生对对数函数性质的理解.

6. 教材没有讲复合函数的概念，对于 $y=\log_2(4-x)$，$y=\log_2 x^2$等函数的理解，仍按函数的定义进行，$y=\log_2(4-x)$ 表示该函数在 $(4-x)$ 处的值，应让学生注意到，式中的 x 已不是对数函数 $y=\log_2 x$ 中的自变量. 涉及此类函数的定义域问题，可根据对数函数的定义域化为不等式问题.

7. 要充分利用本节内容强化计算、作图等基本技能的训练，同时要注意渗透类比、数形结合、分类讨论等数学思想方法.

4.5　指数函数与对数函数的应用

1. 本节的重点是指数函数与对数函数的应用，难点是建立函数模型.

2. 本节的两个例题，主要涉及增长率和化学方面的内容. 教学时，教师可根据学生所学专业，适当地再选几个例子说明这两类函数在其他方面的应用.

3. 结合生活、生产实例等条件建立函数模型，教师要注重培养学生建立数学模型的意识，提高分析问题、解决问题的能力.

4. 函数模型 $y=ca^x(c>0)$ 称为指数模型. 当 $a>1$ 时，称为指数增长模型；当 $0<a<1$ 时，称为指数衰减模型.

5. 例 2 是介绍半衰期问题. 计算 $0.977^t=0.5$ 时，教材利用对数的定义得到 $t=\log_{0.977}0.5$，然后用换底公式计算. 也可以在等式 $0.977^t=0.5$ 两边取对数得到 $\lg 0.977^t=\lg 0.5$，其理论根据是：如果两个对数的底相等，真数相等，那么这两个对数相等.

6. 在函数应用的教学中，教师要引导学生体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用，注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

‖参考教案‖

4.2 指数函数

教学目标

1. 掌握指数函数的定义、图像、性质及其简单应用.

2. 培养学生观察、分析、归纳等思维能力，增强学生的应用意识.

3. 通过多媒体演示，利用图像，探讨指数函数的性质，渗透数形结合、分类讨论的思想，激发学生学习数学的兴趣，增强学生的创新意识.

教学重点

指数函数的图像与性质.

教学难点

指数函数性质的应用.

教学方法

启发、诱导、探究、讲授法.

教学过程

一、实例引入

借助细胞分裂的问题，揭示细胞个数 y 是分裂次数 x 的函数，即 $y=2^x$.

(教师利用多媒体课件演示细胞的分裂过程，突出大号的课题标题，并板书：指数函数.)

二、讲授新课

1. 定义

一般地，形如 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 的函数称为指数函数，其中 x 是自变量. 函数的定义域是 **R**.

（教师利用多媒体课件演示指数函数的定义，用不同的颜色表示“$a>0$ 且 $a\neq1$”.）

此处向学生说明为什么底数 $a>0$ 且 $a\neq1$.

问：指数函数的图像与性质是怎样的？

我们不妨先来看两个例子：$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2. 图像与性质

（1）列表.

（给出 x 的取值，让学生填表.）

（2）用描点法作出图像.

学生自己作图完成后，教师再用计算机作出具体指数函数的图像，演示整个作图过程，引起学生的兴趣，然后让学生观察图像，并且在教师的引导下完成表格的填写.

由特殊指数函数的图像与性质归纳出一般指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像与性质.

（利用课件体现性质的直观性，主要使图像特征与性质一一对应.）

3. 例题讲解

例 1 比较下列各题中两个值的大小（用计算器验证）：

（1）$1.7^{2.5}$ 与 1.7^3；

（2）$0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$.

分析：对于比较大小的问题，若是底数相同，则借助指数函数的单调性去完成.

教师板书解题过程.

例 2 求下列函数的定义域：

（1）$y=3^{\frac{1}{x}}$；　　　　（2）$y=5^{\sqrt{x-1}}$.

教师板书解题过程.

三、课堂练习

练习 4.2　1，2，3.

四、归纳小结

将本堂课的内容归纳成一个表格形式，便于学生掌握.

五、布置作业

习题四　4.（1）（2）；5.（1）（2）.

六、板书设计

4.2 指数函数

一、定义

二、图像与性质

例 1

解：(1)

(2)

例 2

解：(1)

(2)

‖习题答案、提示或解答‖

练习 4.1

1. 略.

2. (1) $x^{\frac{2}{3}}$； (2) $a^{-\frac{1}{3}}$； (3) $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$； (4) $(a+b)^{\frac{3}{4}}$.

3. (1) 0.895； (2) 1.421； (3) 1.256； (4) 1.016.

4. (1) 9； (2) $\frac{125}{8}$； (3) 8； (4) $2^{\frac{15}{8}}$.

5. (1) $-64x^6$； (2) $3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}$； (3) $4a$； (4) $-6a$.

练习 4.2

1. (1) 5，单调递增； (2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$，**R**，$(0, +\infty)$；

(3) $(0, 1)$.

2. (1) $3^{0.8}>3^{0.7}$； (2) $1.1^{-2.1}<1.1^{-2}$；

(3) $0.7^{0.1}<0.7^{-0.1}$； (4) $0.618^{1.8}>0.618^{1.9}$.

3. (1) **R**； (2) $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；

(3) $(-\infty, 0]$； (4) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

练习 4.3.1

1. (1) $\log_6 36=2$； (2) $\log_5 125=3$；

(3) $\log_2 \frac{1}{8}=-3$； (4) $\log_{\frac{1}{2}} 16=-4$；

(5) $\log_{27} 3=\frac{1}{3}$； (6) $\log_{7.6} 1=0$；

(7) $\log_{81} \frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$； (8) $\lg 0.001=-3$；

(9) $\ln 6=x$； (10) $\log_4 y=x$.

2. (1) $3^2=9$； (2) $2^{-3}=\frac{1}{8}$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$； (4) $10^3=1\ 000$；

(5) $2^5=32$； (6) $3^{-4}=\frac{1}{81}$；

(7) $8^{\frac{4}{3}}=16$； (8) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=1\ 000$；

(9) $e^x=10$； (10) $10^x=7$.

3. (1) 2.598； (2) 3.250； (3) −1.366； (4) 1.892.

4. 1； 0； 0； 1； 1； 2； −1； 4.

5. (1) 2； (2) −4.

6. (1) 3； (2) −6.

练习 4.3.2

1. (1) 1； (2) 1； (3) $\frac{\lg N}{\lg a}$.

2. (1) $\lg x+\lg y+\lg z$； (2) $\lg x+2\lg y-\frac{1}{2}\lg z$；

(3) $\lg x+\frac{1}{3}\lg y-\frac{2}{3}\lg z$； (4) $\frac{1}{2}\lg x-2\lg y-\lg z$.

3. (1) 7； (2) 4； (3) $\frac{5}{4}$； (4) $\frac{2}{3}$；

(5) $\frac{7}{3}$； (6) 0； (7) −1； (8) 2.

4. 1.

5. (1) $\log_{a^n}b^m=\frac{\log_a b^m}{\log_a a^n}=\frac{m\log_a b}{n\log_a a}=\frac{m}{n}\log_a b$；

(2) $\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$；

(3) 略；

(4) 略.

练习 4.4

1. (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$，$(0, +\infty)$，$\mathbf{R}$； (2) 4，单调递增.

2. (1) $\lg 6<\lg 8$； (2) $\log_{0.5}6<\log_{0.5}4$；

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5>\log_{\frac{2}{3}}0.6$； (4) $\log_{1.5}1.6>\log_{1.5}1.4$.

3. (1) $(-1, +\infty)$； (2) $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$.

练习 4.5

1. 设经过 x 年后，该省人口总数为 y 亿，则：

第 1 年后（即 2016 年），

$$y=0.98+0.98\times1.5\%=0.98(1+1.5\%);$$

第 2 年后（即 2017 年），

$$y=0.98(1+1.5\%)+0.98(1+1.5\%)\times1.5\%=0.98(1+1.5\%)^2;$$

…………

所以经过 x 年，人口总数为

$$y=0.98(1+1.5\%)^x=0.98\times1.015^x.$$

当 $x=20$ 时，有

$$y=0.98\times1.015^{20}\approx1.32,$$

因此 20 年后，该省人口总数可达到 1.32 亿.

