盲校义务教育实验教科书

数学

七年级 下册

（盲文版）

盲校义务教育实验教科书

数学

七年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

主　　编：薛　彬　李海东
本册主编：薛　彬
主要编写人员：张唯一　李海东　薛　彬　张艳娇　宋莉莉
责任编辑：张唯一
美术编辑：王俊宏

盲校义务教育实验教科书　数学　七年级　下册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　址　http://www.pep.com.cn
经　销　全国新华书店
印　刷　×××印刷厂
版　次　2017年11月第1版
印　次　年　月第　次印刷
开　本　787毫米×1092毫米　1/16
印　张
字　数　千字
书　号　ISBN 978-7-107-　　-
定　价　元
价格依据文件号：京发改规［2016］13号

主编的话

同学们，欢迎大家使用这套数学教科书，它是我们根据《盲校义务教育数学课程标准（2016 年版）》编写的，希望它能成为你们学习数学的好帮手.

为什么要学习数学呢？主要的理由有两方面：

数学应用很广泛. 数学是重要的基础科学. 华罗庚说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在." 随着与计算机技术的结合，数学在我们的生活、学习、工作乃至娱乐中的作用与日俱增.

数学使人更聪明. 数学是锻炼思维的体操. 学习数学能使我们更合乎逻辑、更有条理、更精确、更深入地思考和解决问题，增强我们的想象力和创造性，有助于提高学习能力. 懂得并能运用数学，就意味着你有更多的机会和选择.

这套教科书有什么特点呢？主要有以下三个方面：

整体设计，加强联系，突出数学核心内容. 教科书围绕课程标准的核心内容整体设计，构建符合数学逻辑和学习心理的教科书体系. 循序渐进地安排核心的数学概念和重要的数学思想方法，以便同学们更好地掌握它们.

反映背景，加强应用，体现数学基本思想. 教科书精选现实生活和数学发展的典型问题为背景，让同学们感受知识的自然发展过程，感受数学的抽象思想. 通过解决具有真实背景的问题，让同学们感受数学与生活的联系，体现数学的模型思想.

体现过程，加强探究，积累数学活动经验. 教科书在内容的呈现上努力体现数学思维规律，以问题引导学习，给同学们自主探索的机会，经历数学概念的概括过程、数学结论的形成过程，从中体会数学的研究方法，积累数学活动经验.

如何使用这套教科书学好数学呢？下面提出一些想法：

勤于思考，勇于探究，善于归纳. 数学的发展源远流长，我们所学的数学基础知识，大多是从丰富的实际背景中抽象概括而成的，这是一个由表及里、逐步深入的过程. 教科书安排了"思考""探究""归纳"等栏目，引导同学们经历上述过程，通过观察、实验、猜想、推理、反思、交流等活动积累学习经验，逐步学会发现、提出、分析和解决问题.

巩固基础，注重运用，提高能力. 学数学首先要充分重视概念、公式和定理等，并且要通过解题等实践活动，深化认识和提高能力. 同学们在学习教科书“巩固运用”“复习题”“数学活动”等内容时，应加强独立思考，认真地分析问题、探寻解题思路、落实解题步骤，反思解题过程，使自己学数学、用数学的能力不断提高.

开阔视野，自主学习，立足发展. 数学通今达古、博大精深，奥妙无穷. 教科书提供了“阅读与思考”等选学内容，还提供了标有“*”的内容供学生选学. 希望同学们通过生动活泼、积极主动的学习，在更广阔的数学天地中提升学习能力和增强探究能力.

让我们开始七年级下册的学习吧！

我们首先进入“**二元一次方程组**”的学习. 通过分析实际问题情境中的相等关系，列出二元一次方程组解决问题，你会进一步感受方程是解决实际问题的重要数学工具.

在“**相交线与平行线**”中，我们将对“相交”“垂直”“平行”等有更深入的了解. 你会发现，生活中许多问题都可以用这些知识来分析与解决. 你还会进一步体会到研究几何图形及其位置关系的思路和方法.

如果描述校园的各个建筑物的位置？“**平面直角坐标系**”可以帮助你. 平面直角坐标系是一种重要的数学工具，它架起了数与形之间的桥梁. 掌握了它，你会发现许多问题的解决变得直观而简明.

在“**整式的乘除**”一章中，通过对整式的乘法运算和除法运算的讨论，你将学到许多常用的重要运算性质和公式，知道更多的数量关系，加深对“从数到式”这个由具体到抽象的过程的认识。

最后，我们将带你走进统计的世界，去经历数据处理的一般过程. 在“**数据的收集与整理**”中，你将学习收集和整理数据的常用方法. 在“**数据的描述**”中，你将学习如何用图表直观地描述数据，并初步体验合理地进行推断和预测.

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目　　录

第七章　二元一次方程组

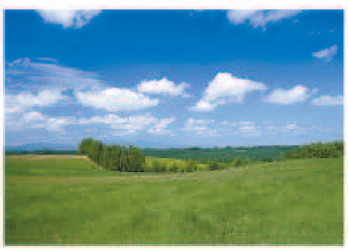
第八章　相交线与平行线

第九章　平面直角坐标系

第十章　整式的乘除

第十一章　数据的收集与整理

第十二章　数据的描述



第七章　二元一次方程组

我们看下面的问题.

篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负. 每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，这个队胜负场数分别是多少?

在上面的问题中，要求的是两个未知数. 如果用一元一次方程解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数. 现在我们考虑，能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢? 我们从这个想法出发开始本章的学习.

本章我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学会解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题. 通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识.

	胜	负	合计
场　数	x	y	10
积　分	$2x$	y	16
$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$			

7.1 二元一次方程组

思考

引言中的问题包含哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x，负的场数是 y，你能用方程把这些条件表示出来吗？

由问题知道，题中包含两个必须同时满足的条件：

胜的场数＋负的场数＝总场数，

胜场积分＋负场积分＝总积分．

这两个条件可以用方程

$$x+y=10,$$
$$2x+y=16$$

表示．

这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么不同？

上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做**二元一次方程**（linear equation in two unknowns）．

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=10 \quad ①$$

和

$$2x+y=16. \quad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16, \end{cases}$$

就组成了一个**方程组**．这个方程组中有两个未知数，含有未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做**二元一次方程组**（system of linear equations in two unknowns）．

巩固运用7.1

1. 判断下列方程哪些是二元一次方程：

$3x+4y=2$，$x+\dfrac{1}{y}=1$，$y-6=3$，$s=60t$，$x+2y+3z=4$.

2. 判断下列方程组哪些是二元一次方程组：

$\begin{cases}x+\dfrac{2}{y}=1,\\2x+y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=4,\\x-2z=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=6,\\x-2y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}3x+2y=6,\\s-t=3.\end{cases}$

3. 已知三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$.

(1) 列出关于 x，y 的二元一次方程；

(2) 当 y 比 x 大 36 时，列出关于 x，y 的二元一次方程组.

探究

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中.

x											
y											

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

由上表可知，$x=0$，$y=10$；$x=1$，$y=9$；…；$x=10$，$y=0$ 使方程 $x+y=10$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=10$ 的解. 如果不考虑方程 $x+y=10$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=11$；$x=0.5$，$y=9.5$……也都是这个方程的解.

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程的解**.

我们还发现，$x=6$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②. 也就是说，$x=6$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解. 我们把 $x=6$，$y=4$ 叫做二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$$

的解. 这个解通常记作

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

联系前面的问题可知，这个队在 10 场比赛中胜 6 场、负 4 场.

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做**二元一次方程组的解**.

巩固运用7.2

1. 填表，使表中每对 x，y 的值都是方程 $3x+y=5$ 的解.

x	-2	0	0.4			
y				-1	0	3

2. 二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 3x+4y=2 \end{cases}$$

的解是（　　）.

(A) $\begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x=1, \\ y=-2 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1 \end{cases}$

3. 加工某种产品需经两道工序，第一道工序每人每天可完成 900 件，第二道工序每人每天可完成 1 200 件. 现有 7 位工人参加这两道工序，应怎样安排人力，才能使每天第一、第二道工序所完成的件数相等？

*4. 把一根长 7 m 的钢管截成长度分别为 2 m 和 1 m 两种规格的钢管，怎样截不造成浪费？你有几种不同的截法？

7.2 消元——解二元一次方程组

7.2.1 代入消元法

在 7.1 节中我们已经看到，直接设两个未知数“胜 x 场、负 y 场”，可以列方程组

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16 \end{cases}$$

表示本章引言中问题的数量关系．下面我们来讨论如何解这个方程组．

思考

遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题．能把这个二元一次方程组转化为我们学过的一元一次方程吗？

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=10$ 可以写为 $y=10-x$．由于两个方程中的 y 都表示负的场数，因此我们把第二个方程 $2x+y=16$ 中的 y 换为 $10-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(10-x)=16$．解这个一元一次方程，得 $x=6$．把 $x=6$ 代入 $y=10-x$，得 $y=4$．从而得到这个方程组的解．

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程．我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数．这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做**消元**思想．

上面的解法是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数，用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解．这种方法叫做**代入消元法**，简称**代入法**（substitution method）．

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases} x-y=3, & ① \\ 3x-8y=14. & ② \end{cases}$$

分析： 方程①中 x 的系数是 1，用含 y 的式子表示 x，比较简便.

解： 由①，得

$$x=y+3. \quad ③$$

把③代入②，得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，得

$$x=2.$$

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

把③代入①可以吗？试试看.

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

巩固运用7.3

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $2x-y=3$；　　(2) $3x+y-1=0$；

(3) $\frac{3}{2}x+y=1$；　　(4) $y-x+3=0$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x+4y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} s-t=5, \\ 5s+2t=11; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} m+n=4, \\ 3m+4n=1. \end{cases}$

例 2 用代入法解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-3, & ① \\ -3x+4y=2. & ② \end{cases}$$

分析： 方程组中 x，y 的系数都不为 1 或 -1，我们用含 x 的式子表示 y，

使用代入法解这个二元一次方程组.

解： 由①，得

$$y=\frac{2}{3}x+1. \quad ③$$

把③代入②，得

$$-3x+4\left(\frac{2}{3}x+1\right)=2.$$

解这个方程，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入③，得

$$y=5.$$

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\y=5.\end{cases}$$

巩固运用7.4

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}y=2$；

(2) $5x-3y=x+2y$；

(3) $2(3y-3)=6x+4$；

(4) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{3}{4}$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x=5y,\\2x-3y=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2p+3q=12,\\3p-4q=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{m}{5}-\frac{n}{2}=2,\\2m+3n=4;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=2,\\\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y=3.\end{cases}$

7.2.2 加减消元法

思考

前面我们用代入法求出了方程组

$$\begin{cases} x+y=10, & ① \\ 2x+y=16 & ② \end{cases}$$

的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系？利用这种关系你能发现新的消元方法吗？

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②—①可消去未知数 y，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

②—①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

①—②也能消去未知数 y，求得 x 吗？

思考

联系上面的解法，想一想怎样解方程组

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ 2x-2y=3. \end{cases}$$

从上面两个方程组的解法可以看出，当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数相反或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**(addition-subtraction method).

例 3　用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+10y=2.8, & ①\\ 15x-10y=8. & ②\end{cases}$$

分析：方程组中两个方程的未知数 y 的系数分别为 10 和 -10，它们互为相反数，把两方程相加可以消去 y.

解：①+②，得

$$3x+15x=10.8.$$

解这个方程，得

$$x=0.6$$

把 $x=0.6$ 代入①，得

$$3\times0.6+10y=2.8,$$

$$10y=1,$$

$$y=0.1.$$

把 $x=0.6$ 代入②，可以解得 y 吗？

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=0.6,\\ y=0.1.\end{cases}$$

巩固运用7.5

用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y=7,\\ 6x-2y=11;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+y=3,\\ 3x+y=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+2y=9,\\ -x+2y=-1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}-4x+2y=1,\\ 4x+y=2.\end{cases}$

例 4　用加减法解方程组

$$\begin{cases}9x+2y=15, & ①\\ 3x+4y=15. & ②\end{cases}$$

分析：方程组中两个方程的同一个未知数的系数没有相反或相等的，直接加减这两个方程不能消元. 我们可以利用等式的性质，在方程两边同乘一个不等于 0 的数，使得这两个方程中某个未知数的系数相反或相等.

解：①×2，得

$$18x+4y=30. \quad ③$$

③—②，得

$$15x=15,$$
$$x=1.$$

把 $x=1$ 代入①，得

$$9\times1+2y=15,$$
$$y=3.$$

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$$

巩固运用7.6

用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x+2y=25,\\3x+4y=15;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-5y=-3,\\-4x+y=-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+2z=9,\\3x-z=-1;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3p+2q=5,\\5p+6q=11.\end{cases}$

例 5　用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=16, & ①\\5x-6y=33. & ②\end{cases}$$

分析：为了使方程组中两个方程的未知数 y 的系数相反，可以在方程①的两边都乘 3，在方程②的两边都乘 2.

解：①×3，得

$$9x+12y=48. \quad ③$$

②×2，得

$$10x-12y=66. \quad ④$$

③+④，得

$$19x=114,$$
$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入 ①，得

$$3\times6+4y=16,$$
$$4y=-2,$$
$$y=-\frac{1}{2}.$$

所以，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

如果用加减法消去 x 应如何解？解得的结果一样吗？

代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同．我们应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法．

思考

你怎样解下面的方程组？

(1) $\begin{cases}2x+y=1.5,\\ 0.8x+0.6y=1.3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+2y=3,\\ 3x-2y=5.\end{cases}$

巩固运用7.7

1．用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-5y=1,\\ 2x+6y=10;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}7x+5y=24,\\ 3x-7y=-8;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-7y=1,\\ 5x-4y=17;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}4x+3y=18,\\ 6x-5y=8.\end{cases}$

2．解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x-y=\dfrac{9}{2},\\ 2x+6y=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+2y=9,\\ 3x-2y=-1.\end{cases}$

7.3 实际问题与二元一次方程组

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题. 同学们可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，然后再互相交流.

例 1 有 A 和 B 两种品牌的 5 号电池，价格分别为 2 元/节和 1.5 元/节，李华买了两种电池共 10 节，花了 17 元. 李华两种电池各买了多少节?

分析： 问题中有两个未知数——A 品牌电池的节数和 B 品牌电池的节数. 根据题意，可以得到下面两个相等关系：

A 品牌电池的节数+B 品牌电池的节数=总电池节数；

A 品牌电池的总价+B 品牌电池的总价=全部电池的总价.

解： 设买了 x 节 A 品牌电池、y 节 B 品牌电池. 根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=10,\\2x+1.5y=17.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=4,\\y=6.\end{cases}$$

答： 李华买了 4 节 A 品牌电池、6 节 B 品牌电池.

例 2 我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问鸡兔各几何.”

分析：“鸡兔同笼”问题是我国古代著名数学问题. 我们既可以用算术方法，也可以用一元一次方程解决这个问题. 现在我们用二元一次方程组解决这个问题. 根据题意，可得下面两个相等关系：

鸡的只数+兔子的只数=总只数，

鸡腿数+兔子腿数=总腿数.

解： 设有 x 只鸡、y 只兔子. 根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$$

答：笼子中有 23 只鸡、12 只兔子.

巩固运用7.8

1. 学生到部队进行军训，第一天行军 4 h，第二天行军 5 h，两天共行军 58 km，且第一天比第二天少走 2 km. 学生第一天和第二天行军的平均速度分别是多少？
2. 一条船顺流航行的速度为 20 km/h，逆流航行的速度为 16 km/h. 求轮船在静水中的速度与水的流速.
3. 某班去看演出，甲种票每张 24 元，乙种票每张 18 元. 如果 35 名学生购票恰好用去 750 元，甲、乙两种票各买了多少张？
4. 足球比赛规定：胜 1 场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 某队在 30 场比赛中，负了 9 场，结果总得分为 59 分. 这支球队胜了多少场？平了多少场？

例 3 根据市场调查，某种消毒液的大瓶装（500 g）和小瓶装（250 g）两种产品的销售数量（按瓶计算）之比为 2∶5. 某厂每天生产这种消毒液 22.5 t，这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶？

分析：问题中包含两个条件：

大瓶数∶小瓶数＝2∶5，

大瓶所装消毒液的质量＋小瓶所装消毒液的质量＝消毒液的总质量.

解：设这些消毒液应该分装 x 大瓶、y 小瓶. 根据大、小瓶数的比，以及消毒液分装质量与生产的总质量的数量关系，得

$$\begin{cases}5x=2y,\\500x+250y=22\ 500\ 000.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=20\ 000, \\ y=50\ 000. \end{cases}$$

答： 这些消毒液应该分装 20 000 大瓶和 50 000 小瓶.

巩固运用7.9

1. 一种商品有大盒和小盒两种包装，3 大盒、4 小盒共装 108 瓶，2 大盒、3 小盒共装 76 瓶. 大盒与小盒每盒各装多少瓶？
2. 小方、小程两人相距 6 km，两人同时出发相向而行，1 h 相遇；两人同时出发同向而行，小方 3 h 可追上小程. 两人的平均速度各是多少？
3. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制盒身 25 个或制盒底 40 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒. 现有 36 张白铁皮，用多少张制盒身，多少张制盒底可以使盒身与盒底正好配套？

例 4 从甲地到乙地有一段上坡与一段平路，某人从甲地骑车去乙地办事，办完事原路返回. 如果他保持上坡的速度为 15 km/h，平路的速度为 20 km/h，下坡的速度为 24 km/h，那么他从甲地骑到乙地需 48 min，从乙地骑到甲地需 39 min. 甲地到乙地全程是多少千米？

分析： 从甲地到乙地有一段上坡和一段平路，那么从乙地到甲地就有一段平路和一段下坡. 根据此人骑车往返两地所用时间可以得到两个相等关系.

解： 设甲地到乙地上坡路为 x km、平路为 y km，那么乙地到甲地下坡路为 x km、平路为 y km. 根据题意，得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{20}=\dfrac{48}{60}, \\ \dfrac{x}{24}+\dfrac{y}{20}=\dfrac{39}{60}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=6, \\ y=8. \end{cases}$$

$$x+y=6+8=14\ \text{(km)}.$$

答： 甲地到乙地全程是 14 km.

巩固运用7.10

1. 养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg. 一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 每头大牛和小牛 1 天各约用饲料多少千克？
2. 打折前，买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品用了 1 080 元，买 50 件 A 商品和 10 件 B 商品用了 840 元. 打折后，买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品用了 9 600 元，比不打折少花多少钱？

*3. 某家商店的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入 518 元. 这个记录是否有误？如果有误，请说明理由.

阅读与思考

三元一次方程组

前面我们学习了二元一次方程组及其解法——消元法. 有些有两个未知数的问题，可以列出二元一次方程组来解决. 实际上，有不少问题含有更多未知数. 我们看下面的问题：

足球比赛规定：胜 1 场得 3 分，平 1 场得 1 分，负 1 场得 0 分. 某队在 30 场比赛中，胜场比负场多 7 场，结果总得分为 52 分. 这支球队胜了多少场？平了多少场？负了多少场？

自然的想法是设胜、平、负场数分别为 x，y，z，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=30,$$
$$x=z+7,$$
$$3x+y=52.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases}x+y+z=30,\\x=z+7,\\3x+y=52.\end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做三元一次方程组.

