

山东省职业教育教材
审定委员会审定

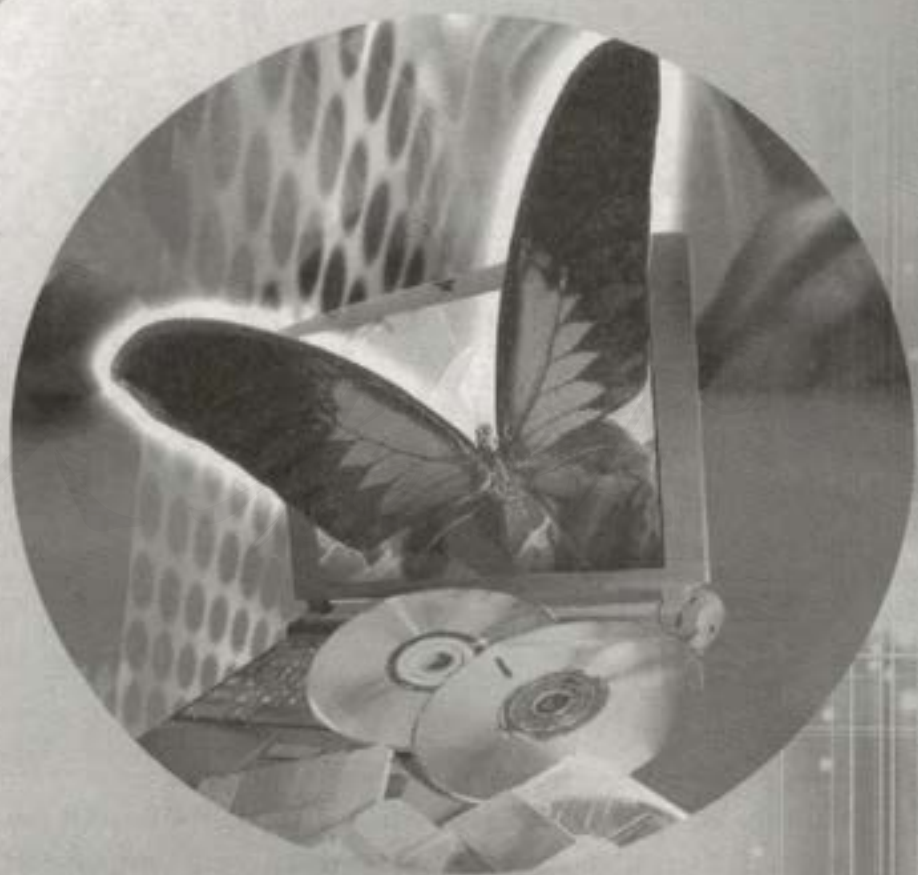
中等职业教育规划教材

数学

第二册

SHUXUE

山东省职业教育教材编写组 编著



人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 第2册/山东省职业教育教材编写组编著. —3版. —北京: 人民教育出版社, 2012 (2019.7重印)

中等职业教育规划教材

ISBN 978-7-107-20149-3

I. ①数… II. ①山… III. ①数学课—中等专业学校—教材 IV. ①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第036649号

中等职业教育规划教材 数学 第二册

出版发行 人民教育出版社

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编: 100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>

经 销 全国新华书店

印 刷 山东汇文印务有限公司

版 次 2009年12月第3版

印 次 2019年7月第26次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 12.5

字 数 190千字

定 价 15.80元

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或本产品任何部分·违者必究
如发现内容质量问题, 印装质量问题, 请与本社联系。电话: 400-810-5788

主 编 高存明

副 主 编 孙明红 李励信 陆泽贵

编写人员 王智海 刘学卫 刘树凤 祁志卫

李长林 李增华 杜红梅 徐 刚

彭晋顺

责任编辑 龙正武

人教版®

出版说明

为了贯彻全国、全省职业教育工作会议精神，落实《面向 21 世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，按照《中共山东省委山东省人民政府关于大力发展职业教育的决定》要求，山东省教育厅组织力量对中等职业教育文化基础课程、专业课程教材建设进行了规划和编写，以适应职业教育改革与发展的需要。本套教材经山东省职业教育教材审定委员会审定通过，从 2006 年秋季开学起，陆续提供给全省职业院校使用。

本套教材贯彻“以服务为宗旨、以就业为导向”的教学指导思想，以经济和社会发展的对高素质劳动者和各种专门人才的需要为出发点，并充分考虑到中等职业学校学生的实际水平，注重对学生职业素质、创新精神和实践能力的培养，体现了“以人为本、以能力为本”的教育教学理念，在教材体系、知识结构和内容阐述方面均作了一些新的尝试，努力满足不同类别、不同学制、不同专业和不同办学条件的学校教学需要，供中等职业学校和其他类型的职业学校、各种职业培训机构选用。

希望各地、各有关职业院校在使用山东省职业教育规划教材过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

山东省职业教育教材编写领导小组

二〇〇六年五月



人教版

目 录

CONTENTS

07

第七章 三角函数

7.1 任意角的概念与弧度制	2
7.1.1 任意角的概念	2
7.1.2 弧度制	7
7.2 任意角的三角函数	10
7.2.1 任意角的三角函数的定义	10
7.2.2 单位圆与正弦、余弦线	14
7.2.3 利用计算器求三角函数值	16
7.2.4 三角函数值在各象限的符号	18
7.3 同角三角函数的基本关系式	20
7.4 三角函数的诱导公式	24
7.5 正弦、余弦函数的图象和性质	29
7.5.1 正弦函数的图象和性质	29
7.5.2 余弦函数的图象和性质	34
7.6 已知三角函数值求角	37
阅读与实践	41

08

第八章 平面向量

8.1 向量的概念	45
8.2 向量的线性运算	48
8.2.1 向量的加法	49
8.2.2 向量的减法	52
8.2.3 数乘向量	54
8.3 平面向量的直角坐标运算	58
8.3.1 平面向量的直角坐标及其运算	58
8.3.2 平面向量平行的坐标表示	63
8.3.3 向量的长度公式和中点公式	65
8.4 向量的内积	68
8.4.1 向量的内积	68
8.4.2 向量内积的直角坐标运算	71
阅读与实践	74

09

第九章 直线与圆的方程



9.1 直线的方程	78
9.1.1 直线的方向向量与点向式方程	78
9.1.2 直线的斜率与点斜式方程	81
9.1.3 直线的法向量与点法式方程	84
9.1.4 直线的一般式方程	86
9.2 两条直线的位置关系	88
9.2.1 两条直线的平行	88
9.2.2 两条直线的交点与垂直	91
9.3 点到直线的距离	94
9.4 圆的方程	97
9.4.1 圆的标准方程	97
9.4.2 圆的一般方程	101
阅读与实践	105

10

第十章 立体几何初步



10.1 平面的基本性质	109
10.2 空间两条直线的位置关系	113
10.3 直线与平面的位置关系	119
10.4 平面与平面的位置关系	127
阅读与实践	136

11

第十一章 概率与统计初步



11.1 计数的基本原理	142
11.2 概率初步	146
11.2.1 随机事件与样本空间	146
11.2.2 古典概率	150
11.3 随机抽样	152
11.3.1 简单随机抽样	154
11.3.2 系统抽样	156
11.3.3 分层抽样	157
11.4 用样本估计总体	159
11.4.1 用样本的频率分布估计总体的分布	159



11

第十一章 概率与统计初步



11.4.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征	166
11.5 一元线性回归分析	173
阅读与实践	186
附录 本书常用的数学符号	190

人教版®

第七章 三角函数

当你坐上匀速转动的摩天轮，尽情享受其中的乐趣时，你是否注意到自己离地面的高度在随着时间的推移而有规律地变化着……

数学的发展与完善和国家的繁荣富强紧密相关。

——拿破仑

缺乏必要的数学知识，就无法理解最简单的自然现象；若要深入洞察自然奥秘，那就非得同时研究数学方法不可。

——杨 格



日出日落，月圆月缺，潮涨潮落，冬去春来……这些都是自然界中的周期现象，三角函数是研究自然界中周期现象的重要数学工具，同时，它在力学、工程学及无线电学等领域中也有着广泛的应用。

7.1 任意角的概念与弧度制

问题 以前我们研究角时，角的大小一般不超过一个周角 (360°)，并且不考虑角的正负，那么怎样描述下列各种情况下所形成的角呢？(1) 机械表的时针一昼夜里转过的角；(2) 用扳手拧紧或松动螺丝时，扳手绕螺栓按照顺时针方向或逆时针方向旋转所形成的角。

为了解决这一类问题，我们需要将角的概念加以推广。

7.1.1 任意角的概念

我们知道，在平面内，具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角。其中，公共端点叫做角的顶点，两条射线叫做角的边。如图 7-1 所示，具有公共端点的两条射线 OA ， OB 组成的图形记作 $\angle AOB$ (或 $\angle BOA$)。

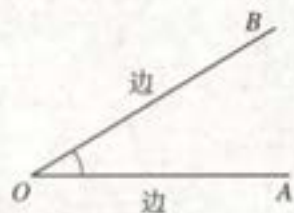


图 7-1

角还可以看成平面内一条射线绕着它的端点旋转而成的图形。射线的端点叫做角的顶点，旋转开始位置的射线叫做角的始边，旋转终止位置的射线叫做角的终边。如图 7-2 (1) 所示，平面内，射线 OA 绕其端点 O 按照图中箭头所指方向旋转到 OB 的位置所形成的角记作 $\angle AOB$ ，其中点 O 是角的顶点，射线 OA 是角的始边，射线 OB 是角的终边。

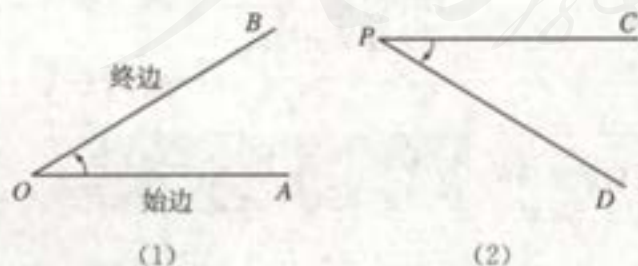


图 7-2



想一想 如图 7-2(2) 所示，射线 PC

绕其端点 P 按照图中箭头所指方向旋转到 PD 的位置所形成的角应怎样记？这个角的始边和终边分别是什么？

在平面内，一条射线绕着它的端点旋转时有两个相反的方向，即顺时针方向和逆时针方向。习惯上，我们规定，按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角；按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角；当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，叫做零角。在图 7-2 (1) 中， $\angle AOB$ 是正角；在图 7-2 (2) 中， $\angle CPD$ 是负角。

如图 7-3 所示，射线 OA 绕端点 O 按照逆时针方向旋转 30° 到 OB 的位置所形成的角可记作 $\angle AOB = 30^\circ$ ；射线 OA 绕端点 O 按照顺时针方向旋转 45° 到 OC 的位置所形成的角可记作 $\angle AOC = -45^\circ$ 。

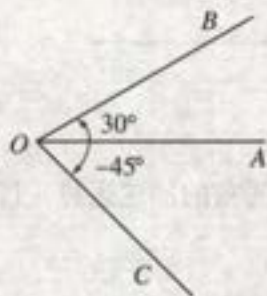


图 7-3

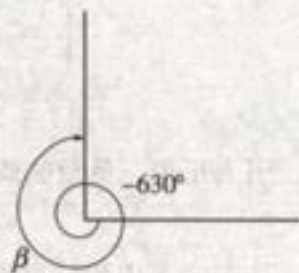
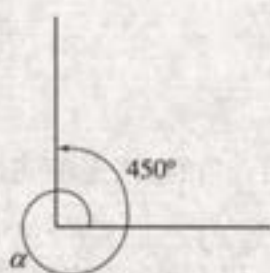


图 7-4

在作图时，我们常用带箭头的弧来表示旋转生成的角。例如，图 7-4 中， $\alpha = 450^\circ$ ， $\beta = -630^\circ$ 。

这样，我们就把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角。

今后我们常在平面直角坐标系内讨论角。为了讨论问题的方便，我们总是使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合。这时，角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限角。如果角的终边落在坐标轴上，则说这个角不属于任何象限。如图 7-5 所示， $\angle xOA$ 是第一象限角， $\angle xOB$ 是第二象限角， $\angle xOC$ 是第四象限角， $\angle xOy$ 不属于任何象限。

在图 7-6 中，以 Ox 为始边，绕端点 O 旋转 90° 到 Oy 的位置，接着再旋转 -30° 到 OA 的位置，则

$$\angle xOA = \angle xOy + \angle yOA$$



请在 60° ， 120° ，

270° ， -210° ， -300°

这些角中，找出象限角，

并分别说出它们各是

第几象限角。

试一试



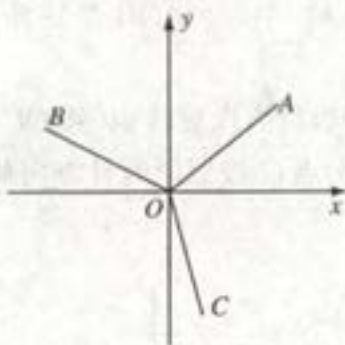


图 7-5

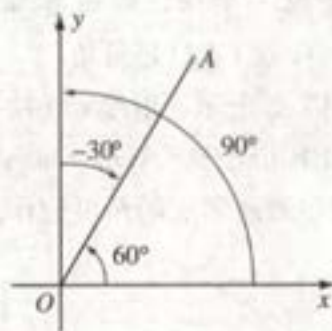


图 7-6

引入正角、负角的概念以后,角的减法运算可以转化为角的加法运算,即

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

从图 7-7 中我们可以看出,以 Ox 为始边旋转 30° 到 OA ,接着再旋转 360° 得到的角是 $30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$,因此 390° 角与 30° 角的终边相同*;同样,以 Ox 为始边旋转 30° 到 OA ,接着再旋转 -360° 得到的角是 $30^\circ + (-360^\circ) = -330^\circ$,因此 -330° 角与 30° 角的终边也相同. 由于

$$390^\circ = 30^\circ + 1 \times 360^\circ,$$

$$750^\circ = 30^\circ + 2 \times 360^\circ,$$

.....

$$-330^\circ = 30^\circ + (-1) \times 360^\circ,$$

$$-690^\circ = 30^\circ + (-2) \times 360^\circ,$$

.....

因此,通过旋转可以看出,以上这些角都与 30° 角的终边相同.

一般地,与角 α 的终边相同的角构成的

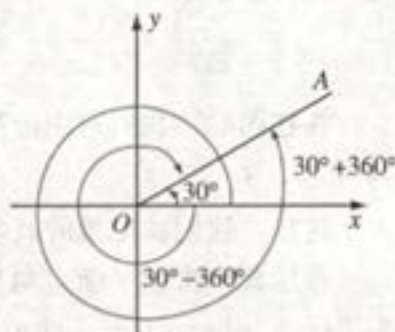


图 7-7

想一想 以 Ox 为始边,把 30° 角的终边分别按照逆时针方向和顺时针方向旋转 3 周后,所得角的大小各是多少度?

* 为了叙述方便,本书提到终边相同的角时,一律默认为角的始边也相同.

集合是

$$S = \{x | x = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 1 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并指出它们是哪个象限的角:

- (1) 45° ; (2) 240° ;
(3) -30° ; (4) -225° .

解: (1) 与 45° 角终边相同的角的集合是

$$S_1 = \{x | x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

因为 45° 是第一象限角, 所以集合 S_1 中的角都是第一象限角;

(2) 与 240° 角终边相同的角的集合是

$$S_2 = \{x | x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

因为 240° 是第三象限角, 所以集合 S_2 中的角都是第三象限角;

(3) 与 -30° 角终边相同的角的集合是

$$S_3 = \{x | x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

因为 -30° 是第四象限角, 所以集合 S_3 中的角都是第四象限角;

(4) 与 -225° 角终边相同的角的集合是

$$S_4 = \{x | x = -225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

因为 -225° 是第二象限角, 所以集合 S_4 中的角都是第二象限角.

例 2 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间*, 找出与下列各角终边相同的角, 并分别判定各是哪个象限的角:

- (1) -120° ; (2) 640° ; (3) -950° .

解: (1) 因为 $-120^\circ = 240^\circ - 360^\circ$, 所以 -120° 角与 240° 角的终边相同, 它是第三象限角;

(2) 因为 $640^\circ = 280^\circ + 360^\circ$, 所以 640° 角与 280° 角的终边相同, 它是第四象限角;

(3) 因为 $-950^\circ = 130^\circ - 3 \times 360^\circ$, 所以 -950° 角与 130° 角的终边相同, 它是第二象限角.

例 3 写出终边在 x 轴上的角的集合.

解: 终边在 x 轴的正半轴上的一个角为 0° , 终边在 x 轴的负半轴上的一

* 在本书中, 角 α 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间, 是指 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.



个角为 180° ，如图 7-8 所示。因此，终边在 x 轴的正半轴，负半轴上的角的集合分别是

$$S_1 = \{x | x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x | x = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$S_2 = \{x | x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x | x = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

所以终边在 x 轴上的角的集合为

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$= \{x | x = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup$$

$$\{x | x = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x | x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 4 写出第一象限角的集合。

解：因为在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间，第一象限角的取值范围是 $0^\circ < x < 90^\circ$ 。所以第一象限角的集合是

$$\{x | k \cdot 360^\circ < x < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

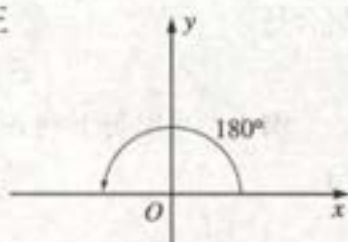


图 7-8



你能根据例 3 的

结论，直接写出终边

在 y 轴上的角的集合吗？

终边在直线 $y=x$ 上的角

的集合呢？

试一试



练习 7-1

1. 分别写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出它们各是哪个象限的角：

(1) 60° ;

(2) 120° ;

(3) 225° ;

(4) -45° ;

(5) -120° ;

(6) -300° .

2. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间，分别找出与下列各角终边相同的角，并判定它们各是哪个象限的角：

(1) -45° ;

(2) 760° ;

(3) -480° ;

(4) $1\,230^\circ$.

3. 写出终边在坐标轴上的角的集合。

4. 填写下表.

象限角	角的集合
第一象限角	
第二象限角	
第三象限角	
第四象限角	

7.1.2 弧度制

度量长度可以采用不同的度量单位,如米、海里等;度量质量也可以采用不同的度量单位,如千克、吨等.采用不同的度量制度能给解决问题带来方便.同样,角的度量除了角度制外,还有另外的度量制度.下面我们介绍在数学和其他科学中常用的另一种度量角的制度——弧度制.

在角度制中,我们把圆周等分成 360 份,则每一份的圆弧所对的圆心角叫做 1 度的角.那么在弧度制中,1 弧度的角是怎样定义的呢?

我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.例如,在图 7-9 中, $\widehat{AB}$ 的长等于半径 r , $\widehat{AB}$ 所对的圆心角就是 1 弧度的角,弧度记作 rad,即 $\angle AOB = 1 \text{ rad}$. 这种以“弧度”为单位来度量角的制度叫做弧度制.

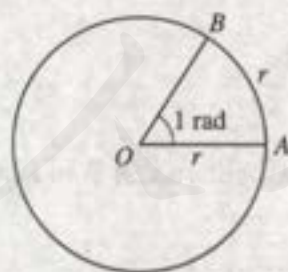


图 7-9

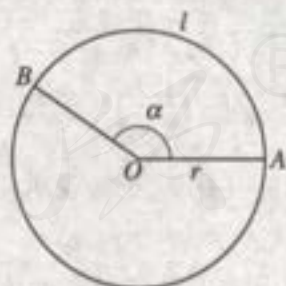


图 7-10

如图 7-10 所示,设在半径为 r 的圆中,长为 l 的弧所对的圆心角(正角)为 α ,则

$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ rad.}$$



用角度制度量角时,零角就是 0° 角,而用弧度制度量角时,零角又是 0 rad 角,除此以外,同一个角的度数和弧度数是不同的.下面讨论角度制与弧度制之间的换算关系.

因为半径为 r 的圆的周长 $l=2\pi r$,所以周角的弧度数是

$$\text{周角} = \frac{2\pi r}{r} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad},$$

又因为

$$\text{周角} = 360^\circ,$$

于是

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

从这个关系式出发,我们可以得到角度制与弧度制之间的换算关系为

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ = 57^\circ 18'.$$

例5 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度.

解: 因为 $67^\circ 30' = \left(\frac{135}{2}\right)^\circ$, 所以

$$67^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \times \frac{135}{2} = \frac{3\pi}{8} \text{ rad}.$$

例6 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度.

解: $\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \times \frac{3\pi}{5} = 108^\circ.$

今后我们在用弧度制表示角的时候,“弧度”和 rad 通常可以略去不写.

例如 $\alpha=2$ 就表示 $\alpha=2 \text{ rad}$.

下表列出了一些特殊角的度数与弧度数的对应关系.

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



由于角有正负之分，我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零。

总之，任意一个角的弧度数是一个实数。于是，在弧度制下，角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系：每一个角都有唯一的一个实数（角的弧度数）与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角与它对应。

例 7 使用函数型计算器*，把下列角从角度制化为弧度制（精确到 0.01）：

- (1) 67° ; (2) -86° .

解：(1)

按键	显示
$67 \text{ [2ndF] [EXP] } \div \text{ [180] [=]}$	1.169370599

所以 $67^\circ \approx 1.17$;

(2)

按键	显示
$+/ - \text{ [86] [2ndF] [EXP] } \div \text{ [180] [=]}$	-1.500983157

所以 $-86^\circ \approx -1.50$.

例 8 使用函数型计算器，把下列角从弧度制化为角度制（精确到小数点后两位）：

- (1) 1.2; (2) -3.5 .

解：(1)

按键	显示
$1.2 \text{ [×] [180] } \div \text{ [2ndF] [EXP] [=]}$	68.75493542

所以 $1.2 \approx 68.75^\circ$;

* 计算器以北雁牌 CZ-1206H 型函数计算器为例。

(2)

按键	显示
$\boxed{+/-}$ $\boxed{3.5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{180}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2ndF}$ $\boxed{EXP}$ $\boxed{=}$	-200.5352283

所以 $-3.5 \approx -200.54^\circ$.

练习7-2

1. 将下列各度化为弧度:

(1) 135° ;

(2) $1\ 080^\circ$;

(3) -270° ;

(4) -330° .

2. 将下列各弧度化为度:

(1) $\frac{\pi}{3}$;

(2) $\frac{\pi}{2}$;

(3) $\frac{5\pi}{6}$;

(4) $-\frac{2\pi}{3}$.

3. 使用计算器, 将下列各弧度化为度或把度化为弧度 (精确到 0.01):

(1) 1 rad,

3 rad,

5 rad,

8 rad;

(2) 83° ,

138° ,

278° ,

368° .

4. 某圆中一条弦的长度等于半径, 这条弦所对的圆心角是多少弧度 (精确到 0.01)?

5. 在半径不同的同心圆中, 同一个圆心角所对的圆弧长与相应的半径的比值是否相等? 为什么?

7.2 任意角的三角函数

问题 锐角三角函数是用直角三角形中边与边之间的比值来定义的, 而任意角的三角函数是怎样定义的呢?

7.2.1 任意角的三角函数的定义

在初中, 我们学习过锐角三角函数的定义.

如图 7-11 所示, 如果 α 是直角三角形的一个锐角, 那么

$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的对边}}{\text{斜边}};$$

$$\cos \alpha = \frac{\alpha \text{ 的邻边}}{\text{斜边}};$$

$$\tan \alpha = \frac{\alpha \text{ 的对边}}{\alpha \text{ 的邻边}}.$$

怎样将锐角的三角函数推广到任意角的三角函数呢?



图 7-11

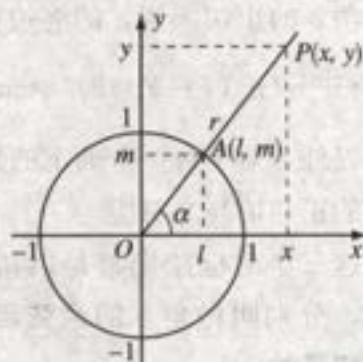


图 7-12

如图 7-12 所示, 已知任意角 α , 以角 α 的顶点 O 为坐标原点, 以角 α 的始边作为 x 轴的正方向, 建立平面直角坐标系 xOy . 在角 α 的终边上任取一点 $P(x, y)$, 若把它与原点的距离记为 r , 则 $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($r > 0$).

以原点 O 为圆心, 1 为半径作圆, 则角 α 的终边与这个圆相交, 设交点为 $A(l, m)$. 由相似三角形的知识, 易知

$$\frac{x}{r} = l, \quad \frac{y}{r} = m, \quad \frac{y}{x} = \frac{m}{l}.$$

当点 P 在角 α 的终边上的位置变化时, 由于点 A 不动, l, m 为定值, 所以当角 α 不变时, 这三个比值 $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{y}{x}$ 总是定值. 它们只依赖于角 α 的大小, 而与点 P 在角 α 的终边上的位置无关. 即当点 P 在角 α 的终边上变化时, 这三个比值始终等于定值. 因此我们定义角 α 的三角函数如下.



1631 年邓玉涵

(1576—1630)、汤若望

(1591—1666) 与徐光启

(1562—1633) 编译的《大

测》一书, 将拉丁文 sinus

译成正半弦, 简称正弦,

此即我国正弦

一词的来源.

读一读



$\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦, 记作 $\cos \alpha$, 即 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$;

$\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦, 记作 $\sin \alpha$, 即 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$;

$\frac{y}{x}$ 叫做角 α 的正切, 记作 $\tan \alpha$, 即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

依照上述定义, 对于每一个确定的角 α , 都分别有唯一确定的余弦值和正弦值与之对应; 对于角 α 的正切, 当 α 的终边在 y 轴上, 也就是 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $\tan \alpha$ 没有意义, 除此以外, 对于每一个确定的角 α , 都有唯一确定的正切值与之对应.

以上这三个对应法则都是以角 α 为自变量的函数, 分别叫做角 α 的余弦函数、正弦函数和正切函数.

由图 7-12 可以看出, 当 α 为锐角时, 上述所定义的三角函数, 与在直角三角形中所定义的锐角的三角函数是一致的.

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$, 求角 α 的正弦、余弦和正切值 (图 7-13).

解: 因为 $x=2$, $y=-3$, 所以

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

由三角函数的定义, 得

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{2}.$$

有时我们还用到

下面三个三角函数.

角 α 的正割

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x};$$

角 α 的余割

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y};$$

角 α 的余切

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{x}{y};$$

读一读

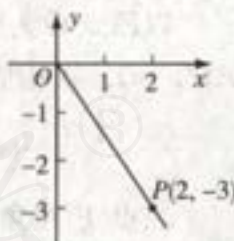


图 7-13

例 2 求下列各角的正弦、余弦和正切值:

(1) $\frac{\pi}{2}$; (2) π .

解: (1) 因为角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边与 y 轴的正半轴重合, 所以我们可以角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边上取点 $P(0, 1)$. 这时 $x=0$, $y=1$, 所以 $r=1$.

由三角函数的定义, 得

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{y}{r} = 1,$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{x}{r} = 0,$$

$$\tan \frac{\pi}{2} \text{ 不存在.}$$

(2) 因为角 π 的终边与 x 轴的负半轴重合, 所以我们可以角 π 的终边上取点 $P(-1, 0)$. 这时 $x=-1$, $y=0$, 所以 $r=1$.

由三角函数的定义, 得

$$\sin \pi = \frac{y}{r} = 0,$$

$$\cos \pi = \frac{x}{r} = -1,$$

$$\tan \pi = \frac{y}{x} = 0.$$

解例 2 时, 分别

在角 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 的终边上取另

外一个确定的点, 计算三

角函数值, 观察结

果是否一致. 

分别求角 0

与 $\frac{3\pi}{2}$ 的正弦、余弦和

正切值. 

练习 7-3

1. 已知角 α 的终边经过点 P , 判定角 α 所在的象限, 并求角 α 的正弦、余弦和正切值:

(1) $P(\sqrt{3}, 1)$;

(2) $P(-2, 2)$;

(3) $P(-3, -4)$;

(4) $P(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. 填写下表.

角 α	度	0°	90°	180°	270°	360°
	弧度					
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\tan \alpha$						

3. 已知 P 为第四象限角 α 的终边上一点, 且其横坐标 $x=8$, $|OP|=17$. 求角 α 的正弦、余弦和正切值.

4. 已知角 α 是第二象限角, 并且终边在直线 $y=-x$ 上, 求 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$.

7.2.2 单位圆与正弦、余弦线

我们把半径为 1 的圆叫做单位圆. 如图 7-14, 使单位圆的圆心与坐标原点重合, 设角 α 的顶点在圆心 O , 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边与单位圆相交于点 P , 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴, 垂足为 M , 则有向线段 (具有始点、方向和长度的线段) $\overrightarrow{OM}$ 叫做角 α 的余弦线, 有向线段 $\overrightarrow{MP}$ 叫做角 α 的正弦线.

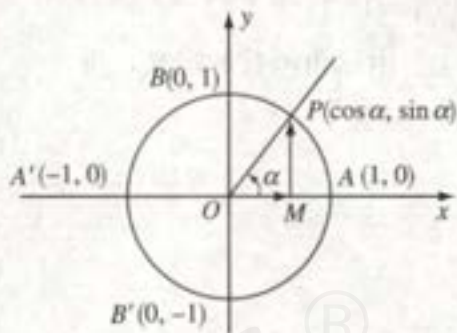


图 7-14

由三角函数的定义可知, 点 P 的坐标为 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$. 这就是说, 角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的横坐标和纵坐标.

例 3 如图 7-15, 设 60° 角的终边与单位圆相交于点 P , 求点 P 的坐标.

解: 设点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$y = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以点 P 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

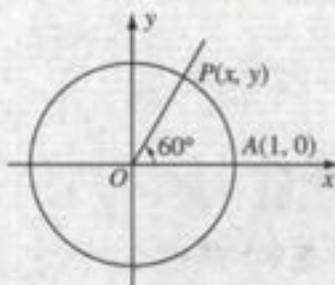


图 7-15

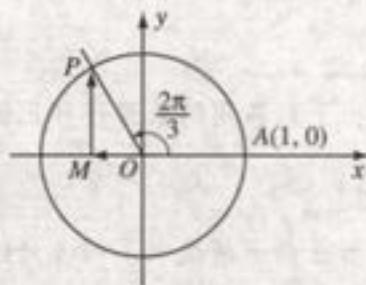


图 7-16

例 4 作出 $\frac{2\pi}{3}$ 的余弦线和正弦线.

解: 如图 7-16, 在平面直角坐标系中, 以原点为圆心作单位圆. 作角 $\frac{2\pi}{3}$, 设它的终边与单位圆的交点为 P . 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴于点 M , 则有向线段 $\overline{OM}$ 就是角 $\frac{2\pi}{3}$ 的余弦线, 有向线段 $\overline{MP}$ 就是角 $\frac{2\pi}{3}$ 的正弦线. 点 P 的坐标是 $(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$.

练习 7-4

1. 填空:

(1) 已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则

$$\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则

$$\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}};$$

(3) 已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 则

$$\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}};$$



(4) 已知 $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标是_____.

2. 画出下列各角的余弦线和正弦线:

(1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{3\pi}{4}$; (3) $-\frac{\pi}{6}$.

3. 利用三角函数线求下列各角的正弦值和余弦值:

(1) 0; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) π ; (4) $\frac{3\pi}{2}$.

7.2.3 利用计算器求三角函数值

用函数型计算器可以方便、准确、快速地求出任意角的三角函数值. 但需要注意: 如果求以度为单位的三角函数值, 应将计算器置于 DEG (以度为单位的计算) 状态; 如果求以弧度为单位的三角函数值, 应将计算器置于 RAD (以弧度为单位的计算) 状态.

下面举例说明.

例 5 利用计算器求下列各三角函数值 (精确到 0.01):

(1) $\sin 405^\circ$; (2) $\cos 63^\circ 52' 41''$; (3) $\tan(-400^\circ 30')$.

解: 首先将计算器置于 DEG (以度为单位的计算) 状态:

按键		显示
$\boxed{2ndF} \boxed{1}$		$\boxed{D}$
(1)		
按键		显示
$\boxed{\sin} \boxed{405} \boxed{=}$		0.707106781

所以 $\sin 405^\circ \approx 0.71$;

(2)

按键	显示
$\cos$ 63 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ 52 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ 41 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ $\square$ $=$	0.440283084

所以 $\cos 63^\circ 52' 41'' \approx 0.44$;

(3)

按键	显示
$\tan$ $\square$ $\square$ $+/-$ 400 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ 0 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ 30 $\text{D}^\circ\text{M}'\text{S}''$ $\square$ $=$	-0.839347511

所以 $\tan(-400^\circ 30'') \approx -0.84$.

例6 利用计算器求下列各三角函数值 (精确到 0.01):

(1) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$; (2) $\cos\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$; (3) $\tan \frac{19\pi}{6}$.

解: 首先将计算器置于 RAD (以弧度为单位的计算) 状态:

按键	显示
2ndF 2	R

(1)

按键	显示
$\sin$ $\square$ $\square$ $+/-$ 14 2ndF EXP $\div$ 3 $\square$ $=$	-0.866025403

所以 $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \approx -0.87$;

(2)

按键	显示
$\cos$ $\square$ $\square$ $+/-$ 27 2ndF EXP $\div$ 4 $\square$ $=$	-0.707106781

所以 $\cos\left(-\frac{27\pi}{4}\right) \approx -0.71$;



(3)

按键	显示
$\tan \boxed{19} \boxed{2ndF} \boxed{EXP} \boxed{\div} \boxed{6} \boxed{=}$	0.577350269

所以 $\tan \frac{19\pi}{6} \approx 0.58$.

练习 7-5

1. 利用计算器, 求下列各三角函数值 (精确到 0.01):

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| (1) $\sin 380^\circ 21'$; | (2) $\sin(-345^\circ)$; |
| (3) $\cos 420^\circ 10'$; | (4) $\tan(-373^\circ 13')$; |
| (5) $\sin 3.5$; | (6) $\cos(-7.2)$; |
| (7) $\tan \frac{11\pi}{3}$; | (8) $\sin(-\frac{21\pi}{4})$. |

2. 利用计算器求下列各式的值 (精确到 0.01):

- (1) $3\sin 365^\circ - 4\cos 355^\circ + 2\tan 337^\circ$;
- (2) $2\sin \frac{13\pi}{3} - 3\cos \frac{19\pi}{6} + 5\tan \frac{7\pi}{4}$.

7.2.4 三角函数值在各象限的符号

我们知道, 在以原点为圆心的单位圆中, 角 α 的终边与单位圆交点 P 的坐标为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 而 $\cos \alpha, \sin \alpha$ 的符号分别与各象限中的点的横坐标和纵坐标的符号相同, 由此可以确定各三角函数值在各象限的符号, 如图 7-17 所示.



图 7-17

例7 确定下列三角函数值的符号:

(1) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; (2) $\cos 250^\circ$;

(3) $\tan(-600^\circ)$; (4) $\cos \frac{11\pi}{3}$.

解: (1) 因为 $-\frac{\pi}{4}$ 是第四象限角, 所以 $\sin(-\frac{\pi}{4}) < 0$;

(2) 因为 250° 是第三象限角, 所以 $\cos 250^\circ < 0$;

(3) 因为 $-600^\circ = 120^\circ - 2 \times 360^\circ$, 所以 -600° 是第二象限角, 因此 $\tan(-600^\circ) < 0$;

(4) 因为 $\frac{11\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 4\pi$, 所以 $\frac{11\pi}{3}$ 是第

四象限角, 因此 $\cos \frac{11\pi}{3} > 0$.



想一想 $\tan \alpha$ 在各象限的符号是如何判断出来的?



你能用计算器直接判定上述三角函数值的符号吗? 试一试

例8 已知 $\sin \theta < 0$, 且 $\tan \theta > 0$, 确定 θ 是第几象限角.

解: 因为 $\sin \theta < 0$, 所以 θ 是第三或第四象限角, 或是终边在 y 轴的负半轴上的角.

又因为 $\tan \theta > 0$, 所以 θ 是第一或第三象限角.

所以满足 $\sin \theta < 0$, 且 $\tan \theta > 0$ 的 θ 是第三象限角.

练习7-6

1. 填空:

(1) 如果 $\sin \alpha > 0$, 则 α 是_____或是_____象限角, 或是_____;

(2) 如果 $\cos \alpha > 0$, 则 α 是_____或是_____象限角, 或是_____;

(3) 如果 $\tan \alpha > 0$, 则 α 是_____或是_____象限角;

(4) 如果 $\sin \alpha > 0$, 且 $\cos \alpha < 0$, 则 α 是第_____象限角;

(5) 如果 $\sin \alpha > 0$, 且 $\tan \alpha < 0$, 则 α 是第_____象限角;

(6) 如果 $\tan \alpha > 0$, 且 $\cos \alpha < 0$, 则 α 是第_____象限角.



2. 根据下列条件, 确定 θ 是第几象限角:

(1) $\cos \theta$ 与 $\tan \theta$ 异号;

(2) $\cos \theta$ 与 $\tan \theta$ 同号;

(3) $\sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 异号;

(4) $\sin \theta$ 与 $\tan \theta$ 同号.

3. 设 α 是三角形的一个内角, 在 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 中, 哪个一定是正值? 哪些有可能是负值?

4. 确定下列三角函数值的符号 (先利用例 7 的方法解答, 然后利用计算器验证解答结果):

(1) $\sin(-\frac{\pi}{3})$;

(2) $\cos 260^\circ$;

(3) $\tan(-930^\circ)$;

(4) $\cos \frac{15\pi}{4}$.

7.3 同角三角函数的基本关系式

在以原点为圆心的单位圆中, 角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴, 垂足为 M (图 7-18). 由勾股定理, 得

$$|MP|^2 + |OM|^2 = 1,$$

即

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

由三角函数的定义, 我们知道

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

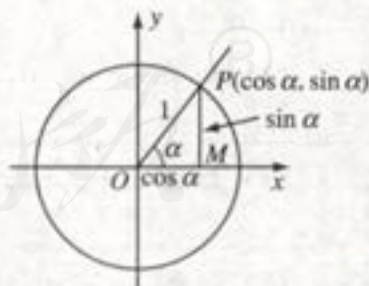


图 7-18

上面这两个关系式是同角三角函数的基本关系式. 当我们知道一个角的某一个三角函数值时, 利用这两个关系式和三角函数的定义, 就可求出这个角的其余的三角函数值. 此外, 还可以用它们化简三角函数式和证明三角恒等式.

例1 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角, 求角 α 的余弦值和正切值.

解: 由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 得

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

因为 α 是第二象限角, $\cos \alpha < 0$, 所以

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5},$$

因此

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

例2 已知 $\tan \alpha = -\sqrt{5}$, 且 α 是第四象限角, 求角 α 的正弦值和余弦值.

分析: 我们把 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 看成两个未知数, 这样只要列出关于 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的方程组, 就可以求出 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$.

解: 由题意和三角函数的基本关系式, 得

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \text{①} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{5} & \text{②} \end{cases}$$

由②得 $\sin \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha$, 把它代入①整理得

$$6\cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{6}.$$

因为 α 是第四象限角, 所以

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha = -\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

例3 已知 $\tan \alpha = -3$, 求 $2\sin \alpha \cos \alpha$ 的值.

解: 由已知可得方程组

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \text{①} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -3 & \text{②} \end{cases}$$



想一想 本题如果没有“ α 是第二象限角”这个条件, 应怎样解答?





由②, 得

$$\sin \alpha = -3\cos \alpha,$$

把它代入①, 得

$$(-3\cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

整理得

$$10\cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{10}.$$

所以

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha \cos \alpha &= 2(-3\cos \alpha)\cos \alpha \\ &= -6\cos^2 \alpha \\ &= -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

例4 化简 $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\tan \theta - 1}$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)\cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \cos \theta. \end{aligned}$$

例5 求证:

$$(1) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1;$$

$$(2) \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$(3) \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

证明: (1) 原式左边 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$

$$= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$= \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= 2\sin^2 \alpha - 1$$

$$= \text{右边},$$

所以 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1;$

$$(2) \text{原式右边} = \tan^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$



$$= \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \text{左边},$$

所以 $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$;

$$(3) \text{ 因为 } \frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - (1 - \sin^2 x)}{(1 - \sin x) \cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2 x}{(1 - \sin x) \cos x}$$

$$= 0,$$

所以 $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$

从例 5 可以看出, 证明一个三角恒等式, 可以从它的任意一边开始, 推出它等于另一边; 也可以用作差法证明等式两边的差等于零, 从而得出左右两边相等的结论.

练习 7-7

1. 根据下列条件, 求角 α 的指定的三角函数值;

(1) 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 且 α 是第一象限角, 求 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$;

(2) 已知 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, 且 α 是第三象限角, 求 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$;

(3) 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第四象限角, 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$;

(4) 已知 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 且 α 是第二象限角, 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$.

2. 已知 $\tan \alpha = -4$, 求下列各式的值:

(1) $\sin^2 \alpha$;

(2) $3 \sin \alpha \cos \alpha$;

(3) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

(4) $\frac{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$.



3. 已知 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, 求 θ 的正弦值和正切值.

4. 化简:

(1) $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$; (2) $\sin a \cos a (\tan a + \cot a)$.

5. 求证:

(1) $\sin^4 a + \sin^2 a \cos^2 a + \cos^2 a = 1$;

(2) $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a$.

7.4 三角函数的诱导公式

1. 角 $2k\pi + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 与角 α 的三角函数间的关系

根据三角函数的定义可知, 终边相同的角的同名三角函数值相等. 即

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (\text{公式一})$$

例如, 由上可知

$$\sin \frac{13\pi}{6} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 765^\circ = \cos(2 \times 360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 角 $-\alpha$ 与角 α 的三角函数间的关系

设角 α 和角 $-\alpha$ 的终边与单位圆的交点分别是点 P 和点 P' (如图 7-19), 则

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$P'(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)).$$

因为角 α 的终边与角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称, 所以点 P 与点 P' 关于 x 轴对称, 因此它们的横坐标相同, 纵坐标互为相反数, 即

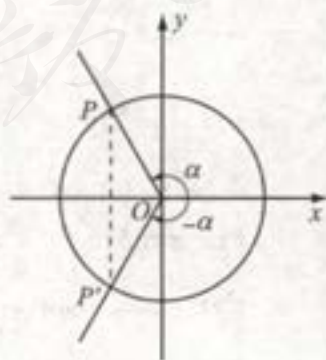


图 7-19

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

又由同角三角函数关系式得

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

因此

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha. \end{aligned} \quad (\text{公式二})$$

例如, 由上可知

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 角 $\pi + \alpha$ 与角 α 的三角函数间的关系

设角 α 和角 $\pi + \alpha$ 的终边与单位圆的交点分别是点 P 和点 P' (如图 7-20), 则

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$P'(\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha)).$$

因为角 α 的终边与角 $\pi + \alpha$ 的终边关于原点 O 对称, 所以点 P 与点 P' 关于原点 O 对称, 因此它们的横坐标和纵坐标都互为相反数, 故有

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$$

又由同角三角函数关系式得

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

因此

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha. \end{aligned} \quad (\text{公式三})$$

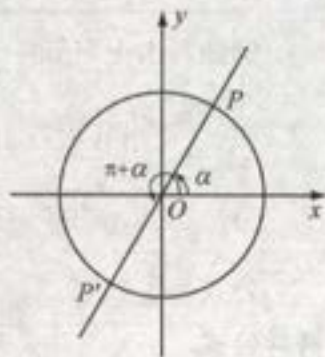


图 7-20

例如, 由上可知

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. 角 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 与角 α 的三角函数间的关系

由图 7-21 可以得到

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha. \end{aligned} \quad (\text{公式四})$$

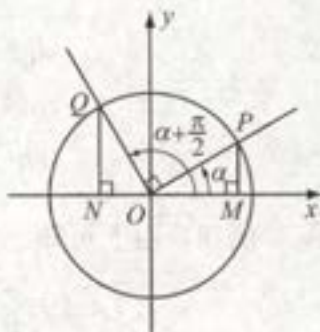


图 7-21

例如, 由上可知

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

公式一、二、三、四都叫做三角函数的诱导公式。

利用诱导公式可将终边在坐标轴上的角的三角函数转化为 0 或 $\frac{\pi}{2}$ 的三角函数; 将任意象限内角的三角函数转化为锐角三角函数。总之, 利用诱导公式可将任意角的三角函数求值问题转化为区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上角的三角函数求值问题。

例 1 利用诱导公式求下列三角函数值:

(1) $\sin 630^\circ$; (2) $\cos 7\pi$.

解: (1) $\sin 630^\circ = \sin(360^\circ + 270^\circ) = \sin 270^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$;

(2) $\cos 7\pi = \cos(6\pi + \pi) = \cos \pi = -\cos 0 = -1$.