2. $4\,000\times(1-8\%)^7=4\,000\times0.92^7\approx2\,231\ \text{m}^3$.

3. 设该物质最初的质量为 1，衰变 x 年后，该物质剩留一半，则

$$0.84^x=0.5,$$

所以

$$x=\log_{0.84}0.5=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.84}\approx4.$$

因此该物质的半衰期约为 4 年.

习题四

1. (1) 1.459； (2) 1.043； (3) 0.631； (4) -0.423.

2. (1) $x=\log_4 2$； (2) $x=\lg 25$； (3) $4^x=3$； (4) $10^x=0.3$.

3. (1) $x^{\frac{3}{5}}$； (2) $x^{-\frac{5}{4}}$； (3) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{3}}$； (4) $(m+n)^{\frac{2}{5}}$.

4. (1) $>$； (2) $>$； (3) $<$； (4) $>$.

5. (1) $m<n$； (2) $m>n$； (3) $m<n$； (4) $m<n$.

6. (1) 8； (2) 10； (3) $\frac{3}{2}ab^2$； (4) 1；

(5) $a+2\sqrt{ab}+b$； (6) $-\frac{a}{2b^2}$.

7. (1) $\frac{2}{3}$； (2) 0； (3) 2；

(4) 2； (5) $\frac{5}{6}$； (6) $\frac{4}{3}$.

8. (1) $a+b$； (2) $\frac{1}{2}b$； (3) $2a+b$； (4) $5a$.

9. (1) $\left\{x \,\middle|\, x\neq-\frac{1}{2}\right\}$； (2) $\{x\,|\,x\geqslant0\}$；

(3) $\left\{x \,\middle|\, x>\frac{3}{4}\right\}$； (4) $\{x\,|\,x\geqslant2\}$.

10. 略.

11. 略.

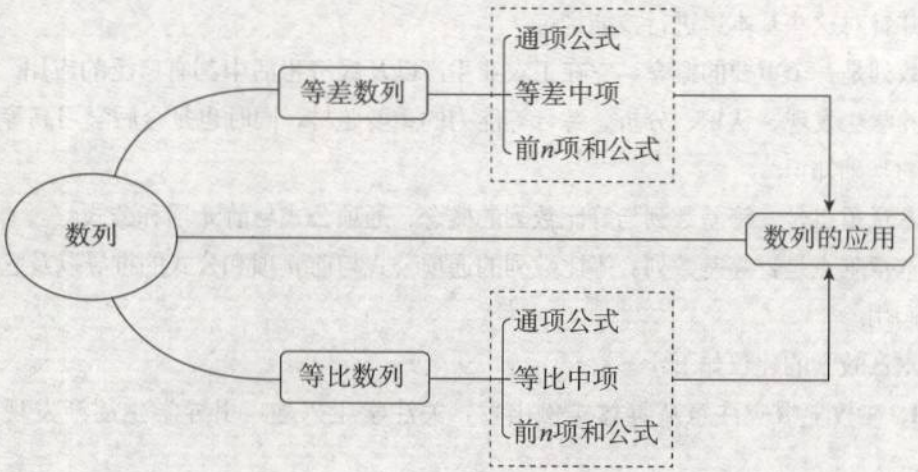
12. $y=a(1-p\%)^x$, $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\leqslant m$.

第五章
数列

思想火花

培养人，就是培养其对前途的希望.

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解数列的有关概念和通项公式的含义，会根据通项公式写出数列的任意一项.

2. 了解等差数列的概念及等差中项的含义，会运用等差数列的通项公式进行计算.

3. 了解数列的前 n 项和的含义，会运用等差数列的前 n 项和公式进行计算.

4. 了解等比数列的概念及等比中项的含义，会运用等比数列通项公式和前 n 项和公式进行计算.

（二）发展要求

1. 对于有通项公式的数列，会根据该数列的前几项写出它的一个通项公式.

2. 能运用数列的知识解决实际问题.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：数列的概念，等差数列，等比数列，等差数列和等比数列的应用.

本章教材通过实际例子引出了数列的概念，有意识地引导学生发现数列的序号与项之间的关系，从而探索出数列的通项公式等有关内容. 通过列出 21 世纪生肖是虎的年份，抽象出等差数列模型，给出等差数列的概念、通项公式. 通过计算某一款拼花瓷砖所用瓷砖的块数，引出倒序相加法推导出等差数列的前 n 项和公式，并针对两

个公式进行应用训练. 通过在国际象棋棋盘的方格内放麦粒的故事抽象出等比数列模型，给出等比数列的概念、通项公式，利用错位相减法推导出等比数列的前 n 项和公式，并针对这些基本量进行技能训练.

数列是一个重要的概念，它在工农业生产以及经济生活中都有广泛的应用. 而且是培养学生发现、认识、分析、综合等能力的重要题材，同时也是今后学习高等数学必备的基础知识.

本章重点是：等差数列与等比数列的概念、通项公式与前 n 项和公式.

本章难点是：等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式的推导以及它们的综合运用.

本章教学的建议如下：

1. 在教学中应注意从具体实例出发，关注学生兴趣，引导学生逐渐发现数学知识.

2. 对等差数列与等比数列的教学，着眼点要放在对两类数列定义的理解、特征的识别上，要注意通项公式与求和公式的直接应用，以及通项公式与求和公式的恒等变形的简单应用.

3. 等差数列与等比数列前 n 项和公式的推导要结合实例进行. 公式的推导只要求学生了解，不要求掌握.

4. 本章内容设计体现了现代信息技术的应用，在教学中可根据具体情况适度地应用现代信息教育技术帮助学生理解数学，让学生能利用计算机软件解决实际问题，同时提高学生学习数学的兴趣.

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1　数列	约 2 课时
5.2　等差数列	约 3 课时
5.3　等比数列	约 3 课时
5.4　等差数列与等比数列的应用	约 2 课时
小结与复习	约 2 课时

5.1　数　　列

1. 本节重点是了解数列的概念和数列通项公式的含义. 难点是根据有通项公式的数列的前几项写出它的一个通项公式.

2. 数列概念的引入可适当进行拓展. 教材中，首先从第 1 行到第 6 行所用棋子的个数引入数列 1，3，5，7，9，11. 然后又列举了 5 个数列的实例，其中数列②③是从生活实际中引入的，目的是使学生对这些现象的数学背景有一个直观认识，感受数

列研究的现实意义；其中④⑤⑥是从研究数的角度提出数列，目的是使学生感受数列是刻画自然规律的一种基本数学模型.

3. 对数列概念的教学，应注意以下几点：

（1）要强调数列中数的有序性. 如

$$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ 和 } \{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4\}$$

是两个相同的集合，而

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ 与 } 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4$$

是两个不同的数列，即尽管组成数列的数是相同的，但排列次序不同，就是不同的数列.

（2）要注意数列中的同一个数可以重复出现，这与集合中元素的互异是不同的. 如教材中的数列-1，1，-1，1，-1，…与数列 2，2，2，2，2，….

（3）强调 $\{a_n\}$ 与 a_n 是不同的，前者表示数列，后者表示这个数列的第 n 项.

（4）数列是一种特殊的函数. 其定义域是正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集），值域是当自变量顺次从小到大依次取值时的对应值；反之，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)(i=1, 2, 3, \cdots)$ 有意义，这些函数值也可以构成一个数列.

4. 对数列的通项公式的教学，应注意以下几点：

（1）当数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的函数关系可以用一个公式 $a_n=f(n)$ 来表示时，这个公式称为这个数列的通项公式.

（2）要注意引导学生通过观察、分析，找出数列的特征. 例如，教材中数列②的每一项都是 33 加序号.

（3）并不是所有的数列都能写出它的通项公式. 例如，教材中数列⑥就没有通项公式.