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解. 那么，能不能用同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases}x+y+z=30, & ①\\x=z+7, & ②\\3x+y=52. & ③\end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，我们可以把②分别代入①③，得到两个只含 y，z 的方程：

$$z+7+y+z=30,$$
$$3z+21+y=52.$$

它们组成方程组

$$\begin{cases}y+2z=23,\\y+3z=31.\end{cases}$$

得到二元一次方程组之后，就不难求出 y 和 z，进而可求出 x. 试一试，求出 x，y，z 的值.

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{二元一次方程组}}\xrightarrow{\text{消元}}\boxed{\text{一元一次方程组}}$$

利用这种方法，请你解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases}y=2x-7,\\5x+3y+2z=2,\\3x-4z=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+4z=7,\\2x+3y+z=9,\\5x-9y+7z=8.\end{cases}$

数学活动

吸烟有害健康，二手烟暴露同样有害健康. 2014 年，中国疾病预防控制中心对全国初中生的烟草使用、二手烟暴露等情况进行了调查. 调查报告《2014 中国青少年烟草调查》显示：一周内，72.9% 的初中生在家、室内公共场所、室外公共场所或公共交通工具中暴露于二手烟；其中初中男生在这四类场所暴露于二手烟的百分比比初中女生高 5.8%. （注：根据这项调查采用的数据，全国约有初中男生 2 497 万人，初中女生 2 222 万人.）

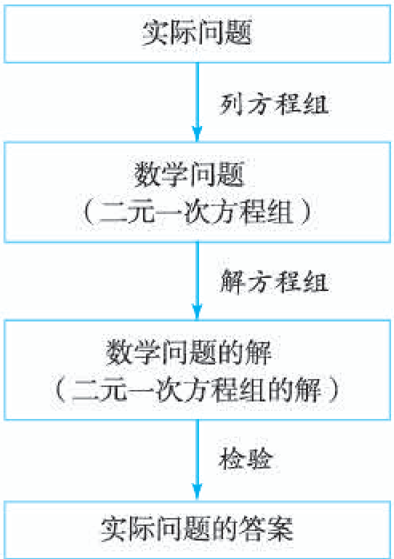
你能利用这些数据，用二元一次方程组解决下列问题吗?

一周内，在家、室内公共场所、室外公共场所或公共交通工具中暴露于二手烟的初中男生和初中女生各有多少万人?

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题，看看能不能用二元一次方程组解决这些问题.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），并学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法. 举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组.

2. 消元是解二元一次方程组的基本方法. 通过消元，我们把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想.“代入”与“加减”的目的是什么？

3. 二元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用. 用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种相等关系，引进适当的未知量，列出相应的方程组. 你能说说用方程组解决实际问题的基本思路吗？

复习题 7

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 5x-2y=8, \\ 9y-2x=5. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3f+g=-3, \\ 3g-4f=17; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 5x-3y=-1, \\ 4x+5y=14. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2.4x-5.1y=-21, \\ 3x+2y=24; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=5, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 0.8x-0.9y=2, \\ 6x-3y=2.5; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 4(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2. \end{cases}$

4. 有大、小两种货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨？

5. 用含药 30% 和 75% 的两种防腐药水，配制含药 50% 的防腐药水 18 kg，两种药水各需多少千克？

6. （我国古代问题）有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛（斛，音 hú，是古代的一种容量单位），1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛. 1 个大桶、1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

综合运用

7. 1 号仓库与 2 号仓库共存粮 450 t. 现从 1 号仓库运出存粮的 60%，从 2 号仓库运出存粮的 40%，结果 2 号仓库所余粮食比 1 号仓库所余粮食多 30 t. 1 号仓库与 2 号仓库原来各存粮多少吨？
8. 甲、乙两人都以不变的速度在操场上跑步. 如果同时同地出发，相向而行，每隔 2 min 相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔 6 min相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙两人每分各跑多少圈？
9. 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2. 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷？
10. 一个长方形的长减少 5 cm，宽增加 2 cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等. 这个长方形的长、宽各是多少？

拓广探索

11. 据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地，分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，使甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4？
12. 某电脑公司有 A 型、B 型、C 型三种型号的电脑，A 型每台6 000 元，B 型每台 4 000 元，C 型每台 2 500 元. 某中学现有资金 100 500 元，计划全部用于从这家电脑公司购进 36 台两种型号的电脑. 请你设计几种不同的购买方案供这个学校选择，并说明理由.

第八章　相交线与平行线

同学们对两条直线相交、平行一定不陌生吧！纵横交错的道路，棋盘中的横线和竖线，操场上的双杠，教室中的课桌面、黑板面相邻的两条边与相对的两条边……它们都给我们以相交线或平行线的形象．你能再举出一些相交线和平行线的实例吗？

在第五、六章，我们认识了几何图形，并学习了一些基本的平面图形——直线、射线、线段和角．本章将研究平面内不重合的两条直线的位置关系：相交与平行．对于相交，我们要研究两条直线相交所成的角的位置关系和数量关系；对于平行，我们要借助于一条直线与两条平行直线相交所成的角，研究平行线的判定和性质．在本章，我们还将学习通过说理和简单的推理得出数学结论的方法，培养言之有据的思考习惯．

8.1 相交线

8.1.1 相交线

取两根木条 a，b，用钉子将它们钉在一起，并且能随意张开，就得到一个相交线的模型（图 8.1-1）. 固定木条 a，绕钉子转动 b. 可以发现，随着 b 的位置的变化，a，b 所成的角 α 也随着发生变化. 如果把这两根木条看作两条相交的直线，这说明两条直线相交的不同情况与它们的交角大小有关.

图 8.1-1

探究

任意画两条相交的直线，形成四个角（图 8.1-2），∠1 和∠2 有怎样的位置关系？∠1 和∠3 呢？

分别量一下各个角的度数，∠1 和∠2 的度数有什么关系？∠1 和∠3 呢？在图 8.1-1 两根木条的交角变化的过程中，这个关系还保持吗？为什么？

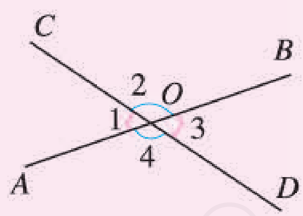


图 8.1-2

两条直线相交得到四个角，这些角有一个公共顶点，其中有些角有公共边，有些没有公共边.

在图 8.1-2 中，∠1 和∠2 有一个公共顶点 O，有一条公共边 OC，它们的另一边互为反向延长线（∠1 和∠2 互补），具有这种关系的两个角，互为**邻补角**（adjacent angles on a straight line）.

图 8.1-2 中还有没有其他的邻补角与对顶角？

图 8.1-2 中的∠1 和∠3 有一个公共顶点 O，

并且∠1 的两边分别是∠3 的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为**对顶角**（opposite angles）.

在图 8.1-2 中，∠1 与∠2 互补，∠3 与∠2 互补，就是说，∠1 与∠3 同是∠2 的补角. 由“同角的补角相等”，可以得出∠1=∠3. 类似地，可以得出∠2=∠4. 这样，我们得到对顶角的性质：

对顶角相等.

例 1 如图 8.1-3，直线 a，b 相交，∠1=40°，求∠2，∠3，∠4 的度数.

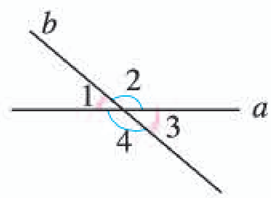


图 8.1-3

分析： 在图 8.1-3 中，∠1 与∠2 互为邻补角，根据邻补角的定义，可以求出∠2 的度数. 再由∠1 与∠3、∠2 与∠4 互为对顶角，根据“对顶角相等”，即可求出∠3，∠4 的度数.

解： 由邻补角的定义，得

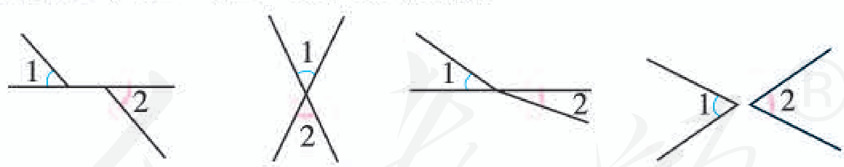
$$\angle 2=180^\circ-\angle 1=180^\circ-40^\circ=140^\circ;$$

由对顶角相等，得

$$\angle 3=\angle 1=40^\circ,$$
$$\angle 4=\angle 2=140^\circ.$$

巩固运用8.1

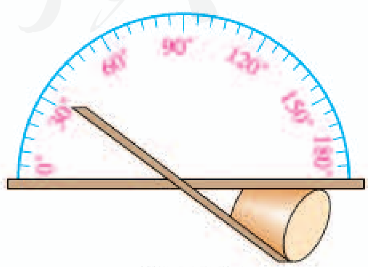
1. 下列各图中，∠1 与∠2 是不是对顶角？



（第 1 题）

2. 图中是对顶角量角器，你能说出用它测量角的原理吗？

3. 在如图 8.1-1 的相交线的模型中，如果两根木条所成的角∠α=35°，其他三个角各等于多少度？如果∠α 等于 90°，115°，m°呢？



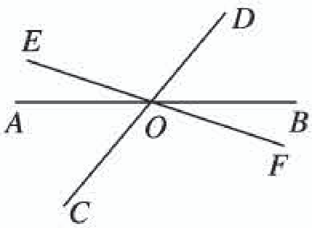
（第 2 题）

4. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O.

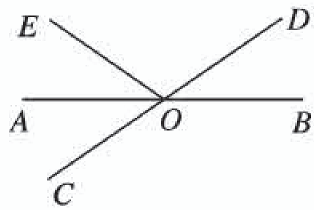
(1) 写出 $\angle AOC$，$\angle BOE$ 的邻补角；

(2) 写出 $\angle DOA$，$\angle EOC$ 的对顶角；

(3) 如果 $\angle AOC=50°$，求 $\angle BOD$，$\angle COB$ 的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

*5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle EOC$.

(1) 若 $\angle EOC=70°$，求 $\angle BOD$ 的度数；

(2) 若 $\angle EOC : \angle EOD=2 : 3$，求 $\angle BOD$ 的度数.

8.1.2 垂线

在相交线的模型（图 8.1-1）中，固定木条 a，转动木条 b. 当 a，b 所成的 $\angle\alpha=90°$ 时（图 8.1-4），我们说直线 a 与 b 互相**垂直**（perpendicular），记作 $a\perp b$.

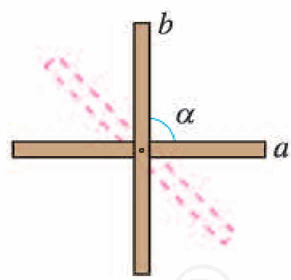


图 8.1-4

垂直是相交的一种特殊情形，两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的**垂线**（perpendicular line），它们的交点叫做**垂足**（foot of a perpendicular）. 如图 8.1-5，直线 AB，CD 互相垂直，记作“$AB\perp CD$”（或“$CD\perp AB$”），读作“AB 垂直于 CD”. 如果垂足是 O，记作“$AB\perp CD$，垂足为 O”.

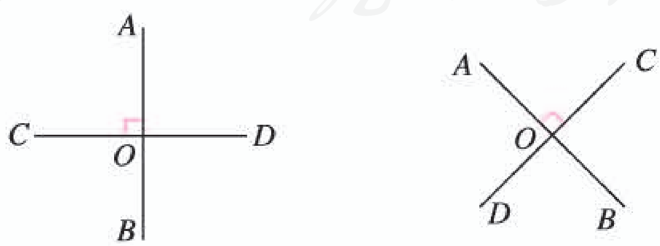


图 8.1-5

根据两条直线垂直的定义可知，如果两条直线相交所成的四个角中的任意一个角等于 90°，那么这两条直线互相垂直. 即如图 8.1-5，如果直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOC = 90^\circ$，那么 $AB \perp CD$.

> 反过来，如果 $AB \perp CD$，那么 $\angle AOC$ 是多少度？

日常生活中，两条直线互相垂直的情形很常见. 教科书、课桌面、黑板面相邻的两条边都是互相垂直的. 你还能再举出其他一些例子吗？

探究

用三角尺或量角器画垂线.

(1) 在图 8.1-6(1) 中，画已知直线 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

(2) 在图 8.1-6(2) 中，经过直线 l 上一点 A 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

(3) 在图 8.1-6(3) 中，经过直线 l 外一点 B 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

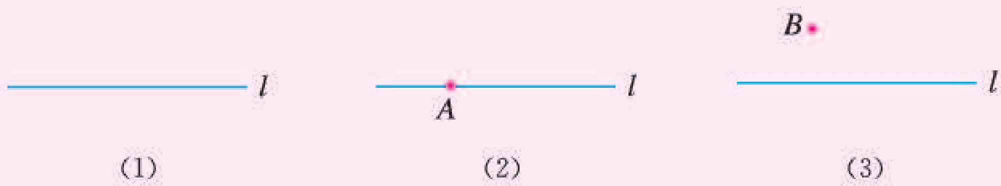


图 8.1-6

通过画图可以知道，经过一点（不论这点在已知直线上或直线外），能画出已知直线的一条垂线，并且只能画出一条垂线. 这是垂线的一个性质：

在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线. 如图 8.1-7，过点 P 画线段 AB 的垂线时，需先延长线段 AB，这时，垂足在线段 AB 的延长线上.

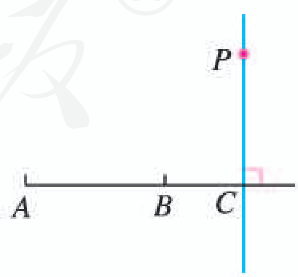
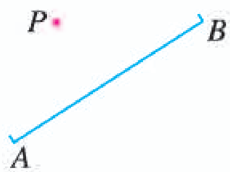


图 8.1-7

巩固运用8.2

1. 举出几个两条直线互相垂直的实例.
2. 当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线有什么位置关系？为什么？
3. 如图，过点 P 画出射线 AB 或线段 AB 的垂线.

(1)

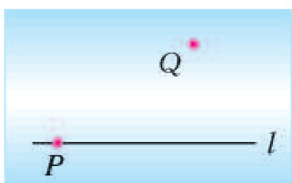


(2)

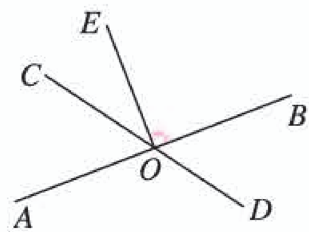
(3)

(第 3 题)

4. 如图，在一张半透明的纸上画一条直线 l，在 l 上任取一点 P，在 l 外任取一点 Q，折出过点 P 且与 l 垂直的直线. 这样的直线能折出几条？为什么？过点 Q 呢？



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO\perp AB$，垂足为 O，$\angle EOC=35°$. 求$\angle AOD$ 的度数.
6. 过线段 AB 的中点 O 画直线 $MN\perp AB$，在 MN 上任取一点 C，连接 CA，CB. 画图并比较 CA，CB 的大小.

下面，我们来研究垂线的另一个性质.

如图 8.1-8，设点 P 是直线 l 外一点，$PO\perp l$，垂足为 O，线段 PO 叫做点 P 到直线 l 的**垂线段**.

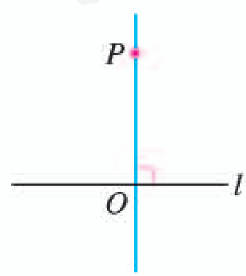


图 8.1-8

探究

如图 8.1-9，连接直线 l 外一点 P 与直线 l 上各点 O，A_1，A_2，…，其中 $PO \perp l$. 用圆规或刻度尺比较线段 PO，PA_1，PA_2，…的长短，这些线段中，哪一条最短？

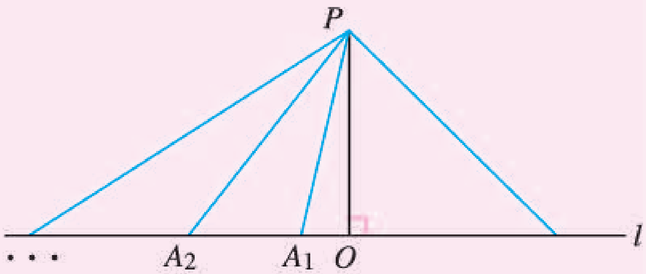


图 8.1-9

可以发现，线段 PO 最短. 由此我们得到垂线的又一个性质：

连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

简单说成：**垂线段最短.**

从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做**点到直线的距离.**

思考

如图 8.1-10，这是小明同学在跳远后留下的脚印，如何测量他的跳远成绩？如果图中比例尺为 1∶150，他的跳远成绩是多少？

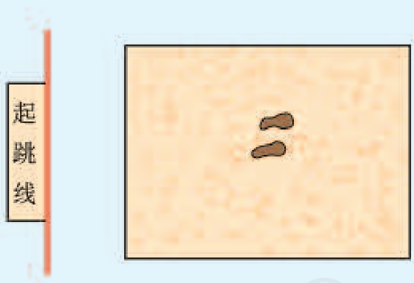


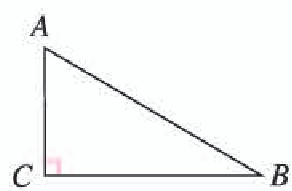
图 8.1-10

巩固运用8.3

1. 如图，在三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

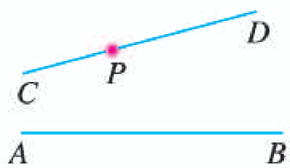
   (1) 分别指出点 A 到直线 BC，点 B 到直线 AC 的距离是哪些线段的长；

   (2) 三条边 AB，AC，BC 中哪条边最长？为什么？

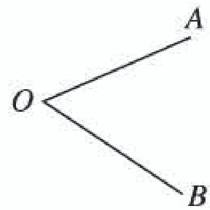


（第 1 题）

2. 如图，分别过点 P 画直线 AB，CD 的垂线，并量出点 P 到直线 AB 的距离.



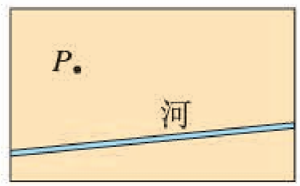
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，用量角器画$\angle AOB$ 的平分线 OC，在 OC 上任取一点 P，比较点 P 到 OA，OB 的距离的大小.

4. 如图，在灌溉时，要把河中的水引到农田 P 处，如何挖渠能使渠道最短？在图中画出来. 如果图中比例尺为 1∶100 000，水渠大约要挖多长？



（第 4 题）

8.1.3 同位角、内错角、同旁内角

前面我们研究了一条直线与另一条直线相交的情形，接下来，我们进一步研究一条直线与两条直线分别相交的情形.