如图 7-21 所示, 角 α 的终边与单位圆相交于点 P , 角 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ 的终边与单位圆相交于点 Q , 则点 P 的坐标是 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 点 Q 的坐标是 $(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))$. 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴于点 M , 过点 Q 作 QN 垂直于 x 轴于点 N , 易证 $\triangle QNO \cong \triangle OMP$. 公式四得证.

读一读



例2 利用诱导公式求下列三角函数值：

(1) $\sin 300^\circ$; (2) $\cos \frac{10\pi}{3}$; (3) $\sin \frac{11\pi}{4}$; (4) $\tan(-1560^\circ)$.

解: (1) $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos \frac{10\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{4\pi}{3}) = \cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

(3) $\sin \frac{11\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(4) $\tan(-1560^\circ) = \tan(-4 \times 360^\circ - 120^\circ) = \tan(-120^\circ) = -\tan 120^\circ$
 $= -\tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(-60^\circ) = \sqrt{3}$.

例3 利用诱导公式证明

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

证明: 由诱导公式三和二可知

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = -(-\sin \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

练习7-8

1. 填空:

(1) $\sin(360^\circ + 90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\cos 7\pi = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\sin(-60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$; (4) $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $\tan(180^\circ - 45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$; (6) $\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(7) $\cos(360^\circ + 60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$; (8) $\sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(9) $\sin(90^\circ + 60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$; (10) $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$.



2. 选择题:

(1) $\sin(3\pi + \alpha)$ 等于 ().

(A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $-\sin \alpha$ (D) $-\cos \alpha$

(2) $\cos(2009\pi - \alpha)$ 等于 ().

(A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $-\sin \alpha$ (D) $-\cos \alpha$

(3) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ 等于 ().

(A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $-\sin \alpha$ (D) $-\cos \alpha$

(4) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ 等于 ().

(A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $-\sin \alpha$ (D) $-\cos \alpha$

3. 利用诱导公式求下列三角函数值:

(1) $\sin(-810^\circ)$; (2) $\cos \frac{11\pi}{2}$; (3) $\sin 120^\circ$;

(4) $\cos(-\frac{4\pi}{3})$; (5) $\tan 150^\circ$; (6) $\sin \frac{25\pi}{6}$;

(7) $\cos 300^\circ$; (8) $\sin(-\frac{13\pi}{4})$.

4. 填写下表:

α	30°	45°	60°	120°	135°	150°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\tan \alpha$						

5. 利用诱导公式证明:

(1) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$; (2) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$;

(3) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$; (4) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$.

7.5 正弦、余弦函数的图象和性质

7.5.1 正弦函数的图象和性质

1. 正弦函数的图象

在研究三角函数的图象和性质时，我们通常采用弧度制来度量角，用 x 表示自变量，用 y 表示函数值，于是，正弦函数可表示为

$$y = \sin x.$$

由正弦函数的定义可知，正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

下面我们用单位圆中的正弦线，作出函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象.

在平面直角坐标系的 x 轴上取一点 O_1 ，以 O_1 为圆心作单位圆（如图 7-22），从这个圆与 x 轴的交点 A 起，把圆 O_1 分为 12 等份（份数越多，作出的图象越精确）.

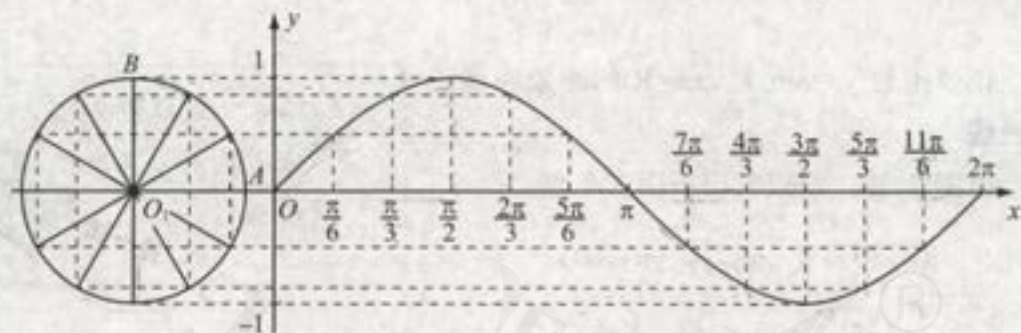


图 7-22

过圆上各分点分别作 x 轴的垂线，可以得到弧度为 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ 的角的正弦线（例如 $\overline{O_1B}$ 对应于 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦线），相应地，再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段（ $2\pi \approx 6.28$ ）分成 12 等份，每个分点分别对应于 $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ ，分别过这些分点作这些弧度数对应的正弦线，再用光滑的曲线把



这些正弦线的终点连接起来, 就得到正弦函数

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$$

的图象.

因为

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, k \in \mathbb{Z},$$

所以正弦函数 $y = \sin x$ 在 $x \in [-4\pi, -2\pi]$, $x \in [-2\pi, 0]$, $x \in [2\pi, 4\pi]$, $x \in [4\pi, 6\pi]$, ... 时的图象与 $x \in [0, 2\pi]$ 的图象形状完全一样, 只是位置不同. 因此, 我们把 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 的图象, 沿 x 轴分别向左、向右平移 $2\pi, 4\pi, \dots$, 就可得到正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的图象 (图 7-23).

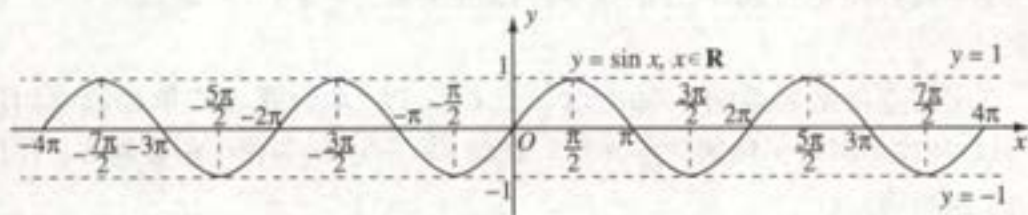


图 7-23

正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的图象叫做正弦曲线.

由图 7-23, 可以看出下面五个点

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0),$$

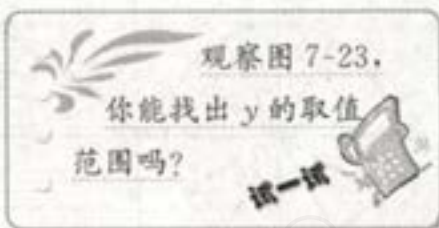
$$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0),$$

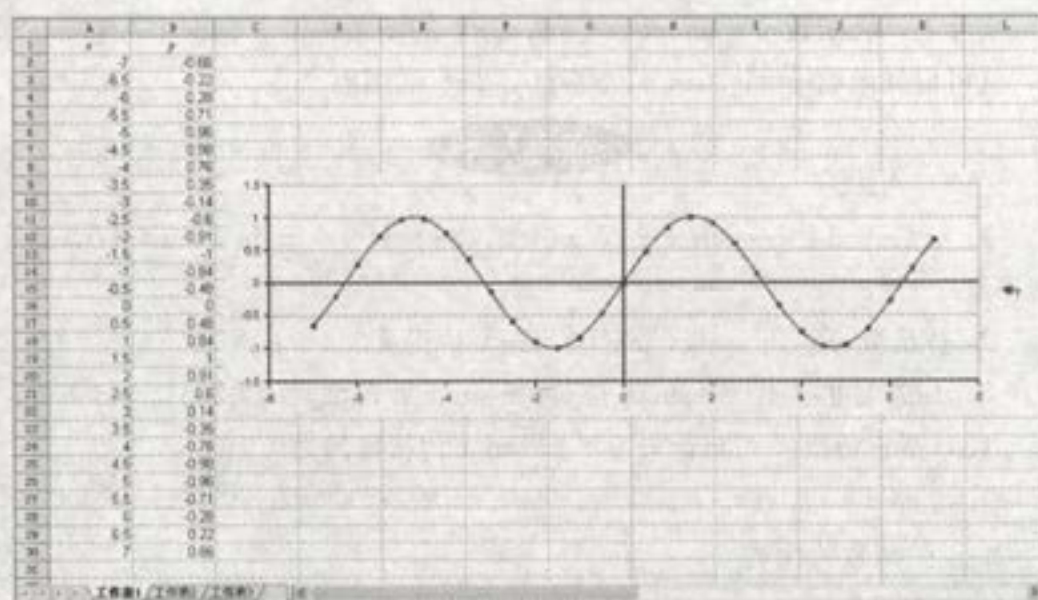
在确定图象的形状时起着关键的作用. 这五个点描出后, 正弦函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了.

因此, 在精确度要求不太高时, 我们常常先描出这关键的五个点, 然后用光滑的曲线将它们连接起来, 就得到相应区间内的正弦函数的简图.

今后, 我们作有关正弦函数的简图时, 一般都可以像这样先找出确定图象形状的关键的五个点, 然后描点作图. 这种作图方法叫做五点法.

在计算机上, 用 Excel 软件可方便地绘制正弦曲线, 以下是用电子表格绘制的正弦函数 $y = \sin x$ 的图象.





例 1 作函数 $y=1+\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的简图.

解: 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图, 得到函数 $y=1+\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的简图 (图 7-24).

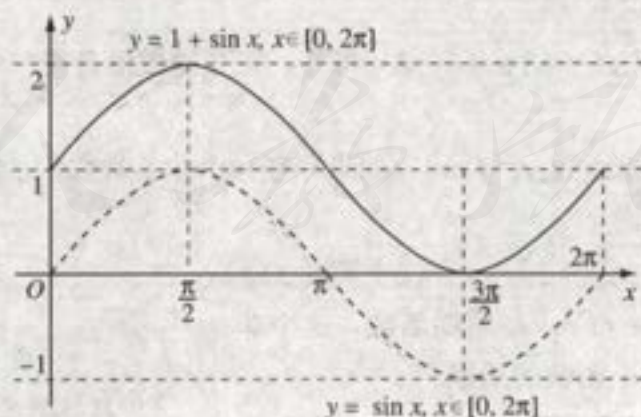


图 7-24



实际上, 将函数 $y=\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象, 沿 y 轴向上平移 1 个单位, 就可得到函数 $y=1+\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.

练习 7-9

1. 分别作函数 $y=\sin x-1, x \in [0, 2\pi]$ 和 $y=-\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.
2. 作函数 $y=3+\sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.
3. (1) 写出函数 $y=\sin x$ 与 $y=-\sin x$ 的图象间的关系;
(2) 写出函数 $y=\sin x$ 与 $y=3+\sin x$ 的图象间的关系.

2. 正弦函数的性质

(1) 定义域

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

(2) 值域

因为在单位圆中, 正弦线的长度都小于或等于单位圆的半径 1; 从正弦曲线可以看出, 正弦曲线分布在两条平行直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间, 这都表明 $|\sin x| \leq 1$, 即 $-1 \leq \sin x \leq 1$. 也就是说, 正弦函数的值域是区间 $[-1, 1]$.

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 正弦函数取最大值 1; 当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 正弦函数取最小值 -1.

(3) 周期性

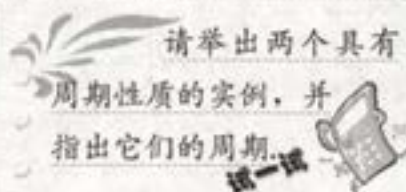
由 $\sin(x+2k\pi)=\sin x (k \in \mathbf{Z})$ 可知, 正弦函数值是按一定规律重复出现的.

一般地, 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得定义域内的每一个 x 值, 都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 是周期函数, 这个非零常数 T 叫做这个函数的周期.

例如, 对于正弦函数 $y=\sin x, x \in \mathbf{R}$ 来说, $\dots, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi, \dots$ 都是它的周期.



对于一个周期函数来说，如果在它的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做这个函数的最小正周期。

正弦函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 是周期函数, $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$) 都是它的周期, 2π 是它的最小正周期. 以后我们说到三角函数的周期, 一般指的都是最小正周期.

(4) 奇偶性

由诱导公式可知, 正弦函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 是奇函数. 反映在图象上, 那就是正弦曲线关于坐标原点中心对称.

(5) 单调性

在正弦函数的一个周期 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 中, 由正弦曲线 (或单位圆中的正弦线) 可以看出, 当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x$ 由 -1 增加到 1 ; 当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, $\sin x$ 由 1 减小到 -1 . 这种变化情况如下表所示.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

因此, 由正弦函数的周期性可知, 正弦函数 $y = \sin x$, 在每一个闭区间

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$$

上, 都从 -1 增加到 1 , 是增函数; 在每一个闭区间

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$$

上, 都从 1 减小到 -1 , 是减函数.

例 2 求使函数 $y = 2 + \sin x$ 取最大值、最小值的 x 的集合, 并求这个函数的最大值、最小值和周期.

解: 当 $\sin x$ 取最大值 1 时, $y_{\max} = 2 + 1 = 3$, 此时 x 的集合是 $\{x | x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$; 当 $\sin x$ 取最小值 -1 时, $y_{\min} = 2 + (-1) = 1$, 此时 x 的集合是 $\{x | x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.



想一想 如果把函数改为 $y = 2 - \sin x$,

怎样回答以上问

题?

函数 $y=2+\sin x$ 与函数 $y=\sin x$ 的周期相同, 周期是 2π .

例 3 比较下列各对正弦值的大小:

(1) $\sin(-\frac{\pi}{18})$ 与 $\sin(-\frac{\pi}{10})$; (2) $\sin \frac{2\pi}{3}$ 与 $\sin \frac{3\pi}{4}$.

解: (1) 因为 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{10} < -\frac{\pi}{18} < 0$, 且正弦函数在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, 所以

$$\sin(-\frac{\pi}{18}) > \sin(-\frac{\pi}{10});$$

(2) 因为 $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, 且正弦函数在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上是减函数, 所以

$$\sin \frac{2\pi}{3} > \sin \frac{3\pi}{4}.$$

你能用计算器

比较上述各对正弦值的大小吗?

试一试



练习 7-10

1. 求使下列各函数取最大值、最小值的 x 的集合, 并求各函数的最大值、最小值和周期:

(1) $y=3+\sin x$;

(2) $y=3-\sin x$;

(3) $y=-8+\sin x$;

(4) $y=-8-\sin x$.

2. 比较下列各题中正弦值的大小:

(1) $\sin 250^\circ$ 与 $\sin 260^\circ$;

(2) $\sin(-\frac{\pi}{8})$ 与 $\sin(-\frac{\pi}{12})$.

3. 观察正弦曲线, 写出满足下列条件的 x 所在的区间:

(1) $\sin x > 0$;

(2) $\sin x < 0$.

7.5.2 余弦函数的图象和性质

函数 $y=\cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 叫做余弦函数.

由诱导公式 $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ 可知, 余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 的图象完全相同. 于是, 把正弦函数 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴向左平

移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就可得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 的图象, 也就是余弦函数 $y = \cos x$ 的图象, 如图 7-25 所示.

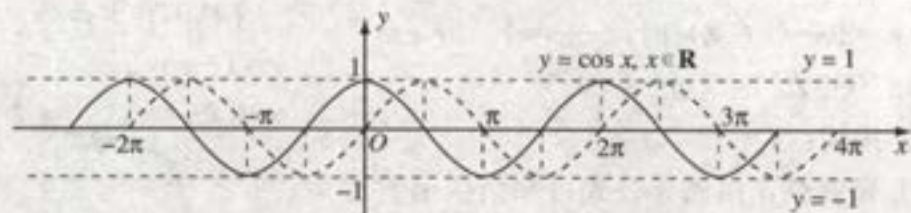


图 7-25

余弦函数的图象叫做余弦曲线.

由图 7-25 可以看出, 函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象上起着关键作用的点有以下五个

$$(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1),$$

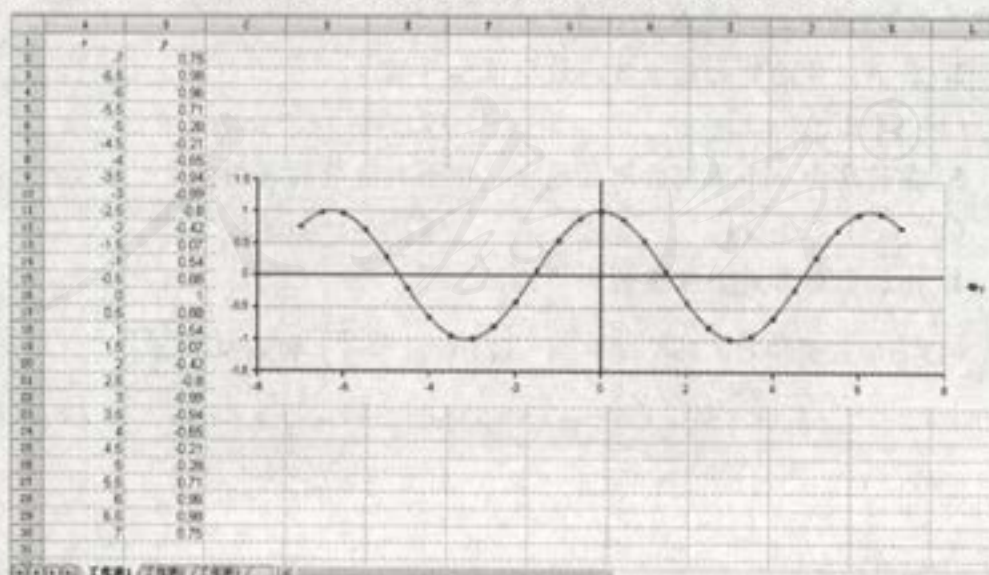
$$(\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1),$$

所以, 我们也可以用“五点法”作出余弦函数的图象.

在计算机上, 用 Excel 软件可方便地绘制余弦曲线, 以下是用电子表格绘制的余弦函数 $y = \cos x$ 的图象.

你能用“五点法”作出余弦函数 $y = 1 + \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象吗?

试一试





由余弦函数的定义和图象,可以得到余弦函数的性质如下.

(1) 定义域: 实数集 $\mathbf{R}$.

(2) 值域: $[-1, 1]$.

当 $x=2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $y_{\max}=1$; 当 $x=(2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $y_{\min}=-1$.

(3) 周期: $T=2\pi$.

(4) 奇偶性: 由诱导公式可知余弦函数 $y=\cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 是偶函数. 所以余弦函数的图象关于 y 轴对称.

(5) 单调性: 余弦函数 $y=\cos x$ 在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都从 -1 增大到 1 , 是增函数; 在每一个闭区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上都从 1 减小到 -1 , 是减函数.

例 4 求下列函数的最大值、最小值和周期:

(1) $y=5+\cos x$;

(2) $y=6-\cos x$.

解: (1) $y_{\max}=6$, $y_{\min}=4$, $T=2\pi$;

(2) $y_{\max}=7$, $y_{\min}=5$, $T=2\pi$.



请同学们在计

算机上作出函数

$y=1-\cos x$

的图象.

试一试



练习 7-11

1. (口答) 正弦函数 $y=\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象经过怎样的变换可以得到余弦函数 $y=\cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象?

2. 求下列各函数的最大值、最小值和周期:

(1) $y=2+\cos x$;

(2) $y=-5-\cos x$.

3. 在长度为一个周期的闭区间上, 作下列函数的简图:

(1) $y=1+\cos x$;

(2) $y=-\cos x$.

4. 比较下列各对余弦值的大小:

(1) $\cos 125^\circ$ 和 $\cos 156^\circ$;

(2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ 和 $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

7.6 已知三角函数值求角

1. 已知正弦值求角

我们知道, 正弦函数 $y = \sin x$ 的值域是 $[-1, 1]$. 如图 7-26 所示, 从正弦函数的图象可知, 给定 $[-1, 1]$ 内的任意一个数 y , 有无数多个 x 满足 $\sin x = y$. 例如, 满足 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的 x 可以是 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \pm 2\pi$, $\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi$, $\dots$.

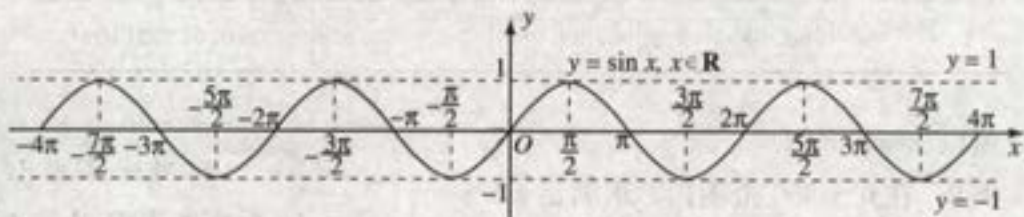


图 7-26

从图中可以看出, 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 满足 $\sin x = y (y \in [-1, 1])$ 的 x 是唯一的. 为了方便起见, 此时我们记

$$x = \arcsin y.$$

例如, 如果 $\sin x = \frac{1}{2}$, 而且 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 那么

$$\begin{aligned} x &= \arcsin \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{6}; \end{aligned}$$

再比如, 如果 $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$, 那么

$$\begin{aligned} x &= \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -45^\circ. \end{aligned}$$

例 1 已知 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 用计算器求满足下列等式的 x 值 (精确到 0.01):

(1) $\sin x = 0.9$;

(2) $\sin x = -0.6$.

解: 将计算器置于 RAD (弧度制) 状态下, 并进行如下操作:



(1)

按键	显示
$\boxed{2\text{ndF}}\boxed{\sin}\boxed{0}\boxed{.}\boxed{9}\boxed{=}$	1.119769515

所以 $x \approx 1.12$;

(2)

按键	显示
$\boxed{2\text{ndF}}\boxed{\sin}\boxed{(}\boxed{\pm}\boxed{0}\boxed{.}\boxed{6}\boxed{)}\boxed{=}$	-0.643501109

所以 $x \approx -0.64$.

例 2 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 求满足 $\sin x = -0.8$ 的角 x 的值 (精确到 0.1°).

解: 将计算器置于 DEG 状态, 可得

$$\arcsin(-0.8) \approx -53.1^\circ.$$

如图 7-27 所示, 作单位圆, 在 y 轴的负半轴上截取 $OP = 0.8$, 过点 P 作 x 轴的平行线, 交单位圆于 P_1, P_2 , 则 OP_1, OP_2 即是满足 $\sin x = -0.8$ 的角的终边.



图 7-27

所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 使 $\sin x = -0.8$ 的角约为 306.9° 和 233.1° .

2. 已知余弦值、正切值求角

根据余弦函数的图象可知, 给定 $y \in [-1, 1]$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, 满足 $\cos x = y$ 的 x 是唯一的. 记作

利用计算器已知正弦值求角时, 在 RAD 弧度制状态下, 计算器默认的角 x 的范围是 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (在 DEG 角度制状态下是 $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$). 如果利用计算器已知余弦、正切值求角, 可通过查阅说明书, 找到计算器默认的角的范围.

读一读



$$x = \arccos y.$$

对于任给 $y \in \mathbf{R}$, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 满足 $\tan x = y$ 的 x 也是唯一的. 记作

$$x = \arctan y.$$

这些值都可通过计算器得到.

例 3 利用计算器, 分别求满足下列条件的 x 值 (精确到 0.01):

- (1) $\cos x = -0.7$, $x \in [0, \pi]$; (2) $\tan x = 10$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

解: (1) 因为 $x \in [0, \pi]$, 所以

$$x = \arccos(-0.7).$$

将计算器置于 RAD (弧度制) 状态下, 并进行如下操作:

按键	显示
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\cos} \boxed{(-)} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{7} \boxed{)} \boxed{=}$	2.34619382

所以 $x \approx 2.35$;

- (2) 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$x = \arctan 10.$$

将计算器置于 RAD (弧度制) 状态下, 并进行如下操作:

按键	显示
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{=}$	1.47112767

所以 $x \approx 1.47$.

练习 7-12

1. 求适合下列条件的角 x :

- (1) 已知 $\sin x = 0.75$, 且 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (精确到 0.01);
 (2) 已知 $\cos x = -0.36$, 且 $x \in [0, \pi]$ (精确到 0.01);
 (3) 已知 $\tan x = -12.5$, 且 $-90^\circ < x < 90^\circ$ (精确到 0.1°).



2. 用计算器求满足下列等式的 x 值 (精确到 0.1°):

(1) 已知 $\sin x = -0.4321$, 且 $0^\circ \leq x < 360^\circ$;

(2) 已知 $\cos x = \frac{3}{5}$, 且 $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

3. 已知 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求满足 $\tan x = -1$ 的 x 值.

习题七

1. 用弧度制表示:

(1) 终边分别在 x 轴的正半轴、负半轴和 x 轴上的角的集合;

(2) 终边分别在 y 轴的正半轴、负半轴和 y 轴上的角的集合;

(3) 终边在坐标轴上的角的集合.

2. 用弧度制分别表示第一、第二、第三、第四象限角的集合.

3. 根据下列条件, 求角 α 的指定的三角函数值:

(1) 已知 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 α 是第三象限角, 求 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$;

(2) 已知 $\tan \alpha = -3$, 且 α 是第二象限角, 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$;

(3) 已知 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, 且 α 是第四象限角, 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$;

(4) 已知 $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 求 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$.

4. 已知 $\tan \alpha = 2$, 求下列各式的值:

(1) $\cos^2 \alpha$;

(2) $\sin \alpha \cos \alpha$;

(3) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;

(4) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

5. 利用诱导公式求下列各三角函数值:

(1) $\sin 300^\circ$;

(2) $\sin \frac{19\pi}{6}$;

(3) $\cos \frac{11\pi}{4}$;

(4) $\tan(-1470^\circ)$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{1 + \sin x}$;

(2) $y = \frac{1}{1 - \cos x}$;

$$(3) y = \sqrt{\sin x}; \quad (4) y = \sqrt{\cos x}.$$

7. 在长度为一个周期的闭区间上, 作下列函数的简图:

$$(1) y = 1 - \sin x; \quad (2) y = 1 - \cos x.$$

8. 说明函数 $y = \sin x$ 的图象经过怎样的变换可以得到函数 $y = \sin x + 2$ 的图象.

9. 求下列函数的最大值、最小值, 并求使函数取得这些值的 x 的集合:

$$(1) y = -3 - \sin x; \quad (2) y = \cos x - 4.$$

10. 求满足下列条件的角 x :

$$(1) \text{ 已知 } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ 且 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$(2) \text{ 已知 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 且 } x \in [0, 2\pi];$$

$$(3) \text{ 已知 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } x \in [0, 2\pi].$$



阅读与实践

(一) 泰勒斯测金字塔

埃及的大金字塔建成一千多年后, 还没有人能够准确地测出它的高度. 有不少人作过很多努力, 但都没有成功, 成为当时的一个难题. 据记载, 古希腊学者泰勒斯 (Thales, 公元前 624—前 547) 曾解决了这个难题, 第一次准确地测出了大金字塔的高度.

泰勒斯, 古希腊第一个自然科学家和哲学家, 希腊最早的哲学学派——爱奥尼亚学派的创始人. 泰勒斯的名言“水是万物之本源, 万物终归于水”否定了神创造一切的观点, 开创了从世界本身来认识世界的正确理论. 泰勒斯在历史上有“科学之祖”之称.

公元前 600 年左右, 泰勒斯旅游来到埃及, 人们想试探一下他的能力, 就问他是否能解决“大金字塔的高度”这个难题. 泰勒斯很有把握地答应了, 但他提出一个条件: 法老必须在场. 第二天, 法老如约而至, 金字塔周围也

聚集了不少围观的老百姓。泰勒斯来到金字塔前，阳光把他的影子投在地面上。每过一会儿，他就让别人测量他的影子的长度，当测量值与他的身高完全吻合时，他立刻让人在大金字塔尖于地面的投影处作一个记号，然后再丈量金字塔底到投影尖顶的距离。这样，他就测出了金字塔确切的高度。在法老的请求下，他向大家讲解了如何从“影长等于身長”推到“塔影等于塔高”的原理。也就是今天所说的相似三角形定理。泰勒斯利用相似三角形的原理测出金字塔的高，成为西方三角测量的鼻祖。

(二) 陈子测日

据中国古算书《周髀算经》记载，约与泰勒斯同时代的陈子（约公元前6、7世纪）已经测量了太阳的高度，其方法后来称为“重差术”。

西周开国时期，周公善演《周易》，是智者的化身，他能与人“解梦”，却苦于无法测量太阳的高度，成为终生遗憾。他的后人荣方为实现先人的遗愿，找到当时对数学研究很有成就的陈子，陈子通过研究找到了测量太阳高度的方法。

如图1所示， S 表示太阳， O 表示日下点， AA' 和 BB' 均表示髀——测量用的标杆， O, A, B 在同一直线上， AC 是髀竖立在 A 处的影长， BD 是髀竖立在 B 处的影长，两髀的日影差为 $d(d=BD-AC)$ ，两髀之间的距离为 AB ，其中髀长 h 是已知的， AC, BD, AB 均可实际量出。

由 $\triangle SO'A' \sim \triangle A'AC$ ， $\triangle SO'B' \sim \triangle B'BD$ ，然后根据三角形相似定理，得到日高公式

$$SO = SO' + OO' = \frac{h \cdot AB}{d} + h.$$

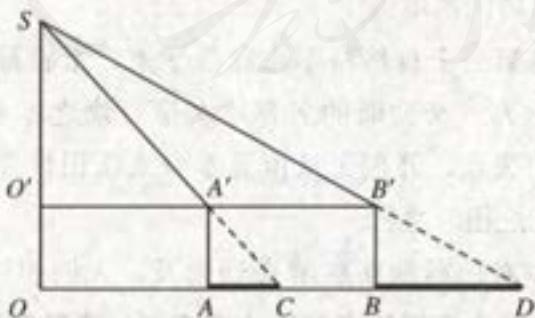


图1

求得了日高 SO 及日到日下点的距离 OA 之后，陈子还告诉荣方日远（日到太阳的距离）的计算方法为：“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并开方而除之，得邪至日者。”

古汉语中，“邪”也作“斜”解，就是说，将勾（即图 1 中的 OC ）、股各平方后相加，再开方，就得到弦长（图 2），陈子的这段话，不仅解决了日远的计算问题，而且还最早表述了勾股定理，这充分证明，我国最迟在陈子所处年代，就已经发现并运用了勾股定理。

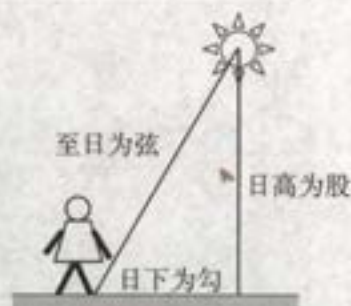


图 2

由于陈子受当时科学水平的限制，误把椭圆形的地球当作平面，所以，求出的日高与实际距离相差很远。然而，他的测日法所反映的数学及测量水平，当时在世界上是遥遥领先的，而且他的测量方法（后来叫做重差术）至今仍被使用着。所以，人们称陈子为测量学之祖，毫不为过。

问题探究：

(1) 你能测出一棵大树的高度吗？

(2) 示波器是一种用途十分广泛的电子测量仪器，它能把肉眼看不到的电信号变换成看得见的图象，便于人们研究各种电现象的变化过程，你知道示波器画出的图象是怎样的吗？

第八章 平面向量

火箭升空，把卫星送入预定的运行轨道。飞弹出膛，直奔瞄准的射击目标。它们不但风驰电掣地急速飞行，而且有着自己的目标方向。



任何一门数学分支，不管它如何抽象，总有一天会在现实世界中找到应用。

——罗巴切夫斯基

数学发明创造的动力不是推理，而是想象力的发挥。

——德·摩根

向量是近代数学中重要的基本概念之一，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，有着极其丰富的实际背景。向量的有关知识是进一步学习数学、物理和其他学科的有效工具。

8.1 向量的概念

问题 学校正在进行紧张的拔河比赛（图 8-1），双方势均力敌。你注意到作用在绳子上的力，既有大小又有方向了吗？

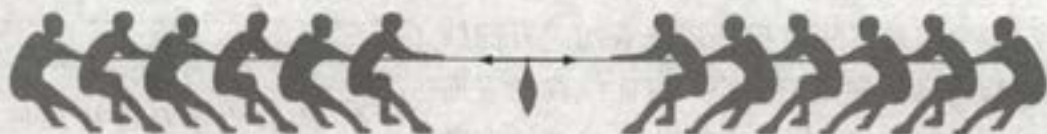


图 8-1

1. 向量的概念

在上面的问题中，参赛的双方在绳子上分别施加了向左和向右的力，谁用的力大，中间的标志就向谁的方向移动。这说明力不仅有大小而且有方向。

行驶中的汽车既有快慢，又有方向，这说明汽车的速度也有大小和方向两个特征。

如图 8-2 所示，平面上的一个质点 A，无论沿着什么路径运动到 B，其位移的大小都是线段 AB 的长度，方向是由 A 指向 B。

质点从一个位置（起点）运动到另一个位置（终点）的位置变化叫做质点在这一运动过程中的位移。它的大小是两个位置的直线距离，其方向是从起点指向终点。



我们把既有大小又有方向的量叫做**向量**。把只有大小没有方向的量（如长度、面积、体积等）叫做**数量**。

2. 向量的几何表示

在几何学中，通常用点表示位置，用两点之间的线段长度表示两点间的距离，用带箭头的直线表示一个方向。

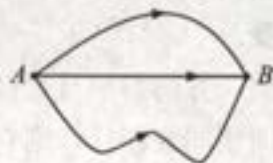


图 8-2

如图 8-3, 我们规定, 线段的端点 A 为始点, 端点 B 为终点, 这时线段 AB 具有从 A 到 B 的方向. 像这样, 具有方向的线段叫做有向线段.

通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向. 以 A 为始点, 以 B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$. 应注意, 始点一定要写在终点的前面.

对于有向线段 $\overrightarrow{AB}$, 线段 AB 的长度叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度 (或模), 记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

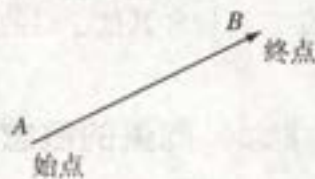


图 8-3

有向线段包含三个要素: 始点、方向和长度. 知道了有向线段的始点, 它的终点就被它的方向和长度所唯一确定.

一个向量可用有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量时, 我们也称其为向量 $\overrightarrow{AB}$. 另外, 在印刷时, 向量常用黑体小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示, 书写时, 则常用带箭头的小写字母 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ 来表示.

如果向量 $\overrightarrow{AB} = a$, 那么有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度, 表示向量 a 的大小, 也叫做向量 a 的长度 (或模), 记作 $|a|$.

如果两个向量 a 和 b 方向相同且长度相等, 就说 a 和 b 相等, 记作 $a = b$. 长度等于零的向量叫做零向量, 记作 0 . 零向量的方向是不确定的.

长度等于 1 的向量叫单位向量.

由于我们所研究的向量只含有长度和方向两个要素, 用有向线段来表示向量时, 与有向线段的始点位置无关, 即同向且等长的有向线段表示的是同一向量, 或相等的向量.

方向与平行这两个概念有着密切的联系. 显然, 如果两条有向线段的方向相同或相反, 则它们所在的直线平行或重合; 反之, 如果两条有向线段所在的直线平行或重合, 则它们的方向相同或相反.

“向量”这个词来自力学和解析几何中的有向线段. 最先使用有向线段表示向量的是英国著名科学家牛顿 (Newton, 1642—1727).

读一读



想一想 所有的单位向量都相等吗?



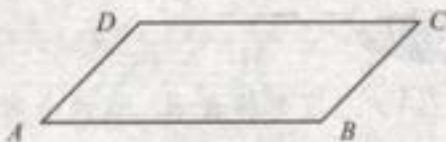


图 8-4

如图 8-5 所示, 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 在直线 l_1 上, $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 在直线 l_2 上, 且 $l_1 \parallel l_2$, 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的方向相同, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 的方向相反.

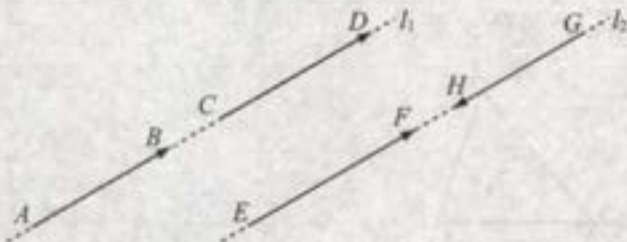


图 8-5

如果两个向量方向相同或相反, 则称这两个向量平行, 向量平行也称向量共线.

向量 a 平行于向量 b , 记作 $a \parallel b$.

我们规定, 零向量与任意向量平行, 即对任意一个向量 a , 都有 $0 \parallel a$.

例 如图 8-6 所示, 设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 分别写出与向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.

解: 由图可知

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DO};$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO};$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO}.$$



在如图 8-4 所示的平行四边形 $ABCD$ 中, 根据构成平行四边形的四条边所在的线段, 画出两对相等的向量.

试一试



图 8-5 中有向线段 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ 两两之间的方向相同还是相反?



(1) 零向量与实数零的区别;
(2) 向量平行与直线平行的区别.

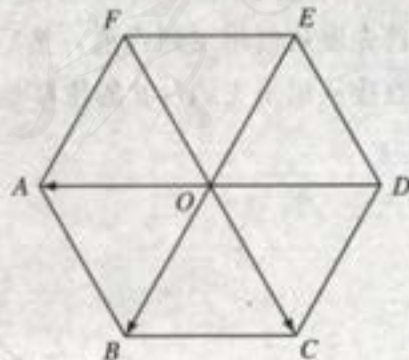


图 8-6

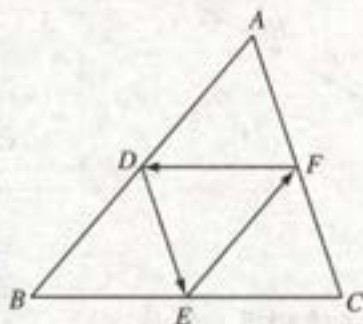
练习8-1

1. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度怎样表示？向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度怎样表示？这两个向量的长度相等吗？这两个向量相等吗？

2. (1) 用两条有向线段分别表示两个相等的向量，如果这两条有向线段的始点相同，那么它们的终点是否相同？

(2) 用两条有向线段分别表示两个方向相同但长度不同的向量，如果这两条有向线段的始点相同，那么它们的终点是否相同？

3. 如图，已知 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 各边 AB, BC, CA 的中点，分别写出图中与向量 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FD}$ 相等的向量。



(第3题)

8.2 向量的线性运算

问题 如图8-7，某人乘飞机从福州到台北，在海峡两岸未直航时，飞机首先要从福州飞到香港，然后再从香港飞往台北。这两次位移的结果与飞机直接从福州飞到台北的位移是否相同？

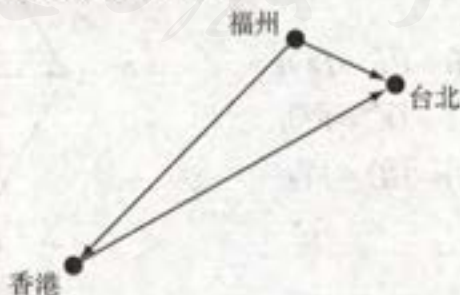


图8-7

8.2.1 向量的加法

不难看出,上述问题中,飞机两次位移的结果与飞机直接从福州飞到台北的位移是相同的.

已知向量 a, b , 在平面上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, 作向量 $\overrightarrow{AC}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 a 与 b 的和向量, 记作 $a+b$, 即

$$a+b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

求两个向量和的运算, 叫做向量的加法. 如图 8-8 所示, 这种求两个向量和的作图法则叫做向量加法的三角形法则.

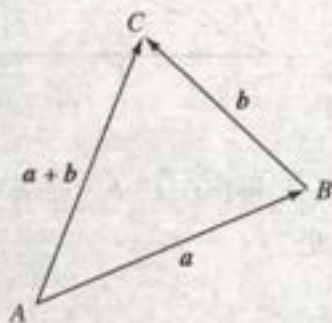


图 8-8

图 8-9 (1) 中, 向量 $\overrightarrow{AC}$ 表示两个同向向量的和向量; 图 8-9 (2) 中, 向量 $\overrightarrow{AC}$ 表示两个方向相反的向量的和向量.

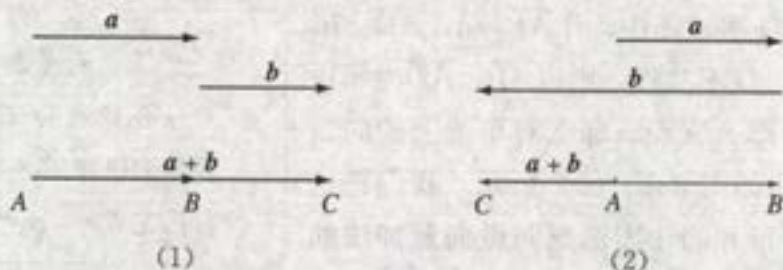


图 8-9

对于零向量与任意一个向量 a , 都有

$$a+0=0+a=a.$$

设 O 是平面内任意一点, 由向量加法的三角形法则可以知道, 任何一个向量 $\overrightarrow{AB}$ 均可以写成 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}$ 两个向量之和, 即

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}.$$

向量加法满足如下运算律.

- (1) 交换律: $a+b=b+a$;
- (2) 结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

下面我们来证明当 a, b 不平行时, 向量加法交换律成立.

证明: 作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, 如图 8-10 (1). 则

$$\overrightarrow{AC}=a+b.$$

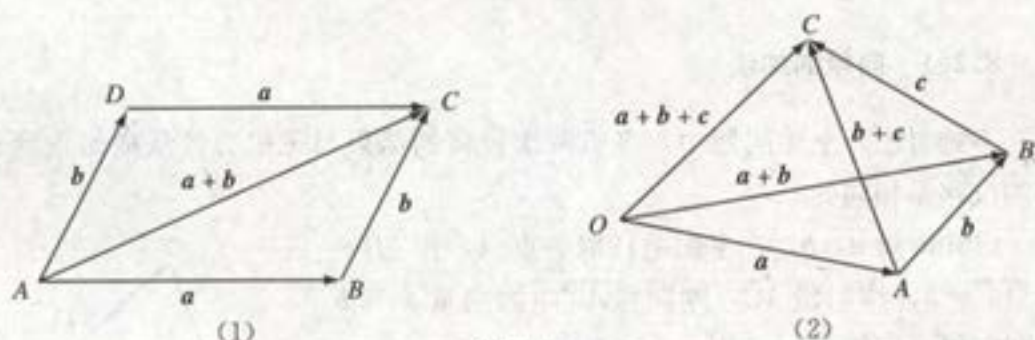


图 8-10

再作 $\overrightarrow{AD} = b$, 连接 DC , 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 于是 $\overrightarrow{DC} = a$. 因此

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = b + a = \overrightarrow{AC},$$

即

$$a + b = b + a.$$

对于 a, b 平行的情况, 请同学们自己验证.

在上述证明过程中, 作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 如果 A, B, D 不共线, 则以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 那么对角线上的向量 $\overrightarrow{AC} = a + b$, 如图 8-10 (1) 所示. 我们把这种求两个向量的和的作图法则叫做向量加法的平行四边形法则.

例 1 如图 8-11 (1), 已知向量 a, b , 求作向量 $a + b$.

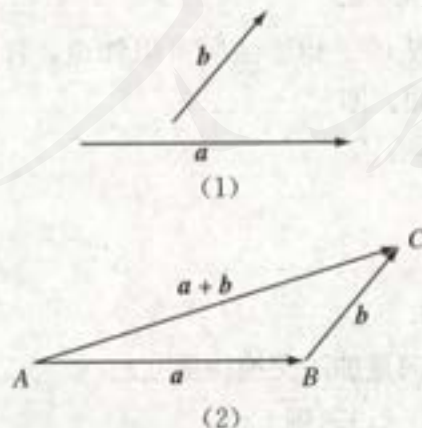


图 8-11



作法：在平面内任取一点 A ，作向量 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ ，作向量 $\overrightarrow{AC}$ （如图 8-11 (2)），则

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

例 2 已知平行四边形 $ABCD$ ，如图 8-12，填空：

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ _____；

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ _____；

(3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} =$ _____.

解：由向量加法的三角形法则或平行四边形法则可知：

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ；

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ；

(3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$.