（4）数列的通项公式也可能不止一个，有时存在通项公式的表达形式不同，而实质是一致的情况，如教材中数列④的通项公式可以是 $a_n=(-1)^n$，也可以是

$$a_n=\begin{cases}-1, & n=2k-1, \ k\in\mathbf{N}_+, \\ 1, & n=2k, \ k\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$$

除此之外，还有其他形式.

（5）如果一个数列只给出它的前面几项，并没有给出它的组成规律，那么仅由前面几项归纳出来的“通项公式”有可能不是唯一的. 如由数列 2，4，8，…，可以给出 $a_n=2^n$，也可给出 $a_n=n^2-n+2$. 由于这两个通项公式本质上的不同，由此写出的后继项也不完全相同，前者的 $a_4=16$，后者的 $a_4=14$. 但如果知道一个数列的通项公式，这个数列就唯一确定了.

（6）强调由数列的通项公式可求出数列的任意项，可由此引入例 1.

5. 关于数列的分类：

教材中只按数列的项数是有限还是无限分为有穷数列和无穷数列，除此之外还可以按数列的项与项之间大小关系分为递增数列和递减数列、摆动数列、常数列等. 教师可根据学生的实际情况进行适当的补充，但只要求学生了解.

6. 关于例 1 的说明：

例 1 是由数列的通项公式写出数列的某些项，这类问题是本节教学中的重点. 通过本题可使学生了解数列是一种特殊的函数，求数列的某些项就是代入自变量计算相应的函数值.

7. 关于例 2 的说明：

(1) 例 2 是根据数列的前几项写出满足条件的数列的一个通项公式，这类问题是本节教学中的难点. 教学时要引导学生观察数列中各项与其序号的对应关系，可以用分解所给数列的前几项的方法，在这几项的分解式中，看看哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中变化部分与序号间的联系，从而归纳出规律，写出通项公式. 这里应着重培养学生的观察、分析和归纳能力.

(2) 本题重点在于引导学生进一步体会数列是一种特殊函数，体会变量之间的依赖关系. 教学中可以联系函数的三种常用表示方法即解析法、列表法、图像法进行讲解，明确数列的通项公式实质就是数列的函数解析式，所以数列可以用图像或列表反映两个变量的对应关系，而且数列的图像是一系列孤立的点，数列列表中自变量的取值是从 1 开始的正整数.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列的概念

1. 本小节教学的重点是等差数列的概念、通项公式.

2. 等差数列的通项公式与前 n 项和公式的推导都离不开等差数列的定义，因此，教学中要自始至终紧扣定义.

3. 等差数列概念的教学：

(1) 概念的引入要结合生活实际. 等差数列在日常生活中有着广泛的应用，在教学中可补充一些具体实例，让学生通过对日常生活中实际问题的分析，建立等差数列模型，形成等差数列的概念.

(2) 在教学时要强调“每一项与它的前一项的差”，防止在求公差时，把相邻两项相减的顺序颠倒. 虽然等差数列的前一项与它后一项的差也是一个常数，但这个常数不是公差，而是公差的相反数.

(3) “读一读”中给出了一类特殊的等差数列——常数列，常数列是公差为 0 的等差数列.

(4) 证明一个数列是等差数列，只需证明对于任意正整数 n，$a_{n+1}-a_n$的值是一个常数即可.

4. 等差数列通项公式的教学：

(1) 教材中等差数列的通项公式是通过不完全归纳的方式得出的，严格的证明需要用到数学归纳法的知识. 教学时，可引导学生紧扣等差数列的定义，进行归纳、猜想，从而总结出通项公式. 除了教材上给出的方法之外，还可以利用叠加法进行推导，这种方法供教师参考.

因为

$$a_2-a_1=d,$$

$$a_3-a_2=d,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n-a_{n-1}=d,$$

上述 $n-1$ 个等式两边分别相加得

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

即 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(2) 教学中可根据学生情况向学生说明，等差数列的通项公式是一次函数关系式，其中 n（$n\in\mathbf{N}_+$）是自变量，a_n是因变量. 要确定一个等差数列的通项公式需确定首项 a_1和公差 d.

(3) 要引导学生分析等差数列的通项公式，明确通项公式中的 4 个量 a_1，a_n，d，n 之间的关系. 要求学生能直接利用通项公式或公式的恒等变形解决简单问题.

(4) 教师可以根据学生的学习程度酌情讲解以下内容. 由等差数列的通项公式，可以得到等差数列的主要性质：

①若 m，n，s，$t\in\mathbf{N}_+$，$m+n=s+t$，则 $a_m+a_n=a_s+a_t$；

②$a_n=a_m+(n-m)d$ 或 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

5. A 是 a，b 的等差中项的充要条件为 $2A=a+b$，两个数的等差中项又称为这两个数的算术平均值. 这个概念和公式在解题中常常用到，教师应注意引导.

6. 关于例题的教学，需要注意：

(1) 例 1 是通项公式的直接应用.

(2) 例 2 的目的是引导学生灵活掌握等差数列的通项公式. 教学中要让学生体会方程的思想，a_1，a_n，d，n 这四个量中知道任意三个量，通过解方程可求出未知量.

(3) 例 3 是运用通项公式把已知条件转化成含有 a_1和 d 的方程组，通过解方程

组求解 a_1 和 d. 根据本例题的落实情况，可酌情引入公式 $a_n=a_m+(n-m)d$ 或 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ 的应用.

(4) 例 4 设置的主要目的是为引入等差中项的概念做铺垫.

5.2.2 等差数列的前 n 项和

1. 关于等差数列的前 n 项和公式的教学，需要注意：

(1) 教材由计算某款拼花瓷砖的块数即 $S_6=2+4+6+8+10+12$ 的算法，引导学生发现等差数列任意的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首项与末项的和这个规律，为"倒序相加"推导一般等差数列的前 n 项和公式做铺垫.

(2) 在进行一般等差数列前 n 项和公式推导时，教材给出了图 5 - 4，教师可以引导学生观察图形，从而猜想、归纳，最后进行证明，这样也符合学生的认知规律. 在教学中，应渗透求和的数学方法与思路——倒序相加. 另外，教学时可结合梯形面积公式帮助学生理解与记忆前 n 项和公式.

(3) 在推导出求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 后，可以要求学生自己推导等差数列的另一个形式的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，以便于学生理解两个公式之间的互相转化关系. 另外，教学中应注意组织学生讨论如何灵活选择公式求和.

(4) 等差数列的前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，d，n 和 S_n，已知其中 3 个量，就可以求出另外 2 个量，应当要求学生掌握这一点.

(5) 在教学中，应向学生指出等差数列的前 n 项和公式的推导及应用体现了从特殊到一般、从一般到特殊的研究问题的方法，这些方法是解决问题时常用的思考和研究方法.

2. 例 5、例 6 是前 n 项和公式的直接应用，目的是让学生熟悉公式.

5.3 等 比 数 列

5.3.1 等比数列的概念

1. 本小节教材的重点是等比数列的概念、通项公式.

2. 等比数列的定义是推导通项公式、前 n 项和公式的基础. 在等比数列的教学中，教师可采用类比的方法，在复习等差数列的有关知识的同时，让学生主动地学习等比数列的相应知识.

3. 对等比数列概念的教学，应突出以下几点：

(1) 强调“从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数”，要防止在求公比时，把相邻两项比的次序颠倒.

(2) 等比数列的公比 q 可正可负，但不能为0，尤其是 q 为负值时，数列各项的符号怎样变化，可结合实例组织讨论.

(3) 当 $q=1$ 时，等比数列是常数列.

(4) 一个等比数列只需给出 a_1 和 q，这个等比数列就唯一确定了.

(5) 若要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意正整数 n，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的值是一个常数即可.

4. 对等比数列的通项公式的教学，应注意以下几点：

(1) 可类比等差数列的通项公式的推导思路推导等比数列的通项公式. 确定一个等比数列的通项公式只需确定首项 a_1 和公比 q.

