职 业 教 育 规 划 教 材
三年制中职

数 学

人民教育出版社 课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心 编著

第一册

人民教育出版社
·北京·

主　　编：龙正武
本册主编：祁志卫　王　琳
本 册 副 主 编：杜红梅　李增华　刘心灵
其他参编人员：崔东芳　谢　涛　吕平丽　郭　云　王青仁　周丽萍　梁　鹏
　　　　　　　董瑞玲　王加霞　于立莉　姜永靓　胡　鹏

美术编辑：李　媛
书籍设计：李　媛

图书在版编目(CIP)数据

数学：三年制中职．第一册/人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著．—北京：人民教育出版社，2018.6

ISBN 978-7-107-32625-7

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①人…　Ⅲ．①数学课—中等专业学校—教材　Ⅳ．①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 149811 号

职业教育规划教材　三年制中职　数学　第一册

出版发行　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　大厂益利印刷有限公司
版　　次　2018 年 6 月第 1 版
印　　次　2018 年 10 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1 092 毫米　1/16
印　　张　9.25
字　　数　185 千字
定　　价　23.00 元

出版说明

为了贯彻全国职业教育工作会议精神，落实《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》《教育部关于深化职业教育教学改革全面提高人才培养质量的若干意见》等文件的要求，遵照山东省教育厅关于教材开发的有关规定，人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心发扬科学、严谨的传统作风，组织职教专家、教研员和有丰富教学实践经验的教师，对山东省职业教育教材进行了规划和建设，以适应山东省职业教育改革和发展的需要.

本套教材是严格按照山东省教育厅组织专家制定的课程标准编写的，从 2018 年秋季开学起，陆续提供给山东省的职业院校选用.

本套教材的开发坚持贯彻“以立德树人为根本、以服务发展为宗旨、以促进就业为导向”的职业教育理念，力图将职业道德、工匠精神和企业文化等融入教材当中. 教材编写过程中，坚持体现学生的主体地位，使教材内容的呈现方式符合学生的认知规律和职业成长规律，有关栏目设置符合学生的能力水平和教学需要，从而达到激发学生学习兴趣的目的，使得学生想学、乐学、能学、会学.

希望各地、各有关职业院校在使用本套职业教育规划教材的过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使教材不断得到完善和提高.

2018 年 3 月

编者寄语

亲爱的同学，欢迎你步入一个新的学习阶段！

著名数学家华罗庚曾经说过：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在，凡是出现量的地方就少不了用数学. 马克思说：一种科学只有成功地运用数学时，才算到达完美的地步. 从古希腊的巴特农神庙，到米洛斯的维纳斯雕塑，再到大自然的艺术品——海螺、蜗牛的外形，无不展示着黄金分割的美；从遗传学的生命奥秘，到社会经济的发展，再到海王星的发现、哈雷彗星的登场、空间站的建立……处处散发着数学的芬芳.

社会的发展和科技的进步，需要必要的数学知识和技能，更需要我们高尚的道德情操、浓烈的家国情怀. 让我们从大处着眼、小处入手，对生活中的现象进行数学抽象和直观想象，经过逻辑推理、数据分析、数学运算和数学建模，在解决问题的同时，不断提升自己的数学素养. 数学能集中、强化人的注意力，帮助大家养成独立思考的习惯、锻炼独立工作的能力、开发自主创新的意识. 数学的精神、数学的思维、数学的研究方法，已成为人们认识世界的基本素养和关键能力之一.

本套教材不仅告诉你数学的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，而且能帮助大家获得运算和处理数据的能力、识读空间图形位置关系的能力、逻辑推理能力和抽象概括能力. 所有这些，将为你学习专业知识和专业技能奠定基础.

亲爱的同学们，数学本身与大自然一样，充满着神奇与奥秘. 让我们怀着求知与探索的欲望，投入有关数学学习的活动中吧！只要你不忘初心，持之以恒，数学的美就会展现在你的眼前，探究的愉悦会让你欲罢不能，醍醐灌顶的体验会让你兴奋不已. 俗话说，“好的开端，就是成功的一半”，让我们满怀信心，共同努力，一起步入数学的殿堂，体验学习数学的快乐吧！

2018年3月

目录

第一章 集合

无论是海洋里的生物，还是海面上的轮船；无论是海滩上的人，还是天空中的风筝，都可以看成一个个的整体，看成不同的集合.

数学是科学的大门和钥匙.

——培根

数学是科学和技术的基础，没有强有力的数学就不可能有强有力的科学.

集合语言是现代数学的基本语言. 用集合语言可以简洁、准确地表达数学研究对象，可以积累数学抽象的经验. 充分条件、必要条件是逻辑推理的常用语言. 通过充分条件、必要条件的学习可以渗透等价转化的数学思想，提高分析问题、解决问题的能力.

1.1 集合及其表示

1.1.1 集合

问题　一个班所有的同学能看作一个整体吗?

显然，一个班的所有同学可以看作一个整体，每位同学是这个整体不可或缺的一员，这个整体可以说是一个集合.

我们对“集合”一词并不陌生. 在初中，我们用到过整数集合、有理数集合等.

再来看下面的一些例子：

(1) 山东省中等职业学校的全体；

(2) 方程 $x^2=1$ 的所有实数根；

(3) 所有的平行四边形；

(4) 平面内到一条线段的两个端点距离相等的点的全体.

上述 (1) 中，我们把山东省的每一所中等职业学校作为一个确定的对象，这些对象的全体就组成一个集合；(2) 中，把方程 $x^2=1$ 的每一个实数根作为一个确定的对象，这些对象的全体也组成一个集合. 同样地，(3) (4) 中的对象的全体也分别组成一个集合.

一般地，把一些能够确定的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体组成的**集合**（简称为**集**）. 组成集合的每个对象都称为集合的**元素**.

试一试

试举出几个集合的例子.

集合通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，集合的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”；如果 b 不是集合 A 的元素，就说 b 不属于 A，记作 $b\notin A$，读作“b 不属于 A”.

集合的元素具有确定性. 这就是说，不能完全确定的对象，不能组成集合. 例如“我们班所有性格开朗的同学”不能组成集合，因为“性格开朗”没有确定的标准.

读一读

1889 年，意大利数学家皮亚诺首先使用“∈”来表示“属于”.

集合的元素具有互异性. 一个给定的集合，其中的元素是互不相同的. 也就是说，集合中的元素不能重复出现. 例如“某款手机售价为 999 元”，若此三位数中阿拉伯数字的

全体组成集合 A，则 A 中只有一个元素，即 9.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**.

特别地，我们把不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，由平方等于 -1 的所有实数组成的集合就是空集.

我们约定，用一些大写英文字母表示数学中一些常用的数集，如下表所示.

想一想

在本节开始的例（1）（2）（3）（4）中，哪些是有限集？哪些是无限集？

常用数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

练习 1.1.1

1. 说出下列集合中的所有元素：

（1）大于 2 且小于 7 的偶数组成的集合；

（2）平方等于 1 的实数组成的集合.

2. 用"$\in$"或"$\notin$"填空：

（1）$1\_\mathbf{N}$，$0\_\mathbf{N}$，$-4\_\mathbf{N}$，$0.3\_\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\_\mathbf{N}$；

（2）$1\_\mathbf{Z}$，$0\_\mathbf{Z}$，$-4\_\mathbf{Z}$，$0.3\_\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}\_\mathbf{Z}$；

（3）$1\_\mathbf{Q}$，$0\_\mathbf{Q}$，$-4\_\mathbf{Q}$，$0.3\_\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\_\mathbf{Q}$；

（4）$1\_\mathbf{R}$，$0\_\mathbf{R}$，$-4\_\mathbf{R}$，$0.3\_\mathbf{R}$，$\sqrt{2}\_\mathbf{R}$；

（5）$1\_\varnothing$，$0\_\varnothing$，$-4\_\varnothing$.

3. 判断下列语句描述的对象能否组成一个集合，并说明理由：

（1）小于 10 的自然数的全体；

（2）构成英文单词"happy"的所有字母；

（3）非常接近 1 的实数；

（4）小于 2 且大于 3 的实数的全体；

（5）山东省所有的小河流.

1.1.2 集合的表示方法

1. 列举法

当集合中元素不多时，我们常常把集合的元素一一列举出来，写在大括号内表示这个集合，这种表示集合的方法称为**列举法**.

例如，由1，2，3，4，5，6组成的集合，可表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

又如，中国古代四大发明组成的集合，可以表示为

{指南针，造纸术，印刷术，火药}.

再如，方程 $x^2=9$ 所有的解组成的集合，可以表示为

$$\{-3, 3\}.$$

有的集合只有一个元素．例如，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{a\}$ 等．值得注意的是，$\{0\}$ 与 0 有着本质的区别：$\{0\}$ 表示一个集合，0 是集合 $\{0\}$ 的一个元素．

想一想

a 与 $\{a\}$ 有什么区别？

例1　用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 10 的所有奇数组成的集合；

(2) 方程 $x-2=0$ 的解的全体组成的集合；

(3) 一次函数 $y=-x+1$ 的图像与两坐标轴所有交点组成的集合．

想一想

在平面直角坐标系中，点是用坐标 (x, y) 来表示的，例1 (3) 中的集合的元素是什么？

解：(1) $\{5, 7, 9\}$.

(2) $\{2\}$.

(3) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

2. 性质描述法

满足不等式 $2x>4$ 的全体实数所组成的集合，不可能用列举法来表示，这时，我们可以用集合元素的特征性质来描述.

例如，满足不等式 $2x>4$ 的全体实数所组成的集合，其元素具有的特征性质是

"$x\in\mathbf{R}$ 且 $x>2$".

满足这个特征性质的元素都在这个集合中，不满足这个特征性质的元素都不在这个集合中．这时，我们可以把这个集合表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R} \mid x>2\}.$$

一般地，若集合 A 中元素的特征性质用 p 表示，则属于集合 A 的元素都具有 p，不属于集合 A 的元素都不具有 p．这时，集合 A 可以表示为

$$A=\{x\in U \mid p\}.$$

其中，大括号竖线左边的 x 表示这个集合的任一元素，并标出元素的取值范围 U，在竖线右边写出只有集合内的元素 x 才具有的特征性质 p.

这种表示集合的方法称为**性质描述法**.

例如，所有小于 10 的有理数组成的集合，可以表示为 $\{x\in\mathbf{Q} \mid x<10\}$.

例2　用性质描述法表示下列集合：

(1) 不等式 $x-1<5$ 的所有解组成的集合；

(2) 大于 10 且小于 20 的所有有理数组成的集合；

(3) 在直角坐标平面上，直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合；

(4) 所有偶数组成的集合.

解：(1) 不等式 $x-1<5$ 的所有解组成的集合，用性质描述法表示为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x<6\}$.

(2) 设大于 10 且小于 20 的有理数为 x，则 $x\in\mathbf{Q}$ 且 $10<x<20$，因此，用性质描述法表示为 $\{x\in\mathbf{Q}\mid 10<x<20\}$.

(3) 在直角坐标平面上，直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合，用性质描述法表示为 $\{(x, y)\mid y=x\}$.

(4) 偶数是能被 2 整除的数，用性质描述法表示为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$.

一般地，在性质描述法中，当 x 的取值集合是实数时，竖线左边 x 的取值集合可以不写. 例如，例 2 (1) 的集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid x<6\}$ 可以简写为 $\{x\mid x<6\}$，(4) 的集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$ 可以简写为 $\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$.

练习 1.1.2

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 3 且小于 10 的偶数的全体；

(2) 绝对值等于 1 的实数的全体；

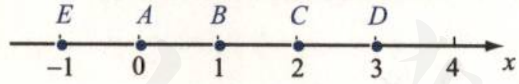
(3) 比 2 大 3 的实数的全体；

(4) 一年中有 31 天的月份的全体；

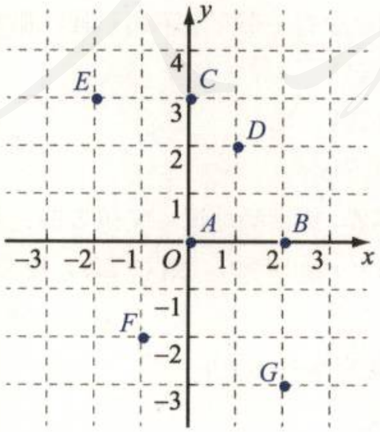
(5) 大于 3.5 且小于 12.8 的整数的全体.

2. 用列举法写出图中各点的坐标组成的集合：

(1)



(2)



3. 用性质描述法表示下列集合：

(1) 由山东省的省会组成的集合；

(2) 奇数的全体组成的集合；

(3) 绝对值等于 3 的实数的全体组成的集合；

(4) 不等式 $4x-5<3$ 解的全体组成的集合.

1.2 集合之间的关系

问题 某中等职业学校举行了开学典礼，把“该校参加开学典礼的全体学生”记作集合 A，把“该校的全体学生”记作集合 B，集合 A 中的元素与集合 B 中的元素有着怎样的关系？

可以看出，如果参加开学典礼的任何一名学生都是该校的学生，则集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素.

一般地，如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 称为集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

当集合 A 不是集合 B 的子集时，记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$，读作“A 不包含于 B”或“B 不包含 A”.

在前面的问题中，对于集合 B 来说，如果所有的学生都参加了开学典礼，那么集合 B 和集合 A 的元素完全相同；如果有学生请假没能参加开学典礼，那么集合 B 中就至少有一个元素不是集合 A 的元素.

如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个**集合相等**. 集合 A 等于集合 B，记作

$$A=B.$$

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A,$$

读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”.

例如，自然数集 $\mathbf{N}$ 和整数集 $\mathbf{Z}$ 来说，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，更准确地说，$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的关系是 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$；再如，若集合 $C=\{1, 2\}$，$D=\{x\mid(x-1)(x-2)=0\}$，则 $C\subseteq D$，更准确地说，C 与 D 之间的关系是 $C=D$.

根据以上定义可知，任何一个集合 A 都是它本身的子集，即

$$A\subseteq A.$$

规定：空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任何集合 A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

例 1　写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集.

解：集合 A 的所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$.

议一议

例 1 中集合 A 的真子集有哪些？

例 2　说出以下两个集合之间的关系：

(1) $A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{2,5\}$；

(2) $S=\{x\mid x^2=1\}$，$T=\{-1,1\}$；

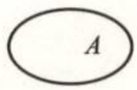
(3) $C=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{Z}\}$.

解：(1) $A\supsetneqq B$.

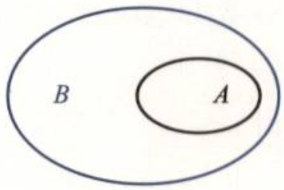
(2) $S=T$.

(3) $C\subsetneqq D$.

我们常用平面上封闭曲线的内部来表示一个集合，这种图称为 Venn 图，又叫文氏图. 如图 1-1 (1) 表示集合 A. 如果集合 A 是集合 B 的真子集，那么把表示 A 的区域画在表示 B 的区域内部，如图 1-1 (2).



(1)



(2)

图 1-1

根据子集、真子集的定义可以推知：

对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

对于集合 A，B，C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

由集合相等的定义，可得：

如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；

如果 $A=B$，那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

练习 1.2

1. 指出下列两个集合之间的关系：

(1) $A=\{x\mid x^2-9=0\}$，$B=\{-3,3\}$；

(2) $C=\{x\mid x$ 是等边三角形$\}$，$D=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$；

(3) $E=\{x\mid x>2\}$，$F=\{x\mid x>4\}$.

2. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$）填空：

(1) a ______ $\{a, b, c\}$；　　(2) $\{4, 5, 6\}$ ______ $\{6, 5, 4\}$；

(3) $\{a\}$ ______ $\{a, b, c\}$；　　(4) $\{a, b, c\}$ ______ $\{b, c\}$；

(5) $\varnothing$ ______ $\{1, 2, 3\}$；　　(6) $\{x\mid x$ 是矩形$\}$ ______ $\{x\mid x$ 是正方形$\}$；

(7) 0 ______ $\{x\mid x^2=0\}$；　　(8) $\{0, 1\}$ ______ $\mathbf{N}$；

(9) $\varnothing$ ______ $\{0\}$；　　(10) 0 ______ $\varnothing$.

3. 写出集合 $A=\{s, t\}$ 的所有子集和真子集.

4. 写出以下各集合之间的关系：

(1) $A=\{1, 2, 3, 6\}$，$B=\{x\mid x$ 是 6 的正因数$\}$；

(2) $A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是菱形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，$D=\{x\mid x$ 是正方形$\}$.

1.3 集合的基本运算

我们知道两个实数或代数式可以进行运算，下面我们学习集合的运算.

1.3.1 交集与并集

1. 交集

已知集合

$$M=\{1, 2, 3, 4\}, N=\{3, 4, 5, 6\},$$

则由这两个集合的所有公共元素能组成集合

$$\{3, 4\}.$$

一般地，给定两个集合 A，B，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

想一想

你能用自己的语言表述 $A\cap B$ 的概念吗？

例如，$\{a, b, c, d\}\cap\{b, c, d, e, f\}=\{b, c, d\}$.

集合 A 与 B 的交集，可用图 1－2 中的阴影部分表示.

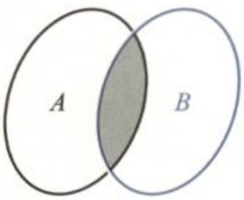


图 1－2

想一想

如果两个集合没有公共元素，那么它们的交集是什么？

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有：

(1) $A\cap B=B\cap A$；

(2) $A\cap A=A$；

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(4) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$.

例 1　已知集合 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，求 $A\cap B$.

解：$A\cap B=\{x\mid x<1\}\cap\{x\mid x<2\}=\{x\mid x<1\}$.

例 2　设集合 $A=\{x\mid x\text{ 是奇数}\}$，$B=\{x\mid x\text{ 是偶数}\}$，求 $A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cap B$.

解：因为 $A\subseteq\mathbf{Z}$，$B\subseteq\mathbf{Z}$，所以

$A\cap\mathbf{Z}=A$，

$B\cap\mathbf{Z}=B$，

$A\cap B=\{x\mid x\text{ 是奇数}\}\cap\{x\mid x\text{ 是偶数}\}=\varnothing$.

> **想一想**
>
> 例 1 和例 2 的解法，各自的依据是什么？

2. 并集

已知集合

$$M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ N=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\},$$

把这两个集合的所有元素合并在一起能组成集合

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

一般地，给定两个集合 A，B，由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

例如，$\{a,\ c\}\cup\{b,\ c,\ d\}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

集合 A 与 B 的并集，可用图 1－3 中的阴影部分表示.

> **想一想**
>
> 两个集合的公共元素，在并集中为什么只出现了一次？

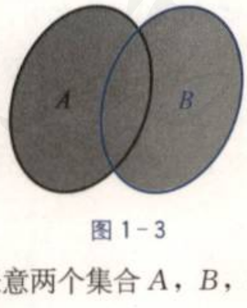


图 1－3

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有：

(1) $A\cup B=B\cup A$；

(2) $A\cup A=A$；

(3) $A\cup\varnothing=A$；

(4) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cup B=B$.

例 3　已知集合 $A=\{1, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 5\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{1, 3, 4\}\cup\{2, 4, 5\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

例 4　设集合 $A=\{x\mid x>3\}$，$B=\{x\mid x>5\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：因为 $B\subseteq A$，所以

$$A\cup B=A,$$

$$A\cap B=B.$$

想一想

例 3 和例 4 的解法，各自的依据是什么？

练习 1.3.1

1. 已知集合 $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$B=\{5, 7, 9\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知集合 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, d, e, f\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
3. 设集合 $A=\{x\mid x<-1\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
4. 设集合 $A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x<6\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-9=0\}$，$B=\{x\mid x-3=0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
6. 已知集合 $A=\varnothing$，$B=\{1, 2\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

1.3.2　补集

设 U 是某班所有同学组成的集合，A 是班上所有参加某次演出的同学组成的集合，而 B 是班上所有没有参加这次演出的同学组成的集合. 显然，A 和 B 都是 U 的子集，且集合 B 就是集合 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合.

一般地，如果在讨论的问题中，每一个集合都是某一个给定集合 U 的子集，那么就称 U 为这些集合的**全集**. 例如，我们在研究数集时，常常把实数集 **R** 作为全集. 如果 A 是全集 U 的一个子集，由全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 在 U 中的**补集**，记作 $\complement_U A$，读作“A 在 U 中的补集”. 补集可用如图 1－4 中的阴影部分表示.

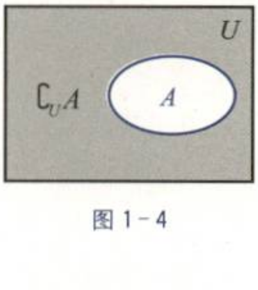


图 1－4

由补集的定义可知，对于给定的全集 U 以及它的任意一个子集 A，有：

(1) $A\cup\complement_U A=U$；

(2) $A\cap\complement_U A=\varnothing$；

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

例 5　设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $A=\{1, 3, 5\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap\complement_U A$，$A\cup\complement_U A$.

解：$\complement_U A=\{2, 4, 6\}$，$A\cap \complement_U A=\varnothing$，$A\cup \complement_U A=U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 6　设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>5\}$，求 $\complement_U A$.

解：$\complement_U A=\{x\mid x\leqslant 5\}$.

试一试

举出几个补集的例子.

练习 1.3.2

1. 设全集 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，集合 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.
2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x<0\}$，求 $\complement_U A$.
3. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $A=\{5, 2, 1\}$，$B=\{5, 4, 3, 2\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap \complement_U B$，$\complement_U A\cup \complement_U B$.
4. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $A=\{x\mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

1.4　充要条件

在数学中，我们经常遇到形如“如果 p，那么 q”的命题，当“如果 p，那么 q”是真命题时，我们就说 p 可推出 q，记作

$$p\Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”. 此时，我们称 p 是 q 的**充分条件**，又称 q 是 p 的**必要条件**.

也就是说，

“如果 p，那么 q”是真命题；

$p\Rightarrow q$；

p 是 q 的充分条件；

q 是 p 的必要条件.

这四句话的含义是相同的.

下面我们举例说明.

(1)“如果 $x=2$，那么 $x^2-4=0$”是真命题，这个命题还可表述为：

$x=2\Rightarrow x^2-4=0$；

$x=2$ 是 $x^2-4=0$ 的充分条件；

$x^2-4=0$ 是 $x=2$ 的必要条件.

(2)“如果四边形是矩形，那么四边形的对角线互相平分”是真命题，这个命题还可表述为：

四边形是矩形$\Rightarrow$四边形的对角线互相平分；

“四边形是矩形”是“四边形的对角线互相平分”的充分条件；

“四边形的对角线互相平分”是“四边形是矩形”的必要条件.

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的**充要条件**，记作

$$p\Leftrightarrow q,$$

读作“p 与 q 等价”或“p 与 q 互为充要条件”.

例如，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$，则：$\Delta=0\Rightarrow$一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根$\Rightarrow\Delta=0$. 所以 $\Delta=0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根的充要条件.

试一试

回忆你已学过的一些数学结论，并用充分条件、必要条件或充要条件表述.

例 用充分条件、必要条件或充要条件表述下列各题中 p 与 q 的关系：

(1) p：$x>3$，q：$x>5$；

(2) p：$x=y$，q：$x^2=y^2$；

(3) p：x 是矩形，q：x 是有一个角为直角的平行四边形.

解：(1) 因为 $x>5\Rightarrow x>3$，即 $q\Rightarrow p$，所以

q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

(2) 因为 $x=y\Rightarrow x^2=y^2$，即 $p\Rightarrow q$，所以

p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

(3) 因为 x 是矩形$\Leftrightarrow x$ 是有一个角为直角的平行四边形，即 $p\Leftrightarrow q$，所以

p 是 q 的充要条件.

练习 1.4

1. 口答下列各题：

(1) $x=0$ 是 $x^2=0$ 的什么条件？

(2) 说出“$p\Rightarrow q$”的其他等价说法.

2. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $a=0$ 是 $ab=0$ 的__________；

(2) $x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的__________；

(3) 若 x，$y\in\mathbf{R}$，则 $x=0$ 且 $y=0$ 是 $x^2+y^2=0$ 的__________；

(4) $x^2-1=0$ 是 $x=1$ 的__________.

3. 用充分条件、必要条件或充要条件表述下列各题中 p 与 q 的关系：

(1) p：x 是 12 的约数，q：x 是 36 的约数；

(2) p：$x^2=y^2$，q：$x+y=0$.

4. 已知 p：x 是自然数，试确定一个命题 q，使得 p 是 q 的充分条件.

习题一

1. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 中国国旗图案颜色的全体所组成的集合；

(2) 地球上最高的山峰所组成的集合；

(3) 大于 1 且小于 100 的整数的全体所组成的集合；

(4) 能被 4 整除的所有的自然数所组成的集合；

(5) 相反数等于本身的实数的全体所组成的集合；

(6) 绝对值等于 2 的实数的全体所组成的集合；

(7) 在平面直角坐标系中，直线 $y=2x+1$ 上所有的点所组成的集合；

(8) 9 的平方根的全体所组成的集合.

2. 判断下列关系是否正确：

(1) $2\in\{x\mid x\leqslant 10\}$；　　(2) $\{2\}\not\subseteq\{x\mid x\leqslant 10\}$；

(3) $\varnothing\not\subseteq\{x\mid x\leqslant 10\}$；　　(4) $\varnothing\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 10\}$.

3. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$C=\{6, 7, 8, 9\}$，求：

(1) $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$；

(2) $A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$.

4. 已知集合 $A=\{x\mid x$ 是梯形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是等腰梯形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

5. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$.

(1) 求：$\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$；

(2) 验证：$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

6. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$）填空：

(1) 2 ______ $\{x\mid x$ 是奇数$\}$；　　(2) a ______ $\{a\}$；

(3) $\{0\}$ ______ $\varnothing$；　　(4) $\mathbf{Z}$ ______ $\mathbf{R}$；

(5) $\{a, b, c, d\}$ ______ $\{b, c, d\}$；

(6) $\{2, 3\}$ ______ $\{x\in\mathbf{Z}\mid 0<x<5\}$.

7. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $x-1=0$ 是 $x^2-1=0$ 的 ______________；

(2) $x>5$ 是 $x>7$ 的 ______________；

(3) $a^2-3a+2=0$ 是 $a=1$ 的 ______________；

(4) $|x+3|+|y+2|=0$ 是 $x=-3$ 且 $y=-2$ 的____________；

(5) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的____________；

(6) $x-2=0$ 是 $(x-2)(x-3)=0$ 的____________.

阅读与实践

康托尔与集合论的产生

在原始社会早期人类就有了集合思想. 当时人们按照“堆”“捆”等概念来分东西和按照“部落”来识别不同的人，这就是集合思想的简单应用.

现代集合知识产生于十九世纪后期，是德国著名数学家康托尔创立的.

康托尔（1845—1918），生于俄国圣彼得堡，11 岁随家迁居德国，自幼对数学有浓厚兴趣. 22 岁获博士学位，以后一直从事数学教学与研究. 他所创立的集合论已被公认为现代数学的基础.

康托尔的小学阶段是在俄国度过的，中学开始在德国就读. 康托尔大约从中学时期就喜欢上了数学，学习数学非常用功. 因此，中学毕业时老师这样评价他：“康托尔的勤勉和热情堪称典范，在初等代数和三角方面成绩优异，其行为举止值得赞扬.”

康托尔 17 岁时入学瑞士苏黎世大学，第二年到柏林大学主修数学. 1867 年获博士学位，然后去哈雷大学任教. 当时在哈雷大学的著名数学家海涅发现了康托尔的聪慧，于是鼓励他去研究当时数学界的热点——函数的性质. 康托尔就是在这个过程中创造集合论的. 从 1874 年直到去世，康托尔发表了几十篇有关集合的论文，系统阐述了现代集合理论.

康托尔创造的集合论是现代数学中一项很有价值的内容，但在当时，由于人们不理解康托尔的方法，康托尔的集合理论并没有马上被认可. 事实上，康托尔受到了多方面的责难，这其中包括他的老师克罗内克.

面对各方面的压力，康托尔不幸患上了抑郁症，但他矢志不移，坚持工作. 康托尔晚年写出了四大本的《数学史讲义》，这也是常常被人们称道的.

真金不怕火炼，康托尔的思想最终大放光彩. 1897 年举行的第一次国际数学家会议上，他的成就得到了承认，伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”. 德国著名数学家希尔伯特称康托尔是“数学天才”，称康托尔创造的集合论是“数学家的乐园”和“数学天才最惊人的产物”.

康托尔于 1918 年 1 月 6 日因心脏病突发死于哈雷大学附属医院，享年 73 岁.

康托尔一生热爱数学，面对问题勇于运用智慧创造性地工作，遇到困难不屈不挠，始终坚持真理，敢于同困难作斗争，这是值得我们学习的.

趣味数学实践

为了顺应学生个性化学习和发展的需求，某中等职业学校组织了社团活动. 高一 (2) 班的学生参加了其中三个社团的活动：参加创客社团的有 35 人，参加礼仪社团和艺术社团的各有 15 人；既参加创客社团又参加礼仪社团的有 10 人，既参加创客社团又参加艺术社团的有 8 人，既参加礼仪社团又参加艺术社团的有 4 人；三个社团都参加的有 3 人.

(1) 只参加创客社团的学生有多少人？

(2) 若该班每个学生至少参加了一个社团，则该班一共有多少人？

第二章
方程与不等式

用天平称量物体质量的关键是保持平衡，而玩跷跷板的乐趣在于有上有下，打破平衡．等与不等是两个量之间最基本的关系．

问题是数学的心脏．

——哈尔莫斯

道虽迩，不行不至；事虽小，不为不成．

——《荀子·修身》

我们考察事物时，往往要进行大小、轻重、长短的比较. 在数学中，我们经常应用等式和不等式的知识来研究这类问题. 本章中，我们将通过学习不等式的性质提高逻辑推理能力，通过学习一元二次方程和不等式的解法提高数学运算的能力.

2.1 一元二次方程

问题 某职业学校要建一个面积为 60 m^2 的矩形小花坛，要求花坛的长比宽多 10 m，这个花坛的长和宽分别是多少？

分析：如图 2-1 所示，设花坛宽为 x m，则长是 $(10+x)$ m.

根据题意，列出方程

$$x(10+x)=60.$$

化简，得

$$x^2+10x-60=0. \quad ①$$

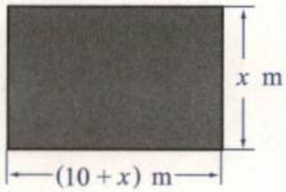


图 2-1

通过方程①求出 x 的值，就能解决这个问题.

像①这样只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程称为**一元二次方程**. 关于未知数 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）是一元二次方程的一般形式，a，b，c 依次称为方程的二次项系数、一次项系数、常数项.

能够使方程左右两边相等的未知数的值称为**方程的解**.

求方程的解的过程称为**解方程**.

例 1 用配方法解一元二次方程：

(1) $x^2+2x-3=0$； (2) $2x^2-5x-3=0$； (3) $x^2-6x+10=0$.

解：(1) 因为

$$x^2+2x=3,$$
$$x^2+2x+1^2=3+1^2,$$
$$(x+1)^2=4,$$
$$x+1=-2 \text{ 或 } x+1=2,$$
$$x_1=-3，x_2=1,$$

所以原方程的两个根为 -3，1.

(2) 因为

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0,$$
$$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2},$$

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16},$$

$$x-\frac{5}{4}=-\frac{7}{4}\text{或}x-\frac{5}{4}=\frac{7}{4},$$

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=3,$$

所以原方程的两个根为$-\frac{1}{2}$，3.

试一试

请你解决本节开始提出的问题.

(3) 因为

$$x^2-6x=-10,$$

$$x^2-6x+3^2=-10+3^2,$$

$$(x-3)^2=-1,$$

又因为不论 x 为何值，总有 $(x-3)^2\geqslant 0$ 成立，所以原方程无实数根.

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 用配方法可变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

想一想

为什么要讨论 b^2-4ac 大于零，小于零，等于零?

因此：

(1) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，解方程，得

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的**求根公式**；

(2) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，解方程，得

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

为原方程两个相等的根；

(3) 当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，原方程无实数根.

做一做

根据求根公式验证 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

例 2 解下列一元二次方程：

(1) $x^2-4x-3=0$；　　(2) $2x^2-x+3=0$.

解：(1) 因为 $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-3)=28$，所以

$$\frac{-(-4)\pm\sqrt{28}}{2\times1}=\frac{4\pm2\sqrt{7}}{2}=2\pm\sqrt{7},$$

因此 $x_1=2-\sqrt{7}$，$x_2=2+\sqrt{7}$.

(2) 因为 $\Delta=(-1)^2-4\times2\times3=-23<0$，所以原方程无实数根.

练习 2.1

1. 说出下列一元二次方程的根：

(1) $x^2=4$；　　(2) $x(x-3)=0$；

(3) $(x+1)(x-2)=0$；　　(4) $(x-1)^2=0$；

(5) $x^2+1=0$；　　(6) $(x+3)^2=-2$.