如图 8.1-11，直线 AB，CD 与 EF 相交（也可以说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截），构成八个角. 我们看那些没有公共顶点的两个角的关系.

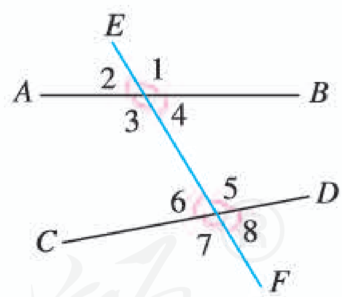


图 8.1-11

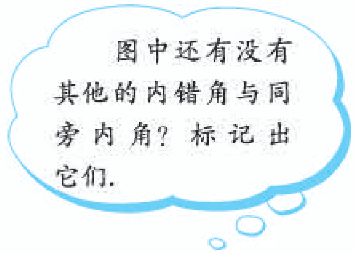
先看图中的$\angle 1$ 和$\angle 5$，这两个角分别在直线 AB，CD 的同一方（上方），并且都在直线 EF 的同侧（右侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles).

$\angle 2$ 和$\angle 6$ 是同位角吗？图中还有没有其他的同位角？标记出它们.

再看$\angle 3$ 和$\angle 5$，这两个角都在直线 AB，CD 之间，并且分别在直线 EF 两侧（$\angle 3$ 在直线 EF

左侧，∠5 在直线 EF 右侧)，具有这种位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）.

再看∠3 和∠6，这两个角也都在直线 AB，CD 之间，但它们在直线 EF 的同一旁（左侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同旁内角**（interior angles on the same side）.



例 2 如图 8.1-12，直线 DE，BC 被直线 AB 所截.

(1) ∠1 和∠2，∠1 和∠3，∠1 和∠4 各是什么位置关系的角？

(2) 如果∠1＝∠4，那么∠1 和∠2 相等吗？∠1 和∠3 互补吗？为什么？

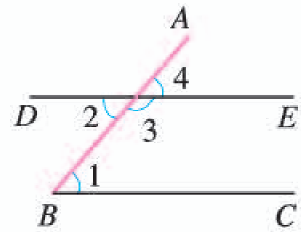


图 8.1-12

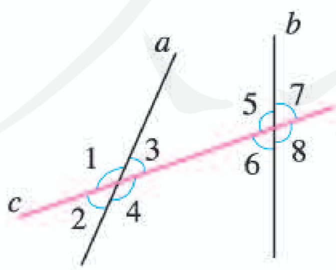
答：(1) ∠1 和∠2 是内错角，∠1 和∠3 是同旁内角，∠1 和∠4 是同位角.

(2) 如果∠1＝∠4，由“对顶角相等”，得∠2＝∠4，那么∠1＝∠2.

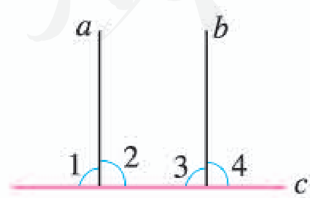
因为∠4 和∠3 互补，即∠4＋∠3＝180°，又因为∠1＝∠4，所以∠1＋∠3＝180°，即∠1 和∠3 互补.

巩固运用8.4

1. 分别指出下列图中的同位角、内错角、同旁内角.



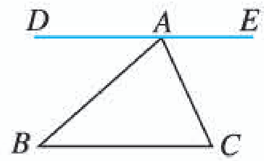
(1)



(2)

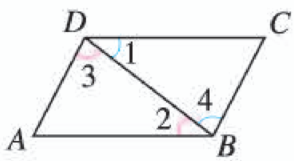
（第 1 题）

*2. 如图，$\angle B$ 与哪个角是内错角，与哪个角是同旁内角？它们分别是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？对$\angle C$ 进行同样的讨论.

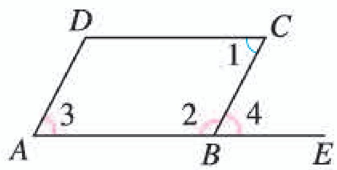


（第 2 题）

3. 如图，$\angle 1$ 和$\angle 2$，$\angle 3$ 和$\angle 4$ 各是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们各是什么位置关系的角？



(1)



(2)

（第 3 题）

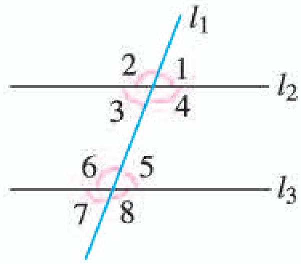
*4. 如图，直线 l_1 分别与 l_2，l_3 相交，形成 8 个角，$\angle 1=\angle 5$.

(1) 图中哪些角是对顶角？

(2) 图中哪些角与$\angle 1$ 是邻补角？

(3) 图中哪些角与$\angle 1$ 相等？

(4) 图中哪些角与$\angle 1$ 互补？



（第 4 题）

8.2 平行线及其判定

8.2.1 平行线

思考

如图 8.2-1，分别将木条 a，b 与木条 c 钉在一起，并把它们想象成在同一平面内两端可以无限延伸的三条直线. 转动 a，直线 a 从在直线 c 的左侧与直线 b 相交逐步变为在直线 c 的右侧与直线 b 相交. 想象一下，在这个过程中，有没有直线 a 与直线 b 不相交的位置呢？

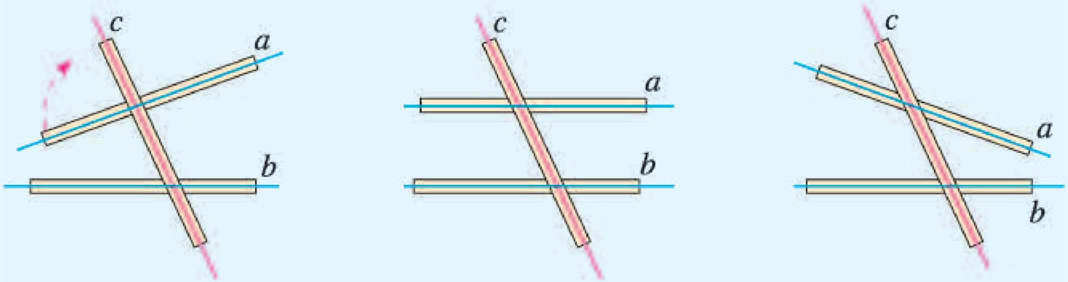


图 8.2-1

可以发现，在木条转动过程中，存在直线 a 与 b 不相交的情形. 在同一平面内，不相交的两条直线叫做**平行线**（parallel lines）. 平行用符号“//”表示，直线 a 与 b 平行，记作“$a // b$”，读作“a 平行于 b”. 我们有时也说两条射线或线段平行，这实际上是指它们所在直线平行.

在同一平面内，不重合的两条直线只有两种位置关系：相交和平行.

日常生活中，两条直线互相平行的情形很常见. 教科书、课桌面、黑板面相对的两条边都是互相平行的. 你还能再举出其他一些例子吗？

我们可以利用直尺和三角尺画平行线. 如图 8.2-2，已知直线 AB 和 AB 外的一点 P，把三

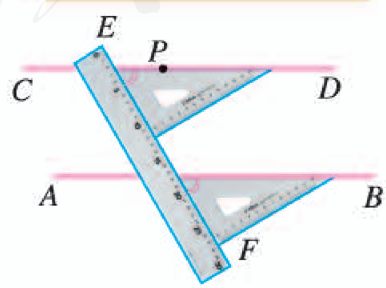


图 8.2-2

角尺的一边紧靠 AB，再用直尺紧靠三角尺的另一边；沿直尺推动三角尺，使原来和 AB 重合的一边经过点 P；沿三角尺的这条边画出直线 CD，CD 就是所求的直线.

思考

在图 8.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？如图 8.2-3，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？再过点 C 画直线 a 的平行线，它和过点 B 画出的直线平行吗？

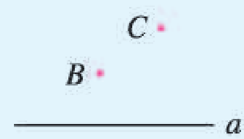


图 8.2-3

由此，我们可以发现一个基本事实（平行公理）：

经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

图 8.2-4

由平行公理，进一步可以得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

也就是说：如果 $b/\!/a$，$c/\!/a$，那么 $b/\!/c$（图 8.2-4）.

巩固运用8.5

1. 举出几个直线互相平行的例子.
2. 读下列语句，并画出图形：
   (1) 点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，且与直线 AB 平行；
   (2) 直线 AB，CD 是相交直线，点 P 是直线 AB，CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 E.
3. 如图，这是两条道路互相垂直的交通路口的平面示意图. 类似地，你能画出两条道路成 $75°$ 角的交通路口的平面示意图吗？

（第 3 题）

8.2.2 平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行. 但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行. 那么，有没有其他判定方法呢?

思考

回顾上一节用直尺和三角尺画平行线的过程（图 8.2-5）. 在这一过程中，三角尺起着什么样的作用?

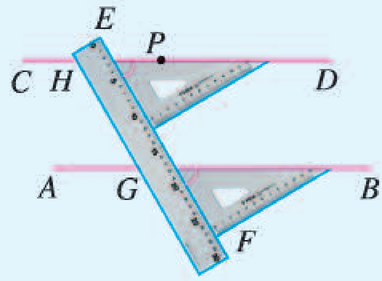


图 8.2-5

简化图 8.2-5 得到图 8.2-6. 可以看出，画直线 AB 的平行线 CD，实际上就是过点 P 画与$\angle 2$ 相等的$\angle 1$，而$\angle 2$ 和$\angle 1$ 正是直线 AB，CD 被直线 EF 截得的同位角. 这说明，如果同位角相等，那么 $AB /\!/ CD$.

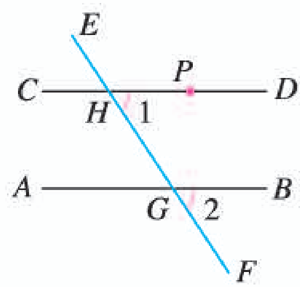


图 8.2-6

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的方法：

判定方法 1 **两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.**

简单说成：**同位角相等，两直线平行.**

思考

两条直线被第三条直线所截，同时得到同位角、内错角和同旁内角. 由同位角相等，可以判定两条直线平行，那么能否利用内错角来判定两条直线平行呢?

如图 8.2-7，如果$\angle 2=\angle 3$，能得出 $a /\!/ b$ 吗?

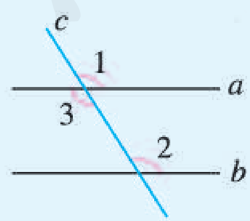


图 8.2-7

如图 8.2-7，因为$\angle 2=\angle 3$，而$\angle 3=\angle 1$（想一想为什么），所以$\angle 1=\angle 2$，即同位角相等，从而$a // b$. 这样，由判定方法 1，可以得出利用内错角判定两条直线平行的另一种方法：

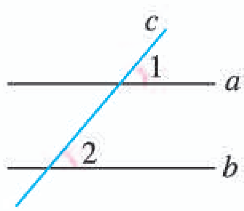
判定方法 2 **两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.**

简单说成：**内错角相等，两直线平行.**

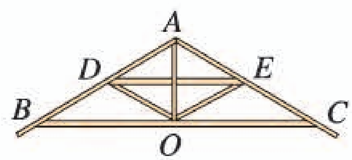
遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题.

巩固运用8.6

1. 如图，已知直线 a，b，任意画一条直线 c，使它与 a，b 都相交，量得$\angle 1=65°$，$\angle 2=65°$. 那么直线 a，b 具有怎样的位置关系？为什么？



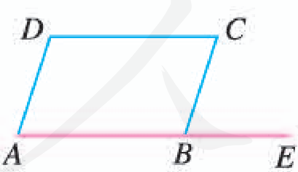
（第 1 题）



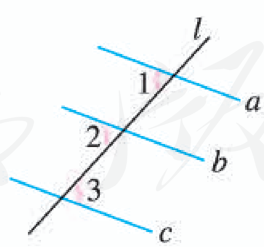
（第 2 题）

2. 如图，为了加固房屋，要在屋架上加一根横梁 DE，使 $DE // BC$. 如果$\angle ABC=31°$，$\angle ADE$ 应为多少度？

3. 如图，BE 是 AB 的延长线.
   (1) 由$\angle CBE=\angle A$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？
   (2) 由$\angle CBE=\angle C$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？



（第 3 题）

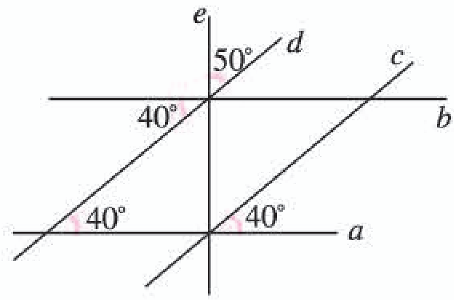


（第 4 题）

4. 如图，直线 a，b，c 被直线 l 所截，量得$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.
   (1) 由$\angle 1=\angle 2$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？
   (2) 由$\angle 1=\angle 3$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

(3) 直线 a，b，c 互相平行吗？根据是什么？

*5. 根据图中所给出的条件，找出互相平行的直线和互相垂直的直线.



（第 5 题）

两条直线被第三条直线所截，除了形成同位角、内错角外，还有同旁内角. 下面，我们再研究同旁内角满足什么条件，两条直线平行.

思考

上一节中，我们是怎样利用“同位角相等，两直线平行”得到“内错角相等，两直线平行”的？你能利用“同位角相等，两直线平行”，得到利用同旁内角判定两条直线平行的方法吗？

像研究“内错角相等，两直线平行”一样，先找出同旁内角与同位角的关系. 如图 8.2-8，直线 a，b 被 c 所截，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是同旁内角. 如果 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 互补，那么 $\angle 1=\angle 2$（想一想为什么），即同位角相等，从而 $a/\!/b$. 这样，由判定方法 1，可以得出利用同旁内角判定两条直线平行的方法：

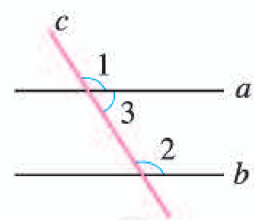


图 8.2-8

判定方法 3 **两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.**

简单说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

例 如图 8.2-9，直线 b，c 都垂直于直线 a，直线 b，c 平行吗？为什么？

分析： 要判定两条直线是否平行，首先应想一想学过哪些判定平行线的方法，然后再看已知条件与哪

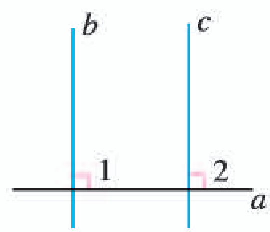


图 8.2-9

一种方法的条件相同或相关. 本题中要注意：垂直总与直角联系在一起，进而可以得到一些相等或互补的角.

解：这两条直线平行. 理由如下：

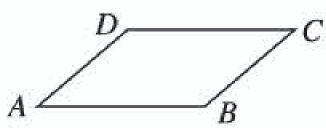
如图 8.2-9，因为 $b\perp a$，$c\perp a$，所以$\angle 1=90^\circ$，$\angle 2=90^\circ$，所以$\angle 1=\angle 2$.

又$\angle 1$ 和$\angle 2$ 是同位角，根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $b/\!/c$.

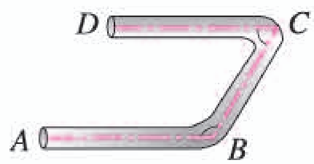
想一想，能不能利用图中的内错角或同旁内角来说明 $b/\!/c$ 呢？

巩固运用8.7

1. 如图，由$\angle A$ 与$\angle D$ 互补，可以判定哪两条直线平行？$\angle B$ 与哪个角互补，可以判定直线 $AD/\!/BC$？



（第 1 题）



（第 2 题）

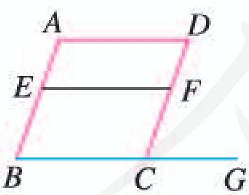
2. 如图，一个弯形管道 $ABCD$ 的拐角$\angle ABC=120^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，这时说管道 $AB/\!/CD$ 对吗？为什么？

3. 如图，E 是 AB 上一点，F 是 DC 上一点，G 是 BC 延长线上一点.

   (1) 如果$\angle B=\angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

   (2) 如果$\angle D=\angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

   (3) 如果$\angle D+\angle DFE=180^\circ$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

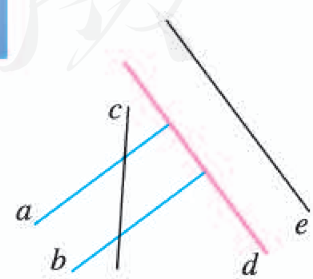


（第 3 题）


（第 4 题）

4. 如图，有一块方形玻璃，用什么方法可以检验它相对的两条边是否平行？

*5. 借助直尺、三角尺和量角器，在图中找出互相平行的直线和互相垂直的直线.



（第 5 题）

8.3 平行线的性质

利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？这就是我们下面要学习的平行线的性质.

类似于研究平行线的判定，我们先来研究两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同位角的关系.

探究

如图 8.3-1，利用坐标纸上的直线，或者用直尺和三角尺画两条平行线 $a // b$，然后，画一条截线 c 与这两条平行线相交，度量所形成的 8 个角的度数，把结果填入下表：

角	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
度数				
角	$\angle 5$	$\angle 6$	$\angle 7$	$\angle 8$
度数				

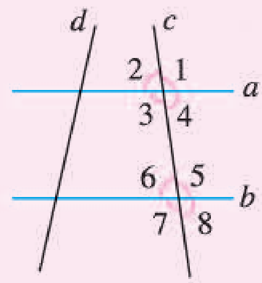


图 8.3-1

$\angle 1 \sim \angle 8$ 中，哪些是同位角？它们的度数之间有什么关系？由此猜想两条平行线被第三条直线截得的同位角有什么关系.

再任意画一条截线 d，同样度量并比较各对同位角的度数，你的猜想还成立吗？

一般地，平行线具有性质：

性质 1 **两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.**

简单说成：**两直线平行，同位角相等.**

思考

上一节，我们利用“同位角相等，两直线平行”推出了“内错角相等，两直线平行”. 类似地，你能由性质 1，推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗?

如图 8.3-2，直线 $a \parallel b$，c 是截线. 根据“两直线平行，同位角相等”，可得$\angle 2=\angle 3$. 由$\angle 3$ 和$\angle 1$ 互为对顶角，可得$\angle 3=\angle 1$. 所以$\angle 1=\angle 2$. 这样，我们就得到了平行线的另一个性质：

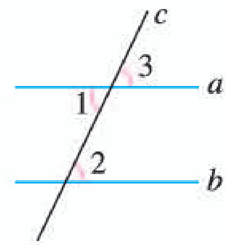


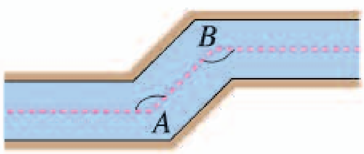
图 8.3-2

性质 2 **两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.**

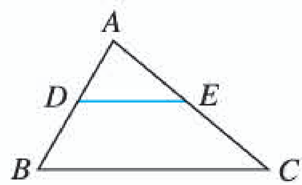
简单说成：**两直线平行，内错角相等.**

巩固运用8.8

1. 如图，一条公路两次转弯后，和原来的方向相同. 如果第一次的拐角$\angle A$ 是 $135°$，第二次的拐角$\angle B$ 是多少度? 为什么?