(2) 要引导学生分析等比数列的通项公式，明确通项公式中的4个量 a_1，a_n，q，n 之间的关系. 要求学生能直接利用通项公式或公式的恒等变形解决简单问题.

(3) 教师可以根据学生的学习程度酌情讲解以下内容. 由等比数列的通项公式，可以得到等比数列的主要性质：

①若 m，n，s，$t\in\mathbf{N}_+$，$m+n=s+t$，则 $a_m a_n=a_s a_t$；

②$a_n=a_m q^{n-m}$ 或 $q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$.

5. G 是 a，b 的等比中项的充要条件是 $G^2=ab$ $(ab>0)$. 任意两个同号的数的等比中项都有两个，它们互为相反数，当 $a>0$，$b>0$ 时，$G=\sqrt{ab}$ 也称为 a，b 的几何平均数.

6. 关于例题的教学，需要注意：

(1) 设置例1、例2的目的是让学生熟练掌握等比数列的通项公式. 应用通项公式求解某些量时，化简和计算是难点，不能忽视.

(2) 例3可以总结为已知等比数列的任意两项，求其他项的问题. 此类问题可借助通项公式建立方程组求解，解方程组时常用两式相除的方法，也可引导学生先用定义求出公比 q，再用通项公式或公式 $a_n=a_m q^{n-m}$ 求出其他项. 可根据学生情况确定是否进行方法上的拓展.

(3) 例4设置的主要目的是为引入等比中项的概念做铺垫.

5.3.2 等比数列的前 n 项和

1. 关于等比数列的前 n 项和公式的教学，需要注意：

(1) 在推导等比数列的前 n 项和公式时，$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$ 的

两边分别乘以 q 这一步，学生往往不易想到，教师要注意启发和引导. 等式两边同时乘以 q 后，右边的每一项就得到它后面相邻的一项，即 $qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n$. 从前一等式的两边分别减去后一等式的两边，就可以消去相同的项. 这种求和的基本方法——错位相减法，要求学生了解即可.

(2) 对于另一形式的求和公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$，教师可引导学生自己推出. 教学中注意组织学生讨论，如何灵活运用这两个求和公式. 要特别注意告诉学生，使用求和公式时，若 $q=1$，则前 n 项和为 $S_n=na_1$.

2. 等比数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，q，n 和 S_n，已知其中 3 个量，就可以通过解方程或方程组求出另外 2 个量.

5.4 等差数列与等比数列的应用

1. 本节列举了等差数列和等比数列在实际生活中的应用，使学生了解数列应用的广泛性. 同时，通过实例讲解可使学生对前面所学知识进行进一步的复习、巩固.

2. 针对实际应用中的"增长"与"减少"问题，要进行具体分析. 一般来说，当"增长"或"减少"的是具体数量相等时，常用等差数列的有关知识去解决；当"增长"或"减少"的是倍数或百分数相等时，则常用等比数列的有关知识去解决.

3. 在应用等差数列公式时，若题中的增长量为 x，则公差为 x；应用等比数列公式时，若所涉及的增长率为 x，则公比为 $1+x$.

4. 要分清是求 a_n 还是 S_n. 关键是弄懂题意，分析各个量在所构建的数列中所表示的意义，切忌不加分析盲目套用公式.

5. 在解答应用题时常常要设未知数，为了使计算更简便，要根据题意灵活地设未知数. 一般地，如果已知三个数成等差数列，可设这三个数分别

$$a-d,\ a,\ a+d,$$

其中 d 为公差；如果已知 3 个数成等比数列，可设三个数分别为

$$\frac{a}{q},\ a,\ aq,$$

其中 q 为公比.

‖参考教案‖

5.2.2 等差数列的前 n 项和

教学目标

1. 通过对等差数列前 n 项和公式的推导，使学生能了解"倒序相加"的数学方法.

2. 会利用等差数列的前 n 项和公式进行计算.

教学重点

等差数列的前 n 项和公式的应用.

教学难点

等差数列的前 n 项和公式的推导.

教学方法

启发式、探究式.

教学过程

一、复习巩固

(1) 什么叫等差数列?

(2) 等差数列的通项公式是什么?

二、创设情境，引入新知

介绍一个"小故事"：高斯是伟大的数学家、天文学家，相传高斯十岁时，有一次老师出了一道题目，计算

$$1+2+3+\cdots+100$$

的值.

过了两分钟，正当同学们在 $1+2=3$，$3+3=6$，$4+6=10$，…算得不亦乐乎时，高斯站起来回答说：

"$1+2+3+\cdots+100=5\ 050$."

你知道高斯是如何这么快地得出答案的吗?

(故事的引入，可以激发学生的兴趣和求知欲.)

三、引入实例、发现新知

求问题中图 5-3 (1) 所用瓷砖的块数.

(教师用多媒体演示.)

提出问题：如何用最快的方法求得所用瓷砖的块数?

(教师请同学们相互讨论.)

在同学们讨论的基础上，发现并提炼如下方法：

把图 5-3 (1) 上下倒置后和原图拼接得到图 5-3 (2)，我们发现共有 6 层，每一层的瓷砖都是 14 块. 所以，所用瓷砖的块数是

$$(6\times 14)\div 2=42.$$

指出这种方法为倒序相加法. 再回到引入的问题，当年的高斯就是用这种方法，迅速地得出了从 1 加到 100 的结果.

四、探究规律，升华新知

给出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

引导学生观察图 5－4，让学生根据图猜想公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

（在猜想的基础上师生共同完成证明过程.）

因为

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \quad ①$$

倒序表示为

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1, \quad ②$$

根据等差数列的定义，①式与②式可分别表示为

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ③$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \quad ④$$

③式与④式左右两边分别相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n),$$

即 $2S_n=n(a_1+a_n)$，则 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

引导学生自己完成公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

的证明.

组织学生讨论：两个公式都能用来求等差数列的前 n 项和，如何选择公式呢？

强调：在这两个公式中，都涉及四个变量的关系，只要知道其中任意三个，就可求出另一个.

五、知识应用，巩固新知

例 5　已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，根据下列条件求 S_n：

(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

(2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$.

（请学生板书，集体订正.）

例 6　求等差数列 1，3，5，7，…的前 200 项和.

（此类问题是等差数列的简单应用，根据已知条件正确选择公式、规范解题步骤是讲解的重点. 师生共同完成解题步骤.）

解：此等差数列 $\{a_n\}$ 中，有

$$a_1=1,\ d=2,\ n=200,$$

由等差数列的前 n 项和公式得

$$S_{200}=200\times1+\frac{200\times(200-1)}{2}\times2=40\ 000.$$

即所求和是 40 000.

六、课堂小结

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\text{或 }S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

(1) 上面公式的推导过程：倒序相加.

(2) 能根据已知条件，灵活选择公式.

七、课堂练习

练习 5.2.2　1，2 (1)，3.

八、布置作业

练习 5.2.2　2 (2).

九、板书设计

5.2.2　等差数列的前 n 项和		
1. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$	公式一：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	例 5
2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 公式的推导：	公式二：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	例 6

‖习题答案、提示或解答‖

练习 5.1

1. (1) 10，25；　(2) 8，64.

2. (1) $a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=4$；

(2) $a_1=-5$，$a_2=5$，$a_3=-5$，$a_4=5$，$a_5=-5$.

3. (1) $a_7=63$，$a_{10}=120$；　(2) $a_7=\frac{1}{7}$，$a_{10}=-\frac{1}{10}$.

4. (1) $a_n=3n$；　(2) $a_n=\frac{n+1}{n}$；　(3) $a_n=(-1)^{n+1}$；　(4) $a_n=10^n-1$.

练习 5.2.1

1. (1) 是；　(2) $a_n=2n-2$；　(3) -1；　(4) 0.

2. $a_n=-2n+12$，$a_{20}=-28$.

3. (1) $a_1=10$；　(2) $d=-1$；　(3) $n=10$；　(4) $a_n=-2n+8$.

4. (1) 298；　(2) 33.25.