2. 用配方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2+6x+7=0$；　　(2) $x^2-7x-8=0$；

(3) $2x^2+3=7x$；　　(4) $t^2+t-1=0$；

(5) $x^2-6x+9=0$；　　(6) $x^2+3x+3=0$.

3. 解下列一元二次方程：

(1) $x^2-3=0$；　　(2) $x^2+9x=0$；

(3) $5x^2+2x-3=0$；　　(4) $-x^2+6x+7=0$；

(5) $x^2-6x+5=0$；　　(6) $-3x^2+2x+1=0$.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

2.2 不等式

2.2.1 不等式的基本性质

1. 实数的大小

问题　2008 年，第 29 届奥运会在北京举行，该届奥运会的奖牌榜前三名奖牌情况如下.

名次	国家/地区	金牌	银牌	铜牌	总数
1	**中国**	51	21	28	100
2	**美国**	36	38	36	110
3	**俄罗斯**	23	21	29	73

(1) 中国比美国多几枚金牌？

(2) 中国比俄罗斯多几枚银牌？

(3) 中国比美国少几枚奖牌？

分析：由 $51-36=15$，$21-21=0$，$100-110=-10$，我们很容易回答上述问题. 同时，我们也发现两个实数的大小可以用它们的差来反映.

一般地，对于任意两个实数 a 和 b，它们具有如下的基本性质：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b,$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

读一读

大于号“>”和小于号“<”，是英国代数学家哈里奥特在 1600 年左右创用的，但当时并没有被数学界所接受，直到一百多年后才逐渐成为标准的符号.

这样，我们通过具体的实例得到一个比较实数（或代数式）大小的方法——**作差比较法**.

作差比较法的一般步骤是：把要比较的两个实数（或代数式）作差，然后进行化简，判断最终化简结果的符号，从而判断出这两个实数（或代数式）的大小.

例 1　比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

（1）$-\frac{2}{3}$和$-\frac{3}{4}$；　　（2）$2x^2+1$ 和 x^2-1；

（3）a^2+a-2 和 $2a^2-a-1$；　　（4）x^2+5 和 $4x$.

解：（1）因为

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}$$
$$=\frac{1}{12}>0,$$

所以$-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$.

（2）因为

$$(2x^2+1)-(x^2-1)$$
$$=2x^2+1-x^2+1$$
$$=x^2+2>0,$$

所以 $2x^2+1>x^2-1$.

（3）因为

$$(a^2+a-2)-(2a^2-a-1)$$
$$=a^2+a-2-2a^2+a+1$$

$$=-a^2+2a-1$$
$$=-(a^2-2a+1)$$
$$=-(a-1)^2\leqslant 0,$$

所以 $a^2+a-2\leqslant 2a^2-a-1$.

(4) 因为

$$x^2+5-4x$$
$$=x^2-4x+2^2-4+5$$
$$=(x-2)^2+1>0,$$

所以 $x^2+5>4x$.

读一读

根据哥德巴赫于1734年1月写给欧拉的一封信所述，现今通用的符号“$\geqslant$”和“$\leqslant$”是法国人布盖首先采用的.

2. 不等式的基本性质

一般地，不等式有以下性质.

性质1 不等式两边加（或减）同一个数，不等号的方向不变.

如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$（或 $a-c>b-c$）.

读一读

若 $a+c>b$，则 $a>b-c$.

性质2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc\left(或\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$.

性质3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc\left(或\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$.

例2 用符号“$>$”或“$<$”填空，并说出其中应用了不等式的哪条性质：

(1) 如果 $a>b$，则 $a+2c$ ___ $b+2c$；

(2) 如果 $a>b$，则 $-2a$ ___ $-2b$；

(3) 如果 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}$ ___ $\frac{1}{b}$.

解：(1) $a+2c>b+2c$，应用了不等式的性质1.

(2) $-2a<-2b$，应用了不等式的性质3.

(3) 因为 $a>b>0$，所以 $ab>0$，应用不等式的性质2，原不等式两边同除以 ab，得

$$\frac{1}{b}>\frac{1}{a},$$

即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

练习 2.2.1

1. 下列说法是否正确?

(1) 若 $a>b$，则 $b<a$；　　(2) 若 $a+c>b$，则 $a<b-c$；

(3) 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；　　(4) 若 $a^2<b^2$，则 $|a|<|b|$.

2. 比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

(1) $-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{3}$；　　(2) $a+3$ 和 $a+6$；

(3) $2x^2+3x+4$ 和 x^2+3x+3；　　(4) a^2+10 和 $6a$；

(5) $2a^2-a+2$ 和 a^2-3a；　　(6) $(x-1)(x+2)-3$ 和 $(2x-3)(x+1)$.

3. 用“<”或“>”填空：

(1) $a-3$____$a-2$；　　(2) a^2+1____0；

(3) 如果 $a>b$，则 $a-c$____$b-c$；　　(4) 如果 $a>b$，则 $3a$____$3b$；

(5) 如果 $a>b$，则 $-3a$____$-3b$；　　(6) 如果 $a>b>0$，则$\frac{1}{a}$____$\frac{1}{b}$.

4. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，请把 ab^2，ab，a 按从小到大的顺序排列.

2.2.2 不等式的解集与区间

问题　某班有 8 名同学参加植树活动，共植树至少 32 棵，至多 64 棵，求平均每名同学所植棵数的范围.

分析：“至少”就是“大于或等于”，“至多”就是“小于或等于”，设每名同学植树 x 棵，则由题意得

$$8x\geqslant 32 \qquad ①$$

和

$$8x\leqslant 64 \qquad ②$$

同时成立，即

$$\begin{cases}8x\geqslant 32,\\8x\leqslant 64.\end{cases} \qquad (*)$$

要解决这个问题，需要求出一元一次不等式组（*）的解集.

一般地，在含有未知数的不等式（组）中，能使不等式（组）成立的未知数值的全体所组成的集合，称为**不等式（组）的解集.**

由不等式①的解集 $\{x|x\geqslant 4\}$ 和不等式②的解集 $\{x|x\leqslant 8\}$ 求交集，可得到不等式组（*）的解集，即 $\{x|x\geqslant 4\}\cap\{x|x\leqslant 8\}=\{x|4\leqslant x\leqslant 8\}$.

特别地，如果各个不等式的解集的交集是空集，那么由它们所组成的不等式组的

解集是空集.

例 3 求不等式 $\frac{2x+3}{5} \geqslant \frac{x-1}{2}+1$ 的解集.

解：原不等式可化为

$$2(2x+3) \geqslant 5(x-1)+10,$$
$$4x+6 \geqslant 5x-5+10,$$
$$4x-5x \geqslant -6-5+10,$$
$$-x \geqslant -1,$$
$$x \leqslant 1,$$

所以原不等式的解集是 $\{x \mid x \leqslant 1\}$.

上述不等式的解集可用数轴表示，如图 2-2.

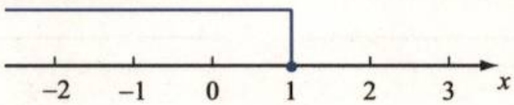


图 2-2

例 4 解不等式组

$$\begin{cases} x-5 \leqslant 2x-4, & ① \\ 3x+1 < 9-x. & ② \end{cases}$$

解：由不等式①得

$$x-2x \leqslant 5-4,$$
$$-x \leqslant 1,$$
$$x \geqslant -1,$$

所以不等式①的解集是 $\{x \mid x \geqslant -1\}$.

由不等式②得

$$3x+x < 9-1,$$
$$4x < 8,$$
$$x < 2.$$

所以不等式②的解集是 $\{x \mid x < 2\}$.

因为 $\{x \mid x \geqslant -1\} \cap \{x \mid x < 2\} = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\}$，所以原不等式组的解集是

$$\{x \mid -1 \leqslant x < 2\}.$$

说明：例 4 中①的解集与②的解集的交集可以在数轴上表示出来，如图 2-3 所示.

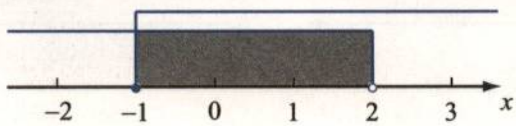


图 2-3

试一试

你能从图 2-2 中找到方程 $\frac{2x+3}{5}=\frac{x-1}{2}+1$ 的解吗?

我们还经常用区间表示不等式的解集，下面介绍区间的概念.

设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则：

满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，称为**闭区间**，记作 $[a,\ b]$（如图 2 - 4 (1)）；

满足 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，称为**开区间**，记作 $(a,\ b)$（如图 2 - 4 (2)）；

满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，都称为**半开半闭区间**，分别记作 $[a,\ b)$ 或 $(a,\ b]$（如图 2 - 4 (3) (4)）.

上述区间中，a 与 b 称为区间的**端点**. 在数轴上表示区间时，**端点**属于这个区间，用实心点表示；端点不属于这个区间，用空心点表示.

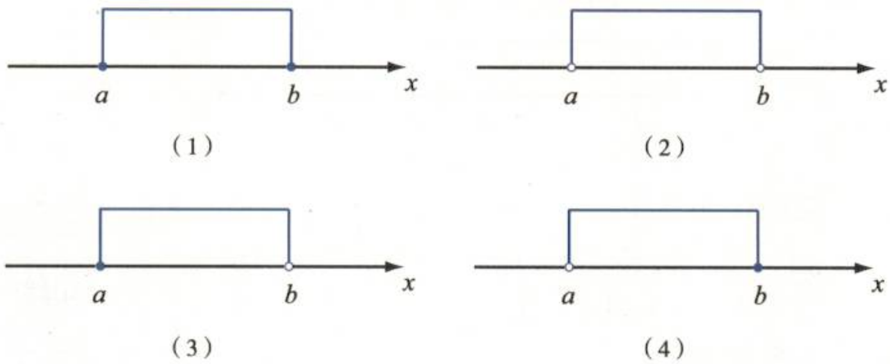


图 2 - 4

实数集 $\mathbf{R}$，也可用区间表示为 $(-\infty,\ +\infty)$，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”.

满足 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合，可记作 $[a,\ +\infty)$（如图 2 - 5 (1)）；

满足 $x>a$ 的全体实数 x 的集合，可记作 $(a,\ +\infty)$（如图 2 - 5 (2)）；

读一读

用 $-\infty$，$+\infty$ 作为区间的一端或两端的区间称为无穷区间.

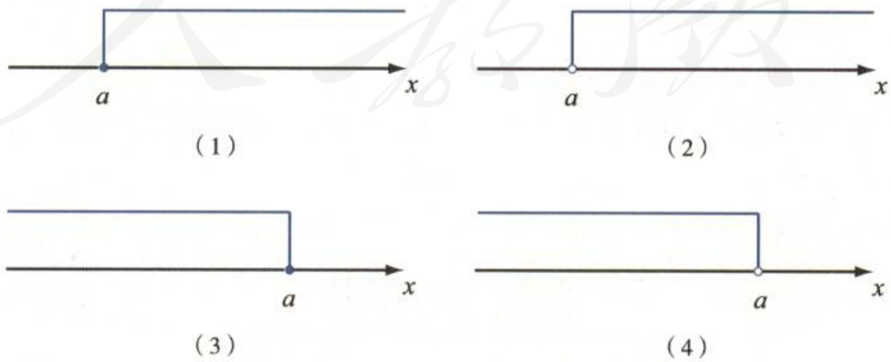


图 2 - 5

满足 $x \leqslant a$ 的全体实数 x 的集合，可记作 $(-\infty, a]$（如图 2-5（3））；

满足 $x < a$ 的全体实数 x 的集合，可记作 $(-\infty, a)$（如图 2-5（4））.

例 5　用区间表示下列不等式的解集：

（1）$-3 < x \leqslant 8.5$；　　（2）$x \geqslant 10$.

解：（1）$(-3, 8.5]$.

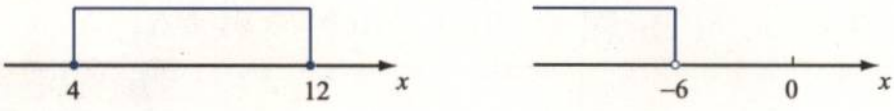
（2）$[10, +\infty)$.

例 6　用集合的性质描述法表示下列区间，并在数轴上表示：

（1）$[4, 12]$；　　（2）$(-\infty, -6)$.

解：（1）$\{x \mid 4 \leqslant x \leqslant 12\}$，如图 2-6（1）所示.

（2）$\{x \mid x < -6\}$，如图 2-6（2）所示.



（1）　　（2）

图 2-6

练习 2.2.2

1. 写出下列不等式的解集：

（1）$x-1>0$；　　（2）$2x<6$；

（3）$2-x \leqslant 0$；　　（4）$-x>3$；

（5）$2x-4 \leqslant 0$；　　（6）$5-2x<0$.

2. 写出下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x>1, \\ x>2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x<3, \\ x<5; \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x<4, \\ x>-2; \end{cases}$

（4）$\begin{cases} x>2, \\ x<-1; \end{cases}$　　（5）$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 1; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} x>-1, \\ x<1. \end{cases}$

3. 解下列不等式：

（1）$x+5>2$；　　（2）$2x-5<4x-9$；

（3）$3(x-3) \leqslant 7-x$；　　（4）$x-5>1+\frac{1}{2}x$.

4. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} x-3 \leqslant 7-x, \\ 5-2x>9-x; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 5x-2<6-3x, \\ 5-2x>35-8x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1\leqslant 6-\dfrac{x}{2}, \\ 3+\dfrac{2}{5}x>2-\dfrac{x}{5}; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{3}>\dfrac{2}{3}-2x, \\ 2-4x<16+3x. \end{cases}$

5. 用区间表示下列不等式的解集，并在数轴上表示：

(1) $-1\leqslant x\leqslant 5$；　　(2) $2<x<3$；

(3) $-6\leqslant x<-2$；　　(4) $-3<x\leqslant 3$；

(5) $x\geqslant 0$；　　(6) $x<2$.

2.2.3　含有绝对值的不等式

我们知道，$|-3|=3$，$|3|=3$. 事实上，对任意实数 m，都有

$$\sqrt{m^2}=|m|=\begin{cases} m, & m>0, \\ 0, & m=0, \\ -m, & m<0. \end{cases}$$

$|m|$的几何意义是数轴上 m 对应的点与原点的距离.

由实数绝对值的几何意义可知，$|x|=3$ 在数轴上表示 x 对应的点与原点距离等于 3，满足条件的 x 是 -3 和 3，如图 2－7 所示.

读一读

绝对值符号“| |”是德国数学家魏尔斯特拉斯于 1841 年开始使用的，然后被人们接受，并且沿用至今.

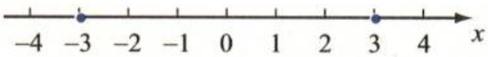


图 2－7

由此可知，不等式$|x|<3$ 的解集，是与原点的距离小于 3 的点的全体组成的集合，如图 2－8 所示.

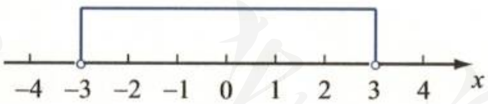


图 2－8

即

$$\{x \mid |x|<3\}=\{x \mid -3<x<3\}=(-3, 3).$$

不等式$|x|>3$ 的解集，是与原点的距离大于 3 的点的全体组成的集合，如图 2－9 所示.

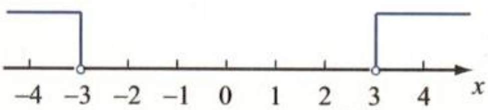


图 2－9

即

$$\{x \mid |x|>3\}=\{x \mid x<-3 \text{ 或 } x>3\}=(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty).$$

一般地，如果 $m>0$，则

$$|x|<m \Leftrightarrow -m<x<m,$$
$$|x|>m \Leftrightarrow x<-m \text{ 或 } x>m,$$

如图 2-10 所示.

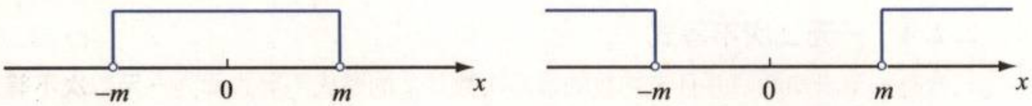


图 2-10

例 7 解下列不等式，并在数轴上表示出解集：

(1) $|2x-3|\leqslant 1$；　　(2) $|2x-3|>1$.

试一试

分别写出不等式 $|x|\leqslant 5$ 和 $|x|\geqslant 5$ 的充要条件，并在数轴上表示出来.

解：(1) 原不等式等价于

$$-1\leqslant 2x-3\leqslant 1,$$
$$2\leqslant 2x\leqslant 4,$$
$$1\leqslant x\leqslant 2,$$

所以原不等式的解集是 $[1,\ 2]$，如图 2-11 (1) 所示.

(2) 原不等式等价于

$$2x-3<-1, \quad ①$$

或

$$2x-3>1. \quad ②$$

不等式①的解集是 $(-\infty,\ 1)$，②的解集是 $(2,\ +\infty)$.

因此原不等式的解集是 $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$，如图 2-11 (2) 所示.

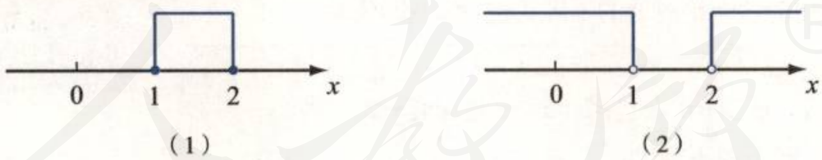


图 2-11

练习 2.2.3

1. 解下列不等式：

(1) $|x|<1$；　　(2) $|x|\geqslant 5$；

(3) $2|x|-4>0$；　　(4) $1-3|x|<0$；

(5) $|x+1|>0$；　　　　(6) $|x-2|<0$.

2. 解下列不等式，并在数轴上表示其解集：

(1) $|x-4|<9$；　　　　(2) $|x-2|>2$；

(3) $|1-2x|\leqslant 3$；　　　　(4) $|2x+1|\geqslant 7$.

3. 若关于 x 的不等式 $|x-a|<b$ 的解集是 $\{x|-3<x<9\}$，求实数 a，b 的值.

2.2.4 一元二次不等式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式不等式称为**一元二次不等式**.

一元二次不等式的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a\neq 0).$$

下面我们研究一元二次不等式 $x^2>m$ 和 $x^2<m$ $(m>0)$ 的解法.

我们知道，如果 $a>0$，$b>0$，那么

$$\begin{aligned} a^2>b^2 &\Leftrightarrow a^2-b^2>0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a-b)>0 \\ &\Leftrightarrow a-b>0, \end{aligned}$$

于是

$$a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b.$$

因此，当 $m>0$ 时，有

$$x^2>m \Leftrightarrow |x|>\sqrt{m},$$

$$x^2<m \Leftrightarrow |x|<\sqrt{m}.$$

也就是说，可以将形如 $x^2>m$ 和 $x^2<m$ $(m>0)$ 的不等式，转化为含有绝对值的不等式进行求解. 例如，

$$x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2,$$

$$x^2\geqslant 4 \Leftrightarrow |x|\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2.$$

想一想

当 $m=0$ 或 $m<0$ 时，一元二次不等式 $x^2>m$ 和 $x^2<m$ 的解集是怎样的?

例 8　解下列不等式：

(1) $(x+2)^2<4$；　　　　(2) $(x-1)^2\geqslant 9$.

解：(1) 原不等式等价于

$$|x+2|<2,$$

$$-2<x+2<2,$$

$$-4<x<0.$$

所以原不等式的解集为 $(-4, 0)$，如图 2-12 所示.

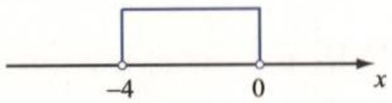


图 2-12

试一试

你能从图 2-12 中找到方程 $(x+2)^2=4$ 的解吗?

(2) 原不等式等价于

$$|x-1|\geqslant 3,$$
$$x-1\leqslant -3 \text{ 或 } x-1\geqslant 3,$$
$$x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 4.$$

所以原不等式的解集为 $(-\infty, -2]\cup[4, +\infty)$，如图 2-13 所示.

试一试

你能从图 2-13 中找到方程 $(x-1)^2=9$ 的解吗?

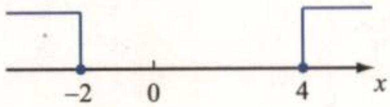


图 2-13

下面我们用配方法研究一般的一元二次不等式的解法.

例 9 解下列不等式:

(1) $x^2-2x-3\leqslant 0$;　　(2) $2x^2-5x-3>0$.

解: (1) 原不等式等价于

$$(x-1)^2\leqslant 4,$$
$$|x-1|\leqslant 2,$$
$$-2\leqslant x-1\leqslant 2,$$
$$-1\leqslant x\leqslant 3,$$

所以原不等式的解集为 $[-1, 3]$，如图 2-14 所示.

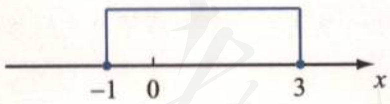


图 2-14

(2) 原不等式等价于

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>0,$$
$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2>\frac{49}{16},$$
$$\left|x-\frac{5}{4}\right|>\frac{7}{4},$$

$$x-\frac{5}{4}>\frac{7}{4} \text{或} x-\frac{5}{4}<-\frac{7}{4},$$

$$x>3 \text{或} x<-\frac{1}{2},$$

所以原不等式的解集为$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup(3, +\infty)$，如图 2-15 所示.

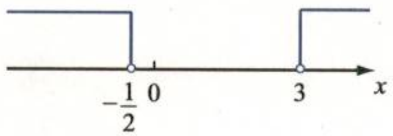


图 2-15

想一想

不等式的解集与对应方程的解有什么关系？

例 10 解下列不等式：

(1) $x^2-2x+3\leqslant 0$；　(2) $x^2+4x+5>0$；　(3) $x^2-2x+1>0$.

解：(1) 原不等式等价于

$$(x-1)^2\leqslant -2,$$

因为不论 x 为何值，总有 $(x-1)^2\geqslant 0$ 成立，所以原不等式的解集是$\varnothing$.

(2) 原不等式等价于

$$(x+2)^2+1>0,$$

因为不论 x 为何值，总有 $(x+2)^2\geqslant 0$ 成立，从而

$$(x+2)^2+1>0$$

恒成立，所以原不等式的解集是 **R**.

(3) 原不等式等价于

$$(x-1)^2>0,$$

因为只要 $x\neq 1$，$(x-1)^2>0$ 就成立，所以原不等式的解集是 $\{x \mid x\neq 1\}$.

练习 2.2.4

1. 解下列不等式：

(1) $x^2-16<0$；　(2) $x^2-16>0$；

(3) $(x+1)^2<64$；　(4) $(x-2)^2>100$.

2. 解下列不等式：

(1) $(x-3)^2>0$；　(2) $(x-3)^2<0$；

(3) $(x-1)^2+5>0$；　(4) $(x-1)^2+5<0$.

*3. 解下列不等式：

(1) $x^2-3x-10>0$；　(2) $x^2+5x-14<0$；

(3) $x^2+4x+4\leqslant 0$；　(4) $x^2+4x+4>0$；

(5) $x^2+x+2<0$；　(6) $x^2+x+2>0$.

*4. 求不等式 $(x^2-4x-5)(x^2+1)>0$ 的解集.

*5. 已知方程 $x^2-(m+1)x+2=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

习题二

1. 解下列一元二次方程：

(1) $4x^2-9=0$；　(2) $x^2-x=0$；

(3) $x^2+5x+6=0$；　(4) $x^2-5x=6$；

(5) $x^2+2x+1=0$；　(6) $-3x^2+x+2=0$；

(7) $x^2+3=4x$；　(8) $x^2-5x+5=0$.

2. 比较下列各组中两个实数或代数式的大小：

(1) $-\frac{8}{9}$和$-\frac{7}{8}$；　(2) $(x+5)(x+7)$ 和 $(x+6)^2$；

(3) $(x+1)^2$ 和 $2x+1$；　(4) $2a^2-7a+2$ 和 a^2-6a+1.

3. 填空题：

(1) $2x-3>1$ 的解集是____________；

(2) $7-3x<4$ 的解集是____________；

(3) $\begin{cases}x<9,\\x>-2\end{cases}$的解集是____________；

(4) $\begin{cases}x\leqslant 0,\\x>-1\end{cases}$的解集是____________；

(5) $\begin{cases}x<8,\\x\leqslant -6\end{cases}$的解集是____________；

(6) $\begin{cases}x\geqslant 8,\\x>-6\end{cases}$的解集是____________.

4. 解下列不等式（组）：

(1) $x+8\leqslant 11-3x$；　(2) $\frac{2}{3}x+1>\frac{1}{3}-x$；

(3) $\begin{cases}x+2>2x-3,\\5x-1>3x+7;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\frac{x}{2}-12<2(x+1),\\x-2>5x+6.\end{cases}$

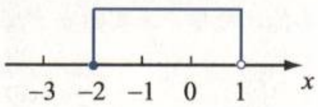
5. 用区间和集合的性质描述法分别表示下列不等式的解集：

(1) $-2\leqslant x\leqslant 0$；　　(2) $-7<x<7$；

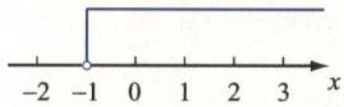
(3) $0\leqslant x<3$；　　(4) $5<x\leqslant 9$；

(5) $x<5$；　　(6) $x>-6$.

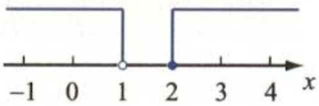
6. 用区间和集合的性质描述法分别表示下列数轴上所表示的不等式的解集：



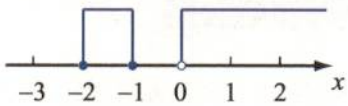
(1)



(2)



(3)



(4)

7. 解下列含绝对值的不等式：

(1) $|3x-1|\leqslant 5$；　　(2) $|2x-5|>3$；

(3) $\left|\dfrac{1}{4}+x\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\dfrac{|3x-5|}{2}+4\leqslant 8$；

(5) $|x-3|\leqslant 0$；　　(6) $|2x-1|>-1$.

*8. 解下列一元二次不等式：

(1) $x^2-3x+2>0$；　　(2) $-x^2+10x+11>0$；

(3) $x^2+6x+36>0$；　　(4) $x^2-4x+20<0$；

(5) $x^2-10x+25\geqslant 0$；　　(6) $4x^2+4x+1<0$.

*9. 已知方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

*10. 在一次考试中，李明的语文、英语的平均分数是 92 分，并且语文、英语、数学三科平均分不低于 90 分，则李明的数学至少考了多少分？

阅读与实践

黄金分割

图 1 是一个大自然的艺术品——鹦鹉螺，它的美丽体现在它的螺旋线上. 这条螺旋线的美蕴涵着黄金分割比.

图 2 是鹦鹉螺的透视图，从中能清楚地看到这条美丽的螺旋线，而这条美丽的曲线处处位于一个黄金矩形内.

图 1

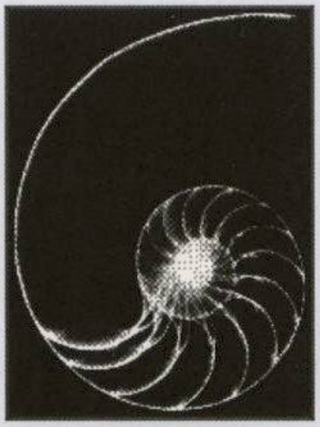


图 2

如果从两个边长是 1 的正方形开始画正方形，边长分别是 1，1，2，3，5，8，13，21，…（见图 3），则随着正方形的增加，所形成的矩形的长宽比越来越接近黄金分割比.

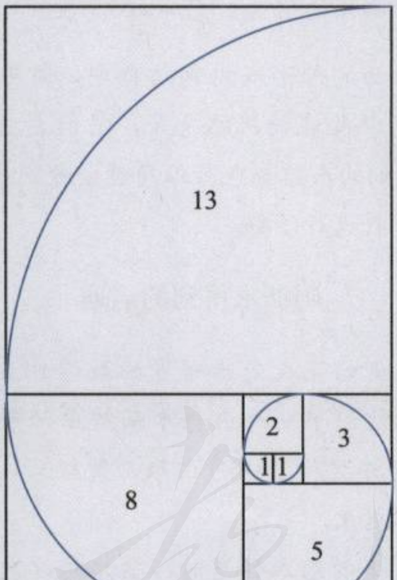


图 3

在古希腊的艺术和建筑中，人们已经广泛使用了黄金矩形，例如古希腊的巴特农神庙，其高和宽的比非常接近黄金分割比. 在文艺复兴时代，意大利以“神圣比例”来称呼黄金分割比，认为黄金分割比是最完美的比例.

目前，我们经常使用或看到的明信片、邮票、国旗、名片等，其长宽比

大都与黄金分割比非常接近. 利用黄金分割比完成的构图，通常具有秩序、明朗的特性，给人一种美的享受.

那么，什么是黄金分割比呢?

如图 4 所示，若点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC，且满足 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，则称点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 AC 与 AB 的比称为黄金分割比.

设线段 $AB=1$，$AC=t$，由定义可列方程

$$\frac{t}{1}=\frac{1-t}{t},$$

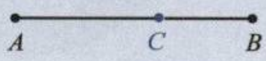


图 4

整理得 $t^2+t-1=0$，解得

$$t_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{或} t_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{（不合题意，舍去）.}$$

由此可知，黄金分割比的值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

自然界中，许多东西的外形或内部结构中，都可以发现黄金分割比的存在，例如菠萝、菊花以及螺旋状的壳等，它们左旋及右旋的比例，就都很接近黄金分割比. 我们的人体美也可以用黄金分割比来衡量，感兴趣的同学可以上网查阅有关资料进行了解.

喝糖水得到的启迪

小明放学回家后，开始完成老师布置的数学作业——预习不等式的性质. 感觉有点口渴，他就泡了一杯白糖水来解渴，可是入口后感觉不是很甜，于是他就又往糖水杯里放了一勺白糖，搅拌后，口感刚好，于是就美滋滋地边看课本边喝了起来.

当小明读到实数大小的基本性质时，猛然想起自己喝的白糖水由淡变甜，糖水的浓度是发生了变化的！于是，小明放下课本，找出水瓶、弹簧秤、糖等所需物品，兴致勃勃地做起了实验. 他第一次称取了 1 000 g 的水、30 g 的糖，混合搅拌后，他拿出计算器计算出糖水的浓度为

$$30\div(1\ 000+30)\approx 0.029\ 126.$$

然后，小明又称取了 20 g 糖放入糖水中，再搅拌使糖充分溶解，计算出此时糖水的浓度为

$$(30+20)\div(1\ 030+20)\approx 0.047\ 619.$$

显然 $0.029\ 126<0.047\ 619$，于是小明就得到这样的结论：

$$\frac{30}{1\ 030}<\frac{30+20}{1\ 030+20}.$$

这时的小明，对于自己的发现异常兴奋，他想：如果我有 10 kg 白糖水，其中含有白糖 1 kg，糖水的浓度就是$\frac{1}{10}$，再添加 m kg（$m>0$）的白糖并假设能全部溶解，则糖水的浓度就变为$\frac{1+m}{10+m}$，这时应该有

$$\frac{1+m}{10+m}>\frac{1}{10}.$$

你能用数学方法证明这个结论吗？

第三章
函数

篮球场上，投球的那一刹那，激动人心，扣人心弦．你可曾注意那投出的篮球，在空中划出一条美丽的抛物线？可曾想到，抛物线的背后隐藏着篮球的高度与时间的函数关系？

历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细．

——培根

没有哪门学科能比数学更为清晰地阐明自然界的和谐性．

——卡罗斯

函数是数学中的重要概念，它通过某一运动变化过程中两个变量之间相互依赖和相互制约的关系，反映了变量所在集合之间的对应关系.

本章我们将在初中所学函数的基础上，进一步加深对函数概念的理解，学习函数的表示方法，研究函数的性质，发展数学抽象、数学运算、逻辑推理和直观想象的数学素养. 我们还将通过对一元二次函数的研究，学习数学建模和数形结合的思想方法，为学习指数函数、对数函数及其他内容打下基础.

3.1 函数的概念

在初中，我们已经学习了变量与函数的概念：在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 值，就相应地确定了唯一的 y 值，那么我们就称 y 是 x 的**函数**，其中 x 是自变量，y 是因变量.

下面我们来看两个常见的函数问题：

路程问题　一辆汽车在一段平坦的道路上以 100 km/h 的速度匀速行驶 2 h，试将行驶路程 s km 表示为行驶时间 t h 的函数，并指出 t 的取值范围.

面积问题　现用长 20 m 的篱笆材料围成一个矩形的花圃，若矩形的一条边长是 x m，试将面积 y m^2表示为 x m 的函数，并指出 x 的取值范围.

在路程问题中，路程 s 随着时间 t 的变化而变化，t 是自变量，s 是因变量，由“路程＝速度×时间”得

$$s=100t,\ t\in[0,\ 2]. \tag{①}$$

不难发现，对于集合 $[0,\ 2]$ 中任意一个实数 t，按“乘以 100”的法则，都能得到唯一的实数 s 与之对应.