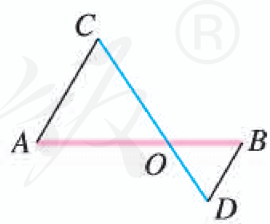


（第 1 题）



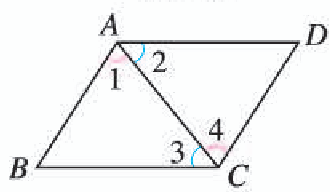
（第 2 题）

2. 如图，三角形 ABC 中，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，$\angle ADE=60°$，$\angle B=60°$，$\angle AED=40°$.
   (1) DE 和 BC 平行吗? 为什么?
   (2) $\angle C$ 是多少度? 为什么?
3. 如图，AB 和 CD 相交于点 O，$\angle A=\angle B$.
   (1) AC 和 BD 平行吗? 为什么?.
   (2) $\angle C$ 和$\angle D$ 的度数有什么关系? 为什么?



（第 3 题）

4. 如图，由 $AB \parallel CD$，可以得到（　　）.
   (A) $\angle 1=\angle 2$　　(B) $\angle 2=\angle 3$
   (C) $\angle 1=\angle 4$　　(D) $\angle 3=\angle 4$

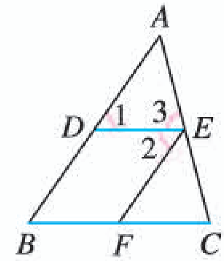


（第 4 题）

5. 如图，用式子表示下列句子：

(1) 因为$\angle 1$和$\angle 2$相等，根据“内错角相等，两直线平行”，所以AB和EF平行；

(2) 因为DE和BC平行，根据“两直线平行，同位角相等”，所以$\angle 1=\angle B$，$\angle 3=\angle C$.



(第 5 题)

下面，我们再来研究当两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同旁内角的关系.

思考

上一节，我们利用“两直线平行，同位角相等”推出了“两直线平行，内错角相等”. 类似地，你能由性质 1，推出两条平行线被第三条直线截得的同旁内角之间的关系吗？

如图 8.3-3，直线 $a \parallel b$，c 是截线，$\angle 1$ 和$\angle 2$是同旁内角. 根据“两直线平行，同位角相等”，可得$\angle 2=\angle 3$. 由$\angle 1$和$\angle 3$互为邻补角，可得$\angle 1+\angle 3=180°$. 所以$\angle 1+\angle 2=180°$. 这样，我们就得到了平行线的另一个性质：

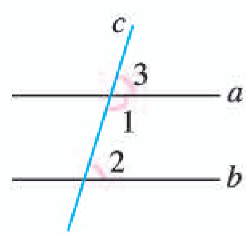


图 8.3-3

性质 3 **两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补.**

简单说成：**两直线平行，同旁内角互补.**

例 1 图 8.3-4 是一块梯形铁片的残余部分，量得$\angle A=100°$，$\angle B=115°$，梯形的另外两个角分别是多少度？

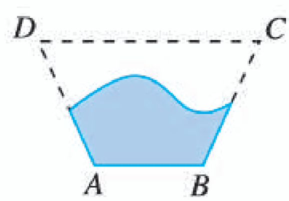


图 8.3-4

解： 因为梯形上、下两底 AB 与 DC 互相平行，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可得$\angle A$与

$\angle D$ 互补，$\angle B$ 与 $\angle C$ 互补.

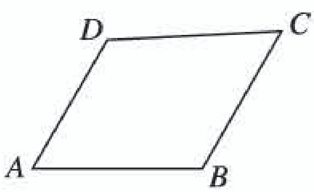
于是

$$\angle D = 180° - \angle A = 180° - 100° = 80°,$$
$$\angle C = 180° - \angle B = 180° - 115° = 65°.$$

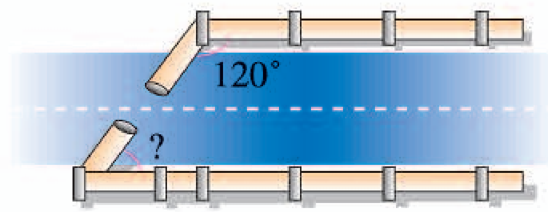
所以梯形的另外两个角分别是 80°，65°.

巩固运用8.9

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AD \parallel BC$，$\angle A = 60°$，求 $\angle B$ 的度数，不用度量的方法，能否求得 $\angle D$ 的度数？



（第 1 题）



（第 2 题）

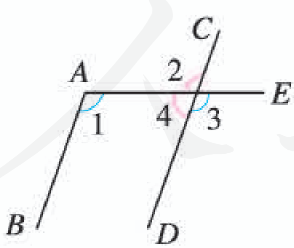
2. 如图，一条公路的两侧铺设了两条平行管道，如果公路一侧铺设的管道与纵向联通管道的角度为 120°，那么为了使管道对接，另一侧应以什么角度铺设纵向联通管道？为什么？

3. 如图，平行线 AB，CD 被直线 AE 所截.

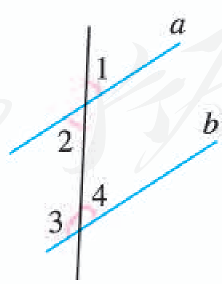
(1) 由 $\angle 1 = 110°$ 可以知道 $\angle 2$ 是多少度？为什么？

(2) 由 $\angle 1 = 110°$ 可以知道 $\angle 3$ 是多少度？为什么？

(3) 由 $\angle 1 = 110°$ 可以知道 $\angle 4$ 是多少度？为什么？



（第 3 题）



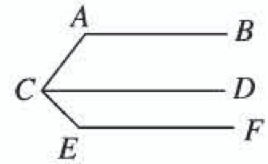
（第 4 题）

4. 如图，直线 $a \parallel b$，$\angle 1 = 54°$，则 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？

5. 如图，如果 $AB \parallel CD \parallel EF$，那么 $\angle BAC+\angle ACE+\angle CEF=$（　　）.

(A) 180°　　(B) 270°

(C) 360°　　(D) 540°



（第 5 题）

例 2　如图 8.3-5，直线 $a \parallel b$，$c \parallel d$，$\angle 1=115^\circ$. 求$\angle 2$，$\angle 3$ 的度数.

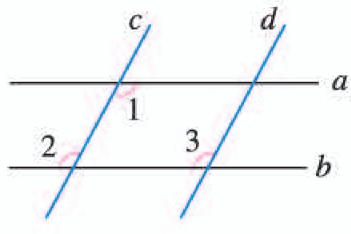


图 8.3-5

分析：为了求出$\angle 2$，$\angle 3$ 的度数，首先要弄清它们与已知的$\angle 1$ 的位置关系，进而利用平行线的性质.

解：因为 $a \parallel b$，根据“两直线平行，内错角相等”，可得

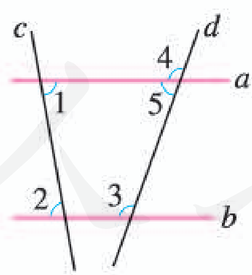
$$\angle 2=\angle 1=115^\circ.$$

又因为 $c \parallel d$，根据“两直线平行，同位角相等”，可得

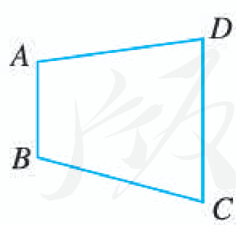
$$\angle 3=\angle 2=115^\circ.$$

巩固运用8.10

1. 如图，$a \parallel b$，c，d 是截线，$\angle 1=80^\circ$，$\angle 5=70^\circ$. 则$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？为什么？

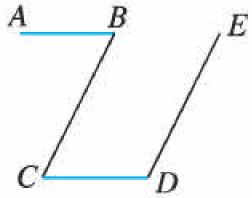


（第 1 题）

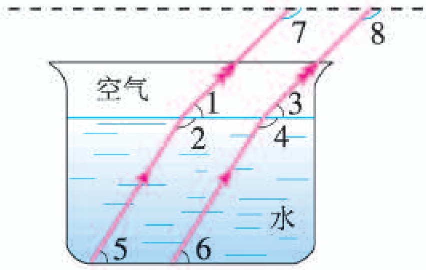


（第 2 题）

2. 如图，$AB \parallel CD$，$\angle A=98^\circ$，$\angle C=75^\circ$，求$\angle B$，$\angle D$ 的度数.
3. 如图，$AB \parallel CD$，$CB \parallel DE$，$\angle B=62^\circ$，求$\angle C$，$\angle D$ 的度数.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 光线在不同介质中的传播速度是不同的，当光线从水中射向空气时，要发生折射. 由于折射率相同，所以在水中平行的光线，在空气中也是平行的. 如图，$\angle 1=45^\circ$，$\angle 2=122^\circ$，求图中所标其他角的度数.

阅读与思考

空间里的垂直、平行关系

前面，我们已经学过平面内直线与直线垂直、平行的情况，实际上，空间也有垂直、平行的情况. 例如，在长方体的模型（图 1）中，棱 a 与底面Ⅰ、底面Ⅰ与侧面Ⅱ是垂直关系；棱 b 与底面Ⅲ、底面Ⅰ与底面Ⅲ是平行关系.

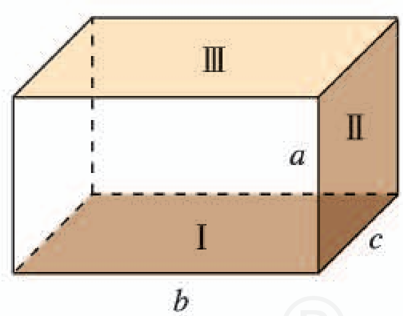


图 1

在什么情况下，直线与平面、平面与平面互相垂直呢？如图 1，我们知道，$a\perp b$，$a\perp c$，而 b，c 是底面Ⅰ内两条相交的棱. 像这样，一条棱垂直于一个面内两条相交的棱，这条棱就与这个面互相垂直. 再看底面Ⅰ与侧面Ⅱ，棱 a 垂直于底面Ⅰ，而侧面Ⅱ经过棱 a. 像这样，一个面经过与另一个面垂直的棱，这两个面就互相垂直.

再看图 1 所示的长方体，把棱 b 向两方延长，底面Ⅲ向各个方向延展，它们总也不相交，像这样的棱和面就是互相平行的. 再看底面Ⅰ与底面Ⅲ，这两个面无论怎样延展，它们也总不相交，像这样的两个面就是互相平行的.

在图 1 所示的长方体模型中，你还能再举出一些直线与平面、平面与平面垂直和平行的例子吗？你能举出生活中一些这样的例子吗？

8.4 平移

思考

仔细观察下面一些美丽的图案（图 8.4-1），它们有什么共同的特点？能否根据其中的一部分绘制出整个图案？

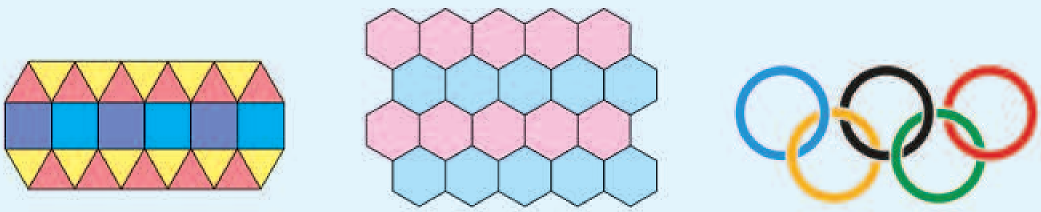


图 8.4-1

图 8.4-1 中的每个图案都是由一些相同的图形组成的，将其中的一个基本图形平行移动，就可以得到整个图案. 一般地，在平面内，将一个图形按某一方向移动一定的距离，这样的图形运动叫做**平移**（translation）. 图形平移的方向，不限于是水平的.

平移在我们日常生活中是很常见的. 你能举出生活中一些利用平移的例子吗？

探究

图 8.4-2 是经过平移得到的两个四边形，在这两个四边形中，找出两组对应点 A 与 A'，B 与 B'，连接它们，观察得出的线段，它们的位置、长短有什么关系？

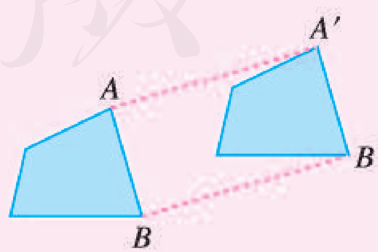


图 8.4-2

可以发现，$AA' \parallel BB'$，并且 $AA' = BB'$.

再作出连接一些其他对应点的线段，它们是否仍有前面的关系？

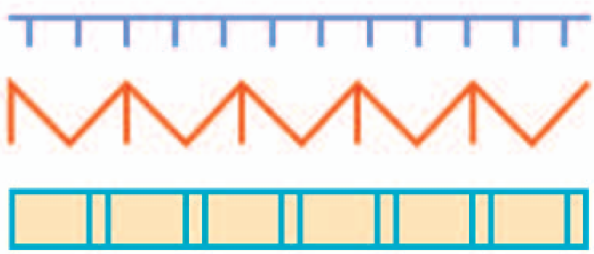
归纳

1. 把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同.

2. 新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等.

巩固运用8.11

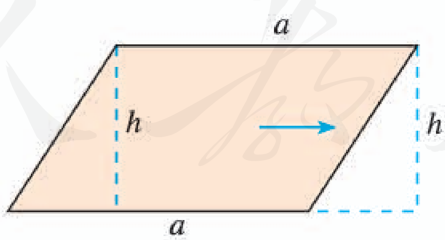
1. 下列图案可以由什么图形平移形成？



（第 1 题）

2. 小明挪动家里的冰箱，冰箱的四个支脚移动的距离分别是 10.1 cm，10.1 cm，9.8 cm，10.1 cm，冰箱的移动是平移吗？为什么？

3. 如图，用平移方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



（第 3 题）

8.5 命题、定理、证明

前面，我们学过一些对某一件事情作出判断的语句，例如：

(1) 如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；

(2) 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行；

(3) 对顶角相等；

(4) 等式两边加同一个数，结果仍是等式.

像这样判断一件事情的语句，叫做**命题**（proposition）.

还有一些语句，例如“画线段 $AB=CD$”“对顶角相等吗?”等，它们都没有对某一件事情做出判断，这样的语句不是命题.

命题由题设和结论两部分组成. 题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论. 例如，上面命题（1）中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论. 命题（2）中，“同位角相等”是题设，“这两条直线平行”是结论. 不过，这个命题中，“如果”前面还有一个条件“两条直线被第三条直线所截”，没有这个条件，就没有同位角，所以这个条件也属于题设部分.

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出题设和结论，从而将它们写成“如果……那么……”的形式. 例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

> 请你将命题（4）改写成“如果……那么……”的形式.

例 1 指出下列命题的题设和结论：

(1) 如果两条直线相交，那么它们只有一个交点；

(2) 两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

解：(1) 题设：两条直线相交；结论：它们只有一个交点.

(2) 这个命题可以改写成“如果两条平行线被第三条直线所截，那么内错角相等”，因此，题设：两条平行线被第三条直线所截；结论：内错角相等.

在命题中，有一些命题是正确的. 就是说，如果题设成立，那么结论一定成立，这样的命题叫做**真命题**. 还有一些命题，如“如果两个角互补，那么它们是邻补角”“如果一个数能被 2 整除，那么它也能被 4 整除”等，这些命题中，题设成立时，不能保证结论一定成立，这样的命题叫做**假命题**.

巩固运用8.12

1. 判断下列语句是否为命题：

   (1) 两点之间，线段最短；

   (2) x 与 y 的和等于 0 吗？

   (3) 对顶角不相等；

   (4) 过点 A 作直线 a 的垂线 b.

2. 举出 2～3 个命题的例子.

3. 指出下列命题的题设和结论：

   (1) 如果 $AB \perp CD$，垂足为 O，那么 $\angle AOC = 90^\circ$；

   (2) 如果 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 2 = \angle 3$，那么 $\angle 1 = \angle 3$；

   (3) 两直线平行，同位角相等.

4. 举出学过的 2～3 个真命题.

在前面，我们学过的一些图形的性质，都是真命题. 其中有些命题是基本事实，如“两点确定一条直线”“经过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”等. 还有一些命题，它们的正确性是经过推理证实的，如我们由“同角的补角相等”推理得出“对顶角相等”，由“同位角相等，两直线平行”推理得出“内错角相等，两直线平行”等，这样得到的真命题叫做**定理**（theorem）. 定理也可以作为继续推理的依据.

在很多情况下，一个命题的正确性需要经过推理，才能作出判断，这个推理过程叫做**证明**（proof）. 证明中的每一步推理都要有根据，不能“想当然”. 这些根据，可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实、定理等.

下面，我们以证明命题“在同一个平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”为例，来说明什么是证明.

例 2　如图 8.5-1，已知直线 $b // c$，$a \perp b$. 求证 $a \perp c$.

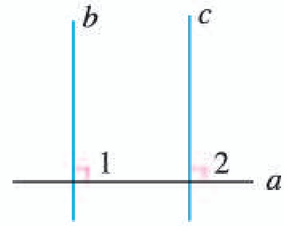


图 8.5-1

证明： ∵　$a \perp b$（已知），

∴　$\angle 1 = 90^\circ$（垂直的定义）.

又　$b // c$（已知），

∴　$\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

∴　$\angle 2 = \angle 1 = 90^\circ$（等量代换）.

∴　$a \perp c$（垂直的定义）.

> 此处符号“∵”表示“因为”，符号“∴”表示“所以”.

判断一个命题是假命题，只要举出一个例子（反例），它符合命题的题设，但不满足结论就可以了.

例如，要判定命题“相等的角是对顶角”是假命题，可以举出如下反例：在图 8.5-2 中，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，$\angle 1 = \angle 2$，但它们不是对顶角.

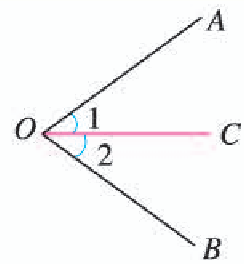


图 8.5-2

巩固运用8.13

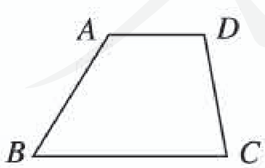
1. 在下面的括号内，填上推理的根据.

如图，$\angle A + \angle B = 180^\circ$，求证 $\angle C + \angle D = 180^\circ$.