5. (1) $a_4=14.6$；

(2) 由已知得$\begin{cases}a_1+2d=9,\\a_1+8d=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=11,\\d=-1,\end{cases}$因此可得 $a_{12}=0$.

6. 根据题意可知，梯子各级的宽度从上到下组成等差数列 $\{a_n\}$. 其中

$$a_1=40,\ a_n=58,\ n=7,$$

则 $a_7=a_1+(7-1)d$，即

$$58=40+6d,$$

解得 $d=3$.

于是

$$a_2=40+3=43,$$
$$a_3=43+3=46,$$
$$a_4=46+3=49,$$
$$a_5=49+3=52,$$
$$a_6=52+3=55.$$

即梯子中间各级的宽从上到下依次是 43 cm，46 cm，49 cm，52 cm，55 cm.

练习 5.2.2

1. (1) $50(a_1+a_{100})$； (2) $100a_1+4\ 950d$； (3) 500； (4) 5 050.

2. (1) $S_{100}=1\ 100$； (2) $S_{10}=-115$.

3. $S_{500}=250\ 500$.

练习 5.3.1

1. (1) 32； (2) $\frac{1}{2}$； (3) ±3； (4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

2. (1) $a_n=5\times(-3)^{n-1}$，$a_6=-1\ 215$； (2) $a_n=1.2\times2^{n-1}$，$a_6=38.4$；

(3) $a_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_6=\frac{81}{512}$； (4) $a_n=2^{1-0.5n}$，$a_6=\frac{1}{4}$.

3. (1) $a_1=36$； (2) $a_1=5$，$a_4=40$.

4. $q=3$.

5. $n=9$.

6. (1) ±8； (2) $\pm\sqrt{21}$.

7. 设这 5 个数组成等比数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=5$，$a_5=405$，由等比数列的通项公式可得 $5q^4=405$，解得 $q=\pm3$. 因此，所求的三个数分别为 15，45，135 或 -15，45，-135.

练习 5.3.2

1. (1) 100； (2) 0，3.

2. (1) $S_6=189$； (2) $S_5=\frac{341}{128}$.

3. （1）$S_{10}-S_4=1\,008$；　（2）$S_7-S_2=\dfrac{93}{128}$.

4. $q=\pm\dfrac{1}{2}$. 当$q=\dfrac{1}{2}$时，$S_5=\dfrac{279}{4}$；当$q=-\dfrac{1}{2}$时，$S_5=\dfrac{99}{4}$.

5. $n=4$.

练习 5.4

1. 设各个齿轮的齿数组成等差数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=24,\ a_8=45,\ n=8.$$

由等差数列的通项公式，得

$$45=24+7d,$$

解得 $d=3$. 于是

$$\begin{aligned}a_2&=24+3=27,\\a_3&=27+3=30,\\a_4&=30+3=33,\\a_5&=33+3=36,\\a_6&=36+3=39,\\a_7&=39+3=42.\end{aligned}$$

所以其余各齿轮的齿数分别为 27，30，33，36，39，42.

2. 设此剧场每排的座位数组成等差数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=38,\ d=2,\ n=20.$$

由等差数列的前 n 项和公式得

$$S_{20}=20\times38+\frac{20\times(20-1)}{2}\times2=1\,140.$$

所以这个剧场总共要安置 1 140 个座位.

3. （1）13.5×0.9^n；

（2）$13.5\times0.9^4\approx8.86$ 万元.

4. 设年增长率为 x，根据题意可知去年、今年、明年生产的机器台数组成等比数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=1\,080,\ a_3=1\,920,\ q=1+x.$$

由等比数列的通项公式可得

$$1\,080\times(1+x)^2=1\,920,$$

整理，得 $(1+x)^2=\dfrac{16}{9}$，$1+x=\sqrt{\dfrac{16}{9}}$，解得 $x\approx33\%$.

所以这个年增长率约是 33%.

习题五

1. (1) $a_1=-3$，$a_2=-1$，$a_3=1$，$a_4=3$，$a_5=5$；

(2) $a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=10$，$a_4=17$，$a_5=26$.

2. (1) $a_{10}=110$，$a_{31}=992$，$a_{48}=2\ 352$；

(2) 420 是这个数列的第 20 项.

3. (1) 771； (2) 90.

4. 由已知可得

$$\begin{cases}a_1+5d=5,\\ a_1+2d+a_1+7d=5,\end{cases}$$

整理得$\begin{cases}a_1+5d=5,\\ 2a_1+9d=5,\end{cases}$解得

$$\begin{cases}a_1=-20,\\ d=5.\end{cases}$$

所以

$$a_9=a_1+8d=-20+8\times5=20.$$

5. (1) $d=2$，$n=10$； (2) $a_1=7$，$a_n=-7$；

(3) $n=5$，$a_n=17$； (4) $a_1=-38$，$S_n=-360$.

6. (1) $a_7=-729$；

(2) 由已知可得

$$\begin{cases}a_1q=18,\\ a_1q^3=8,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=27,\\ q=\dfrac{2}{3}\end{cases}或\begin{cases}a_1=-27,\\ q=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

7. (1) ±60； (2) ±2.

8. 这两个数分别是 27，81.

9. 设所求的三个数分别为

$$\frac{a}{q},\ a,\ aq.$$

根据题意得

$$\begin{cases}\dfrac{a}{q}+a+aq=14,\\ \dfrac{a}{q}aaq=64,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=4,\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

因此，所求的三个数分别是 2，4，8 或 8，4，2.

10. 设这三个数分别为

$$a-d,\ a,\ a+d.$$

根据题意可得

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15,\\(a-d+1)(a+d+9)=(a+3)^2,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=5,\\d=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=5,\\d=-10\end{cases}$（舍去）.

因此，这三个数分别为 3，5，7.

11. (1) $a_n=\dfrac{1}{5n}$；　(2) $a_n=-2n+2$；　(3) $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$；

(4) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n}$；　(5) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$；　(6) $a_n=(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}$.

12. (1) $q=2$，$S_4=180$；

(2) $a_1=2$ 与 $a_5=\dfrac{1}{8}$；

(3) 当 $q=-4$ 时，$a_3=32$；当 $q=3$ 时，$a_3=18$.

13. 依题意，甲每年的月薪组成等差数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=2\ 000,\ d=400,$$

所以，第 n 年甲的月薪为

$$a_n=a_1+(n-1)d=2\ 000+(n-1)\times400.$$

当 $n=10$ 时，$a_{10}=400\times10+1\ 600=5\ 600$.

甲 10 年的总收入为

$$\begin{aligned}S_{甲}&=12\times2\ 000+12\times(2\ 000+400)+12\times(2\ 000+2\times400)+\\&\quad\cdots+12\times(2\ 000+9\times400)\\&=12\times(2\ 000+2\ 400+2\ 800+\cdots+5\ 600)\\&=12\times\frac{10\times(2\ 000+5\ 600)}{2}=456\ 000\text{ 元}.\end{aligned}$$

乙每年的月薪组成等比数列 $\{b_n\}$，其中

$$b_1=2\ 000,\ q=1+15\%=1.15,$$

所以，第 n 年乙的月薪为

$$b_n=b_1q^{n-1}=2\ 000\times1.15^{n-1}.$$

当 $n=10$ 时，$b_{10}=2\,000\times1.15^9\approx7\,036$.

乙 10 年的总收入为

$$\begin{aligned}S_乙&=12\times2\,000+12\times2\,000\times(1+15\%)+12\times2\,000\times(1+15\%)^2+\\&\quad\cdots+12\times2\,000\times(1+15\%)^9\\&=12\times2\,000\times(1+1.15+1.15^2+\cdots+1.15^9)\\&=12\times2\,000\times\frac{1-1.15^{10}}{1-1.15}\approx487\,289\text{ 元}.\end{aligned}$$

因此，第十年甲和乙的月薪分别为 5 600 元和 7 036 元；甲和乙 10 年的总收入分别为 456 000 元和 487 289 元.