在面积问题中，如图 3 - 1 所示，矩形的一条边长是 x，则另一条边长是$\dfrac{20-2x}{2}$，即 $10-x$，由实际意义可知：$x>0$ 且 $10-x>0$，可得 $0<x<10$. 面积 y 随着边长 x 的变化而变化，x 是自变量，y 是因变量. 根据矩形的面积公式，有

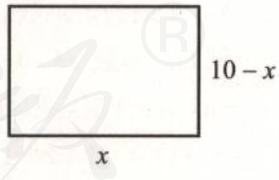


图 3 - 1

$$y=x(10-x),\ x\in(0,\ 10). \tag{②}$$

可以发现，对于集合 $(0,\ 10)$ 中任意一个 x，按“x 与 $10-x$ 相乘”的法则，都有唯一确定的 y 与之对应.

下表给出了面积问题中 x 和 y 的一部分对应取值.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y=x(10-x)$	9	16	21	24	25	24	21	16	9

观察上表可知，x 取 1 或取 9 时，y 的值都是 9；x 取 2 或 8 时，y 的值都是 16……但这依旧符合：对于集合 $(0,\ 10)$ 中任意的一个 x，按“x 与 $10-x$ 相乘”的法则，都有唯一确定的 y 与之对应.

综合①式和②式，它们具有共同特点：

(1) 存在自变量的取值集合；

(2) 具有“对于自变量的任意一个取值，因变量都有唯一确定的值与之对应”的法则.

下面我们用集合语言，对函数的概念进行描述.

设集合 A 是一个非空数集，如果按照某种对应法则 f，对 A 中任意一个实数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这种对应法则为集合 A 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的取值集合 A 称为函数的**定义域**，因变量 y 的取值组成的集合称为函数的**值域**.

想一想

函数 $f(x)=6$ 是一个常数函数，请说出它的定义域和值域.

由以上定义可知，两个变量之间的函数关系实质上是两个非空数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系.

函数的对应法则通常用字母 f 表示，也可以用 g，h 等字母表示. 比如，y 是 x 的函数可以记为 $y=f(x)$，也可以记为 $y=g(x)$ 或 $y=h(x)$ 等.

函数 $y=f(x)$ 也可以写成函数 $f(x)$. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处对应的函数值，记作 $f(a)$.

例如，函数 $f(x)=x^2+2x$，当 x 分别取 1，0，-1，a，$-a$，$a+1$ 时，所对应的函数值分别是

$$f(1)=1^2+2\times1=3,$$

$$f(0)=0^2+2\times0=0,$$

$$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1,$$

$$f(a)=a^2+2a,$$

$$f(-a)=(-a)^2+2\times(-a)=a^2-2a,$$

$$f(a+1)=(a+1)^2+2\times(a+1)=a^2+4a+3.$$

读一读

瑞士数学家约翰·伯努利于 1694 年首次提出函数概念，瑞士数学家莱昂哈德·欧拉于 1734 年首次用“f”表示函数.

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$：

(1) 求 $f(1)$，$f(-2)$，$f(-x)$，$f(x+1)$；

(2) 用计算器计算 $f(0.12)$ 和 $f(1.1)$ 的值（精确到 0.01）.

解：(1) 分别用 1，-2，$-x$，$x+1$ 代替 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 中的 x，得

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2},$$

$$f(-2)=\frac{1}{(-2)^2+1}=\frac{1}{5},$$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1},$$

$$f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

(2) 用计算器计算：

按键	显示
1 $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 0.12 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	0.9858044164
1 $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 1.1 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	0.4524886878

所以 $f(0.12)\approx 0.99$，$f(1.1)\approx 0.45$.

一个函数的值域可以由该函数的定义域和对应法则确定，因此，我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两要素.

一般地，两个变量之间的对应关系是函数，其充要条件是：

(1) 定义域是非空数集；

(2) 对自变量 x 的每一个值，因变量 y 都有唯一确定的值与之对应.

只有以上这两点同时具备，才可以断定两个变量之间的关系是函数关系.

如果不特别指明一个函数的定义域，那么这个函数的定义域就是使函数有意义的全体实数组成的集合. 例如，函数

$$y=\frac{1}{x}$$

的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$；再如，函数

$$y=\sqrt{x-1}$$

的定义域是 $[1, +\infty)$.

想一想

函数 $y=(x-1)^0$ 的定义域是什么？

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2-x}$ 的定义域.

解：要使函数有意义，则

$$\begin{cases} x-1\neq 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$$

所以函数的定义域为 $\{x \mid x\leqslant 2$ 且 $x\neq 1\}$.

练习 3.1

1. 口答下列各题：

(1) 已知函数 $y=3x$，$x\in[0, 3]$，试说出这个函数表达式中的自变量、因变量和函数的定义域；

(2) 已知函数 $f(x)=x^2-1$，则 $f(0)$ 等于多少？

(3) 函数的两要素是什么？

2. 写出下列函数的关系式，并指出其定义域：

(1) 某种商品的价格为 4 元/件，付款金额 y 元是购买这种商品的数量 x 件的函数；

(2) 圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数.

3. 求下列函数值：

(1) 设 $f(x)=2x^2-1$，求 $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(b)$；

(2) 已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{|x-2|}$，求 $f(0)$，$f(3)$，$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2-4$，用计算器求 $f(-1.2)$，$f(3.7)$ 的值（精确到 0.01）.

*5. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$；

(3) $f(x)=(x-3)^0$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{|x-1|}$.

3.2 函数的表示方法

函数 $y=f(x)$ 除了直接用自然语言来表述外，常用的表示方法还有解析法、列表法和图像法.

1. 解析法

函数 $s=100t$，$t\in[0,2]$ 和 $y=x(10-x)$，$x\in(0,10)$，都是用等式来表示两个变量间的函数关系，这种表示函数的方法称为**解析法**. 例如，

$$y=x^2,\ y=2x,\ y=\sqrt{x}$$

等都是用解析法表示的函数.

用解析法表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易由自变量的值求出与其对应的函数值，便于利用解析式研究函数的性质.

2. 列表法

把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数的方法称为**列表法**. 例如，下表是用列表法表示的函数关系.

年份 x	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
地区生产总值 y 亿元	39 169.9	45 361.9	50 013.2	55 230.3	59 426.6	63 002.3	68 024.5

用列表法表示函数关系的优点是：能够直接表明函数关系中的一些对应值，不必通过计算就可以知道自变量取某些值时所对应的函数值，使用比较方便.

> **想一想**
>
> 请举一个用列表法表示函数关系的例子.

3. 图像法

所谓**图像法**是指用图像来表示两个变量之间函数关系的方法.

例如，气象台应用自动记录仪描绘的温度随时间变化的曲线就是函数关系的图像. 图 3-2 是 2018 年 2 月 10 日 18:00 山东省气象局发布的济南整点天气实况监测图.

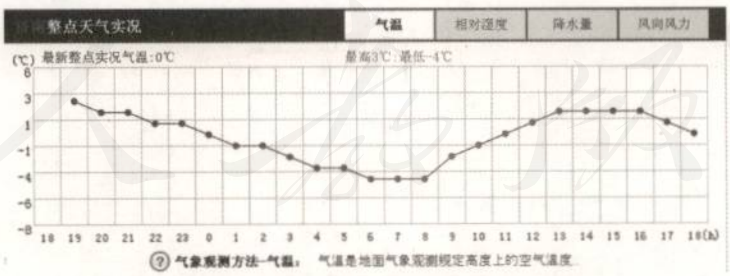


图 3-2

再如，某人饭后血糖变化的趋势图，反映了血糖随时间变化的函数关系，如图 3-3 所示.

用图像法表示函数关系的优点是：能够直观地表示出当自变量变化时相应函数值的变化趋势，使得我们可以通过图像来研究函数的性质.

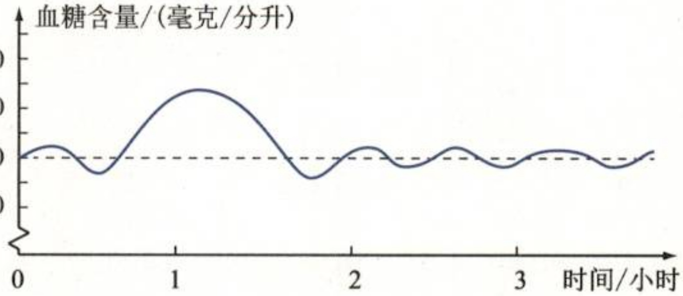


图 3－3

例 1　某种作业本的价格是 3 元/本，付款金额 y 元是购买这种作业本 x 本的函数，其中 $x\in\{1,2,3,4\}$. 试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$.

解：这个函数的定义域是集合 $\{1,2,3,4\}$.

函数 $y=f(x)$ 用解析法表示为

$$y=3x,\ x\in\{1,2,3,4\}.$$

函数 $y=f(x)$ 用列表法表示如下表所示.

作业本数 x	1	2	3	4
金额 y 元	3	6	9	12

函数 $y=f(x)$ 用图像法表示如图 3－4 所示.

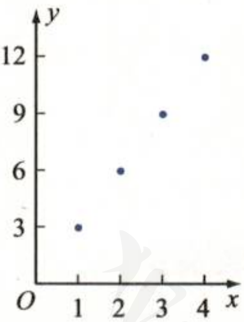


图 3－4

想一想

函数 $y=3x$ 的图像与图 3－4 中函数的图像有什么区别?

例 2　作出函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像.

分析：函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是反比例函数，它的图像是双曲线，定义域是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 当 $x>0$ 时，$y>0$，这时函数的图像在第一象限，y 的值随着 x 值的增大而减小；当 $x<0$ 时，$y<0$，这时函数的图像在第三象限，y 的值也随着 x 值的增大而减小.

解：函数的定义域是 $\{x\mid x\neq 0\}$，以 $x=0$ 为中心，在 x 轴的两个方向上，适当选取若干自变量的值，计算出对应的函数值，如下表所示.

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	…	…	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	…	…	3	2	1	$\frac{1}{2}$	…

在直角坐标系中描出这些点并连成光滑曲线，这就是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像（图 3 - 5）.

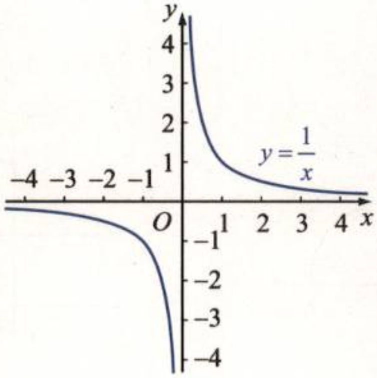


图 3 - 5

想一想

例 2 的作图中，为什么不能把点 $\left(-\frac{1}{3},\ -3\right)$ 与点 $\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$ 连接起来？

定义在无穷区间上的函数，我们不可能画出其完整的图像，只能画出它在有限区间上的图像，即：我们可以先在该函数定义域上画出有限个点，再把这些点顺次用光滑的曲线连接起来.

例 3 作出函数 $y=\begin{cases} x+1,\ x\in[0,\ 3], \\ -x,\ x\in[-3,\ 0) \end{cases}$ 的图像.

解：描点 $(0,\ 1)$ 和点 $(3,\ 4)$，过此两点作直线 $y=x+1$，再截取 $x\in[0,\ 3]$ 的部分，两个端点均为实心点. 即当 $x\in[0,\ 3]$ 时，$f(x)=x+1$，它的图像是一条线段.

描点 $(0,\ 0)$ 和点 $(-3,\ 3)$，过此两点作直线 $y=-x$，再截取 $x\in[-3,\ 0)$ 的部分，端点 $(0,\ 0)$ 为空心点，端点 $(-3,\ 3)$ 为实心点. 即当 $x\in[-3,\ 0)$ 时，$f(x)=-x$，它的图像是一条不含点 O 的线段.

如图 3 - 6 所示即为所求函数图像.

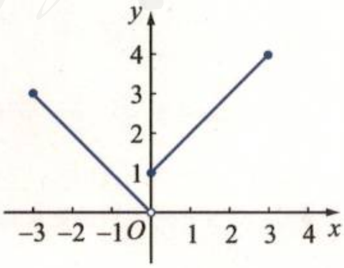


图 3 - 6

像例 3 这样的函数，在函数定义域内，对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对应法则，这样的函数通常称为**分段函数**.

由上可知，函数图像既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等等.

观察如图 3 - 7 所示的图形，哪些可以作为函数

$y=f(x)$ 的图像？

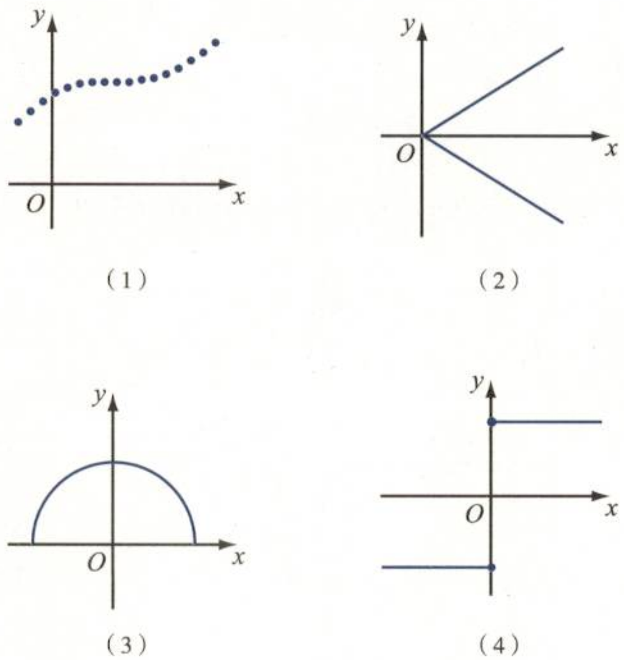


图 3-7

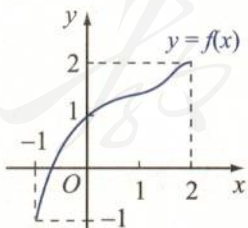
根据函数的定义可知，图 3-7（1）（3）可以作为函数 $y=f(x)$ 的图像.

练习 3.2

1. 口答下列各题：

（1）函数的表示方法有哪几种？

（2）已知函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，说出 $f(0)$，$f(-1)$ 的值及函数的定义域、值域.



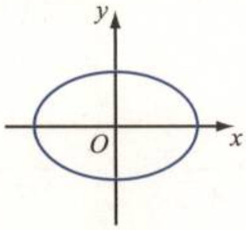
（第 1（2）题）

2. 写出下列函数的定义域，并作出函数的图像：

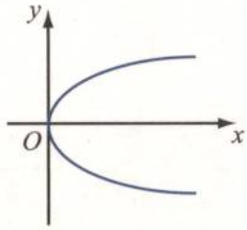
（1）$y=3x$；　　（2）$y=\dfrac{2}{x}$；

（3）$y=x^2$；　　（4）$y=-2x+1$.

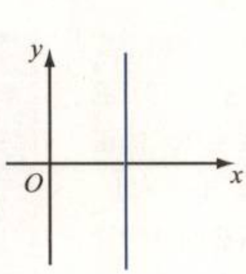
3. 下列各图，哪些可以作为函数 $y=f(x)$ 的图像？



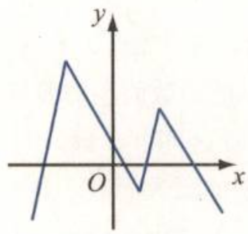
(1)



(2)



(3)



(4)

4. 作出函数 $y=|x|+1$ 的图像.

3.3 函数的单调性

问题　在乘坐电梯时，乘客所处的高度 h 是所用时间 t 的函数吗？h 如何随着 t 的变化而变化？

可以知道，h 是 t 的函数，电梯上行时，随着时间 t 的增加，高度 h 在不断增大；电梯下行时，随着时间 t 的增加，高度 h 在不断减小，如图 3－8 所示. 这反映了函数怎样的性质规律呢？

图 3－8

下面我们借助函数 $y=2x$，$y=-2x$，$y=x^2$的图像（如图 3－9 所示）进行研究.

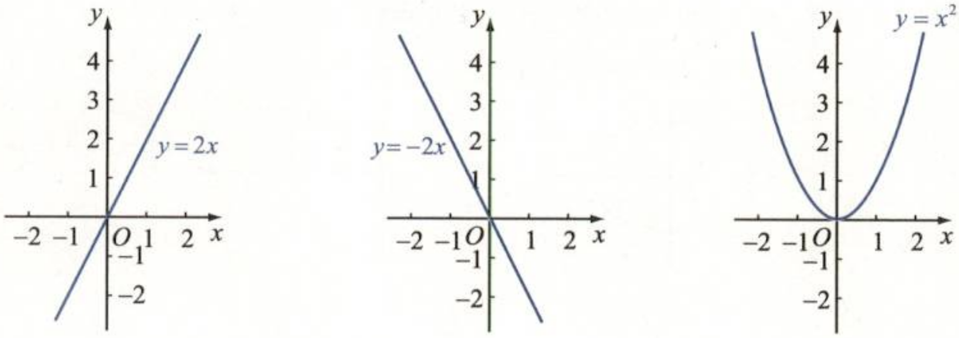


图 3-9

我们可以看到，当自变量 x 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上由小变大时，函数 $y=2x$ 的函数值也随着增大，函数 $y=-2x$ 的函数值反而减小；在区间 $(-\infty,\ 0]$ 上，函数 $y=x^2$ 的函数值随着自变量 x 的增大而减小，在区间 $[0,\ +\infty)$ 上，函数值随自变量 x 的增大而增大. 为了刻画函数的这种性质，我们引入增函数和减函数的概念.

议一议

观察图 3-9 中各个函数的图像，说出每个函数图像从左到右的变化趋势.

在函数 $y=f(x)$ 的图像上任取两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，记

$$\Delta x=x_2-x_1,\ \Delta y=f(x_2)-f(x_1)=y_2-y_1.$$

这里，Δx 表示自变量 x 的**增量**或**改变量**，相应地，Δy 表示函数值 y 的**增量**或**改变量**，增量既可以是正数，也可以是负数.

读一读

记号 Δx 是一个整体符号，并不表示 Δ 与 x 的乘积，其中符号“Δ”是大写希腊字母，读作“delta”.

一般地，对于函数 $y=f(x)$ 在给定区间上任意两个不相等的值 x_1，x_2，当 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 时，就说函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是**增函数**（如图 3-10（1））；当 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 时，就说函数 $y=f(x)$ 在这个区间上是**减函数**（如图 3-10（2））.

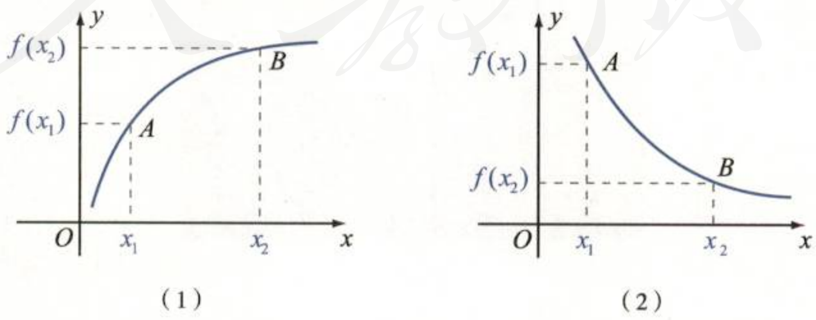


图 3-10

比如函数 $y=2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数，函数 $y=-2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

如果一个函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或者是减函数，就说这个函数在这个区间上具有（严格的）**单调性**，这个区间就称为这个函数的**单调区间**. 函数的单调区间，一般是指保持函数单调性的最大区间.

想一想

能说函数在某一点处有单调性吗？为什么？

比如函数 $y=x^2$，在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，或者说函数 $y=x^2$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0]$，单调递增区间是 $[0, +\infty)$.

例 1 如图 3-11，函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-10, 10]$，根据图像指出函数 $y=f(x)$ 的单调区间以及单调性.

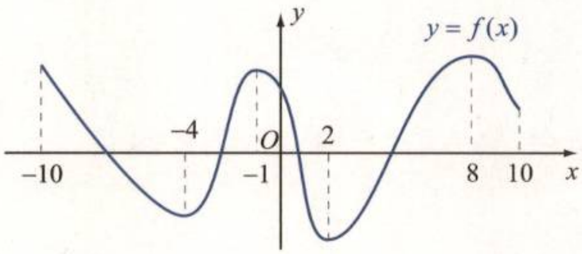


图 3-11

解：函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-10, -4]$，$[-1, 2]$，$[8, 10]$ 上是减函数；在区间 $[-4, -1]$，$[2, 8]$ 上是增函数.

通过观察函数的图像可以判断函数的单调性，根据增函数、减函数的定义可以严格证明函数的单调性.

例 2 证明函数 $f(x)=2x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

证明：设 x_1，x_2 是任意两个不相等的实数，设 $\Delta x=x_2-x_1$，则

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2)-f(x_1)\\ &=(2x_2+1)-(2x_1+1)\\ &=2(x_2-x_1)\\ &=2\Delta x,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2>0.$$

因此函数 $f(x)=2x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

例 3 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

证明：在区间 $(-\infty, 0)$ 上任取两个不相等的实数 x_1，x_2，设 $\Delta x = x_2 - x_1$，则

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2) - f(x_1) \\ &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \\ &= -\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= -\frac{\Delta x}{x_1 x_2}.\end{aligned}$$

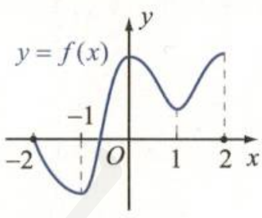
因为 x_1，$x_2 \in (-\infty, 0)$，故 $x_1 x_2 > 0$，所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0.$$

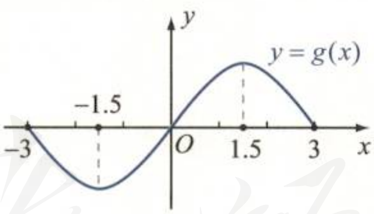
因此函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

练习 3.3

1. 如图，已知函数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 的图像（包括端点），根据图像写出函数的单调区间，以及在每一个区间上，函数是增函数还是减函数.



(1)



(2)

（第 1 题）

*2. 判断下列函数在指定区间上是增函数还是减函数：

(1) $f(x) = x^2 + 1$，$x \in (0, +\infty)$；

(2) $f(x) = -\frac{1}{x}$，$x \in (0, +\infty)$.

*3. 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

3.4 函数的奇偶性

问题　如图 3－12 所示，观察山东剪纸等图片，说出它们的对称性.

图 3－12

我们很容易发现山东剪纸的小狗、蝴蝶图是轴对称图形，太极图轮廓是中心对称图形，最后一个山东剪纸的图既是轴对称图形又是中心对称图形. 在函数的图像中，是否也存在这样的对称性呢？

观察如图 3－13 所示的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 和 $g(x)=x^2$ 的图像，可以发现，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像关于原点对称，函数 $g(x)=x^2$ 的图像关于 y 轴对称.

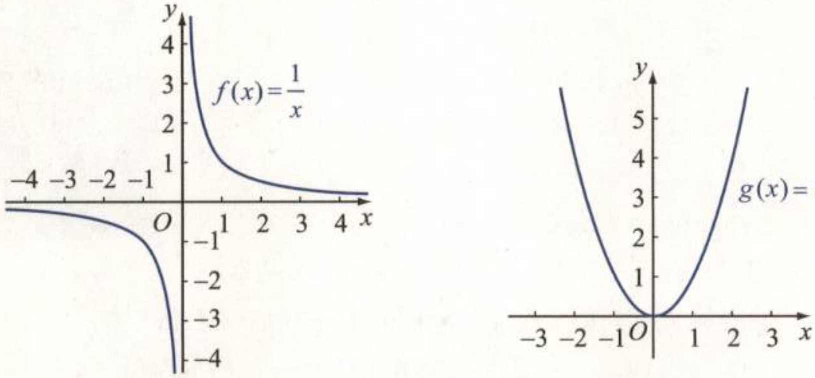


图 3－13

下面我们用函数的数量关系来表述函数图像的这个特征.

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，不难看出

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1;$$

$$f(2)=\frac{1}{2},\ f(-2)=-\frac{1}{2};$$

$$f(3)=\frac{1}{3},\ f(-3)=-\frac{1}{3};$$

…………

当自变量 x 互为相反数时，它们所对应的两个函数值互为相

想一想

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，点 $(1,\ f(1))$ 与点 $(-1,\ f(-1))$ 是否关于原点对称？当 $a\neq 0$ 时，点 $(a,\ f(a))$ 与点 $(-a,\ f(-a))$ 是否也关于原点对称？

反数.

实际上，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 定义域 $\{x\mid x\neq 0\}$ 中的任意一个 x，都有

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x).$$

这时，我们称函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为奇函数.

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 定义域中的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x$ 也是奇函数（如图 3－14 所示）.

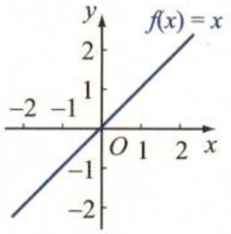


图 3－14

> **想一想**
>
> 对于函数 $g(x)=x^2$，点 $(1, g(1))$ 与点 $(-1, g(-1))$ 是否关于 y 轴对称？当 $a\neq 0$ 时，点 $(a, g(a))$ 与点 $(-a, g(-a))$ 是否也关于 y 轴对称？

对于函数 $g(x)=x^2$，不难看出

$g(1)=1$，$g(-1)=1$；

$g(2)=4$，$g(-2)=4$；

$g(3)=9$，$g(-3)=9$；

…………

可以发现，当自变量 x 互为相反数时，它们所对应的两个函数值相等.

实际上，对于函数 $g(x)=x^2$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 中任意一个 x，都有

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

这时我们称函数 $g(x)=x^2$ 为偶函数.

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 定义域中的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为**偶函数**.

例如，函数 $f(x)=|x|$ 也是偶函数（如图 3－15 所示）.

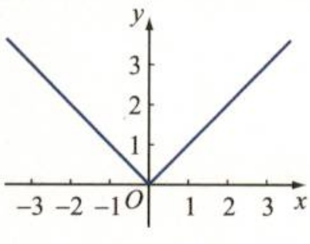


图 3－15

> **想一想**
>
> 函数 $f(x)=0$ 的奇偶性是怎样的？

如果一个函数是奇函数或者是偶函数，就说这个函数具有**奇偶性**.

一个函数是奇函数的充要条件是，它的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形；

一个函数是偶函数的充要条件是，它的图像是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

如果我们知道一个函数是奇函数或偶函数，则只要把这个函数的定义域分成关于坐标原点对称的两部分，就可以由函数在其中一部分上的图像和性质，得出这个函数在另一个部分上的图像和性质.

例 1　根据已知条件，完成下列各题：

(1) 已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，若 $f(2)=-3$，$g(-4)=-9$，求 $f(-2)+g(4)$；

(2) 已知 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，求 $f(-2)$.

解：(1) 因为 $f(x)$ 是奇函数，$f(2)=-3$，所以

$$f(-2)=-f(2)=3.$$

又因为 $g(x)$ 是偶函数，$g(-4)=-9$，所以

$$g(4)=g(-4)=-9.$$

因此 $f(-2)+g(4)=3+(-9)=-6$.

(2) 当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，则

$$f(2)=2^2+1=5,$$

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f(-2)=-f(2)=-5.$$

研究函数的奇偶性对于了解函数的性质非常重要，下面我们举例判断函数的奇偶性.

例 2　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^3+x$；　　(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；

(3) $h(x)=x+1$；　　(4) $w(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$.

解：(1) 函数 $f(x)=x^3+x$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，又因为

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x^3+x$ 是奇函数.

(2) 函数 $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域 $\{x \mid x\neq-1 \text{ 且 } x\neq1\}$ 关于原点对称，又因为

$$g(-x)=\frac{1}{(-x)^2-1}=\frac{1}{x^2-1}=g(x),$$

所以 $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 是偶函数.

(3) 函数 $h(x)=x+1$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，又因为

$$h(-x)=-x+1=-(x-1),$$

而 $-h(x)=-x-1$，所以 $h(-x)\neq h(x)$，并且 $h(-x)\neq -h(x)$，因此 $h(x)=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4) 因为函数 $w(x)=x^2$，$x\in[-1, 2]$ 的定义域关于原点不对称，所以该函数既不是奇函数也不是偶函数.

例 2 (4) 的函数图像如图 3－16 所示，这个函数说明，一个函数的定义域关于原点对称，是这个函数具有奇偶性的必要条件. 如果一个函数的定义域关于原点不对称，那么这个函数既不是奇函数也不是偶函数.

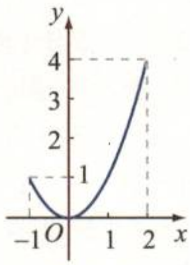


图 3－16

练习 3.4

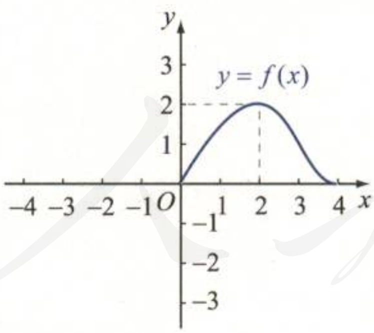
1. 口答下列各题：

(1) 函数 $f(x)=x$ 是奇函数吗？

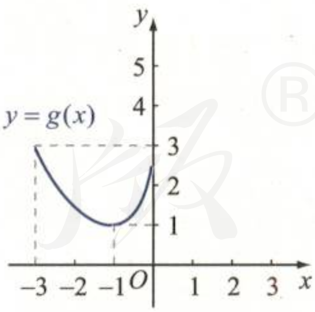
(2) 函数 $g(x)=2$ 是奇函数还是偶函数？

(3) 如果 $y=h(x)$ 是偶函数，当 $h(-1)=2$ 时，$h(1)$ 的值是多少？

2. 已知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，如图 (1) (2) 分别是它们的部分图像，试求 $f(-2)$，$g(1)$，并把这两个函数的图像补充完整.



(1)



(2)

(第 2 题)

*3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x$； (2) $f(x)=-x^2$；

(3) $f(x)=x^3+1$； (4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$x\in[-3, 2]$；

(5) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$；　　　　(6) $f(x)=\sqrt{x-2}$.

*4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-5, 5]$ 上是偶函数，且函数在 $[0, 5]$ 上是增函数，试判断函数在 $[-5, 0]$ 上的单调性.

3.5　一元二次函数的图像和性质

函数

$$y=ax^2+bx+c \ (a, b, c \text{ 是常数}, a\neq 0)$$

称为**一元二次函数**，其中 a 是二次项系数，b 是一次项系数，c 是常数项. 它的定义域是 $\mathbf{R}$，它的图像是一条抛物线，当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；$a<0$ 时，抛物线开口向下.

> **想一想**
>
> 若函数 $y=ax^2+3x-2$ 中，$a=0$，则该函数还是一元二次函数吗？这时函数的图像是怎样的？

例 1　求作函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图像.

分析：此函数图像是一条开口向上的抛物线，对称轴是垂直于 x 轴的一条直线（用 $x=m$ 表示），找到对称轴并在其两边对称地取自变量的值，就可以找到反映抛物线大致轮廓的点.

解：因为

$$y=2x^2-4x-3=2(x-1)^2-5,$$

所以函数图像的对称轴是 $x=1$. 对称地选取若干自变量的值，计算出对应的函数值，如下表所示.

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	3	-3	-5	-3	3	…

在直角坐标系内描点、连线，得到函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图像，如图 3－17.

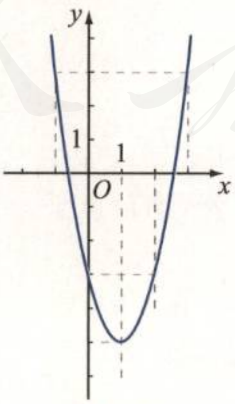


图 3－17

> **想一想**
>
> (1) 观察图 3－17，关于 $x=1$ 对称的两个自变量 $1-h$ 与 $1+h$ 所对应的函数值相等吗？
>
> (2) 这个函数的单调递增区间是什么？

容易看出，对于函数 $y=2x^2-4x-3$ 来说，关于直线 $x=1$ 对称的两个自变量所对应的函数值是相等的，也就是说该函数的图像是以过点（1，−5）且平行于 y 轴的直线 l 为对称轴的轴对称图形，这可以简单地说成抛物线关于直线 $x=1$ 对称.

例 2　利用 OpenOffice 软件中的电子表格绘制出函数 $y=-x^2-2x+3$ 的图像.

解：因为

$$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4,$$

所以函数的对称轴是 $x=-1$. 对称地选取若干自变量的值，利用 OpenOffice 软件中的电子表格可绘制出函数的图像，如图 3－18.