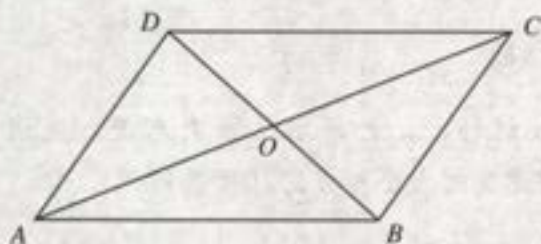


图 8-12

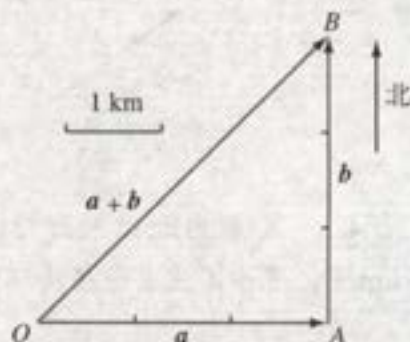


图 8-13

例 3 某人先位移向量 $\mathbf{a}$ ：“向东走 3 km”，接着再位移向量 $\mathbf{b}$ ：“向北走 3 km”，求这个人的位移和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。

解：如图 8-13 所示，选择适当的比例尺，作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ ，则

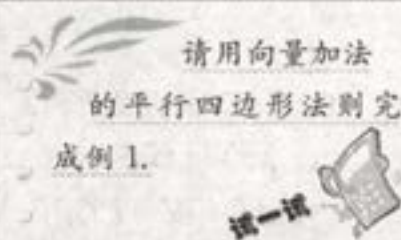
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

而且

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{3^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ (km)}, \end{aligned}$$

又因为 $\angle AOB = 45^\circ$ ，所以，这个人的位移和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 表示

“向东北走约 4.24 km”。



练习8-2

1. 说出下列向量的和:

(1) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$;

(2) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}$;

(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;

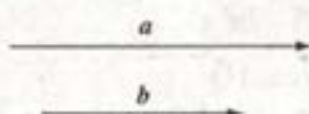
(4) $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}$.

2. 已知下列各组向量, 求作 $a+b$:

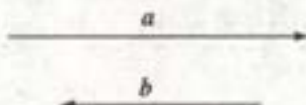
(1)



(2)



(3)



3. 如图, 已知向量 a, b, c , 求作 $a+b+c$.



(第3题)

4. 一轮船向北以航速 24 km/h 航行, 此时河水从西向东流, 流速 7 km/h, 用作图法求轮船的实际航行速度的大小和方向 (精确到 1°).

8.2.2 向量的减法

在实数的运算中, 我们知道减法是加法的逆运算, 下面我们类比实数的减法运算来定义向量的减法运算.

已知向量 a, b , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ (如图 8-14), 则由向量加法的三角形法则, 得

$$b + \overrightarrow{BA} = a,$$

我们把向量 $\overrightarrow{BA}$ 叫做向量 a 与 b 的差, 记作 $a - b$, 即

$$\overrightarrow{BA} = a - b = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

这种求两个向量差的运算, 叫做向量的减法.

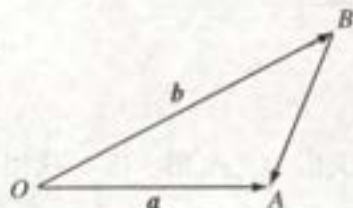


图 8-14

由此可见,如果把表示两个向量的有向线段的始点放在一起,则这两个向量的差是以减向量的终点为始点,被减向量的终点为终点的向量.

与向量 a 等长且方向相反的向量叫做 a 的相反向量,记作 $-a$. 0 向量的相反向量是它本身.

显然,任意向量与其相反向量的和向量是零向量,即

$$a + (-a) = 0.$$

在 $b + \overrightarrow{BA} = a$ 两边同时加上一 b , 得

$$\overrightarrow{BA} = a + (-b).$$

即

$$\overrightarrow{BA} = a - b.$$

这就是说减去一个向量等于加上这个向量的相反向量(如图 8-16).

例 4 如图 8-17 所示,已知平行四边形 $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 试用向量 a 和 b 分别表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{DB}$.



图 8-16

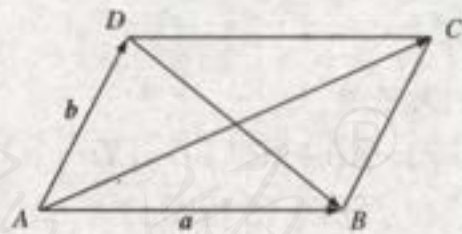


图 8-17

解: 连接 AC , DB , 由向量加法的平行四边形法则, 有

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = a + b;$$

由向量减法的定义, 得

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = a - b.$$

例 5 如图 8-18 (1), 已知向量 a 和 b , 求作向量 $a - b$.

“相反向量就是方向相反的向量”这种说法对吗?

图 8-15

在如图 8-15 所示的平行四边形 $ABCD$ 中, 根据构成平行四边形的四条边所在的线段, 画出两对相反向量.

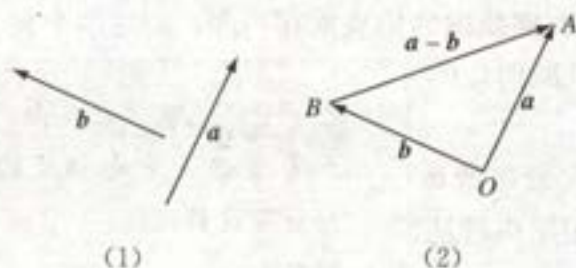


图 8-18

解：在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = a$ ， $\overrightarrow{OB} = b$ ，作向量 $\overrightarrow{BA}$ ，如图 8-18 (2) 所示，则

$$a - b = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$



想一想 根据例 5 的条件，你能作出向量 $b - a$ 吗？它与 $a - b$ 的关系是什么？

练习 8-3

1. 说出下列向量的差：

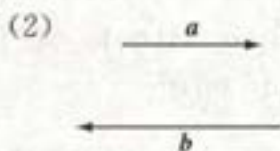
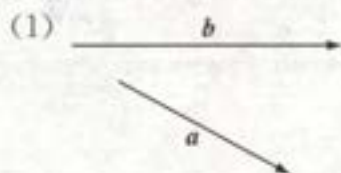
(1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

(2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$;

(3) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$;

(4) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{AO}$.

2. 已知向量 a , b ，求作向量 $a - b$ ：



3. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$;

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$;

(3) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}$.

8.2.3 数乘向量

如图 8-19 所示，四个质量相等的砝码悬挂在横梁 AB 上，若悬挂在点 A 处的一个砝码使横梁 AB 受到向下的拉力为 F ，则悬挂在点 B 处的三个砝码使横梁 AB 受到向下的拉

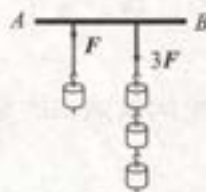


图 8-19

力为 $F+F+F$, 记作 $3F$.

另外, 如图 8-20 所示, 已知向量 a 可以作出如下向量的和:

- (1) $a+a+a$;
- (2) $(-a)+(-a)+(-a)$.

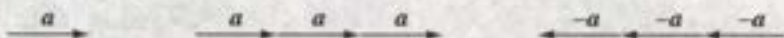


图 8-20

3 个 a 连加, 记作 $3a$, 3 个 $(-a)$ 连加, 记作 $-3a$. 由图 8-20, 我们可以看到, 3 个 a 连加仍是一个向量, 它的长度等于 $3|a|$, 方向与 a 的方向相同; 3 个 $(-a)$ 连加仍是一个向量, 它的长度等于 $3|a|$, 方向与 a 的方向相反.

由以上分析, 我们可以给出如下定义.

定义 实数 λ 和向量 a 的乘积是一个向量, 这种运算叫做数乘向量, 记作 λa . 向量 $\lambda a (a \neq 0)$ 的长度与方向规定为:

- (1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;
- (2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向相反.

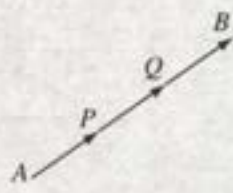


图 8-21

显然, $0a=0$, $\lambda 0=0$.

如图 8-21, 已知 P, Q 为线段 AB 的两个三等分点, 则

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB}.$$

λa 中的实数 λ , 叫做向量 a 的系数. 数乘向量的几何意义就是把向量 a 沿着 a 的方向或 a 的反方向, 长度放大或缩小. 如 $2a$ 的几何意义就是沿着向量 a 的方向, 长度放大到原来的 2 倍.

可以验证, 数乘向量运算满足下列运算律.

设 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 则

任意作一个向量 a , 再作出向量

$-3a, \frac{1}{2}a, -\frac{1}{3}a$,

并说出它们的

几何意义.

做一做





$$(1) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(2) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(3) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b.$$

例6 计算: $2(a+b)-3(a-b)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } & 2(a+b)-3(a-b) \\ &= 2a+2b-3a+3b \\ &= (2-3)a+(2+3)b \\ &= -a+5b. \end{aligned}$$

例7 如图 8-22 (1), 已知向量 a, b ,

求作向量 $\frac{1}{2}a-3b$.

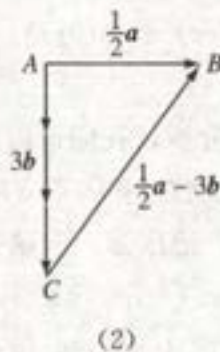
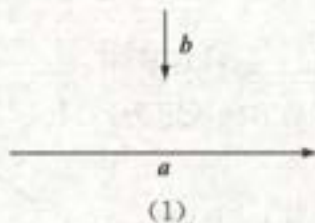


图 8-22

作法: 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}a$, 作 $\overrightarrow{AC} = 3b$ (如图 8-22 (2)).

则

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a - 3b.$$

根据向量平行和数乘向量的定义可以直接得到以下结论.

平行向量基本定理 如果向量 $b \neq 0$, 则 $a \parallel b$ 的充分必要条件是, 存在唯一的实数 λ , 使得 $a = \lambda b$.

如图 8-23, 如果 $a = 2b$, 则 $a \parallel b$; 如果 $c = -2b$, 则 $c \parallel b$; 如果 $d \parallel b$, 而且 d 的长度是 b 的一半, 并且方向相反, 则 $d = -\frac{1}{2}b$.

想一想 数乘向量的运算律与实数乘法的运算律有什么相似之处?

想一想 向量 a 与 λa 是否平行?

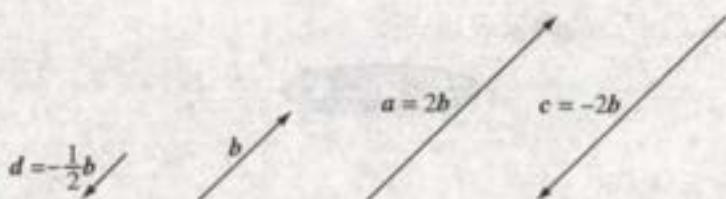


图 8-23

非零向量 a 的单位向量是指与 a 同方向的单位向量, 由数乘向量的定义易知 a 的单位向量是

$$\frac{a}{|a|}.$$

例 8 已知点 M 是线段 AB 的中点, O 是平面内任意一点, 如图 8-24 所示. 求证:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

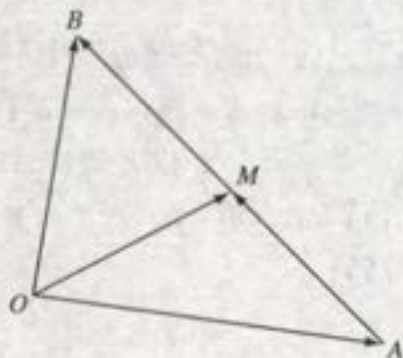


图 8-24

$$\text{所以 } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

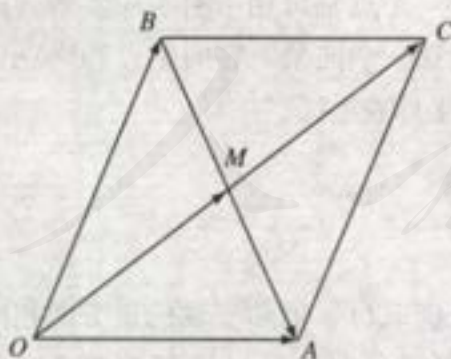


图 8-25

在例 8 中, 点 M 是线段 AB 的中点, 则

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

如图 8-25 所示, 以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边构造平行四边形 $OACB$, 用向量加法的平行四边形法则, 你能证明例 8 吗?

试一试



这就是线段 AB 的中点的向量表达式.

练习 8-4

1. (口答) 化简:

$$(1) \frac{1}{4} \times (2a);$$

$$(2) (a+b) + 2(a-b).$$

2. 化简:

$$(1) 4(2a-3b) + 5(2b-a);$$

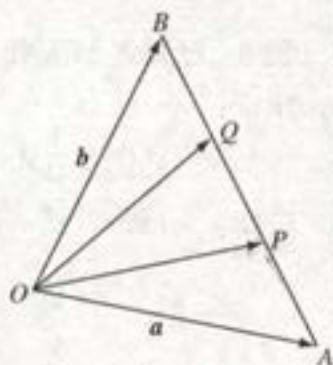
$$(2) \frac{1}{4}(a+2b) - \frac{1}{4}(5a-2b).$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 的中点, 求证:

$$(1) \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});$$

$$(2) 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AD}.$$

4. 如图所示, 已知点 P 和点 Q 是线段 AB 的三等分点, 点 O 是线段 AB 外任意一点, 如果 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 试用向量 a, b 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$.



(第 4 题)

8.3 平面向量的直角坐标运算

我们知道, 在平面直角坐标系中, 每一个点都可用一对有序实数 (即它的坐标) 表示. 对平面直角坐标系内的任意一个向量, 它的始点和终点也可以用坐标表示, 那么, 这个向量是否能用坐标表示呢?

8.3.1 平面向量的直角坐标及其运算

1. 平面向量的直角坐标

如图 8-26, 在平面直角坐标系中, 分别取与 x 轴和 y 轴的正方向相同的两个单位向量 i, j . 此时, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 可以写成分别与 i, j 平行的两个向量之和. 事实上

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= 3i + 2j.\end{aligned}$$

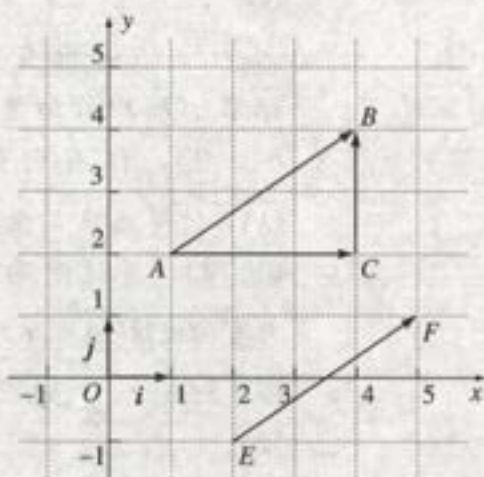


图 8-26

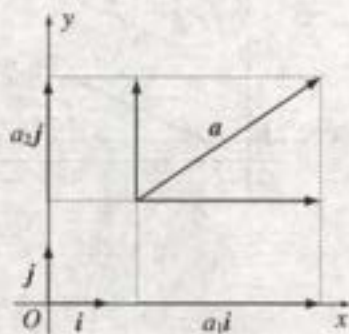


图 8-27

一般地, 对于平面直角坐标系 xOy 中的任意一个向量 a (如图 8-27), 有且只有一对实数 a_1, a_2 , 使得

$$a = a_1 i + a_2 j,$$

其中 a_1 叫做向量 a 在 x 轴上的坐标, a_2 叫做向量 a 在 y 轴上的坐标.

我们把 (a_1, a_2) 叫做向量 a 在平面直角坐标系 xOy 中的坐标, 记作

$$a = (a_1, a_2).$$

特别地, 有

$$i = (1, 0), j = (0, 1), 0 = (0, 0).$$

以上就是平面向量的直角坐标的定义, 由定义可知, 如果 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, 则

$$a = b \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ 且 } a_2 = b_2.$$

设 $a = (a_1, a_2)$, 则所有与 a 相等的向量的坐标均为 (a_1, a_2) . 如图 8-28, 以原点 O 为始点且与 a 相等的向量 $\overrightarrow{OA} = a = (a_1, a_2)$, 此时表示向量 $\overrightarrow{OA}$ 的有向线段的终点 A 的坐标恰好是 (a_1, a_2) ; 反之, 如果点 A 的坐标是 (a_1, a_2) , 那么有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所表示的向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标也是 (a_1, a_2) .

想一想 在图 8-26 中, 向量 $\overrightarrow{EF}$ 是否也能用 $3i + 2j$ 表示?

想一想 如果向量 $c = (3, 5)$, 向量 $d = (5, 3)$, 那么 $c = d$ 吗?

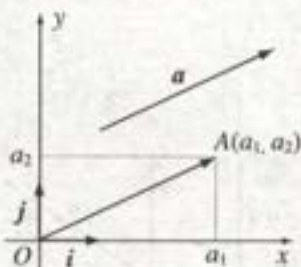


图 8-28

在平面直角坐标系 xOy 中作向量 $a = (1, 2)$, 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$, 使得点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 并说明向量 a 与有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示的向量的关系.

试一试

例 1 如图 8-29, 在直角坐标系 xOy 中, 用向量 i, j 分别表示向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$, 并求出它们的坐标.

$$\text{解: } \overrightarrow{AB} = i + 2j = (1, 2);$$

$$\overrightarrow{CD} = 2j = (0, 2);$$

$$\overrightarrow{EF} = 3i - 2j = (3, -2);$$

$$\overrightarrow{GH} = -4i - j = (-4, -1).$$

你能以原点 O 为始点分别作出与向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$ 相等的向量吗?

试一试

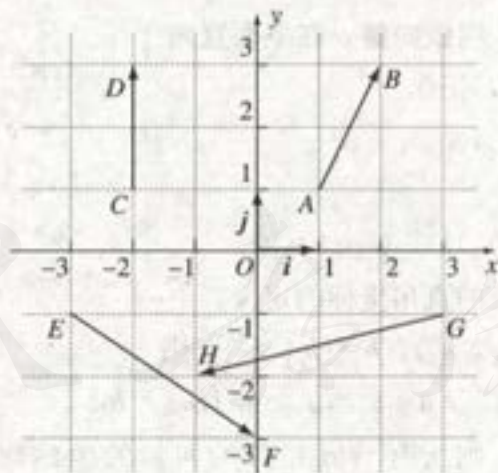


图 8-29

2. 平面向量的直角坐标运算

如果 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, 则 $a = a_1i + a_2j$, $b = b_1i + b_2j$. 于是

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1i + a_2j) + (b_1i + b_2j) \\ &= a_1i + b_1i + a_2j + b_2j \end{aligned}$$

$$=(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j.$$

所以 $a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2)$, 即

$$a+b=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

同理, 我们可以得到

$$a-b=(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2),$$

$$\lambda a=\lambda(a_1, a_2)=(\lambda a_1, \lambda a_2),$$

其中 λ 是任意实数.

上述向量的坐标运算公式, 也可以分别表述如下.

两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量对应坐标的和与差:

实数与向量的积的坐标等于用这个实数分别乘以原来向量的对应坐标.

在平面直角坐标系 xOy 中, 如果点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1).\end{aligned}$$

这个结论也可以表述如下.

平面直角坐标系中, 一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去始点的对应坐标.

例2 已知 $a=(4, -3)$, $b=(-6, 8)$, 求: $a+b$, $a-b$, $2a-3b$.

解: $a+b=(4, -3)+(-6, 8)=(-2, 5)$;

$$a-b=(4, -3)-(-6, 8)=(10, -11);$$

$$2a-3b=2(4, -3)-3(-6, 8)$$

$$=(8, -6)-(-18, 24)$$

$$=(26, -30).$$

例3 已知点 $A(3, -2)$, $B(-5, -1)$, 且 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 求 M 点的坐标.

解: 设点 M 的坐标是 (x, y) , 因为

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$





所以

$$\begin{aligned}(x, y) - (3, -2) &= \frac{1}{2}[(-5, -1) - (3, -2)] \\ &= \left(-4, \frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

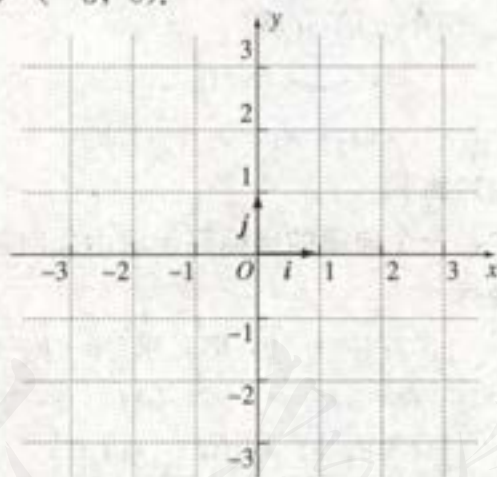
即

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left(-4, \frac{1}{2}\right) + (3, -2) \\ &= \left(-1, -\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

所以点 M 的坐标为 $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

练习8-5

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 作出向量 $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (2, -1)$, $\overrightarrow{OD} = (-3, 0)$.



(第1题)

2. 口答下列各题:

- (1) 如果 $a = (3, 4)$, $b = (1, 2)$, 求 $a + b$, $a - b$, $2a$, $-3b$;
- (2) 已知 $a = (x, 1)$, $b = (2, y)$, 且 $a = b$, 求 x, y 的值;
- (3) 已知点 $A(1, 2)$ 和点 $B(3, 4)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

3. 已知 $a = (-2, -3)$, $b = (5, -2)$, 求 $a + b$, $a - b$, $3a + 2b$.

4. 已知 A, B 两点的坐标, 求 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ 的坐标:

(1) $A(-3, 4), B(6, -2)$; (2) $A(10, -8), B(5, 4)$;

(3) $A(-5, 0), B(-8, -7)$; (4) $A(5, 11), B(-3, -4)$.

5. 如果 $a=(1-x, 3), b=(-2, y+4)$, 且 $a=b$, 求 x, y 的值.

8.3.2 平面向量平行的坐标表示

平行向量基本定理告诉我们, 如果向量 $b \neq 0$, 则 $a \parallel b$ 的充分必要条件是, 存在唯一的实数 λ , 使得 $a = \lambda b$.

设 $a=(a_1, a_2), b=(b_1, b_2)$, 如果 $b \neq 0$, 则条件 $a = \lambda b$ 可用坐标表示为

$$(a_1, a_2) = \lambda(b_1, b_2),$$

即

$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \end{cases}$$

消去 λ , 得

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

所以 $a \parallel b (b \neq 0)$ 的充要条件是 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

当 $b=0$ 时, 易证 $a \parallel b$ 的充要条件也是 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

所以对于任意向量 $a=(a_1, a_2), b=(b_1, b_2)$ 都有

$$a \parallel b \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

特别地, 如果向量 b 不平行于坐标轴, 即 $b_1 \neq 0$ 且 $b_2 \neq 0$, 则

$$a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

例 4 判断下列两个向量是否平行:

(1) $a=(-1, 3), b=(5, -15)$;

(2) $e=(2, 0), f=(0, 3)$.

解: (1) 因为 $(-1) \times (-15) - 3 \times 5 = 0$,

所以向量 a 和向量 b 平行;

(2) 因为 $2 \times 3 - 0 \times 0 = 6 \neq 0$, 所以向量 e 和 f 不平行.

用 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 来判断

向量 a 和 b

是否平行.

试一试

例 5 如果向量 $a=(-1, x)$ 与向量 $b=(-x, 2)$ 平行且方向相同, 求 x .

解: 因为 $a=(-1, x)$ 与 $b=(-x, 2)$ 平行, 所以

$$(-1) \times 2 = x(-x),$$

解得

$$x = -\sqrt{2} \text{ 或 } x = \sqrt{2}.$$

又因为 a 与 b 方向相同, 所以 $x = \sqrt{2}$.

例 6 如图 8-30 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, 底 DC 长是底 AB 长的 3 倍, 已知顶点 $A(-2, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 5)$, 求点 D 的坐标.

解: 设点 D 的坐标是 (x, y) , 因为 $DC \parallel AB$, 且 DC 长是 AB 长的 3 倍, 所以 $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.

因为

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) - (-2, 1) = (1, 2),$$

$$\overrightarrow{DC} = (4, 5) - (x, y) = (4-x, 5-y),$$

所以

$$(4-x, 5-y) = 3(1, 2) = (3, 6),$$

解得 $x=1, y=-1$.

因此点 D 的坐标是 $(1, -1)$.

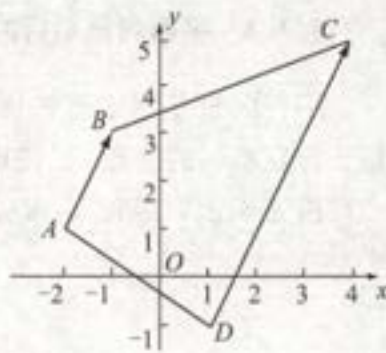


图 8-30

练习 8-6

1. 判断下列两个向量是否平行:

(1) $a=(6, -2), b=(3, 1)$; (2) $c=(-1, 0), d=(3, 0)$;

(3) $e=(-4, -3), f=(8, 6)$; (4) $g=(10, 5), h=(4, 2)$.

2. 已知 $a=(2, x), b=(4, 8)$, 如果 a 和 b 平行, 求 x 的值.

3. 已知 $a=(1, x), b=(x, 1)$, 如果 a 和 b 平行且方向相反, 求 x 的值.

4. 已知四个点的坐标分别是 $A(0, 3), B(2, -3), C(7, -8), D(3, 4)$, 求证 $AB \parallel CD$.

5. 在梯形 $ABCD$ 中, 底 DC 长是底 AB 长的 2 倍, 且顶点 $A(-1, -1), B(1, 1), D(-2, -3)$, 求点 C 的坐标.

8.3.3 向量的长度公式和中点公式

1. 向量的长度公式

问题 1 在军事上, 为了方便计算, 往往是以坐标的形式来标注目标方位的. 例如我们假设在某张军事地图上建立了一个如图 8-31 所示的直角坐标系, 我方有个炮兵阵地在点 $A(-1, -1)$ 的位置上, 经过侦察, 敌方阵地在点 $B(2, 3)$ 的位置上, 那么双方的图上距离是多少?

分析: 双方的图上距离实际上就是 $\overrightarrow{AB}$ 的长度. 又因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2, 3) - (-1, -1) \\ &= (3, 4) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.\end{aligned}$$

由勾股定理知

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

所以双方的图上距离是 5.

一般地, 已知向量 $\mathbf{a}$ 的坐标是 (a_1, a_2) , 如图 8-32, 则根据勾股定理知向量 $\mathbf{a}$ 的长度公式为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

如果已知平面上两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

从而

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

这是平面上两点间的距离公式.

若记 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, 则有

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

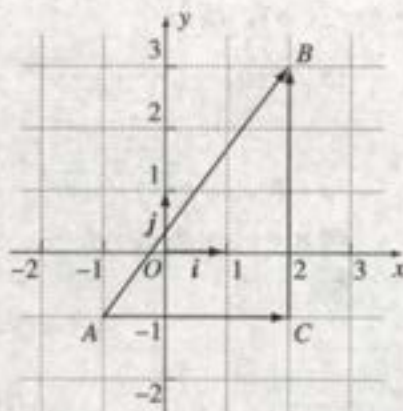


图 8-31

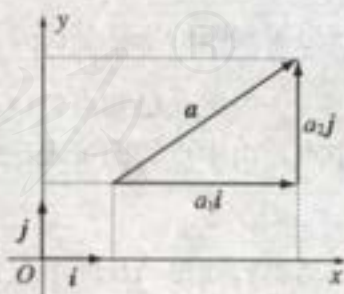


图 8-32

例7 已知 $a=(4, -3)$, $b=(-6, 8)$, 求 $|a|+|b|$, $|a+b|$.

解: 因为 $a+b=(4, -3)+(-6, 8)=(-2, 5)$, 所以

$$|a|+|b|=\sqrt{4^2+(-3)^2}+\sqrt{(-6)^2+8^2}=5+10=15;$$

$$|a+b|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}.$$

例8 已知两点 $A(-3, 9)$, $B(2, 4)$, 求 A, B 之间的距离.

解: 因为

$$\overrightarrow{AB}=(2, 4)-(-3, 9)=(5, -5),$$

则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}.$$

所以两点 A, B 之间的距离是 $5\sqrt{2}$.

2. 中点公式

问题2 在问题1中, 如果要在双方阵地连成线段的中点处设一个我方的炮兵观察哨, 那么这个观察哨的坐标是多少?

分析: 设线段 AB 的中点为 M , 则观察哨的坐标就是线段 AB 的中点 M 的坐标.

根据线段中点的向量表达式 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, 得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}[(-1, -1)+(2, 3)]=\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

所以观察哨的坐标是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

一般地, 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$, 点 $M(x, y)$ 是线段 AB 的中点, 由中点的向量表达式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

容易得到线段 AB 的中点 M 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

即

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

请同学们自己

算出 $|a|-|b|$, 并

比较 $|a|-|b|$, $|a+b|$, $|a|+|b|$

的大小.

做一做



这就是线段中点坐标的计算公式，简称中点公式。

例 9 已知点 $A(-1, 3)$ ，点 $B(5, -11)$ ，求线段 AB 的中点坐标。

解：设 AB 的中点坐标为 (x, y) ，则由中点公式可知

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2,$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + (-11)}{2} = -4.$$

所以线段 AB 的中点坐标是 $(2, -4)$ 。

例 10 求点 $A(2, 7)$ 关于点 $M(5, -2)$ 的对称点 A' 的坐标。

解：设所求点 A' 的坐标是 (x_0, y_0) ，由线段的中点公式知

$$\frac{2 + x_0}{2} = 5, \quad \frac{7 + y_0}{2} = -2.$$

解得

$$x_0 = 8, \quad y_0 = -11.$$

所以点 A' 的坐标是 $(8, -11)$ 。

练习 8-7

1. 口答下列各题：

(1) 已知 $a = (0, -3)$ ， $b = (5, 0)$ ，求 $|a|$ ， $|b|$ ；

(2) 已知 $M(2, 1)$ ， $N(4, 1)$ ，求线段 MN 的长度和中点坐标；

(3) 已知 $P(7, -1)$ ， $Q(7, 3)$ ，求线段 PQ 的长度和中点坐标。

2. 已知 $a = (-2, -1)$ ， $b = (2, -4)$ ，求 $|a| - |b|$ ， $|a - b|$ 。

3. 已知 A, B 两点的坐标，求 $\overline{AB}$ 的坐标以及它的长度：

(1) $A(2, 6)$ ， $B(1, 3)$ ； (2) $A(6, 1)$ ， $B(-6, -4)$ ；

(3) $A(-7, 8)$ ， $B(1, -7)$ ； (4) $A(1, -2)$ ， $B(5, 2)$ 。

4. 已知 x 轴上一点 P 到点 $A(2, -3)$ 的距离是 5，求点 P 的坐标。

5. 已知 A, B 两点的坐标，求线段 AB 的中点坐标：

(1) $A(7, -2)$ ， $B(-1, 3)$ ； (2) $A(0, -4)$ ， $B(5, 0)$ ；

(3) $A(-2, 0)$ ， $B(5, 0)$ ； (4) $A(-1, 5)$ ， $B(-11, 9)$ 。

6. 求点 $A(-1, 8)$ 关于点 $M(2, 3)$ 的对称点 A' 的坐标。

8.4 向量的内积

问题 我们知道, 如果一个物体在力 F 的作用下产生了位移 s (如图 8-33), 那么力所做的功为

$$W = |F| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 是 F 与 s 的夹角.

由上可知, 功是一个数量, 它由力和位移两个向量确定, 这给我们一种启示, 两个向量之间是否存在一种新的运算呢?

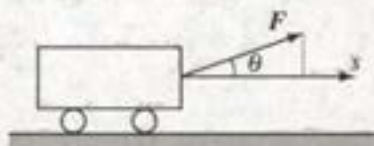


图 8-33

8.4.1 向量的内积

为了解决上述问题, 我们引入向量内积的概念, 首先我们讨论两个向量之间的夹角.

设 a 与 b 为两个非零向量, 在平面上任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 如图 8-34 所示, 则 $\angle AOB$ 叫 a 与 b 的夹角, 记作 $\langle a, b \rangle$.

我们规定 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$.

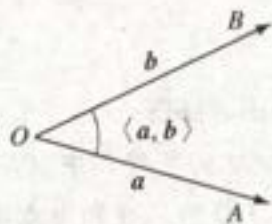


图 8-34

由向量 a 与 b 的夹角的定义可知

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle.$$

当 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时, 我们称 a 与 b 垂直, 记作 $a \perp b$.

已知 a 与 b 为两个非零向量, 则数量 $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$ 叫做 a 与 b 的内积, 也称为 a 与 b 的数量积或点积, 记作 $a \cdot b$. 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle.$$

想一想 当 a 与 b 的方向相同或相反时, $\langle a, b \rangle$ 的值分别是多少?

美国科学家吉布斯 (Gibbs, 1839—1903), 把内积称作“点积 (dot product)”, 并写作 $a \cdot b$, 这种用法流行至今.

读一读

我们规定零向量与任何向量的内积为 0, 即 $0 \cdot a = 0$.

根据向量内积的定义, 可以得到两个向量的内积有如下重要性质.

设 a, b 为两个非零向量, 则:

- (1) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$;
- (2) $|a \cdot b| \leq |a| |b|$;
- (3) $a \cdot a = |a|^2$ 或 $|a| = \sqrt{a \cdot a}$;
- (4) $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$.



用向量内积的

定义证明这四个

性质.

试一试



向量的内积运算满足如下运算律.

- (1) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$;
- (2) 数乘结合律: $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$;
- (3) 分配律: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

例 1 已知 $|a|=3$, $|b|=6$, 分别求出下列各种情况下 $a \cdot b$ 的值:

- (1) $a \parallel b$; (2) $a \perp b$; (3) $\langle a, b \rangle = 120^\circ$.

解: (1) 因为 $a \parallel b$, 所以 a 与 b 同向或反向.

当 a 与 b 同向时, $\langle a, b \rangle = 0^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos 0^\circ \\ &= 3 \times 6 \times 1 \\ &= 18; \end{aligned}$$

当 a 与 b 反向时, $\langle a, b \rangle = 180^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos 180^\circ \\ &= 3 \times 6 \times (-1) \\ &= -18; \end{aligned}$$

(2) 因为 $a \perp b$, 所以 $\langle a, b \rangle = 90^\circ$, 于是

$$a \cdot b = 0;$$

(3) 因为 $\langle a, b \rangle = 120^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos 120^\circ \\ &= 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -9. \end{aligned}$$

例 2 已知 $|a|=5$, $|b|=4$, $\langle a, b \rangle = 60^\circ$, 求:

$$(1) (a+b) \cdot (a-b);$$

$$(2) |a+b|.$$

解: (1) $(a+b) \cdot (a-b)$

$$= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

$$= |a|^2 - |b|^2$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9;$$

(2) 因为

$$|a+b|^2$$

$$= (a+b) \cdot (a+b)$$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2$$

$$= 25 + 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} + 16$$

$$= 61.$$

所以 $|a+b| = \sqrt{61}$.

练习8-8

1. 已知 $|a|$, $|b|$, $\langle a, b \rangle$, 求 $a \cdot b$:

(1) $|a|=4$, $|b|=2$, $\langle a, b \rangle=60^\circ$;

(2) $|a|=8$, $|b|=4$, $\langle a, b \rangle=\pi$;

(3) $|a|=1$, $|b|=7$, $\langle a, b \rangle=\frac{\pi}{2}$;

(4) $|a|=5$, $|b|=12$, $\langle a, b \rangle=150^\circ$.

2. 已知 $|a|$, $|b|$, $a \cdot b$, 求 $\cos \langle a, b \rangle$:

(1) $|a|=2$, $|b|=5$, $a \cdot b=5$;

(2) $|a|=4$, $|b|=4$, $a \cdot b=-8$;

(3) $|a|=2$, $|b|=7$, $a \cdot b=-14$;

(4) $|a|=14$, $|b|=12$, $a \cdot b=0$.

3. 已知 $|a|=3$, $|b|=4$, $\langle a, b \rangle=60^\circ$, 求 $(a+2b) \cdot (a-3b)$.

4. 已知 $|a|=6$, $|b|=8$, $\langle a, b \rangle=120^\circ$, 求 $|a-b|^2$, $|a-b|$.

8.4.2 向量内积的直角坐标运算

在平面直角坐标系中, 已知两个非零向量 $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2)$, 下面我们来用 a 和 b 的坐标表示 $a \cdot b$.

设 i 是与 x 轴的正方向同向的单位向量, j 是与 y 轴的正方向同向的单位向量, 那么

$$a=a_1i+a_2j, \quad b=b_1i+b_2j.$$

所以

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1i+a_2j) \cdot (b_1i+b_2j) \\ &= a_1b_1i \cdot i + a_1b_2i \cdot j + a_2b_1j \cdot i + a_2b_2j \cdot j, \end{aligned}$$

又因为

$$i \cdot i=1, \quad j \cdot j=1, \quad i \cdot j=j \cdot i=0,$$

所以

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2.$$

这就是说, 两个向量的内积等于它们对应坐标的乘积的和.

由此我们还可以得到以下结论.

(1) 两向量垂直的充要条件为

$$a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

(2) 两向量夹角余弦的计算公式为

$$\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

例3 设 $a=(3, -4)$, $b=(4, 2)$, 求:

- (1) $a \cdot b$; (2) $|a|$;
(3) $|b|$; (4) $\cos \langle a, b \rangle$.

解: (1) $a \cdot b = 3 \times 4 + (-4) \times 2$

$$= 12 - 8$$

$$= 4;$$

(2) $|a| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5;$



$$(3) |b| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5};$$

$$(4) \cos\langle a, b \rangle = \frac{4}{5 \times 2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

例4 已知 $a = (2, x)$, $b = (4, 8)$, 如果 $a \perp b$, 求 x 的值.

解: 因为 $a \perp b$, 所以 $a \cdot b = 0$, 即

$$2 \times 4 + 8x = 0,$$

解得 $x = -1$.

例5 已知 $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-2, 5)$, 求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明: 因为

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2)$$

$$= (1, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-1, 5-2)$$

$$= (-3, 3),$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-3) + 1 \times 3$$

$$= 0,$$

因此 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

例5 也可以分别求出 $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{CA}|$ 后, 用勾股定理判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

练习8-9

1. 已知向量 a, b 的坐标, 求 $a \cdot b$, $|a|$, $|b|$ 以及 $\cos\langle a, b \rangle$:

(1) $a = (4, 5)$, $b = (-4, 3)$;

(2) $a = (12, -5)$, $b = (1, 2)$.

2. 求下列两点之间的距离:

(1) $A(6, -4)$, $B(-2, 2)$;

(2) $C(2, 1)$, $D(-5, 1)$.

3. 判断下面各对向量是否垂直:

(1) $a = (-3, 2)$, $b = (4, 6)$;

(2) $a = (7, 1)$, $b = (-2, 14)$;

(3) $a = (-2, 0)$, $b = (0, 7)$;

(4) $a = (3, 5)$, $b = (-5, -3)$.

4. 已知 $a = (-1, x)$, $b = (2, 3)$, 如果 $a \perp b$, 求 x 的值.

习题八

1. 如图, 已知向量 a, b , 求作向量:

(1) $a+b$;

(2) $a-b$;

(3) $2a-b$.



(第1题)

2. 化简:

(1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AO}$;

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$;

(3) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AP}$;

(4) $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AP}$.

3. 化简:

(1) $-(a-2b)+3(b-3a)$;

(2) $\frac{1}{2}(4a-2b)-(3a-b)$;

(3) $4\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b\right) - \frac{1}{3}(a-b)$;

(4) $2(a-2b-3c)+3(2a-b+c)$.

4. 已知点 A, B 的坐标, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标、线段 AB 的中点坐标以及 $\overrightarrow{AB}$ 的长度:

(1) $A(2, 5), B(4, 5)$;

(2) $A(-2, -4), B(-2, 2)$;

(3) $A(-8, 1), B(4, 6)$;

(4) $A(3, -4), B(6, 0)$.

5. 已知点 M 在直线 $y=x$ 上, 并且到点 $A(5, 7)$ 的距离是 10, 求点 M 的坐标.6. 已知点 $P(a, 3)$ 关于点 $M(8, -1)$ 的对称点为 $P'(4, b)$, 求 a, b 的值.7. 已知向量 $a=(-1, 3), b=(-2, 5)$, 求:

(1) $2a+b$;

(2) $a-3b$;

(3) $(a-b) \cdot (a+b)$;

(4) $|a-b|$.

8. 判断下面各对向量是否平行或垂直:

(1) $a=(-3, 1), b=(3, 9)$;

(2) $a=(12, -16), b=(-6, 8)$;

(3) $a=(0, 3), b=(0, -5)$;

(4) $a=(1, -3), b=(3, 1)$.

9. 已知 a, b 的坐标, 求 $\cos\langle a, b \rangle$:

(1) $a=(1, -3), b=(2, -6)$;



$$(2) \mathbf{a}=(0, 3), \mathbf{b}=(0, -1);$$

$$(3) \mathbf{a}=(3, -2), \mathbf{b}=(1, 1);$$

$$(4) \mathbf{a}=(-7, 3), \mathbf{b}=(3, 7).$$

10. 已知点 $A(-1, 1)$, $B(0, -2)$, $C(3, 0)$, $D(2, 3)$, 求证四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



阅读与实践

(一) 向量知识在商店经营中的应用

问题: 已知某商店有商品 A , 商品 B , 商品 C , 商品 D , 按顺序写出成本为 $\mathbf{c}=(0.3, 0.5, 1.2, 3)$, 售价为 $\mathbf{p}=(0.5, 1, 1.5, 3.2)$, 某天卖出的数量为 $\mathbf{q}=(3, 5, 7, 2)$, 那么这家商店这天的纯收入(利润)是多少?(单位为: 元)

分析: 显然可以把商品逐件列式计算利润, 但当商品种类较多时比较繁琐, 因此, 这里我们利用向量知识简化计算.

本章学习的平面向量是用两个有序的实数对 (a_1, a_2) 来表示向量 $\mathbf{a}$ 的, 这样的向量称为二维向量. 我们也可以用三个有序实数组 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 表示空间向量, 这样的向量称为三维向量. 有些科学家从这个角度关注向量, 如德国数学家格拉斯曼(Grassmann, 1809—1877)提出三个有序实数组能表示一个向量, 那么四个有序实数组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 呢? 扩展到 n 个有序实数组 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 呢? 于是他就大胆地提出了 n 维向量的概念, 并且根据二维向量和三维向量的理论建立了 n 维向量的理论.

n 维向量是由 n 个数组成的一个有序数组, 比如 $(2, 7, 6)$ 是一个 3 维向量, $(1, 2, 3, -2, 0)$ 是一个 5 维向量.

向量的维数扩展以后, 向量相等的概念也随着发生变化: 两个向量相等是指它们的维数相同, 而且对应的分量也相等.

一般地, 对于两个 n 维向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, 有以下结论:

$$(1) \mathbf{a}=\mathbf{b} \text{ 的充要条件是 } a_i=b_i (i=1, 2, \dots, n);$$

$$(2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n);$$

$$(3) \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n);$$

$$(4) \lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n);$$

$$(5) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

下面用 n 维向量的知识解决上面的问题.

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{q} &= [(0.5, 1, 1.5, 3.2) - (0.3, 0.5, 1.2, 3)] \cdot (3, 5, 7, 2) \\ &= (0.2, 0.5, 0.3, 0.2) \cdot (3, 5, 7, 2) \\ &= 0.6 + 2.5 + 2.1 + 0.4 \\ &= 5.6, \end{aligned}$$

所以这家商店这天的纯收入为 5.6 元.

如果某家超市经营的 1 000 种商品可按照某一种顺序编号, 然后把这 1 000 种商品的单价排列起来, 构成一个 1 000 维向量

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{1\,000}),$$

然后把顾客购买的商品数量也按此顺序排列起来, 也构成一个 1 000 维向量

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{1\,000}),$$

那么, 顾客向超市付款的总额就是向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的数量积, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{1\,000} b_{1\,000}.$$

因此, 我们把相应运算程序编制成电脑软件, 通过运行这些软件, 就可实现超市运作的快捷有序.

(二) 向量在游戏程序中的简单应用

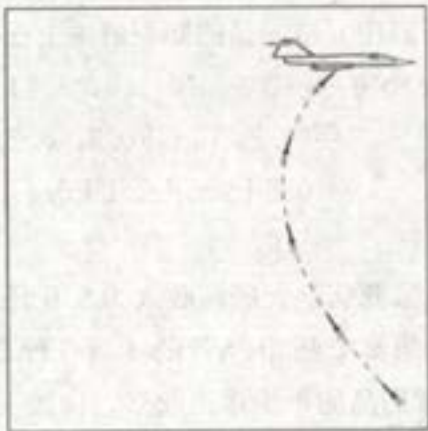
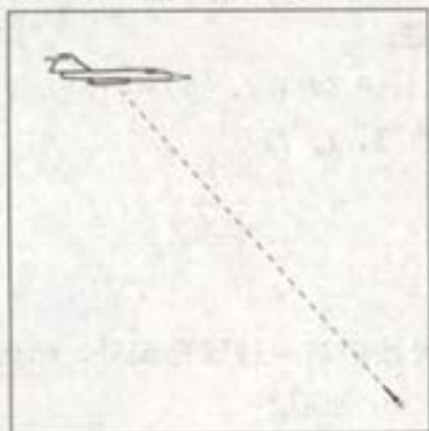
假设你正在编写一个飞行射击游戏的程序, 对付你的敌人需要一种很厉害的武器——跟踪导弹. 这种武器在行进的同时能够不断地修正自己与目标之间的位置关系, 使得指向的方向总是玩家, 而不论玩家的位置在哪里. 这对一个水平不高的玩家来说可能将是灭顶之灾, 玩家可能很诧异你会拥有这么先进的秘密武器, 但对于你来说只需要在程序循环中加入几行代码, 它们的原理就是向量的基本知识.