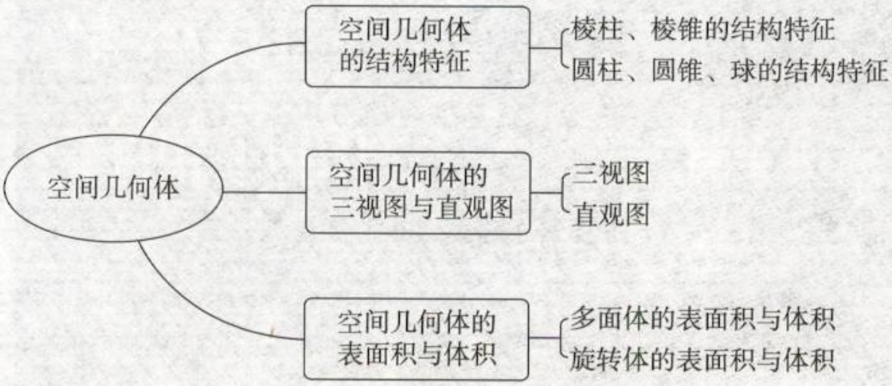
第六章
空间几何体

思想火花

给我最大快乐的，不是已获得的知识，而是不断地学习；不是已有的东西，而是不断地获取；不是已经达到的高度，而是持续不断地攀登.

——高斯

‖知识导图‖



‖教学要求‖

本章的教学要求分为基本要求和发展要求.

（一）基本要求

1. 了解多面体（棱柱、棱锥）和旋转体（圆柱、圆锥、球）的有关概念及结构，但对它们的有关性质不作要求.

2. 了解平行投影和三视图的初步知识，能画出基本几何体、简单组合体（柱、锥、球等的简易组合）的三视图.

3. 了解直观图的初步知识，能根据基本几何体的直观图描述它们的特征.

4. 掌握柱、锥、球的表面积公式和体积公式，了解有关侧面积公式的推导过程及其主要思想，了解把有关立体几何问题转化为平面几何问题来处理的数学思想.

5. 培养和发展学生的空间想象能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力.

（二）发展要求

1. 能够根据三视图描述基本几何体、简单组合体或实物原型.

2. 能用斜二测画法画棱柱、棱锥的直观图.

3. 会求简单组合体的表面积和体积，并利用相关知识解决实际问题.

‖教材分析和教学建议‖

本章主要内容包括：空间几何体，空间几何体的三视图和直观图，空间几何体的表面积和体积.

本章第一大节主要是认识空间几何体.

教材首先呈现生活中常见的物体，并抽象出物体的轮廓，从而引出空间几何体，通过对这些空间几何体的整体观察，帮助学生认识其结构特征，然后运用这些特征再

来描述现实生活中的一些简单物体的结构.

几何体作为一种直观、形象的数学模型，在提高学生的空间想象能力、培养学生的创新精神方面具有独特的价值. 教师可利用计算机、多媒体、实物向学生展示更加丰富多彩的几何图形，让学生获得视觉上的愉悦，增强探究的好奇心，感悟其中的数学美，激发出潜在的创造力.

本章第二大节的主要内容是空间几何体的三视图和直观图.

教材通过观察生活现象和进行适当的直观说理，让学生了解平行投影的初步知识，理解为什么能用空间几何体的直观图（平面图形）来表示空间中的几何图形.

通过画空间几何体的直观图和三视图，进一步加深学生对几何体结构的认识，培养学生空间想象能力和应用数学知识的能力.

本章第三大节的主要内容是柱、锥、球的表面积和体积公式.

侧面积公式的推导，教材给出了空间几何体的侧面展开图供学生领会，从而领悟立体问题（求侧面积）转化为平面问题（展开图面积）的思想方法. 而空间几何体的体积和球的表面积的计算，则只给出了公式，要求学生会用即可.

面积和体积的计算应着重让学生把柱、锥、球的表面积和体积计算公式统一起来认识. 要求学生学会一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

本章重点是：空间几何体的概念，三视图与直观图，空间几何体的表面积和体积公式.

本章难点是：画空间几何体的三视图与直观图，空间几何体的表面积和体积公式的应用.

学好本章的关键是：深刻认识和区别各种几何体，熟练识记和运用柱、锥、球的表面积与体积计算公式.

本章教学约需 11 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　认识空间几何体	约 3 课时
6.2　空间几何体的三视图与直观图	约 2 课时
6.3　空间几何体的表面积和体积	约 4 课时
小结与复习	约 2 课时

6.1　认识空间几何体

6.1.1　认识多面体与旋转体

1. 本小节的主要内容是多面体和旋转体的有关概念. 本小节是为学习立体几何的初步知识做的铺垫，是学习立体几何的基础，本小节的重点是多面体和旋转体的有关

概念.

2. 教材给出多面体和旋转体的概念，目的是为了让学生能够分清两类几何体，为以后的学习打下基础.

3. 本节涉及的空间几何体，学生在小学、初中都有初步的认识，只是没给出它们的严格定义，教师教学时应尽量结合教具和多媒体，使学生对有关概念有形象生动的认识.

6.1.2　棱柱、棱锥

1. 本小节的主要内容是棱柱、棱锥的有关概念，只要求学生直观理解，不要求学生对线面关系做深刻的理解. 本小节的重点是棱柱、棱锥的有关概念.

2. 教学中，教师可以让学生将棱锥和棱柱进行比较，然后用收缩的方法引出棱锥的概念，这样有利于学生用运动变化的观点去认识棱柱、棱锥的关系. 教师要通过实物模型或多媒体演示，引导学生在理解定义的基础上，区分各种棱柱和棱锥，并归纳它们的结构特征.

3. 多面体的高的概念是通过铅垂线给出的，在教学中，可以用一根细绳下面系一个重物给学生演示，让学生理解高的概念，并直观地认识到直线和底面垂直时，这条直线就和底面中的任何一条直线垂直，从而为讲解例 1 和例 2 打基础.

6.1.3　圆柱、圆锥、球

1. 本小节主要内容是圆柱、圆锥、球的有关概念，让学生直观理解，不要求学生对线面关系做深刻的理解. 本节的重点是圆柱、圆锥、球的有关概念.

2. 教学中可先让学生思考圆柱、圆锥的生成规律，然后给出它们的定义，主要是让学生初步理解旋转体的概念. 教学中应结合实物模型或多媒体演示，引导学生思考它们的结构特征.

3. 对于旋转体，重点介绍了圆柱、圆锥、球. 教学时最好结合多媒体加以形象演示，让学生体会到它们的动态形成过程，帮助学生理解旋转体.

4. 在讲授球的有关概念时，应注意球体和球面的联系和区别. 本小节中球面距离不易理解，教师可以借助地球仪进行讲解，也可根据学生情况补充与地球有关的概念，如经线、纬线等.

6.2　空间几何体的三视图与直观图

1. 本节的主要内容是平行投影、三视图和直观图的初步知识. 教学重点是正投影与三视图的画法，根据棱柱、棱锥的直观图描述它们的特征. 教学难点是三视图的画

法及应用.

2. 教材首先通过实际生活中的问题引出平行投影、斜投影和正投影的定义；接着给出三视图的定义和研究三视图的画法，最后介绍直观图的初步知识.

3. 三视图的教学，应在初中基础上提高一步. 正投影是作出几何体三视图的根据，通过研究几何体模型在教室地面和两个相交的互相垂直的墙面上的正投影，或观察相应课件中的动态图形，都可以帮助学生理解三视图的形成过程.

4. 要求学生能看懂前面所学的一些几何体的直观图，了解斜二测画法是画几何体直观图的一种方法. 斜二测画法是发展要求，只要求学生能够运用斜二测画法的画图规则正确地画图和看图，不要求表达作图过程. 作图规则可简要地说成：竖直或水平方向放置的线段画出时方向、长度都不变，前后方向放置的线段画出时方向与水平方向成 45°（或 135°）角，长度画成原来长度的一半.