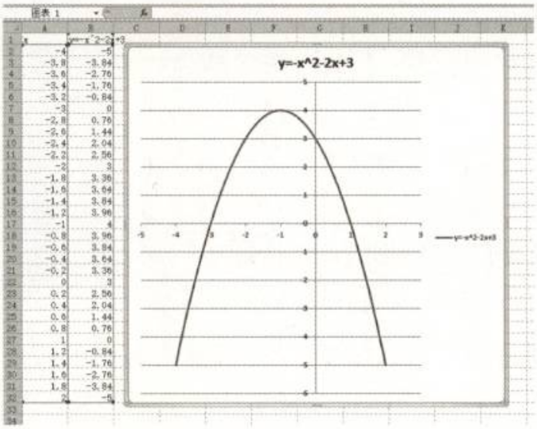


图 3－18

> **想一想**
>
> 函数 $y=-x^2-2x+3$ 的最大值是多少？你能在图 3－18上找出 $y\geqslant 0$ 的 x 的取值集合吗？

下面我们来分析一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的性质.

由配方法知，对任意一个一元二次函数

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0),$$

通过配方可化为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

为了方便，我们通常把上式改写成

$$y=a(x-h)^2+k,$$

其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

通过分析，我们可得到一元二次函数的性质：

（1）一元二次函数的图像是一条抛物线，抛物线的顶点坐标是（h，k），抛物线的对称轴是直线 $x=h$；

（2）当 $a>0$ 时，函数图像开口向上，函数在 $x=h$ 处取最小值 $y_{\min}=k$，在区间 $(-\infty,\ h]$ 上是减函数，在区间 $[h,\ +\infty)$ 上是增函数；

> **读一读**
>
> y 的最大值通常用符号“$y_{\max}$”表示；y 的最小值通常用符号“$y_{\min}$”表示.

（3）当 $a<0$ 时，函数图像开口向下，函数在 $x=h$ 处取最大值 $y_{\max}=k$，在区间 $(-\infty, h]$ 上是增函数，在区间 $[h, +\infty)$ 上是减函数.

例 3 求函数 $y=3x^2+2x+1$ 的对称轴、最小值及单调区间.

解： 函数 $y=3x^2+2x+1$ 中，$a=3$，$b=2$，$c=1$，所以函数的对称轴是

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3},$$

函数的最小值是

$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3},$$

函数的单调递减区间是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$，函数的单调递增区间是 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

想一想

对于例 3，函数值 $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ 与函数的最小值相等吗？

例 4 已知一元二次函数 $y=x^2-x-6$，则：

（1）x 取哪些值时，$y=0$？

（2）x 取哪些值时，$y<0$？x 取哪些值时，$y>0$？

分析： 问题（1）可转化为求一元二次方程 $x^2-x-6=0$ 的根，即抛物线 $y=x^2-x-6$ 与 x 轴两个交点的横坐标. 如图 3-19 所示，图像 x 轴下方的部分，所有点的纵坐标都满足 $y<0$，显然，我们只要相应地找到横坐标 x 的取值范围即可.

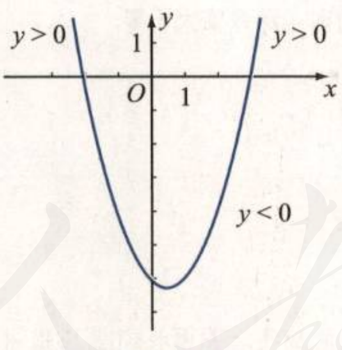


图 3-19

议一议

（1）不等式 $(x+2)(x-3)>0$ 的解集是什么？

（2）当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $(x-x_1)(x-x_2)<0$ 的解集是什么？

解：（1）令 $y=0$，则

$$x^2-x-6=0,$$

解得 $x_1=-2$，$x_2=3$. 即当 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，函数值 $y=0$.

（2）因为一元二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图像是开口向上的抛物线，由（1）可知，一元二次函数 $y=x^2-x-6$ 与 x 轴的两个交点是 $(-2, 0)$，$(3, 0)$，所以当 $x\in(-2, 3)$ 时，$y<0$；当 $x\in(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$ 时，$y>0$.

从上例我们可以看到，一元二次方程、一元二次不等式与一元二次函数之间有着密切的联系.

对于一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$：

(1) 求满足 $y=0$ 时 x 的值，等价于求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解；

(2) 求满足 $y<0$ 时 x 的取值区间，等价于求一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集；求满足 $y>0$ 时 x 的取值区间，等价于求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集.

练习 3.5

1. 判断下列各函数图像，哪些是直线，哪些是抛物线：

(1) $y=3x$； (2) $y=2x^2$；

(3) $y=\frac{1}{2}x-2$； (4) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

2. 判断下列函数是否有最大值或最小值，如果有，求出对应的值：

(1) $f(x)=3x^2-6x-1$； (2) $f(x)=-2x^2+x-1$.

*3. 已知一元二次函数 $y=x^2-2x-3$：

(1) 求函数的对称轴、顶点坐标和函数的单调区间；

(2) 作出函数的图像；

(3) 求函数的自变量在什么范围内取值时，函数值大于零.

*4. 解下列不等式：

(1) $(x+1)(x-2)<0$； (2) $(x-3)(x+4)\geqslant 0$.

3.6 函数的应用

在现实生活中，函数知识有着广泛的应用. 下面我们就应用一次函数、分段函数和一元二次函数的相关知识，来解决一些简单的实际问题.

例 1 某列火车从北京西站开往石家庄，全程 277 km. 假设火车出发 10 min 开出 13 km 后，以 120 km/h 的速率匀速行驶完全程. 试写出火车行驶的总路程 S km 与匀速行驶的时间 t h 之间的关系，并求火车离开北京 2 h 时行驶的路程.

解：因为火车匀速运动的时间为

$$(277-13)\div 120=\frac{11}{5}\ \text{h},$$

所以 $0 \leqslant t \leqslant \frac{11}{5}$.

因为火车匀速行驶 t h 所行驶路程为 $120t$ km，所以火车行驶总路程 S 与匀速行驶时间 t 之间的关系是

$$S=13+120t,\ t \in \left[0,\ \frac{11}{5}\right].$$

而且，2 h 时火车行驶的路程为

$$S=13+120 \times \left(2-\frac{1}{6}\right)=233 \text{ km}.$$

例 2 某地电信运营商推出了一种流量套餐：20 元包国内流量 200 M，超出 200 M 后，国内流量 0.25 元/M，1 G 以内 60 元封顶. 假设每月使用流量不超过 1 G，写出每月应付费用 y 元与使用流量 x M 之间的函数关系（1 G=1 024 M).

解：当使用流量 x 不超过 200 M 时，应付费用为 20 元；当使用流量 x 超过 200 M，且费用不超过 60 元时，应付费用为

$$20+0.25(x-200)=0.25x-30 \text{ 元}.$$

当 $20+0.25(x-200)=60$ 时，计算得 $x=360$，故当使用流量 x 超过 360 M 且不超过 1 024 M 时，应付费用为 60 元.

因此，每月应付费用 y 元与使用流量 x M 之间的函数关系为

$$f(x)=\begin{cases} 20,\ x \in (0,\ 200], \\ 0.25x-30,\ x \in (200,\ 360], \\ 60,\ x \in (360,\ 1\,024]. \end{cases}$$

例 3 如果要利用已有的一面墙（设长度够用）作为一边，用 200 m 长的篱笆材料围成一块矩形菜地，如图 3-20 所示，则矩形的长、宽各为多少时，这块菜地的面积最大？

图 3-20

解：设与墙平行的矩形边长为 x m，则另一边长为 $\frac{200-x}{2}$ m，所以矩形的面积

$$S=x \cdot \frac{200-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+100x,\ x \in (0,\ 200).$$

因为 $-\frac{1}{2}<0$，所以当

$$x=-\frac{100}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}=100$$

时，矩形的面积最大，此时$\frac{200-x}{2}=50$.

因此，矩形的长为 100 m、宽为 50 m 时，这块菜地的面积最大.

练习 3.6

*1. 请举出几个实际生活中的函数实例，并用合适的方法表示它们.

*2. 一辆汽车匀速行驶，1.5 h 行驶路程为 90 km，求这辆汽车行驶的路程与时间之间的函数关系，以及汽车行驶 3 h 所行驶的路程.

*3. 已知某种商品单价是 80 元时，每天可售出 30 件；单价是 120 元时，每天可售出 20 件. 如果销售量是单价的一次函数，写出销售量 y 件关于单价 x 元的函数.

*4. 某超市购进某种商品，每件的进价为 20 元. 假设以每件 x 元出售时，可卖 $100-x$ 件，则如何定价才能使超市利润最大？

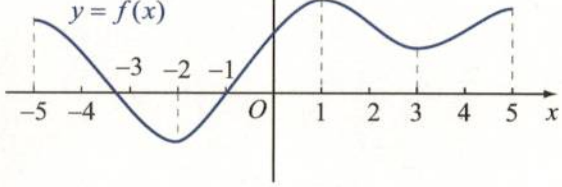
*5. 某单位用长为 100 米的材料，围成一矩形场地，则长、宽各为多少米时，围成的面积最大？最大面积是多少平方米？

*6. 某共享单车公司根据不同车型和版本，依据用车时间进行计费：每半小时收取 1 元或 0.5 元，不满半小时按半小时计. 如果你解锁一辆标价为每半小时 0.5 元的单车，使用时间预计不超过 2 小时，请写出应付车费 y 和使用时间 x 之间的函数关系.

习题三

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3x-1}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. 已知函数 $y=f(x)$，$x\in[-5, 5]$ 的图像（包括端点）如图所示，请根据图像写出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，函数是增函数还是减函数.



（第 2 题）

3. 作出下列函数的图像：

(1) $y=2x-3$，$x\in\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；　　(2) $y=x^2-4x-5$.

*4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=5x+x^3$；　　(2) $f(x)=x^2+x$；

(3) $f(x)=(x-1)(x+1)$；　　(4) $f(x)=x^3$，$x\in(-5, 6)$.

5. 已知函数 $f(x)=x^2+2ax-3$：

(1) 当 a 为何值时，函数有最小值 -4？

(2) 当 a 为何值时，函数是偶函数？

*6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+4}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-1}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x}$.

*7. 判断下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $f(x)=-x^2+1$，$x\in(-\infty, 0)$；

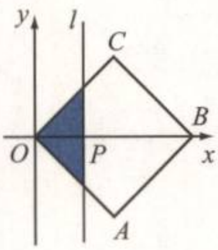
(2) $f(x)=-2x+1$，$x\in(-\infty, +\infty)$.

*8. 解下列一元二次不等式：

(1) $x^2-3x+2>0$；

(2) $(x-2)(x+3)\leqslant 0$.

*9. 如图所示，在直角坐标系 xOy 中，已知 $OABC$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，直线 l 与 x 轴垂直，垂足为 P，设 $|OP|=x$，当直线 l 从原点 O 移动到 B 时，直线 l 左侧的正方形内部的面积为 S，试写出函数 $S=f(x)$ 的解析式.



(第 9 题)

阅读与实践

数学英雄欧拉

欧拉是 18 世纪著述最多的数学家. 欧拉不倦的一生，共写下了 800 多种书籍和论文，而且，欧拉的著述涉及了很多领域. 有人统计，欧拉的著述中，分析、代数、数论占 40%，几何占 18%，物理和力学占 28%，天文学占 11%，弹道学、航海学、建筑学等占 3%. 彼得堡科学院为了整理欧拉的著作，足足忙碌了四十七年.

尤其令人感动的是，欧拉有400多篇论文和许多数学著作，是在他失明的状态中完成的．早在1735年，由于过度紧张地工作，欧拉得了一场病，导致了右眼失明．后来，他的左眼也失明了．但欧拉默默地忍受着失明的痛苦，用惊人的毅力顽强拼搏，决心用自己闪光的数学思想，照耀他人深入探索的道路．在欧拉失明的那些年里，他都以每年近800页的速度，向世界呈献大量成果，还解决了一些数学难题．

下面是一个广为流传的故事．

小欧拉改羊圈

有一次，欧拉的父亲决定建造一个羊圈．他量出了一块长方形的土地，长40米，宽15米，面积是600平方米，平均每一头羊占地6平方米．打算动工时，他才发现材料只够围100米的篱笆，不够用．若要按原计划建造，就要再添10米长的材料；若要缩小面积，每头羊占地就会小于6平方米，父亲感到很为难．

这时在一旁的小欧拉却对父亲说，不用缩小羊圈，也不用担心每头羊的占地面积会小于原来的．父亲不相信小欧拉，听了没有理他．小欧拉着急地大声说，只要稍稍移动一下羊圈的桩子就行了．

父亲听了直摇头，心想：世界上哪有这样好的事情？但是，小欧拉却坚持说，他一定能两全其美．后来，父亲终于同意让儿子试试看．

小欧拉跑到准备动工的羊圈旁．他以一个木桩为中心，将原来的40米的边长截短，缩短到25米．父亲着急了，说："那怎么行呢？那怎么行呢？这个羊圈太小了！太小了！"小欧拉不回答，跑到另一条边上，将原来15米的边长延长，增加了10米，变成25米．这样一改，羊圈变成了一个25米边长的正方形．然后，小欧拉自信地对父亲说："现在，篱笆也够了，面积也够了．"

父亲照着小欧拉设计的羊圈扎上了篱笆，100米长的篱笆不多不少，全部用光．面积也足够，而且还稍稍大了一些．父亲非常高兴：孩子比自己聪明，真会动脑筋，将来一定会有出息．

父亲感到，让这么聪明的孩子放羊实在是可惜了．后来，他想办法让小欧拉认识了大数学家伯努利．通过这位数学家的推荐，1720年，小欧拉成了巴塞尔大学的大学生．这一年，小欧拉13岁，是这所大学最年轻的大学生．

请同学们想一想：如果建羊圈的场地足够大，而材料只够围100米的篱笆，你有办法建出面积更大的羊圈吗？

第四章
指数函数与对数函数

细胞的分裂，形成了形态各异的个体生命，使大自然异彩纷呈、生机盎然．显微镜下的微观世界，细胞在悄无声息地进行着分裂．细胞分裂的个数与分裂次数之间有着一定的函数关系，你知道吗？

数学是最宝贵的研究精神之一．

——华罗庚

志大才疏事难成，志坚勤学虎添翼．

指数和对数是进行科学计算不可缺少的工具，指数函数和对数函数都是基本的初等函数，它们在社会科学和自然科学中有着重要的作用. 这一章我们将在学习指数和对数运算的基础上，学习指数函数和对数函数的概念、图像与基本性质，进一步发展数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象和数学建模等数学素养.

4.1 实数指数

1. 根式

在初中我们学习了平方根和立方根的概念. 例如，若 $x^2=4$，则 $x=\pm 2$ 称为 4 的平方根；若 $y^3=3$，则 $y=\sqrt[3]{3}$ 称为 3 的立方根.

类似地，由于 $(\pm 3)^4=81$，我们把 ± 3 称为 81 的 4 次方根；由于 $2^5=32$，我们把 2 称为 32 的 5 次方根.

一般地，如果一个实数 x 满足 $x^n=a$ $(n>1,\ n\in\mathbf{N}_+)$，那么 x 称为 a 的 n **次方根**.

当 n 是偶数且 $a>0$ 时，a 的 n 次方根有两个，它们互为相反数，分别用符号 $\sqrt[n]{a}$，$-\sqrt[n]{a}$ 来表示，其中 $\sqrt[n]{a}$ 表示正的 n 次方根. 例如，若 $x^4=16$，则 16 的 4 次方根为

$$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$$

当 n 是奇数时，任意实数 a 的奇次方根都有一个，用符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示. 例如，若 $x^3=-8$，则 -8 的 3 次方根为

$$x=\sqrt[3]{-8}=-2.$$

> **议一议**
>
> 当 $a<0$ 时，a 的偶次方根有意义吗?

0 的任何正整数次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

当式子 $\sqrt[n]{a}$ $(n>1,\ n\in\mathbf{N}_+)$ 有意义时，$\sqrt[n]{a}$ 称为**根式**，其中 n 称为**根指数**，a 称为**被开方数**.

正数 a 的正 n 次方根称为 a 的 n **次算术根**.

根据 n 次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

例如，$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt[3]{-6})^3=-6$.

2. 分数指数

在初中我们学习了整数指数幂，我们知道

$$a^n=\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{个}a}\ (n\in\mathbf{N}_+),$$

其中 a^n 称为 a 的 n 次**幂**，a 称为幂的**底数**，n 称为幂的**指数**. 我们规定了

$$a^1=a,\ a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0,\ n\in\mathbf{N}_+),$$

即将指数推广到了整数.

当 $a\neq 0$，$b\neq 0$，m，$n\in\mathbf{Z}$ 时，整数指数幂满足如下运算法则：

(1) $a^m a^n=a^{m+n}$；

(2) $(ab)^m=a^m b^m$；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$.

我国农业科学家在研究某农作物的生长规律时，得到该农作物的生长时间 x 周（从第 1 周到第 12 周）与植株高度 y cm 之间的关系为

$$y=3^{\frac{x}{4}}.$$

当该农作物生长了 4 周、8 周、12 周时，植株的高度（单位：cm）分别是 3，3^2，3^3，这就是正整数指数幂. 当该农作物生长了 1 周、3 周、5 周时，植株的高度（单位：cm）分别是 $3^{\frac{1}{4}}$，$3^{\frac{3}{4}}$，$3^{\frac{5}{4}}$，像这样的数就是我们要学习的分数指数幂，它们有着怎样的意义呢？

通过根式的学习，我们研究农作物生长了 4 周、8 周、12 周时的植株高度，可以发现

$$3^{\frac{4}{4}}=3=\sqrt[4]{3^4},$$

$$3^{\frac{8}{4}}=3^2=\sqrt[4]{3^8},$$

$$3^{\frac{12}{4}}=3^3=\sqrt[4]{3^{12}}.$$

这启发我们，分数指数幂和根式可以相互转化. 如果 $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$，那么该植株生长 4 周时，高度（单位：cm）为

$$(3^{\frac{1}{4}})^4=3^{\frac{1}{4}\times 4}=(\sqrt[4]{3})^4=3.$$

而且，如果我们约定底数 $a>0$ 并规定 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$，那么像 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 与 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}\times n}=a$ 等也就得到了统一.

于是，当 $a>0$ 时，我们规定分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

其中 m，$n\in\mathbf{N}_+$，且 $n>1$. 例如，$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

结合负整数指数幂的约定，规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

其中 m，$n\in\mathbf{N}_+$，且 $n>1$. 例如，$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

这样我们就把整数指数幂推广到了**有理指数幂**，原有的运算法则不变. 例如，

$$\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{6}},$$

$$8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^1=2.$$

例 1 利用计算器计算下列各题（精确到 0.001）：

(1) $0.2^{1.52}$； (2) 3.14^{-2}.

解：(1)

按键	显示
0.2 $\boxed{y^x}$ 1.52 $\boxed{=}$	0.086609512

所以，$0.2^{1.52}\approx0.087$.

(2)

按键	显示
3.14 $\boxed{y^x}$ $\boxed{+/-}$ 2 $\boxed{=}$	0.101423992

所以，$3.14^{-2}\approx0.101$.

一般地，当 $a>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$ 时，a^α 也有意义，例如

$$2^{\sqrt{2}},\ 3^{-\sqrt{5}},\ 5^{\pi},\ \cdots$$

也有意义，这称为**实数指数幂**. 利用计算器等可以得到实数指数幂的近似值，实数指数幂有如下三条运算法则：

$$a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta},$$
$$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},$$
$$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,$$

其中 $a>0$，$b>0$，α，β 为任意实数.

议一议

例 2 中运用了哪些实数指数幂的运算法则?

例 2 化简：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$； (2) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$；

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$； (4) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$.

解：(1) $8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$.

(2) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9$.

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6=x^{\frac{1}{2}\times6}y^{-\frac{1}{3}\times6}=x^3y^{-2}$.

(4) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{3}}$.

练习 4.1

1. 化简：

(1) $\sqrt[4]{4^4}$；　(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)^0$；　(3) x^2x^3；

(4) $(a^{-\frac{1}{2}})^4$；　(5) $a^8\div a^5$；　(6) $(a^2b^3)^6$.

2. 用分数指数幂表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$；

(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$；　(4) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$.

3. 利用计算器计算下列各题（精确到 0.001）：

(1) $0.618^{0.23}$；　(2) $3^{\frac{8}{25}}$；

(3) $0.401\ 2^{-\frac{1}{4}}$；　(4) $\sqrt[100]{5}$.

*4. 计算：

(1) $27^{\frac{2}{3}}$；　(2) $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；

(3) $8^{\frac{3}{5}}\times 8^{\frac{2}{5}}$；　(4) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}$.

*5. 化简：

(1) $(-4x^2)^3$；　(2) $\sqrt[3]{\frac{3y}{x}}\sqrt{\frac{3x^2}{y}}$；

(3) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$；　(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$.

4.2 指数函数

问题　某种细胞分裂时，1 个细胞经过 1 次分裂后得到 2 个细胞，经过 2 次分裂后得到 4 个细胞，经过 3 次分裂后得到 8 个细胞……经过 n 次分裂后，会得到多少个细胞？

在这个问题中，分裂的次数是一个变量，用 n 表示. 每次分裂后，细胞的个数也是一个变量，用 w 表示. 如何由 n 来计算 w 呢？

当 $n=0$ 时，$w=2^0=1$；

当 $n=1$ 时，$w=2^1=2$；

当 $n=2$ 时，$w=2^2=4$；

当 $n=3$ 时，$w=2^3=8$；

…………

我们可以归纳出，1个细胞经过 n 次分裂后，细胞的个数 w 与分裂次数 n 的关系为

$$w=2^n,\ n\in\mathbf{N}_+.$$

由此可见，对任意一个 n 值，都有唯一确定的 w 值与 n 对应，根据函数的定义，可知细胞的个数 w 是分裂次数 n 的函数，这个函数的特点是底数为常数，自变量在指数的位置上.

一般地，形如 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为**指数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

想一想

函数 $y=(\sqrt{2})^x$ 和 $y=2^{x+1}$ 都是指数函数吗？

现在我们以函数 $y=2^x$ 和函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为例来研究指数函数的图像和性质. 列出 x，y 的对应值表，如下表所示.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

在同一坐标系中，用描点法画出两个函数的图像，如图 4－1 所示.

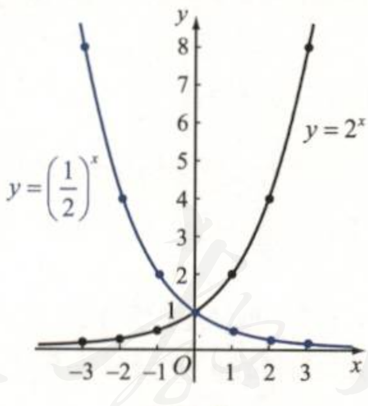


图 4－1

然后，观察这两个函数的对应值表和图像，可以发现：

函数 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，当自变量 x 逐渐增大时，因变量 y 逐渐增大；当自变量 x 逐渐减小时，因变量 y 逐渐减小，函数的图像从 x 轴的上方逐渐趋近于 x 轴.

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，当自变量 x 逐渐增大时，因变量

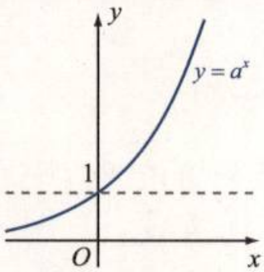
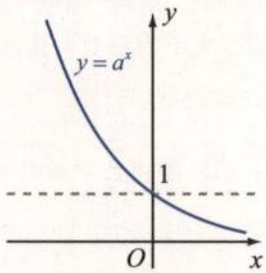
y 逐渐减小，函数的图像从 x 轴的上方逐渐趋近于 x 轴；当自变量 x 逐渐减小时，因变量 y 逐渐增大.

这两个函数的图像都在 x 轴的上方，它们的函数值 y 都大于零，且它们的图像都经过点 $(0, 1)$.

由以上实例，我们可以归纳出指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图像和性质，如下表所示.

想一想

指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，若 $a>1$，则 x 取何值时，$y>1$？若 $0<a<1$ 呢？

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	(1) **定义域：R**	
	(2) **值域：**$(0, +\infty)$	
	(3) **过定点** $(0, 1)$，**即** $x=0$ **时，**$y=1$	
	(4) **在** $(-\infty, +\infty)$ **上是增函数**	**在** $(-\infty, +\infty)$ **上是减函数**

例 1 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$ 与 1.7^3；　　(2) $0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$.

解： (1) 考查函数 $y=1.7^x$，它在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数，因为 $2.5<3$，所以

$$1.7^{2.5}<1.7^3.$$

(2) 考查函数 $y=0.8^x$，它在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，因为 $-0.1>-0.2$，所以

$$0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}.$$

做一做

请用计算器验证例 1 的结论.

我们也可以借助几何画板的作图功能，画出指数函数 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像（如图 4－2）.

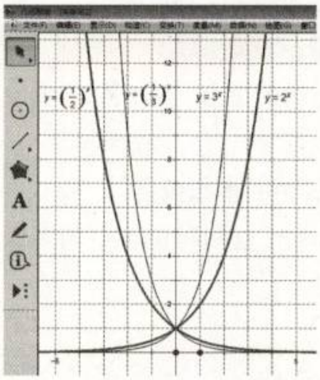


图 4－2

例 2 求下列函数的定义域：

（1）$y=3^{\frac{1}{x}}$；（2）$y=5^{\sqrt{x-1}}$.

解：（1）要使已知函数有意义，必须$\dfrac{1}{x}$有意义，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=3^{\frac{1}{x}}$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$.

（2）要使已知函数有意义，必须$\sqrt{x-1}$有意义，即 $x\geqslant 1$，所以函数 $y=5^{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 $[1, +\infty)$.

练习 4.2

1. 口答：

（1）指数函数 $y=5^x$ 的底数是多少？这个函数的单调性如何？

（2）一个指数函数的底数是$\dfrac{1}{5}$，则它的解析式是什么？它的定义域、值域各是什么？

（3）所有指数函数的图像都经过哪个点？

2. 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小，并用计算器验证结果：

（1）$3^{0.8}$与$3^{0.7}$；（2）$1.1^{-2.1}$与1.1^{-2}；

（3）$0.7^{0.1}$与$0.7^{-0.1}$；（4）$0.618^{1.8}$与$0.618^{1.9}$.

*3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=2^{x+1}$；（2）$y=0.7^{\frac{1}{x}}$；

（3）$y=\sqrt{1-2^x}$；（4）$y=3^{\sqrt{2x-1}}$.

4.3 对数及其运算

4.3.1 对数

前面我们研究细胞分裂时，曾归纳出，一个细胞经过 n 次分裂后得到细胞的个数为

$$w=2^n.$$

如果知道细胞分裂若干次后的个数 w，怎样求出细胞分裂的次数 n 呢？为了解决这类问题，我们引入一个新的概念——对数.

一般地，如果 $a^b=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$），那么数 b 称为以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$b=\log_a N,$$

其中 a 称为对数的**底数**，N 称为**真数**.

例如：

因为 $3^4=81$，所以 4 是以 3 为底 81 的对数，记作 $4=\log_3 81$；

因为 $2^3=8$，所以 3 是以 2 为底 8 的对数，记作 $3=\log_2 8$；

因为 $4^{\frac{1}{2}}=2$，所以 $\frac{1}{2}$ 是以 4 为底 2 的对数，记作 $\frac{1}{2}=\log_4 2$；

因为 $10^{-3}=0.001$，所以 -3 是以 10 为底 0.001 的对数，记作 $-3=\log_{10} 0.001$.

在细胞分裂的问题中，因为 $w=2^n$，所以 n 是以 2 为底 w 的对数，因此分裂次数 n 可以表示为 $n=\log_2 w$. 例如，若细胞分裂 n 次后的个数为 32 时，则 $n=\log_2 32$.

根据对数的定义，可以得到指数式与对数式间的关系：当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，有

$$a^b=N \Leftrightarrow b=\log_a N.$$

做一做

当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，请把 $a^1=a$，$a^0=1$ 化为对数式.

利用对数式与指数式间的关系，我们可以把对数式化为指数式，也可以把指数式化为对数式.

例如：

指数式 $2^{-5}=\frac{1}{32}$ 化为对数式的结果为 $\log_2 \frac{1}{32}=-5$；

对数式 $\log_{10} 0.01=-2$ 化为指数式的结果为 $10^{-2}=0.01$.

通常我们把底数为 10 的对数称为**常用对数**，$\log_{10} N$ 通常记作 $\lg N$. 例如，以 10 为底 100 的对数是 2，记作 $\lg 100=2$.

读一读

瑞士数学家欧拉首先用 e 表示自然对数的底.

另外，在科学技术的计算中，常常使用以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底的对数. 以 e 为底的对数称为**自然对数**，$\log_e N$ 通常记作 $\ln N$.

例 1　利用计算器求对数（精确到 0.001）：$\lg 2\ 017$，$\ln 0.618$.

解：用计算器计算：

按键	显示
$\boxed{\log}$ 2017 $\boxed{=}$	3.304705898
$\boxed{\ln}$ 0.618 $\boxed{=}$	−0.481266821

所以 lg 2 017≈3.305，ln 0.618≈−0.481.

在对数运算中，我们经常用到如下的换底公式：

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

其中 $a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$ 且 $b\neq1$，$N>0$.

例 2 利用计算器求对数 $\log_5 3$（精确到 0.001）.

解：由换底公式得

$$\log_5 3=\frac{\lg 3}{\lg 5},$$

用计算器计算如下：

按键	显示
$\boxed{\log}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\log}$ 5 $\boxed{=}$	0.682606194

所以 $\log_5 3\approx0.683$.

根据对数的定义，对数具有下列性质：

(1) 底数的对数等于 1，即 $\log_a a=1$；

(2) 1 的对数为零，即 $\log_a 1=0$；

(3) 零和负数没有对数，即 $\log_a N$ 中，$N>0$.

想一想

根据对数式与指数式的关系指出为什么零和负数没有对数.

练习 4.3.1

1. 把下列指数式写成对数式：

(1) $6^2=36$；　　(2) $5^3=125$；

(3) $2^{-3}=\frac{1}{8}$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$；

(5) $27^{\frac{1}{3}}=3$；　　(6) $7.6^0=1$；

(7) $81^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{27}$；　　(8) $10^{-3}=0.001$；

(9) $e^{x}=6$；　　(10) $4^{x}=y$.

2. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_3 9=2$；　　(2) $\log_2 \frac{1}{8}=-3$；

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$；　　(4) $\lg 1\ 000=3$；

(5) $\log_2 32=5$；　　(6) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$；

(7) $\log_8 16=\frac{4}{3}$；　　(8) $\log_{\frac{1}{10}} 1\ 000=-3$；

(9) $\ln 10=x$；　　(10) $\lg 7=x$.

3. 利用计算器求对数（精确到 0.001）：

(1) $\lg 396.5$；　　(2) $\ln 25.8$；

(3) $\log_3 0.223$；　　(4) $\log_5 21$.

*4. 填空：

$\log_2 2=$__________；　$\log_3 1=$__________；　$\lg 1=$__________；

$\lg 10=$__________；　$\ln e=$__________；　$\log_4 16=$__________；

$\log_3 \frac{1}{3}=$__________；　$\lg 10\ 000=$__________.

*5. 求下列各对数：

(1) $\log_6 36$；　　(2) $\log_2 \frac{1}{16}$.

*6. 求下列各式的值：

(1) $\lg 1+\lg 10+\lg 100$；

(2) $\lg 0.1+\lg 0.01+\lg 0.001$.

4.3.2 对数运算的运算法则

下面我们根据实数指数幂的运算法则以及指数式与对数式的关系，来研究对数的运算法则.

问题　如何用 $\log_a M$，$\log_a N$ $(M>0,\ N>0)$ 来表示 $\log_a(MN)$，$\log_a \frac{M}{N}$，$\log_a M^{\alpha}$（α 为任意实数）？

在这个问题中，设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，根据对数的定义，可得

$$M=a^{p},\ N=a^{q},$$

因为 $MN=a^p a^q=a^{p+q}$，$\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$，$M^\alpha=(a^p)^\alpha=a^{p\alpha}$，所以

$$\log_a(MN)=p+q=\log_a M+\log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N}=p-q=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a M^\alpha=\alpha p=\alpha\log_a M.$$

总结以上结论，我们得到下面的对数运算法则：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M,$$

其中 $M>0$，$N>0$，$a>0$ 且 $a\neq1$.

例 3　用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \frac{xy}{z}$；　　(2) $\log_a(x^3y^5)$.

解：(1) $\log_a \frac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z$

$=\log_a x+\log_a y-\log_a z$.

(2) $\log_a(x^3y^5)=\log_a x^3+\log_a y^5$

$=3\log_a x+5\log_a y$.

例 4　求下列各式的值：

(1) $\log_2(4^2\times2^5)$；　　(2) $\lg\sqrt[5]{100}$；　　(3) $\log_6 2+\log_6 3$.

解：(1) $\log_2(4^2\times2^5)=\log_2(2^4\times2^5)=\log_2 2^4+\log_2 2^5=4+5=9$.

(2) $\lg\sqrt[5]{100}=\lg 100^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\lg 100=\frac{2}{5}$.

(3) $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times3)=\log_6 6=1$.

例 5　化简：$\log_a b^2\cdot\log_{b^3} a^2$.

解：$\log_a b^2\cdot\log_{b^3} a^2=\frac{\lg b^2}{\lg a}\cdot\frac{\lg a^2}{\lg b^3}=\frac{2\lg b}{\lg a}\cdot\frac{2\lg a}{3\lg b}=\frac{4}{3}$.