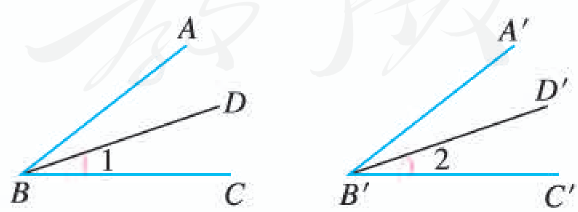
证明：∵　$\angle A + \angle B = 180^\circ$，

∴　$AD // BC$（＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）.

∴　$\angle C + \angle D = 180^\circ$（＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 完成下面的证明.

如图，$\angle ABC = \angle A'B'C'$，$BD$，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线. 求证$\angle 1 = \angle 2$.

证明：$\because$ BD，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线，

$\therefore$ $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2 =$ ______ （________________）.

又 $\angle ABC = \angle A'B'C'$，

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle A'B'C'$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$（________________）.

3. 判断下列命题是真命题还是假命题. 如果是假命题，举出一个反例.

（1）两个锐角的和是锐角；

（2）邻补角是互补的角；

（3）同旁内角互补；

（4）同位角相等.

数学活动

你有多少种画平行线的方法?

学习了平行线后,李强、王玲两位同学分别想出了过直线 a 外一点 P 画直线 a 的平行线的新方法,他们分别是这样做的:

李强:如图 1,过点 P 作与 a 相交的直线 b,设直线 b 与直线 a 的交角为 $\angle 1$,以直线 b 为一边,点 P 为顶点作 $\angle 2=\angle 1$,则 $\angle 2$ 的另一边所在直线 c 与直线 a 平行.

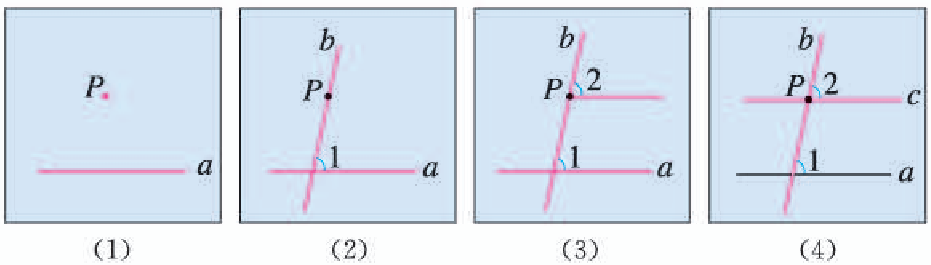


图 1

王玲:如图 2,过点 P 折纸,使得直线 a 的两部分重合,得到折痕 b. 再过点 P 折纸,使得折痕 b 的两部分重合,得到折痕 c,则折痕 c 与直线 a 平行.

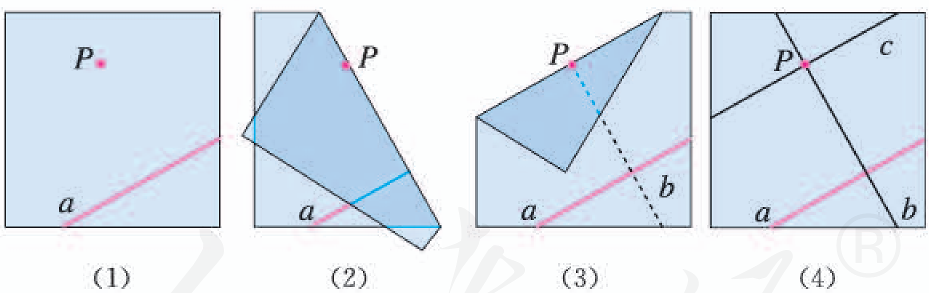
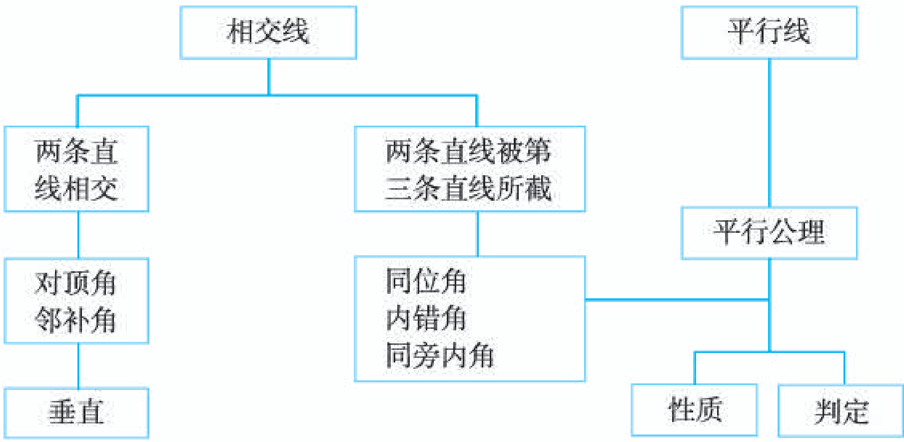


图 2

你还有其他方法吗?与同学们交流一下.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 在同一平面内，不重合的两条直线的位置关系有两种：相交、平行．两条直线相交，它们之间的位置关系是通过这两条直线所形成的角来刻画的；在研究平行线时，也是通过有关的角来判断直线平行和反映平行线的性质的．

2. 下面是本章学到的一些数学名词，你能用自己的语言描述它们吗？你能分别画一个图形表示它们吗？

对顶角、邻补角、垂直、平行、同位角、内错角、同旁内角、平移、命题、定理、证明．

3. 两条直线相交形成四个角，它们具有怎样的位置关系和数量关系？

4. 什么是点到直线的距离？你会度量吗？请举例说明．

5. 判定和性质是研究几何图形的两个重要方面．怎样判定两条直线是否平行？平行线有什么性质？对比平行线的性质和直线平行的判定方法，它们有什么异同？

6. 图形平移时，连接各对应点的线段有什么关系？你能利用平移设计一些图案吗？

7. 什么是命题？如何判断一个命题是真命题还是假命题？请结合具体例子说明．

8. 学习本章时，要注意观察实物、模型和图形，通过观察、归纳、对比来寻找图形的位置关系和数量关系，从而发现图形的性质．

复习题 8

复习巩固

1. 判断题（正确的画“√”，错误的画“×”）.

(1) 邻补角的和是 180°； ( )

(2) 经过一点只能作一条直线与已知直线垂直； ( )

(3) a，b，c 是直线，$a /\!/ b$，$b /\!/ c$，a 与 c 相交于点 P； ( )

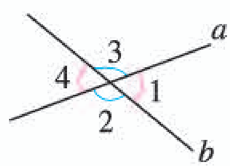
(4) a，b，c 是直线，若 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 $a /\!/ c$； ( )

(5) a，b，c 是直线，若 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$. ( )

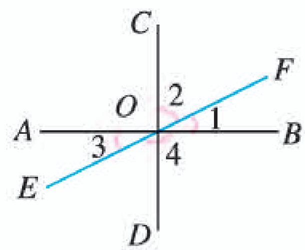
2. 如图，两条直线 a，b 相交.

(1) 如果 $\angle 1 = 60^\circ$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数；

(2) 如果 $2\angle 3 = 3\angle 1$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



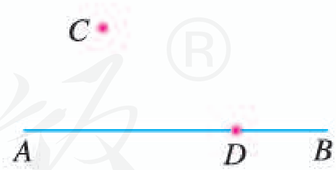
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，直线 $AB \perp CD$，垂足为 O，直线 EF 经过点 O，$\angle 1 = 26^\circ$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

4. 如图，D 是河岸 AB 上一点，C 是 AB 外一点，在什么情况下，C 与 D 的距离等于 C 与 AB 的距离？除这种情况外，这两个距离哪个大一些？



（第 4 题）

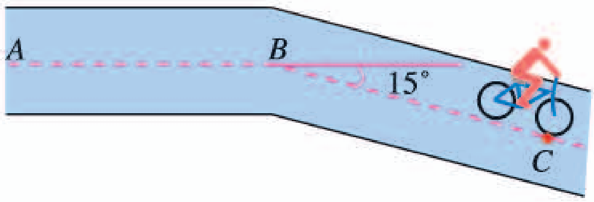
5. 根据下列语句画出图形：

(1) 过线段 AB 的中点 C，画 $CD \perp AB$；

(2) 点 P 到直线 AB 的距离是 3 cm，过点 P 画直线 AB 的垂线 PC；

(3) 过三角形 ABC 内的一点 P，分别画 AB，BC，CA 的平行线.

6. 如图，某人骑自行车自 A 沿正东方向前进，至 B 处后，行驶方向改为东偏南 $15°$，行驶到 C 处仍按正东方向行驶，画出继续行驶的路线.

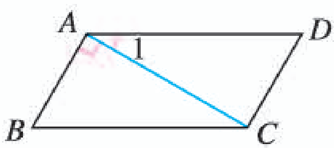


（第 6 题）

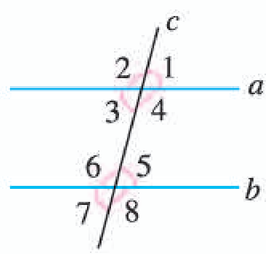
7. 如图，$\angle 1=30°$，$\angle B=60°$，$AB\perp AC$.

（1）$\angle DAB+\angle B$ 等于多少度?

（2）AD 与 BC 平行吗? AB 与 CD 平行吗?



（第 7 题）



（第 8 题）

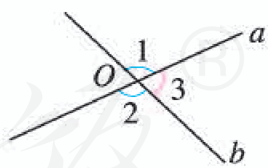
8. 如图，平行线 a，b 被直线 c 所截，知道 $\angle 1$～$\angle 8$ 中一个角的度数，能否求出其他角的度数? 如果能，用其中一个角表示出其他各角.

综合运用

9. 如图，直线 a，b 相交于点 O.

（1）已知 $\angle 1+\angle 2=220°$，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 各是多少度?

（2）已知 $\angle 3=\dfrac{2}{3}\angle 1$，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 各是多少度?



（第 9 题）

10. 选择题.

（1）如图(1)，点 E 在 AC 的延长线上，下列条件中能判断 $AB/\!/CD$ 的是（　　）.

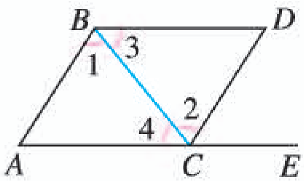
(A) $\angle 3=\angle 4$　　　　(B) $\angle 1=\angle 2$

(C) $\angle D=\angle DCE$　　　　(D) $\angle D+\angle ACD=180^\circ$

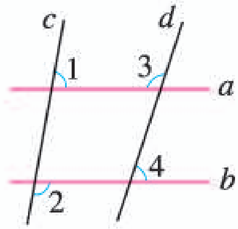
(2) 如图(2)，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，$\angle 3=108^\circ$，则$\angle 4$的度数是(　　).

(A) 72°　　　　(B) 80°

(C) 82°　　　　(D) 108°



(1)



(2)

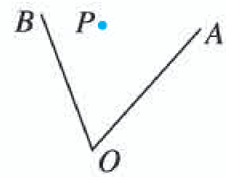
(第 10 题)

11. 如图，$\angle AOB$内有一点P.

(1) 过点P画$PC /\!/ OB$交OA于点C，画$PD /\!/ OA$交OB于点D；

(2) 写出图中互补的角；

(3) 写出图中相等的角.



(第 11 题)

12. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是真命题还是假命题. 如果是假命题，举出一个反例.

(1) 两个角的和等于平角时，这两个角互为补角；

(2) 内错角相等；

(3) 两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

13. 完成下面的证明.

(1) 如图(1)，点D，E，F分别是三角形ABC的边BC，CA，AB上的点，$DE /\!/ BA$，$DF /\!/ CA$. 求证$\angle FDE=\angle A$.

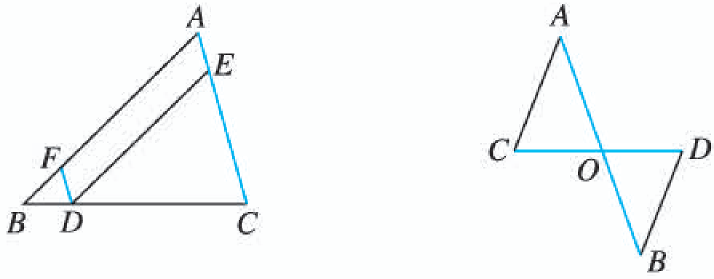
证明：$\because$ $DE /\!/ BA$，

$\therefore$ $\angle FDE=$________ (______________________).

$\because$ $DF /\!/ CA$，

$\therefore$ $\angle A=$________ (______________________).

$\therefore$ $\angle FDE=\angle A$.



（1）　　　　（2）

（第 13 题）

（2）如图（2），AB 和 CD 相交于点 O，$\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$．求证 $AC/\!/BD$．

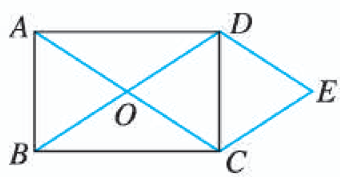
证明：∵　$\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$，

又　$\angle COA=\angle BOD$（______________________），

∴　$\angle C=$__________．

∴　$AC/\!/BD$（______________________）．

14．如图，在长方形 $ABCD$ 中，线段 AC，BD 相交于点 O，$DE/\!/AC$，$CE/\!/BD$，$BC=2$ cm，连接 OE．那么三角形 EDC 可以看作由哪个三角形平移得到？OE 的长是多少？



（第 14 题）

拓广探索

15．如图：

（1）由 $AD/\!/BC$，可以得出哪些角相等？为什么？

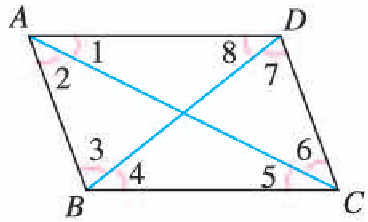
（2）由 $AB/\!/DC$，可以得出哪些角的和是 $180°$？为什么？

（3）由 $\angle 3=\angle 7$，可以得出哪两条直线平行？为什么？

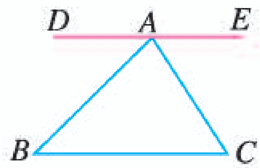
（4）由 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$，可以得出哪两条直线平行？为什么？

（5）由哪两条直线平行，可以得出 $\angle 4=\angle 8$？为什么？

（6）由哪两条直线平行，可以得出 $\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$？为什么？



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，直线 DE 经过点 A，$DE /\!/ BC$，$\angle B=44°$，$\angle C=57°$.

(1) $\angle DAB$ 等于多少度？为什么？

(2) $\angle EAC$ 等于多少度？为什么？

(3) $\angle BAC$ 等于多少度？

通过这道题，你能说明为什么三角形的内角和是 180°吗？

第九章　平面直角坐标系

在中华人民共和国成立60周年的庆典活动中，天安门广场上出现了壮观的背景图案，你知道它是怎么组成的吗？

原来，广场上有许多同学，每人都按图案设计的要求，按排号、列号站在一个确定的位置．随着指挥员的信号，他们举起不同颜色的花束，整个方阵就组成了壮观的背景图案．

类似于用“第几排第几列”来确定位置，在数学中可以通过建立坐标系，用有顺序的两个数来刻画平面内点的位置．

本章中，我们将学习平面直角坐标系等有关知识，由此建立图形与数量间的联系．这将为几何问题和代数问题的相互转化打下基础．

9.1 平面直角坐标系

9.1.1 有序数对

音乐厅对厅内的座位按“几排几号”编号，以便确定每一个座位在音乐厅中的位置. 这样，听众就能根据入场券上的“排数”和“号数”（例如，9 排 7 号）准确地“对号入座”.

这种办法在日常生活中是常用的. 比如，我们可以在教室平面图（图 9.1-1）上标出第 1 列第 5 排表示的座位.

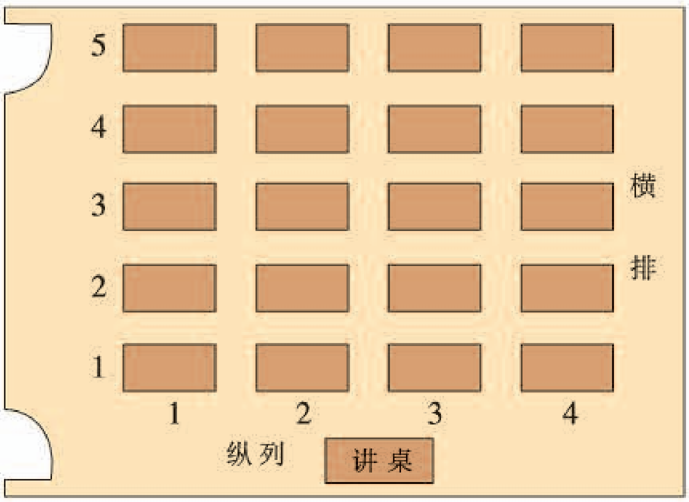


图 9.1-1

上面的问题都是通过像“9 排 7 号”“第 1 列第 5 排”这样含有两个数的表达方式来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，例如“9 排 7 号”前边的表示“排数”，后边的表示“号数”. 我们把这种有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做**有序数对**(ordered pair)，记作(a, b).

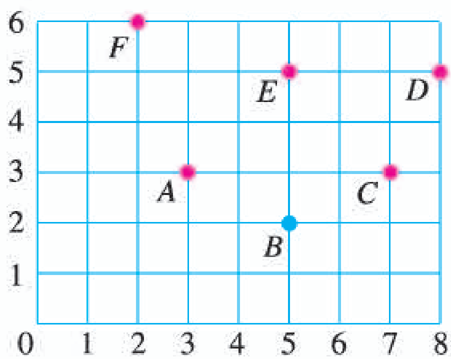
思考

确定教室里座位的位置时，排数和列数的先后顺序对位置有影响吗？假设我们约定“列数在前，排数在后”，请你在图 9.1-1 上标出 (2, 4)，(4, 2)，(3, 3) 表示的座位. (2, 4) 和 (4, 2) 在同一位置吗？

利用有序数对，可以准确地表示出一个位置. 生活中利用有序数对表示位置的情况是很常见的，如人们常用经纬度来表示地球上的地点等. 你能再举出一些例子吗?

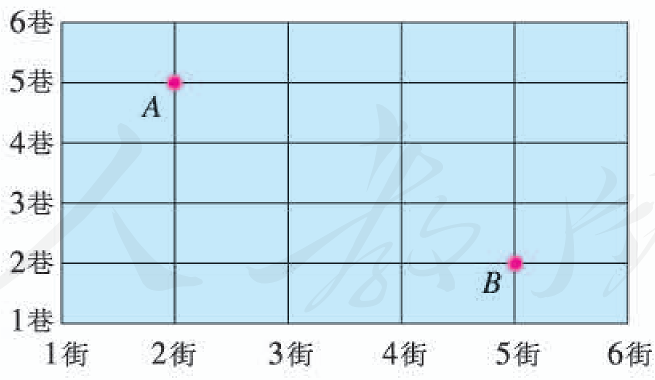
巩固运用9.1

1. 如图，表示点 B 的有序数对是 (5，2)，写出表示点 A，C，D，E，F 的有序数对.