首先, 我们要知道玩家的位置 (x_0, y_0) , 然后, 我们的导弹就可以通过计算得到一个有初始方向的速度, 速度的方向根据玩家的位置不断修正, 它的实质是一个向量减法的计算过程. 速度的大小我们自己来设置, 它可快可



慢，视游戏的难易程度而定，它的实质就是数乘向量的过程，具体算法是

导弹的更新速度 $(v_x, v_y) = \text{玩家的位置}(x_0, y_0) - \text{导弹的位置}(x, y)$ 。
然后再对 (v_x, v_y) 进行数乘运算，做放大或缩小处理，导弹移动，判断是否能追到玩家，重新更新速度，做放大或缩小处理……

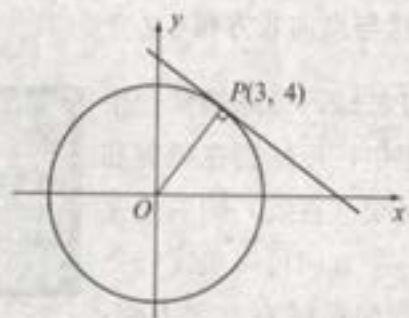


现在，你可以用这个基本算法去编写程序，使我们可以用跟踪导弹攻击玩家了。你也可以稍加修改，变为直线攻击武器，这样比较普遍。基本的跟踪效果用向量可以很好地模拟。此时，我们只用到了所述向量知识的很少的一部分，其他的知识会慢慢用到游戏中，我们还可以利用向量模拟 2D 物体任意角度反弹的效果，感兴趣的同学可以通过网络查询这类游戏的源代码或自己编写简单的游戏程序，以后有可能在著名公司的游戏设计室里面看到你工作的身影哦。

人教版®

第九章 直线与圆的方程

宇宙飞船实现了嫦娥奔月的梦想，网络技术满足了人们沟通的愿望，笛卡儿坐标系建立了代数与几何联系的桥梁。



圆是第一个最简单、最完美的图形。

——普罗克洛斯

圆圈的里面代表我现在学到的知识，圆圈的外面仍然有着无限的空白，而且随着圆愈来愈大，圆圈所接触的空白也愈来愈大。

——爱因斯坦



在初中几何中,我们以图形的基本性质为基础,通过推理证明,研究了一些几何图形的性质.在学习函数时,通过建立平面直角坐标系,使平面上的点与它的坐标一一对应,这样我们就可根据函数表达式作出函数的图象.由于函数表达式还可以看做是代数方程,因此,我们也可用代数方程来表示图形,并通过对代数方程的研究来掌握图形的几何性质.

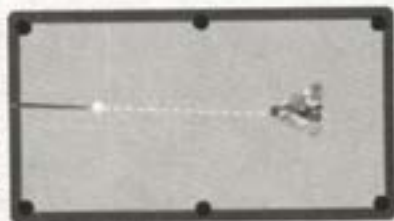
本章我们将学习直线和圆的方程的知识,领会形和数结合的思想.值得注意的是,向量是处理本章许多问题的重要工具,在学习时要予以重视.

9.1 直线的方程

问题 我们知道,在平面直角坐标系中,一次函数的图象是一条直线;那么反过来,一条确定的直线上的每个点的坐标应满足怎样的关系式呢?通过本节的学习我们将会得出答案.

9.1.1 直线的方向向量与点向式方程

打台球时,用球杆击打母球,母球通常会沿一条直线运动.在击球过程中,母球所在位置和击球方向是确定母球运动路线(直线)的两个要素,也就是说由一个点和一个方向可以确定一条直线.我们知道,一个非零向量确定一个方向,因此一个点和一个非零向量可以确定一条直线.



与一条直线平行的非零向量叫做这条直线的方向向量,通常用 v 表示.显然,一条直线的方向向量不是唯一的.事实上,如果 $v=(v_1, v_2)$ 是直线的一个方向向量,则 tv ($t \neq 0, t \in \mathbf{R}$) 也是这条直线的一个方向向量.

如图 9-1,在平面直角坐标系中,已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和非零向量 $v=(v_1, v_2)$,我们来求过点 P_0 , 并且一个方向向量为 $v=(v_1, v_2)$ 的直线 l 的方程.

设 $P(x, y)$ 是直线上任意一个点,则点 P 在直线 l 上的充分必要条件是 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 v 平行.又因为 $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0, y-y_0)$, $v=(v_1, v_2)$, 所以 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 v

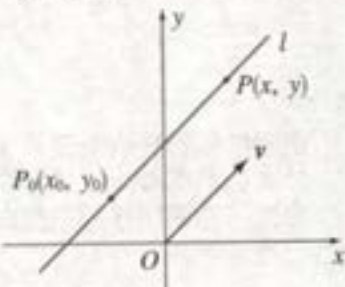


图 9-1

平行的充分必要条件是

$$v_2(x-x_0)-v_1(y-y_0)=0. \quad ①$$

特别地, 如果 $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, 则方程①还可以写成

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}. \quad ②$$

方程①和②是由直线上的一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线的方向向量 $v=(v_1, v_2)$ 确定的, 所以都叫做直线的点向式方程.

如果 $v_1=0$ (此时一定有 $v_2 \neq 0$), 则由①式得直线的方程为

$$x=x_0,$$

它表示通过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且垂直于 x 轴的直线, 如图 9-2 所示.

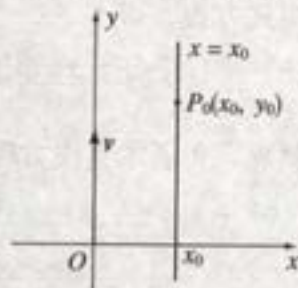


图 9-2

从推导直线 l 的方程的过程中可以看出, 在平面直角坐标系中, 直线 l 上的每个点的坐标都满足方程①; 反过来, 以方程①的解为坐标的点都在直线 l 上. 因此, 直线 l 可以用方程①表示, 今后我们把方程①也说成直线①.

例 1 求通过点 $A(1, -2)$, 且一个方向向量为 $v=(-1, 3)$ 的直线方程.

解: 根据直线的点向式方程, 得

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3},$$

整理, 得所求直线的方程为

$$3x+y-1=0.$$

例 2 求下列过点 P , 且一个方向向量为 v 的直线方程:

(1) $P(3, -2), v=(0, 2)$;

(2) $P(2, -1), v=(3, 0)$.

解: (1) 由于给定的直线的方向向量平行于 y 轴, 所以过点 $(3, -2)$ 的直线方程为

$$x=3;$$

你能写出过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且方向向量是 $v=(v_1, 0)$ (此时一定有 $v_1 \neq 0$) 的直线方程吗? 试在直角坐标系中画出过点 $(1, -2)$ 且一个方向向量为 $v=(1, 0)$ 的直线. **试一试**



(2) 由于给定的直线的方向向量平行于 x 轴, 所以过点 $(2, -1)$ 的直线方程为

$$y = -1.$$

例3 求过点 $A(-2, 1)$ 和点 $B(1, 3)$ 的直线方程.

解: 直线 AB 的一个方向向量可取为

$$\vec{AB} = (1, 3) - (-2, 1) = (3, 2),$$

又因为直线过点 $A(-2, 1)$, 根据直线的点向式方程, 得

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}.$$

整理, 得所求直线方程为

$$2x - 3y + 7 = 0.$$

在例3中方向向量取为 $\vec{BA}$, 你能得出怎样的直线方程?
试一试

练习9-1

1. 说出下列各点是否在直线 $x - y = 0$ 上:

- (1) $A(1, 1)$; (2) $B(-1, 1)$;
(3) $C(1, -1)$; (4) $D(-1, -1)$.

2. 画出下列直线, 并写出直线经过的一个点和直线的方向向量:

- (1) $x = y$; (2) $x = -y$; (3) $x = 0$;
(4) $y = 0$; (5) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{3}$; (6) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$.

3. 求过点 P , 且一个方向向量为 v 的直线方程:

- (1) $P(1, -3)$, $v = (-3, 2)$;
(2) $P(3, 0)$, $v = (-1, -2)$;
(3) $P(-2, 4)$, $v = (-3, 0)$;
(4) $P(4, -2)$, $v = (0, 1)$.

4. 求过点 A 和点 B 的直线方程:

- (1) $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$; (2) $A(2, 0)$, $B(0, 5)$.

5. 写出直线 $y = 3x + b$ 经过坐标原点的充要条件.

6. 已知 $A(3, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(a, 0)$ 三点在同一条直线上, 求 a 的值.

9.1.2 直线的斜率与点斜式方程

我们已经学习了直线的方向向量，下面我们根据直线的方向向量，给出直线斜率的定义。

如果 $v=(v_1, v_2)$ 是直线 l 的一个方向向量，且 $v_1 \neq 0$ ，那么 $\frac{v_2}{v_1}$ 就叫做直线 l 的斜率。直线的斜率通常用 k 来表示，即

$$k = \frac{v_2}{v_1} \quad (v_1 \neq 0).$$

当 $v_1 = 0$ 时，我们称直线 l 的斜率不存在，此时直线 l 与 x 轴垂直。

如果已知直线 l 的斜率 k ，那么如何求出该直线的一个方向向量呢？

如果 $v=(v_1, v_2)$ 是直线 l 的一个方向向量，而且 $v_1 \neq 0$ ，则由于向量 $\frac{1}{v_1}(v_1, v_2)$ 与向量 v 平行，因此 $(1, \frac{v_2}{v_1}) = (1, k)$ 也是直线 l 的一个方向向量。

这就是说，如果已知直线的斜率为 k ，则 $(1, k)$ 是这条直线的一个方向向量。

实际上，直线 l 的方向向量与斜率都是用来刻画直线相对于 x 轴倾斜程度的量。通常，我们还用直线的倾斜角来刻画直线相对于 x 轴的倾斜程度。

我们把一条直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角 α ，叫做直线 l 的倾斜角。如图 9-3 所示。我们规定，当直线 l 和 x 轴平行或重合时， $\alpha = 0^\circ$ 。因此，倾斜角 α 的取值范围是 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 。

当 $\alpha \neq 90^\circ$ 时，直线 l 的斜率与倾斜角的关系是

$$k = \tan \alpha \quad (\alpha \neq 90^\circ).$$

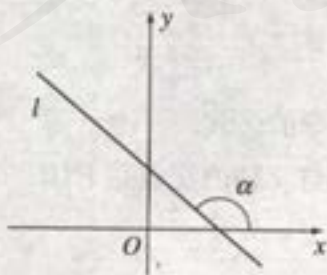


图 9-3

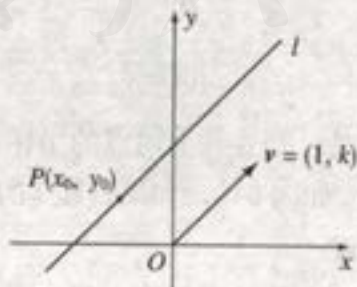


图 9-4

当直线的倾斜角 $\alpha=90^\circ$ 时, 直线的斜率不存在.

如图 9-4 所示, 已知直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$, 且斜率是 k , 如何来求直线 l 的方程呢?

因为直线 l 的斜率是 k , 所以直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{v}=(1, k)$, 由直线的点向式方程, 得

$$k(x-x_0)-1 \cdot (y-y_0)=0,$$

即直线的方程为

$$y-y_0=k(x-x_0). \quad \textcircled{1}$$

方程①是由直线 l 上一点 $P(x_0, y_0)$ 和斜率 k 确定的, 所以方程①叫做直线的点斜式方程.

例 4 如图 9-5, 已知直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2)$, 且 $x_2-x_1 \neq 0$, 求直线 l 的斜率.

解: 直线 l 的一个方向向量可取为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1),$$

根据直线斜率的定义, 得到该直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_2-x_1 \neq 0).$$

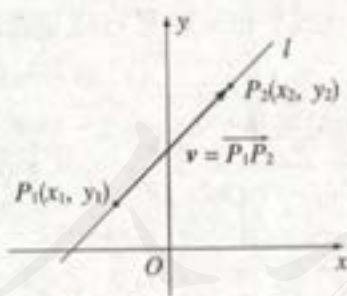


图 9-5

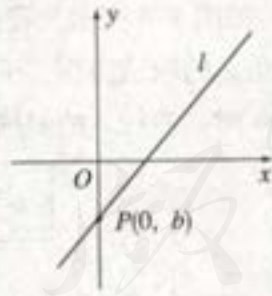


图 9-6

这就是已知直线上两点的坐标, 求直线斜率的公式.

例 5 如图 9-6, 如果直线 l 的斜率是 k , 与 y 轴的交点是 $P(0, b)$, 求直线 l 的方程.

解: 由直线的点斜式方程, 得

$$y-b=k(x-0),$$

整理, 得

$$y=kx+b,$$

②

如果直线与 y 轴的交点是 $(0, b)$, 我们称 b 为直线 l 在 y 轴上的截距, 方程②是由直线的斜率 k 和其在 y 轴上的截距 b 确定的, 所以方程②叫做直线的斜截式方程.

例 6 已知直线 l 过点 $A(1, 2)$, 且斜率为 -2 , 求直线 l 的方程.

解: 由直线的点斜式方程得

$$y-2=-2(x-1),$$

于是所求直线 l 的方程是

$$2x+y-4=0.$$

例 7 已知直线 l 的方程为 $4x+3y-6=0$, 求直线 l 的斜率和其在 y 轴上的截距.

解: 把直线 l 的方程 $4x+3y-6=0$ 化为斜截式

$$y=-\frac{4}{3}x+2,$$

所以, 直线 l 的斜率为 $-\frac{4}{3}$, 在 y 轴上的截距为 2 .

例 8 已知直线 $y=kx+b$ 过点 $A(1, 2)$ 及 $B(-3, 6)$, 求 k 和 b 的值.

解: 因为直线过点 $A(1, 2)$ 及 $B(-3, 6)$, 所以点 A, B 的坐标都应满足直线的方程 $y=kx+b$.

由此得方程组

$$\begin{cases} 2=k+b \\ 6=-3k+b \end{cases}$$

解方程组, 得

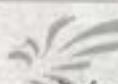
$$\begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases}$$



想一想 一次函数

$y=2x+3$ 的图象是直

线, 你能指出该直线的斜率和在 y 轴上的截距吗?



请你用直线的

点向式方程求例 6 中

直线 l 的方程.

试一试



练习9-2

1. 口答下列各题:

(1) 直线的方程为 $y = -2x + 4$, 它的斜率 $k = \underline{\hspace{2cm}}$, 它在 y 轴上的截距 $b = \underline{\hspace{2cm}}$, 它的一个方向向量 $v = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 直线的方程为 $y - 3 = x - 1$, 它的斜率 $k = \underline{\hspace{2cm}}$, 它在 y 轴上的截距 $b = \underline{\hspace{2cm}}$, 它的一个方向向量 $v = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 经过下列两点的直线的斜率是否存在? 如果存在, 求其斜率:

(1) $(1, -1), (-3, 2)$; (2) $(1, -2), (5, -2)$;

(3) $(3, 4), (3, -1)$; (4) $(3, 0), (0, \sqrt{3})$.

3. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点 $(3, 2)$, 斜率为 $\frac{2}{3}$; (2) 过点 $(-3, 2)$, 斜率为 $\sqrt{5}$.

4. 求满足下列条件的直线方程, 并在直角坐标系中画出直线:

(1) 过坐标原点, 斜率为 2;

(2) 过点 $A(0, 3)$ 和点 $B(2, 1)$;

(3) 过点 $P(2, 3)$, 平行于 y 轴;

(4) 过点 $P(-2, 1)$, 平行于 x 轴;

(5) 过点 $P(-3, 1)$, 一个方向向量为 $v = (1, 2)$;

(6) 斜率为 -2, 在 y 轴上的截距为 2.

5. 已知直线 $y - 3 = k(x - 5)$ 过点 $P(-1, -2)$, 求 k 的值.

6. 已知直线 $y = kx + b$ 过点 $A(1, 3)$ 及 $B(-5, 11)$, 求 k 和 b 的值.

9.1.3 直线的法向量与点法式方程

我们知道, 在平面内过一点, 并且与一个非零向量垂直的直线有且只有一条.

与一条直线垂直的非零向量叫做这条直线的法向量, 通常用 n 表示. 显然, 一条直线的法向量也不唯一, 同一条直线的两个法向量是相互平行 (共线) 的.

现在我们用直线上的一个点和直线的一个法向量来推导直线的方程.

如图 9-7, 已知直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$, 直线 l 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B)$, 下面我们来求直线 l 的方程.

设 $P(x, y)$ 是直线上任意一个点, 则 P 在直线 l 上的充分必要条件是

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

用坐标表示, 上述充分必要条件可写为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad \textcircled{1}$$

方程①是由直线上的一点和直线的一个法向量确定的, 因此这个方程叫做直线的点法式方程.

另外, 如果设 $\boldsymbol{v}=(B, -A)$, 则

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = A \times B + B \times (-A) = 0,$$

所以 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}$. 这就是说, 如果 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 是直线 l 的一个法向量, 则向量 $\boldsymbol{v}=(B, -A)$ 就是直线 l 的一个方向向量 (如图 9-7).

例 9 求过点 $P(1, 2)$, 且一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3, 4)$ 的直线方程.

解: 由直线的点法式方程, 得

$$3(x-1)+4(y-2)=0,$$

整理, 得所求直线方程为

$$3x+4y-11=0.$$

练习 9-3

1. (口答) 已知直线的一个法向量 $\boldsymbol{n}$, 求它的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$:

(1) $\boldsymbol{n}=(3, 5)$; (2) $\boldsymbol{n}=(-3, -5)$;

(3) $\boldsymbol{n}=(-3, 0)$; (4) $\boldsymbol{n}=(0, 5)$.

2. (口答) 已知直线的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$, 求它的一个法向量 $\boldsymbol{n}$:

(1) $\boldsymbol{v}=(7, 2)$; (2) $\boldsymbol{v}=(-7, -2)$;

(3) $\boldsymbol{v}=(-7, 0)$; (4) $\boldsymbol{v}=(0, 2)$.

3. 口答下列各题:

(1) 直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(2, 2)$, 则它的斜率 $k=$ _____, 它

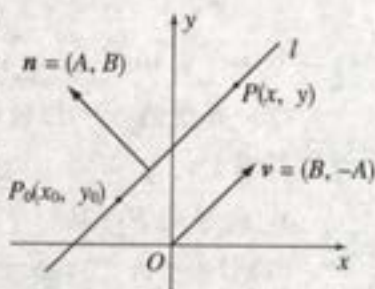


图 9-7

的一个法向量 $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 直线的一个法向量为 $n = (1, 1)$, 则它的一个方向向量 $v = \underline{\hspace{2cm}}$, 它的斜率 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 求过点 P , 且一个法向量为 n 的直线方程:

(1) $P(-1, 2)$, $n = (3, 4)$; (2) $P(-1, -2)$, $n = (3, -4)$;

(3) $P(0, -2)$, $n = (-3, -4)$; (4) $P(-1, 0)$, $n = (-3, 4)$;

(5) $P(2, -1)$, $n = (1, 0)$; (6) $P(-2, 1)$, $n = (0, -3)$.

5. 已知点 $A(-3, 2)$, $B(1, -4)$, 求线段 AB 的垂直平分线的方程.

6. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 2)$, 求 BC 边上的高所在的直线方程.

9.1.4 直线的一般式方程

前面, 我们学习了直线方程的几种特殊形式, 它们都是二元一次方程. 下面我们来研究直线与二元一次方程之间的关系.

首先, 任何一条直线都可以由其上的一点和它的一个法向量写出它的点法式方程. 我们知道, 直线的点法式方程是一个二元一次方程, 因此可以说, 每一条直线的方程都是一个关于 x, y 的二元一次方程. 那么, 是否每一个二元一次方程的图象都是直线呢?

若关于 x, y 的二元一次方程为

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ 不全为零}), \quad \textcircled{1}$$

设 (x_0, y_0) 是此方程的一个解, 即

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \quad \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad \textcircled{3}$$

在直角坐标系中, 这是一条过点 $P_0(x_0, y_0)$, 以 $n = (A, B)$ 为一个法向量的直线的点法式方程. 又因为方程 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{3}$ 是同解方程. 因此, 我们可以得到以下结论.

任何关于 x, y 的二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零), 在平面直角坐标系中, 都对应唯一的直线.

综上所述，在平面直角坐标系中，二元一次方程与直线之间可以建立一一对应关系，这样，我们就可把研究直线的几何问题转化为研究二元一次方程的代数问题。

我们把方程

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ 不全为零})$$

叫做直线的一般式方程。

由于二元一次方程与直线之间有一一对应关系，因此我们常说“直线 $Ax + By + C = 0$ ”。

根据前面的知识，我们还可以得到下面的结论。

向量 $\mathbf{n} = (A, B)$ 为直线 $Ax + By + C = 0$ 的一个法向量，向量 $\mathbf{v} = (B, -A)$ 和 $(-B, A)$ 都是这条直线的一个方向向量。

例 10 写出下列直线的一个法向量和一个方向向量：

(1) $3x - 4y - 1 = 0$; (2) $2x - 3 = 0$; (3) $3y - 2 = 0$.

解：(1) 直线的一个法向量 $\mathbf{n} = (3, -4)$ ，一个方向向量 $\mathbf{v} = (-4, -3)$ ；

(2) 直线的一个法向量 $\mathbf{n} = (2, 0)$ ，一个方向向量 $\mathbf{v} = (0, 2)$ ；

(3) 直线的一个法向量 $\mathbf{n} = (0, 3)$ ，一个方向向量 $\mathbf{v} = (3, 0)$ 。

例 11 求直线 $x + 2y + 6 = 0$ 的斜率和在 y 轴上的截距。

解：由方程 $x + 2y + 6 = 0$ 解出 y ，得此直线的斜截式方程

$$y = -\frac{1}{2}x - 3.$$

所以，直线的斜率是 $-\frac{1}{2}$ ，在 y 轴上的截距是 -3 。

例 12 求直线 $l: 4x - 3y - 12 = 0$ 与 x 轴， y 轴的交点坐标，并画出直线 l 。

解：在已知直线方程中，令 $y = 0$ ，得 $x = 3$ ；
令 $x = 0$ ，得 $y = -4$ 。

所以，直线 l 与 x 轴， y 轴的交点分别为

$$A(3, 0), B(0, -4).$$

过点 A, B 的直线就是直线 l ，如图 9-8 所示。

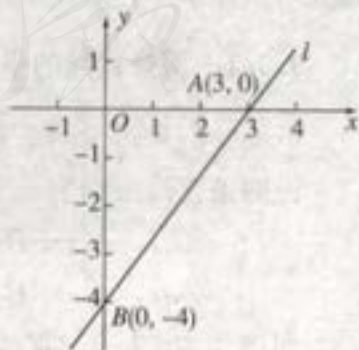


图 9-8



练习9-4

1. 求下列直线的一个法向量、一个方向向量和斜率 k (如果斜率存在的话):

(1) $x-3y+5=0$;

(2) $y=3x+7$;

(3) $2x+5=0$;

(4) $4y+1=0$.

2. 求下列直线的斜率和在 y 轴上的截距:

(1) $7x+8y+9=0$;

(2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$.

3. 根据下列条件写出直线的一般式方程:

(1) 过点 $(2, -3)$, 一个方向向量是 $v=(-3, 4)$;

(2) 过点 $(3, 2)$, 一个法向量是 $n=(3, -4)$;

(3) 过点 $(1, 4)$, 斜率 $k=-\frac{1}{4}$;

(4) 过点 $(2, 3)$, 平行于 x 轴;

(5) 过点 $(-2, -3)$, 平行于 y 轴.

4. 求下列直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标, 并画出直线:

(1) $2x-3y+6=0$;

(2) $4x-5y-20=0$.

9.2 两条直线的位置关系

问题 平面上两条直线的位置关系有平行、重合与相交三种情况. 在平面直角坐标系中, 怎样根据两条直线的方程判断这两条直线的位置关系呢?

9.2.1 两条直线的平行

下面我们来讨论两条直线平行的充要条件.

设两条直线分别为

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如图9-9所示, 直线 l_1 的一个法向量可取为 $n_1=(A_1, B_1)$, 直线 l_2 的一个法向量可取为

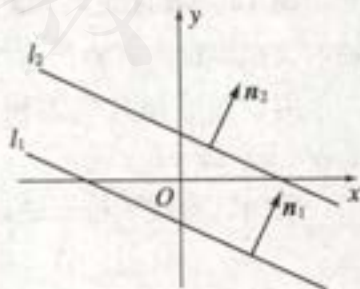


图9-9

$$n_2 = (A_2, B_2).$$

因此如果 $l_1 // l_2$, 则 $n_1 // n_2$, 即存在一个非零实数 λ , 使 $n_1 = \lambda n_2$, 而且此时 $C_1 \neq \lambda C_2$; 反之, 若存在一个非零实数 λ , 使得 $n_1 = \lambda n_2$, 并且 $C_1 \neq \lambda C_2$, 则 $l_1 // l_2$. 所以我们有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \text{存在一个非零实数 } \lambda, \text{ 使 } n_1 = \lambda n_2, \text{ 且 } C_1 \neq \lambda C_2.$$

上述结论也可用直线方程的系数表示为

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \\ C_1 \neq \lambda C_2 \end{cases} \quad (\lambda \text{ 为非零实数})$$

特别地, 如果 l_1 与 l_2 的方程中的 x 和 y 的系数及常数项都不为零, 则有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$



想一想 在以上的关系式中, 其中的“ $\neq$ ”号均换为“ $=$ ”号, l_1 与 l_2 的位置关系会是怎样的呢?

例 1 已知直线 $l_1: 2x - 4y + 7 = 0$, $l_2: x - 2y + 5 = 0$. 求证 $l_1 // l_2$.

证明: 显然, 直线 l_1 的一个法向量可取为 $n_1 = (2, -4)$, l_2 的一个法向量可取为 $n_2 = (1, -2)$.

因为

$$n_1 = 2n_2, \text{ 且 } 7 \neq 2 \times 5,$$

所以

$$l_1 // l_2.$$

例 2 求证直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与直线 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ ($C_1 \neq C_2$) 平行.

证明: 直线 l_1 的一个法向量可取为 $n_1 = (A, B)$, l_2 的一个法向量可取为 $n_2 = (A, B)$.

显然,

$$n_1 = n_2, \text{ 且 } C_1 \neq C_2,$$

所以 l_1 与 l_2 平行.

一般地, 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线都可以表示成

$$Ax + By + D = 0 \quad (D \neq C).$$



例3 求过点 $(1, -4)$ ，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程。

解：设所求直线方程为

$$2x+3y+D=0,$$

由于所求直线过点 $(1, -4)$ ，将其代入方程，得

$$D=10,$$

因此，所求直线方程为

$$2x+3y+10=0.$$

你能用其他的方法求出例3中直线的方程吗？
试一试 

例4 已知四边形 $ABCD$ 的四条边所在的直线方程分别是

$$AB: 2x-3y-7=0;$$

$$BC: 3x+6y-11=0;$$

$$CD: 4x-6y+5=0;$$

$$DA: x+2y-4=0.$$

求证四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

证明：因为直线 AB 的一个法向量可取为

$$\mathbf{n}_{AB}=(2, -3),$$

直线 CD 的一个法向量可取为

$$\mathbf{n}_{CD}=(4, -6),$$

显然

$$\mathbf{n}_{AB}=\frac{1}{2}\mathbf{n}_{CD}, \text{ 且 } -7 \neq \frac{1}{2} \times 5,$$

所以 $AB \parallel CD$ 。

又因为直线 BC 的一个法向量可取为

$$\mathbf{n}_{BC}=(3, 6),$$

直线 DA 的一个法向量可取为

$$\mathbf{n}_{DA}=(1, 2).$$

因为

$$\mathbf{n}_{BC}=3\mathbf{n}_{DA}, \text{ 且 } -11 \neq 3 \times (-4),$$

所以 $BC \parallel DA$ 。

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

练习9-5

1. 判断下列各对直线是否平行:

(1) $l_1: 2x-4y-7=0$, $l_2: x-2y+5=0$;

(2) $l_1: x+2y-4=0$, $l_2: 2x+4y-8=0$;

(3) $l_1: 2x+y-9=0$, $l_2: 2x-y+5=0$;

(4) $l_1: 3x-7=0$, $l_2: 2x=5$.

2. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点(2, 3), 且与直线 $2x+y-5=0$ 平行;

(2) 过点(5, 0), 且与直线 $2x-3y-7=0$ 平行.

3. 已知直线 $ax+y-1=0$ 与 $2x-4y-1=0$ 平行, 求 a 的值.

9.2.2 两条直线的交点与垂直

我们知道, $n_1=(A_1, B_1)$ 是直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 的一个法向量, $n_2=(A_2, B_2)$ 是直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的一个法向量. 因此, 若 n_1 与 n_2 不平行, 即 $A_1B_2 \neq A_2B_1$, 那么直线 l_1 与 l_2 相交; 反之亦然. 于是我们有

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1.$$

如果直线 l_1 与 l_2 相交, 由于交点同时在这两条直线上, 因此交点的坐标一定是这两个方程组成的方程组的解; 反过来, 如果这两个方程组成的方程组只有唯一的公共解, 那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 与 l_2 的交点. 因此, 求两条直线 l_1 与 l_2 的交点, 就是要解由这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

这个方程组的解就是两条直线的交点的坐标.

例5 已知两条直线的方程 $l_1: 2x-y-5=0$, $l_2: x-3y-10=0$, 判断这两条直线是否相交. 如果相交, 求出交点的坐标.

解: 显然, 直线 l_1 的一个法向量可取为 $n_1=(2, -1)$, l_2 的一个法向量可取为 $n_2=(1, -3)$.



因为

$$2 \times (-3) \neq (-1) \times 1,$$

所以直线 l_1 与 l_2 相交.

解方程组

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - 10 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

所以直线 l_1 与 l_2 交点的坐标为 $(1, -3)$.

例 6 求过两条直线 $x - y - 1 = 0$ 和 $x + y - 3 = 0$ 的交点, 且与 $2x - y = 0$ 平行的直线方程.

解: 解方程组

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

因此, 所求直线过点 $(2, 1)$.

设所求直线的方程为

$$2x - y + D = 0,$$

因为该直线过点 $(2, 1)$, 将其代入方程, 得

$$D = -3.$$

所以, 所求直线方程为

$$2x - y - 3 = 0.$$

下面讨论两直线垂直的问题.

直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 的一个法向量可取为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$, 直线 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的一个法向量可取为 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2)$, 如图 9-10 所示.

因为

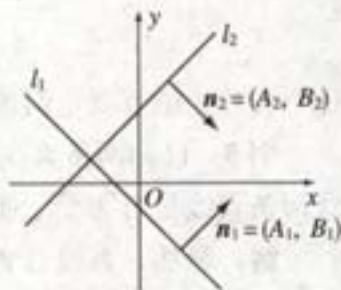


图 9-10

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0,$$

又因为

$$n_1 \cdot n_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2,$$

所以

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

例 7 判断下列各对直线是否垂直:

(1) $2x - 4y - 7 = 0$ 与 $2x + y - 5 = 0$;

(2) $2x = 7$ 与 $3y - 5 = 0$.

解: (1) 因为法向量分别可取为 $n_1 = (2, -4)$, $n_2 = (2, 1)$. 而且

$$n_1 \cdot n_2 = 2 \times 2 + (-4) \times 1 = 0,$$

所以这两条直线垂直;

(2) 因为法向量分别可取为 $n_1 = (2, 0)$, $n_2 = (0, 3)$. 而且

$$n_1 \cdot n_2 = 2 \times 0 + 0 \times 3 = 0,$$

所以这两条直线垂直.

例 8 求证直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与直线 $Bx - Ay + C_2 = 0$ 垂直.

证明: 因为法向量分别可取为 $n_1 = (A, B)$, $n_2 = (B, -A)$. 而且

$$n_1 \cdot n_2 = AB + B(-A) = 0,$$

所以这两条直线垂直.

一般地, 与直线 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线都可以表示为

$$Bx - Ay + D = 0.$$

例 9 求过点 $(1, 2)$, 且与直线 $2x + y - 10 = 0$ 垂直的直线方程.

解: 设所求直线为 $x - 2y + D = 0$, 因为直线过点 $(1, 2)$, 将其代入方程, 得

$$1 - 2 \times 2 + D = 0,$$

解这个方程, 得

$$D = 3,$$

所以, 所求直线方程为

$$x - 2y + 3 = 0.$$

你会用点向式
方程来求例 9 中直
线的方程吗?

试一试



练习9-6

1. 判断下列各对直线是否相交, 如果相交, 求出它们交点的坐标:

(1) $7x - y + 4 = 0$, $2x + y + 5 = 0$;

(2) $2x - y - 3 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$;

(3) $6x - 4y - 7 = 0$, $3x - 2y - 8 = 0$.

2. 判断下列各对直线是否垂直:

(1) $x + 4y - 5 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$;

(2) $y = x$, $2x + 2y - 7 = 0$;

(3) $x = 3$, $y = 2$;

(4) $2x - y = 0$, $x - 2y = 0$.

3. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点 $(2, 3)$, 且与直线 $x - y - 2 = 0$ 垂直;

(2) 过点 $(3, -5)$, 且与直线 $x + y = 0$ 垂直.

4. 已知直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与 $2x - 3y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.

5. 已知 A, B 两点, 求线段 AB 的垂直平分线的方程:

(1) $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$; (2) $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$.

6. 求过两条直线 $x - y - 1 = 0$ 和 $3x - y - 4 = 0$ 的交点, 且与 $x - y = 0$ 垂直的直线方程.

9.3 点到直线的距离

问题 如图, 某人(点)要走到前方的公路上(直线), 选择怎样的路线才能使走的路程最短?

这个最短的路程就是这个人(点)到公路(直线)的距离. 因此, 这个问题可以转化为如何求出给定点到给定直线的距离的问题.



已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$, 下面我们来求点 P_0 到直

线 l 的距离 d .

如图 9-11, 过点 P_0 作直线 l 的垂线, 垂足为 $P_1(x_1, y_1)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1),$$

$|\overrightarrow{P_1P_0}|$ 即为点 P_0 到直线 l 的距离 d . 又因为 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与直线 l 的一个法向量 $\mathbf{n} = (A, B)$ 平行, 所以 $\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \mathbf{n} \rangle = 0^\circ$ 或 180° , 从而

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n}| &= |\overrightarrow{P_1P_0}| |\mathbf{n}| |\cos \langle \overrightarrow{P_1P_0}, \mathbf{n} \rangle| \\ &= d |\mathbf{n}|. \end{aligned}$$

图 9-11

因此

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

由于 $P_1(x_1, y_1)$ 是直线 l 上一个点, 所以

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

从而得

$$C = -(Ax_1 + By_1),$$

因此

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

这就是点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式.

例 1 求点 $P(-1, 2)$ 分别到直线: (1) $2x + y = 5$; (2) $x = 2$ 的距离 d_1 和 d_2 .

解: (1) 将直线方程化为一般式: $2x + y - 5 = 0$, 由点到直线的距离公式, 得



$$d_1 = \frac{|2 \times (-1) + 1 \times 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5};$$

(2) 将直线方程化为一般式: $x - 2 = 0$,
从而有

$$d_2 = \frac{|1 \times (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3.$$

观察图 9-12,
你能找出计算 d_2 的
其他方法吗? 试一试

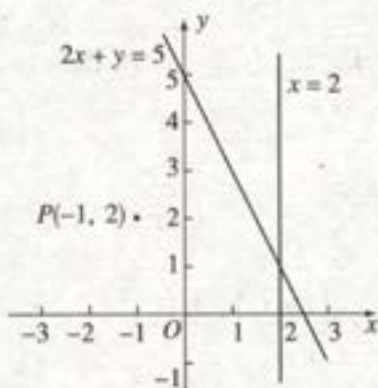


图 9-12

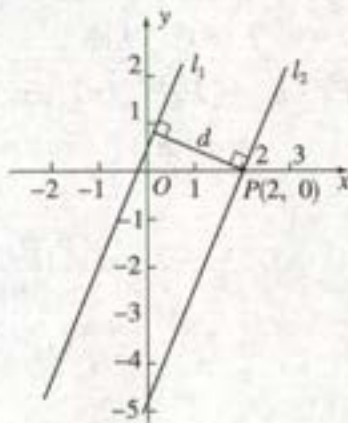


图 9-13

例 2 求两条平行直线 $l_1: 12x - 5y + 2 = 0$ 和 $l_2: 12x - 5y - 24 = 0$ 之间的距离.

解: 如图 9-13, 在直线 l_2 上取一点 $P(2, 0)$, 于是点 P 到 l_1 的距离就是 l_1 与 l_2 之间的距离.

因此, 由点到直线的距离公式, 得

$$d = \frac{|12 \times 2 + 2|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2,$$

即平行线 l_1 与 l_2 之间的距离是 2.

练习 9-7

1. (口答) 求下列给定的点到给定直线的距离:

(1) $A(3, 5)$, $y = 10$; (2) $A(3, 5)$, $y = -10$;

(3) $A(5, 2)$, $x = 10$; (4) $A(5, 3)$, $x = -10$.

2. 求下列给定点到给定直线的距离:

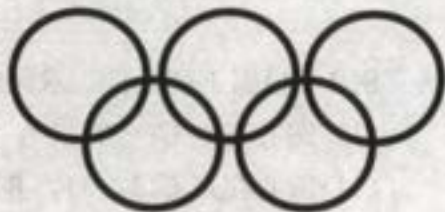
(1) $O(0, 0)$, $3x+4y-5=0$; (2) $A(2, -3)$, $x+y-1=0$;

(3) $B(1, 0)$, $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$; (4) $C(1, 2)$, $3x+y=0$.

3. 求两条平行线 $2x+3y-8=0$ 和 $2x+3y+18=0$ 之间的距离.4. 求两条平行线 $x-3y-2=0$ 和 $2x-6y-7=0$ 之间的距离.

9.4 圆的方程

问题 圆是生活中常见的图形, 如奥运五环就是由五个圆组成的. 圆是由圆心和半径两个要素确定的. 在平面直角坐标系中, 怎样来求一个圆的方程呢?



9.4.1 圆的标准方程

我们知道, 平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹是圆. 定点是圆心, 定长就是圆的半径.

现在, 我们来求以点 $C(a, b)$ 为圆心, r ($r>0$) 为半径的圆的方程.

如图 9-14, 设 $M(x, y)$ 是圆上任意一点, 则点 M 在该圆上的充要条件是 $|CM|=r$.

由两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

两边平方, 得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

①

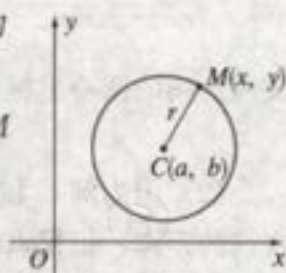


图 9-14

根据前面的推导过程可知, 该圆上的点与方程①的解 (x, y) 之间具有一一对应关系, 即该圆上的每一个点的坐标 (x, y) 都是方程①的解; 反过来, 以方程①的解 (x, y) 为坐标的点都在这个圆上, 所以方程①就是该圆的方程, 称为圆的标准方程.

例如, 以 $C(1, -2)$ 为圆心, 半径为 5 的圆的方程是

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

点 $P_1(5, 1)$ 的坐标是方程的解, 因此, 点 P_1 在该圆上;

点 $P_2(1, 2)$ 的坐标不是方程的解, 因此, 点 P_2 不在该圆上.

如图 9-15, 如果圆心在坐标原点, 这时 $a=0, b=0$, 圆的标准方程就是

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

例如, 圆心在坐标原点, 半径为 5 的圆的标准方程是

$$x^2 + y^2 = 25.$$

例 1 根据下列条件, 求圆的标准方程:

- (1) 圆心在点 $C(-2, 1)$, 并且过点 $A(2, -2)$;
- (2) 圆心在点 $C(1, 3)$, 并与直线 $3x-4y-6=0$ 相切;
- (3) 过点 $A(2, 3), B(4, 9)$, 且以线段 AB 为直径.

分析: 圆心和半径是圆的两要素, 只要确定圆心坐标和半径就可写出圆的方程.

解: (1) 所求圆的半径

$$r = |CA| = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-1)^2} = 5,$$

又因为圆的圆心坐标为 $(-2, 1)$, 所以所求圆的标准方程为

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25;$$

(2) 因为圆 C 和直线 $3x-4y-6=0$ 相切, 所以半径 r 等于圆心 C 到这条直线的距离, 根据点到直线的距离公式, 得

$$r = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3,$$

因此, 所求圆的方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9;$$

(3) 设圆心 C 的坐标为 (a, b) , 则

$$a = \frac{2+4}{2} = 3, \quad b = \frac{3+9}{2} = 6,$$

所以圆心 C 的坐标是 $(3, 6)$.

所求圆的半径

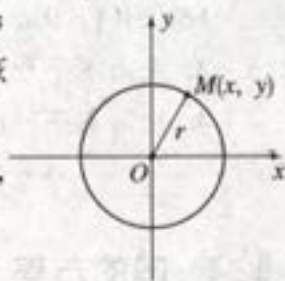


图 9-15

$$r = \frac{1}{2}|AB|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{10}.$$

因此, 所求圆的方程为

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10.$$

例 2 求过点 $A(0, 1)$, $B(2, 1)$ 且半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程.

解: 设圆心坐标为 (a, b) , 则圆的方程应该为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 5.$$

依题意, 得

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = 5 \\ (2-a)^2 + (1-b)^2 = 5 \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

因此, 所求圆的方程为

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{ 或 } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

例 3 已知圆的方程是 $x^2 + y^2 = 25$, 求经过圆上一点 $P(3, 4)$ 的圆的切线方程.

解: 如图 9-16, $\overrightarrow{OP} = (3, 4)$ 是切线的一个法向量, 由直线的点法式方程, 得

$$3(x-3) + 4(y-4) = 0.$$

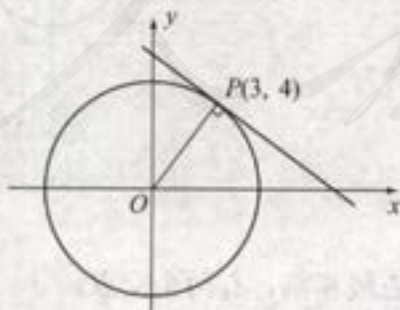


图 9-16

因此, 所求切线的方程为



想一想 你还能用
其他的方法解例

2 吗?



想一想 若例 3 中
圆的方程为 $x^2 + y^2 =$
 r^2 , 圆上的切点改为
 $P(x_0, y_0)$, 这时, 切线
方程是什么?

$$3x+4y-25=0.$$

例4 已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$, 直线方程为 $y=x+b$, 当 b 为何值时, 圆与直线有两个交点? 只有一个交点? 没有交点?

解法一: 解由这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & \text{①} \\ y=x+b & \text{②} \end{cases}$$

将②代入①, 整理得

$$2x^2+2bx+b^2-2=0, \quad \text{③}$$

方程③是一个关于 x 的二次方程, 它的判别式为

$$\begin{aligned} \Delta &= (2b)^2 - 4 \times 2(b^2 - 2) \\ &= -4b^2 + 16 \\ &= -4(b^2 - 4) \\ &= -4(b+2)(b-2). \end{aligned}$$

因此, 当 $-2 < b < 2$ 时, $\Delta > 0$, 方程组有两组不同实数解, 此时, 直线与圆有两个交点;

当 $b=2$ 或 $b=-2$ 时, $\Delta=0$, 方程组有两组相同的实数解, 此时, 直线与圆只有一个交点;

当 $b < -2$ 或 $b > 2$ 时, $\Delta < 0$, 方程组没有实数解, 此时, 直线与圆没有交点.

以上就是直线与圆相割、相切、相离的三种情况,

如图 9-17 所示.

解法二: 圆与直线有两个交点、只有一个交点、无交点的问题, 可以转化为圆心到直线的距离小于半径、等于半径、大于半径的问题.

圆心 $O(0, 0)$ 到直线 $y=x+b$ 的距离为

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{2}},$$

圆的半径 $r = \sqrt{2}$.

因此, 当 $-2 < b < 2$ 时, $d < r$, 圆与直线相割, 有两个交点;

当 $b=2$ 或 $b=-2$ 时, $d=r$, 圆与直线相切, 只有一个交点;

当 $b < -2$ 或 $b > 2$ 时, $d > r$, 圆与直线相离, 圆与直线无交点.