练习 4.3.2

*1. 填空：

(1) $\lg 5+\lg 2=$ ________；

(2) $\log_2 6-\log_2 3=$__________；

(3) 用换底公式将 $\log_a N$ 换成以 10 为底的形式，则 $\log_a N=$__________.

2. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xyz)$；　　(2) $\lg\dfrac{xy^2}{\sqrt{z}}$；

(3) $\lg(xy^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{2}{3}})$；　　(4) $\lg\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_3(27\times 9^2)$；　　(2) $\lg 100^2$；

(3) $\log_{16}32$；　　(4) $\log_5 4\times\log_8 5$；

(5) $\log_2(\sqrt[3]{32}\times\sqrt[6]{16})$；　　(6) $\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{3}$；

(7) $\log_3 5-\log_3 15$；　　(8) $\lg 4+\lg 25$.

4. 化简：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$.

5. 求证：

(1) $\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$；　　(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

(3) $a^{\log_a N}=N$；　　(4) $\log_a a^b=b$.

4.4 对数函数

我们在研究细胞分裂时，曾归纳出，由细胞分裂若干次后的个数 w 计算分裂次数 n 的关系式为

$$n=\log_2 w.$$

由这个关系式可以看出，对于每个 w，都有唯一的 n 与之对应，因此 n 是 w 的函数. 本节我们研究这种自变量在真数位置上的函数.

一般地，形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的函数称为**对数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $(0,+\infty)$.

下面我们先来作出对数函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像.

首先列出 x，y 的对应值表，如下表所示.

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\log_2 x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$	…	3	2	1	0	-1	-2	-3	…

在同一坐标系里，用描点法画出图像，如图 4-3 所示.

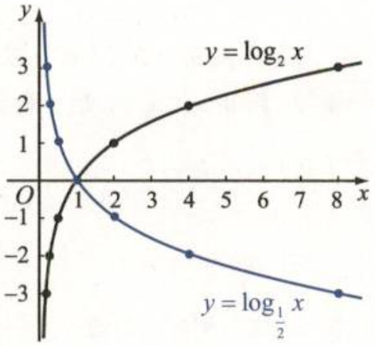
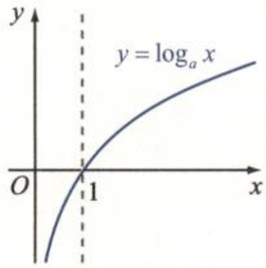
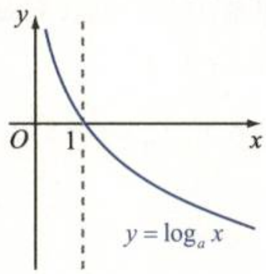


图 4-3

从这两个函数的对应值表和图像可看出，$y=\log_2 x$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上是增函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上是减函数. 这两个函数的定义域都是 $(0，+\infty)$，值域都是 $\mathbf{R}$，并且它们的图像都经过点 $(1，0)$.

一般地，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图像和性质，如下表所示.

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	(1) **定义域**：$(0，+\infty)$	
	(2) **值域**：$\mathbf{R}$	
	(3) **过定点** $(1，0)$，**即** $x=1$ **时**，$y=0$	
	(4) **在** $(0，+\infty)$ **上是增函数**	**在** $(0，+\infty)$ **上是减函数**

例 1　利用对数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) $\log_2 3$ 与 $\log_2 3.5$；　　(2) $\log_{0.7} 1.6$ 与 $\log_{0.7} 1.8$.

解：(1) 因为函数 $y=\log_2 x$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上是增函数，又因为 $3<3.5$，所以

$$\log_2 3<\log_2 3.5.$$

(2) 因为函数 $y=\log_{0.7} x$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上是减函数，又因为 $1.6<1.8$，所以

$$\log_{0.7} 1.6>\log_{0.7} 1.8.$$

做一做

请用计算器验证例 1 的结论.

我们也可以借助几何画板的作图功能，画出对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像，如图 4-4 所示.

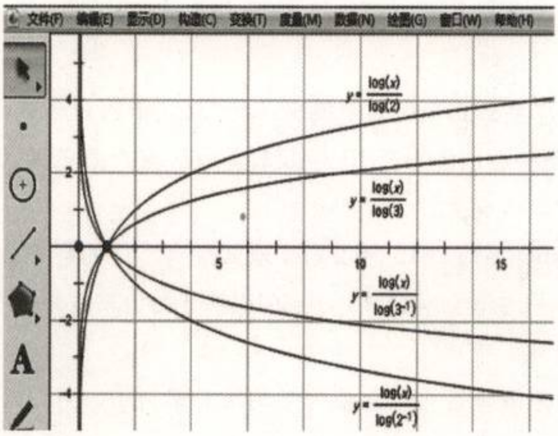


图 4-4

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2 x^2$；　　　　(2) $y=\log_{0.5}(4-x)$.

解：(1) 要使已知函数有意义，必须 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_2 x^2$ 的定义域是

$$\{x \mid x\neq 0\}.$$

(2) 要使已知函数有意义，必须 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_{0.5}(4-x)$ 的定义域是

$$(-\infty, 4).$$

练习 4.4

1. 口答下列各题：

(1) 一个对数函数的底数是 $\frac{1}{3}$，则它的解析式是什么？它的定义域、值域各是什么？

(2) 对数函数 $y=\log_4 x$ 的底数是多少？这个函数的单调性如何？

2. 利用对数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小.

(1) $\lg 6$ 与 $\lg 8$；　　　　(2) $\log_{0.5}6$ 与 $\log_{0.5}4$；

(3) $\log_{\frac{2}{3}} 0.5$ 与 $\log_{\frac{2}{3}} 0.6$；　　　　(4) $\log_{1.5}1.6$ 与 $\log_{1.5}1.4$.

*3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{0.8}(1+x)$；　　　　(2) $y=\log_7(x^2-2x)$.

4.5 指数函数与对数函数的应用

指数函数和对数函数在经济学、生物学、电学和核物理学等中都有着广泛的应用. 下面我们举例说明.

例 1 我国在“十三五”规划中提出：到 2020 年国内生产总值和城乡居民人均收入比 2010 年翻一番. 已知 2010 年山东省地区生产总值约为 39 169.92 亿元，2015 年约为 63 002.33 亿元.

(1) 计算从 2010 年到 2015 年山东省地区生产总值的年平均增长率；

(2) 按上述年平均增长率计算，从 2010 年开始山东省地区生产总值翻一番共需要多少年（精确到 1 年)?

解：(1) 设山东省地区生产总值的年均增长率为 p，则：

经过 1 年（即到 2011 年)，地区生产总值为

$$39\ 169.92\times(1+p) \text{ 亿元；}$$

经过 2 年（即到 2012 年)，地区生产总值为

$$39\ 169.92\times(1+p)^2 \text{ 亿元；}$$

…………

经过 5 年（即到 2015 年)，地区生产总值为

$$39\ 169.92\times(1+p)^5=63\ 002.33 \text{ 亿元.}$$

因此

$$(1+p)^5=\frac{63\ 002.33}{39\ 169.92},$$

于是

$$1+p=\left(\frac{63\ 002.33}{39\ 169.92}\right)^{\frac{1}{5}}\approx1.10,$$

解得 $p\approx0.10=10\%$.

即从 2010 年到 2015 年山东省地区生产总值的年平均增长率约为 10%.

(2) 设从 2010 年开始需要经过 n 年，山东省地区生产总值翻一番，则

$$39\ 169.92\times(1+10\%)^n\geqslant39\ 169.92\times2,$$

化简，得

$$1.10^n\geqslant2,$$

$$n\geqslant\log_{1.10}2\approx7.27,$$

因为精确到 1 年，所以

$$n=8.$$

即从 2010 年开始山东省地区生产总值翻一番约需要 8 年.

例 2　一种放射性元素，最初的质量为 500 g，按每年 2.3%衰减. 求：

(1) t 年后，这种放射性元素质量 w g 的表达式；

(2) 这种放射性元素的半衰期（精确到 1 年）.

解：(1) 因为最初的质量为 500 g，所以经过 1 年后，

$$w=500\times(1-2.3\%)=500\times0.977;$$

经过 2 年后，

$$w=500\times(1-2.3\%)^2=500\times0.977^2;$$

…………

由此推知，经过 t 年后，

$$w=500\times0.977^t.$$

即 t 年后这种放射性元素质量 w g 的表达式为

$$w=500\times0.977^t.$$

(2) 解方程

$$500\times0.977^t=250,$$

即 $0.977^t=0.5$，可得 $t=\log_{0.977}0.5$.

用计算器计算可得

$$t\approx29.8.$$

即这种放射性元素的半衰期约为 30 年.

读一读

某物质经过衰减，剩留量为原来的一半所需的时间称为该物质的半衰期.

练习 4.5

1. 2015 年底某省人口总数约 0.98 亿. 如果今后能将人口年平均增长率控制在 1.5%，那么 20 年后，该省人口总数将达到多少（精确到 0.01 亿）?

2. 某工厂为提高经济效益和社会效益，不断进行技术创新，对污水进行处理，重复利用，从而使得用水量逐月减少，如果该工厂 1 月份用水 4 000 m^3，计划从 2 月份起，每月的用水量比上月减少 8%，则 8 月份的用水量将达到多少（精确到 1 m^3）?

3. 现有一种放射性物质，一年后剩留量为原来的 84%，则该物质的半衰期是多少（结果保留整数）?

习题四

1. 利用计算器计算下列各题（精确到 0.001）：

(1) $3.142^{0.33}$；　(2) $\sqrt[57]{11}$；　(3) $\log_3 2$；　(4) $\log_{\frac{1}{15}}\pi$.

2. 把下列指数式写成对数式，或把对数式写成指数式：

(1) $4^x=2$；　(2) $10^x=25$；

(3) $x=\log_4 3$；　(4) $x=\lg 0.3$.

3. 用分数指数幂来表示下列各式：

(1) $\sqrt[5]{x^3}$；　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$；　(3) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{z}}$；　(4) $\sqrt[5]{(m+n)^2}$.

4. 比较下列各题中函数值的大小：

(1) 1.7^{a+1}，1.7^a；　(2) 0.9^{a-1}，0.9^a；

(3) $\log_{0.9}(a^2+1)$，$\log_{0.9}a^2$；　(4) $\log_{1.2}a^2$，$\log_{1.2}(a^2-1)$.

5. 试写出下列各题中 m，n 的大小：

(1) $2^m<2^n$；　(2) $0.2^m<0.2^n$；

(3) $\log_3 m<\log_3 n$；　(4) $\log_{0.3}m>\log_{0.3}n$.

*6. 计算：

(1) $2^{-1}\times 64^{\frac{2}{3}}$；　(2) $(0.2)^{-2}\times(0.064)^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt[6]{x}}$；

(5) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2$；　(6) $\left(\dfrac{b}{2a^2}\right)\div\left(\dfrac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{-3}$.

*7. 计算：

(1) $\log_7\sqrt[3]{49}$；　(2) $\log_a 2+\log_a\dfrac{1}{2}(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(3) $\log_3 18-\log_3 2$；　(4) $2\lg 2+\lg 25$；

(5) $\log_{64}32$；　(6) $\log_2 3\times\log_{27}16$.

*8. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，试用 a，b 表示下列各数：

(1) $\lg 6$；　(2) $\lg\sqrt{3}$；　(3) $\lg 12$；　(4) $\lg 32$.

*9. 求下列函数的定义域：

(1) $y=2^{\frac{1}{2x+1}}$；　(2) $y=2^{\sqrt{x}}$；

(3) $y=\log_{0.5}(4x-3)$；　(4) $y=\sqrt{x-2}+\log_2(3x)$.

*10. 设函数 $f(x)=a^x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$），求证：$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

*11. 试用几何画板绘制下列函数的图像：

(1) $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ 和 $y=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$；　(2) $y=\log_{\frac{3}{4}}x$ 和 $y=\log_{\frac{4}{3}}x$.

*12. 一种产品原来成本是 a 元，在今后的 m 年内，计划使成本每年比上一年降低 $p\%$，写出成本随年数变化的函数关系式.

阅读与实践

对数的功绩

在一次数学竞赛中，有这样一个问题：2^{500}这个数有多少位数？小梅马上拿出计算器，按了如下键

$$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{5}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=},$$

结果计算器无法告诉她结果. 你能借助计算器帮助小梅解答这个问题吗?

事实上，上述问题可以通过对数来解决：因为

$$\lg 2^{500}=500\times\lg 2\approx150.515,$$

所以2^{500}这个数有151位数!

恩格斯曾经把对数的发明与解析几何的创始、微积分的建立并称为17世纪数学的三大成就，伽利略也说过："给我空间、时间及对数，我就可以创造一个宇宙."

那么，对数是怎样出现的呢?

早在公元前200多年，阿基米德就注意到1，10，10^2，10^3，10^4，…与0，1，2，3，4，…之间的对应关系，这是关于对数的原始思想. 到17世纪初叶，商业、工业的兴起促进了天文学、力学等科学的发展，在航海、天文观测和透镜设计等实际工作中，出现了大量极繁杂的计算，耗去了工作人员大量的时间，提高计算效率成了当务之急. 苏格兰的纳皮尔在1594年产生了把乘、除计算归结为加、减运算的想法. 经过研究，他创立了对数，提出了对数理论.

对数具有一种奇妙的性质：可以把乘、除、乘方、开方运算依次转化为加、减、乘、除运算. 进行大量计算时，对数的这种功能可使计算的效率成倍提高.

三百年来，世界科技界一直把对数作为不可缺少的工具，它把科学家们从繁杂的计算里解放出来，等于延长了科学家的生命，对数为人类劳动生产率的提高做出了巨大贡献.

第五章 数列

静静地放置在那里的国际象棋，棋盘就是厮杀的战场，你就像一位指挥千军万马的将军，运筹帷幄而决胜千里．千百年来，国际象棋给人们带来多少欢乐和愉悦，充实了多少闲暇的时光，然而发明国际象棋的人，至今还未能实现一个已被允诺的愿望．

哪里有数，哪里就有美．

——普罗克拉斯

微石铺就千里路，努力能攀万丈峰．

数列是描述事物内在规律的基本数学模型之一. 本章我们将在抽象出数列及其有关概念的基础上，进行数学运算，通过等差数列和等比数列的学习，体会数列在生产实践中应用的广泛性，为今后学习高等数学奠定基础.

5.1 数列

下面我们做一个游戏：用围棋子在棋盘上排一个“三角形”的形状，如图 5－1 所示.

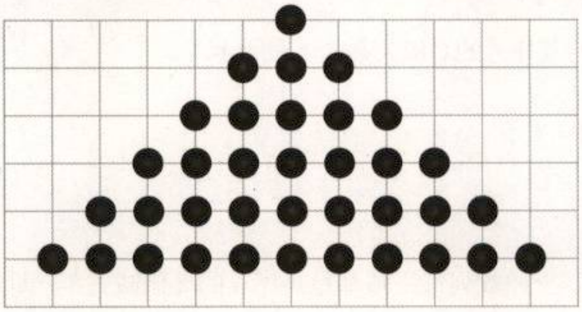


图 5－1

问题　图 5－1 所示的棋盘中，从第 1 行到第 6 行所用棋子的个数分别是多少？

观察图形，我们容易发现，从第 1 行到第 6 行所用棋子的个数依次为

$$1，3，5，7，9，11. \qquad ①$$

像①这样按一定次序排列的一列数称为**数列**. 数列中的每一个数都称为这个**数列的项**，各项依次称为这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项……第 n 项. 比如 1 是数列①的首项，9 是数列①的第 5 项.

在一个数列中，某项在数列中的序号 n 一经确定，这一项就唯一确定了.

我们还可举出一些数列的例子.

例如，某种品牌女鞋的鞋码从小到大依次排成一列：

$$34，35，36，37，38，39，40； \qquad ②$$

从 2000 年到 2016 年，中国代表团在夏季奥运会上获得的金牌数按年份依次排成一列：

$$28，32，51，38，26； \qquad ③$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，5 次幂，…依次排成一列：

$$-1，1，-1，1，-1，\cdots； \qquad ④$$

无穷多个 2 排成一列：

$$2，2，2，2，2，\cdots； \qquad ⑤$$

$\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，0.000 1，…的不足近似值依次排成一列：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.414\,2,\ \cdots. \qquad ⑥$$

项数有限的数列称为**有穷数列**，项数无限的数列称为**无穷数列**. 例如，前面的数列①②③是有穷数列，数列④⑤⑥是无穷数列.

数列从第 1 项开始，按顺序与正整数对应，所以数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，并且整个数列可记作 $\{a_n\}$（在数列中，$n\in\mathbf{N}_+$）.

数列①的各项与其序号的对应关系如下表所示.

读一读

按照所需要的精确度截取指定数位后，直接略去后面的数位，这样就得到了一个不大于真实值的近似值，这个近似值称为不足近似值.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	5	7	9	11

我们不难发现，上述数列每一项都是其序号的 2 倍减去 1，即

$$a_n=2n-1\ (n\in\mathbf{N}_+,\ n\leqslant 6).$$

在数列 $\{a_n\}$ 中，用序号 n 来表示相应的项的公式，称为该数列的**通项公式**. 例如，前面的数列②的通项公式是 $a_n=33+n$ $(n\in\mathbf{N}_+,\ n\leqslant 7)$，④的通项公式是 $a_n=(-1)^n$ 等.

想一想

你能写出数列③⑤⑥的通项公式吗?

有了数列的通项公式，我们就可以求出这个数列的任意一项.

例 1　根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，求出数列的前 5 项：

(1) $a_n=3n+1$；　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot(n^2+n)$.

解：(1) 在公式中令 n 依次取 1，2，3，4，5，得到数列的前 5 项分别为

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16.$$

(2) 在公式中令 n 依次取 1，2，3，4，5，得到数列的前 5 项分别为

$$-2,\ 6,\ -12,\ 20,\ -30.$$

例 2　写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1，3，5，7；

(2) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$.

解：(1) 数列的前 4 项 1，3，5，7 都是相应的序号的 2 倍减去 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1.$$

议一议

数列通项 $a_n=f(n)(n\in A,\ A\subseteq\mathbf{N}_+)$ 是一个函数吗?

(2) 数列前 4 项 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$ 的分子都等于相应的序号，分母都等于相应的序号加 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{n}{n+1}.$$

练习 5.1

1. 按规律填空：

(1) 0，5，(　　)，15，20，(　　)，30；

(2) 2，4，(　　)，16，32，(　　)，128.

2. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n-1$；　　(2) $a_n=5\times(-1)^n$.

3. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项与第 10 项：

(1) $a_n=n(n+2)$；　　(2) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

*4. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 3，6，9，12；　　(2) 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$；

(3) 1，-1，1，-1；　　(4) 9，99，999，9 999.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列的概念

问题　我国有用十二生肖纪年的习俗，图 5 - 2 是 20 世纪最后一个虎年（1998 年）发行的生肖邮票. 请按时间先后的顺序，写出 21 世纪生肖是虎的年份所构成的数列.

图 5 - 2

在这个问题中，由于生肖纪年 12 年轮回一次，进入 21 世纪第一个生肖是虎的年份为

$$1\,998+12=2\,010,$$

所以 21 世纪生肖是虎的年份按先后顺序构成的数列 $\{a_n\}$ 为

$$2\,010，2\,022，2\,034，2\,046，2\,058，2\,070，2\,082，2\,094.$$

我们不难发现，上述数列中，

$$a_2-a_1=12，a_3-a_2=12，\cdots，a_8-a_7=12.$$

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，则称这个数列为**等差数列**，这个常数称为等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示.

例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots$$

是等差数列，它的公差 $d=2$.

试一试

请你举出几个等差数列的例子.

如果一个数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且它的首项为 a_1，公差为 d，则由等差数列的定义可知

$a_2=a_1+d$,

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$,

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$,

…………

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可表示为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

读一读

数列 2，2，2，2，…也是等差数列，它的公差为 0. 公差为 0 的数列称为常数列.

例如，如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，则将它们代入上面的公式，就可得到这个数列的通项公式

$$a_n=1+(n-1)\times 2,$$

即

$$a_n=2n-1.$$

例 1 求等差数列 8，5，2，…的通项公式与第 20 项.

解： 设此数列为 $\{a_n\}$，则

$$a_1=8, \ d=5-8=-3,$$

所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n=8+(n-1)\times(-3),$$

即 $a_n=-3n+11$. 于是

$$a_{20}=-3\times 20+11=-49.$$

例 2 等差数列 -5，-9，-13，…的第多少项是 -401？

解： 设此数列为 $\{a_n\}$，则

$$a_1=-5, \ d=-9-(-5)=-4,$$

令 $a_n=-401$，所以

$$-401=-5+(n-1)\times(-4),$$

解得 $n=100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 3 项是 5，第 8 项是 20，求它的首项和公差.

解：因为 $a_3=5$，$a_8=20$，根据通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+(3-1)d=5,\\a_1+(8-1)d=20,\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}a_1+2d=5,\\a_1+7d=20,\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}a_1=-1,\\d=3.\end{cases}$$

所以该数列的首项为-1，公差为 3.

例 4　在 6 与 10 之间插入一个实数 A，使 6，A，10 成等差数列，求 A 的值.

解：因为 6，A，10 成等差数列，所以

$$A-6=10-A,$$

解得 $A=8$.

一般地，如果 a，A，b 成等差数列，那么称 A 为 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么

$$A-a=b-A,$$

即 $A=\dfrac{a+b}{2}$.

练习 5.2.1

1. 口答下列各题：

(1) 数列 0，0，0，0，…是等差数列吗？

(2) 等差数列 0，2，4，6，…的通项公式是什么？

(3) 等差数列 10，9，8，7，…的公差是多少？

(4) 5 与-5 的等差中项是多少？

2. 求等差数列 10，8，6，…的通项公式与第 20 项.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $d=-\dfrac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(2) $a_1=12$，$a_6=7$，求 d；

(3) $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n；

(4) $d=-2$，$a_5=-2$，求 a_n.

4. 求下列各组数的等差中项：

(1) 732 与 -136；　　　　　　(2) $\frac{49}{2}$ 与 42.

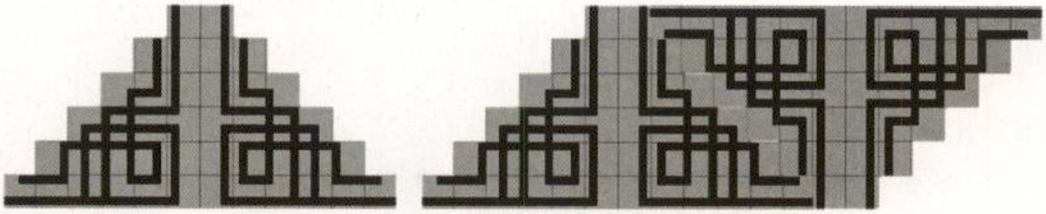
5. (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 5.6，第 6 项是 20.6，求它的第 4 项；

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 的第 3 项是 9，第 9 项是 3，求它的第 12 项.

6. 一个梯子的最高一级宽是 40 cm，最低一级宽是 58 cm，中间还有 5 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级梯子的宽度.

5.2.2 等差数列的前 n 项和

问题　淄博是驰名世界的瓷都之一，某陶瓷厂家设计了一款拼花瓷砖，则拼成图 5 - 3 (1) 的形状需要多少块瓷砖?



(1)　　　　(2)

图 5 - 3

在这个问题中，瓷砖的块数从上到下构成一个有 6 项的等差数列 $\{a_n\}$，即

$$2，4，6，8，10，12，$$

因此

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=2+4+6+8+10+12=42.$$

如果这个数列的项数增大，比如增大到 100 项，直接相加就不方便了. 下面我们给出另外一种求法.

把图 5 - 3 (1) 上下倒置与原图拼接成图 5 - 3 (2) 的形状，可以发现

$$2+12=4+10=6+8=\cdots=14,$$

即每一层都是 14 块，共有 6 层，所以图 5 - 3 (1) 中所用的瓷砖的块数为

$$\frac{6\times(2+12)}{2}=42.$$

一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

如何求等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 呢? 类比上述问题的解决思路，根据图 5 - 4 可以猜想

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

事实上，因为

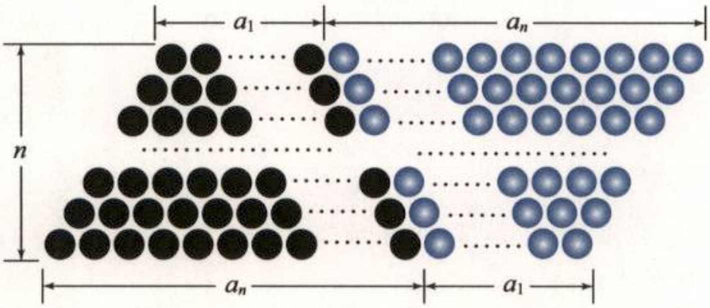


图 5-4

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \quad ①$$

倒序表示为

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1, \quad ②$$

根据等差数列的定义，①式与②式可分别表示为

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ③$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \quad ④$$

③式与④式左右两边分别相加，可得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n),$$

即 $2S_n=n(a_1+a_n)$，所以

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

以上就是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式. 因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

在这两个公式中，都涉及四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

例 5 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，根据下列条件求 S_n：

(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

(2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$.

解：(1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，且

$$a_1=5,\ a_n=95,\ n=10,$$

代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$$S_{10}=\frac{10\times(5+95)}{2}=500.$$

(2) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，且

$$a_1=100,\ d=-2,\ n=50,$$

代入 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 得

$$S_{50}=50\times100+\frac{50\times(50-1)}{2}\times(-2)=2\ 550.$$

例 6 求等差数列 1，3，5，7，…的前 200 项和.

解：此等差数列 $\{a_n\}$ 中，

$$a_1=1,\ d=2,\ n=200,$$

由等差数列的前 n 项和公式得

$$S_{200}=200\times1+\frac{200\times(200-1)}{2}\times2=40\ 000.$$

即前 200 项和是 40 000.

练习 5.2.2

1. 填空：

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和 a_{100}，则 $S_{100}=$____________；

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若已知 a_1 和公差 d，则 $S_{100}=$____________；

(3) 等差数列 5，5，5，5，…的前 100 项和是____________；

(4) $1+2+3+\cdots+100=$____________.

2. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，根据下列条件求 S_n：

(1) $a_1=1$，$a_n=21$，$n=100$；

(2) $a_1=2$，$d=-3$，$n=10$.

3. 求等差数列 2，4，6，8，…的前 500 项和.

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列的概念

问题 相传，在某个王国里有一位聪明的大臣，他发明了国际象棋，献给了国王，国王从此迷上了下棋. 作为奖励，国王答应满足这个大臣的一个愿望. 大臣说：就在棋盘（如图 5-5 所示）上放上一些麦粒吧！第 1 格放 1 粒，第 2 格放 2 粒，以后每格放的麦粒数都是前一格的 2 倍，一直放到第 64 格. 国王哈哈大笑，说：你就要这么一点麦粒？

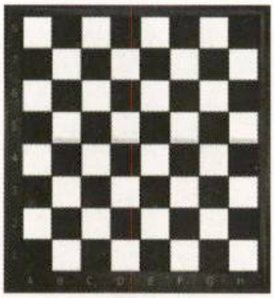


图 5-5

你能写出棋盘上从第 1 格到第 64 格需放的麦粒数所构成

的数列吗？你认为国王能满足大臣的愿望吗？

在这个问题中，设每格放的麦粒数构成数列 $\{a_n\}$，则该数列为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots,\ 2^{63},$$

容易知道，

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_{64}}{a_{63}}=2.$$

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，那么称这个数列为**等比数列**，这个常数称为等比数列的**公比**. 公比通常用字母 q（$q\neq 0$）表示.

想一想

（1）等比数列中能否有某一项为 0？（2）数列 2，2，2，2，…是等比数列吗？

例如，数列

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \cdots$$

就是等比数列，它的公比 $q=3$.

如果一个数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且它的首项为 a_1，公比为 q，则由等比数列的定义可知：

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此可知，首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可表示为

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

例如，如果一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 3，公比是 2，则将它们代入上面的公式，就可得到这个数列的通项公式

$$a_n=3\times 2^{n-1}.$$

例 1　求等比数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots$的通项公式与第 10 项.

解：设此数列为 $\{a_n\}$，则

$$a_1=1,\ q=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},$$

所以此数列的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

于是 $a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$.

例 2　等比数列$\frac{1}{25}$，$\frac{1}{5}$，1，…的第多少项是 625？

解：设此数列为 $\{a_n\}$，则

$$a_1=\frac{1}{25}，\ q=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}}=5，$$

令 $a_n=625$，所以

$$625=\frac{1}{25}\times 5^{n-1}，$$

解得 $n=7$.

即这个数列的第 7 项是 625.

例 3 一个等比数列 $\{a_n\}$ 的第 3 项与第 4 项分别是 12 与 18，求它的第 1 项与第 2 项.

解：设此数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，则

$$\begin{cases} a_1q^2=12, \\ a_1q^3=18, \end{cases}$$

解得

$$a_1=\frac{16}{3}，\ q=\frac{3}{2}，$$

从而可得

$$a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

即这个数列的第 1 项是 $\frac{16}{3}$，第 2 项是 8.

> **议一议**
>
> 你能用等比数列的定义直接求出例 3 中数列的公比吗?

例 4 在 2 与 32 之间插入一个实数 G，使 2，G，32 成等比数列，求 G 的值.

解：由等比数列的定义可得

$$\frac{G}{2}=\frac{32}{G}，$$

所以 $G^2=64$，解得 $G=\pm 8$.

即插入的这个数为 8 或 -8.

一般地，如果 a，G，b 成等比数列，则称 G 为 a 与 b 的**等比中项**.

如果 G 是 a 与 b 等比中项，那么

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}，$$

即 $G^2=ab$，解得 $G=\pm\sqrt{ab}$.

> **议一议**
>
> 如果 a 与 b 存在等比中项，那么 a，b 能异号吗?

练习 5.3.1

1. 口答下列各题：

(1) 把一张纸对折，得纸 2 层，再对折，得纸 4 层，如此下去，第 5 次对折，得纸多少层？

(2) 等比数列 a_1，a_2，1，$\frac{1}{2}$，…的公比是多少？

(3) 若 3，x，3 成等比数列，则 x 的值等于多少？

(4) 等比数列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…的通项公式是什么？

2. 求下列等比数列的通项公式与第 6 项：

(1) 5，-15，45，…；　　(2) 1.2，2.4，4.8，…；

(3) $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，…；　　(4) $\sqrt{2}$，1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，….

3. (1) 一个等比数列的第 5 项是$\frac{4}{9}$，公比是$-\frac{1}{3}$，求该数列的首项；

(2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求该数列的首项和第 4 项.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2$，$a_5=54$，求公比 q.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$q=2$，$a_n=256$，求 n.

6. 求下列各组数的等比中项：

(1) 16 与 4；　　(2) 3 与 7.

7. 在 5 和 405 之间插入三个数，使这 5 个数成等比数列，求插入的三个数.

8. 以下是我国古代的数学著作《孙子算经》中的一个趣味题，试试你的本领吧！

出门望九堤

今有出门，望见九堤，

堤有九木，木有九枝，

枝有九巢，巢有九禽，

禽有九雏，雏有九毛，

毛有九色. 各几何?

5.3.2 等比数列的前 n 项和

问题　在 5.3.1 节的问题中，共需多少粒麦子才能满足大臣的愿望呢？

要解决这个问题，就是要求

$$1+2+4+\cdots+2^{63}$$

的值.

我们先来研究首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \qquad ①$$

把①式两边同乘以公比 q，得

$$qS_n=a_2+a_3+\cdots+a_n+a_nq, \qquad ②$$

把①式与②式的两边分别相减，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_nq.$$

因此，不难得到

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1,\\ na_1, & q=1.\end{cases}$$

以上就是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式.

因为 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以 $q\neq 1$ 时，上面的公式还可以写成

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

前述与麦粒有关的问题中，

$$S_{64}=1+2+4+\cdots+2^{63}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$$
$$=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615,$$

共需 18 446 744 073 709 551 615 粒麦子才能满足大臣的愿望.

想一想

国王能满足大臣的这个愿望吗?

例 5　如图 5 - 6 所示，把边长为 1 的正方形二等分，其中一份的面积作为数列的第 1 项，再把另一半二等分，其中一份的面积作为数列的第 2 项，依此进行下去，得到一个数列，求这个数列的前 8 项和.

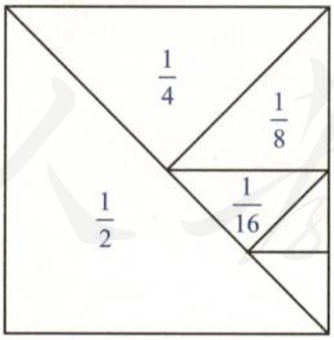


图 5 - 6

试一试

请你计算出 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$.