6.3　空间几何体的表面积和体积

6.3.1　空间几何体的表面积

1. 本小节的主要内容是柱、锥、球的表面积计算公式（不要求记忆公式），有关侧面积公式的推导过程及其主要思想. 教学中要渗透把有关立体几何问题转化为平面几何问题来处理的数学思想和类比的思想方法. 本小节的重点是培养学生能够运用公式进行计算的能力.

2. 柱、锥的侧面积公式没有列出详细的推导过程，只提供了直观形象的侧面展开图，在直观上用实验对公式加以验证，着重于体现空间向平面转化的思想. 教学时可以通过演示一些多面体的平面展开图的过程，让学生了解平面展开图的概念.

3. 几种多面体和旋转体的表面积，除球面外，都是通过它们的侧面展开图求得的. 教学中应运用多种媒体，再现展开过程，激发学生学习兴趣，也便于知识的理解、记忆和迁移. 对部分基础比较好的学生，教师可引导学生对公式进行推导. 另外，要让学生理解斜高和高的概念，为后面做好铺垫.

4. 对于例题，由于学生没有学习点、线、面的位置关系，在讲解中，一些定义、定理，例如直线和平面垂直的定义等，只是让学生直观理解，教师可以用教具进行辅助说明，不要求说明理由.

5. 球面的表面积公式是直接给出的，这个公式的证明教师可以根据学生的情况进行简要的说明.

球的表面积公式可以通过球的体积公式得到，具体推导过程如下.

设球 O 的半径为 R，我们把球面任意分割为一些“小球面片”，它们的面积分别

用 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_i，…表示，则球的表面积为

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots.$$

以这些“小球面片”为底，球心为顶点的“小锥体”的体积和等于球的体积，这些“小锥体”可近似地看成小棱锥，“小锥体”的底面积 ΔS_i 近似地等于小棱锥的底面积，球的半径 R 近似地等于小棱锥的高 h_i，因此，第 i 个小棱锥的体积 $V_i=\frac{1}{3}h_i\Delta S_i$，当“小锥体”的底面非常小时，“小锥体”的底面几乎是“平的”，于是球的体积为

$$V\approx\frac{1}{3}(h_1\Delta S_1+h_2\Delta S_2+\cdots+h_i\Delta S_i+\cdots).$$

因为 $h_i\approx R$，且 $S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots$，所以可得

$$V\approx\frac{1}{3}RS.$$

又因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以$\frac{1}{3}RS=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以

$$S=4\pi R^2,$$

这就是球的表面积公式.

6.3.2 空间几何体的体积

1. 本小节的主要内容是柱、锥、球的体积计算公式（不要求记忆公式）. 本小节的重点是培养学生运用公式解决实际问题的能力.

2. 柱、锥、球的体积的计算公式，教材是直接给出的，没有在理论上进行证明，只要求学生理解公式所表示的意义，可着重让学生把柱、锥、球的体积计算公式统一起来认识，加强联系和对比，会利用公式进行计算.

3. 柱、锥体积公式的引出，是从学生熟悉的长方体引入的，然后运用祖暅原理，采用由特殊到一般的方法，类比给出棱柱和圆柱的体积公式. 而锥体的体积，是通过“切割法”得到的，教师可以结合模具或多媒体进行讲解.

4. 圆柱、圆锥的与底面半径相关的体积公式 $V_{圆柱}=\pi R^2h$，$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2h$，教材中没有给出，原因是为了降低难度，让学生掌握通性通法. 教师可以根据学生实际情况进行补充.

5. 例题的选取尽量体现体积在实际生活中的运用，以激发学生学习的兴趣，增强数学的应用意识. 在教学中，教师可结合日常生活中的具体例子，让学生明白体积在实际生活中的运用.

6. 对于球的体积公式，传统教材是利用分割，先近似求和，再精确求和的极限思想方法来推导的，这里结合祖暅原理对球的体积公式进行简要的推导.

已知半径为 R 的球，用过球心的平面去截球，球被截面分成大小相等的两个半球.

把垂直于底面的半径 OA 作 n 等分，经过这些分点用一组平行于半球底面的平面把半球切割成 n 层，每一层都近似于一个高为 $\frac{R}{n}$ 的圆柱，其中第 i 层（由下向上数）圆柱的底面半径为

$$r_i=\sqrt{R^2-\left[\frac{R}{n}(i-1)\right]^2}，i=1，2，3，\cdots，n，$$

这些圆柱的体积之和就是半球的体积.

而

$$V_i\approx\pi r_i^2\frac{R}{n}=\frac{\pi R^3}{n}\left[1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]，i=1，2，3，\cdots，n，$$

所以

$$\begin{aligned}V_{半球}&=V_1+V_2+\cdots+V_n\\&\approx\frac{\pi R^3}{n}\left\{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\right\}\\&=\pi R^3\left[1-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right]\\&=\pi R^3\left[1-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\right].\end{aligned}$$

当所分的层数不断增加时，上式的精确度越来越高，若 n 变为无穷大，就得到 $V_{半球}$ 的准确值. 因为 n 趋向无穷大时，$\frac{1}{n}$ 趋向 0，所以

$$V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3，$$

因此

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

‖参考教案‖

6.3.2　空间几何体的体积

教学目标

1. 识记并掌握棱柱、圆柱的体积公式，并灵活运用体积公式解决实际问题.

2. 了解祖暅原理的含义. 在推导棱柱体积公式的过程中，体会从特殊到一般、从一般到特殊的归纳演绎的数学思想方法.

3. 通过介绍我国古代数学家体积研究的成果，激发学生的民族自豪感，提高学

生学习数学的兴趣.

教学重点

祖暅原理和棱柱、圆柱的体积公式.

教学难点

祖暅原理的运用.

教学方法

启发式、探究式.

教学过程

一、实例引入，提出问题

在生活实际中，经常会遇到体积的计算问题，如兴修水利、修建道路需要计算土方，修建粮仓、水池需要计算建材数量和容积. 因此有必要研究几何体的体积计算.

(1) 一个圆柱形的器皿，底面半径为 3 cm，高度为 8 cm，那么怎样计算它的容积呢?

(2) 一个长方体形的游泳池，长是 50 m，宽是 21 m，深是 2 m，那么这个游泳池能容纳多少水?

(用多媒体展示生活中的圆柱形的水桶、瓶子、游泳池等图片，显示问题.)

这都涉及棱柱、圆柱的体积如何计算的问题.

二、探究棱柱、圆柱的体积公式

1. 从已知到未知，从特殊到一般

首先想到已经学过的长方体的体积公式，然后探究一般棱柱的体积公式.

初中学过的计算长方体的体积公式是

$$V_{长方体}=abc \text{ 或 } V_{长方体}=Sh,$$

其中 a 是长，b 是宽，c，h 是高，S 是底面积.

(用多媒体展示长方体及其体积公式.)

问题 底面积相等、高也相等的棱柱、圆柱，它们的体积是否一样?

(用多媒体展示图 1 的三个几何体，并且用动画演示截面上下运动.)

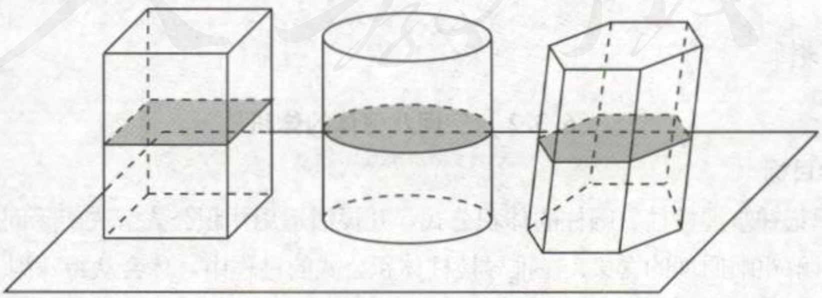


图 1

体积公式 $V=Sh$ 对其他两个几何体是否成立呢？

请学生谈谈对体积的理解，并小结：几何体占空间部分的大小称为它的体积.

2. 进行数学实验，引入祖暅原理

（1）取一摞课本堆放在水平桌面上，然后用手推一下以改变其形状.