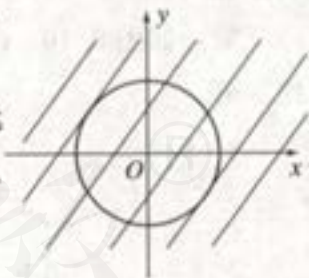


图 9-17

练习9-8

1. 写出满足下列条件的圆的标准方程:

(1) 圆心为坐标原点, 半径为 $\frac{1}{2}$;

(2) 圆心为点 $(-2, 1)$, 半径为 $\sqrt{7}$;

(3) 圆心为点 $(2, 0)$, 半径为 $\sqrt{5}$;

(4) 圆心为点 $(0, 1)$, 半径为 4.

2. 写出下列圆的圆心和半径:

(1) $x^2 + y^2 = 5$;

(2) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$;

(3) $x^2 + (y+1)^2 = 2$;

(4) $(x-1)^2 + y^2 = 3$.

3. 求满足下列条件的圆的方程:

(1) 圆心为 $(0, 3)$, 过点 $(3, 1)$;

(2) 圆心为坐标原点, 且与直线 $4x+2y-1=0$ 相切;

(3) 过点 $A(-3, 2)$, $B(9, -4)$, 且以线段 AB 为直径;

(4) 过点 $(0, 1)$ 和 $(0, 3)$, 半径等于 1.

4. 求过圆 $x^2 + y^2 = 10$ 上一点 $P(2, \sqrt{6})$ 的圆的切线方程.

5. 圆 $x^2 + y^2 = 13$ 与直线 $x - y - 1 = 0$ 是否相交? 如果相交, 求交点.

6. C 为何值时, 直线 $x - y - C = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 有两个交点? 一个交点? 无交点?

9.4.2 圆的一般方程

把圆的标准方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

展开, 得

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

由此可见, 任何一个圆的方程都可以写成下面的形式

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

①

现在我们来研究形如①的方程所表示的曲线是不是一定表示的是圆.

将①的左边配方, 得



$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \quad (2)$$

(1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 将方程②与圆的标准方程比较, 可以看出方程①表示的是以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, 以 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 为半径的圆;

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程①只有一个实数解

$$x = -\frac{D}{2}, y = -\frac{E}{2},$$

所以方程①表示的是一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$;

(3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程①没有实数解, 因而它不表示任何图形.

因此, 只有当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 方程①才表示一个圆, 这时方程①叫做圆的一般方程.

圆的一般方程有以下特点:

(1) x^2 和 y^2 的系数相同且不等于 0;

(2) 没有 xy 这样的二次项.

以上两点是二元二次方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

表示圆的必要条件, 但不是充分条件.

从圆的一般方程可以看出, 要求出圆的一般方程, 只要求出它的三个系数 D, E, F 就可以了.

例 5 将下列圆的方程化为标准方程, 并写出圆的圆心的坐标和半径:

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$; (2) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 15 = 0$.

解: (1) 对方程左边配方, 得

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25,$$

所以, 圆心的坐标为 $(-2, 3)$, 半径为 5;

(2) 方程两边同除以 4, 得

$$x^2 + y^2 - 2x + y - \frac{15}{4} = 0,$$

对方程左边配方, 得

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 5,$$

所以,圆心的坐标为 $(1, -\frac{1}{2})$, 半径为 $\sqrt{5}$.

例 6 求过 $A(0, 5)$, $B(1, -2)$, $C(-3, -4)$ 三点的圆的方程.

解: 设所求圆的方程为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

下面根据所给条件来确定 D , E , F 的值.

因为点 A , B , C 都在圆上, 所以它们的坐标都是此方程的解, 把它们的坐标依次代入上面的方程, 得到关于 D , E , F 的三元一次方程组

$$\begin{cases} 5E + F + 25 = 0 \\ D - 2E + F + 5 = 0 \\ 3D + 4E - F - 25 = 0 \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$D = 6, E = -2, F = -15.$$

于是, 所求圆的方程为

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0.$$

一般地, 在求一条曲线的方程时, 如果知道这个曲线方程的一般形式, 可先把方程的一般形式写出来, 其中系数待定, 然后再根据题设条件求出这些系数. 这种通过求待定系数来确定变量之间关系的方法叫做待定系数法.



第一招 对于例 6,
如何先求出圆心和
半径后再求圆的方
程?

练习 9.9

1. 将下列圆的方程化为标准方程, 并写出圆心的坐标和半径:

- (1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$; (2) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$;
(3) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$; (4) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 5 = 0$.

2. 下列方程表示的是什么图形? 如果是圆, 写出圆心的坐标和半径:

- (1) $x^2 + y^2 = 0$; (2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$.

3. 求经过三点 $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(-4, 0)$ 的圆的方程.

4. 判断圆 $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ 与直线 $4x - 3y + 6 = 0$ 的位置关系.

习题九

1. 写出下列直线的方程, 并化为一般形式:

(1) 过点 $(1, 2)$, 方向向量 $\mathbf{v}=(-2, 3)$;(2) 过点 $(-5, 3)$, 法向量 $\mathbf{n}=(-3, 2)$;(3) 斜率是 $\frac{1}{2}$, 经过点 $(8, -2)$;(4) 过点 $(-1, -2)$ 和 $(3, 5)$;(5) 过点 $(1, 4)$, 平行于 x 轴;(6) 过点 $(-2, 1)$, 平行于 y 轴.

2. 写出下列直线的一个方向向量、一个法向量和它的斜率 (如果斜率存在的话):

(1) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-4}$; (2) $y = -\frac{1}{2}x + 1$;(3) $3x - 2y + 5 = 0$; (4) 过点 $A(-1, 0)$, $B(-5, 4)$ 的直线;(5) $y = 7$.3. 求下列直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标, 并画出直线的图象:(1) $2x - 3y + 4 = 0$; (2) $6x + y - 12 = 0$;(3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$; (4) $y = \frac{1}{2}x$.

4. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 经过点 $(1, -3)$, 且与直线 $2x + y - 5 = 0$ 垂直;(2) 经过点 $(2, -3)$, 且与直线 $4x + y - 2 = 0$ 平行.

5. 判断下列各对直线是否平行、垂直或重合:

(1) $3x - 4y - 7 = 0$, $12x - 16y - 7 = 0$;(2) $2x + 3y - 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$;(3) $2x - 3y - 4 = 0$, $4x - 6y - 8 = 0$;(4) $2x - y - 6 = 0$, $2x - y - 7 = 0$.

6. 求下列两条直线的交点坐标:

(1) $x + y - 7 = 0$, $x - y + 5 = 0$;(2) $x + 3y - 6 = 0$, $x - 3y + 8 = 0$.

7. 求点到直线的距离:

(1) $A(2, 3), 2x - y - 4 = 0$; (2) $B(1, -2), 2x + 5y = 0$;

(3) $C(-1, 4), x - 2 = 0$; (4) $D(1, -2), 2y + 3 = 0$.

8. 求平行线 $3x + 4y - 10 = 0$ 和 $6x + 8y - 7 = 0$ 之间的距离.9. 已知直线 $ax + 2y + 8 = 0, 4x + 3y - 10 = 0, 2x - y - 10 = 0$ 相交于一点, 求 a 的值.

10. 求出满足下列条件的圆的方程:

(1) 圆心为 $C(-2, 1)$, 且经过点 $P(4, -1)$;(2) 已知点 $A(-2, 4), B(8, -2)$, 且 AB 为圆的直径;(3) 圆心为 $C(3, -5)$, 且与直线 $x - 7y + 2 = 0$ 相切.11. 求过点 $A(1, 1), B(-3, 5)$, 且圆心在 y 轴上的圆的方程.12. 求过点 $A(6, 0), B(5, -3), C(3, 1)$ 的圆的方程.13. 已知直线 $x + 5y + C = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相切, 求 C 的值.14. 求过圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一点 $(-1, \sqrt{3})$ 的圆的切线方程.

15. 判断直线与圆的位置关系:

(1) 直线: $2x - y + 5 = 0$, 圆: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$;(2) 直线: $4x - 3y + 6 = 0$, 圆: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

阅读与实践

(一) 近代科学的始祖——笛卡儿

笛卡儿 (Descartes, 1596—1650), 法国伟大的数学家、哲学家和物理学家. 1596 年 3 月 31 日出生在法国图伦的一个贵族家庭, 自幼丧母, 体弱多病. 他的父亲曾希望笛卡儿将来能够成为一名神学家, 于是在笛卡儿 8 岁时, 便将他送入拉夫勒希的耶稣会学校接受古典教育. 他废寝忘食地阅读了大量的数学和哲学书籍. 书中的知识启发了年少的笛卡儿, 引起了他对经院哲学的怀疑, 激发了他研究哲学和自然科学的兴趣, 从而决定了他的人生道路. 他说: “除了我能够在我自己或者‘世界这本大书’里找到的科学之外, 我绝不寻求别的科学……我决定研究我自己并竭尽全部精力来选择一条我应该遵循的道路.”



1612年笛卡儿进入普瓦界大学读书，四年后获得博士学位。随后为实现少年时的梦想，他便背离家庭的职业传统，开始探索人生之路。他投笔从戎，想借机游历欧洲，开阔眼界。他随部队进入了荷兰南部的小城市布勒达。一次，笛卡儿在街上散步，偶然间看到了一张数学题悬赏征解的启事。两天后，笛卡儿竟然把那个问题解答出来了，引起了著名学者皮克曼的注意。皮克曼向笛卡儿介绍了当时数学的最新发展，给了他许多有待研究的问题。与皮克曼的交往，使笛卡儿对自己的数学和科学能力有了较充分的认识，他开始认真探寻是否存在一种类似于数学的、具有普遍适用性的方法，以期获取真正的知识。

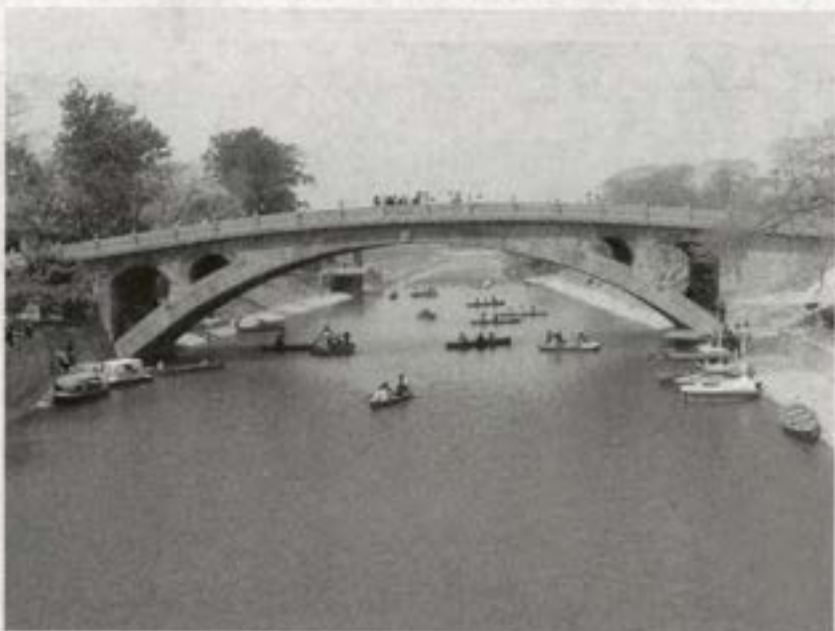
当时，代数还是一门比较新的科学，几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位。笛卡儿不断地思考如何把这两门学科有机地结合起来，他曾说：“我想去寻求一种新的，包含这两门学科的好处，而又没有它们缺点的方法。”传说，笛卡儿躺在床上看到虫子在天花板方格内爬行，产生了灵感，思想中产生了坐标的雏形。

1637年，笛卡儿发表了《几何学》，创立了平面直角坐标系。他用平面上的一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述平面上的点。他进而又创立了解析几何学，表明了几何问题不仅可以归结成为代数问题，而且可以通过代数变换来发现几何性质，证明几何性质。解析几何的出现，改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向，把相互对立着的“数”与“形”统一了起来，使几何曲线与代数方程相结合。笛卡儿的这一个天才创见，更为微积分的创立奠定了基础，从而开拓了变量数学的广阔领域。正如恩格斯所说的：“数学中的转折点就是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了。”恩格斯在他的著作《自然辩证法》中曾经把笛卡儿的坐标、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为17世纪的三大数学发明。

笛卡儿的哲学与数学思想对历史的影响是深远的。人们在他的墓碑上刻下了这样一句话：“笛卡儿，欧洲文艺复兴以来，第一个为人类争取并保证理性权利的人。”

笛卡儿堪称17世纪及其后的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一，被誉为“近代科学的始祖”。

(二) 天下第一桥



赵州桥，位于历史文化名城赵县，它是世界上现存最早、保存最好的巨大石拱桥，距今已有 1 400 多年历史，是著名匠师李春建造，被誉为“华北四宝之一”。桥长 64.4 米，跨径约为 37.4 米，圆拱高约为 7.2 米，是当今世界上跨径最大、建造最早的单孔敞肩型石拱桥。因桥两端肩部各有两个小孔，不是实的，故称敞肩型，是世界造桥史的一个创造（没有小拱的称为满肩或实肩型）。

你能根据上述材料，建立适当的坐标系，求出赵州桥中的大圆拱所在的圆的方程吗？



第十章 立体几何初步

我们学习的教室。居住的卧室。其实都是长方体的。细心的你是否注意到了其中点、线、面的位置关系？

浮光掠影的东西终究会过去，
但是天体图案却是巍然不动永世长存的。

——欧几里得

数学方法渗透并支配着一切自然科学的理论分支。它愈来愈成为衡量科学成就的主要标志了。

——冯纽曼

从最简单的做起！

——波利亚

我们生活在三维的立体空间里，随时接触各种各样的几何体。无论是机械加工，还是楼房建筑，都离不开对点、线、面的位置关系的判断与处理，这种处理空间问题的几何方法被广泛运用到人类生产、生活的各个方面。本章我们将在第一册观察几何体模型的基础上，直观认识和理解空间点、线、面的位置关系，并用数学语言进行表述。

10.1 平面的基本性质

1. 平面的基本性质

在几何学中，我们用点标记位置。在日常生活中，一位同学从一个位置走到另一个位置，他经过的路径，就用一条线来表示。在初中几何中，我们学习了以下性质：

连接两点的线中，线段最短；

过两点有一条直线，并且只有一条直线。

几何学的点、直线都是抽象的概念。画出的点，我们不考虑大小，画出的线不考虑粗细。基于这种抽象的思考，我们才能总结出上述点与直线的性质。几何里的平面和直线一样是无限延展、没有边界的。常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象。

我们无法在纸上把一个无限延展的平面画出来，通常只画平面的一部分，一般用水平放置的正方形的直观图表示平面（如图 10-1），并把它想象成无限延展的。

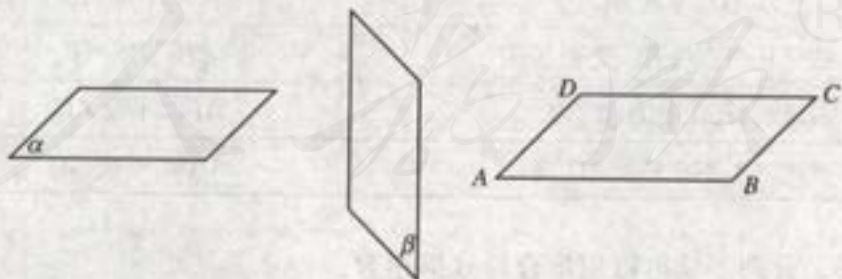


图 10-1

平面一般用希腊字母 α , β , γ , ... 来命名，还可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来命名。例如，图 10-1 所示的是平面 α ，平面 β 和平面 AC 。

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个

基本性质. 我们把它们当作公理, 作为进一步推理的基础.

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上的所有点都在这个平面内 (图 10-2).

这时我们说, 直线在平面内或平面经过直线.

利用这个性质, 可以判断一条直线是否在一个平面内.

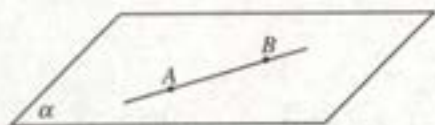


图 10-2

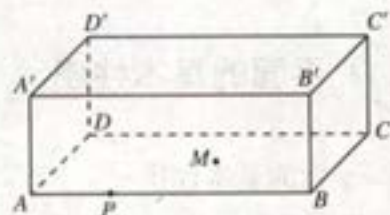


图 10-3

我们把空间看成是点的集合. 这就是说, 点是空间的基本元素, 表示空间内的一个确定的位置. 直线和平面都是空间的子集, 同时直线又是平面的子集. 于是, 我们可用集合语言来描述点、直线和平面之间的关系以及图形的性质. 例如, 下表给出了图 10-3 所示的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中的一些位置关系及相应的表示法:

位置关系	符号表示
点 P 在直线 AB 上	$P \in AB$
点 C 不在直线 AB 上	$C \notin AB$
点 M 在平面 AC 内	$M \in \text{平面 } AC$
点 A' 不在平面 AC 内	$A' \notin \text{平面 } AC$
直线 AB 与直线 BC 交于点 B	$AB \cap BC = B$
直线 AB 在平面 AC 内	$AB \subset \text{平面 } AC$
直线 AA' 不在平面 AC 内	$AA' \not\subset \text{平面 } AC$

这样, 公理 1 就可以用集合符号描述为:

如果点 $A \in \text{平面 } \alpha$, 点 $B \in \text{平面 } \alpha$, 那么直线 $AB \subset \text{平面 } \alpha$.

生活中, 我们常常可以看到这样的现象: 三角架可以稳固地支撑照相机 (图 10-4), 用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定等等.

上述生活实例和类似经验可以归纳为下面的公理.

公理 2 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 10-5）。

这个公理也可以简单地说成，不共线的三点确定一个平面。

经过不共线的三点 A, B, C 的平面（图 10-5），通常记作平面 ABC 。



图 10-4

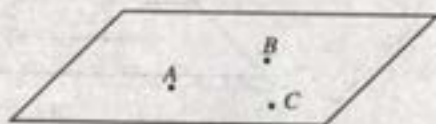


图 10-5

观察图 10-3 的长方体，我们可以看到每两个相交的面之间的交线都是直线段，如果将长方体不断放大，表面就不断延展，相交的线段不断伸长，由此可以归纳得到：

公理 3 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线（图 10-6）。

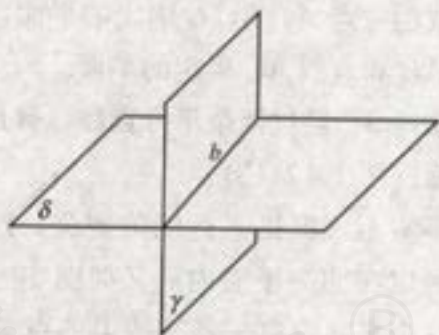
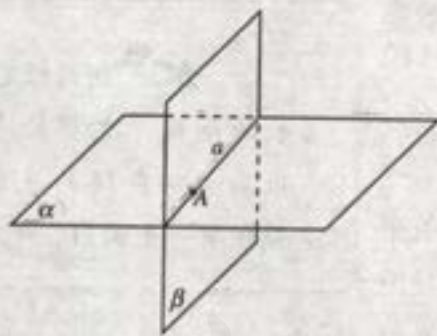


图 10-6

为了方便，本教材约定：以后如果不特别说明，两个平面都是指两个不重合的平面，两条直线是指两条不重合的直线。

如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的交线。如图 10-6， α 与 β 相交，交线是 a ；而 δ 与 γ 相交，交线是 b 。也可记作 $\alpha \cap \beta = a$ ， $\delta \cap \gamma = b$ 。

在画两个平面相交时，如果其中一个平面被另一个平面遮住，应把表示平面的平行四边形被遮住的部分画成虚线或不画（图 10-6）。

2. 平面基本性质的推论

由以上基本性质，可以得到下面的推论：

推论 1 经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面（图 10-7 (1)）。

事实上，如图 10-7 (1) 所示，直线 BC 外一点 A 和直线 BC 上的两点 B ， C 不共线，根据公理 2 可知，不共线的三点 A ， B ， C 确定一个平面 ABC ，并且可知点 A 和直线 BC 都在平面 ABC 内。

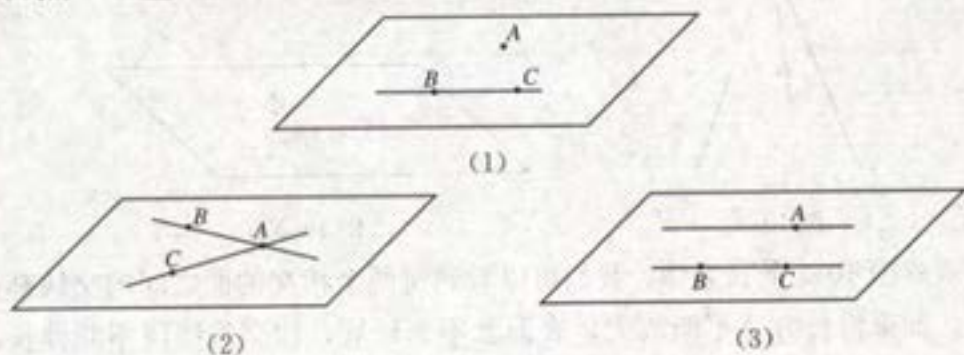


图 10-7

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 10-7 (2)）。

事实上，如图 10-7 (2) 所示，两条相交直线 AB 和直线 AC 相交于点 A ，不共线的三点 A ， B ， C 确定的平面，也就是直线 AB 和直线 AC 确定的平面。

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 10-7 (3)）。

事实上，根据平行线的定义，这两条平行线一定在同一平面内，又如图 10-7 (3) 所示，这个平面含有一条直线上的点 A 和另一条直线上的两点 B ， C ，由公理 2 可知，这样的平面只有一个。

例 1 如图 10-8 (1)，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 P 是棱 $A'B'$ 上的中点，画出由 P ， B ， C' 三点所确定的平面 α 与长方体表面的交线。

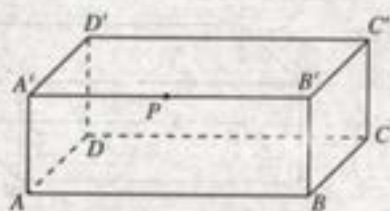
分析：因为点 P 既在平面 α 内又在平面 AB' 内，所以点 P 在平面 α 与平面 AB' 的交线上。同理，点 B 在平面 α 与平面 AB' 的交线上。因此， PB 就是平面 α 与平面 AB' 的交线。同样可知， BC' ， PC' 就是平面 α 分别与平面 BC' ， $A'C'$ 的交线。

作法：连接 PB ， BC' ， PC' ，它们就是平面 α 与长方体表面的交线（图 10-8 (2)）。

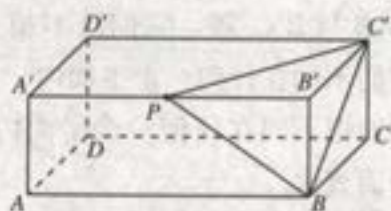


想一想

用两根足够长的细绳，怎样检查一张桌子四条腿的底端是否在同一平面内？



(1)



(2)

图 10-8

练习 10-1

1. 判断下列命题的真假：

- (1) 如果两个平面有两个公共点 A, B , 那么它们就有无数多个公共点, 并且这些公共点都在直线 AB 上;
- (2) 经过一条直线的平面有无数多个;
- (3) 两个相交平面存在三个公共点, 这三个公共点不在一条直线上;
- (4) 空间三点确定一个平面;
- (5) 线段 AB 在平面 α 内, 则直线 AB 在平面 α 内.

2. 为什么自行车只要支起后轮旁一只撑脚就能使自行车立在地面上?

3. 用集合符号表示下列语句:

- (1) 点 A 在直线 l 上;
- (2) 点 B 不在直线 l 上;
- (3) 直线 l 在平面 α 内;
- (4) 直线 m 与平面 α 有且只有一个公共点 P .

10.2 空间两条直线的位置关系

平面内两条直线的位置关系只有平行和相交两种情形, 那么空间两条直线的位置关系有哪些呢?

观察图 10-9 所示的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 可以看出, 空间两条直线除了相交、平行两种位置关系外, 还有第三种位置关系. 例如, 直线 AB 与



CC' , AB 与 $B'C'$ 等, 它们既不相交也不平行, 而且它们不同在任何一个平面内.

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

因此, 空间两条直线的位置关系有以下三种:

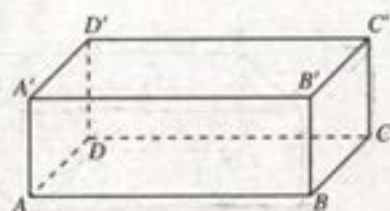


图 10-9

位置关系	共面情况	公共点
相交	在同一平面内	有且只有一个
平行	在同一平面内	没有
异面	不同在任何一个平面内	没有

1. 平行直线

在平面几何中, 我们把在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 在初中几何中, 我们学过平行公理: 经过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行. 平行线的定义和平行公理在立体几何中仍然适用. 在平面几何中, 我们还学过平行线的另一条重要性质: 在同一平面内, 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行. 这条性质同样也可推广到空间, 作为空间中平行直线的基本性质.

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

用符号表示为:

若 $a \parallel b$, $c \parallel b$, 则 $a \parallel c$, 如图 10-10 所示.

上述基本性质通常又叫做空间平行线的传递性.



图 10-10

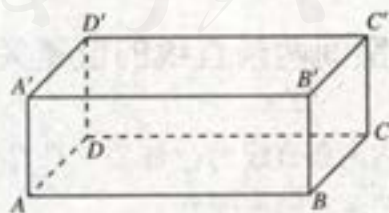


图 10-11

如图 10-11 所示, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 由 $AA' \parallel BB'$, 且 $CC' \parallel BB'$, 可知 $AA' \parallel CC'$.

如图 10-12 所示, 在圆柱 OO' 中, 由 $AA' \parallel OO'$, 且 $BB' \parallel OO'$, 可知 $AA' \parallel BB'$.

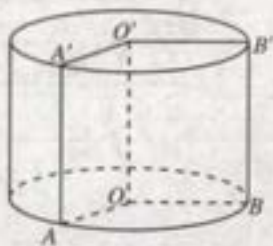


图 10-12

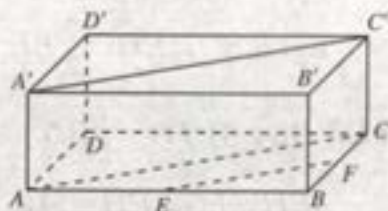


图 10-13

例 1 如图 10-13, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 已知点 E, F 分别是棱 AB, BC 上的中点, 求证: $EF \parallel A'C'$.

证明: 连接 AC . 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 分别是 AB, BC 上的中点, 所以

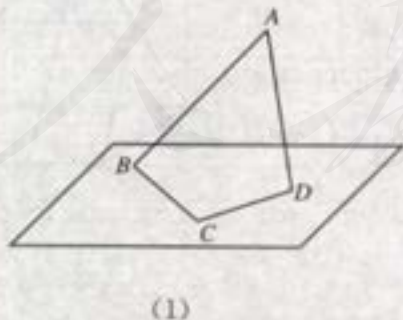
$$EF \parallel AC.$$

又因为 $AA' \parallel CC'$, 所以四边形 $AA'C'C$ 是平行四边形, 因此

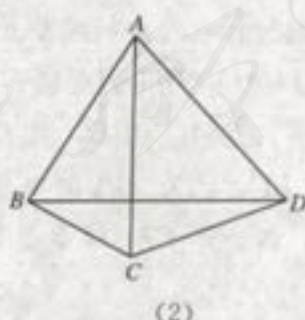
$$AC \parallel A'C'.$$

从而 $EF \parallel A'C'$.

如图 10-14 (1) 所示, 顺次连接空间中不共面的四点 A, B, C, D 所构成的图形, 叫做空间四边形. 这四个点叫做空间四边形的顶点; 所连接的相邻顶点间的线段叫做空间四边形的边; 连接不相邻的顶点的线段叫做这个空间四边形的对角线. 空间四边形用表示顶点的四个字母表示. 例如, 图 10-14 (2) 中的四边形可以表示为空间四边形 $ABCD$, 线段 AC, BD 是它的对角线.



(1)



(2)

图 10-14

例 2 已知空间四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点.



求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形 (图 10-15).

证明：连接 BD . 在 $\triangle ABD$ 中，因为 E, H 分别是 AB, AD 的中点，所以

$$EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD.$$

同理 $FG \parallel BD$, 且 $FG = \frac{1}{2}BD$. 所以

$$EH \parallel FG, EH = FG.$$

因此四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

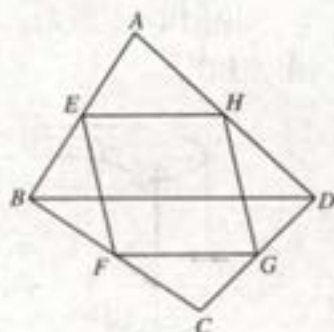
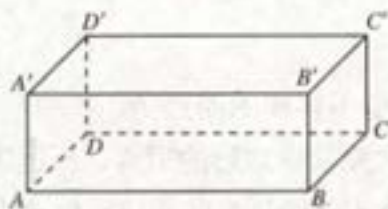


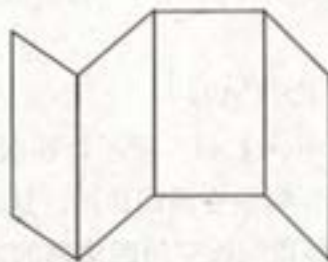
图 10-15

练习 10-2

1. 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 写出在这个长方体中与 AA' 平行的所有的棱.



(第 1 题)

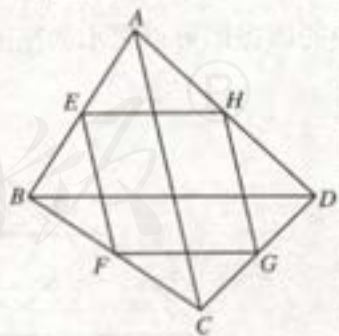


(第 2 题)

2. 把一张长方形的纸对折两次，打开后如图所示，说明为什么这些折痕是互相平行的.

3. 已知 AC, BD 是空间四边形 $ABCD$ 的对角线，如图，且 $AC=BD$ ，且 E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.



(第 3 题)

2. 异面直线

如图 10-16，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，直线 AB 与 $A'C$ 具有怎样的位置关系？

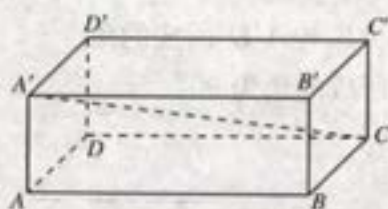


图 10-16

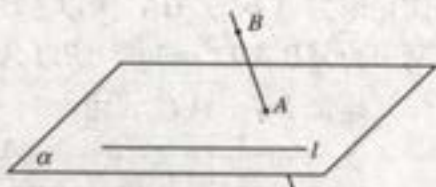


图 10-17

假设 AB 与 $A'C$ 共面, 由于经过点 C 和直线 AB 的平面只能有一个, 所以直线 $A'C$ 和 AB 都应在平面 $ABCD$ 内, 于是点 A' 在平面 $ABCD$ 内, 这与点 A' 在平面 $ABCD$ 外矛盾. 因此直线 AB 与 $A'C$ 是异面直线.

一般地, 我们有:

经过平面内一点与平面外一点的直线, 和这个平面内不经过该点的直线是异面直线 (图 10-17).

如图 10-18, a, b 是两条异面直线, 经过空间任意一点 O , 作直线 a', b' , 使 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角 (或直角) 叫做异面直线 a, b 所成的角. 为了简便, 点 O 常取在两条异面直线中的一条上.

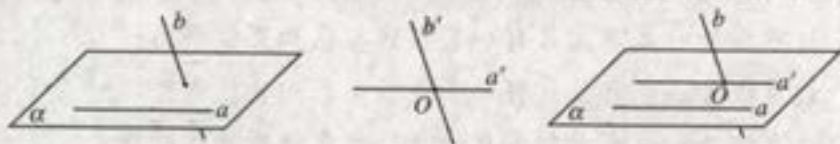


图 10-18

如果两条异面直线所成的角是直角, 那么我们就说这两条异面直线互相垂直. 两条互相垂直的异面直线 a, b , 仍记作 $a \perp b$.

例 3 如图 10-19 所示, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$:

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BA' 是异面直线?

(2) 求异面直线 AB 与 $A'D'$ 所成的角;

(3) 求异面直线 $A'B$ 与 AC 所成的角.

解: (1) 由异面直线的定义可知, 棱 $AD, DC, CC', DD', D'C', B'C'$ 所在的直线分别与直线 BA' 是异面直线.



想一想 如果 $a \parallel b$, $a \perp c$, 那么 $b \perp c$, 对吗?

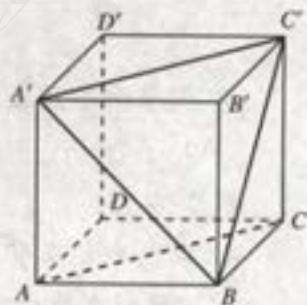


图 10-19

(2) 因为 $A'B' \parallel AB$, 所以 $\angle B'A'D'$ 即为 AB 与 $A'D'$ 所成的角.

又因为 $\angle B'A'D' = 90^\circ$, 所以 AB 与 $A'D'$ 所成的角为 90° .

(3) 连接 BC' , $A'C'$, 由

$$AA' \parallel CC'$$

可知四边形 $AA'C'C$ 是平行四边形, 所以

$$AC \parallel A'C',$$

所以 $A'B$ 与 AC 所成的角就是 $A'B$ 与 $A'C'$ 所成的角.

因为 $A'B$, BC' , $A'C'$ 都是正方体的面对角线, 所以

$$A'B = BC' = A'C',$$

故 $\triangle A'BC'$ 是正三角形.

因此, $A'B$ 与 $A'C'$ 所成的角是 60° , 即 $A'B$ 与 AC 所成的角是 60° .

练习10-3

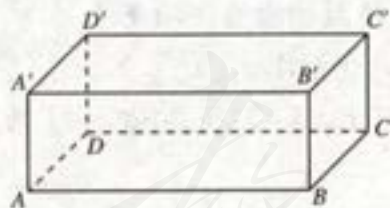
1. 判断下列命题是否正确, 并说明理由:

(1) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行;

(2) 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直;

(3) 过直线外一点有无数条直线与已知直线成异面直线.

2. 如图, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 哪些棱所在直线与直线 AB 成异面直线且互相垂直?



(第2题)

3. 如果两条直线没有公共点, 则这两条直线的位置关系是 ().

(A) 平行

(B) 异面

(C) 共面

(D) 平行或异面

4. 在两个相交平面内各画一条直线, 使它们成为:

(1) 平行直线;

(2) 相交直线;

(3) 异面直线.

5. 指出下列命题是否正确, 并说明理由:

(1) 若 $a \parallel b$, $c \perp a$, 则 $c \perp b$;

(2) 若 $a \perp c$, $b \perp c$, 则 $a \parallel b$.

10.3 直线与平面的位置关系

直线和平面有哪几种位置关系? 你能根据公共点的情况进行分类吗?

观察图 10-20 的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$,

可以发现以下三种情况:

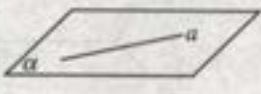
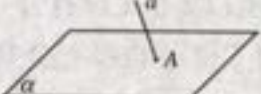
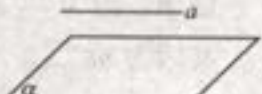
(1) 棱 $A'B'$ (或 $A'D'$) 所在的直线与平面 AC 没有公共点;

(2) 棱 AA' (或对角线 $A'C$) 所在的直线与平面 AC 有且只有一个公共点;

(3) 棱 AB (或 AD) 所在的直线与平面 AC 有无数个公共点.

如果一条直线 a 与一个平面 α 没有公共点, 我们就说直线 a 与平面 α 平行; 如果一条直线 a 与一个平面 α 有且只有一个公共点, 我们就说直线 a 与平面 α 相交; 如果一条直线 a 与一个平面 α 有无数个公共点, 我们就说直线 a 在平面 α 内.

一条直线与一个平面的位置关系有且只有以下三种:

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a \parallel \alpha$
图形表示			

我们把直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外, 用符号表示为 $a \not\subset \alpha$.

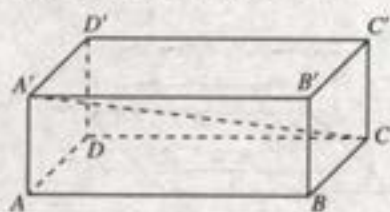


图 10-20



1. 直线与平面平行

在图 10-20 所示的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $A'B' \parallel AB$, 因此直线 $A'B'$ 与平面 AC 没有公共点, 直线 $A'B'$ 与平面 AC 平行.

一般地, 我们有:

直线与平面平行的判定定理 如果平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行.

用符号表示为:

若 $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, 且 $a \parallel b$, 则 $a \parallel \alpha$, 如图 10-21 所示.

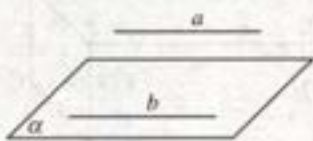


图 10-21

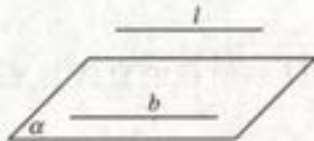
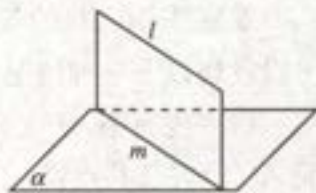


图 10-22



日常生活中, 用平行吊线挂灯管就利用了上述性质, 只要两根吊线平行且等长, 则灯管就和天花板平行.

根据上述定理, 画一条直线与已知平面平行, 通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面, 并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行 (图 10-22).

如果一条直线与一个平面平行, 那么这条直线是否与这个平面内的任意一条直线都平行?

直线与平面平行的性质定理 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线就和两平面的交线平行.

已知: $l \parallel \alpha$, $l \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = m$ (图 10-23).

求证: $l \parallel m$.

证明: 因为 $l \parallel \alpha$, 所以 l 和 α 没有公共点.

又因为 $m \subset \alpha$, 所以 l 和 m 也没有公共点.

又

$$l \subset \beta, m \subset \beta,$$

所以 $l \parallel m$.

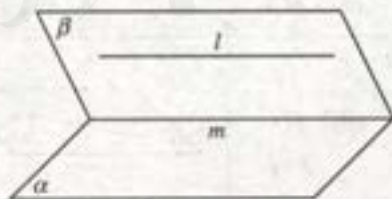


图 10-23

在空间内,经常利用这个定理,由“线、面平行”去判断“线、线平行”。

例1 已知空间四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, AD 的中点 (图 10-24)。

求证: $EF \parallel$ 平面 BCD 。

证明: 连接 BD , 在 $\triangle ABD$ 中, 因为 E, F 分别是 AB, AD 的中点, 所以

$$EF \parallel BD.$$

又因为 BD 是平面 ABD 与平面 BCD 的交线, $EF \not\subset$ 平面 BCD , 所以

$$EF \parallel \text{平面 } BCD.$$

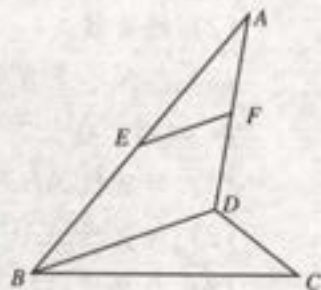
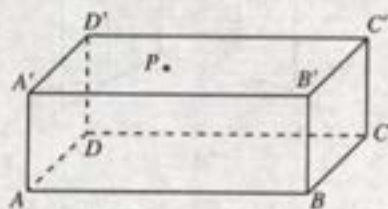
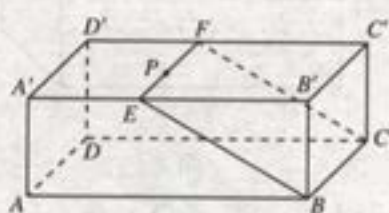


图 10-24

例2 一个长方体木块如图 10-25 (1) 所示, 要经过平面 $A'C'$ 内一点 P 和棱 BC 将木块锯开, 应怎样画线?



(1)



(2)

图 10-25

分析: 点 P 和 BC 确定平面 α , 根据题意, 应画出平面 α 与长方体各面的交线。

因为点 P 既在平面 α 内又在平面 $A'C'$ 内, 所以平面 α 与平面 $A'C'$ 必相交于经过点 P 的一条直线 (公理 2), 设这条直线与 $A'B', C'D'$ 的交点分别为 E, F 。

由于 $BC \parallel B'C'$, 故 $BC \parallel$ 平面 $A'C'$, 由直线与平面平行的性质定理得 $BC \parallel EF$, 因此只要平面 $A'C'$ 内过点 P 作 $B'C'$ 的平行线即可。

作法: 在平面 $A'C'$ 内过点 P 作 $EF \parallel B'C'$, 分别交 $A'B', C'D'$ 于点 E, F 。

连接 BE, CF , 则 BE, CF 和 EF 就是所要画的线 (图 10-25 (2))。

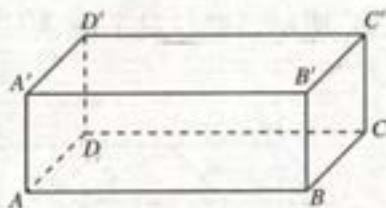
练习10-4

1. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

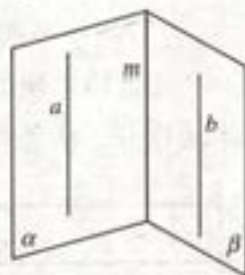
- (1) 过平面外一点有无数条直线和这个平面平行；
- (2) 过直线外一点有无数个平面和这条直线平行；
- (3) 如果一条直线不在平面内，那么这条直线就平行于这个平面。

2. 如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 六个面所在平面中：

- (1) 与直线 AB 平行的平面是_____；
- (2) 与直线 AA' 平行的平面是_____；
- (3) 与直线 AD 平行的平面是_____。



(第2题)



(第3题)

3. 已知，如图， $\alpha \cap \beta = m$ ， $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ，且 $a \parallel b$ 。求证： $a \parallel m$ ， $b \parallel m$ 。

2. 直线与平面垂直

如图 10-26，在阳光下观察直立于地面的旗杆及它在地面的影子，随着时间的变化，尽管影子 BC 的位置在移动，但是旗杆 AB 所在的直线始终与影子 BC 所在的直线垂直。也就是说，旗杆 AB 所在的直线与地面内任意一条过点 B 的直线垂直。事实上，旗杆 AB 所在的直线与地面内任意一条不过点 B 的直线（例如 $B'C'$ ）也是垂直的。

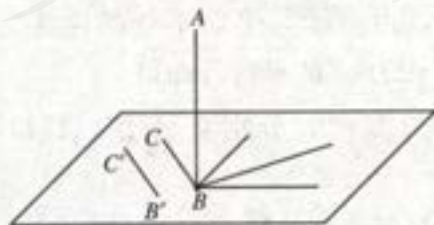


图 10-26

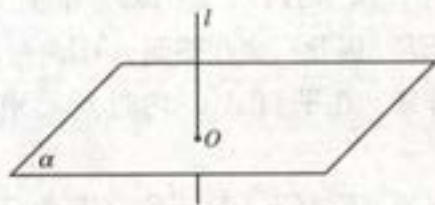


图 10-27

如图 10-27, 如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直, 我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直, 记作 $l \perp \alpha$. 直线 l 叫做平面 α 的垂线, 平面 α 叫做直线 l 的垂面, 直线与平面垂直时, 它们唯一的公共点 O 叫做垂足, 垂线上任意一点到垂足间的线段, 叫做这个点到这个平面的垂线段, 垂线段的长度叫做这个点到平面的距离.

用直线与平面垂直的定义, 直接检验直线是否与平面垂直是困难的. 想一想, 是否有容易操作又比较简单的判别方法.

如图 10-28, 将一张矩形纸片对折后略微展开, 竖立在桌面上, 我们可以观察到: 折痕与纸的下边沿是垂直的, 同时折痕与桌面给我们以直线与平面垂直的印象.

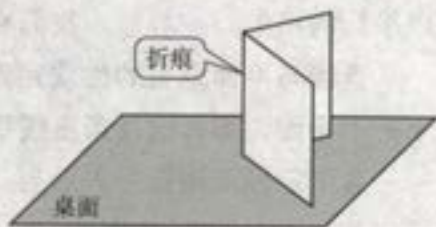


图 10-28

我们知道, 两条相交直线确定一个平面, 因此可以猜想, 要证明一条直线与一个平面垂直, 只需证明这条直线与平面内的两条相交直线垂直就可以了.

事实上, 我们有直线与平面垂直的判定定理如下:

直线与平面垂直的判定定理 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直, 那么这条直线与这个平面垂直.

用符号表示为:

若 $l \perp m$, $l \perp n$, $m \cap n = A$, $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$, 如图 10-29 所示.