解：由题意可知该数列是等比数列，记作 $\{a_n\}$，则

$$a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},\ n=8,$$

所以

$$S_8=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

练习 5.3.2

1. 口答：

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=5$，公比 $q=1$，则 S_{20} 等于多少？

(2) 数列 3，-3，3，-3，…前 8 项的和是多少？前 9 项的和是多少？

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，根据下列各题的条件，求前 n 项和 S_n：

(1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$；

(2) $a_1=2$，$a_2=\frac{1}{2}$，$n=5$.

3. (1) 已知等比数列 1，2，4，…，求第 5 项到第 10 项的和；

(2) 已知等比数列 $\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{8}$，…，求第 3 项到第 7 项的和.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=36$，$a_5=\frac{9}{4}$，求 q 和 S_5.

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$，$S_n=\frac{40}{27}$，求 n.

5.4 等差数列与等比数列的应用

在工农业生产和日常生活中，等差数列与等比数列的知识应用非常广泛，下面我们举例说明.

例 1 奥林匹克夏季运动会每 4 年举办一次. 2008 年，我国成功举办了第 29 届夏季奥林匹克运动会——北京奥运会，其中帆船项目的比赛在青岛举行.

(1) 请计算第 1 届夏季奥林匹克运动会举办的年份；

(2) 如果青岛市准备申请第 38 届夏季奥运会的举办权，那么青岛准备申请的是哪一年的夏季奥运会的举办权？

解：(1) 依题意，设每届夏季奥运会举办的年份构成等差数列 $\{a_n\}$，且

$$a_{29}=2\,008,\ d=4.$$

因为 $a_{29}=a_1+28d$，所以

$$2\,008=a_1+28\times4,$$

解得 $a_1=1\,896$.

即第一届夏季奥运会举办的年份是1896年.

(2) 因为

$$a_{38}=a_1+37d=1\,896+37\times4=2\,044,$$

所以青岛准备申请的是2044年的夏季奥运会的举办权.

例2 某林场计划第1年造林5公顷，以后每年比上一年多造林3公顷，则20年后林场共造林多少公顷?

解: 依题意，林场每年造林的公顷数构成等差数列 $\{a_n\}$，且

$$a_1=5,\ d=3,\ n=20.$$

因此

$$S_{20}=20\times5+\frac{20\times19}{2}\times3=670.$$

即20年后林场共造林670公顷.

例3 山东省某城市2015年空气质量良好以上的天数为141天，如果该城市力争2020年空气质量良好以上的天数要达到310天，那么从2016年开始，空气质量良好以上天数的年平均增长率约为多少(精确到0.1%)?

解: 设所求年平均增长率是 x，则该城市从2015年到2020年每年空气质量为良好以上的天数构成等比数列 $\{a_n\}$，且

$$a_1=141,\ a_6=310,\ n=6,\ q=1+x.$$

由等比数列的通项公式，得

$$310=141\times(1+x)^{6-1},$$

整理，得

$$(1+x)^5=\frac{310}{141}.$$

因为 $1+x>0$，所以 $1+x=\sqrt[5]{\frac{310}{141}}$，解得

$$x\approx0.171=17.1\%.$$

因此，要到预期的目标，这个城市空气质量为良好以上天数的年平均增长率约为17.1%.

例4 张先生2018年2月10日到银行存款100 000元，存期一年，年利率为1.75%保持不变，到期自动转存(银行自动将到期的存款本息按相同存期一并转存). 张先生准备在2021年2月10日将这笔存款的本息和全部取出，到时张先生能取出多少钱(精确到0.01元，不考虑利息税)?

解: 因为1年后的本息之和为

$$100\ 000\times(1+1.75\%)\text{ 元},$$

2 年后的本息之和为

$$100\ 000\times(1+1.75\%)\times(1+1.75\%)=100\ 000\times(1+1.75\%)^2\text{ 元},$$

3 年后的本息之和为

$$\begin{aligned}&100\ 000\times(1+1.75\%)^2\times(1+1.75\%)\\=&100\ 000\times(1+1.75\%)^3\\=&100\ 000\times1.017\ 5^3\\\approx&105\ 342.41\text{ 元}.\end{aligned}$$

因此到时张先生能取出 105 342.41 元.

练习 5.4

*1. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 和 45，求其余各齿轮的齿数.

*2. 一个剧场要设置 20 排座位，第一排安置 38 个座位，从第二排起每一排比前一排多 2 个座位，这个剧场总共要安置多少个座位？

*3. 某人买了一辆价值 13.5 万元的新车，假设这种车在十年内每年的折旧率为 10%.

(1) 写出第 n ($n\in\mathbf{N}_+$) 年后这辆车的价值.

(2) 如果此人打算用满 4 年时卖掉这辆车，大概能卖到多少钱（精确到 0.01 万元）？

*4. 某企业去年生产某种机器 1 080 台，该企业计划利用二年将年产量提高到 1 920 台. 如果年增长率相同，求年增长率（精确到 1%）.

习题五

1. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出数列的前 5 项：

(1) $a_n=2n-5$；　　(2) $a_n=n^2+1$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n(n+1)$：

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项，第 48 项；

(2) 420 是这个数列的第多少项？

3. 求下列各组数的等差中项：

(1) 647 与 895；　　(2) −180 与 360.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_6=5$，$a_3+a_8=5$，求 a_9.

5. 根据下列条件，求各等差数列 $\{a_n\}$ 的有关未知数：

(1) $a_1=1$，$a_n=19$，$S_n=100$，求 d 与 n；

(2) $d=-2$，$n=8$，$S_n=0$，求 a_1 与 a_n；

(3) $a_1=1$，$d=4$，$S_n=45$，求 n 与 a_n；

(4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 a_1 与 S_n.

6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7； (2) $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_1 及 q.

7. 求下列各数组的等比中项：

(1) 45 与 80； (2) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$.

8. 在 9 与 243 之间插入两个数，使 9，a，b，243 成等比数列，求 a，b 的值.

9. 已知三个数成等比数列，它们的和等于 14，积等于 64，求这三个数.

10. 已知三个正数成等差数列，且和是 15，若这三个数分别加上 1，3，9 就成等比数列，求这三个数.

*11. 写出一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$； (2) 0，-2，-4，-6；

(3) 2，$-\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$-\frac{5}{4}$； (4) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$；

(5) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$； (6) 1，$-\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt[3]{4}$.

*12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_1=12$，$a_4=96$，求 q 与 S_4；

(2) $q=\frac{1}{2}$，$S_5=\frac{31}{8}$，求 a_1 与 a_5；

(3) $a_1=2$，$S_3=26$，求 q 与 a_3.

*13. 甲、乙二人分别到 A，B 两家公司应聘，甲所应聘的 A 公司给出的条件是：第一年月薪 2 000 元，以后每年月薪增加 400 元；乙所应聘的 B 公司给出的条件是：第一年月薪 2 000 元，以后每年月薪增加 15%. 如果聘期均确定为 10 年，则第 10 年甲和乙的月薪分别是多少？甲和乙 10 年的总收入分别是多少（精确到 1 元）？

阅读与实践

（一）买马

据传，某人花 1 万元买了一匹马，买后感觉买贵了，要把马退还给卖主，他说："这匹马根本不值这么多钱！"

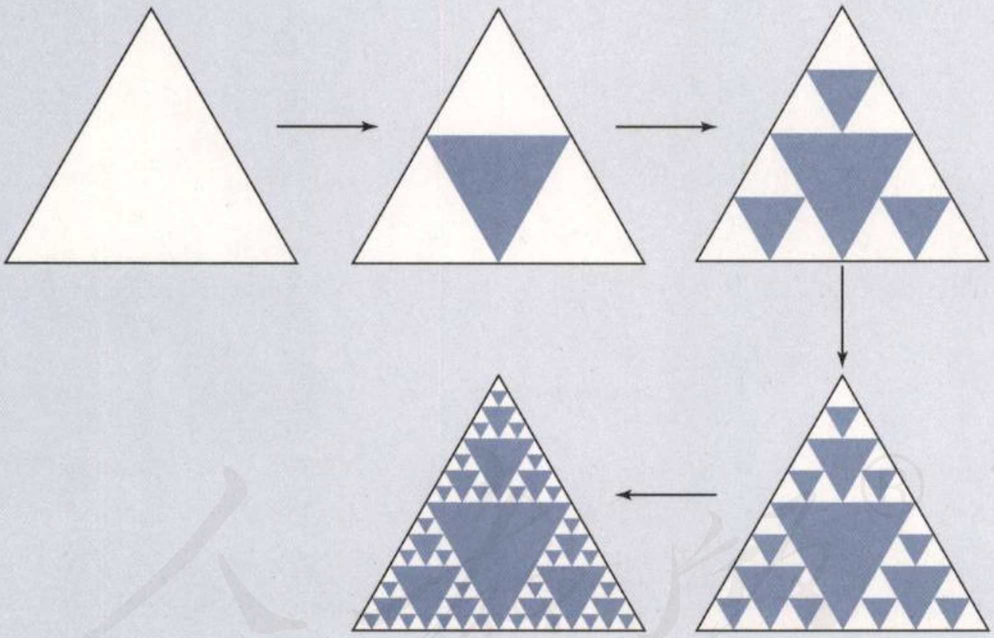
卖马的人提出了另外一种计算马价的方案："如果你嫌马太贵了，那么就只买马蹄上的钉子好了，马就算白送给你. 每个马蹄铁上有 5 枚钉子，第一枚钉子只卖 1 分钱，第二枚卖 2 分钱，第三枚卖 4 分钱，后面每个钉子价格依此类推."

买马的人感觉这样太便宜了，大概花不了几个钱就能得到一匹马，就欣然同意了. 而且还找来了公证人，约定双方决不再反悔.

当真正付款的时候，买马的人才知道上当了. 你知道为什么吗？

（二）"怪物"图形

下面一组图形，是谢尔宾斯基三角形（也称为谢尔宾斯基垫圈）形成的各个阶段. 19 世纪保守的数学家们认为这些图形是"病态"的. 在 20 世纪 70 年代蒙德尔布罗于创造"分形"这个术语之前，这些图形一向被当成"怪物".



图中从一个白色三角形开始，每个白色三角形需插入一个蓝色三角形，从而一个白色三角形变为三个小的白色三角形. 如此可以无限地进行下去，插入的蓝色三角形的个数依次为

$$1, 4, 13, 40, 121, \cdots$$

这构成一个数列. 你能接着写出这个数列的第 6 项吗？

设插入蓝色三角形的个数构成数列 $\{a_n\}$，则

$$a_1=1,$$
$$a_2=4=a_1+3^1,$$
$$a_3=13=a_2+3^2,$$
$$a_4=40=a_3+3^3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n+1}=a_n+3^n,$$
$$\cdots\cdots$$

因此，这个数列的第 6 项为 364. 这个数列够“怪”的吧？

如果把所有蓝色三角形的部分挖去，我们可以发现，剩余的白色部分的面积在不断减小，并且加速趋近于零，有兴趣的同学可以继续研究. 类似的图形还有很多，请上网去查阅“分形几何”进一步了解吧！

第六章
空间几何体

多面体棱角分明，他使耸天的大楼气势磅礴、充满阳刚；旋转体曲线曼妙，她让建筑物柔情似水、秀丽端庄．正是这些几何体，将世界打扮得风景如画，使生活充满一派和谐的风光．

在数学这门科学里，我们发现真理的主要工具是归纳和类比．

——拉普拉斯

数学中的一些美丽定理具有这样的特征：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深．

——高斯

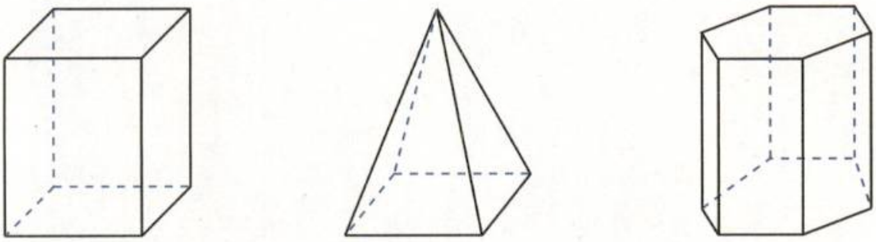
本章我们将在认识柱、锥、球等简单几何体的基础上，继续学习三视图的知识以及棱柱、棱锥等简单几何体直观图的画法，培养直观想象的数学素养；研究柱、锥、球等几何体表面积、体积的计算方法，培养逻辑推理和数学运算的数学素养，并体会有关知识在生活中的应用.

6.1 认识空间几何体

6.1.1 认识多面体与旋转体

问题 在现实生活中，我们的周围存在着许许多多类似如图 6－1（1）的物体，把这些物体的轮廓抽象出来，可画成如图 6－1（2）所示，这些几何体有哪些共同特点呢？

（1）



（2）

图 6－1

通过观察、分析发现，图 6－1（2）所示几何体都是由若干个平面多边形围成的，我们把这样的几何体称为**多面体**.

在图 6－2 的多面体中，每个多边形称为多面体的**面**，两个面的公共边称为多面体的**棱**，棱和棱的公共点称为多面体的**顶点**，连接不在同一面上的两个顶点的线段称为多面体的**体对角线**.

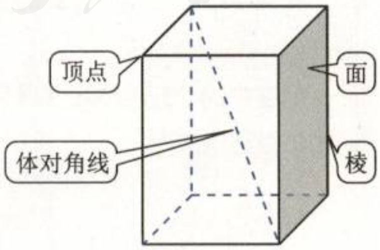
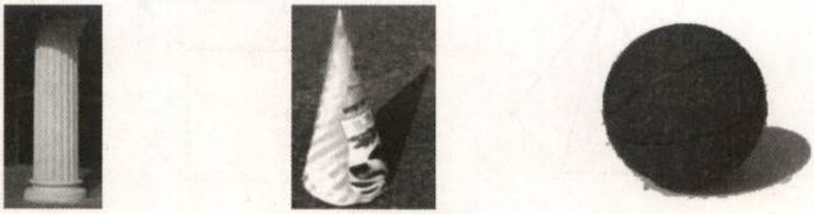
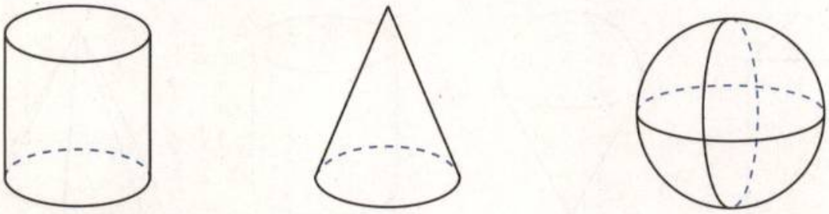


图 6－2

问题 在现实生活中，我们还经常会遇到类似如图 6－3（1）的物体，把这些物体的轮廓抽象出来，可画成如图 6－3（2）所示，这些几何体又有哪些共同特点呢？



（1）



（2）

图 6 - 3

一条平面曲线绕一条定直线旋转一周所形成的曲面称为**旋转面**，由封闭的旋转面围成的几何体称为**旋转体**，其中的平面曲线称为旋转体的**母线**，定直线称为旋转体的**轴**. 图 6 - 3（2）的几何体都是旋转体. 旋转体也可以看成由一个封闭的平面图形（包括其内部）绕一条定直线旋转一周所围成的几何体.

试一试

指出图 6 - 3 (2) 中旋转体的母线，并作出它们各自的轴.

观察图 6 - 4 中的几个物体，可以发现，这些物体的几何体都是由多面体、旋转体等基本几何体组合而成的，这样的几何体称为**组合体**. 组合体可以通过把它们分解为基本几何体来研究.

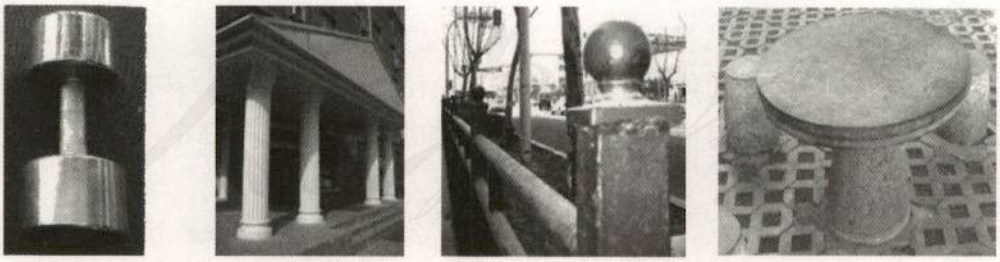
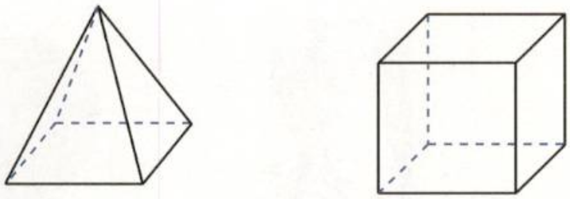


图 6 - 4

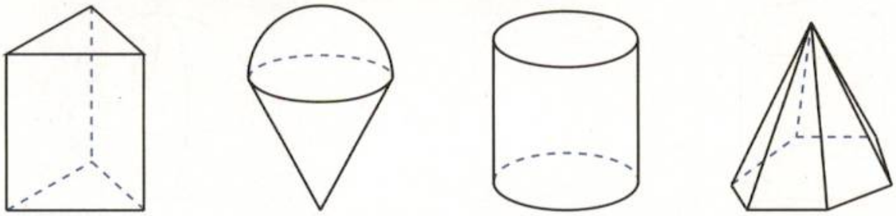
练习 6.1.1

1. 说出下列多面体的顶点数、面数和棱数.



（第 1 题）

2. 下面几何体中，哪些是多面体？哪些是旋转体？

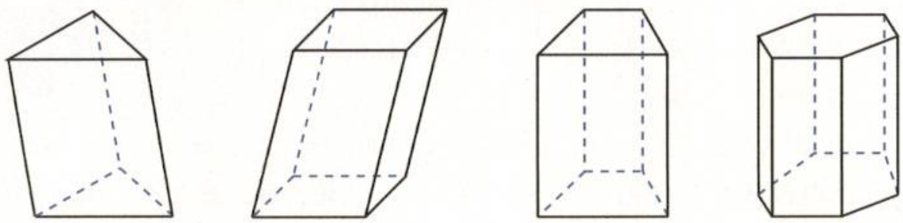


（第 2 题）

6.1.2 棱柱、棱锥

1. 棱柱

观察图 6－5 中的多面体，它们有什么共同特点呢？



（1）　（2）　（3）　（4）

图 6－5

我们发现，这些几何体都有这样的特征：有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线互相平行，这样的多面体称为**棱柱**. 如图 6－6 所示棱柱中，两个互相平

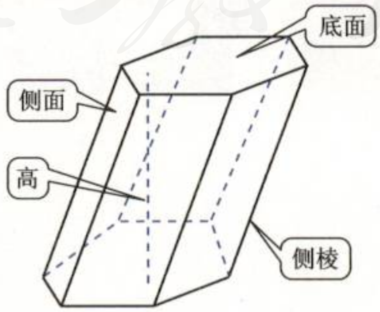


图 6－6

行的面称为棱柱的**底面**（简称**底**），其余各面称为棱柱的**侧面**，两侧面的公共边称为棱柱的**侧棱**，两底面之间的距离（即一个底面上任意一点到另一底面铅垂线段的长）称为棱柱的**高**.

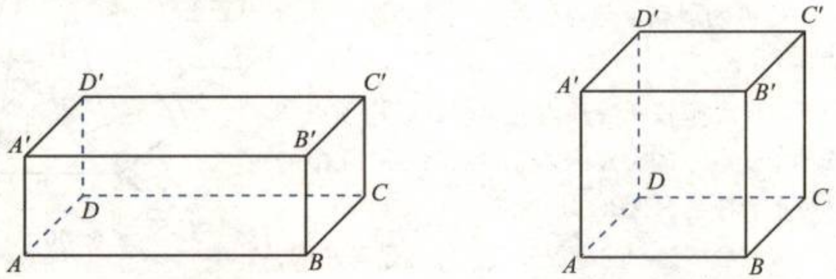
> **试一试**
>
> 指出图 6-5 中的每个柱体的底面、侧面和侧棱.

侧棱不垂直于底面的棱柱称为**斜棱柱**（如图 6-5（1）（2）），侧棱垂直于底面的棱柱称为**直棱柱**（如图 6-5（3）（4）），底面是正多边形的直棱柱称为**正棱柱**（如图 6-5（4））.

根据底面多边形是三角形、四边形、五边形……我们把棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……例如图 6-5 中，（1）是三棱柱，（2）（3）是四棱柱，（4）是六棱柱.

> **试一试**
>
> 你能举出生活中棱柱的实例吗？

底面是矩形的直四棱柱称为**长方体**（如图 6-7（1）），棱长都相等的长方体称为**正方体**（如图 6-7（2））.



（1）　　　　（2）

图 6-7

例 1　已知一个长方体的长是 12 cm，宽是 9 cm，高是 8 cm. 求这个长方体体对角线的长.

解：如图 6-8，连接 AC，$A'C$，易知长方体的体对角线都相等，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$AC^2=AB^2+BC^2,$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'AC$ 中，

$$A'C^2=AC^2+A'A^2=AB^2+BC^2+A'A^2,$$

因此

$$A'C^2=12^2+9^2+8^2=289,$$

解得 $A'C=17$.

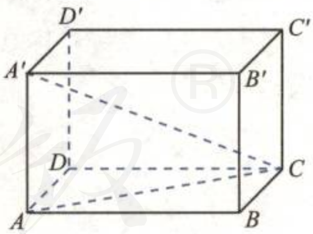


图 6-8

因此，体对角线的长是 17 cm.

> **想一想**
>
> 若正方体的棱长为 a，则其体对角线的长是多少？

一般地，如果长方体的长、宽、高分别是 a，b，c，则其体对角线的长是

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

即长方体的一条体对角线长的平方等于一个顶点上的三条棱长的平方和.

2. 棱锥

观察图 6 - 9 中的几何体，它们的共同特征是什么呢？

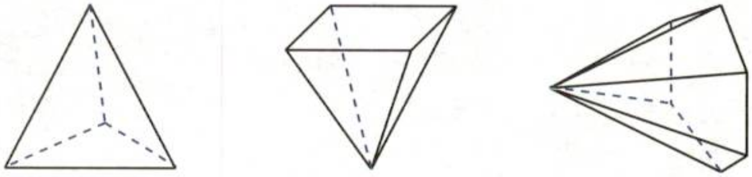


图 6 - 9

我们发现，这些几何体都有这样的特征：有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，这样的多面体称为**棱锥**. 如图 6 - 10 所示的棱锥中，有公共顶点的三角形称为棱锥的**侧面**，多边形称为棱锥的**底面**（简称**底**），各侧面的公共顶点称为棱锥的**顶点**，顶点到底面铅垂线段的长称为棱锥的高.

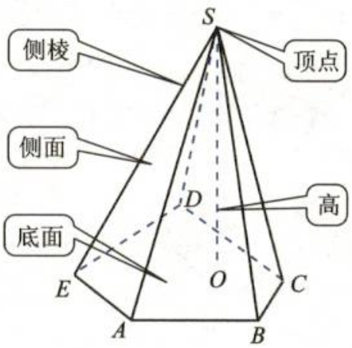


图 6 - 10

棱锥可用顶点和底面各顶点的字母，或用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示. 如图 6 - 10 中的棱锥，可表示为棱锥 $S\text{-}ABCDE$ 或 $S\text{-}AD$.

棱锥可按底面多边形的边数分类，底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥……图 6 - 9 中的棱锥，依次称为三棱锥、四棱锥、六棱锥.

底面是正多边形且顶点在底面上的正投影是底面中心的棱锥称为**正棱锥**. 正棱锥的各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高称为**正棱锥的斜高**. 如图 6 - 11 中的棱锥是正四棱锥，其中 SO 是正四棱锥的高，SE 是正四棱锥的斜高.

试一试

指出图 6 - 9 中各棱锥的底面、侧面和顶点.

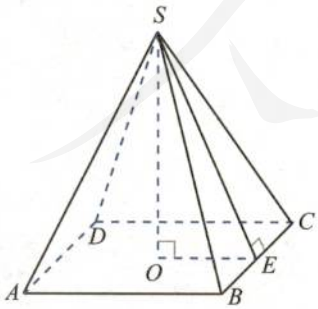


图 6 - 11

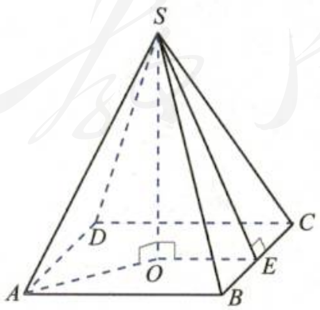


图 6 - 12

读一读

棱长都相等的三棱锥也称为正四面体.

例 2 如图 6 - 12，正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面边长是 4 cm，侧棱长是 8 cm. 求这个棱锥的高 SO 和斜高 SE.

解：连接 AO，OE.

在 Rt$\triangle SEB$ 中，

$$SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15},$$

在 Rt$\triangle SOA$ 中，

$$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14},$$

所以这个棱锥的斜高 SE 的长是 $2\sqrt{15}$ cm，高 SO 的长是 $2\sqrt{14}$ cm.

练习 6.1.2

1. 判断下列命题是否正确：

(1) 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱；

(2) 底面是正方形的棱柱是正棱柱.

2. 四棱柱集合、直四棱柱集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系？用文氏图表示出来.

3. 已知以长方体的一个顶点为端点的三条棱长分别为 a，b，c，求它的体对角线长：

(1) $a=3$，$b=4$，$c=5$；

(2) $a=7$，$b=11$，$c=4$.

4. 已知一个正方体的体对角线的长是 $3\sqrt{3}$，求这个正方体的棱长.

5. 已知一个正四棱锥的所有棱长都相等，求这个棱锥的高与斜高的比值.

6.1.3 圆柱、圆锥、球

1. 圆柱、圆锥

问题　如图 6－13 所示的圆钢、铅锤抽象出来的几何体都是旋转体，这些旋转体分别是由什么平面图形旋转而成的呢？

分别以矩形的一边、直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴，将矩形、直角三角形分别旋转一周形成的曲面所围成的几何体分别称为**圆柱**、**圆锥**，如图 6－14 所示.

上面的旋转轴称为它们的**轴**，在轴上的这条边（或它的长度）称为它们的**高**，垂直于轴的边旋转而成的圆面称为它们的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面称为它们的**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都称为它们的**母线**，如图 6－15 所示.

试一试

请举出生活中圆柱、圆锥的实例.

想一想

圆柱和圆锥分别有几个底面？几条母线？

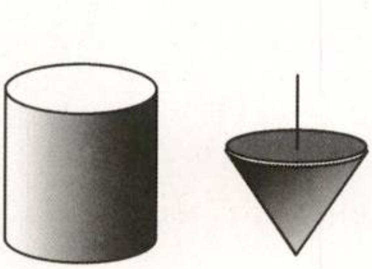


图 6-13

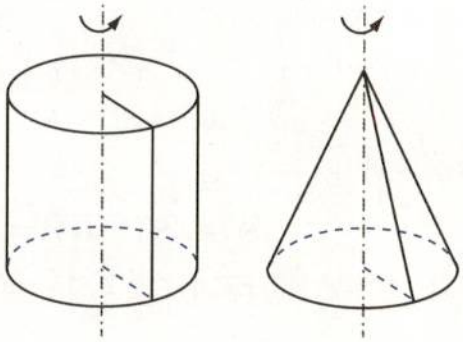


图 6-14

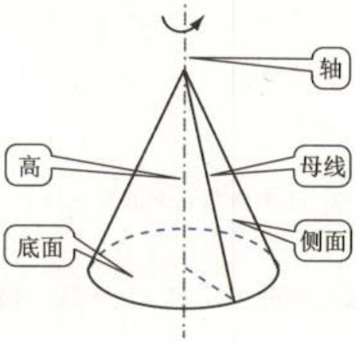


图 6-15

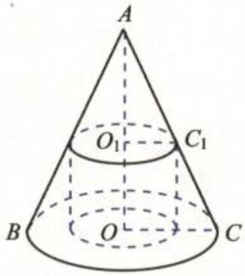


图 6-16

例 3　在底面半径为 2，母线长为 4 的圆锥中内接有一个高为$\sqrt{3}$的圆柱，求这个圆柱的底面半径.

解：如图 6-16 所示，设$\triangle ABC$是圆锥的轴截面，O_1，O分别为圆柱上下底面的圆心，则

$$OC=2,\ AC=4,\ OO_1=\sqrt{3}.$$

> **读一读**
>
> 经过轴的截面称为轴截面.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，

$$AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$$

$$AO_1=AO-OO_1=\sqrt{3},$$

根据相似三角形的性质，得

$$\frac{O_1C_1}{OC}=\frac{AO_1}{AO},$$

即$\dfrac{O_1C_1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$，解得 $O_1C_1=1$.

因此这个圆柱的底面半径为 1.

2. 球

问题　体育活动中的篮球、排球、乒乓球，以及我们玩的玻璃球等，都给我们留

下了球的印象. 那么，用什么样的平面图形进行旋转能得到球呢？

一个半圆绕着它的直径所在直线旋转一周所形成的曲面称为**球面**，球面围成的几何体称为**球体**，简称为**球**（图 6－17）.

如图 6－18，形成球的半圆的圆心称为**球心**，连接球面上任一点和球心的线段称为**球的半径**，连接球面上两点且通过球心的线段称为**球的直径**. 一个球常用其球心对应的字母来表示，例如球 O.

读一读

球面也可以看成空间中到定点的距离等于定长的点的集合. 同样，球体也可以看成空间中到定点距离小于或等于定长的点的集合.

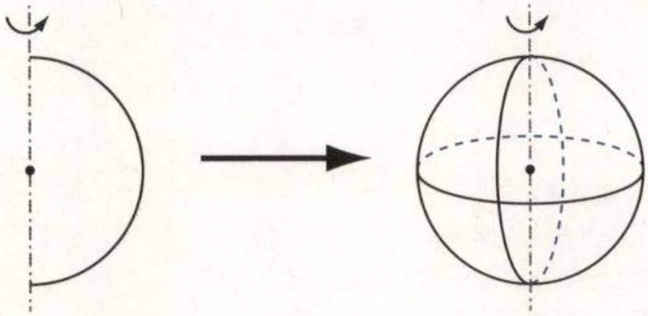


图 6－17

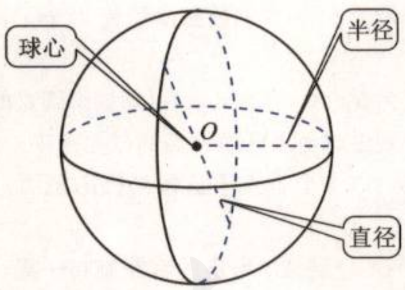


图 6－18

如图 6－19，用平面 α 去截半径为 R 的球 O，不妨设平面 α 水平放置且不过球心，OO' 是平面 α 的铅垂线，并与平面 α 交于点 O'，且 $OO'=d$. 这时，对于平面 α 与球面交线上的任一点 P，都有

$$O'P=\sqrt{OP^2-d^2}=\sqrt{R^2-d^2},$$

这是一个定值. 因此，截面与球面的交线是到定点 O' 距离等于定长 $\sqrt{R^2-d^2}$ 的点的集合. 所以，一个平面截一个球面所得的交线是以 O' 为圆心，

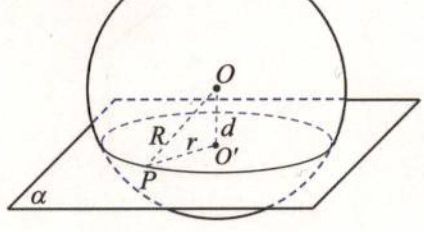


图 6－19

以 $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 为半径的一个圆，截面是一个圆面（圆及其内部）．

球面被经过球心的平面截得的圆称为**球的大圆**，被不经过球心的平面截得的圆称为**球的小圆**（图 6－19）．球面上两点之间的最短距离，就是经过两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，我们把这个弧长称为两点的**球面距离**（图 6－20）．

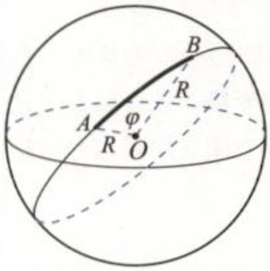


图 6－20

练习 6.1.3

1. 判断下列命题是否正确：

（1）圆柱的轴截面是一个矩形；

（2）圆锥顶点到底面上任意一点的距离就是它的高；

（3）经过球面上不同的两点只能作一个大圆．

2. 填空：

（1）已知圆柱的底面半径为 8 cm，轴截面面积为 32 cm^2，则这个圆柱的母线长为________；

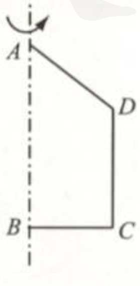
（2）已知圆锥的母线长为 5 cm，高为 3 cm，则这个圆锥的底面半径为________；

（3）设球的半径为 R，则过球面上任意两点的截面圆中，最大面积是________；

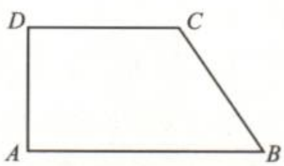
（4）过球的半径的中点，作一个垂直于这条半径的截面，则这截面圆的半径与球的半径的比值是________．

3. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的？

4. 如图所示，已知直角梯形 $ABCD$，说出它分别绕直线 AB，CD 旋转所形成的几何体的名称（或由哪些简单几何体构成的），并画出相应几何体的大致形状．

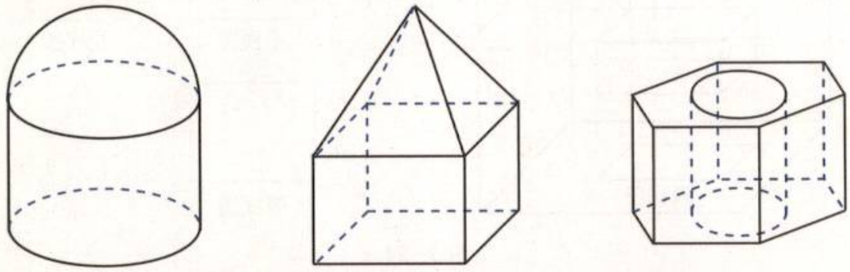


（第 3 题）



（第 4 题）

5. 指出下图中的几何体是由哪些简单几何体构成的.