(第 1 题)

2. 如图，A 处表示 2 街与 5 巷的十字路口，B 处表示 5 街与 2 巷的十字路口. 如果用 (2，5) 表示 A 处的位置，那么“(2，5) → (3，5) → (4，5) → (5，5) → (5，4) → (5，3) → (5，2)”表示从 A 处到 B 处的一种路线. 请你用这种形式再写出一种从 A 处到 B 处的路线.



(第 2 题)

9.1.2 平面直角坐标系

图 9.1-2 是一条数轴，我们知道，数轴上的点可以用一个数来表示，这个数叫做这个点在数轴上的坐标. 例如，点 A 在数轴上的坐标为-4，点 B 在数轴上的坐标为 2. 反过来，知道数轴上一个点的坐标，这个点在数轴上的位置也就确定了. 例如，数轴上坐标为 5 的点是点 C.

图 9.1-2

思考

类似于利用数轴确定直线上点的位置，能不能找到一种办法来确定平面内的点（例如图 9.1-3 中 A，B，C，D 各点）的位置呢？

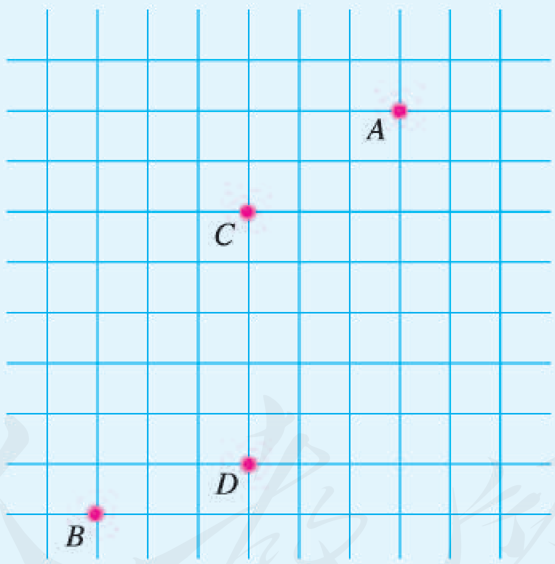


图 9.1-3

如图 9.1-4，我们可以在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成**平面直角坐标系**（rectangular coordinate system）. 水平的数轴称为 x **轴**（x-axis）或**横轴**，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y **轴**（y-axis）或**纵轴**，习惯上

取向上方向为正方向；两坐标轴的交点为平面直角坐标系的**原点**.

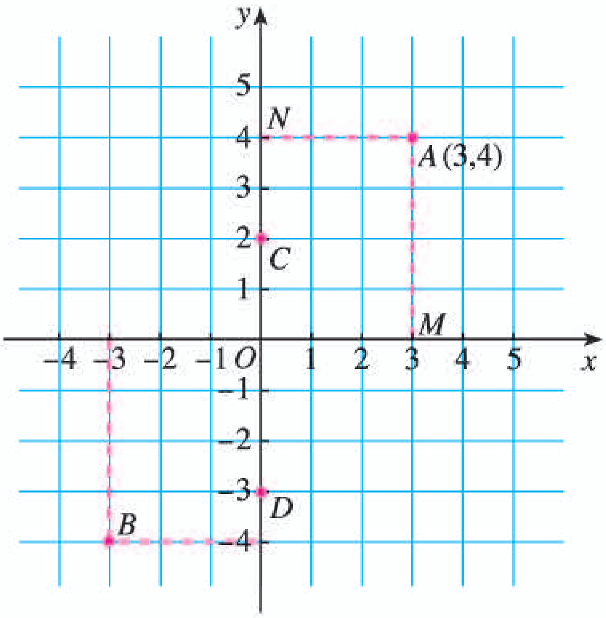


图 9.1-4

法国数学家笛卡儿(Descartes，1596—1650)，最早引入坐标系，用代数方法研究几何图形.

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一个有序数对来表示了. 例如，如图 9.1-4，由点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，我们说点 A 的横坐标是 3，纵坐标是 4，有序数对 (3，4) 就叫做点 A 的**坐标**(coordinate)，记作 $A(3，4)$. 类似地，请你写出点 B，C，D 的坐标.

思考

原点 O 的坐标是什么？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？

可以看出，原点 O 的坐标为 (0，0)；x 轴上的点的纵坐标为 0，例如 (1，0)，(−1，0)，…；y 轴上的点的横坐标为 0，例如 (0，1)，(0，−1)，….

建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分（图 9.1-5），每个部分称为**象限**(quadrant)，分别叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限.

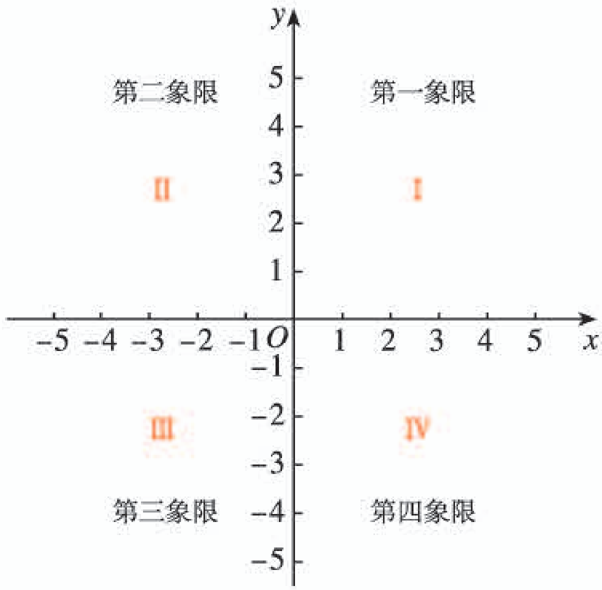
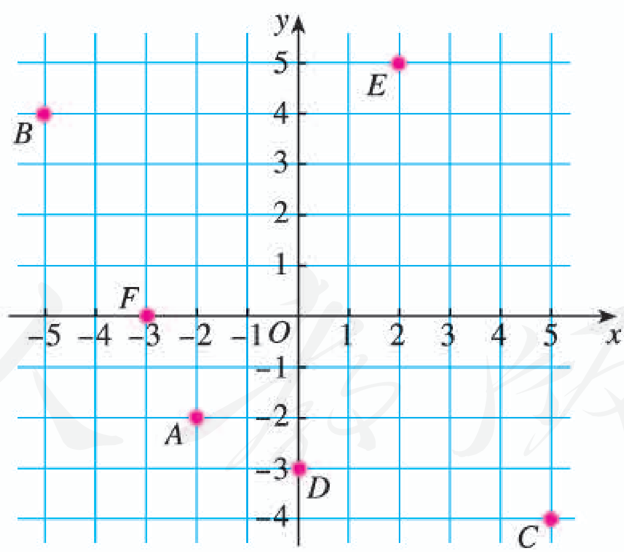


图 9.1-5

巩固运用9.2

1. 写出图中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.



（第 1 题）

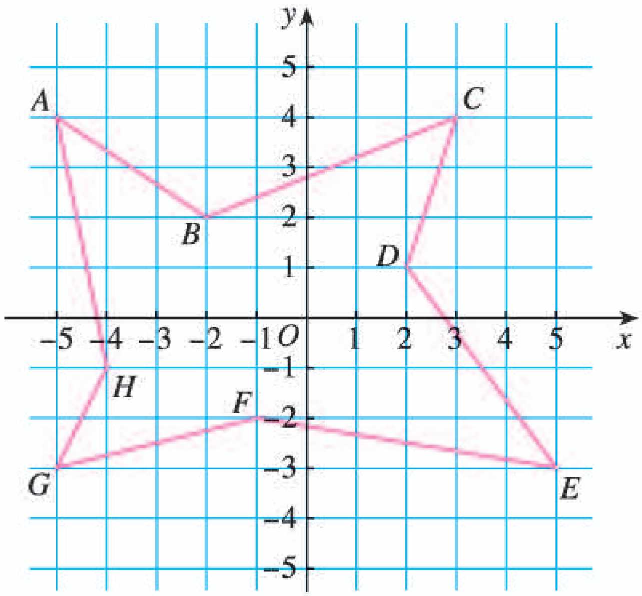
2. 点在第一象限中，它的横坐标、纵坐标都是正数.

(1) 点在第二象限中，它的横坐标、纵坐标分别是什么数?

(2) 点在第三象限中，它的横坐标、纵坐标分别是什么数?

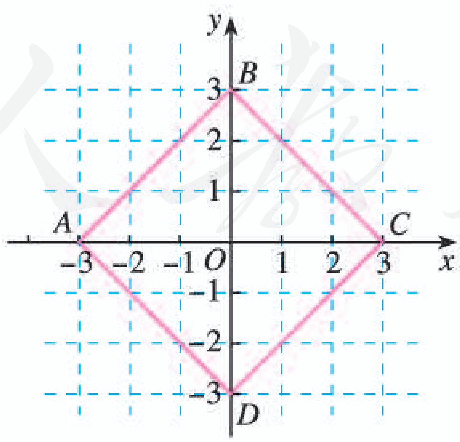
(3) 点在第四象限中，它的横坐标、纵坐标分别是什么数?

3. 如图，写出其中标有字母的各点的坐标，并指出它们的横坐标和纵坐标.



(第 3 题)

4. 图中正方形 $ABCD$ 四条边上横坐标、纵坐标都为整数的点有几个? 写出它们的坐标.



(第 4 题)

探究

在平面直角坐标系中描出下列各点：

$A(4, 5)$，$B(-2, 3)$，$C(-4, -1)$，$D(2.5, -2)$，$E(0, -4)$.

如图 9.1-6，先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A.

类似地，请你在图 9.1-6 上描出点 B，C，D，E.

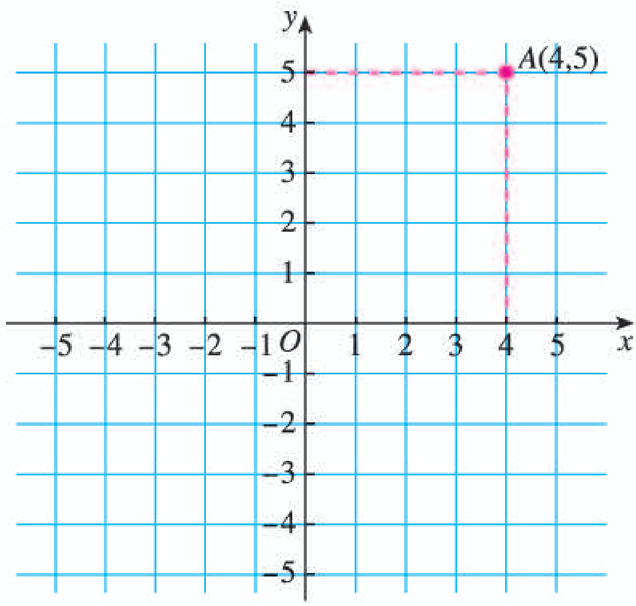


图 9.1-6

巩固运用9.3

1. 在平面直角坐标系中描出下列各点：
   $L(-5, -3)$，$M(4, 0)$，$N(-4, 2)$，$P(5, -3.5)$，$Q(0, 5)$，$R(4, 2)$.
2. 在平面直角坐标系中，描出下列各点：
   点 A 在 y 轴上，位于原点上方，距离原点 2 个单位长度；
   点 B 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 1 个单位长度；
   点 C 在 x 轴上方，y 轴右侧，距离每条坐标轴都是 2 个单位长度；

点 D 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 3 个单位长度；

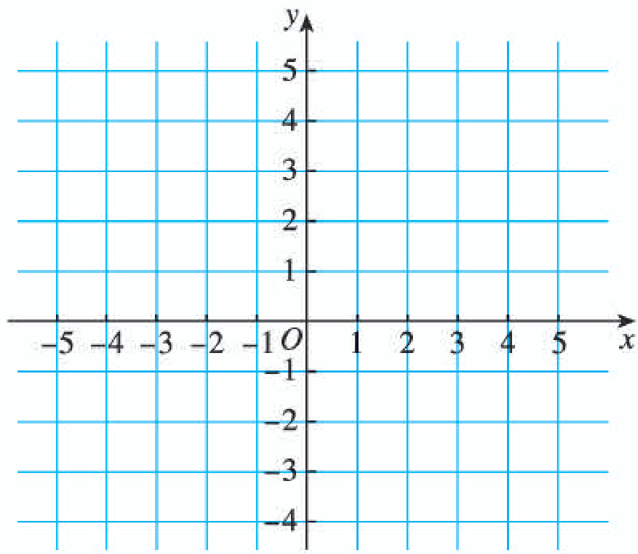
点 E 在 x 轴上方，y 轴右侧，距离 x 轴 2 个单位长度，距离 y 轴 4 个单位长度.

依次连接这些点，你能得到什么图形？

3. 如图，在所给的坐标系中描出下列各点：

$A(-4, -4)$，$B(-2, -2)$，$C(3, 3)$，$D(5, 5)$，$E(-3, -3)$，$F(0, 0)$.

这些点有什么关系？你能再找出一些类似的点吗？

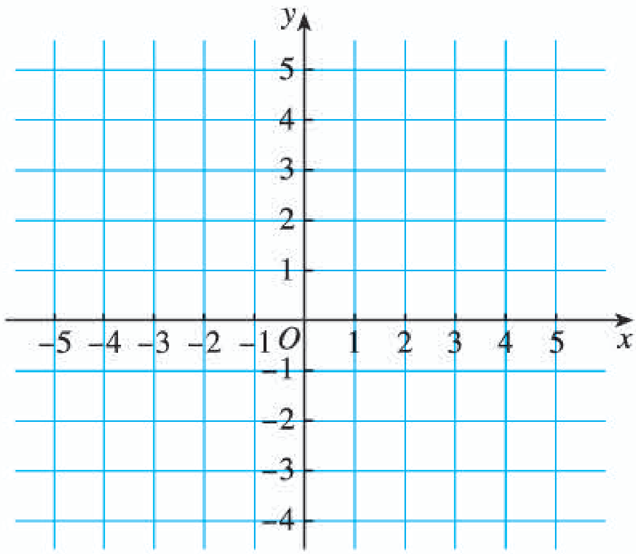


（第 3 题）

*4. 如图，在所给的坐标系中描出点 $A(-2, 4)$，$B(3, 4)$，画直线 AB. 若点 C 为直线 AB 上的任意一点，则点 C 的纵坐标是什么？想一想：

(1) 如果一些点在平行于 x 轴的直线上，那么这些点的纵坐标有什么特点？

(2) 如果一些点在平行于 y 轴的直线上，那么这些点的横坐标有什么特点？



（第 4 题）

*5. 已知点 $O(0, 0)$，$B(1, 2)$，点 A 在坐标轴上，且 $S_{\triangle OAB}=2$，求满足条件的点 A 的坐标.（提示：满足条件的点 A 有多个.）

例 （1）如图 9.1-7，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，如果以点 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么 y 轴是哪条直线？写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标.

（2）另建立一个平面直角坐标系，这时正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标又分别是什么？

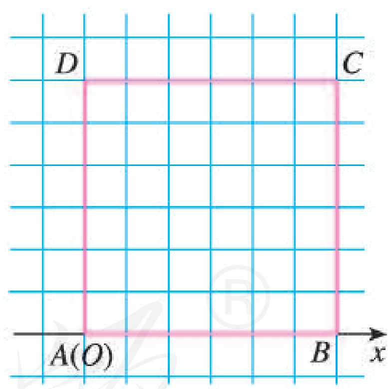


图 9.1-7

解：（1）y 轴是 AD 所在直线. 正方形顶点的坐标分别是 $A(0, 0)$，$B(6, 0)$，$C(6, 6)$，$D(0, 6)$.

（2）还可以以正方形的中心为原点，与 AB 平行的直线为 x 轴，与 AB 垂直的直线为 y 轴建立坐标系（图 9.1-8）.

这时正方形顶点的坐标分别是 $A(-3, -3)$，$B(3, -3)$，$C(3, 3)$，$D(-3, 3)$.

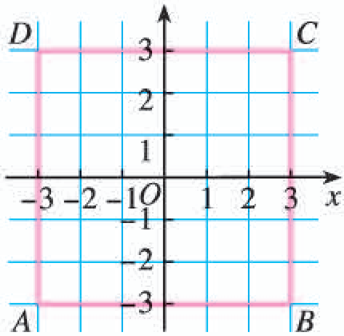
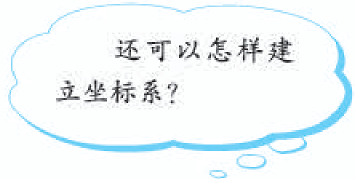
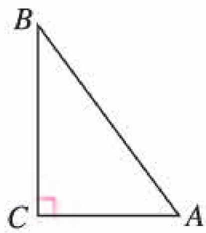


图 9.1-8



巩固运用9.4

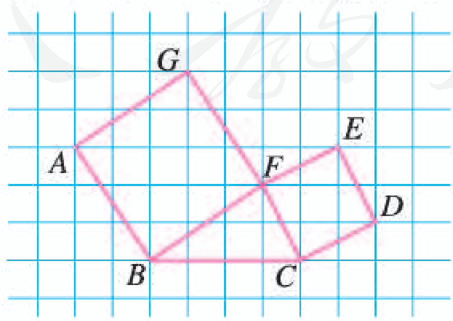
1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，建立平面直角坐标系，写出点 A，B，C 的坐标.



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，长方形 $ABCD$ 的长、宽分别为 2，1，建立平面直角坐标系，写出点 A，B，C，D 的坐标.
3. 如图，建立平面直角坐标系，使点 B，C 的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$，写出点 A，D，E，F，G 的坐标，并指出它们所在的象限.



（第 3 题）

阅读与思考

用经纬度表示地理位置

怎样表示地理位置呢？通过地球上的经度和纬度，人们可以确定一个地点在地球上的位置.

不管在地球仪（图 1）上、还是在各种地图上都布满了细线网，这就是经线和纬线. 地图上水平方向的线是纬线，它们用度（°）来表示地理纬度. 赤道上所有的点是 0 纬度，北极对应北纬 90°，南极对应南纬 90°. 北京位于北纬 39.9°，但仅用纬度确定北京的位置还是不够的，还需要第二个坐标——经度.

图 1

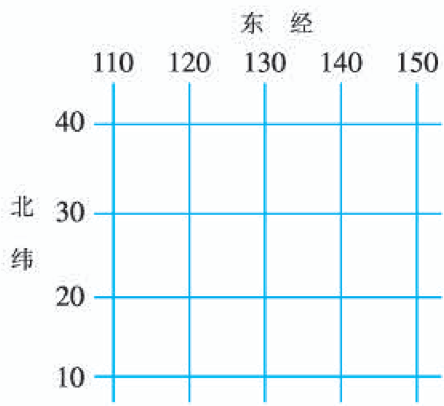


图 2

地图上竖直方向的线是经线，它们也用度（°）来表示地理经度. 经过英国格林尼治（Greenwich）天文台的经线是初始经线（0 经度）. 它东面的所有点有东经度值（从 0°到 180°），西面的点有西经度值. 例如北京位于东经 116.4°，再加上北京位于北纬 39.9°，就能确定北京在地球上的位置了.