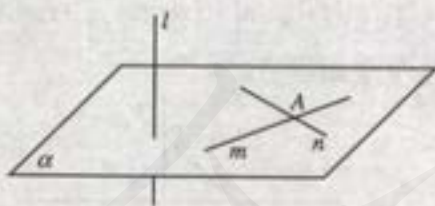


图 10-29

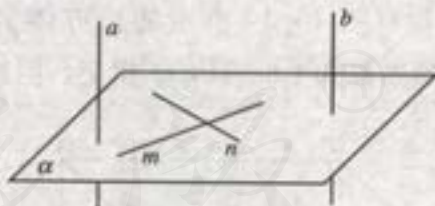


图 10-30

例 3 如图 10-30, 已知 $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, 求证: $b \perp \alpha$.

证明: 在平面 α 内作两条相交直线 m , n .

因为 $a \perp \alpha$, 根据直线和平面垂直的定义可知

$$a \perp m, a \perp n.$$

又因为 $b \parallel a$, 所以



$$b \perp m, b \perp n.$$

又因为 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m, n$ 是两条相交直线, 所以

$$b \perp \alpha.$$

由上面的例题, 我们可得到如下结论:

推论 在两条平行直线中, 如果有一条直线垂直于一个平面, 那么另一条直线也垂直于这个平面.

如图 10-31, 垂直于地面的两根相邻的旗杆, 给我们以平行的形象. 一般地, 我们有:

直线与平面垂直的性质定理 如果两条直线同时垂直于一个平面, 那么这两条直线平行.

这个定理可用符号表示为:

若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$, 如图 10-32 所示.



图 10-32



图 10-33

如果一条直线和一个平面平行, 那么这条直线上任意一点到这个平面的距离都相等, 这个距离叫做这条直线到这个平面的距离, 如图 10-33 所示.

观察图 10-34 所示的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 可以发现 $A'B, A'C, A'D$ 虽然都和平面 $ABCD$ 相交, 但都不与这个平面垂直.

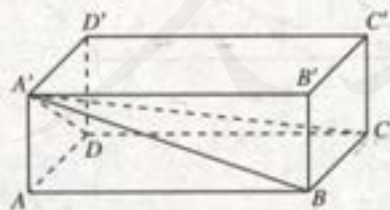


图 10-34

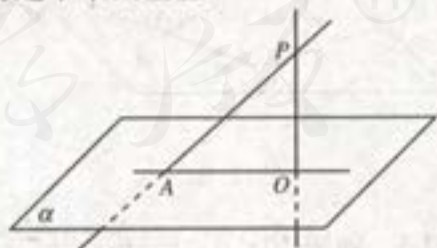


图 10-35

如图 10-35, 如果一条直线 PA 和一个平面 α 相交, 但不和这个平面垂直, 那么这条直线叫做这个平面的斜线, 斜线和平面的交点 A 叫做斜足. 过斜线上斜足以外的一点 P 向平面引垂线 PO , 过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO



图 10-31

叫做斜线 PA 在这个平面内的射影. 平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角, 叫做这条直线和这个平面所成的角.

一条直线垂直于一个平面, 我们说它们所成的角是直角; 一条直线和一个平面平行, 或在这个平面内, 我们说它们所成的角是 0° 的角.

在图 10-34 中, $\angle A'BA$ 就是直线 $A'B$ 与平面 $ABCD$ 所成的角; 在图 10-35 中, $\angle PAO$ 就是直线 PA 与平面 α 所成的角.

例 4 如图 10-36, 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=2$, $AD=1$, $AA'=1$. 求直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

解: 连接 AC . 因为 $CC' \perp ABCD$, 所以 AC 是 AC' 在平面 $ABCD$ 内的射影, 因此 $\angle CAC'$ 就是直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角.

在矩形 $ABCD$ 中,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

在 $Rt\triangle ACC'$ 中,

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{6},$$

所以

$$\sin \angle CAC' = \frac{CC'}{AC'} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

因此直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

例 5 如图 10-37, 已知 AO 和 AB 分别是平面 α 的垂线和斜线, O 和 B 分别是垂足和斜足, $l \subset \alpha$, $l \perp OB$.

求证: $l \perp AB$.

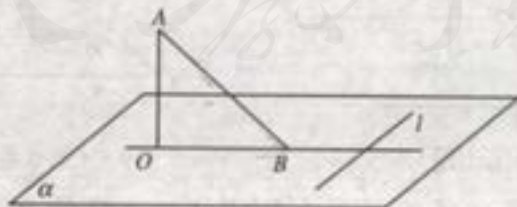


图 10-37

分析: 因为 $AB \subset$ 平面 ABO , 所以可通过证明 $l \perp$ 平面 ABO 来得到结论.

证明: 因为 $AO \perp \alpha$, $l \subset \alpha$, 所以



$$l \perp AO.$$

又因为 $l \perp OB$, $AO \cap OB = O$, 所以

$$l \perp \text{平面 } ABO,$$

又因为 $AB \subset \text{平面 } ABO$, 所以

$$l \perp AB.$$

练习10-5

1. 过一点有多少条直线与已知平面垂直? 过一点有多少个平面与已知直线垂直?

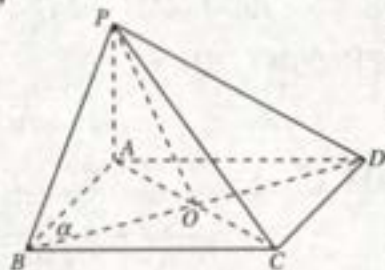
2. 已知直线 l, m, n 与平面 α , 判断下列命题是否正确, 并说明理由:

(1) 若 $l \perp \alpha$, 则 l 与 α 相交;

(2) 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, l \perp m, l \perp n$, 则 $l \perp \alpha$;

(3) 若 $l \parallel m, m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $l \parallel n$.

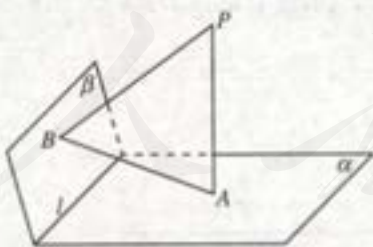
3. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面为 α , 且 $PA \perp \alpha$, 如果 BD 与 AC 相交于点 O , 那么 PO 是否垂直于 BD ? 为什么?



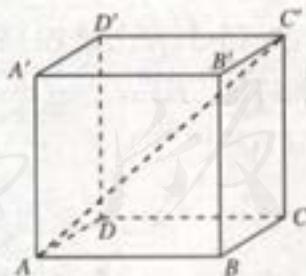
(第3题)

4. 如图, 已知 $PA \perp \alpha, PB \perp \beta$, 垂足分别是 A, B , 且 $\alpha \cap \beta = l$.

求证: $l \perp \text{平面 } APB$.



(第4题)



(第5题)

5. 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 求直线 AC' 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

10.4 平面与平面的位置关系

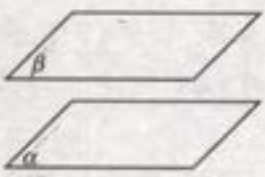
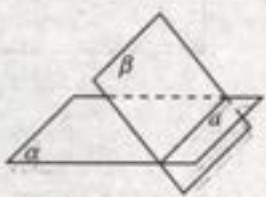
两个平面可能有哪几种位置关系？你能根据公共点的情况进行分类吗？

观察图 10-38 的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ ，它的上下两个底面所在的平面没有公共点，而平面 $ABB'A'$ 与平面 $ABCD$ 则有一条交线 AB 。

如果两个平面没有公共点，我们就说这两个平面互相平行。

如果两个平面有一个公共点，那么由公理 2 可知，它们相交于经过该点的一条直线，这时，我们就说这两个平面相交。

由此可知，两个平面的位置关系有两种：相交或平行（见下表）。

位置关系	两平面平行	两平面相交
公共点	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha // \beta$	$\alpha \cap \beta = a$
图形表示		

1. 两平面平行

问题 1 平面 β 内有一条直线和平面 α 平行，平面 α 与 β 平行吗？

问题 2 平面 β 内有两条直线都和平面 α 平行，平面 α 与 β 平行吗？

为了便于观察与分析，我们借助于长方体来分别研究这两个问题。

对于问题 1，如图 10-39，在长方体中，我们可以看出，直线 $A'B'$ 在平面 $ABB'A'$ 内，且 $A'B'$ 平行于平面 $ABCD$ ，然而，平面 $ABB'A'$ 与平面 $ABCD$ 相交。

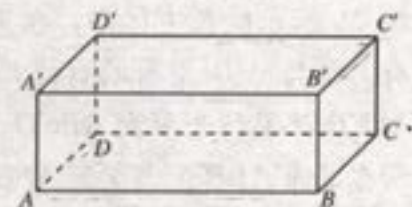


图 10-38

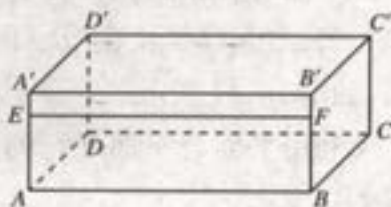


图 10-39

对于问题2, 我们根据平面 β 内两条直线是平行还是相交分两种情况考虑:

(1) 如果平面 β 内的两条直线是平行直线, 那么平面 α 和平面 β 不一定平行. 如图10-39所示的长方体中, 在平面 $ABB'A'$ 内, 有一条与 $A'B'$ 平行的直线 EF , 显然, $A'B'$ 与 EF 都平行于平面 $ABCD$, 但这两条直线所在平面 $ABB'A'$ 与平面 $ABCD$ 相交.

(2) 如果平面 β 内有两条相交直线都与平面 α 平行, 情况如何呢? 如图10-40所示的长方体中, 在平面 $A'B'C'D'$ 内有两条相交直线 $A'C'$, $B'D'$ 分别与平面 $ABCD$ 内的两条相交直线 AC , BD 平行, 由直线与平面平行的判定定理可知, 这两条相交直线 $A'C'$, $B'D'$ 都与平面 $ABCD$ 平行. 此时, 平面 $A'B'C'D'$ 平行于平面 $ABCD$.

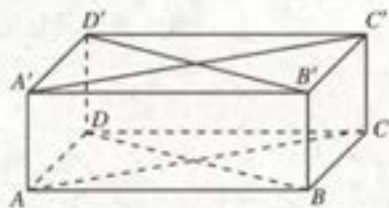


图 10-40

一般地, 我们有如下判定平面与平面平行的定理:

平面与平面平行的判定定理 如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面, 那么这两个平面平行.

平面与平面平行的判定定理可以用符号表示为:

若 $a \subset \beta$, $b \subset \beta$, $a \cap b = P$, $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, 则 $\beta \parallel \alpha$, 如图10-41所示.

利用平面与平面平行的判定定理, 我们可以得到:

推论 如果一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线, 则这两个平面平行.

在图10-39中, 由 $A'B'$ 平行于平面 $ABCD$, 你能找一个与平面 $ABCD$ 平行的平面吗? 由此你能得出什么结论?

试一试



若 α 与 β 是两个相交平面, 你能在平面 α 内画两条相交直线, 使它们都平行于平面 β 吗? 为什么?

试一试

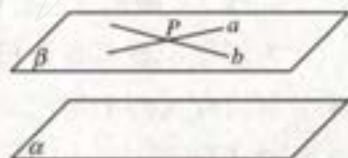


图 10-41

例1 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ (图 10-42).

求证: 平面 $AB'D' \parallel$ 平面 $BC'D$.

分析: 只要证明一个平面内的两条相交直线和另一个平面内的两条直线分别平行即可.

证明: 由长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 可知

$$D'C' \parallel A'B' \parallel AB, D'C' = A'B' = AB,$$

所以 $ABCD'$ 是平行四边形, 从而 $AD' \parallel BC'$.

同理 $B'D' \parallel BD$.

又因为 $AD' \cap B'D' = D'$, 所以

平面 $AB'D' \parallel$ 平面 $BC'D$.

根据上述定理和推论, 在画两个平行平面时, 通常把表示这两个平面的两平行四边形的对应边分别画成平行线 (图 10-41).

观察长方体形状的教室, 天花板面与地面是平行的. 直观上能感觉到, 同一个墙面分别与天花板面、地面相交所得到的两条直线是平行的. 一般地, 两个平行平面具有如下性质:

平面与平面平行的性质定理 如果两个平行平面同时与第三个平面相交, 则它们的交线平行.

事实上, 由于两条交线分别在两个平行平面内, 所以它们没有公共点, 它们又都在同一个平面内, 由平行线的定义可知它们是平行的 (图 10-43).

如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面, 那么它也垂直于另一个平面. 与两个平行平面都垂直的直线, 叫做这两个平行平面的公垂线, 公

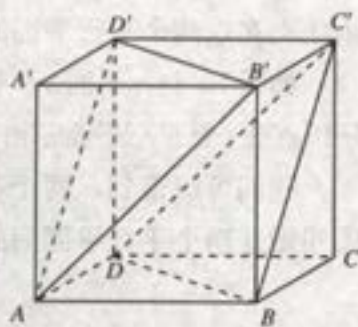


图 10-42



想一想 如果两个平面平行, 一个平面内的直线与另一个平面内的直线具有什么位置关系?

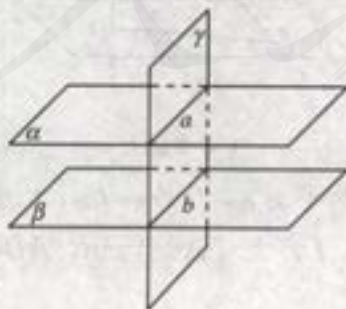


图 10-43

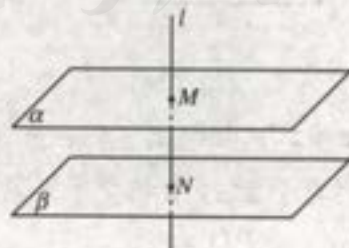


图 10-44



垂线夹在这两个平行平面间的线段，叫做这两个平行平面的公垂线段。

如图 10-44，平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，直线 $l \perp \alpha$ ，交点为 M ，同时 $l \perp \beta$ ，交点为 N 。所以直线 l 是平行平面 α 和 β 的公垂线，线段 MN 是平行平面 α 和 β 的公垂线段。

我们可以得到，两个平行平面的公垂线段都相等。我们把公垂线段的长度叫做这两个平行平面间的距离。

练习 10-6

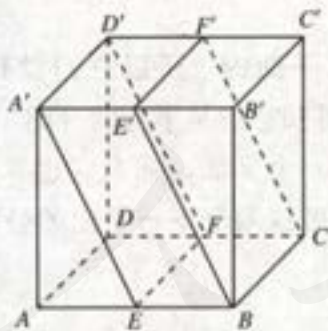
1. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

- (1) 若平面 α 内的两条直线分别和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；
- (2) 若平面 α 内有无数条直线分别和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；
- (3) 若平面 α 内的任意一条直线都和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；
- (4) 平行于同一条直线的两个平面平行。

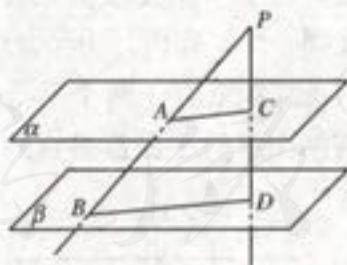
2. (平行平面的传递性) 如果平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，平面 $\beta \parallel$ 平面 γ ，是否必有平面 $\alpha \parallel$ 平面 γ ？为什么？

3. 如图，设 E, F, E', F' 分别是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 $AB, CD, A'B', C'D'$ 的中点。

求证：平面 $ED' \parallel$ 平面 BF' 。



(第3题)



(第4题)

4. 如图，已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，点 P 是平面 α, β 外一点，直线 PAB, PCD 分别与平面 α, β 相交于点 A, B, C, D 。且 $PA=4$ cm, $AB=5$ cm, $PC=3$ cm。求 PD 的长。

2. 两平面垂直

为了解决实际问题，人们需要研究两个平面所成的角。比如，修筑水坝时，为了使水坝坚固，需要使水坝面与水平面成适当的角度；使用笔记本电脑时，为了方便操作，两个面板要成一定的角度。如何刻画两个平面形成的这种“角”呢？

平面内的一条直线把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做一个半平面，当其中一个半平面绕着这条直线旋转时，两个半平面就形成了一定的“角度”。

一般地，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。

如图 10-45 所示，棱为 AB ，半平面分别为 α, β 的二面角，记作二面角 $\alpha-AB-\beta$ 。有时为了方便，也可在 α, β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 M, N ，把这个二面角记作二面角 $MAB-N$ 。如果棱为直线 l ，那么这个二面角也记作二面角 $\alpha-l-\beta$ 或 $M-l-N$ 。

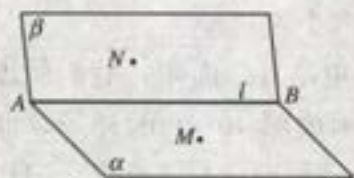


图 10-45



图 10-46

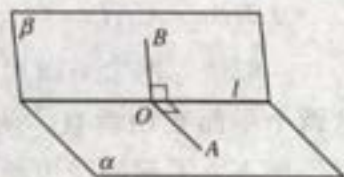


图 10-47

如图 10-46，笔记本电脑在打开的过程中，我们可以看到两个面板构成的二面角的大小在逐渐变大。那么如何来刻画二面角的大小呢？

如图 10-47，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O ，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB ，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角。

二面角的大小用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度。我们约定，二面角 α 的大小范围是 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ 。平面角是直角的二面角叫做直二面角。



想一想 二面角的大

小为 0° 的情形是什么？

大小为 180° 呢？



例 2 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ (图 10-48);

(1) 求二面角 $D'-AB-D$ 的大小;

(2) 求二面角 $A'-AB-D$ 的大小.

分析: 要求二面角的大小, 需要先作出或找出二面角的平面角, 并求出平面角的大小.

解: (1) 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,

$$AB \perp \text{平面 } ADD'A',$$

所以

$$AB \perp AD', AB \perp AD,$$

因此 $\angle D'AD$ 即为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角.

在等腰直角 $\triangle D'AD$ 中, $\angle D'AD = 45^\circ$, 所以二面角 $D'-AB-D$ 的大小为 45° .

(2) 因为

$$AA' \perp AB, AD \perp AB,$$

所以 $\angle A'AD$ 即为二面角 $A'-AB-D$ 的平面角.

又因为 $\angle A'AD = 90^\circ$, 因此二面角 $A'-AB-D$ 的大小为 90° .

一般地, 两个平面相交, 如果它们所成的二面角是直二面角, 我们就说这两个平面互相垂直. 两个互相垂直的平面通常画成图 10-49 的样子, 此时, 把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直. 平面 α 与 β 垂直, 记作 $\alpha \perp \beta$.

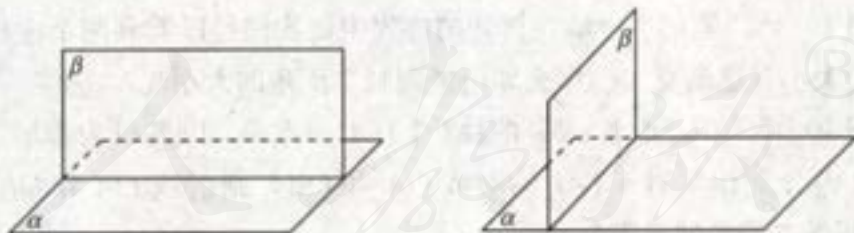


图 10-49

为什么教室的门绕门轴转到任何位置时, 门所在的平面都与地面垂直? 观察可知, 这是因为门在转动的过程中, 门轴始终与地面垂直.

一般地, 我们有下面判定两个平面互相垂直的定理:

平面与平面垂直的判定定理 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

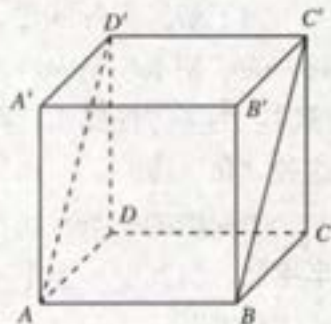


图 10-48

用符号表示为:

如果 $l \perp \alpha$, $l \subset \beta$, 则 $\beta \perp \alpha$, 如图 10-50 所示.

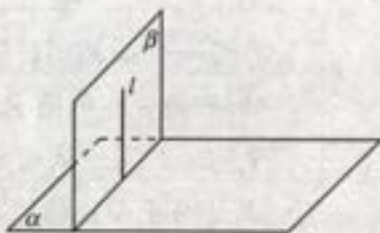


图 10-50

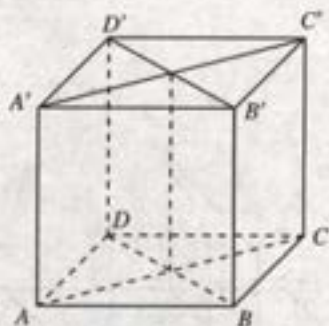


图 10-51

例 3 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ (图 10-51).

求证: 平面 $ACC'A' \perp$ 平面 $BDD'B'$.

证明: 由正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 可知 $AA' \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以

$$AA' \perp BD,$$

又因为 $AC \perp BD$, 且 $AA' \cap AC = A$, 所以

$$BD \perp \text{平面 } ACC'A'.$$

又 $BD \subset$ 平面 $BDD'B'$, 因此

$$\text{平面 } ACC'A' \perp \text{平面 } BDD'B'.$$

思考: 已知黑板所在平面与地面所在平面垂直, 若在黑板上任意画一条直线, 则这条直线和地面总是垂直吗? 你能在黑板上画一条与地面垂直的直线吗?

事实上, 我们有:

平面与平面垂直的性质定理 如果两个平面互相垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

已知: 如图 10-52, 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = CD$, $AB \subset \alpha$, $AB \perp CD$, B 为垂足.

求证: $AB \perp \beta$

证明: 在平面 β 内作 $BE \perp CD$, 则 $\angle ABE$ 是二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的平面角.

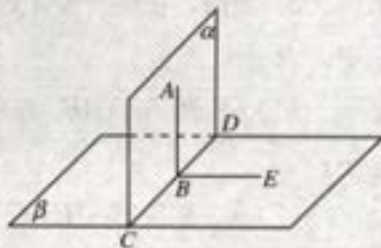


图 10-52



由 $\alpha \perp \beta$ 可知 $AB \perp BE$.

又因为 $AB \perp CD$, 且 $CD \cap BE = B$, 所以

$$AB \perp \beta$$

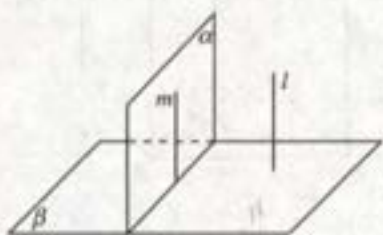


图 10-53

如图 10-53, 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 直线 $l \perp \beta$, $l \not\subset \alpha$. 试判定直线 l 与平面 α 的位置关系.

试一试



练习 10-7

1. 判断下列命题是否正确, 并说明理由:

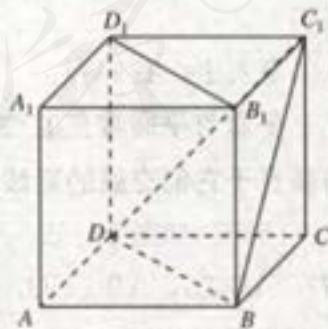
- (1) 经过平面外一点只可作一个平面与已知平面垂直;
- (2) 经过平面外任意一条直线都可作无数个平面与已知平面垂直;
- (3) 若 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
- (4) 若 $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \perp \gamma$;
- (5) 若 $\alpha \parallel \alpha'$, $\beta \parallel \beta'$, $\alpha \perp \beta$, 则 $\alpha' \perp \beta'$.

2. 地面为矩形的教室里, 其相邻墙所在的平面是否垂直?

3. 如图, 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求:

(1) 平面 A_1ABB_1 与平面 $ABCD$ 所成角的大小;

(2) 二面角 C_1-BD-C 的正切值.



(第 3 题)

习题十

1. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 不共面, 两点 M, N 分别在 BD 和 AE 上, 且 $AN=DM$.

求证: $MN \parallel$ 平面 BCE .

2. 点 P 为平行四边形 $ABCD$ 外一点, 点 E 是 PA 的中点, O 是 AC 和 BD 的交点.

求证: $OE \parallel$ 平面 PBC .

3. 已知四面体 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两垂直, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

求证: $PH \perp$ 平面 ABC .

4. 有一旗杆高 12 米, 它的顶端挂一条长 13 米的绳子, 拉紧绳子, 并把它下端先后放在地面上的两点 (和旗杆底端不在同一条直线上), 已知这两点与旗杆底端的距离都是 5 米.

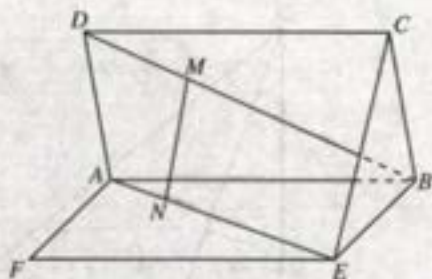
求证: 该旗杆与地面垂直.

5. 如图, 已知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, $PH \perp$ 平面 ABC , 且 $\angle APB = 90^\circ$.

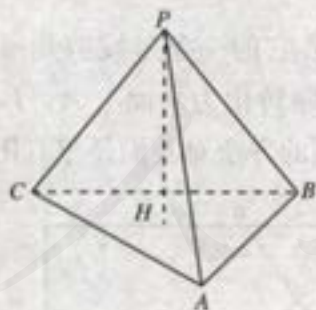
求证: $PC \perp PB$.

6. 如图, 已知 AB 与 CD 为异面直线, $CD \subset$ 平面 α , $AB \parallel \alpha$, M, N 分别是线段 AC 与 BD 的中点.

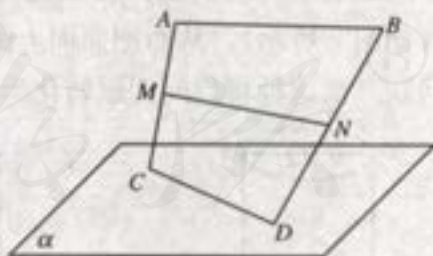
求证: $MN \parallel$ 平面 α .



(第1题)



(第5题)



(第6题)

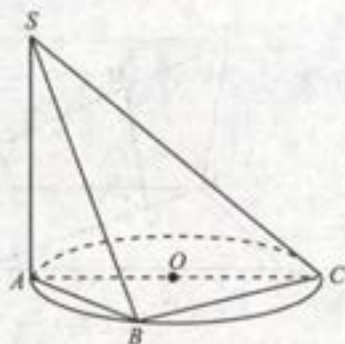
7. 如图, AC 为圆 O 的直径, B 为圆周上不与点 A, C 重合的点, $SA \perp$ 平面 ABC .

求证: 平面 $SAB \perp$ 平面 SBC .

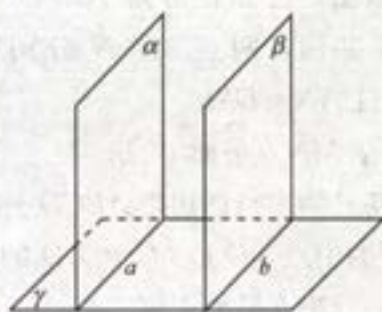
8. 如图, 已知 $\alpha \perp \gamma$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \perp \gamma$, $\beta \cap \gamma = b$, $a \parallel b$.



求证: $\alpha // \beta$



(第7题)



(第8题)



阅读与实践

聪明的小蚂蚁

有这样一个问题:如图1所示,有一个圆柱,它的高等于12 cm,底面半径等于3 cm. 在圆柱的下底面的A点有一只蚂蚁,它想吃到上底面上与A相对的B点的食物,求蚂蚁需要沿圆柱的侧面爬行的最短路程是多少? (π 的值取3)

这个问题的一种解法是:把圆柱的侧面沿着它的一条母线剪开展成一个长方形(如图2所示),从而把曲面上的路线问题转化为平面上A, B两点间的路线问题. 像这种将空间问题转化为平面问题的方法对我们是很有用的.



图1

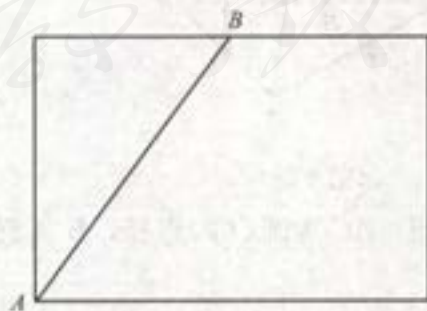


图2

上面我们是规定蚂蚁必须沿圆柱的侧面从 A 到 B ，那么无论圆柱的形状如何，沿直线 AB 的走法，路线一定是最短的。但是，如果问题没有规定，结论就不一定了。例如，我们把圆柱的形状加以改变：高是 7 厘米，底面半径为 8 厘米，此时从 A 到 B 的最短路线还是图 2 中的线段 AB 吗？

我们可以很容易算得

$$AB = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25,$$

但是，若从 A 沿着圆柱母线先达到上底面的 C ，再到 B ，这时蚂蚁所走过的距离为

$$AC + CB = 7 + 8 \times 2 = 23,$$

图 2 中的线段 AB 已经不是从 A 到 B 的最短路线了，为什么会这样呢？

其实把圆柱展开，点 B 的对应点是不唯一的。如图 3 所示， B_1, B_2 都是圆柱上 B 点的对应点。所以在把圆柱中由 A 到 B 这样一个曲面路线问题转化为平面路线问题时，应考虑到 A, B 两点间的线段是不唯一的， A, B 间的最短路线问题，应通过比较 AB_2, AB_1 的长度进而作出判断。

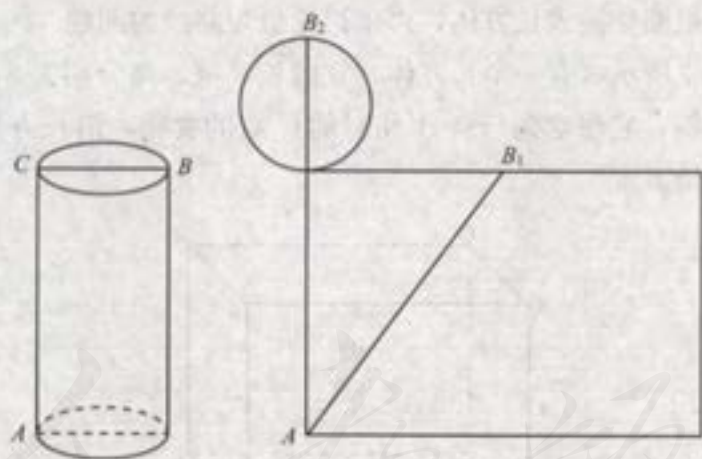


图 3

看来，这个“最短路线”与圆柱的形状有关，也就是说，圆柱的高 h 与底面半径 r 的大小关系会影响最短路线的选择。

下面我们作进一步的探讨：一般地，我们设圆柱的高为 h ，底面半径为 r ，则



$$AB_2^2 = (h+2r)^2 = h^2 + 4hr + 4r^2,$$

$$AB_1^2 = h^2 + \pi^2 r^2,$$

$$AB_2^2 - AB_1^2 = 4hr + 4r^2 - \pi^2 r^2.$$

如果我们取 $\pi=3$, 则

$$AB_2^2 - AB_1^2 = 4hr + 4r^2 - \pi^2 r^2 = (4h-5r)r,$$

故:

当 $h > \frac{5}{4}r$ 时, $AB_2 > AB_1$, 此时最短路线为 AB_1 ;

当 $h < \frac{5}{4}r$ 时, $AB_2 < AB_1$, 此时最短路线为 AB_2 ;

当 $h = \frac{5}{4}r$ 时, $AB_2 = AB_1$, 此时最短路线为 AB_1 或 AB_2 .

其实, 在这个问题中, 对于 AB_2 , 大家不难想到, 而对于 AB_2 的考虑又能很好地巩固圆柱的表面展开图, 发展大家的空间观念, 更能使得问题的考虑变得全面.

下面我们把圆柱换成长方体, 再来讨论最短路线的问题.

例 如图 4 所示, 有一个长方体, 它的长、宽、高分别为 5, 3, 4. 在点 A' 处有一只蚂蚁, 它想吃到与点 A' 相对的 C 点的食物, 沿长方体表面需要爬行的最短路线是多少?

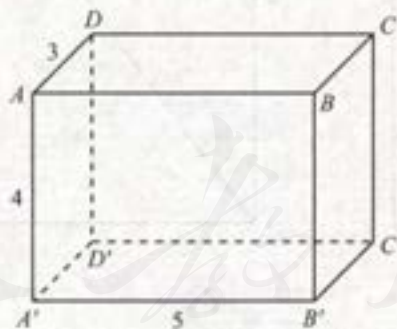


图 4

若把长方体的 6 个面分别称为上面、下面、前面、后面、左面、右面. 显然, 从 A' 到 C 的最短路线一定是从 A' 出发, 经过长方体两个面到达 C . 具体来说, 它可能有“前上”“前右”“左上”“左后”“下右”“下后”6 种不同的情况 (当然, “下右”“下后”2 种情况, 在实际问题中不具有可行性). 在这 6 种情况中, 共有 3 种路程结果.

第一种结果：如图 5 所示，有

$$A'C_1 = A'C_2 = \sqrt{5^2 + (3+4)^2} = \sqrt{74} \quad (\text{“前上” “下后”}).$$

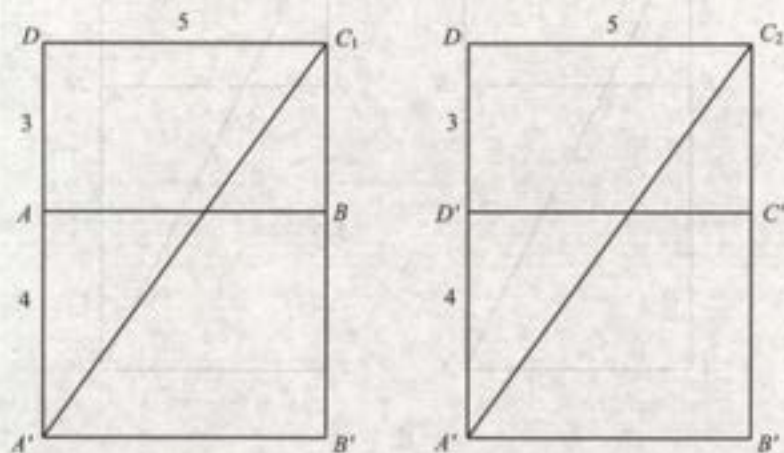


图 5

第二种结果：如图 6 所示，有

$$A'C_3 = A'C_4 = \sqrt{3^2 + (5+4)^2} = \sqrt{90} \quad (\text{“左上” “下右”}).$$

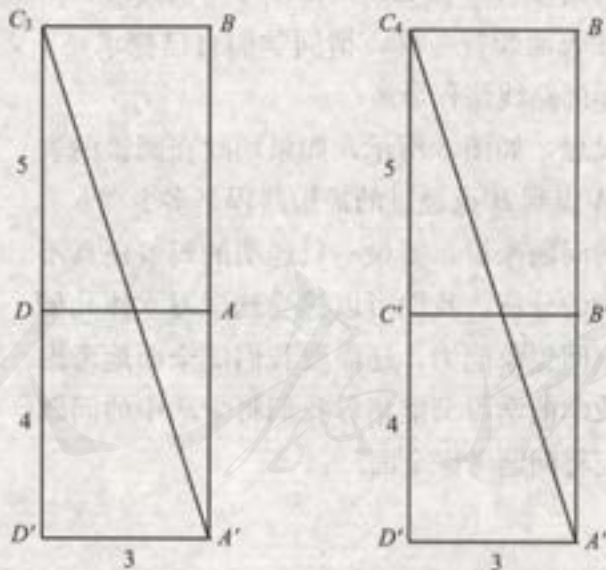


图 6

第三种结果：如图 7 所示，有

$$A'C_5 = A'C_6 = \sqrt{4^2 + (5+3)^2} = \sqrt{80} \quad (\text{“前右” “左后”}).$$

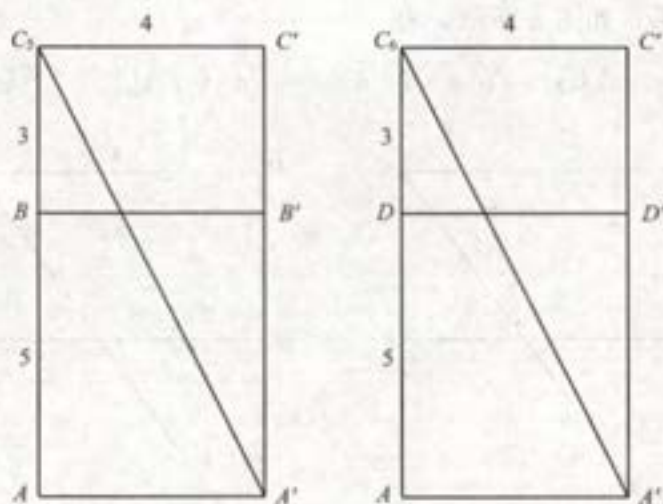


图 7

综上, 最短路程应为 $\sqrt{74}$, 路线如图 5 所示.

对于这个问题我们还可以作进一步的推广, 设题中的长方形长、宽、高分别为 a, b, c , 且 $a > b > c$. 则最短路程应为 $\sqrt{a^2 + (b+c)^2}$, 路线应为以长为折痕展开图中的线段 AC_1 或 AC_2 (即图 5 中的线段 AC_1 或 AC_2).

像蚂蚁在圆柱表面爬行一样, 请同学们自己探求一下, 当长方体的形状变化时, 经过怎样的路线路程最短.

我们还可以设想, 如图 8 所示, 如果蚂蚁在圆锥的表面爬行一周, 由 A 点到 B 点经过的最短路程是多少呢?

就上面研究的问题来看, 要做一只聪明的蚂蚁还真不容易呢. 经过上面的分析, 我们可以感受到学习立体几何不仅需要一定的空间想象能力, 还需要我们能全面地考虑问题; 反过来, 数学的学习又能培养我们将生活中的问题数学化, 帮助我们将问题考虑全面.



图 8

第十一章 概率与统计初步



概率论的诞生，使人们对随机现象发生的可能性大小，由感性认识上升到理性分析。

统计学的发展，对数据的归纳、整理、比较和分析，为人类决策提供了科学的依据。

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。

——马克思

观察可能导致发现。观察将揭示某种规则、模式或定律。

——波利亚

概率是近代发展起来的一门数学学科，在生产实践和日常生活中有着广泛的应用，统计学的研究对象是客观事物的数量特征和数量关系，它是关于数据的搜集、整理和分析方法的科学。本章将首先介绍概率初步的基础知识，并在初中的基础上，继续学习统计知识，重点研究如何从总体中抽取样本，如何对总体的分布情况进行估计，以及如何求具有线性相关关系的两个变量的回归直线方程。

11.1 计数的基本原理

1. 分类计数原理

问题 1 某人从甲地去乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船。一天中，从甲地直达乙地的火车有 2 班，汽车有 5 班，轮船有 3 班。那么，一天中此人乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的选择方法？

一天中，此人从甲地去乙地可以选择的交通工具有 3 类，无论选择哪类交通工具，他都可以从甲地到达乙地。若选择乘火车，有 2 种不同的选择方法；若选择乘汽车，有 5 种不同的选择方法；若选择乘轮船，有 3 种不同的选择方法。因此，在一天中，此人乘坐这些交通工具从甲地到乙地，不同的选择方法共有 $2+5+3=10$ （种）。

一般地，有如下原理。

分类计数原理 如果完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。

分类计数原理也称为加法原理。

例 1 书架上层有不同的数学书 15 本，中层有不同的语文书 18 本，下层有不同的物理书 7 本。现要从书架上任取一本书，问有多少种不同的取法？

分析：从书架上任取一本书，有三类取法：第一类取法是从上层取一本数学书，可以从 15 本中任取一本，有 15 种不同的取法，即 $m_1=15$ ；第二类取法是从书架的中层取一本语文书，可以从 18 本中任取一本，有 18 种不同的取法，即 $m_2=18$ ；第三类取法是从书架的下层取一本物理书，可以从 7 本中

任取一本，有 7 种不同的取法，即 $m_3=7$ 。无论从书架的上层、中层还是下层取出一本书，任务都可以完成，符合分类计数原理。

解：根据分类计数原理，不同的取法共有

$$\begin{aligned} N &= m_1 + m_2 + m_3 \\ &= 15 + 18 + 7 \\ &= 40 \text{ (种)}. \end{aligned}$$

即有 40 种不同的取法。

例 2 某班同学分成甲、乙、丙、丁 4 个小组，其中甲组 12 人，乙组 11 人，丙组 9 人，丁组 13 人。现要从该班选派一人去参加某项活动，问有多少种不同的选法？

分析：该班同学分成甲、乙、丙、丁 4 个小组，若选甲组的同学有 12 种选法，若选乙组的同学有 11 种选法，若选丙组的同学有 9 种选法，若选丁组的同学有 13 种选法。从任何一个小组中选出一名同学去参加活动，任务均可完成，符合分类计数原理。

解：根据分类计数原理，不同的选法共有

$$\begin{aligned} N &= 12 + 11 + 9 + 13 \\ &= 45 \text{ (种)}. \end{aligned}$$

即有 45 种不同的选法。

2. 分步计数原理

问题 2 如图 11-1 所示，某人从 A 地去 C 地，中间必须经过 B 地。已知由 A 地到 B 地有 3 条路可走，再由 B 地到 C 地有 2 条路可走。那么此人由 A 地经过 B 地到 C 地，有多少种不同的走法？



图 11-1

从 A 地到 C 地不能由一个步骤完成，必须分成两个步骤：第一步从 A 地到 B 地，有 3 种不同的走法，分别用 a_1, a_2, a_3 表示；第二步从 B 地到 C 地，有 2 种不同的走法，分别用 b_1, b_2 表示。由 A 地经过 B 地到 C 地，全部的走法为

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_1, a_3b_2,$$

共有 6 种不同的走法，也就是从 A 地到 B 地的每一条路，都有 2 种不同的方



法到C地，所以从A地到C地共有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的走法。

一般地，有如下原理。

分步计数原理 如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法。

分步计数原理也称为乘法原理。

例3 生活中，我们经常会遇到用数字设置密码的问题。假设某人要设置六位数字的密码，并且每位上的数字均可从0, 1, 2, …, 9这10个数字中任意选取，那么共能设置出多少个不同的密码？

分析：如图11-2所示，要设置一个由六位数字组成的密码，自左向右依次为第1位，第2位，…，第6位，可以分成六个步骤完成：第一步设置第1位，可以从0~9这10个数字中任选一个，有10种不同的选法；第二步设置第2位，因为各位上的数字可以重复，所以也有10种不同的选法……第六步设置第6位，有10种不同的选法。



图 11-2

解：根据分步计数原理，六位数字密码共有

$$\begin{aligned} N &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 10^6 \text{ (个).} \end{aligned}$$

即共能设置 10^6 个不同的密码。

分类计数原理与分步计数原理的共同点 是：都研究“完成一件事共有多少种不同的方法”。它们的区别在于一个与“分类”有关，一个与“分步”有关。如果完成一件事



想一想 某市固定电话
号码为八位，

若考虑数字0和1不能
作为电话号码的首位，
那么该市最多能有多少
个八位数字的
电话号码？



有 n 类办法，每一类办法之间是相互独立的，无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事，那么计算完成这件事的所有方法种数可以使用分类计数原理；如果完成一件事共需分成 n 个步骤，每个步骤之间相互关联，缺少任何一个步骤，这件事都无法完成，那么计算完成这件事的所有方法种数可以使用分步计数原理。

例 4 甲班有三好学生 8 人，乙班有三好学生 6 人，丙班有三好学生 9 人。问：

(1) 从这 3 个班中任选 1 名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？

(2) 从这 3 个班中各选 1 名三好学生，出席三好学生表彰会，有多少种不同的选法？

分析：(1) 从这 3 个班中任选 1 名三好学生，可以从甲班的 8 人中任选 1 人，也可以从乙班的 6 人中任选 1 人，还可以从丙班的 9 人中任选 1 人，每一种办法都可以完成这件事，共有 3 类办法，符合分类计数原理。

(2) 从这 3 个班中各选 1 名三好学生，可以分为三个步骤：第一步从甲班的 8 人中任选 1 人；第二步从乙班的 6 人中任选 1 人；第三步从丙班的 9 人中任选 1 人。这三个步骤缺少任何一个，都不能完成这件事，符合分步计数原理。

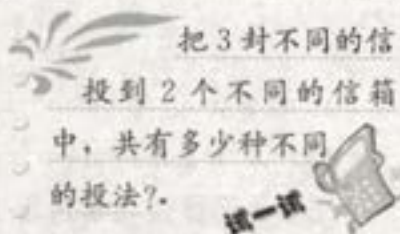
解：(1) 根据分类计数原理，不同的选法有

$$\begin{aligned} N &= 8 + 6 + 9 \\ &= 23 \text{ (种)}; \end{aligned}$$

(2) 根据分步计数原理，不同的选法有

$$\begin{aligned} N &= 8 \times 6 \times 9 \\ &= 432 \text{ (种)}. \end{aligned}$$

即从这 3 个班中任选 1 名三好学生，有 23 种不同的选法；从这 3 个班中各选 1 名三好学生，有 432 种不同的选法。





练习11-1

1. 口答:

(1) 一项工作可以用 2 种方法完成, 有 5 人会用第一种方法, 另外 4 人会用第二种方法, 要选出 1 个人来完成这件工作, 共有多少种不同的选法?