（第 5 题）

6. 已知圆锥的轴截面的面积为 12 cm^2，底面半径为 3 cm，求圆锥的高.

6.2 空间几何体的三视图与直观图

问题　矩形的窗户在太阳光线的照射下，投射在地板上的影子与窗户的形状相比发生了什么变化？

矩形的窗户在投射面上的投影是平行四边形，如图 6－21 所示. 与矩形的窗户相比较，两组对边的平行性没有发生改变. 因此，我们可以借助这种投射的方法反映构成几何体的点、线、面的位置关系.

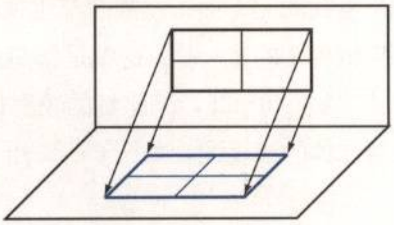


图 6－21

在投影中，若投射线相互平行，这样的投影我们称为**平行投影**. 其中，投射线倾斜于投影面的称为**斜投影**（图 6－22），投射线垂直于投影面称为**正投影**（图 6－23）. 我们可以利用平行投影的方法，画出物体的三视图与直观图.

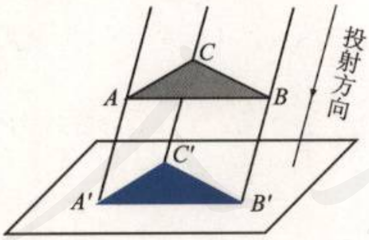


图 6－22

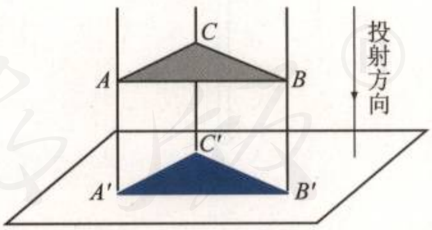


图 6－23

1. 三视图

“横看成岭侧成峰，远近高低各不同.” 同样，几何体从不同的角度去观察，看到的形状不同. 为了准确刻画几何体，我们通常要借助三视图的知识. 三视图在工程建设、机械制造以及生活中有着广泛的应用.

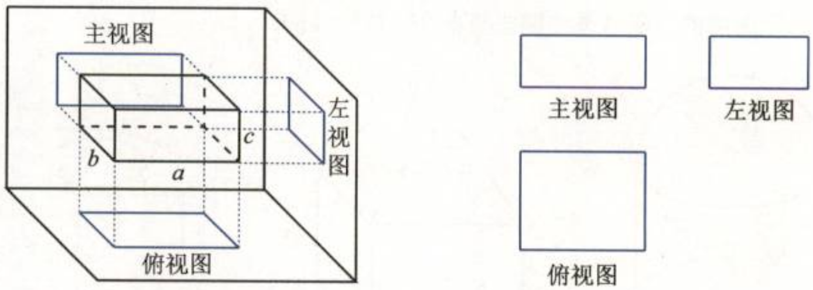


图 6-24

三视图包括主视图、左视图和俯视图. 从几何体的前面向后面做正投影，得到的图形称为几何体的**主视图**；从几何体的左面向右面做正投影，得到的图形称为几何体的**左视图**；从几何体的上面向下面做正投影，得到的图形称为几何体的**俯视图**.

> **试一试**
>
> 在图 6-24 中，找出三视图中长方体的长、宽、高.

一般地，一个几何体的左视图在主视图的右边，俯视图在主视图的下面；左视图与主视图高度一样，俯视图与主视图长度一样，左视图的长与俯视图的宽一样. 这就是作简单几何体三视图的原则：长对正、高平齐、宽相等.

如图 6-25，某路灯的轮廓是一个简单组合体，根据上述原则，我们可以画出该组合体的三视图，如图 6-26 所示.

图 6-25

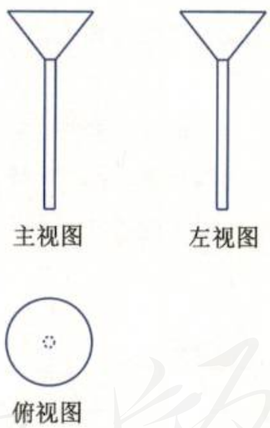


图 6-26

例 1　画出图 6-27 中几何体的三视图.

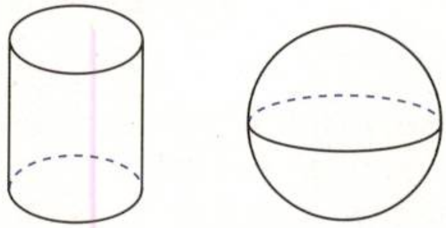


图 6-27

解：圆柱、球的三视图分别是图 6－28（1）（2）.

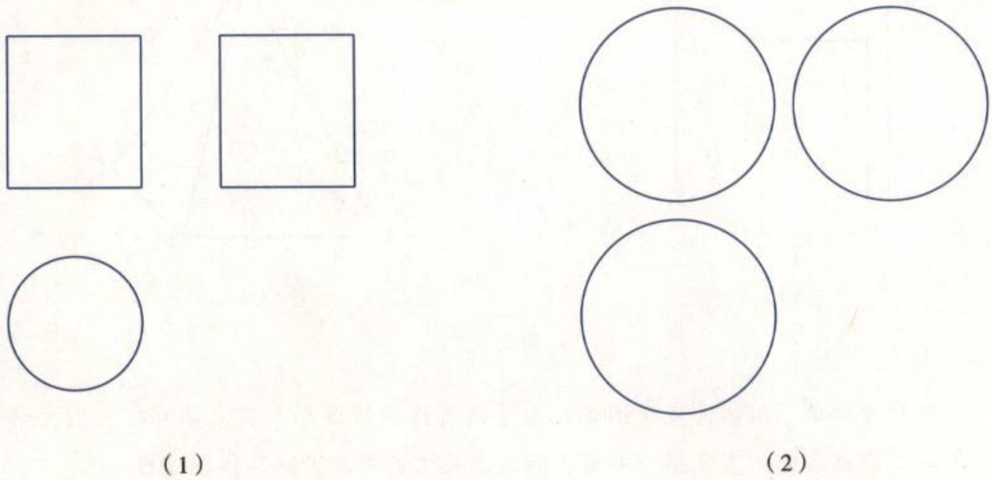


图 6－28

例 2　如图 6－29 所示，已知直棱柱的底面是直角三角形，两条直角边边长分别是 30 和 20，棱柱的高是 40. 试画出这个直棱柱的三视图.

解：该直棱柱的三视图如图 6－30 所示.

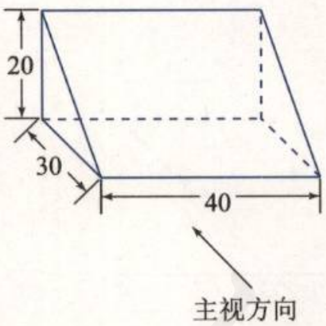


图 6－29

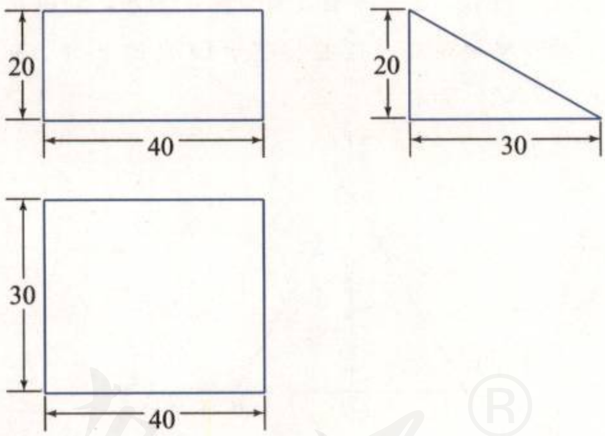


图 6－30

2. 直观图

当投射线和投影面成适当的角度时，一个空间图形在投影面上的平行投影（平面图形）可以直观地表示这个空间图形. 用来表示空间图形的平面图形，称为空间图形的**直观图**.

例如，图 6－31（1）是正六棱柱的直观图，底面 $ABCDEF$ 是一个正六边形，侧棱和底面垂直；图 6－31（2）是正四棱锥的直观图，它的底面 $ABCD$ 是一个正方形，顶点 S 在底面的正投影是底面的中心 O，侧面是全等的等腰三角形.

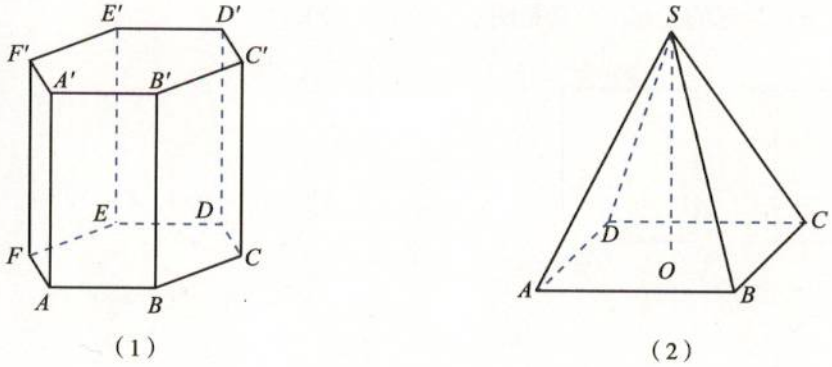


图 6-31

怎样画简单几何体的直观图呢？为了使得作出的图形具有立体感，人们经常使用斜二测画法来作直观图，下面我们结合具体实例来说明其作图过程.

我们以正三角形为例，说明怎样用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图.

如图 6-32 所示：

(1) 设$\triangle ABC$是一个正三角形，以AB所在直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系xOy，如图 6-32 (1) 所示. 画直观图时，把x轴和y轴画成对应的相交于O'点的x'轴、y'轴，并使$\angle x'O'y'=45°$，如图 6-32 (2) 所示.

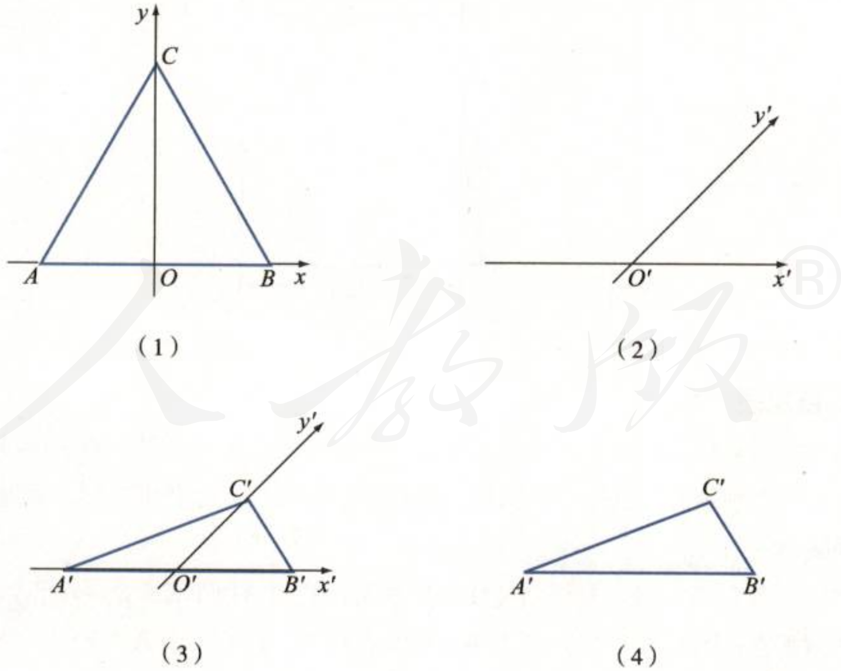


图 6-32

(2) 以点 O' 为 $A'B'$ 的中点，在 x' 轴上取 $A'B'=AB$，在 y' 轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$，连接 $A'C'$，$B'C'$，如图 6 - 32 (3) 所示.

(3) 擦去作为辅助线的坐标轴，则 $\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 的直观图，如图 6 - 32 (4) 所示.

一般地，用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图时，步骤如下：

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O，把 x 轴和 y 轴画成对应的 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$（或 $135°$），x' 轴和 y' 轴确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中与 x 轴平行（或重合）的线段，在直观图中分别画成与 x' 轴平行（或重合）的线段，且长度不变；

已知图形中与 y 轴平行（或重合）的线段，在直观图中分别画成与 y' 轴平行（或重合）的线段，且长度为原来的一半.

(3) 连接有关线段，擦去作图过程中的辅助线.

由此可知，用斜二测画法作水平放置的平面图形的直观图时，关键是分别作出其中与 x 轴和 y 轴平行（或重合）的线段.

做一做

用斜二测画法画水平放置的正方形的直观图.

下面我们来画一个水平放置的长为 4，宽为 3，高为 2 的长方体的直观图.

(1) 首先，用上面的方法作出水平放置的长为 4，宽为 3 的长方形的直观图 $ABCD$（保留坐标轴），如图 6 - 33 (1) 所示.

(2) 如图 6 - 33 (2) 所示，过 A 作 z' 轴，使之垂直于 x' 轴. 在 z' 轴上截取 $AA'=2$.

在图 6 - 33 (2) 中，过 B，C，D 分别作 z' 轴的平行线 BB'，CC'，DD'，并使

$$BB'=CC'=DD'=2,$$

然后连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

(3) 擦去作图过程中的辅助线，并把被面遮挡住的线段 AD，DC，DD' 改成虚线（或擦除）. 由此得到的就是所求长方体的直观图，如图 6 - 33 (3) 所示.

一般地，用斜二测画法作立体图形直观图的步骤如下：

(1) 在立体图形中取水平平面，在其中取互相垂直的 x 轴与 y 轴，作出水平平面上图形的直观图（保留 x' 轴和 y' 轴).

(2) 在立体图形中，过 x 轴与 y 轴的交点取 z 轴，并使 z 轴垂直于 x 轴与 y 轴. 过 x' 轴与 y' 轴的交点作 z 轴对应的 z' 轴，且 z' 轴垂直于 x' 轴.

图形中与 z 轴平行（或重合）的线段画成与 z' 轴平行（或重合）的线段，且

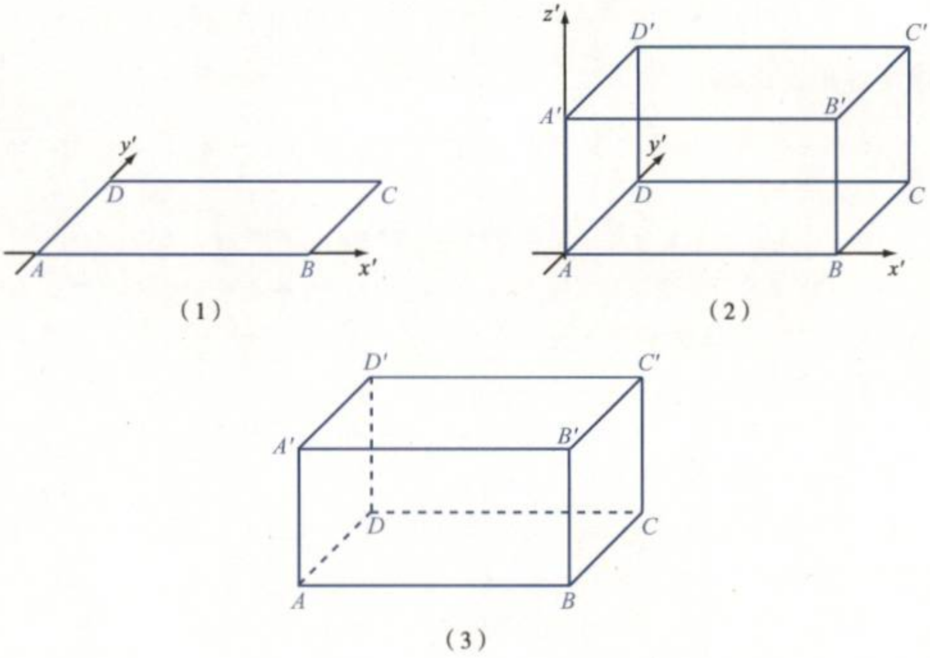


图 6 - 33

长度不变.

连接有关线段.

(3) 擦去有关辅助线，并把被面遮挡住的线段改成虚线（或擦除）.

例 3　若一个几何体的三视图如图 6 - 34 (1) 所示，请画出它的直观图.

解：通过观察三视图可知，这个几何体是一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱柱，仿照上题的画法得到该几何体的直观图，如图 6 - 34 (2) 所示.

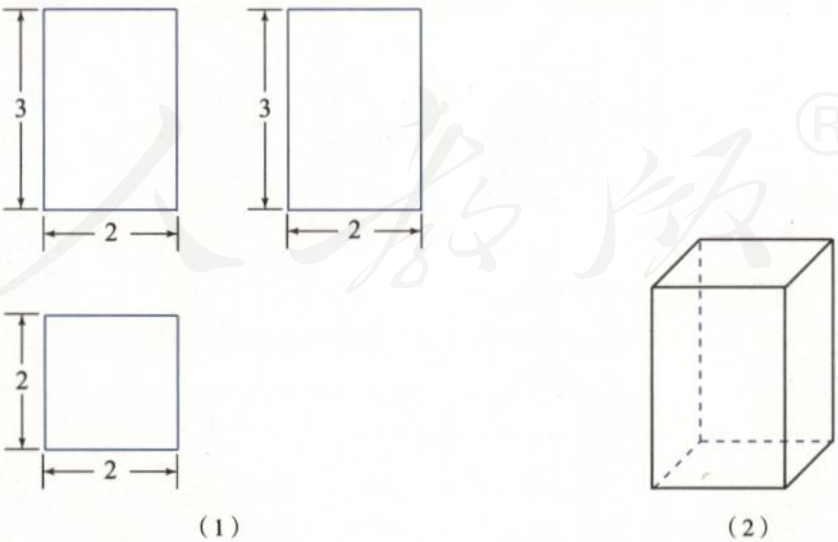
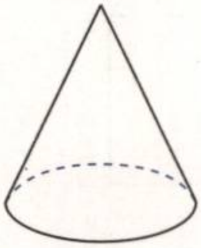


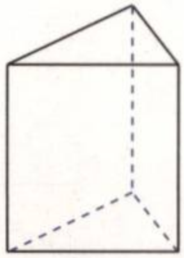
图 6 - 34

练习 6.2

1. 画出下列简单几何体的三视图.



(1)



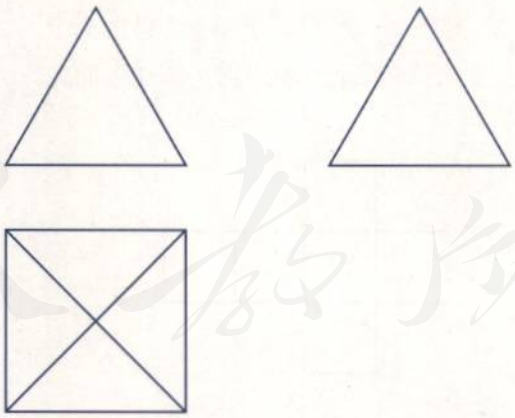
(2)

(第 1 题)

2. 画出下列几何体的三视图.

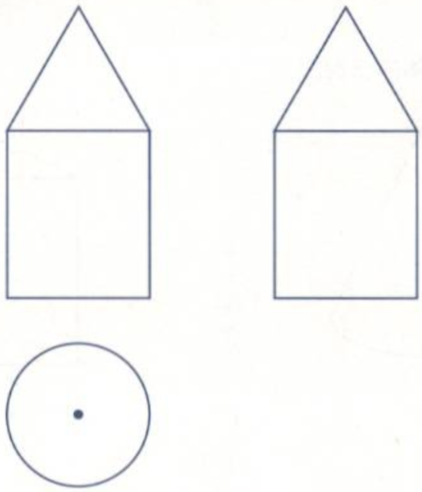
(第 2 题)

*3. 如图是一个几何体的三视图，写出该几何体的名称.



(第 3 题)

*4. 观察下列几何体的三视图，写出该几何体的名称.



（第 4 题）

*5. 画出水平放置的边长为 2 cm 的正六边形的直观图.

*6. 画出水平放置的底面棱长为 2 cm，高为 4 cm 的正三棱柱的直观图.

*7. 画出水平放置的底面棱长为 2 cm，高为 4 cm 的正四棱锥的直观图.

6.3 空间几何体的表面积和体积

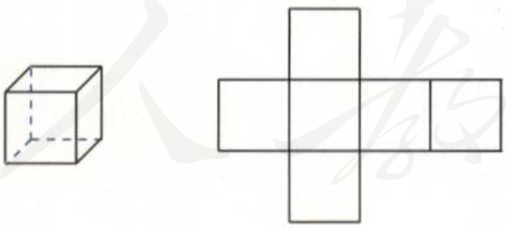
6.3.1 空间几何体的表面积

1. 多面体的表面积

问题 图 6－35（2）是图 6－35（1）所示正方体的一个表面展开图，你能说出图 6－36 所示的图分别是哪些多面体的表面展开图吗？

读一读

多面体沿着它的某些棱剪开（保持整体连接）而形成的平面图形，就是该多面体的表面展开图.



（1）　　（2）

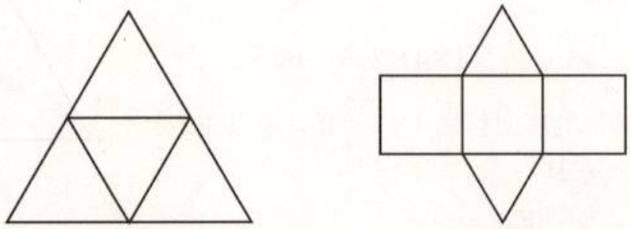
图 6－35

不难发现，图 6－36（1）是正三棱锥的表面展开图，图 6－36（2）是正三棱柱的表面展开图.

如图 6－37 所示，直棱柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h，它的面积就是这个直棱柱的侧面积，因此直棱柱的侧

面积是

$$S_{\text{直棱柱侧}}=ch.$$



（1）　　　　　　　（2）

图 6－36

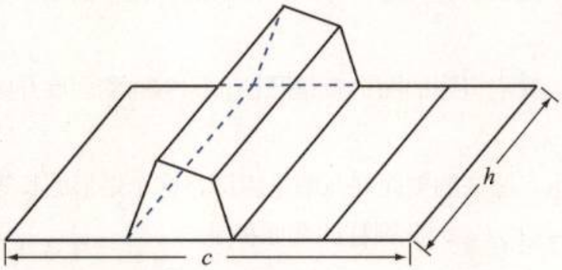


图 6－37

正棱锥的侧面展开图是由若干个全等的等腰三角形构成的，这些三角形的面积之和就是正棱锥的侧面积. 如果正棱锥的底面周长为 c，斜高为 h'，由图 6－38 可知，它的侧面积是

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'.$$

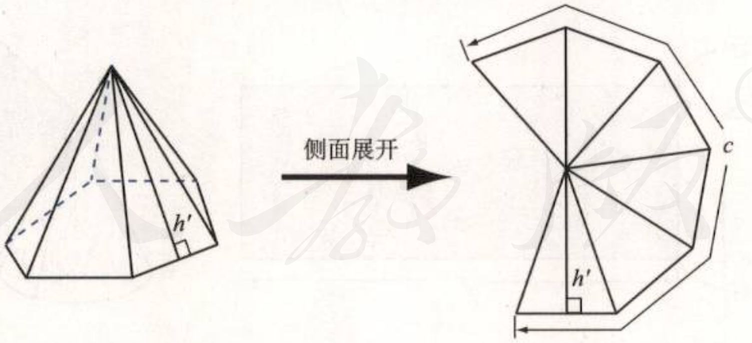


图 6－38

棱柱、棱锥的表面积分别等于它们的侧面积与底面积之和.

例 1　一个正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高 SO 和底面边长都是 4，如图 6－39 所示，求它的表面积.

解：过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E，连接 SE.

则在 Rt$\triangle SOE$ 中，

$$SE^2=SO^2+OE^2=16+4=20,$$

所以 $SE=2\sqrt{5}$. 因此

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times4\times4\times2\sqrt{5}=16\sqrt{5}.$$

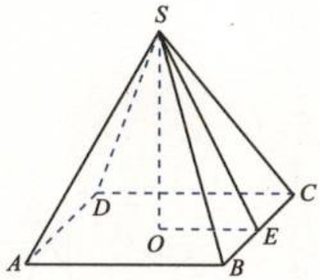


图 6－39

又因为正四棱锥的底面积是 $4\times4=16$，所以正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的表面积是

$$16\sqrt{5}+16.$$

2. 旋转体的表面积

问题　把圆柱、圆锥的侧面沿其母线剪开后展开在平面上，我们得到的图形形状如何？

在这个问题中，我们得到的图形就是圆柱、圆锥的侧面展开图，它们的形状分别是矩形、扇形.

如图 6－40 所示，圆柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于圆柱的底面周长 c，宽等于圆柱的母线长 l，因此圆柱的侧面积是

$$S_{\text{圆柱侧}}=cl=2\pi rl.$$

如图 6－41 所示，圆锥的侧面展开图是扇形，这个扇形的弧长等于圆锥的底面周长 c，半径等于圆锥的母线长 l，因此圆锥的侧面积是

$$S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.$$

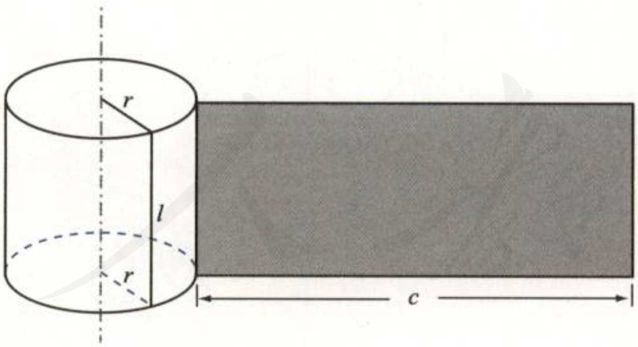


图 6－40

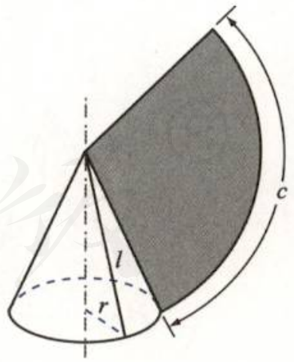


图 6－41

圆柱、圆锥的表面积分别等于它们的侧面积与底面积之和.

例 2　已知圆锥的底面半径为 2，母线长为 4. 求：

(1) 该圆锥的表面积；

(2) 该圆锥侧面展开图的圆心角.

解：(1) 该圆锥的表面积是侧面积与它的底面积之和，因此

$$S=\pi\times2\times4+\pi\times2^2=12\pi.$$

(2) 设圆心角的大小为 $n°$，由弧长公式，有

$$\frac{n\pi\times4}{180}=2\pi\times2,$$

解得 $n=180$.

因此圆锥的侧面展开图的圆心角大小为 180°.

柱和锥的表面都可展开成平面图形，这样就可以根据平面图形的性质，求出它们的表面积. 但球面不能展开成平面图形，需要用其他方法才能求出它的表面积，这里我们直接给出由球的半径 R 计算球表面积 S 的公式

$$S=4\pi R^2.$$

例 3 如图 6-42，已知球心到球的一个小圆圆心的距离为球半径的一半，且小圆的半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求球的表面积.

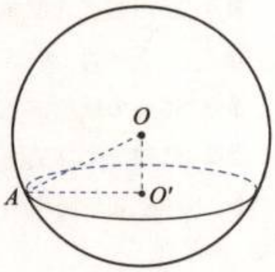


图 6-42

解：设球半径为 R，由题意可知

$$O'O=\frac{1}{2}R,\ O'A=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'A$ 中，

$$R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{1}{4}R^2,$$

解得 $R=\frac{4}{3}$，因此

$$S=4\pi R^2=\frac{64\pi}{9}.$$

例 4 如图 6-43 所示，李明设计的垃圾桶是由直径为 0.4 m 的半球与底面直径为 0.4 m 且高为 1 m 的圆柱组合成的几何体，求垃圾桶的表面积.

解：垃圾桶顶部半球面的面积是

$$\frac{1}{2}\times4\pi\times0.2^2=0.08\pi\ \mathrm{m}^2,$$

垃圾桶下部圆柱的侧面积是

$$2\pi\times0.2=0.4\pi\ \mathrm{m}^2,$$

垃圾桶的底面积是

$$0.2^2\times\pi=0.04\pi\ \mathrm{m}^2,$$

所以垃圾桶的表面积是

$$0.08\pi+0.4\pi+0.04\pi=0.52\pi\ \mathrm{m}^2.$$

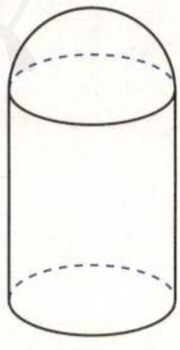


图 6-43

练习 6.3.1

1. 以一张长、宽分别为 8 cm，4 cm 的矩形硬纸板为侧面，将它折成正四棱柱的侧面，求此四棱柱体对角线的长.

2. 已知一个正三棱锥的侧面都是等边三角形，侧棱长为 4，求它的侧面积和表面积.

3. 设计一个正四棱锥型冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底面的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板（保留两位有效数字）?

4. 已知一个底面是菱形的直棱柱的侧棱长为 5，菱形的对角线的长分别是 9 和 15，求该直棱柱的侧面积.

5. 已知圆柱的底面半径为 3，母线长为 6，求该圆柱的表面积.

6. 已知圆锥的侧面展开图的半径为 4，圆心角大小是 120°，求该圆锥的表面积.

7. 一个高为 2 的圆柱，底面周长为 2π，求该圆柱的表面积.

8. 将一个球形的气球半径扩大到原来的 2 倍，它的表面积增大到原来的几倍?

9. 已知一个球的大圆周长为 8π cm，求这个球的表面积.

*10. 已知表面积为 324π 的球，其内接正四棱柱的高是 14，求这个正四棱柱的表面积.

*11. 某宾馆大堂有 6 根圆柱支撑着屋顶，它们的高为 10 米，圆柱周长都是 25.12 分米，要全部涂上油漆，如果按每平方米的油漆费为 80 元计算，需用多少钱?

*12. 底面半径是 2，母线长为 4 的圆锥中内接有一个高为 $\sqrt{3}$ 的圆柱，求该圆柱的表面积.

6.3.2 空间几何体的体积

问题　两个底面积相等、高也相等的柱体，它们的体积是否相等?

对于这个问题，我们先来做两个小实验：

取一摞书堆放在桌面上，组成一个长方体，然后改变一下形状，如图 6 - 44 所示；

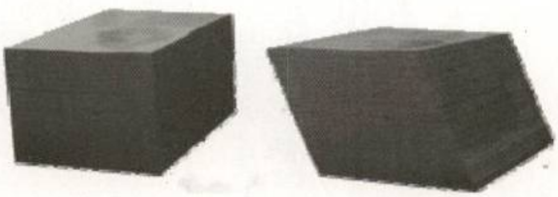


图 6 - 44

取一摞光盘，组成一个圆柱，然后改变一下形状. 如图 6 - 45 所示.

图 6 - 45

显然，上述书和光盘组成的几何体形状改变后，几何体的体积都没有发生改变.

我国南北朝时期著名的数学家祖冲之和他的儿子祖暅，总结出了如下的祖暅原理：**夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.**

根据祖暅原理，可以得到柱体（棱柱、圆柱）的体积计算公式

$$V_{柱体}=Sh,$$

其中，S 是柱体（棱柱、圆柱）的底面积，h 是高.

例 5　已知圆柱的高为 4，底面半径为 2，求该圆柱的体积.

解：该圆柱的底面积为

$$S=\pi\times 2^2=4\pi.$$

由柱体的体积公式可知圆柱的体积为

$$V=4\pi\times 4=16\pi.$$

类似于柱体，底面积相等、高也相等的两个锥体，它们的体积也相等. 以三棱锥为例，如图 6 - 46 所示，可以把三棱柱分成三个体积相等的三棱锥.