由于地球可近似地看作一个球体，所以经线和纬线在地球表面构成一个坐标网. 经线沿东西方向分布，从地球南北极经过；纬线沿南北方向分布，是平行于赤道的环线. 指明一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置.

以下是某气象台发布的一次热带风暴的风暴中心位置的一些信息：

9 月 25 日 16 时：北纬 17.9°，东经 119.4°.

9 月 27 日 11 时：北纬 21.4°，东经 118.6°.

图 2 是利用经纬度画出的地图的一部分，你能在它上面找到这次热带风暴的风暴中心在上述两个时刻的大致位置吗？

9.2 用坐标表示地理位置

利用平面直角坐标系，可以绘制平面图表示区域内一些地点的分布情况.

探究

根据以下条件画一幅示意图，标出学校和小刚家、小强家、小敏家的位置（分别用点 O，A，B，C 表示）.

小刚家：出校门向东走 1 500 m，再向北走 2 000 m.

小强家：出校门向西走 2 000 m，再向北走 3 500 m，最后向东走 500 m.

小敏家：出校门向南走 500 m，再向东走 3 000 m，最后向南走 500 m.

如图 9.2-1，选学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定小正方形的边长代表 500 m 长. 依题目所给条件，点 A(1 500，2 000) 就是小刚家的位置.

类似地，请你写出表示小强家、小敏家的位置的坐标，并在图 9.2-1 上标出它们的位置.

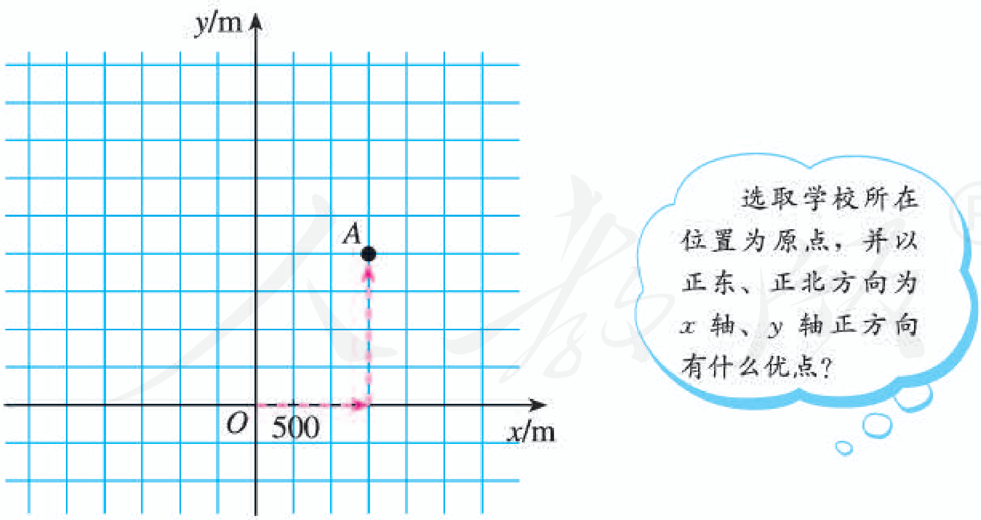


图 9.2-1

归纳

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布情况平面图的过程如下：

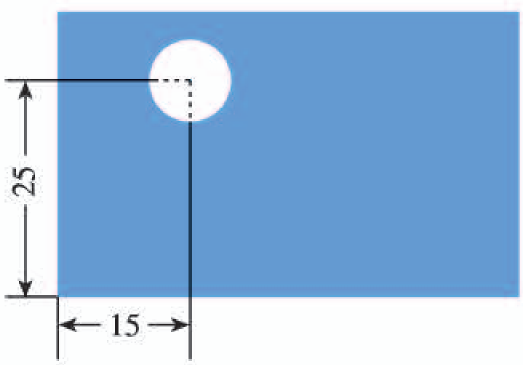
（1）建立坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴的正方向；

（2）根据具体问题确定单位长度；

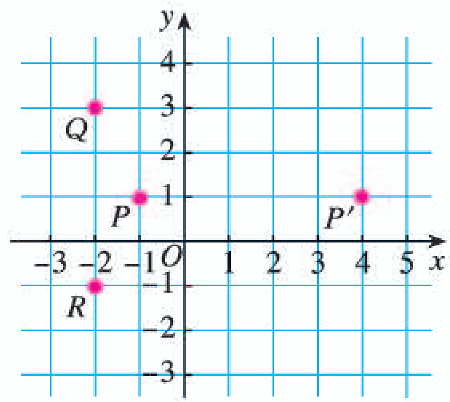
（3）在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和表示这些地点的字母.

巩固运用9.5

1. 如图，长方形零件（单位：mm）中有一个圆孔，建立适当的坐标系，用坐标表示孔心的位置.



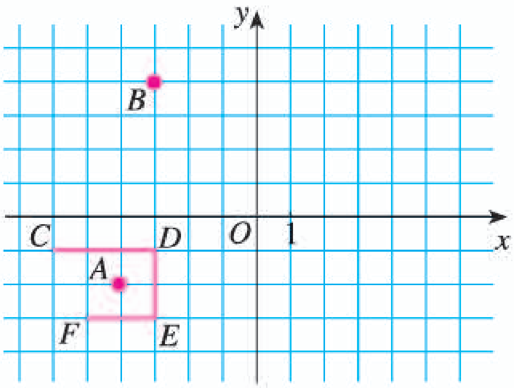
（第 1 题）



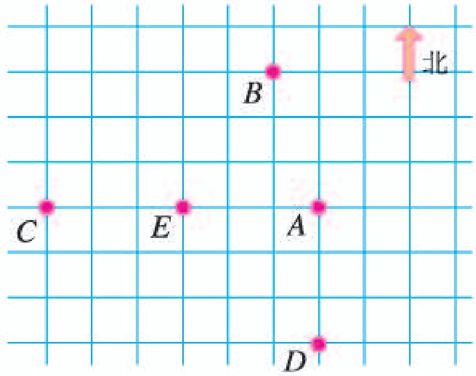
（第 2 题）

2. 如图，三辆汽车分别位于 P，Q，R 处，写出这三辆汽车所在位置的坐标. 若三辆汽车沿同一方向，以同样速度保持编队行驶，当位于 P 处的汽车行驶到 P' 位置时，位于 Q，R 处的汽车行驶到 Q'，R'，分别写出这三辆汽车新位置的坐标.

3. 如图，机械手要将一个工件从图中 A 处移动到 B 处，但是这个工件不能碰到图中折线 $CDEF$ 表示的障碍，试用坐标写出一条机械手在移动中可能要走过的路线.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，这是一所学校的平面示意图（图中小正方形的边长代表 50 m 长），其中点 A，B，C，D，E 分别表示教学楼、图书馆、校门、食堂、国旗杆的位置. 建立适当的平面直角坐标系，并用坐标表示教学楼、图书馆、校门、食堂、国旗杆的位置. 类似地，你能用坐标表示你自己学校各主要建筑物的位置吗?

我们知道，通过建立平面直角坐标系，可以用坐标表示平面内点的位置. 还有其他方法吗?

思考

如图 9.2-2，一艘船在 A 处遇险后向相距 35 n mile、位于 B 处的救生船报警，如何用方向和距离描述救生船相对于遇险船的位置? 救生船接到报警后准备前往救援，如何用方向和距离描述遇险船相对于救生船的位置?

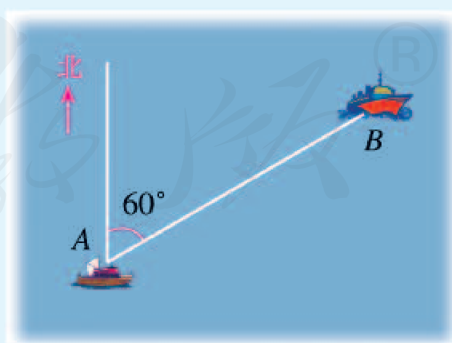


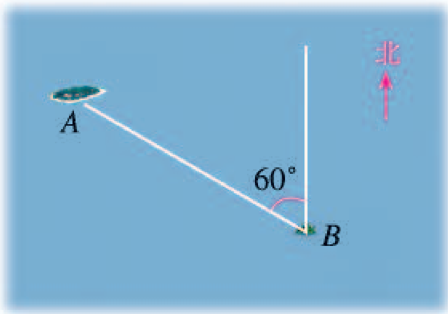
图 9.2-2

由图 9.2-2 可知，救生船在遇险船北偏东 60°的方向上，与遇险船的距离是 35 n mile，用北偏东 60°，35 n mile 就可以确定救生船相对于遇险船的位置. 反过来，用南偏西 60°，35 n mile 就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

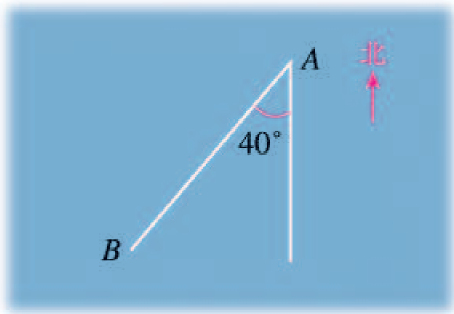
一般地，可以建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置. 此外，还可以用方向和距离表示平面内物体的位置.

巩固运用9.6

1. 如图，位于 A 处的海岛与位于 B 处的观测点相距 20 n mile，如何用方向和距离描述海岛相对于观测点的位置？反过来，如何用方向和距离描述观测点相对于海岛的位置？



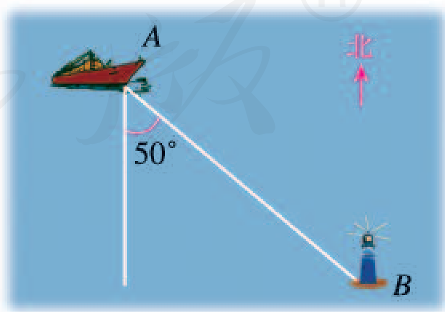
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在一次活动中，位于 A 处的七年级同学准备前往相距 5 km 的 B 处与八年级同学会合，如何用方向和距离描述八年级同学相对于七年级同学的位置？反过来，如何用方向和距离描述七年级同学相对于八年级同学的位置？

3. 如图，位于 A 处的货轮与位于 B 处的灯塔相距 40 n mile，如何用方向和距离描述灯塔相对于货轮的位置？反过来，如何用方向和距离描述货轮相对于灯塔的位置？



（第 3 题）

9.3 用坐标表示平移

在平面直角坐标系中，对一个图形进行平移，图形上点的位置发生了变化，坐标也发生了变化.

探究

如图 9.3-1，将点 $A(2,1)$ 向右平移 3 个单位长度，得到点 A_1，在图上标出这个点，并写出它的坐标. 观察坐标的变化，你能从中发现什么规律吗？把点 A 向上平移 4 个单位长度呢？把点 A 向左或向下平移呢？

再找几个点，对它们进行平移，观察它们的坐标是否按你发现的规律变化.

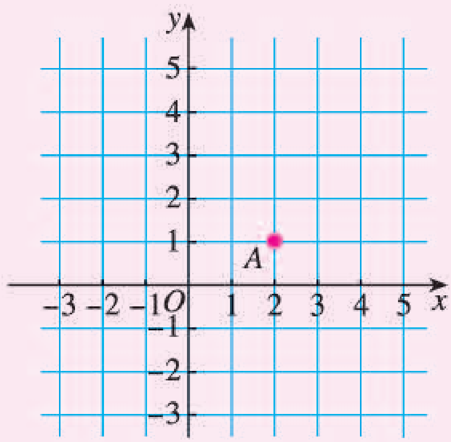


图 9.3-1

一般地，在平面直角坐标系中，将点 (x,y) 向右（或左）平移 a 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a,y)$（或 $(x-a,y)$）；将点 (x,y) 向上（或下）平移 b 个单位长度，可以得到对应点 $(x,y+b)$（或 $(x,y-b)$）.

探究

如图 9.3-2，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-4,4)$，$B(-4,3)$，$C(-3,3)$，$D(-3,4)$，将正方形 $ABCD$ 向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应变为点 E，F，G，H，它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同吗？

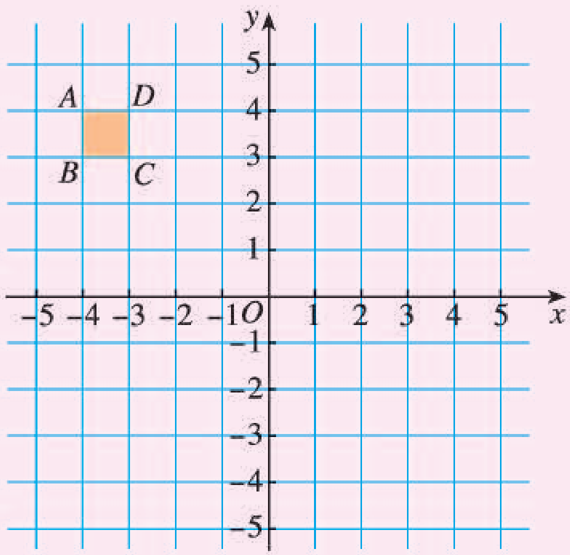


图 9.3-2

可求出点 E，F，G，H 的坐标分别是 $(4,\ -3)$，$(4,\ -4)$，$(5,\ -4)$，$(5,\ -3)$. 如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同（图 9.3-3）.

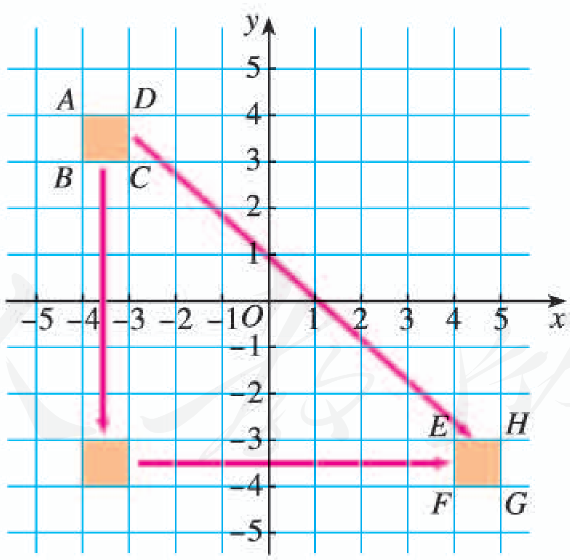
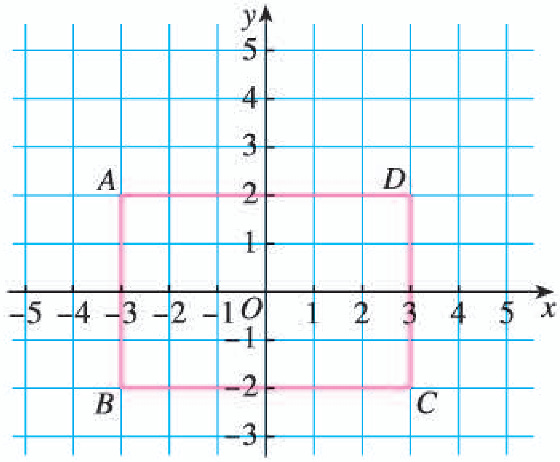


图 9.3-3

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.

巩固运用9.7

1. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点分别是 $A(-3, 2)$，$B(-3, -2)$，$C(3, -2)$，$D(3, 2)$. 将长方形向左平移 2 个单位长度，各个顶点的坐标变为什么？将它向上平移 3 个单位长度呢？

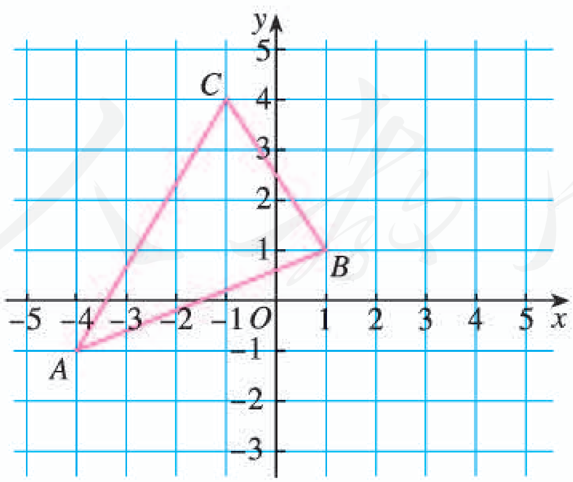


（第 1 题）

2. 选择题. 如图，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(-4, -1)$，$B(1, 1)$，$C(-1, 4)$. 将三角形 ABC 向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，则平移后三个顶点的坐标是（　　）.

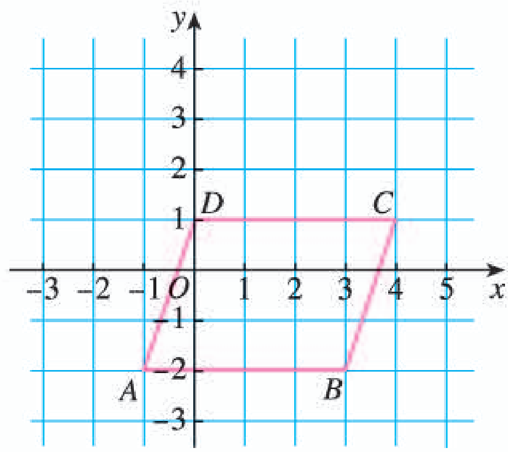
(A) $(2, 2)$，$(3, 4)$，$(1, 7)$　　(B) $(-2, 2)$，$(4, 3)$，$(1, 7)$

(C) $(-2, 2)$，$(3, 4)$，$(1, 7)$　　(D) $(2, -2)$，$(3, 3)$，$(1, 7)$



（第 2 题）

3. 如图，将平行四边形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度，然后再向上平移 3 个单位长度，可以得到平行四边形 $A'B'C'D'$，指出顶点 A'，B'，C'，D'的坐标.



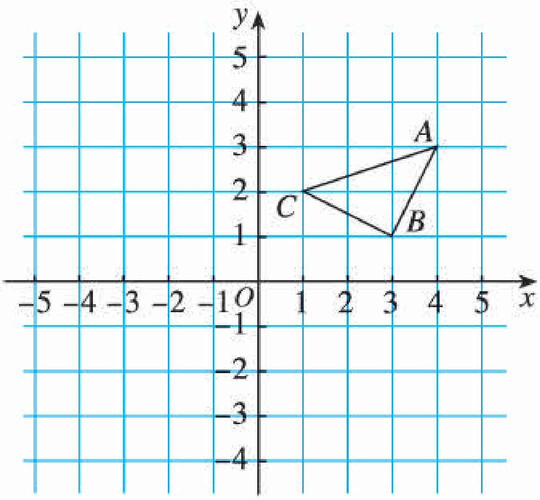
（第 3 题）

对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移.