(2) 从甲地到乙地, 一天中有 2 个班次的火车, 5 个班次的汽车, 那么某人在一天中从甲地到乙地的不同走法有多少种?

(3) 一个口袋内有 6 个不同的黑球, 4 个不同的白球, 5 个不同的红球, 从中任取 1 个球, 共有多少种不同的取法?

(4) 某商业大厦有东、南、西 3 个大门, 某人从一个门进从另一个门出, 共有多少种不同的走法?

2. 由数字 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个无重复数字的四位数?

3. 代数式 $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4)$ 展开后共有多少项?

4. 从 2, 3, 5, 7 这 4 个数中, 任取 2 个不同的数做成分数, 这样的分数共有多少个?

5. 一座山的南坡有 3 条路、北坡有 2 条路通往山顶, 问:

(1) 从南坡上山, 再由北坡下山, 共有多少种不同的走法?

(2) 要求上、下坡走不同的山路, 共有多少种不同的走法?

(3) 随意选择上、下坡路线, 共有多少种不同的走法?

11.2 概率初步

11.2.1 随机事件与样本空间

我们来看下面的问题:

(1) 抛掷一枚质地均匀的硬币, 是否是正面 (有币值的一面) 向上?

(2) 买一张彩票, 是否能够中奖?

(3) 篮球运动员投篮, 是否能够投中?

(4) 抛掷一枚骰子, 朝上一面的点数是多少?

.....

通过试验可以发现,抛掷一枚硬币,可能正面向上,也可能反面向上;买一张彩票可能中奖也可能不中奖;篮球运动员投篮,可能投中也可能投不中;抛掷一枚骰子,骰子朝上一面的点数可能是1点,2点,3点,4点,5点,6点.....

像这样,在一定条件下,具有多种可能的发生结果,但事先不能确定哪一种结果将会发生的现象,叫做随机现象.

在实际中,一般通过观察试验来研究随机现象.对随机现象的观察或试验称为随机

试验,简称为试验.例如,上面提到的抛掷一枚硬币,只可能出现正面向上和反面向上两种结果;买一张彩票,只有中奖和不中奖两种结果;掷一枚骰子,朝上的一面只可能出现1点,2点,3点,4点,5点,6点六种不同的结果等等.这些试验都是随机试验.

随机试验中每种可能的结果称为随机事件,简称事件.如,掷一枚骰子,朝上的一面“出现2点”、“出现奇数点”、“出现的点数大于3”等,都是事件.不能再分的最简单的随机事件称为基本事件.如,上面提到的“出现2点”是基本事件,但“出现奇数点”和“出现的点数大于3”不是基本事件.全体基本事件构成的集合叫做随机试验的样本空间,通常用大写希腊字母 Ω 表示.

例如,抛掷一枚硬币这个随机试验的样本空间,就是集合{正面向上,反面向上},即

$$\Omega = \{\text{正面向上}, \text{反面向上}\},$$

或简记为

$$\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}.$$

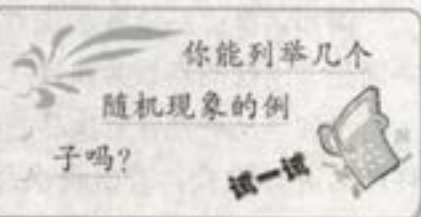
它有两个基本事件:正面向上和反面向上.

一次抛掷两枚不同的硬币的样本空间为

$$\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}.$$

它有4个基本事件.

掷一枚骰子的样本空间





$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

其中 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别代表骰子朝上一面出现 1 点, 2 点, 3 点, 4 点, 5 点, 6 点.

从集合的观点看, 样本空间的任意一个子集, 就是事件, 常用大写英文字母 A, B, C 等表示.

例如, 抛掷一枚骰子的样本空间的一个子集 $A = \{2, 4, 6\}$ 表示朝上的一面是“出现的点数为偶数”这个事件.

又如, 从一批含有次品的产品中, 任取 3 件产品进行检验, 若出现次品数量的所有可能情况是, 3 件产品中无次品, 有 1 件次品, 有 2 件次品, 有 3 件次品, 共四种结果, 则这个实验的样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}.$$

现在来看两个特殊的事件.

一个是样本空间本身表示的事件. 例如, 抛掷一枚硬币的随机试验, 样本空间为 $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$, Ω 所表示的事件是“抛掷一枚硬币, 正面向上或反面向上”. 显然, 对于任何一次抛掷一枚硬币的试验, 这样的结果是必然发生的.

在一定条件下, 必然发生的事件, 称为必然事件. Ω 所表示的事件就是一个必然事件.

另一个是空集 $\emptyset$ 表示的事件. 例如, 抛掷一枚硬币的随机试验, 样本空间的子集 $\emptyset$, 它表示的事件是, “抛掷一枚均匀的硬币, 不出现正面向上且不出现反面向上”. 它是这个随机试验中不可能出现的结果.

在一定条件下, 不可能发生的事件, 称为不可能事件.

例 1 甲、乙两同学做一次猜拳游戏 (石头、剪子、布):

- (1) 写出这一随机试验的样本空间;
- (2) 求这个随机试验的基本事件的个数;
- (3) “出现平局”这一事件包含哪几个基本事件?

解: (1) 作图 11-3, 从图中可以看出这一事件的样本空间为

$$\Omega = \{(\text{石头}, \text{石头}), (\text{石头}, \text{剪子}), (\text{石头}, \text{布}), (\text{剪子}, \text{石头}),$$



想一想 左边检验产品的随机试验

中, 0, 1, 2, 3 分别表示哪个基本事件? Ω 的子集 $B = \{0, 1\}$ 表示哪个随机事件?



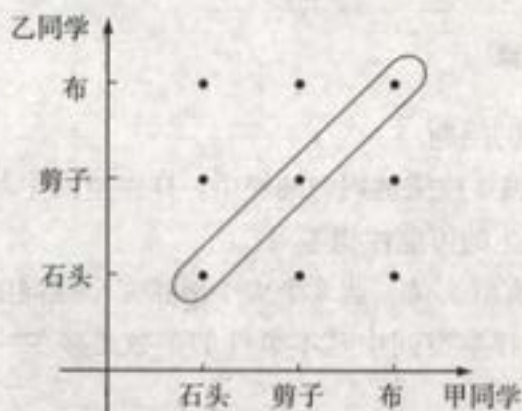


图 11-3

(剪子, 剪子), (剪子, 布), (布, 石头), (布, 剪子), (布, 布)};

(2) 基本事件的个数是 9;

(3) “出现平局”这一事件包含 3 个基本事件: (石头, 石头), (剪子, 剪子), (布, 布).

像例 1 这样, 把全体基本事件用直观图中的点表示出来, 不但能够表示出基本事件总数, 而且能够准确地找出某事件所包含的基本事件数. 这种方法在以后求古典概率时常常用到.

练习 11-2

1. 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 种下一粒种子, 观察种子是否发芽;
- (2) 甲、乙两队进行一场篮球比赛, 观察甲队的胜负结果;
- (3) 从含有 15 件次品的 100 件产品中任取 5 件, 观察其中的次品数.

2. 做抛掷两枚骰子的试验, 用 (x, y) 表示结果, 其中 x 表示第一枚骰子朝上一面出现的点数, y 表示第二枚骰子朝上一面出现的点数:

- (1) 求样本空间中所有基本事件的个数;
- (2) 写出随机事件“点数之和等于 10”所包含的基本事件;
- (3) 写出随机事件“点数之和大于 10”所包含的基本事件.



11.2.2 古典概率

我们来研究下面的问题.

问题 1 连续抛掷 3 枚质地均匀的硬币, 样本空间中基本事件的个数是多少? 每个基本事件发生的可能性相等吗?

问题 2 袋内装有红、黄、蓝 3 个大小形状完全相同的球, 从中任取 2 个球, 这个随机试验的样本空间中基本事件的个数是多少? 每个基本事件发生的可能性相等吗?

在问题 1 中, 连续抛掷 3 枚质地均匀的硬币, 它的样本空间为

$$\Omega = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), \\ (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\},$$

它有 8 个基本事件. 由于硬币的质地是均匀的, 因而每枚硬币正面向上和反面向上的机会是均等的, 所以, 每个基本事件发生的可能性是相等的.

在问题 2 中, 随机试验的样本空间为

$$\Omega = \{(\text{红}, \text{黄}), (\text{红}, \text{蓝}), (\text{黄}, \text{蓝})\},$$

它有 3 个基本事件. 由于每个球被取到的机会是均等的, 所以这三个基本事件发生的可能性是相等的.

从上面的问题可以看到, 这类随机试验具有下述两个特点.

(1) 有限性: 只有有限个不同的基本事件;

(2) 等可能性: 每个基本事件出现的机会是相等的.

我们将具有这两个特点的随机试验模型称为古典概型.

古典概率的定义 对于古典概型, 如果试验的基本事件总数为 n , 随机事件 A 所包含的基本事件数为 m , 我们就用 $\frac{m}{n}$ 来描述事件 A 出现的可能性大小, 并称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的概率 (也称为古典概率), 记作



$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (m \leq n).$$

显然，事件 A 的概率满足

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

并且，必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0.

例 2 盒子中有 10 个大小相同的球，分别标有号码 1, 2, 3, ..., 10, 从中任取一球，求此球的号码为奇数的概率.

解：基本事件总数 $n=10$ ，每个球被取到的机会是等可能的.

设“球的号码为奇数”为事件 A ，则事件 A 包含的基本事件是 1 号，3 号，5 号，7 号，9 号，即 $m=5$. 因此

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

上面的例题，我们是用列举法来确定样本空间和随机事件中所包含的基本事件的个数. 这种方法直观、清楚，但在很多实际问题中，由于基本事件的总数可能较大，要想把它们一一列举出来，非常困难，因此我们往往需要借助计数原理来求样本空间和随机事件中所包含的基本事件的个数.

例 3 在 100 件产品中，有 96 件合格品，4 件次品，从中任取 2 件. 计算：

(1) 这 2 件都是合格品的概率；

(2) 其中 1 件是合格品，1 件是次品的概率.

分析：“从 100 件产品中任取 2 件”，可分成两步完成：第一步，从 100 件产品中任取 1 件，有 100 种不同的方法；第二步，从剩下的 99 件产品中任取 1 件，有 99 种不同的方法. 因此，由分步计数原理知，取法总数是 $100 \times 99 = 9\,900$. 同理，“任取 2 件都是合格品”的取法总数是 $96 \times 95 = 9\,120$.

“从 100 件产品中任取 2 件，其中 1 件是合格品 1 件是次品”，要分成两类：第一类，先取合格品，再取次品；第二类，先取次品，再取合格品. 由分类和分步计数原理可知，取法总数为 $96 \times 4 + 4 \times 96 = 768$.

解：由分步计数原理可知，基本事件总数为



想一想 两同学做一
次猜拳游戏

- ✓ (石头、剪子、布)，出现
- ✓ 平局的概率是多少？每人
- ✓ 胜和败的概率各是多少？
- ✓ 并说明这个游戏的
- ✓ 公平性.





$$n = 100 \times 99 = 9\,900.$$

(1) 记“任取 2 件，都是合格品”为事件 A，由分步计数原理知，事件 A 包含的基本事件数为 $m_1 = 96 \times 95 = 9\,120$ ，所以

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{9\,120}{9\,900} = \frac{152}{165}.$$

(2) 计“任取 2 件，其中 1 件是合格品，1 件是次品”为事件 B，则事件 B 是由先取到正品再取到次品，和先取到次品再取到正品，

这两类情况构成。因此事件 B 包含的基本事件数 $m_2 = 96 \times 4 + 4 \times 96 = 768$ ，所以

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{768}{9\,900} = \frac{64}{825}.$$



想一想 如果计算出买彩票中奖的

概率是 $\frac{1}{1\,000}$ ，那么就意

味着“买 1 000 张彩票一定

有 1 张中奖”，

正确吗？



练习 11-3

1. (1) 抛掷 1 枚骰子，计算事件 A “朝上的一面出现偶数点”的概率；

(2) 抛掷 2 枚骰子，计算事件 B “朝上一面的点数之和为 7”的概率。

2. 有 10 件产品，其中有 2 件次品，从中抽取 3 件，求：

(1) 这 3 件产品全是正品的概率；

(2) 这 3 件产品恰有 1 件次品的概率；

(3) 这 3 件产品至少有 1 件次品的概率。

3. 从 1, 2, 3, 4, 5 中取出 4 个数字组成没有重复数字的四位数，组成的数是奇数的概率是多少？

11.3 随机抽样

问题 1 食品、饮料中的细菌是否超标？每天城市里的垃圾有多少被回收了？影响学生视力状况的主要原因有哪些？电视台某个栏目的收视率是多少？某工厂产品的合格率是多少？……

为了回答上面这些问题,必须收集相关的数据,通过对数据的分析,作出相应的回答.当不可能或没有必要对所研究的对象进行全面观察时,就只能抽取其中一部分进行观察分析,取得某些数据资料,进而推断研究对象的整体情况.

一般地,我们把所考察对象的某一数值指标的全体看做总体,构成总体的每一个数值指标作为个体,从总体中抽出的一部分叫做样本,样本中个体的数量叫做样本容量.

在获取样本的过程中,样本的选择是至关重要的.样本能否代表总体,直接影响着统计结果的可靠性.

例如,在1936年美国总统选举前,一份颇有名气的杂志《Literary Digest》的工作人员做了一次民意测验,调查时任堪萨斯州州长的艾福·兰登(A. Landon)和时任总统的罗斯福(F. D. Roosevelt)中谁将当选为下一届总统.为了了解公众意向,调查者通过电话簿和车辆登记簿上的名单给一大批人发了调查表.通过分析收回的调查表,显示艾福·兰登非常受欢迎,于是此杂志预测艾福·兰登将在选举中获胜.然而,实际选举的结果正好相反,罗斯福最后在选举中获胜,其数据如表11-1所示:

表 11-1

候选人	预测(抽样)结果/%	选举(总体)结果/%
罗斯福	43	62
艾福·兰登	57	38

上述案例,之所以成为一次失败的调查,就是因为在1936年的美国,只有少数富人拥有电话和汽车,从而样本不能充分地代表总体,于是调查结果失真,这次调查被称为抽样中的“泰坦尼克事件”.

我们希望抽取的样本能充分地代表总体.如何抽取样本,直接关系到对总体估计的准确程度,因此在抽样时要保证每一个个体被抽到的机会是均等的,满足这个条件的抽样叫做随机抽样.在进行抽样时,如果能将总体“搅拌均匀”,就能满足随机抽样的需要,使得从中任意抽取一部分个体作为样本,它们含有与总体基本相同的信息.

下面介绍三种经常采用的随机抽样方法.



11.3.1 简单随机抽样

问题 2 假设你是一名食品卫生监督人员, 要对某食品店内的一批小包装巧克力进行卫生达标检验, 你应该怎样获得检验样本呢?

实践中常用的一个方法是, 将这批小包装巧克力放入一个不透明的袋子中, 搅拌均匀, 然后逐一不放回地摸取一部分 (这样可以保证每一袋巧克力被抽中的机会相等), 就得到一个简单随机样本.

设计抽样方法时, 在考虑样本代表性的前提下, 应努力使抽样过程简便易行. 像上面的抽样方法就是简单随机抽样.

一般地, 设一个总体含有 N 个个体, 从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本 ($n \leq N$), 如果每次抽取时总体中的每个个体被抽到的机会都相等, 就把这种抽样方法叫做简单随机抽样. 这样抽取的样本, 叫做简单随机样本.

最常用的简单随机抽样方法有两种: 抽签法和随机数表法.

1. 抽签法

问题 3 某职业中专二年级 (2) 班有 50 名学生, 计划调查他们的血钙含量, 现要抽取 10 名学生进行检测, 如何抽取才能使得每名学生被抽到的机会均等?

我们可以把每名学生的编号分别写在 50 张纸片上, 揉成小球, 放到一个不透明的袋子中, 充分搅拌后, 从中逐个抽出 10 个纸球, 从而抽取到 10 名要检测的学生. 这种获取样本的方法就是我们熟悉的抽签法.

一般地, 将总体中的 N 个个体编号, 并把号码分别写在号签上, 再将号签放在一个容器中, 搅拌均匀后, 每次从中抽取一个号签, 不放回地连续抽取 n 次, 就得到一个容量为 n 的样本, 这种抽样方法就是抽签法.

2. 随机数表法

问题 4 假设我们要考察某公司生产的净含量标注为 200 克袋装饼干的净含量是否达标, 欲从 700 袋饼干中抽取 50 袋进行称量. 如果用抽签法获取样本, 就需要写 700 张号签. 这样做是否方便呢?

抽签法虽然简单易行, 但当总体中的个数较多时, 制签的过程比较麻烦,



想一想 当总体中的个体很多时, 抽签法方便吗?



同时将总体“搅拌均匀”也比较困难,导致产生样本代表性差的可能性较大.
随机抽样中,另一个经常被采用的方法是随机数表法.

随机数表是由 0, 1, 2, ..., 9 这 10 个数字组成的数表,并且表中的每一位出现各个数字的可能性相同.通过随机数生成器,例如利用计算器或计算机生成随机数的功能,可以生成一张随机数表(见本章附录),通常根据实际需要和方便的原则,将几个数组成一组(如 5 个数一组),然后通过随机数表抽取样本,这种抽样方法叫做随机数表法.

在上面的问题中,利用随机数表抽取样本时,可以按照下面的步骤进行:

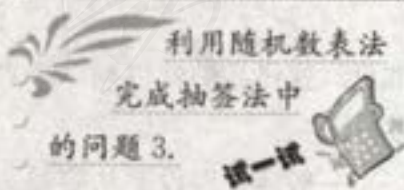
第一步,先将 700 袋饼干编号,可以编为 000, 001, 002, ..., 699;

第二步,在随机数表中任选一个数,例如选出第 3 行第 2 列的数 1 (为了便于说明,下面截取了附录中随机数表中的第 2 行至第 7 行);

第 2 列

	43021	92980	27768	26916	27783	84572	78483	39820
第 3 行	61459	39073	79242	20372	21048	87088	34600	74636
	63171	58247	12907	50303	28814	40422	97895	61421
	42372	53183	51546	90385	12120	64042	51320	22983
	81500	13219	57941	74927	32798	98600	55225	42059
	59408	66368	36016	26247	25967	49487	26968	86021

第三步,从选定的数 1 开始向右读(读数的方向也可以是向左、向上、向下等),得到一个三位数 145,由于 $145 < 699$,说明号码 145 在总体内,将它取出.继续向右读,得到 939,由于 $939 > 699$,将它去掉,按照这种方法继续向右读,只要读出的三位数不大于 699 且不与前面取出的数重复,就把它取出,否则就跳过不取,取到一行末尾时转到下一行从左到右继续读数.如此下去直到得出在 000~699 之间的 50 个不同的三位数.我们按此称量出相应编号的袋装饼干的净含量,就得到一个容量为 50 的样本.





练习11-4

1. 口答下列问题:

(1) 抽签法是如何保证样本的代表性的?

(2) 随机数表法能代替抽签法吗?

(3) 用随机数表法抽取样本有什么优点和缺点?

(4) 请你将抽样调查和普查做一个比较, 并说一说抽样调查的好处和可能出现的问题.

2. 某职业中专二年级共有 500 名学生, 欲从中随机抽出 50 名测试汉字录入速度, 计划用抽签法和随机数表法进行抽样, 分别写出抽取过程.

3. 某居民区有 730 户居民, 居委会计划从中抽取 25 户调查其家庭收入情况, 你能帮助居委会抽出一个简单随机样本吗?

11.3.2 系统抽样

问题 5 某职业中专为了了解二年级学生对教师教学的意见, 计划从二年级 1 200 名学生中抽取 120 名进行调查. 除了用简单随机抽样获取样本外, 你能否设计其他抽取样本的方法?

首先给 1 200 名学生逐一编号 1~1 200; 然后确定分段间隔, 对编号进行分段, 由于 $\frac{1\ 200}{120}=10$, 这个间隔定为 10, 于是将编号分成 120 个号码段; 再从第 1 个号码段 (1~10 号) 中随机地抽取一个号码, 作为样本的第一个个体, 假如抽到的是 6 号, 于是从 6 号开始, 依次取出以下数字

6, 16, 26, 36, ..., 1 196

即可. 这样我们就得到一个容量为 120 的样本, 这种抽样方法就是一种系统抽样.

一般地, 假设要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本, 我们可以按下列步骤进行抽样:

(1) 先将总体的 N 个个体编号 (当个体自身所带的号码为连号时可直接利用之, 如



假如从第 1 个号码段抽到的编号是 10, 则得到样本的编号是哪些?

试一试



学号、准考证号、门牌号)；

(2) 确定分段间隔 k ，对编号进行分段，当 $\frac{N}{n}$ 是整数时，取 $k = \frac{N}{n}$ ，当 $\frac{N}{n}$ 不是整数时，取 k 为 $\frac{N}{n}$ 的整数部分，并随机地从总体中剔除 $N - kn$ 个个体，对余下的进行连续编号；

(3) 在第 1 个号码段用简单随机抽样法确定一个个体编号 $l (l \leq k)$ ；

(4) 依次得到其他的个体编号 $l+k, l+2k, \dots, [l+(n-1)k]$ 。

这种抽样方法叫做系统抽样。

练习 11-5

1. (口答) 你认为系统抽样有哪些优点和缺点？

2. 设某校共有 120 名教师，为了支援新疆的教育事业，现要从中随机地抽出 14 名教师组成暑期援疆讲师团，请用系统抽样法选出讲师团成员。

3. 有人说，可以借用居民身份证号码来进行中央电视台春节联欢晚会的收视率调查：在 1~999 中抽取一个随机数，比如这个数是 321，那么身份证后三位数是 321 的观众就是要调查的对象。请问，这样所获得的样本有代表性吗？为什么？

11.3.3 分层抽样

问题 6 假设某区有高中生 6 500 人，初中生 11 900 人，小学生 17 000 人。当地教育部门为了了解本地区中小学生的视力情况，计划从本地区的小学生中抽取 1% 的学生进行调查，应该怎样抽取样本？

我们知道，不同年龄阶段的学生的视力情况可能存在明显差异，因此应将全体学生分成高中、初中和小学三部分分别抽样。另外，三部分学生的人数相差较大，因此，为了充分反映本地区中小学生的视力情况，还应考虑各学段学生在样本中所占比例的大小。

由于样本容量与总体中的个体数之比是 1 : 100，因此样本中包含的各部分的个体数应该是



$$\frac{6\,500}{100}, \frac{11\,900}{100}, \frac{17\,000}{100},$$

即要抽取 65 名高中生、119 名初中生和 170 名小学生的视力情况作为样本。

这样，如果从学生人数这个角度来看，按照这种抽样方法所获得的样本结构与这一地区全体中小学生的结构基本相同。

一般地，在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法叫做分层抽样。

从上面的抽样过程可以看出，分层抽样充分利用了调查者对调查对象（总体）事先所掌握的各种信息，并充分考虑保持样本结构与总体结构的一致性，这对提高样本的代表性是非常重要的。所以，分层抽样在实际中有着非常广泛的应用。通常，当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样的方法。

**想一想**

抽样中的“泰坦尼克事件”，如果采取分层抽样的方法进行调查，结果还会失真吗？



练习 11-6

1. 口答下列问题：

(1) 简单随机抽样、系统抽样和分层抽样各有其特点和适用范围，对这三种抽样方法进行比较，说一说它们各自的优点和缺点；

(2) 有人说：“如果抽样方法设计得好，用样本进行身高调查与对 25 000 名学生进行身高普查的结果会差不多。因为抽样调查节省了人力、物力和财力，所以抽样调查更可取。”你认为这种说法有道理吗？为什么？

2. 分别用简单随机抽样和系统抽样的方法，从全班 50 名学生中抽取 10 名，统计他们上一周课外阅读的平均时间。全面调查全班同学上一周课外阅读的平均时间，并与抽样统计的结果进行比较，你能得出怎样的结论呢？

3. 某地区中小學生人数的分布情况如下表所示:

学段	城市	县镇	农村
小学/人	457 000	321 600	358 100
初中/人	326 200	234 200	181 200
高中/人	212 000	145 300	90 400

要调查该地区中小學生的近视情况, 根据上述基本数据, 设计一个样本容量为总体中个体数量的 $\frac{1}{1\,000}$ 的抽样方案.

4. 一般来说, 影响农作物收成的因素有气候、土质和田间管理水平等. 如果你是一个农村调查队成员, 要在秋收季节对你所在地区的玉米进行估产调查, 你将采取怎样的抽样方法进行调查?

11.4 用样本估计总体

前面我们研究了用随机抽样的方法, 在总体中抽取样本, 我们就得到一组数据. 利用所得数据, 可以画出这些数据的频率分布直方图, 算出其平均数和方差. 这些信息和原来的总体有什么关系呢? 研究表明, 我们可以用样本的频率分布估计总体的频率分布, 可以用样本的数字特征 (如平均数、方差) 估计总体的数字特征.

11.4.1 用样本的频率分布估计总体的分布

问题 1 某钢铁加工厂生产内径为 25.40 mm 的钢管, 为了掌握产品的生产状况, 需要定期对产品进行检测 (规定钢管内径的尺寸在 25.325~25.475 mm 内为优等品). 那么, 如果要知道所有生产的钢管中优等品所占的比例, 需要做哪些工作呢?

由于产品的数量巨大, 不可能一一检测所有的钢管, 如果我们把这些钢管的内径尺寸看成总体, 可以从中随机抽取一定数量的钢管, 如抽取 100 件进行检测, 把这 100 件钢管的尺寸分布情况作为总体的尺寸分布情况来看待,



即可以用这 100 件钢管的优等品率估计所有钢管的优等品率.

下面的数据是一次抽样中的 100 件钢管的内径尺寸:

25.39	25.36	25.34	25.42	25.45	25.38	25.39	25.42	25.47	25.35
25.41	25.43	25.44	25.48	25.45	25.43	25.46	25.40	25.51	25.45
25.40	25.39	25.41	25.36	25.38	25.31	25.56	25.43	25.40	25.38
25.37	25.44	25.33	25.46	25.40	25.49	25.34	25.42	25.50	25.37
25.35	25.32	25.45	25.40	25.27	25.43	25.54	25.39	25.45	25.43
25.40	25.43	25.44	25.41	25.53	25.37	25.38	25.24	25.44	25.40
25.36	25.42	25.39	25.46	25.38	25.35	25.31	25.34	25.40	25.36
25.41	25.32	25.38	25.42	25.40	25.33	25.37	25.41	25.49	25.35
25.47	25.34	25.30	25.39	25.36	25.46	25.29	25.40	25.37	25.33
25.40	25.35	25.41	25.37	25.47	25.39	25.42	25.47	25.38	25.39

从上面的 100 个数据中不易看出产品质量的分布情况, 必须对其进行统计. 下面我们列出这组样本数据的频率分布表, 画出频率分布直方图, 步骤如下:

(1) 求极差

极差是一组数据的最大值与最小值的差, 它反映了一组数据变化的幅度. 例如, 上面这组数据的最大值是 25.56, 最小值是 25.24, 它们的极差是 $25.56 - 25.24 = 0.32$.

(2) 决定组数与组距

样本数据有 100 个, 样本数比较大, 可以把样本分为 8~12 组, 我们这里取 11 组. 上面算得极差为 0.32, 因此组距为

$$\frac{\text{极差}}{\text{组数}} = \frac{0.32}{11} \approx 0.03.$$

(3) 决定分点

将第一组的起点定为 25.235, 组距为 0.03, 这样所分的 11 个组是

第 1 组: 25.235~25.265

第 2 组: 25.265~25.295

第 3 组: 25.295~25.325

第 4 组: 25.325~25.355

第 5 组: 25.355~25.385

第 6 组: 25.385~25.415

第 7 组: 25.415~25.445

第 8 组: 25.445~25.475

第 9 组: 25.475~25.505

第 10 组: 25.505~25.535

第 11 组: 25.535~25.565

(4) 列频率分布表

把各小组内数据的个数进行累计, 这个累计数叫做各个小组的频数, 各小组的频数除以样本容量, 得各小组的频率. 列出频率分布表 (表 11-2).

表 11-2 频率分布表

分组	个数累计	频数	频率	频率 组距
25.235~25.265	—	1	0.01	0.33
25.265~25.295	丁	2	0.02	0.67
25.295~25.325	正	5	0.05	1.67
25.325~25.355	正正丁	12	0.12	4.00
25.355~25.385	正正正下	18	0.18	6.00
25.385~25.415	正正正正正	25	0.25	8.33
25.415~25.445	正正正一	16	0.16	5.33
25.445~25.475	正正下	13	0.13	4.33
25.475~25.505	正	4	0.04	1.33
25.505~25.535	丁	2	0.02	0.67
25.535~25.565	丁	2	0.02	0.67
合计	100	100	1.00	

(5) 绘制频率分布直方图

在直角坐标系中, 用横轴表示产品内径尺寸, 纵轴表示频率与组距的比值, 得到频率分布直方图 (图 11-4).

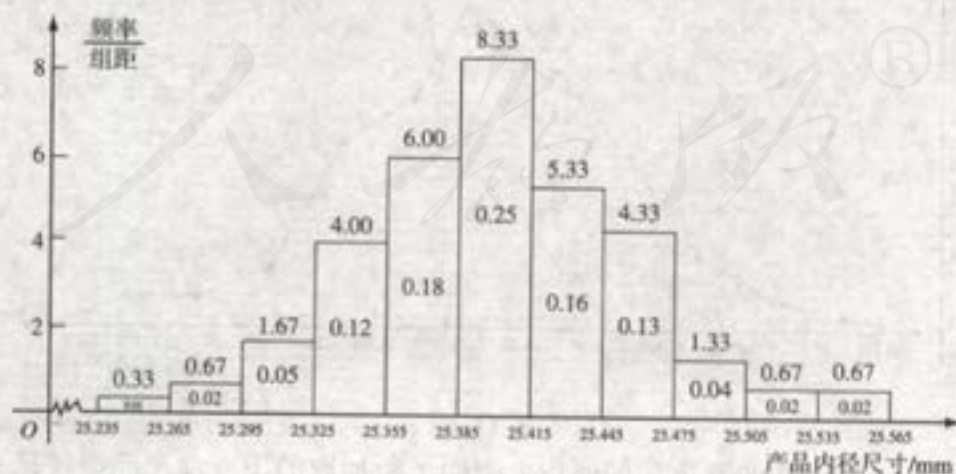


图 11-4

容易看出

$$\text{小长方形面积} = \text{组距} \times \frac{\text{频率}}{\text{组距}} = \text{频率}.$$

这就是说,各个小长方形的面积分别等于相应各组的频率,显然,所有长方形面积之和等于1.

当然,用样本的频率分布估计总体的分布时,要使样本能够很好地反映总体的特性,必须随机抽取样本.由于抽样的随机性,可以想到,如果随机抽取另外一个容量为100的样本,所形成的样本频率分布一般会与前一个样本频率分布有所不同.但是,它们都可以近似地看成是总体的分布.

从频率分布直方图可以清楚地看出数据分布的总体态势,但是从直方图本身得不出原始的数据内容.所以,把数据表示成直方图后,原有的具体数据信息就被抹掉了.

把频率分布直方图中各个长方形上边的中点用线段连接起来,就得到频率分布折线图(图11-5).为了方便看图,一般习惯于把频率分布折线图画成与横轴相连,所以横轴上的左右两端点没有实际的意义.

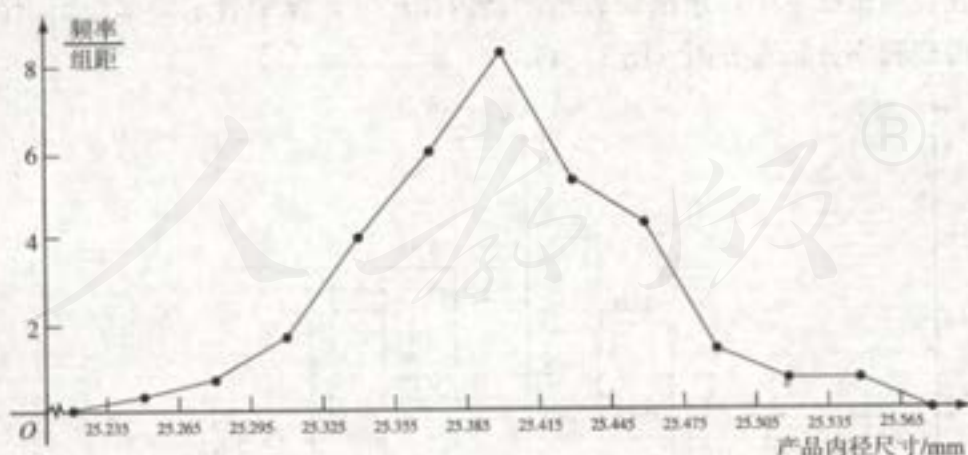


图 11-5

图11-4中各个小长方形的面积,表明了所抽取的100件产品内径尺寸落在各个小组内的产品个数与100的比值的大小.如果样本容量越大,所分组

观察图11-4,计算出内径尺寸在区间25.325~25.475内的个体数占样本容量的比例,也就是它的频率.如果这个区间的产品为优等品,那么优等品所占的比例是多少?



数越多,图中表示的频率分布就越接近于总体在各个小组内所取值的个数与总数比值的大小.

如果样本容量不断增大,分组的组距不断缩小,则频率分布直方图实际上越来越接近于总体的分布,它可以用一条光滑曲线 $y=f(x)$ 来描绘,这条光滑曲线就叫做总体密度曲线.总体密度曲线精确地反映了一个总体在各个区域内取值的规律.产品尺寸落在 (a, b) 内的百分率就是图中阴影部分的面积(图 11-6).

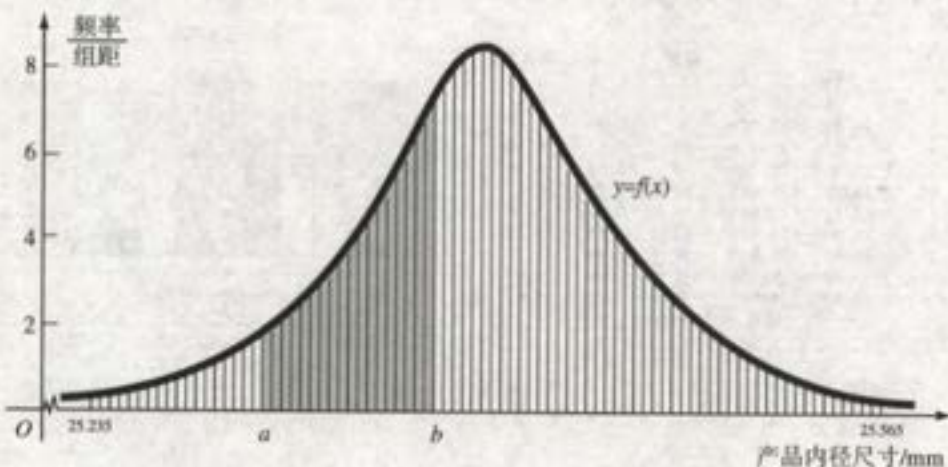


图 11-6

对本例来说,总体密度曲线呈中间高两边低的“钟”形分布,总体的数据大致呈对称分布,并且大部分数据都集中在靠近中间的区间内.

抽样后的样本数据汇总,还可以借助计算机来迅速、准确地画出频率分布直方图,图 11-7 就是运用前面所讲的画直方图的方法,在工作表中对样本数据汇总得出的结果.

常用的统计图表还有茎叶图.

下面我们通过一个例子来学习用茎叶图表示数据.

例如,某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛的得分情况如下:

甲的得分: 12, 15, 24, 25, 31, 31, 36, 36, 37, 39, 44, 49, 50.

乙的得分: 8, 13, 14, 16, 23, 26, 28, 33, 38, 39, 51.

上面的数据可以用图 11-8 来表示,它的中间部分像一棵植物的茎,两边部分像这棵植物茎上生长出来的叶子,用中间的数字表示两位运动员得分的十位数,两边的数字分别表示两个人各场比赛得分的个位数.例如,用 $3|389$ 就表示了 33, 38, 39 这三个数据.通常把这样的图叫做茎叶图.根据图 11-8

可以对两名运动员的成绩进行比较。

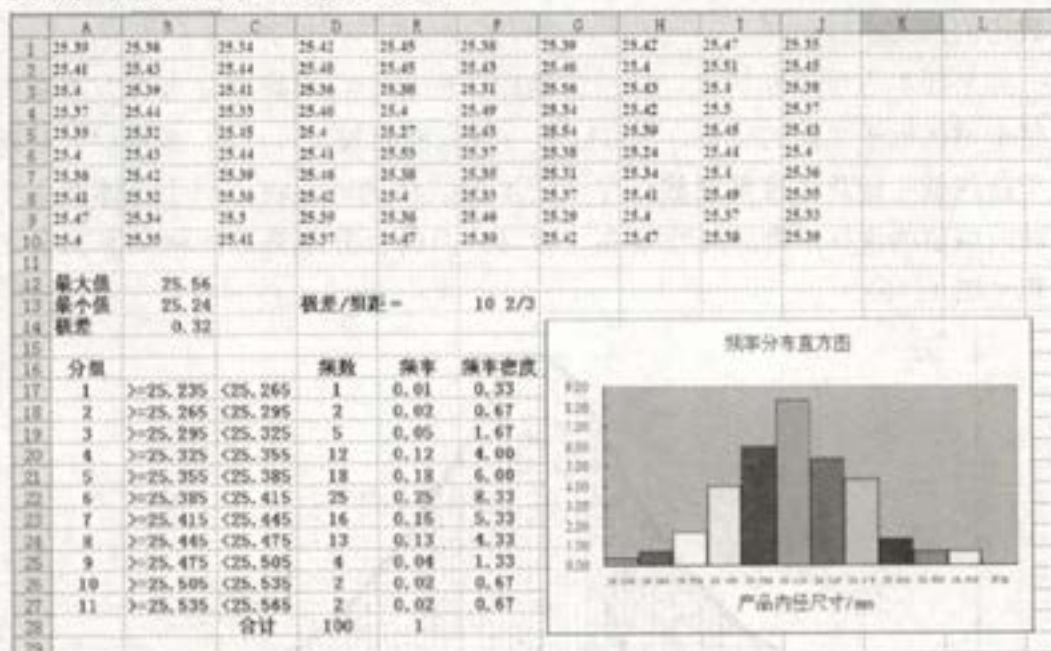


图 11-7

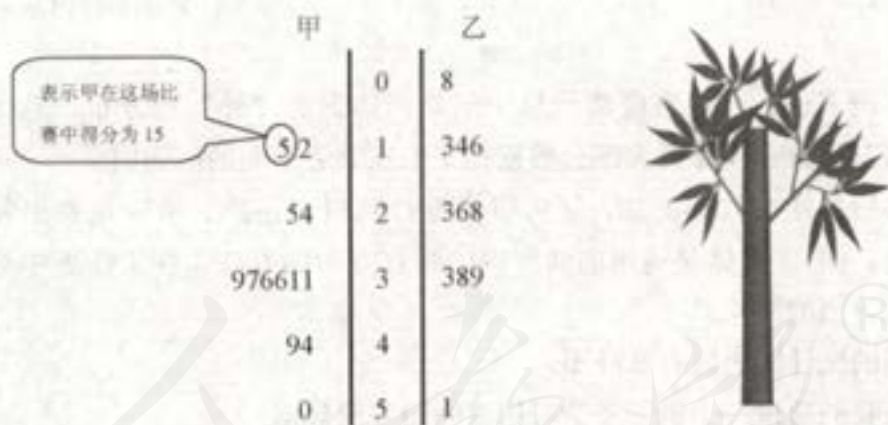


图 11-8

从这个茎叶图上可以看出，甲运动员得分情况是大致对称的，中位数是 36，乙运动员的得分情况除了一个特殊的分值外，也大致对称，中位数是 26。甲运动员的总体得分情况比乙运动员好。

用茎叶图表示数据有两个突出的优点：一是从统计图上没有原始信息的损失，所有的数据信息都可以从茎叶图中得到；二是茎叶图可以在比赛时随时记录，方便记录与表示，但茎叶图只便于表示两位有效数字的数据，另外，

虽然茎叶图还可以表示两个以上的比赛结果(或两个以上的记录),但没有表示两个记录那么直观、清晰.

练习11-7

1. 下面是某钢铁加工厂所生产钢管内径尺寸的一个容量为 100 的随机抽样样本:

25.39 25.41 25.40 25.37 25.35 25.40 25.36 25.41 25.47 25.40
 25.38 25.45 25.41 25.46 25.34 25.45 25.44 25.34 25.36 25.37
 25.34 25.44 25.41 25.33 25.45 25.44 25.39 25.38 25.30 25.41
 25.44 25.50 25.38 25.48 25.42 25.43 25.48 25.44 25.41 25.39
 25.39 25.41 25.40 25.37 25.35 25.40 25.36 25.41 25.47 25.40
 25.40 25.45 25.33 25.51 25.45 25.39 25.37 25.35 25.48 25.41
 25.39 25.46 25.56 25.34 25.54 25.38 25.31 25.37 25.29 25.42
 25.44 25.42 25.45 25.44 25.41 25.26 25.36 25.43 25.42 25.49
 25.47 25.51 25.40 25.50 25.45 25.44 25.40 25.49 25.37 25.38
 25.37 25.47 25.40 25.39 25.45 25.42 25.38 25.37 25.35 25.41

根据提供的数据完成下列各题:

(1) 填写样本频率分布表:

分组	个数累计	频数	频率	频率 组距
25.245~25.275				
25.275~25.305				
25.305~25.335				
25.335~25.365				
25.365~25.395				
25.395~25.425				
25.425~25.455				
25.455~25.485				
25.485~25.515				
25.515~25.545				
25.545~25.575				
合计				



(2) 画出样本频率分布直方图;

(3) 根据样本频率分布直方图, 估计小于 25.43 的数据所占总体的百分比;

(4) 与图 11-4 中的频率分布直方图比较, 你能得到什么结论?

2. 甲、乙两个小组各 10 名学生的英语口语测试成绩如下 (单位: 分):

甲组: 76 90 84 86 81 87 86 82 85 83

乙组: 82 84 85 89 79 80 91 89 79 74

用茎叶图表示两个小组的成绩, 判断哪个小组的成绩更整齐一些.

3. 调查本班每位同学的家庭在同一个月的用电量, 作出这组数据的频率分布表、频率分布直方图以及频率折线图, 对你所在地区居民的用电量情况进行估计, 开展节电宣传月活动后, 再做一次调查.

11.4.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征

问题 2 炮弹生产厂家想知道它们生产的一批炮弹的平均射程, 怎样估计呢?

在很多实际情况下, 我们只能通过样本的分布形态来估计总体的分布形态. 比如, 要知道问题 2 中这批炮弹的平均射程, 当然不能把所有炮弹逐一测试. 于是, 我们可以把这批炮弹的射程看做总体, 从中随机取出一定数量的个体作为样本进行检测, 算出样本的数字特征 (如平均数、标准差等), 用来估计总体相应的数字特征.

1. 用样本平均数估计总体平均数

我们在初中学过用平均数描述数据的平均水平, 平均数定量地反映了数据的集中趋势. 通常我们用样本的平均数来估计总体的平均数.