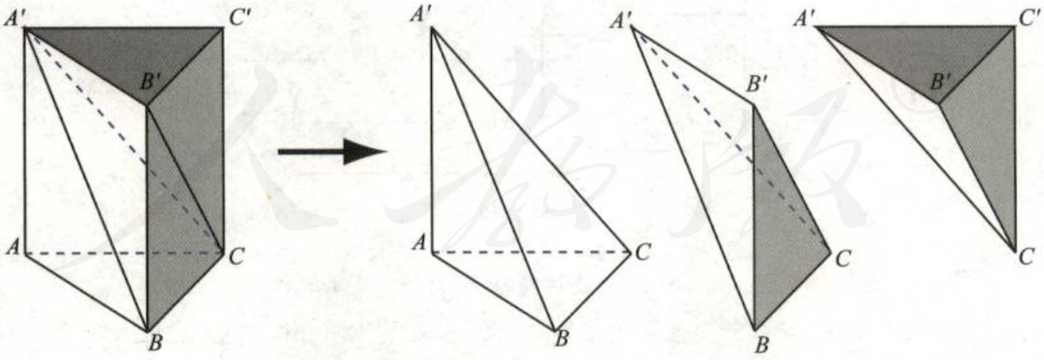


图 6 - 46

一般地，由底面积为 S、高为 h 的棱柱的体积计算公式 $V_{柱体}=Sh$，可得底面积为 S、高为 h 的棱锥的体积计算公式

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$

例 6 已知正四棱锥 S-$ABCD$ 的棱长都是 2，求该棱锥的体积.

解：如图 6-47 所示，设 AC，BD 交于点 O，连接 SO，则 SO 即是棱锥的高.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SOB$ 中，

$$OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2},$$

所以

$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2},$$

则

$$V=\frac{1}{3}\times(2\times2)\times\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

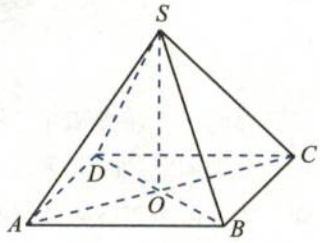


图 6-47

即该棱锥的体积是$\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

运用祖暅原理我们还能得出这样一个结论：一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，挖去一个以上底面为底面、下底面圆心为顶点的圆锥后，所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等，如图 6-48 所示. 由此可得

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

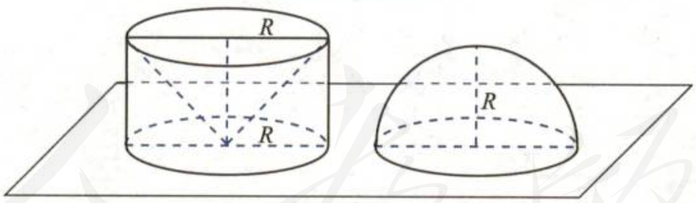


图 6-48

例 7 要用体积为 743 cm^3 的铁块铸造成若干个如图 6-49 所示的六角螺帽. 已知六角螺帽的底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm. 那么约可以铸造出多少个这样的六角螺帽（不计损耗）？

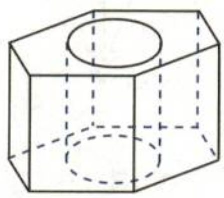


图 6-49

分析：六角螺帽的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积之差.

解：因为

$$V_{\text{正六棱柱}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10\approx 3\ 741\ \text{mm}^3,$$

$$V_{\text{圆柱}}=\pi\times 5^2\times 10\approx 785\ \text{mm}^3,$$

所以一个六角螺帽的体积为

$$V=3\ 741-785=2\ 956\ \text{mm}^3=2.956\ \text{cm}^3.$$

因此约可以铸造六角螺帽

$$743\div 2.956\approx 251\ \text{个}.$$

做一做

先求出六角螺帽的底面面积，再用公式 $V=Sh$ 求出其体积.

例 8 如图 6－50 所示，在长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，用截面截出一个棱锥 C-$A'DD'$，求棱锥 C-$A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比.

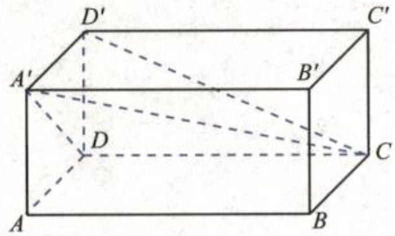


图 6－50

解：将长方体看成四棱柱 $ADD'A'$-$BCC'B'$，设它的底面 $ADD'A'$ 的面积为 S，高为 h，则它的体积为

$$V=Sh.$$

棱锥 C-$A'DD'$ 的底面积为 $\frac{1}{2}S$，高为 h，因此棱锥 C-$A'DD'$ 的体积

$$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}V.$$

因此剩余部分的体积是

$$V-V_1=\frac{5}{6}V,$$

所以棱锥 C-$A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比为 1∶5.

想一想

三棱锥 C-$A'DD'$ 的体积是三棱柱 $B'CC'$-$A'DD'$ 的体积的几分之几？三棱柱 $B'CC'$-$A'DD'$ 的体积是长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的体积的几分之几？

说明：棱柱的体积等于底面积与高的乘积，而长方体的各个面均可以作为底面，因此可以灵活“选底”.

例 9 图 6－51 中所示的圆及其外切正方形绕图中由虚线表示的对称轴旋转一周生成的几何体称为圆柱容球. 求证：在圆柱容球中，球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$，球的表面积是圆柱全面积的 $\frac{2}{3}$.

解：设圆的半径为 R，球的体积与圆柱的体积分别为 $V_{\text{球}}$ 及 $V_{\text{柱}}$，球的表面积与圆柱的全面积分别为 $S_{\text{球}}$ 及 $S_{\text{柱}}$，则有

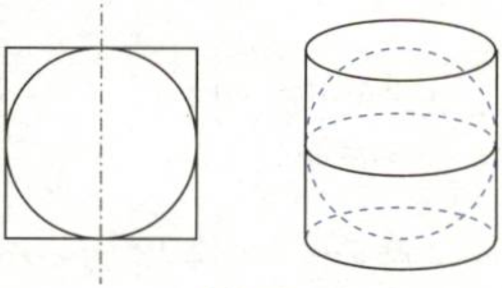


图 6－51

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V_{柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3,$$

所以 $V_{球}=\frac{2}{3}V_{柱}$.

又因为

$$\begin{aligned}S_{柱}&=侧面积+上下底面积\\&=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2.\end{aligned}$$

所以 $S_{球}=4\pi R^2=\frac{2}{3}S_{柱}$.

练习 6.3.2

1. 已知长方体形的铁块长、宽、高分别是 2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铁块（不计损耗），求铸成的铁块的棱长.

2. 已知正六棱柱底面边长为 4 cm，高为 6 cm，求这个正六棱柱的体积.

3. 已知圆柱的底面半径为 3 cm，母线长为 4 cm，求这个圆柱的体积.

4. 已知正三棱锥的底面边长为 2，侧面均为直角三角形，求此三棱锥的体积.

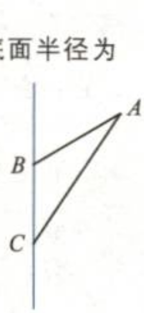
5. 已知圆锥的高为 6 cm，母线长为 10 cm，求这个圆锥的体积.

6. 已知一个球的体积与其表面积的数值恰好相等，求该球的直径.

*7. 已知圆锥的底面半径为 2 cm，高为 4 cm，它的一个内接圆柱的底面半径为 1 cm，求这个内接圆柱的体积.

*8. 已知圆锥的表面积为 7π，它的侧面展开图为圆心角为 60°的扇形，求圆锥的体积.

*9. 在△ABC 中，$AB=2$，$BC=\frac{3}{2}$，$\angle ABC=120°$. 如图所示，若将△ABC 绕直线 BC 旋转一周，求形成的旋转体的体积.



（第 9 题）

*10. 若球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，求该球的内接正方体的体积.

*11. 养路处建造圆锥形仓库用于贮存物品，已建仓库的底面直径为 12 m，高为 4 m，养路处拟建一个更大的圆锥形仓库，现有两种方案，一是新建的仓库的底面直径比原来大 4 m（高不变），二是高度增加 4 m（底面直径不变）.

(1) 分别计算两种方案所建的仓库的体积；

(2) 分别计算两种方案所建的仓库的侧面积.

习题六

1. 填空：

(1) 已知圆柱底面半径为 2，轴截面对角线为 5，则这个圆柱的母线长是________；

(2) 若一个圆锥的轴截面顶角为 60°，母线长为 4 cm，则这个圆锥的底面半径为________，表面积是________；

(3) 已知四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面为正方形，侧面均是边长为 2 的正三角形，则其表面积为________；

(4) 设球的半径为 2，则球的体积是________；

(5) 长为 4，宽为 3 的矩形绕其一边所在直线旋转一周所得圆柱的侧面积和体积分别是________.

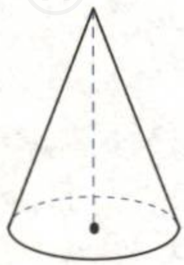
2. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，求这个圆锥的体积.

3. 若圆心角为 120°，面积为 3π 的扇形恰好是一个圆锥的侧面，求圆锥的表面积.

4. 已知一个平面截一个球得到直径是 6 cm 的圆面，球心到这个平面的距离是 4 cm，求该球的表面积和体积.

5. 画出底面边长为 2 cm，高为 5 cm 的正三棱锥的直观图.

6. 画出底面半径为 1.8 cm，高为 4 cm 的圆锥的三视图.



（第 6 题）

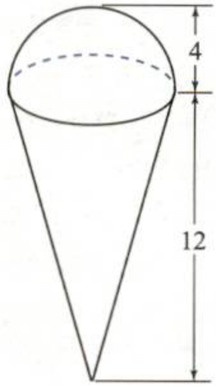
*7. 已知一个圆柱和一个圆锥的母线相等，底面半径也相等，求它们的侧面积之比.

*8. 边长为 2 的正方形，绕其一对角线旋转一周所得几何体的表面积和体积分别是多少？

*9. 已知一个四棱锥形的冷水塔塔顶，四棱锥的底面是正方形，侧面是全等的等腰三角形，且棱锥底面边长为 2 m，高为 7 m，制造这个塔顶（不含底面）需要多少铁板？

*10. 如图所示，一个圆锥形的空杯子上面放着一个半球形的冰淇淋，如果冰淇

淋融化了，会溢出杯子吗？请通过计算说明理由.



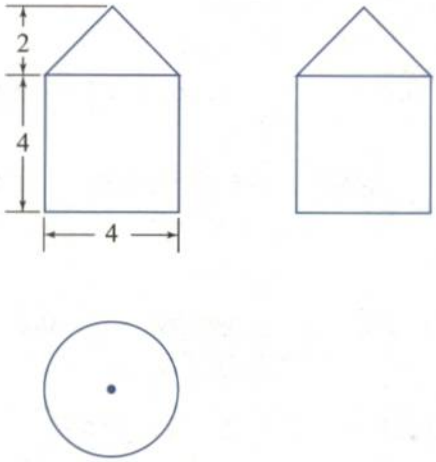
（第 10 题）

11. 已知一个正方体内接于半径为 R 的球内，求正方体的体积.

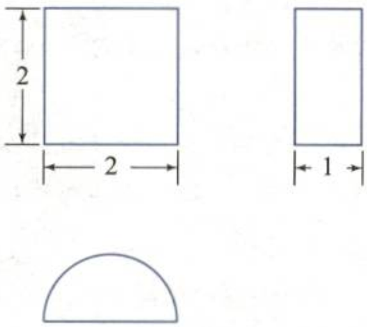
12. 已知圆柱形容器底面半径为 5 cm，两直径为 5 cm 的玻璃球都浸没在容器的水中，若取出这两个小球，则容器内的水面将下降多少厘米？

13. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，求该几何体的体积.

14. 一个几何体的三视图如图所示，求该几何体的表面积和体积.



（第 13 题）



（第 14 题）

阅读与实践

用祖暅原理证明球的体积公式

祖暅，字景烁，祖冲之之子，原籍范阳郡道县（今河北涞水）. 祖暅在数学上有突出贡献，他在实践的基础上，同他的父亲一起提出了体积计算的原理——祖暅原理：“幂势既同，则积不容异.” 这里的“势”即是高，“幂”是面积. 意思是，如果两等高的几何体在同高处截得的两几何体截面积恒等，那么这两个几何体的体积相等.

如何利用祖暅原理求球体的体积呢？

先来研究半球（半径为 R）的体积计算. 为了应用祖暅原理，我们需要找到一个几何体，使它和半球高度一样，并且用任何一个水平面去截它们时，得到的截面面积都相等.

如图 1 所示，设平行于大圆且与大圆面的距离为 l（$l<R$）的平面截半球，所得的圆面半径为 r，则

$$r=\sqrt{R^2-l^2},$$

于是截面面积

$$S_1=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi R^2-\pi l^2.$$

从这个等式可以看出，S_1是在半径为 R 的圆面上挖去一个半径为 l 的同心圆后所得圆环的面积.

为此，我们取一个底面半径和高都为 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体与半球放在同一个水平面上，如图 2 所示.

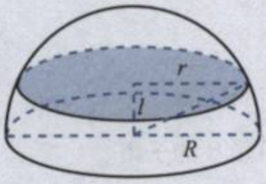


图 1

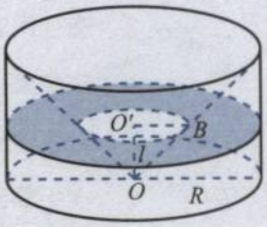


图 2

用距离水平面 l 个单位的平面去截这两个几何体，截面分别为圆面和圆环面，圆面的面积为 S_1. 在图 2 的圆柱中，圆环大圆半径为 R，小圆半径

$$O'B=OO'=l,$$

圆环面积

$$S_2=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)=S_1.$$

根据祖暅原理，这两个几何体体积相等. 即

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

由上可以看出，利用祖暅原理求一个几何体的体积，关键是找到一个和该几何体等高、等截面面积，又能够求出体积的几何体.

附录一

本书常用的数学符号

数学符号	例子	读法及含义
$\in$	$x\in A$	x 属于 A，x 是集合 A 中的一个元素
$\notin$	$y\notin A$	y 不属于 A，y 不是集合 A 中的一个元素
$\{,\cdots,\}$	$\{a, b, \cdots, n\}$	由各个元素 a，b，$\cdots$，n 组成的集合
$\{\mid\}$	$\{x\in A\mid p\}$	使命题 p 是真命题的 A 中各个元素组成的集合
$\varnothing$		空集
$\mathbf{N}$		自然数集，非负整数集
$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$		正整数集
$\mathbf{Z}$		整数集
$\mathbf{Q}$		有理数集
$\mathbf{R}$		实数集
$\subseteq$	$A\subseteq B$	A 包含于 B，A 是 B 的子集
$\nsubseteq$	$A\nsubseteq B$	A 不包含于 B，A 不是 B 的子集
$\subsetneqq$	$A\subsetneqq B$	A 真包含于 B，A 是 B 的真子集
$\cap$	$A\cap B$	A 和 B 的交集
$\cup$	$A\cup B$	A 和 B 的并集
$\complement$	$\complement_U A$	A 在 U 中的补集
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	p 推出 q，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	p 与 q 等价，p 与 q 互为充要条件
$>$	$a>b$	a 大于 b
$<$	$a<b$	a 小于 b
$\geqslant$	$a\geqslant b$	a 大于或等于 b
$\leqslant$	$a\leqslant b$	a 小于或等于 b
$+\infty$		正无穷大
$-\infty$		负无穷大
$\lvert\ \rvert$	$\lvert a\rvert$	a 的绝对值

续表

数学符号	例子	读法及含义
Δ	$\Delta=b^2-4ac$	Δ 是大写希腊字母，读作“delta”，通常表示一元二次方程的判别式
[,]	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b 的闭区间
(,)	(a, b)	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b 的开区间
[,)	$[a, b)$	$\mathbf{R}$ 中从 a（含 a 在内）到 b 的半开半闭区间
(,]	$(a, b]$	$\mathbf{R}$ 中从 a 到 b（含 b 在内）的半开半闭区间
f	$f(x)$	对应关系 f 是集合 A 上的一个函数，即 $f(x)$，$x\in A$
Δx	$\Delta x=x_2-x_1$	表示自变量 x 的增量
Δy	$\Delta y=y_2-y_1$	表示函数值 y 的增量
$y_{\max}$		表示函数的最大值
$y_{\min}$		表示函数的最小值
log	$\log_a N$	以 a 为底 N 的对数
lg	$\lg N$	常用对数，底数为 10 的对数，即 $\log_{10} N$
ln	$\ln N$	自然对数，以 $\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$为底的对数，即 $\log_{\mathrm{e}} N$
$\{a_n\}$		整个数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$
a_n		数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项，其中 $n\in\mathbf{N}_+$
S_n		数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

附录二

几何画板简介

几何画板是研究数学的软件之一，能动态地展现几何对象的位置关系、运动变化规律. 它功能强大，操作简单，占用系统资源少，便于交流，是研究和学习数学的得力工具. 下面以几何画板 5.06 版本为例进行介绍.

一、几何画板的窗口

几何画板的窗口包括菜单栏、工具箱、工作区、状态栏及文本工具栏五部分，如图 1 所示.

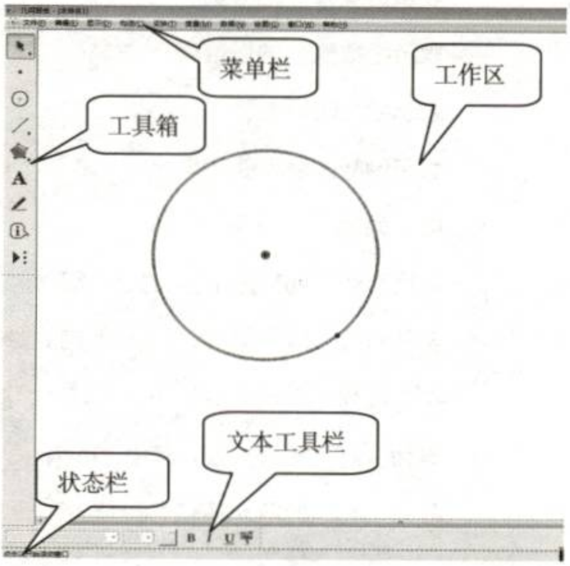


图 1

二、几何画板工具箱

(一) 工具箱的分类

画板的左侧是画板工具箱，其中的工具分为三类：

第一类是单一工具，包括【点工具】、【圆工具】、【文本工具】、【标记工具】、【信息工具】；

第二类是复合工具，复合工具含有子工具，包括【移动箭头工具】、【线段直尺工具】、【多边形工具】；

第三类是自定义工具，即【自定义工具】.

（二）工具的基本功能

工具的基本功能如下表所示.

工具	名称	功能
	【移动箭头工具】	包括移动、旋转和缩放箭头三个工具
	【点工具】	可以在工作区任意空白地方或“路径”上绘点
	【圆工具】	绘制圆
	【线段直尺工具】	包括绘制线段、射线和直线的三个工具
	【多边形工具】	可以绘制无边框多边形内部、有边框多边形内部和一般多边形
	【文本工具】	可以输入文本、加标注或给对象加标签
	【标记工具】	给绘制对象加标注或者直接在工作区写画
	【信息工具】	用来查看对象的属性和关系
	【自定义工具】	创建和使用自定义工具

（三）绘图基础工具的用法

要使用某个单一工具，只要用鼠标单击该工具的按钮即可. 如果使用某个复合工具，用鼠标按住该工具约一秒，然后选择相应的子工具即可，如【线段直尺工具】，展开后有三个工具，如图 2 所示，分别是“线段”“射线”和“直线”工具，可分别绘制出线段、射线和直线.

下面分别介绍绘图基础工具的用法.

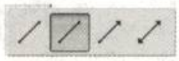


图 2

1. 【点工具】

（1）绘制自由点

单击【点工具】，然后将光标移动到工作区中单击鼠标，就会出现一个点.

（2）绘制交点

单击【点工具】，然后将光标移动到两个对象相交处，当两个对象同时加重显示时（状态栏显示的是“对象的交点”），单击鼠标，就会出现交点. 如图 3 所示.

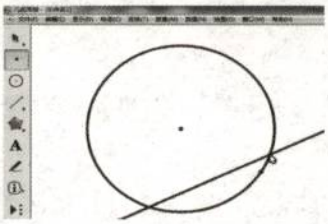


图 3

交点也可以通过【移动箭头工具】构造. 单击【移动箭头工具】，然后将光标移动到两对象的相交处（光标由↖变成←，状态栏显示的是“点击构造交点”）单击一下，就会出现交点，如图 4 所示. 如果没有指向两个对象的相交处，单击则是选定一个对象.

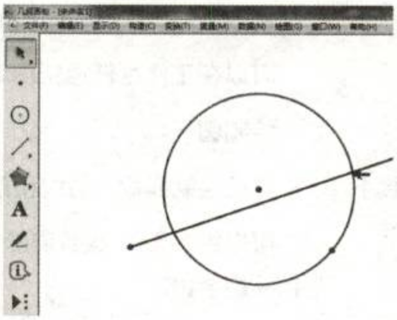


图 4

2.【圆工具】

单击【圆工具】，然后拖动鼠标，将光标移动到工作区单击鼠标确定圆心，然后按住鼠标拖动到另一位置（起点和终点间的距离就是半径）松开鼠标，就会出现一个圆.

3.【线段直尺工具】

单击【线段直尺工具】，选择“线段”子工具，如图 5 所示，然后将光标移动到工作区按住鼠标左键，拖动鼠标到另一位置松开，就会出现一条线段. 画射线与直线的方法与此类似.

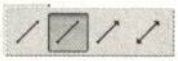


图 5

4.【多边形工具】

单击【多边形工具】，选择“多边形”子工具，如图 6 所示，然后将光标移动到工作区，点击鼠标 n 次，最后的一个点双击，绘制出 n 边形. 画无边框多边形内部、有边框多边形内部方法与此类似.

图 6

三、对象的操作

在进行所有选择（或不选择）之前，需要先单击【移动箭头工具】按钮，使鼠标处于选择箭头状态.

1. 选择

(1) 选择一个对象

用画板工具箱中的【移动箭头工具】，对准选择对象，单击鼠标.

(2) 选择多个对象

方法 1　用画板工具箱中的【移动箭头工具】依次单击所要选择的对象.

方法 2　用拖框的方式，把鼠标指针移到所要选择对象的左上方，向右下方拖动

指针，直到拖出的矩形框覆盖所有想选择的对象，松开鼠标即可，如图 7 所示.

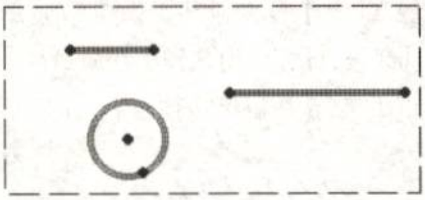


图 7

注意：当选中多个对象后，想要取消某一个，只需单击这个对象即可；如果在画板的空白处单击一下（或按“Esc”键），那么就取消了对所有对象的选择.

2. 拖动

用拖动的方法可以调整图形的大小和位置.

拖动方法是：用鼠标单击【移动箭头工具】，将鼠标移至工作区，在某个对象上按住鼠标左键并移动鼠标.

3. 删除

先选中要删除的对象，然后按键盘上的“Delete”键.

注意：对象删除时，几何画板中与该对象有关的所有对象均会被删除.

四、几何画板应用举例

（一）绘制几何图形

例 1　作$\triangle ABC$及BC边上的高AD.

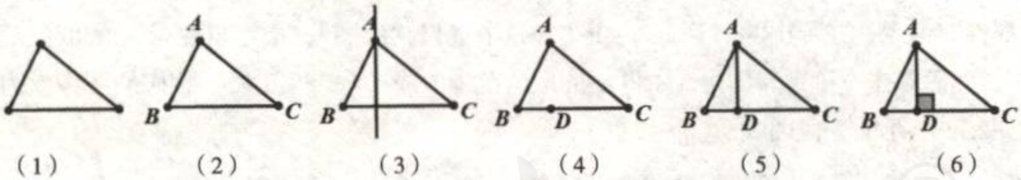


图 8

作法：

1. 绘制三角形. 利用【多边形工具】绘制三角形，如图 8（1）.

2. 添加标签 A，B，C，如图 8（2）.

方法 1　利用【文本工具】添加点的标签. 单击文本工具，光标由箭头变为空心手形，移动鼠标，当光标移到对象处，会变为实心的手形，单击鼠标，对象显示出标签.

方法 2　将光标移到对象处，点击鼠标右键，添加点的标签.

3. 作垂线. 选定点 A 和线段 BC，单击菜单命令【构造】→【垂线】得到过 A 点且垂直 BC 的直线，如图 8（3）.

4. 作交点. 单击垂线和线段 BC 的交点处，得到垂足 D，选定垂线后，单击菜单命令【显示】→【隐藏垂线（H）】隐藏垂线，如图 8（4）.

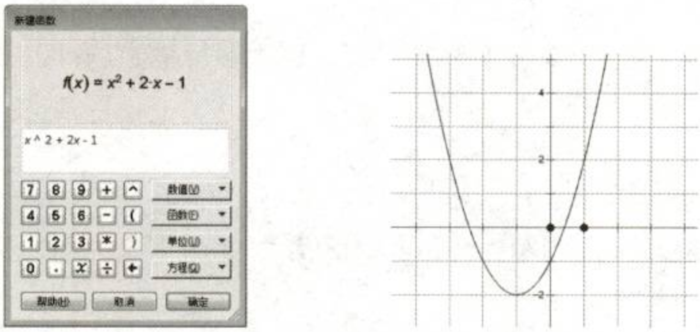
5. 作线段 AD. 利用【线段直尺工具】，作出线段 AD，如图 8（5）.

6. 做标识. 单击【标记工具】，用鼠标点住点 D 向三角形内部拖动，出现直角标识，如图 8（6）.

（二）绘制函数图像

例 2　画出函数 $y=x^2+2x-1$ 的图像.

作法：选择菜单命令【绘图】，单击“绘制新函数”，然后在弹出的对话框（如图 9（1））中直接输入函数解析式 x^2+2x-1，再按“确定”按钮，即可以画出函数图像，如图 9（2）.



（1）　　（2）

图 9

说明：利用几何画板也可以绘制给定区间的函数图像. 方法为：右击图像，选择“属性”命令，在弹出的对话框（如图 10）中选择“绘图”，指定自变量 x 的取值范围，然后单击“确定”即可. 如将 x 的取值范围改成 $-4\leqslant x\leqslant 1$ 后，相应的图像变为如图 11 所示的一段曲线.

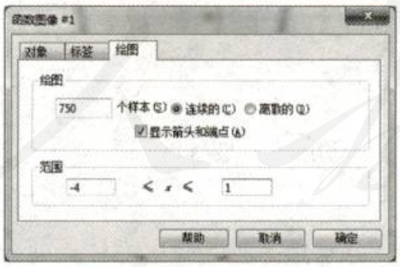


图 10

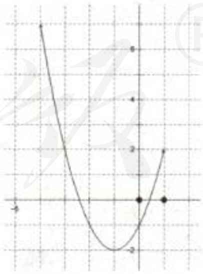


图 11

（三）对象的度量与计算

1. 度量

利用菜单栏中的【度量】命令，可以方便地测出对象的多种值，比如线段的长度、多边形的面积与周长、比、点的坐标、直线或圆的方程等等，度量菜单共有 17

个命令，分为 2 个功能区，只要满足命令激活的前提条件，菜单就被激活. 如图 12，选中圆，单击度量菜单后可以度量圆周长、面积、半径及方程.

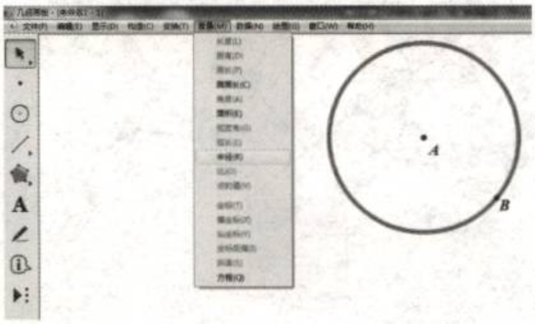
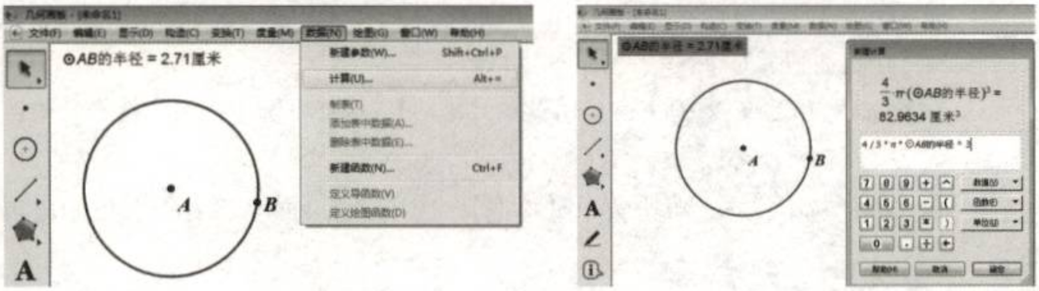


图 12

2. 计算

利用菜单栏【数据】中的计算功能，可以进行一些简单的计算. 计算器的一个重要特点是可以直接将前面度量的结果拖到计算器输入框中进行计算，如图 13.



（1）　　　　　　　　（2）

图 13

五、几何画板案例欣赏

用几何画板可以画出许多美丽的图形，如美丽的“勾股树”（图 14）. 这种美丽奇妙的树，又称毕达哥拉斯树，是由毕达哥拉斯根据勾股定理所画出来的一个可以无限重复的图形，因为重复数次后的形状好似一棵树而得名. 下面介绍利用几何画板绘制勾股树的方法.

步骤一：用旋转的方法画正方形 $ABCD$.

1. 用线段工具作出线段 AB；

2. 双击点 A，将其标记为旋转中心，然后选中线段 AB 和端点 B，选择菜单【变换】中的“旋转”命令，旋转固定角度 90°，单击“旋转”，得到线段 AD；

3. 双击点 B，将其标记为旋转中心，选中线段 AB 和端点 A，选择菜单【变换】中的“旋转”命令，旋转固定角度 −90°，单击“旋转”，得到线段 BC；

4. 用线段工具连接 DC，构造出正方形 $ABCD$.

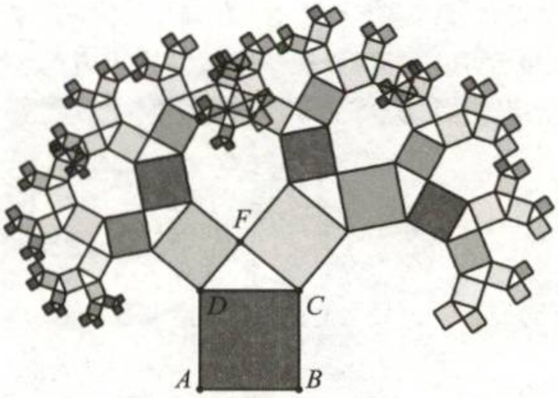


图 14

步骤二：构造 DC 的中点 E，并以点 E 为圆心，EC 为半径构造圆.

1. 选中线段 DC，选择菜单【构造】中的“中点”命令，得到线段中点 E；

2. 依次选中点 E 以及点 C，选择菜单【构造】中的“以圆心和圆周上的点绘图”命令，构造出一个圆.

步骤三：构造圆弧 CD，并在弧 CD 上取点 F.

1. 依次选中点 C、D 和圆 E，单击菜单【构造】，选择“圆上的弧”命令，构造圆弧；

2. 保持弧的选中状态，单击菜单【构造】，选择“弧上的点”命令，绘制出点 F；

3. 单击圆，选择菜单【显示】中的“隐藏圆”命令，隐藏圆，用同样的方法隐藏圆弧及点 E.

步骤四：设置颜色参数.

1. 选择点 A、B、C、D，单击菜单【构造】，选择“四边形内部”；

2. 选择点 D、F，单击菜单【度量】，选择“距离”，测出距离 FD；

3. 选择 FD 的度量值、正方形内部，单击菜单【显示】中“颜色”—“参数”，打开颜色参数对话框，采用默认设置，单击“确定”按钮.

步骤五：新建参数.

单击菜单【数据】—“新建参数”，单击“确定”，新建一个“参数按钮 $t_1=1.00$”.

步骤六：构建迭代.

1. 依次选择点 A、B、“$t_1=1.00$”按钮后，按住 Shift 键不放，单击菜单【变换】—“迭代”，打开“迭代”对话框，依次单击点 D、F 设定初象；

2. 单击“结构”按钮，单击“添加新的映射”，依次单击点 F、C 设定映象 #2，单击“迭代”按钮；

3. 改变参数 t_1 的数值，可改变迭代的次数，得到勾股树.

步骤七：构建勾股树动画按钮.

选择点 F，单击菜单【编辑】—“操作类按钮”—“动画”命令，建立点 F 的动画按钮. 单击按钮，可以对“树”进行变形.