（2）取一摞光盘，组成一个圆柱，然后改变一下形状.

启发思考：

（1）推斜以后体积变化了吗？

几何体所占空间的大小不变.

（2）推斜前后的两个几何体还有什么共同之处？这种共同之处是不是就是两个几何体体积相等的条件呢？

高度没有改变，每页纸、光盘的顺序和面积也没有改变.

由学生总结归纳出祖暅原理的大致内容.

3. 屏幕显示祖暅原理“幂势既同，则积不容异”

内容解释：这里的“幂”是指水平截面的面积，“势”是指高.

即体积可看成是由面积叠加而成，用一组平行平面截两个空间图形，若在任意等高处的截面面积都对应相等，则两空间图形的体积必然相等.

还可表达为：夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等，如图 2 所示.

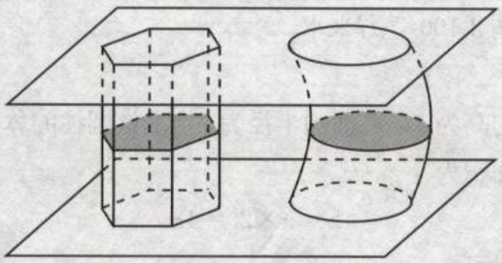


图 2

说明：祖暅原理实际上是一个定理，但证明它需要用到高等数学的相关知识，中学阶段不能证明. 祖暅原理只能判定两个几何体是否等积，不能用它具体求出某几何体的体积，要想完成求体积的任务，还必须已知一个几何体的体积作为基础.

（用几何画板动态演示任意一个平面截两个几何体所得截面的各种情况.）

4. 利用祖暅原理推导棱柱、圆柱的体积公式

如果一个棱柱、一个圆柱与一个长方体的高相同（都为 h）且底面面积相等（都为 S），那么当我们用一个与底面平行的平面去截它们时，可以证明截面的面积都等于各自底面的面积 S，根据祖暅原理可知，棱柱、圆柱的体积与长方体的体积相

等，即

$$\boxed{V_{\text{柱体}}=Sh,}$$

其中 $V_{\text{柱体}}$ 表示柱体的体积，S 表示柱体底面的面积，h 表示柱体的高.

5. 介绍祖冲之父子及我国古代数学家在几何体体积方面的研究

中国古代数学，在魏晋南北朝达到新的高峰. 这一时期的代表人物是刘徽、祖冲之和他的儿子祖暅. 刘徽为《九章算术》作注，祖冲之父子在此基础上撰写了《缀术》等著作. 祖冲之计算圆周率的近似值，提出约率和密率，是世界数学史上的重大成就. 这三人还先后研究并最终给出了球的体积公式. 在这过程中，祖冲之父子提出了“幂势既同，则积不容异”的原理. 唐朝的李淳风在为《九章算术》作注时，称求球体体积公式的方法是用“祖暅之开立圆术”得到的，因此我国称“幂势既同，则积不容异”的原理为祖暅原理. 意大利数学家卡瓦列里 1635 年提出了相同的原理，因此西方称之为卡瓦列里原理. 上述原理为微积分学的创立做了准备.

三、巩固与应用

1. 引例的解答：

(1) 因为

$$V_{\text{圆柱}}=Sh=\pi\times3^2\times8=72\pi\ \text{cm}^3,$$

所以圆柱形器皿的体积是 $72\pi\ \text{cm}^3$.

(2) 因为

$$V_{\text{棱柱}}=Sh=50\times21\times2=2\ 100\ \text{m}^3,$$

所以这个游泳池能容纳 2 100 立方米水.

2. 讲解例题：

例 5　已知圆柱的高为 4，底面圆半径为 2，求该圆柱的体积.

解：该圆柱的底面积为

$$S=\pi\times2^2=4\pi.$$

由柱体的体积公式可知

$$V=4\pi\times4=16\pi.$$

因此圆柱的体积为 16π.

四、课堂练习

1. 已知正六棱柱底面边长为 4 cm，高为 6 cm，求这个正六棱柱的体积.

2. 已知长方体的铁块长、宽、高分别是 2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铁块（不计损耗），求铸成的铁块的棱长.

五、课堂小结

1. 本节课的主要内容有两个：一是棱柱、圆柱的体积公式的推导，二是应用棱柱、圆柱的体积公式解决实际问题.

2. 本节课的数学思想方法主要体现在：由特殊长方体的体积推导一般棱柱、圆柱的体积，再根据一般棱柱的体积公式去解决具体问题中特殊棱柱的体积，这种从特殊到一般、再从一般到特殊的归纳演绎的数学思想方法是学习数学原理的通用的方法.

六、布置作业

练习 6.3.2　2，3.

七、板书设计

6.3.2　空间几何体的体积		
1. 长方体的体积	**3.** 棱柱、圆柱的体积	例 5
2. 祖暅原理		练习

‖习题答案、提示或解答‖

练习 6.1.1

1. 5，5，8；8，6，12.

2. 略.

练习 6.1.2

1. (1) 错误；　　(2) 错误.

2. $\{x\,|\,x$ 是四棱柱$\} \supsetneqq \{x\,|\,x$ 是直四棱柱$\} \supsetneqq \{x\,|\,x$ 是长方体$\} \supsetneqq \{x\,|\,x$ 是正方体$\}$，图略.

3. (1) $5\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt{186}$.

4. 3.

5. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

练习 6.1.3

1. (1) 正确；　　(2) 错误；　　(3) 错误.

2. (1) 2 cm；　　(2) 4 cm；　　(3) πR^2；　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 圆锥和圆柱.

4. 略.

5. 半球和圆柱，棱锥和棱柱，棱柱和圆柱.

6. 4 cm.

练习 6.2

1. 略.

2. 略.

3. 正四棱锥.

4. 一个圆锥和圆柱的组合体.

5. 略.

6. 略.

7. 略.

练习 6.3.1

1. $2\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{66}$（提示：有两种折法）.

2. 它的侧面积是 $12\sqrt{3}$，全面积是 $16\sqrt{3}$.

3. 制造这种塔顶需要 3.40 平方米铁板.

4. $30\sqrt{34}$.

5. 54π.

6. $\frac{64}{9}\pi$.

7. 6π.

8. 4.

9. $64\pi\ \text{cm}^2$.

10. 576.

11. 12 057.6 元.

12. $2(\sqrt{3}+1)\pi$.

练习 6.3.2

1. 4.

2. $144\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

3. $36\pi\ \text{cm}^3$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. $128\pi\ \text{cm}^3$.

6. 6.

7. $2\pi\ \text{cm}^3$.

8. $\frac{\sqrt{35}}{3}\pi$.

9. $\frac{3\pi}{2}$.

10. 8.

11. （1）第一种方案的体积$\frac{256}{3}\pi\ \mathrm{m}^3$，第二种方案的体积 $96\pi\ \mathrm{m}^3$.

（2）第一种方案的侧面积 $32\sqrt{5}\pi\ \mathrm{m}^2$，第二种方案的侧面积 $60\pi\ \mathrm{m}^2$.

习题六

1. （1）3；（2）2 cm，$12\pi\ \mathrm{cm}^2$；（3）$4+4\sqrt{3}$；

（4）$\frac{32}{3}\pi$；（5）侧面积是 24π，体积是 36π 或 48π.

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

3. 4π.

4. $100\pi\ \mathrm{cm}^2$，$\frac{500}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$.

5. 略.

6. 略.

7. $2:1$.

8. $4\sqrt{2}\pi$，$\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

9. $20\sqrt{2}\ \mathrm{m}^2$.

10. 提示：因为

$$V_{半球}=\frac{128\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3,\ V_{圆锥}=64\pi\ \mathrm{cm}^3,$$

所以 $V_{半球}<V_{圆锥}$.

因此冰淇淋融化了之后不会溢出杯子.

11. $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.

12. $\frac{5}{3}$ cm.

13. $\frac{56}{3}\pi$.

14. $3\pi+4$；π.