例 1 从某大型企业全体员工某月的月工资表中随机抽取 50 名员工的月工资资料如下 (单位: 元):

800	800	800	800	800	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000
1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 500	1 500	1 500	1 500	1 500
1 500	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 500	2 500	2 500

试计算这 50 名员工的月工资平均数, 并估计这个企业员工的平均工资。

解: 这 50 名员工的月平均工资 = $\frac{800+800+\cdots+2\,500}{50} = 1\,320$ (元)。

由此可以估计这家大型企业员工的月平均工资为 1 320 元。

假设你去这家企业应聘, 月平均工资水平应是你考虑的重要因素。一般来讲, 月平均工资水平可以用来与同类企业的工资待遇作比较。

同样, 再随机抽取 50 名员工的工资, 计算得到的样本平均数一般会与例 1 中的样本平均数不同。所以用样本估计总体时, 样本的平均数只是总体平均数的近似。

下面我们来看样本平均数与样本频率分布直方图的关系。

用前面学习的方法画出例 1 中月工资的频率分布直方图 (图 11-9 (1)), 并标出样本平均数。

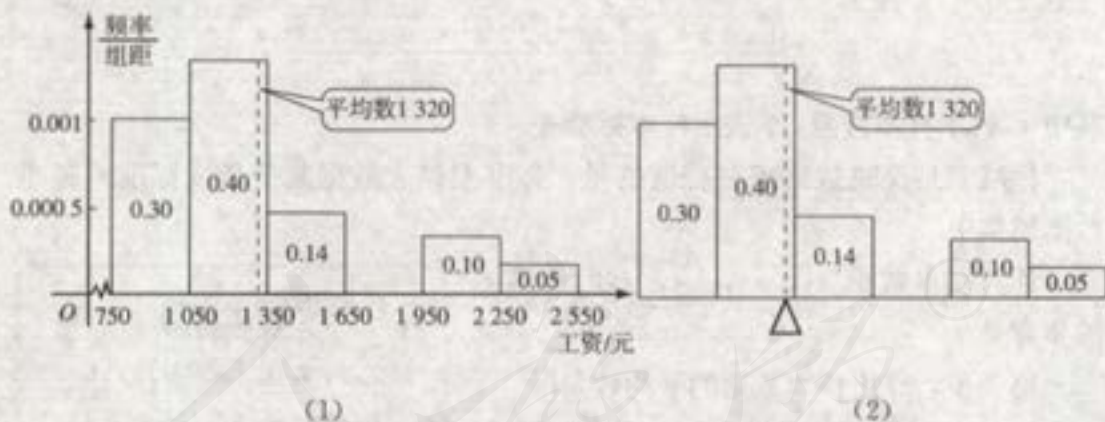


图 11-9

我们知道, n 个样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

因此 $n\bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 也就是把每个 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 都用 $\bar{x}$ 代替后, 数据总和保持不变。所以平均数 $\bar{x}$ 对数据有“取齐”的作用, 代表了一组数据的数值平均水平。在频率分布直方图中, 平均数是直方图的平衡点。

利用公式 $[(x_1 + a) + (x_2 + a) + (x_3 + a) + \cdots + (x_n + a)]/n = \bar{x} + a$, 令 $a = -1\,000$, 计算例 1 的平均数 $\bar{x}$, 这种计算方法是否简单一些?

试一试





这就是说,假设横轴是一块放置直方图的跷跷板,则支点取在平均数对应的位置时,跷跷板达到平衡(图 11-9 (2)).

2. 用样本的标准差来估计总体标准差

问题 3 甲、乙两名射击选手在相同的条件下各射击 10 次,命中的环数如下

甲: 7 8 6 8 6 5 9 10 7 4

乙: 9 5 7 8 7 6 8 6 7 7

哪一名选手的成绩更集中些?

虽然甲、乙两名选手的平均成绩都是 7,但是直观上看他们的成绩还是有差异的,甲的成绩比较分散,乙的成绩相对集中.因此,我们还需要从另外的角度来考察这两组数据.

考察样本数据分散程度的大小,最常用的统计量是标准差 (standard deviation, 计算器屏幕显示为 SD).

一般地,设样本的元素为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 样本的平均数为 $\bar{x}$, 定义

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n},$$

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}},$$

其中 s^2 表示样本方差, s 表示样本标准差.

标准差是反映数据离散程度的量,标准差越大数据越分散,标准差越小数据越集中.

计算样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差的步骤是:

第一步,算出样本数据的平均数 $\bar{x}$;

第二步,算出每个样本数据与样本平均数的差: $x_i - \bar{x}$ ($i=1, 2, \dots, n$);

第三步,算出 $x_i - \bar{x}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的平方: $(x_i - \bar{x})^2$ ($i=1, 2, \dots, n$);

第四步,算出 $(x_i - \bar{x})^2$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的 n 个平方数的平均数,即为样本方差;

第五步,算出样本方差的算术平方根,即为样本标准差.

计算问题 3 中甲、乙两名选手射击成绩的标准差,与我们的直观感觉一致吗?



例2 计算数据 5, 7, 7, 8, 10, 11 的标准差.

解: $\bar{x} = \frac{5+7+7+8+10+11}{6} = 8.$

按照求标准差的步骤列表如下 (表 11-3):

表 11-3

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	8	-3	9
7	8	-1	1
7	8	-1	1
8	8	0	0
10	8	2	4
11	8	3	9

所以

$$s^2 = \frac{9+1+1+0+4+9}{6} = 4,$$

从而 $s=2$. 因此这组数据的标准差为 2.

例3 从某灯泡厂生产的一批灯泡中随机地抽取 10 只进行寿命测试, 得到数据如下 (单位: h):

1 456 1 395 1 562 1 614 1 351

1 490 1 478 1 382 1 536 1 496

使用函数型计算器求样本平均数 $\bar{x}$ 及样本标准差 s (精确到 0.01).

解: (1) 进入统计计算状态:

按键	显示结果
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\text{ON/C}} (\text{STAT} \rightarrow \text{SD})$	$\boxed{\text{SD}}$

注: $\boxed{\text{ON/C}} (\text{STAT} \rightarrow \text{SD})$ 表示的意思是键面上标注的是 “ON/C”, 但执行的功能是 “STAT $\rightarrow$ SD”. 下面类似, 不再说明.

(2) 将计算器储存器设置成初始状态 (即清空以前输入的统计数据):

按键	显示结果
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\text{HYP}} (\text{DCA})$	

(3) 输入数据:

按键	显示结果
1456 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=1$
1395 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=2$
1562 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=3$
1614 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=4$
1351 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=5$

按键	显示结果
1490 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=6$
1478 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=7$
1382 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=8$
1536 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=9$
1496 $\boxed{\text{M}+}$ (DATA)	$n=10$

(4) 计算统计数据:

按键	显示结果
$\boxed{\text{STO}} (\bar{x}) \boxed{=}$	1476
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\text{RM}} (\sigma) \boxed{=}$	78.77943894

所以, 样本平均数 $\bar{x}=1\,476.00$, 样本标准差 $s=78.78$.

这里, 我们更关心的是这批灯泡寿命的稳定情况. 我们可以用算出的样本标准差 $s=78.78$ 来估计这批灯泡寿命的变化幅度. 也就是说用样本的标准差可以估计总体的标准差. 如果再抽取 10 只, 算得的标准差一般会与例 3 中的标准差不同. 这就表明样本标准差具有一定的随机性.

例 4 借助计算工具求 11.4.1 节从一批产品中抽取的 100 件钢管内径尺寸的样本平均数和样本标准差, 并估计这批产品内径尺寸的标准差.

解: 求出样本数据的平均数 $\bar{x}=25.401$, 样本标准差 $s=0.056$. 用样本标准差可以估计出这批产品内径尺寸的总体标准差为 0.056, 也就是产品内径尺寸对于平均数的平均波动幅度是 0.056 左右.

平均数和标准差是工业生产中检测产品质量的重要指标. 当样本的平均数或标准差超过了规定界限的时候, 说明这批产品的质量可能距生产要求有较大的偏离, 应该进行检查, 找出原因, 从而及时解决问题.

当数据很多时,

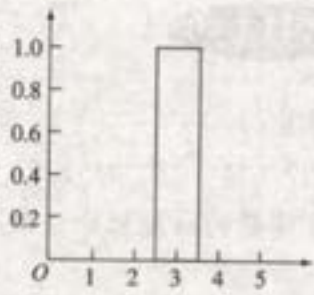
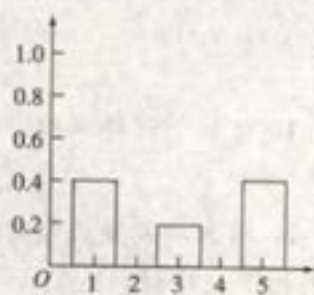
用工作表软件可以更方便、快捷地求出一组数据的标准差, 你可以尝试使用这些软件来计算样本的数字特征.

试一试



样本标准差与频率分布直方图有什么关系呢？从标准差的定义可知，如果样本各数据值都相等，则标准差得 0，表明数据没有波动幅度，数据没有离散性；若个体的值与平均数的差较大，则标准差也较大，表明数据的波动幅度很大，数据离散程度很高。因此，标准差描述了数据对平均数的离散程度（表 11-4）。

表 11-4

	A	B
样本数据	3 3 3 3 3	1 1 3 5 5
样本平均数	3	3
样本标准差	0	1.79
频率分布直方图		
离散程度	没有	很高

再来看钢管内径尺寸的例子，它的样本平均数为 $\bar{x}=25.401$ ，样本标准差为 0.056。如图 11-10 所示，在直方图中用虚线标出平均数所在的位置，并画出距平均数两侧各一倍标准差和两倍标准差的区间。可以看到有大约 70% 的钢管内径尺寸落在距平均数两侧各一倍标准差的区间内，即区间 $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ ；大约有 95% 的钢管内径尺寸落在距平均数两侧各两倍标准差的区间内，即区间 $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ 。由此我们估计总体中也有大致比率的产品尺寸落入到相应的区间内。实际生产、生活中有大量的例子符合这样的统计规律，比如同一年龄段的人群的身高、体重；同一生产线生产的瓶装维生素的净含量等。

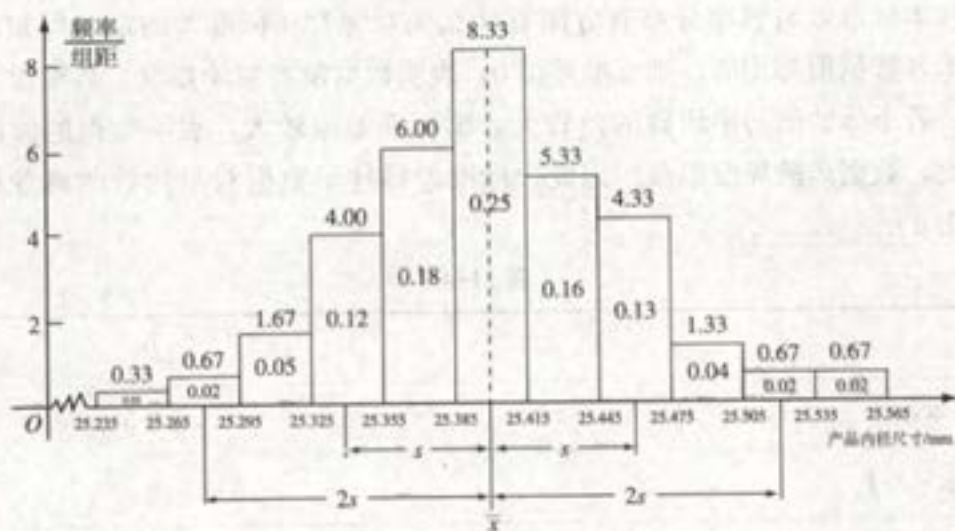


图 11-10

练习 11-8

1. 计算下列样本的方差与标准差：

28 24 25 23 27 24 22 24 25 28

2. 用自动包装机包糖，现从包装好的一批糖中任取 9 包，称得净含量数据如下（单位：kg）：

99.2 98.6 100.3 101.3 98.3 99.8 99.4 101.9 100.5

求出这 9 包糖的平均净含量和净含量的标准差，并估计包装好的这批糖的平均净含量及净含量的标准差。

3. 从 1 000 个零件中抽取 10 件，每件长度如下（单位：mm）：

22.36 22.35 22.33 22.35 22.37 22.34 22.38 22.36 22.32 22.35

使用函数型计算器计算样本的平均数和标准差，并估计总体的平均数和标准差。

4. 两名跳远运动员在 10 次测试中的成绩分别如下（单位：m）：

甲：5.85 5.93 6.07 5.91 5.99 6.13 5.89 6.05 6.00 6.19

乙：6.11 6.08 5.83 5.92 5.84 5.81 6.18 6.17 5.85 6.21

分别计算两个样本的标准差，并根据计算结果估计哪位运动员的成绩比较稳定。

5. 为了了解中学男生的身体发育情况, 对某中学同龄的 50 名男生的身高进行了测量, 结果如下 (单位: cm):

175	168	170	176	167	181	162	173	171	177
179	172	165	157	172	173	166	177	169	181
160	163	166	177	175	174	173	174	171	171
158	170	165	175	165	174	169	163	166	166
174	172	166	172	167	172	175	161	173	167

- (1) 列出样本的频率分布表, 画出频率分布直方图;
- (2) 计算样本的平均数 $\bar{x}$ 和标准差 s ;
- (3) 由样本数据估计总体中有百分之几的数据落入区间 $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$.

11.5 一元线性回归分析

变量与变量之间的关系常见的有两类: 一类是确定性的函数关系, 如正方形的边长 a 和面积 S 的关系为 $S=a^2$; 另一类是变量间确实存在关系, 但不具备函数关系所要求的确定性, 它们的关系是带有随机性的. 例如, 人的身高并不能确定体重, 但一般说来“身高者, 体也重”. 我们说身高与体重这两个变量具有相关关系.

1. 两个变量间的相关关系

问题 1 在学校里, 常常有人这样说: “如果你的数学成绩好, 那么你的物理成绩就不会太差.” 按照这种说法, 似乎学生的数学和物理两科成绩之间存在着一种相关关系. 这种说法是否有根据呢?

凭我们的学习经验可知, 物理成绩与数学成绩确实有一定的关系, 但除此以外, 还存在其他影响物理成绩的因素, 比如喜欢程度或花费的时间多少等等. 当我们主要考虑数学成绩对物理成绩的影响时, 就是要考察这两者之间的相关关系. 像这种, 当一个变量取值一定时, 另一个变量的取值与它有关, 且带有一定的随机性的两个变量的关系叫做相关关系. 与函数关系不同, 相关关系是一种非确定性关系. 对具有相关关系的两个变量进行统计分析的

方法叫做回归分析.

怎样判断两个变量的相关关系? 我们来看下面的实际例子.

例如, 设某地 10 户家庭的年收入和年饮食支出的统计资料如表 11-5 所示:

表 11-5

年收入 x /万元	2	4	4	6	6	6	7	7	8	10
年饮食支出 y /万元	0.9	1.4	1.6	2.0	2.1	1.9	1.8	2.1	2.2	2.3

从表 11-5 中的数据可以看出, y 有随 x 增加而增加的趋势. 为了更清楚地看出 x 与 y 是否有相关关系, 我们以 x 的取值作横坐标, 把 y 的相应取值作为纵坐标, 在直角坐标系中描点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 10$), 如图 11-11 所示. 这样的图形叫做散点图. 从图中可以直观地看出家庭年收入和年饮食支出之间具有相关关系, 并且当年收入的值由小变大时, 年饮食支出的值也在由小变大, 这种相关称为正相关; 反之, 如果一个变量的值由小变大时, 另一个变量的值由大变小, 这种相关称为负相关.

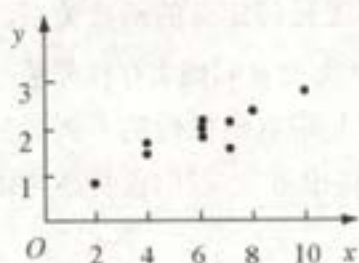


图 11-11

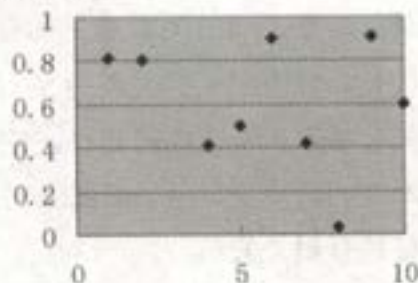


图 11-12

如果关于两个变量统计数据的散点图呈现图 11-12 的形状, 则这两个变量之间不具有相关关系. 例如, 学生的身高与学生的数学成绩并没有相关关系. 散点图既可以用纸笔画出, 也可以用计算机借助工作表软件作出, 然后通过观察散点图可以判断变量之间有无相关关系.

一般地, 对于上述各种问题中的两个变量之间的相关关系, 我们都可以

搜集与问题 1 有关的数据, 你能利用计算机借助工作表软件作出问题 1 中数据的散点图吗? 试一试

根据自己的生活、学习经验作出相应的判断,因为“经验当中有规律”.但是,不管你的经验多么丰富,如果只凭经验办事,还是很容易出错的.因此,在判断两个变量之间的相关关系时,我们需要借助散点图等具有说服力的方法来分析,从而得出结论.

练习11-9

1. 5名学生的数学和物理成绩如下表:

学生 学科	A	B	C	D	E
数学/分	80	75	70	65	60
物理/分	70	66	68	64	62

画出散点图,并判断数学成绩与物理成绩是否有相关关系.

2. 某农场经过观测得到水稻产量和施化肥量的统计数据如下:

施化肥量/ x	15	20	25	30	35	40	45
水稻产量/ y	330	345	365	405	445	450	455

画出散点图,判断水稻的施肥量与产量是否有相关关系.

3. 从你们班中随机抽取10名同学,画出他们的体重与期中成绩之间的散点图,并判断体重与期中成绩是否有相关关系.

2. 两个变量的线性相关关系

问题2 在一次对人体脂肪含量和年龄关系的研究中,研究人员获得了一组样本数据:

表 11-6 人体的脂肪百分比和年龄

年龄	23	27	39	41	45	49	50
脂肪/%	9.5	17.8	21.2	25.9	27.5	26.3	28.2

年龄	53	54	56	57	58	60	61
脂肪/%	29.6	30.2	31.4	30.8	33.5	35.2	34.6

根据上述数据, 人体的脂肪含量与年龄之间有这样的相关关系呢?
将表 11-6 中的数据画成散点图 (图 11-13).

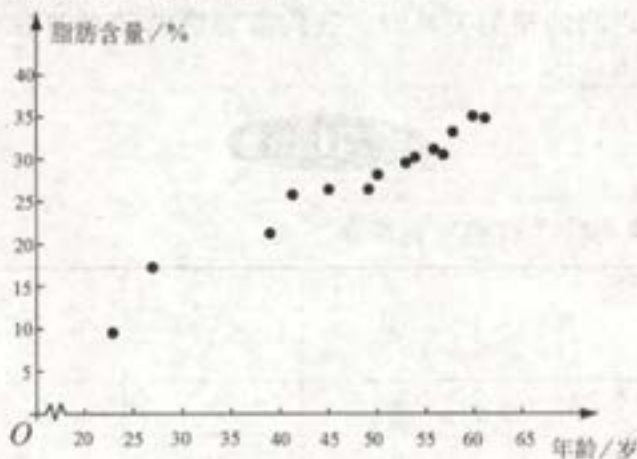


图 11-13

从散点图上可以看出, 人体的脂肪含量与年龄之间有正相关关系, 同时, 我们不难发现这些点大致分布在一条直线附近 (图 11-14).

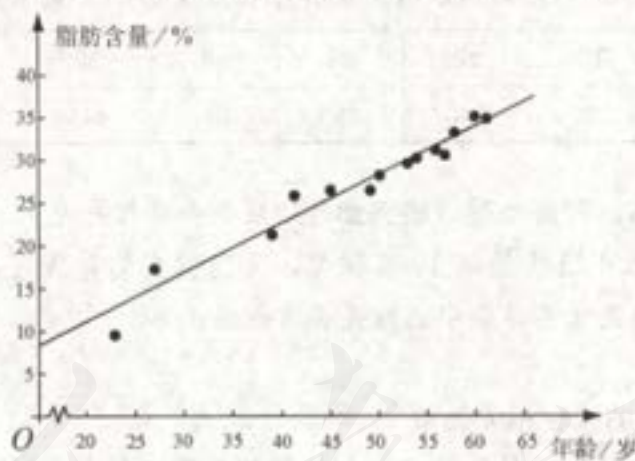


图 11-14

一般地, 如果散点图中的点从总体上看大致分布在一条直线附近, 我们就称这两个变量之间有线性相关关系. 例如, 上述人体的脂肪含量与年龄之间有线性相关关系. 对具有线性相关关系的两变量进行统计、分析的方法叫做一元线性回归分析.

再看下面的例子.

例 1 表 11-7 列出了某小卖部 6 天卖出的热茶的杯数与当天对应气温的数据:

表 11-7

气温 $x/^{\circ}\text{C}$	26	18	13	10	4	-1
杯数 y	20	24	34	38	50	64

- (1) 将表中数据画成散点图;
 (2) 你能从散点图中发现温度与热茶杯数近似成什么关系吗?

(3) 如果近似成线性关系的话, 请画出一条直线来近似地表示这种线性关系.

解: (1) 所画散点图如图 11-15.

(2) 从图中可以发现气温和杯数具有相关关系, 当气温的值由小到大变化时, 杯数的值由大变小, 所以气温和杯数负相关. 图中的数据点大致分布在一条直线的附近, 因此气温和杯数成线性相关关系.

(3) 根据不同的标准, 可以画出不同的直线来近似表示这种线性相关关系, 比如可以连接最左侧点和最右侧点得到一条直线 (图 11-16 (1)), 或者使画出的直线上方的点和下方的点数量相等 (图 11-16 (2)).

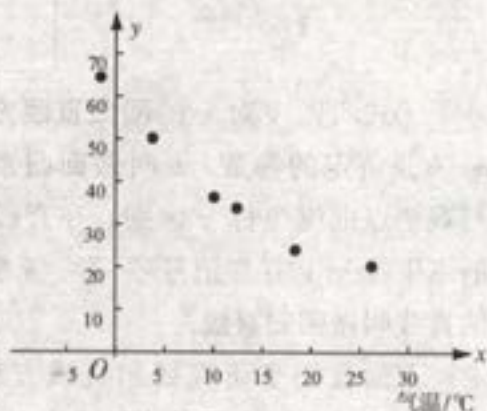
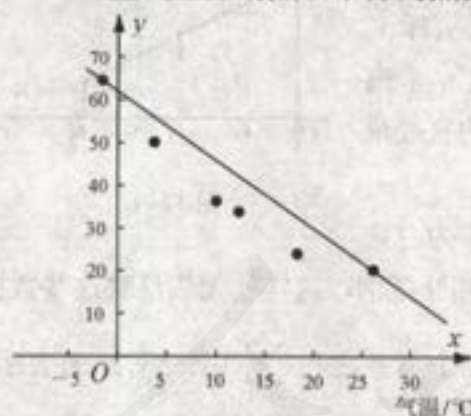
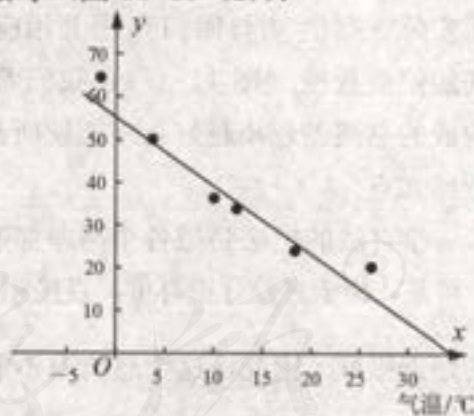


图 11-15



(1)



(2)

图 11-16

由图 11-16 可见, 所有数据点都分布在一条直线附近. 显然这样的直线还可以画出许多条, 而我们希望找出其中的一条, 它能最好地反映 x 与 y 之间的关系. 换言之, 我们要找出一条直线, 使这条直线“最贴近”



想一想 图 11-16

中, 画出的两条直线哪一条更合理呢? 合理
的标准是什么呢?

已知的数据点.

一般地, 设 x 与 y 是具有相关关系的两个变量, 且相应的 n 个观测点大致分布在一条或多条直线附近, 设与这 n 个点最接近的一条直线的方程为

$$\hat{y} = a + bx.$$

①

①式叫做 y 对 x 的回归直线方程. 其中 a, b 是待定的参数, b 叫做回归系数, 为了与观测点的纵坐标 y 区别, 在直线上对应点的纵坐标 y 上方加记号 “ $\hat{\cdot}$ ”. 与方程①对应的直线叫做回归直线.

下面我们来研究回归直线方程的求法. 要确定回归直线方程①, 只要确定回归系数 b 和 a .

设 x, y 的一组观察值为 (x_i, y_i) , 其中 $i=1, 2, \dots, n$. 当 x 取值 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 时, y 相应的观察值为 y_i .

$y_i - \hat{y}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 记为离差. 离差刻画了实际观察值 y_i 与回归直线上相应点纵坐标 $\hat{y}_i$ 之间的偏离程度 (图 11-17), 我们希望这 n 个离差构成的总离差越小越好, 才能使所找到的直线最贴近已知点.

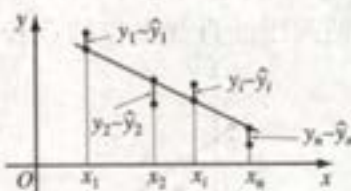


图 11-17

一个自然的想法是把各个离差加起来作为总离差. 可是, 由于离差有正有负, 直接相加会相互抵消, 这样就无法反映这些数据点的贴近程度. 因此, 这个总离差不能用 n 个离差之和 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)$ 来表示,

通常是用离差的平方和, 即 $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$ 作为总离差, 并使之达到最小. 这样, 回归直线就是所有直线中 Q 取最小值的那一条.

如何使离差平方和 “最小” 呢? 我们将

在一般统计书中习惯用 b 表示一次项系数, 用 a 表示常数项, 这正好与我们表示一次函数的习惯相反.

读一读



n 个实数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的和简记

为 $\sum_{i=1}^n a_i$, “ $\sum$ ”

读作 “西格玛”.

读一读



表示离差平方和的式子展开,同时为了书写方便,一律省去“ $\sum$ ”号的上、下标,这样得

$$\begin{aligned} Q &= \sum (y_i - a - bx_i)^2 \\ &= \sum y_i^2 - 2a \sum y_i + na^2 - 2b \sum x_i y_i + 2ab \sum x_i + b^2 \sum x_i^2 \\ &= na^2 + 2a(b \sum x_i - \sum y_i) + b^2 \sum x_i^2 - 2b \sum x_i y_i + \sum y_i^2. \end{aligned}$$

把上式看成 a 的二次函数, a^2 的系数 $n > 0$, 因此, 当

$$a = -\frac{2(b \sum x_i - \sum y_i)}{2n} = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x}$$

时, Q 取最小值. 其中 $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ 是样本平均数.

同理, 把 Q 的展开式重新按 b 的降幂排列, 看成 b 的二次函数, 当

$$b = \frac{\sum x_i y_i - a \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

时, Q 取最小值, 于是解得

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}, \\ a &= \bar{y} - b\bar{x} = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n}. \end{aligned}$$

②

例 2 在某种产品表面进行腐蚀程度的试验, 得到腐蚀深度 y 与腐蚀时间 x 之间相应的一组观察值如表 11-8 所示:

表 11-8

x/s	5	10	15	20	30	40	50	60	70	90	120
$y/\mu m$	6	10	10	13	16	17	19	23	25	29	46

- (1) 画出表中数据的散点图;
- (2) 求 y 对 x 的回归直线方程;
- (3) 试预测腐蚀时间为 100 s 时, 腐蚀深度是多少?

解: (1) 散点图如图 11-18.

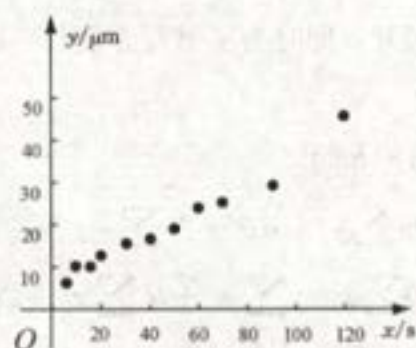


图 11-18

(2) 根据公式②求腐蚀深度 y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程的步骤如下:

I 先把数据列表:

表 11-9

序号	x	y	x^2	y^2	xy
1	5	6	25	36	30
2	10	10	100	100	100
3	15	10	225	100	150
4	20	13	400	169	260
5	30	16	900	256	480
6	40	17	1 600	289	680
7	50	19	2 500	361	950
8	60	23	3 600	529	1 380
9	70	25	4 900	625	1 750
10	90	29	8 100	841	2 610
11	120	46	14 400	2 116	5 520
Σ	510	214	36 750	5 422	13 910

II 计算 a , b 的值.

由表 11-9 的数据, 分别计算 x , y 的平均数得 $\bar{x} = \frac{510}{11}$, $\bar{y} = \frac{214}{11}$ 代入公式

②得 (注意: 不必把 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 化为小数, 以减小误差)

$$b = \frac{13\,910 - 11 \times \frac{510}{11} \times \frac{214}{11}}{36\,750 - 11 \times \left(\frac{510}{11}\right)^2} = 0.304,$$

$$a = \frac{214}{11} - 0.304 \times \frac{510}{11} = 5.36.$$

III 写出回归直线方程.

腐蚀深度 y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程为

$$\hat{y} = 0.304x + 5.36.$$

这里的回归系数 $b=0.304$, 它的意义是: 腐蚀时间 x 每增加一个单位 (s), 腐蚀深度 y 平均增加 0.304 个单位 (μm).

(3) 根据上面求得的回归直线方程, 当腐蚀时间为 100 (s) 时,

$$\hat{y} = 0.304 \times 100 + 5.36 = 35.76 \text{ } (\mu\text{m}).$$

所以, 腐蚀时间是 100 s 时, 预测腐蚀深度为 35.76 μm .

例 3 设对变量 x, y 有如下观察数据:

表 11-10

x	151	152	153	154	156	157	158	160	161	162	163	164
y	40	41	41	41.5	42	42.5	43	44	45	45	46	45.5

使用函数型计算器求 y 对 x 的回归直线方程. (结果保留 4 位小数)

解: (1) 进入线性回归计算状态:

按键	显示结果
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{0} \text{ (STAT} \rightarrow \text{LR)}$	$\boxed{\text{LR}}$

(2) 将计算器储存器设置成初始状态 (即清空以前输入的统计数据):

按键	显示结果
$\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\text{HYP}} \text{ (DCA)}$	屏幕没有显示

你能对例 1 中, 某天的气温 x 与小卖部卖出热茶的杯数 y 建立线性回归方程吗? 如果某天的气温是 5°C , 预测这天小卖部卖出热茶的杯数.

试一试



(3) 输入数据:

按键	显示结果
151 $\boxed{2ndF} \boxed{[]} (,) 40 \boxed{M+}$ (DATA)	$n=1$
152 $\boxed{2ndF} \boxed{[]} (,) 41 \boxed{M+}$ (DATA)	$n=2$
153 $\boxed{2ndF} \boxed{[]} (,) 41 \boxed{M+}$ (DATA)	$n=3$
(类似地, 输入其他九组数据)	...
164 $\boxed{2ndF} \boxed{[]} (,) 45.5 \boxed{M+}$ (DATA)	$n=12$

(4) 计算统计数据:

按键	显示结果
$\boxed{2ndF} \boxed{4} (a) \boxed{=}$	-27.29196802
$\boxed{2ndF} \boxed{5} (b) \boxed{=}$	0.446326608

即

$$a = -27.2920,$$

$$b = 0.4463.$$

所以 y 对 x 的回归直线方程为

$$\hat{y} = 0.4463x - 27.2920.$$

你能对本节的问题 2, 即年龄和脂肪两个变量间建立线性回归方程吗?

试一试

练习 11-10

- (口答) 回归直线方程中的 b 的含义是什么?
- 对变量 x, y 有如下观察数据:

x	-2.0	0.6	1.4	1.3	0.1	-1.6	-1.7	0.7	-1.8
y	-6.1	-0.5	7.2	6.9	-0.2	-2.1	-3.9	3.8	-7.5

试求 y 对 x 的回归直线方程.

- 某工厂在一年中月总成本 y 与该月总产量 x 有如下一组数据:

x /万件	1.08	1.12	1.19	1.28	1.36	1.48	1.59	1.68	1.80	1.87	1.98	2.07
y /万元	2.65	2.37	2.40	2.55	2.64	2.75	2.92	3.03	3.14	3.26	3.36	3.50

(1) 画出散点图;

(2) 求月总成本 y 对月总产量 x 的回归直线方程.

4. 某公司 1985 年至 1997 年所付银行贷款利息资料如下:

年份 x	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
利息 y /万元	3.10	2.95	3.00	2.97	2.75	2.60	2.40	2.41	2.30	2.15	2.14	2.00	1.95

试确定利息 y 对年份 x 的回归直线方程.

习题十一

1. 甲袋中有 5 个不同的红球, 4 个不同的黑球; 乙袋中有 7 个不同的红球, 3 个不同的白球:

(1) 如果任取 1 个红球, 有多少种不同的取法?

(2) 如果从两个袋中各取 1 个球, 取出的恰好都是红球, 有多少种不同的取法?

2. 有 5 位同学利用假期到 3 处景点游览, 每位同学只能选取一处景点, 共有多少种不同的游览方法?

3. 在直线 $y=kx+b$ 中, 若 k, b 可分别取 0~9 这 10 个数字, 则一共可以构成多少条不同的直线?

4. 将 8 本不同的书分给 5 名同学, 每人分一本, 共有多少种不同的分法?

5. 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 3 个数字, 从 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字, 一共可以组成多少个没有重复数字的五位数?

6. 抛掷 3 枚硬币, 求至少出现一个正面向上的概率.

7. 抛掷一颗骰子, 朝上的一面出现 3 点或 5 点的概率是多少?

8. 要从编号为 1~100 的 100 道选择题中随机抽取 20 道题组成一份考卷, 请你用抽签法给出考题的编号.

9. 某博物馆某天接待游客 10 000 人 (假设把他们编号为 0~9 999), 如果要从这些游客中随机选出 10 名幸运游客, 请你用系统抽样的方式给出幸运游客的编号.

10. 某市有 210 家百货商店, 其中大型商店有 20 家, 中型商店有 40 家, 小型商店有 150 家. 为了了解商店的销售情况, 要从中抽取 21 家商店进行调



查, 请你用分层抽样的方式进行抽取.

11. 在一批棉花中抽测了 60 根棉花的纤维长度, 结果如下 (单位: mm):

82	202	352	321	25	293	293	86	28	206
323	355	357	33	325	113	233	294	50	296
115	236	357	326	52	301	140	328	238	358
58	255	143	360	340	302	370	343	260	303
59	146	60	263	170	305	380	346	61	305
175	348	264	383	62	306	195	350	265	385

列出样本的频率分布表, 画出频率分布直方图.

12. 从一批零件中随机抽取 20 件, 测得零件的长度如下 (单位: mm):

215	227	216	192	207	207	214	218	205	200
187	185	202	218	195	215	206	202	208	210

试估计这批零件中零件长度的平均数和标准差.

13. 从一批炮弹中, 随机抽取 10 发进行射击, 射程数据 (单位: m) 为:

5 325 5 320 5 290 5 314 5 320 5 306 5 340 5 353 5 328 5 295

(1) 指出总体、个体、样本、样本容量;

(2) 计算样本的平均数和标准差.

14. 为了了解中学生的身体发育情况, 从同龄的女中学生中随机抽取 60 名测量身高, 结果如下 (单位: cm):

167	154	159	166	169	159	156	166	162	158
159	156	166	160	164	160	157	156	157	161
158	158	153	158	164	158	163	158	163	157
162	162	159	154	165	166	157	151	146	151
158	160	165	158	163	163	162	161	154	165
162	162	159	157	159	149	164	168	159	153

(1) 列出样本的频率分布表, 画出频率分布直方图;

(2) 计算样本的平均数 $\bar{x}$ 和标准差 s ;

(3) 由样本数据估计总体中有百分之几的数据落入区间 $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$.

15. 对 x, y 有如下观测数据:

x	7.0	4.0	8.5	9.5	3.0	1.0	8.0	5.0
y	11.0	8.5	13.5	15.5	4.5	3.5	13.0	7.0

(1) 作出散点图;

(2) 试求 y 对 x 的线性回归方程.

附录

随机数表

78226	85384	40527	48987	60602	16085	29971	61279
43021	92980	27768	26916	27783	84572	78483	39820
61459	39073	79242	20372	21048	87088	34600	74636
63171	58247	12907	50303	28814	40422	97895	61421
42372	53183	51546	90385	12120	64042	51320	22983
81500	13219	57941	74927	32798	98600	55225	42059
59408	66368	36016	26247	25965	49487	26968	86021
77681	83458	21540	62651	69424	78197	20643	67297
76413	66306	51671	54964	87683	30372	39469	97434
48306	32560	19098	13843	70490	19383	21278	90912
40402	60831	15596	95509	23567	78961	46509	33267
82724	32555	52400	15020	12760	47439	67841	10546
20997	81462	41620	77512	39978	60900	60167	62088
37711	26727	62908	75539	99292	13361	99768	97579
24492	20561	77964	72344	43000	33786	90807	22267
69944	91085	47328	58466	95651	75217	86800	88815
55325	76970	30496	88609	31008	76317	90818	34144
33719	89319	76617	67400	85326	95814	52133	91900
56291	41537	67848	74976	60677	35455	11769	38484
64109	59218	13519	36121	64311	81138	13814	50213
89568	86620	31868	62342	89855	31148	97530	72827
16639	71496	82986	66859	81878	77144	20930	10519
89821	55359	94168	85859	22203	90515	31903	39726



10829	74291	86950	26957	66987	83572	63950	44605
48018	90777	89102	10970	18592	87121	92213	23810
33021	44709	79262	33116	80907	77689	69696	48420
77713	32822	64679	94095	95735	84535	74703	82890
25853	30963	76729	87613	65538	68978	13157	78834
64145	71516	11716	58309	89501	59717	56086	37459
68585	22783	22621	54263	41128	12663	82362	61855



阅读与实践

(一) 概率论的起源

概率论的思想萌芽起始于意大利文艺复兴时代。最先引起数学家们注意的是赌博中的问题。15 世纪意大利和法国赌博盛行，而且赌法复杂，赌注量大。一些职业赌徒，为增加获胜机会，迫切需要得到取胜的思路。如意大利贵族曾经请天文学家伽利略（Galilei, 1564—1642）解释下列问题：掷三枚骰子，朝上一面的点数之和为 9 点和 10 点，各有 6 种不同的组合法，但在实际操作中，发现出现 10 点的次数多于 9 点，是何缘故？

伽利略给出了使对方信服的答复。

三枚骰子朝上一面的点数之和为 9 的各种组合分别为

$\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 4\}$, $\{2, 2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 3, 3\}$,
共有 6 组。

三枚骰子朝上一面的点数之和为 10 的各种组合分别为

$\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{3, 3, 4\}$,
也是共有 6 组。

而各种组合出现的机会并非相等，其中 $\{1, 2, 6\}$ 这一组有 6 种可能的情况

$\{1, 2, 6\}$, $\{1, 6, 2\}$, $\{2, 1, 6\}$, $\{2, 6, 1\}$, $\{6, 1, 2\}$, $\{6, 2, 1\}$ 。

同理 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{2, 3, 4\}$ 也各有 6 种可能的情况。其中 $\{1, 4, 4\}$ 这一组有 3 种可能的情况

$(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1),$

同理 $\{2, 2, 5\}$ 也有 3 种可能的情况. 而 $\{3, 3, 3\}$ 这一组只有一种情况 $(3, 3, 3).$

因此, 朝上一面的点数之和出现 9 点的可能情况共有 25 种.

仿照上面的分析, 可知朝上一面的点数之和出现 10 点的可能情况共有 27 种. 因此, 实际上出现 10 点概率大于出现 9 点的概率.

17 世纪中叶, 法国的赌徒们又提出了“分赌金问题”, 赌徒们自己无法给出答案, 于是去请教当时法国数学家帕斯卡 (Pascal, 1623—1662), 这个问题把帕斯卡给难住了, 他冥思苦想了三年才想出了解决方法. 帕斯卡把他的解答寄给另一位法国数学家费马 (Fermat, 1601—1665). 不久, 费马在回信中给出了另一种解法. 他们频频通信, 互相交流, 围绕着赌博中的数学问题开始了深入细致的研究. 这些问题后来被到巴黎来的荷兰科学家惠更斯获悉, 回荷兰后, 他独立地进行研究. 帕斯卡和费马一边亲自做赌博实验, 一边仔细研究赌博中出现的各种问题, 终于完整地解决了“分赌金问题”, 并将此题的解法向更一般的情况推广, 从而建立了概率论的一个基本概念——数学期望, 这是描述随机变量取值的平均水平的一个量. 而惠更斯经过多年的潜心研究, 解决了掷骰子中的一些数学问题. 1657 年, 他将自己的研究成果写成了专著《论赌博中的计算》. 迄今为止, 这本书被认为是概率论中最早的论著. 因此可以说, 早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯.

(二) 概率的统计定义

我们知道抛掷一枚质地均匀的硬币, 由古典概率的计算公式, 我们得到“正面向上”的概率为 $\frac{1}{2}$. 历史上曾经有许多人做过掷硬币的试验, 以验证这一结果. 下表是历史文献中记录的硬币投掷试验的结果.

试验者	抛掷次数 n	正面向上的次数 m	比值 $\frac{m}{n}$
棣莫佛	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5



如果事件发生的可能性大,出现的机会就多,频率就应该大一些.我们可以看出上表中的五个频率都在 0.5 附近.

经过大量试验和实际经验的积累,人们逐渐认识到:在多次重复试验中,同一事件发生的频率在某一个常数附近摆动,而且随着试验次数的不断增加,频率摆动的偏差越来越小,观察到的大偏差也越稀少,频率呈现一定的稳定性,它越来越接近这个常数.

一般地,在大量重复进行同一试验时,事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总接近于某个常数 p (即 $\frac{m}{n}$ 总在 p 附近摆动),这时就把 p 叫做事件 A 的概率.记作 $P(A)=p$,这就是概率的统计定义.

根据概率的这个统计定义,如果样本空间中基本事件出现的机会不相等,或者样本空间中的元素是无限的,那么这类随机事件的概率的计算方法,是通过大量的重复试验,用这个事件发生的频率所接近的常数近似地作为它的概率的.例如,种子发芽的概率、家电使用寿命的概率、动物寿命的概率、产品包装合格的概率、一次性使用产品合格的概率等,都是利用概率的统计定义得出的.

为了估计水库中鱼的尾数,可以使用以下的方法:先从水库中捕出一定数量的鱼,例如 2 000 尾,给每尾鱼做上记号,不影响其存活,然后放回水库.经过适当的时间,让其充分混合,再从水库中捕出一定数量的鱼,例如 500 尾,查看其中有记号的鱼,假设有 40 尾.根据上述数据,我们可以估计出水库内鱼的尾数.

先假设水库中鱼的尾数为 n ,其中 n 是未知的,现要估计 n 的值,将 n 的估计值记作 $\hat{n}$ (读作“ n 估”或“ n 尖”).

假定每尾鱼被捕到的可能性是相等的,从水库中任捕一尾鱼,设事件

$A = \{\text{捕到的鱼带有记号}\},$

则由古典概型可知

$$P(A) = \frac{2\,000}{n}. \quad \textcircled{1}$$

第二次从水库中捕出 500 尾鱼,观察每尾鱼上是否有记号,共需观察 500 次,其中带有记号的鱼有 40 尾,即事件 A 发生的次数为 40,由概率的统计定

义可知

$$P(A) \approx \frac{40}{500}. \quad ②$$

由①, ②两式, 得

$$\frac{2\,000}{n} \approx \frac{40}{500}.$$

解得 $n \approx 25\,000$, 即

$$\hat{n} = 25\,000.$$

所以估计水库中约有鱼 25 000 尾.



附录

本书常用的数学符号

数学符号	读法以及含义
$\sin x$	sine, x 的正弦
$\cos x$	cosine, x 的余弦
$\tan x$	tangent, x 的正切
$\cot x$	cotangent, x 的余切, $\tan x$ 的倒数
$\sec x$	secant, x 的正割, $\cos x$ 的倒数
$\csc x$	cosecant, x 的余割, $\sin x$ 的倒数
$\sin^2 x$	x 的正弦的平方
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$ \boldsymbol{a} $	向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度 (或模)
$\overrightarrow{AB}$	向量 $\overrightarrow{AB}$
$ \overrightarrow{AB} $	向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度 (或模)
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$	平面直角坐标系中 x 轴, y 轴上的单位向量
$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行 (共线)
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda \boldsymbol{a}$	数乘向量, 实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积 (数量积)
$\boldsymbol{v}$	直线 l 的方向向量, $\boldsymbol{v} // l$
$\boldsymbol{n}$	直线 l 的法向量, $\boldsymbol{n} \perp l$
$ AB $	线段 AB 的长度

续表

数学符号	读法以及含义
$P \in l$	点 P 在直线 l 上
$M \in \text{平面 } \alpha$	点 M 在平面 α 内
$C \notin l$	点 C 不在直线 l 上
$A' \notin \text{平面 } \alpha$	点 A' 不在平面 α 内
$m \cap n = A$	直线 m 与直线 n 交于点 A
$\alpha \cap \beta = l$	平面 α 与平面 β 交于直线 l
$l \subset \text{平面 } \alpha$	直线 l 在平面 α 内
$a \not\subset \text{平面 } \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a // \alpha$	直线 a 与平面 α 平行
$\alpha // \beta$	平面 α 与平面 β 平行
$l \perp \alpha$	直线 l 与平面 α 垂直
$\alpha \perp \beta$	平面 α 与平面 β 垂直
二面角 α - CD - β	棱为 CD , 面分别为 α, β 的二面角
Ω	样本空间, 必然事件
$\emptyset$	不可能事件
ω	基本事件
$P(A)$	事件 A 的概率
$\bar{x}$	平均数 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$
s^2	方差 $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$
s	标准差 $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$
$\sum_{i=1}^n a_i$	n 个实数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的和
$\hat{y}$	y 的估计值