例 如图 9.3-4(1)，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4, 3)$，$B(3, 1)$，$C(1, 2)$.

(1) 将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到点 A_1，B_1，C_1，连接 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

(2) 将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，连接 A_2B_2，B_2C_2，C_2A_2，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？



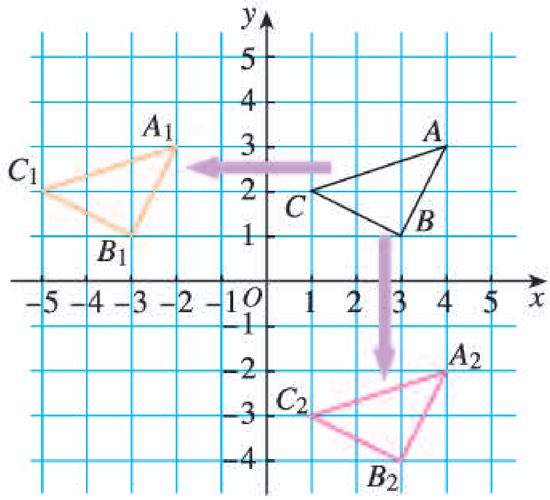


图 9.3-4

解：如图 9.3-4(2)，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到. 类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到.

思考

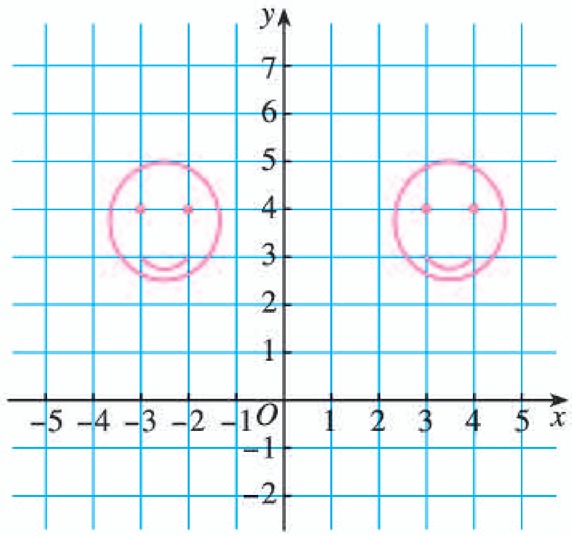
(1) 如果将这个问题中的“横坐标都减去 6”“纵坐标都减去 5”相应地变为“横坐标都加 3”“纵坐标都加 2”，分别能得出什么结论？画出得到的图形.

(2) 如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，能得到什么结论？画出得到的图形.

一般地，在平面直角坐标系内，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度.

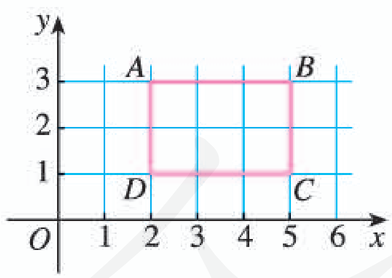
巩固运用9.8

1. 如图，把左图各个点的横坐标都加 6，纵坐标不变，相应的点组成右图，右图与左图的位置有什么关系？

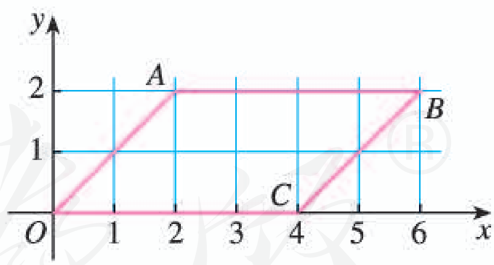


（第 1 题）

2. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2, 3)$，$B(5, 3)$，$C(5, 1)$，$D(2, 1)$. 将这个长方形的四个顶点的纵坐标都减 2，分别得到点 A'，B'，C'，D'，连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，所得四边形 $A'B'C'D'$ 与长方形 $ABCD$ 的大小、形状和位置有什么关系？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，平行四边形 $ABCO$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2, 2)$，$B(6, 2)$，$C(4, 0)$，$O(0, 0)$. 将这个平行四边形的四个顶点的横坐标都减 3，同时纵坐标都加 1，分别得到点 A'，B'，C'，O'，连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'O'$，$O'A'$，所得四边形 $A'B'C'O'$ 与平行四边形 $ABCO$ 的大小、形状和位置有什么关系？

数学活动

春天到了，七年级组织同学到人民公园春游．图1是南门附近一些景点的示意图，其中点 A，B，C，D，E，F 分别表示中心广场，牡丹园，游乐园，南门，望春亭，湖心亭的位置．张明、李华对着示意图如下描述牡丹园的位置（图1中小正方形的边长代表 100 m 长）．

张明："牡丹园的坐标是（300，300）."

李华："牡丹园在中心广场东北方向约 420 m 处."

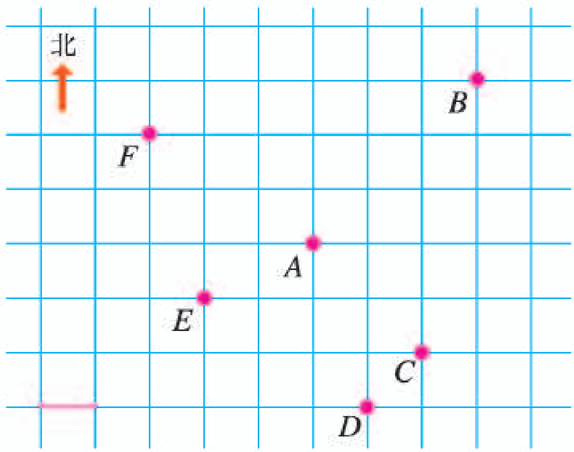


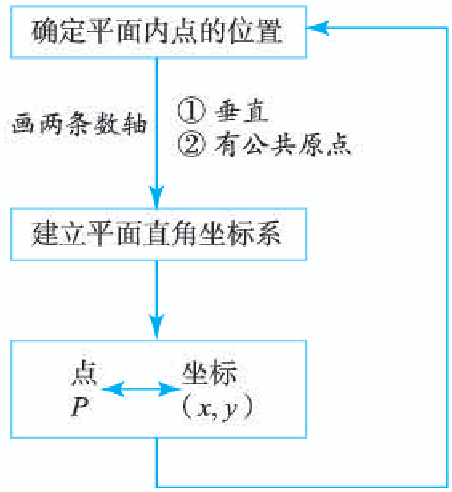
图1

实际上，他们所说的位置都是正确的．你知道张明同学是如何在示意图上建立坐标系的吗？你理解李华同学所说的"东北方向约 420 m 处"的含义吗？

用他们的方法，你能描述南门附近其他景点的位置吗？与同学们交流一下．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们通过具体实例学习了平面直角坐标系等知识，应用坐标方法解决了一些简单问题.

2. 在日常生活中，我们可以用有序数对来描述物体的位置. 以教室中座位位置为例，说明有序数对 (x, y) 和 (y, x) 是否相同以及为什么.

3. 平面直角坐标系由两条互相垂直且有公共原点的数轴组成. 请你举例说明如何建立平面直角坐标系，在直角坐标平面内描出点 $P(2, 4)$ 和原点的位置，并指出点 P 和原点的横坐标和纵坐标.

平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分，这四个部分依次称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 请你在直角坐标平面内描出点 $A(2, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, -1)$，$D(2, -1)$ 的位置，并说明它们所在的象限.

4. 平面直角坐标系具有广泛的应用，请你举例说明它的应用.

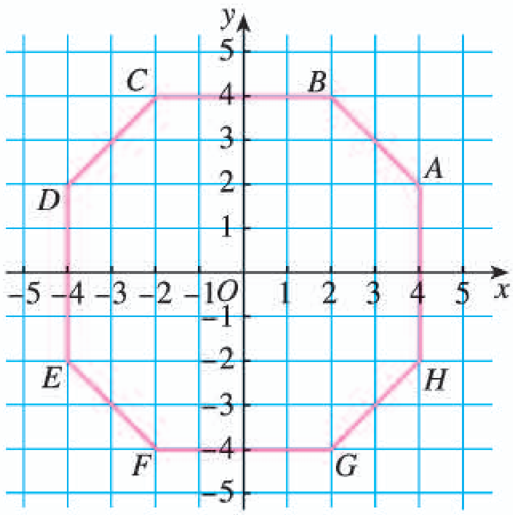
复习题 9

复习巩固

1. 指出下列各点的横坐标和纵坐标，并指出各点所在的象限：

$$A(2,\ 3),\ B(-2,\ 3),\ C(-2,\ -3),\ D(2,\ -3).$$

2. 如图，写出八边形 $ABCDEFGH$ 各顶点的坐标.

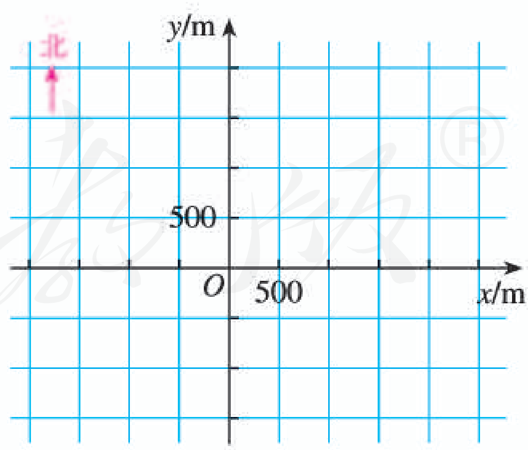


（第 2 题）

3. 在同一平面直角坐标系中描出下列各点：

$(3,\ 0)$，$(4,\ 1)$，$(-2,\ 2)$，$(-5,\ -4)$，$(0,\ -2)$，$(2,\ -1)$.

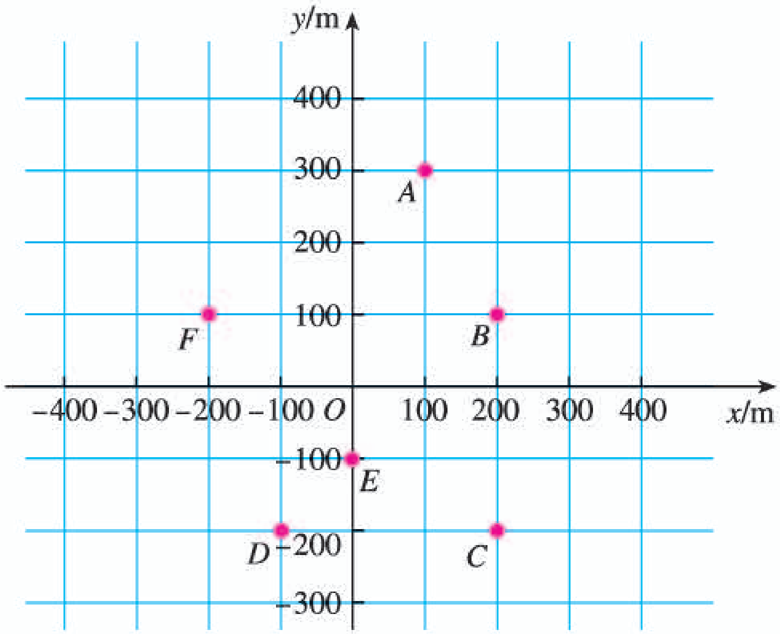
4. 李强同学家在学校以东 1 000 m再往北1 500 m处，张明同学家在学校以西 2 000 m再往南 500 m 处，王玲同学家在学校以南 1 500 m处. 如图，选学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定小正方形的边长代表 500 m 长. 在这个坐



（第 4 题）

标系中画出这三位同学家的位置，并用坐标表示出来.

5. 图中标明了李明家附近的一些地方，点 A，B，C，D，E，F 分别表示音乐厅、面包店、消防站、街心花园、姥姥家、李明家的位置.



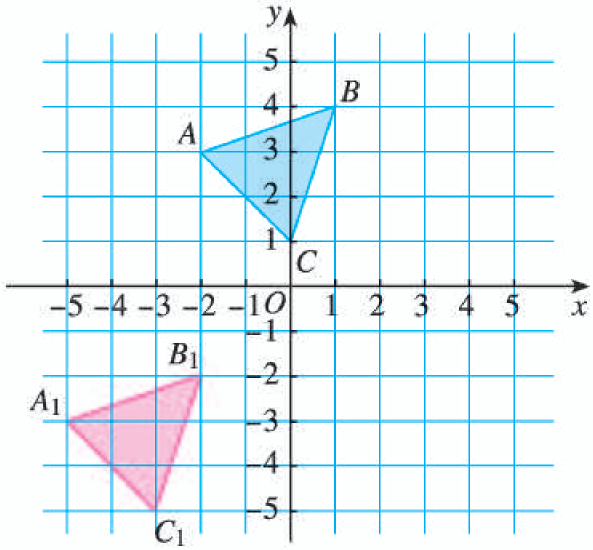
（第 5 题）

（1）写出最上方的音乐厅的坐标.

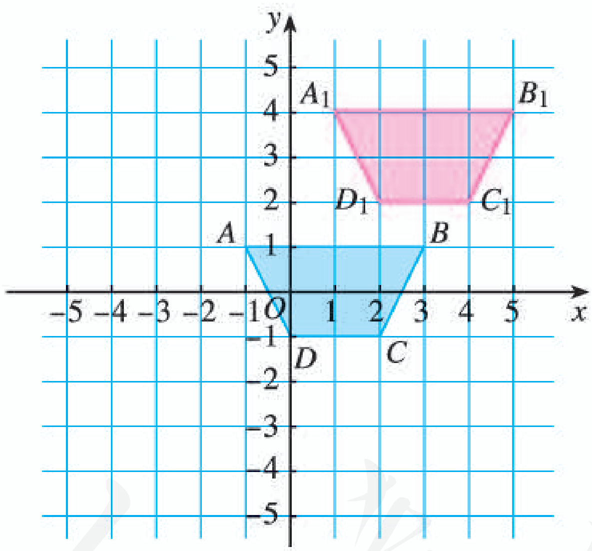
（2）某星期日早晨，李明同学从家里出发，沿（200，100），（200，−200），（0，−100），（−100，−200）的路线转了一下，又回到家里，写出他路上经过的地方.

6. （1）如图（1），三角形 $A_1B_1C_1$ 可以由三角形 ABC 经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？

（2）如图（2），梯形 $A_1B_1C_1D_1$ 可以由梯形 $ABCD$ 经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？



（1）



（2）

（第 6 题）

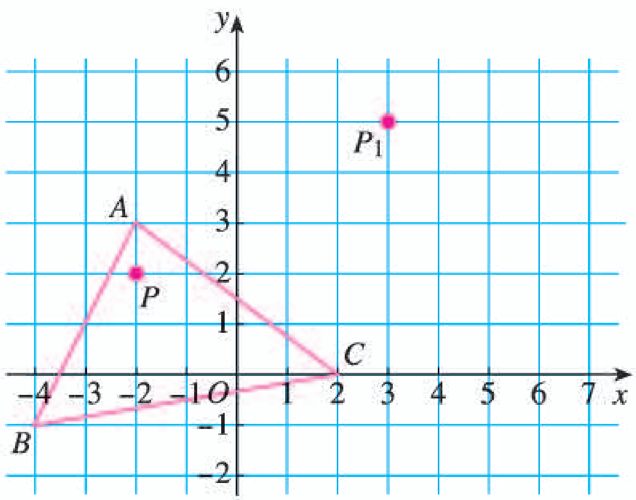
综合运用

7.（1）坐标 $(x, 3)$ 中的 x 取 -3，-2，-1，0，1，2，3 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

（2）坐标（3，y）中的 y 取-3，-2，-1，0，1，2，3 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

8. 某村过去是一个缺水的村庄，由于兴修水利，现在家家户户都用上了自来水．据村委会主任徐伯伯讲，以前全村 400 多户人家只有三口水井：第一口在村委会北偏东 30°方向 2 000 m 处，第二口在村委会正西方向 1 500 m 处，第三口在村委会东南方向 1 000 m 处．请你根据徐伯伯的话，和同学们一起讨论，画图表示这个村庄三口水井的位置．

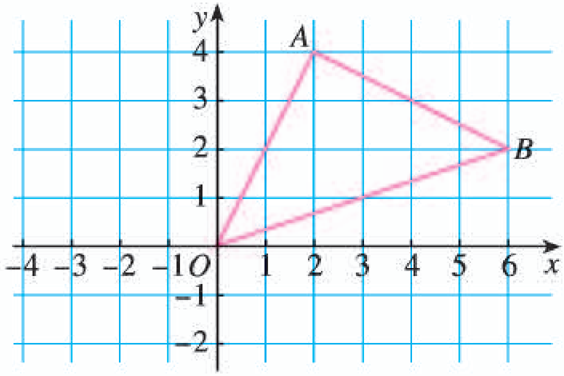
9. 如图，三角形 ABC 的三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 3)$，$B(-4, -1)$，$C(2, 0)$．三角形 ABC 中任意一点 $P(x_0, y_0)$ 经平移后对应点为 $P_1(x_0+5, y_0+3)$，将三角形 ABC 作同样的平移得到三角形 $A_1B_1C_1$．求 A_1，B_1，C_1 的坐标．



（第 9 题）

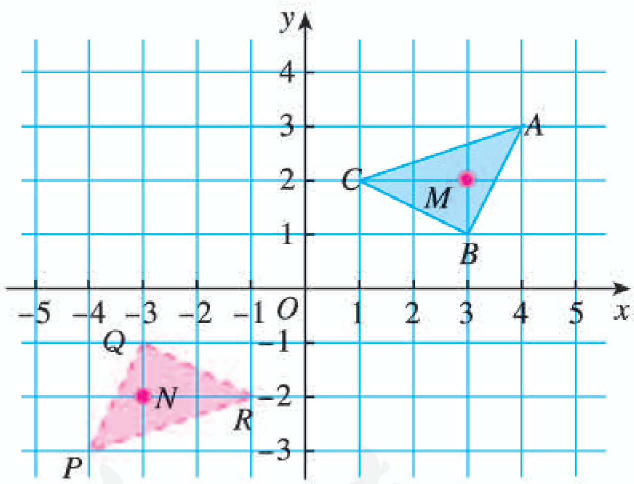
拓广探索

10. 如图，在三角形 AOB 中，A，B 两点的坐标分别为（2，4），（6，2），求三角形 AOB 的面积．（提示：三角形 AOB 的面积可以看作一个长方形的面积减去一些小三角形的面积．）



（第 10 题）

11. 如图，三角形 PQR 是三角形 ABC 经过某种变换后得到的图形，分别写出点 A 与点 P，点 B 与点 Q，点 C 与点 R 的坐标，并观察它们之间的关系. 三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为 (x, y)，点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？

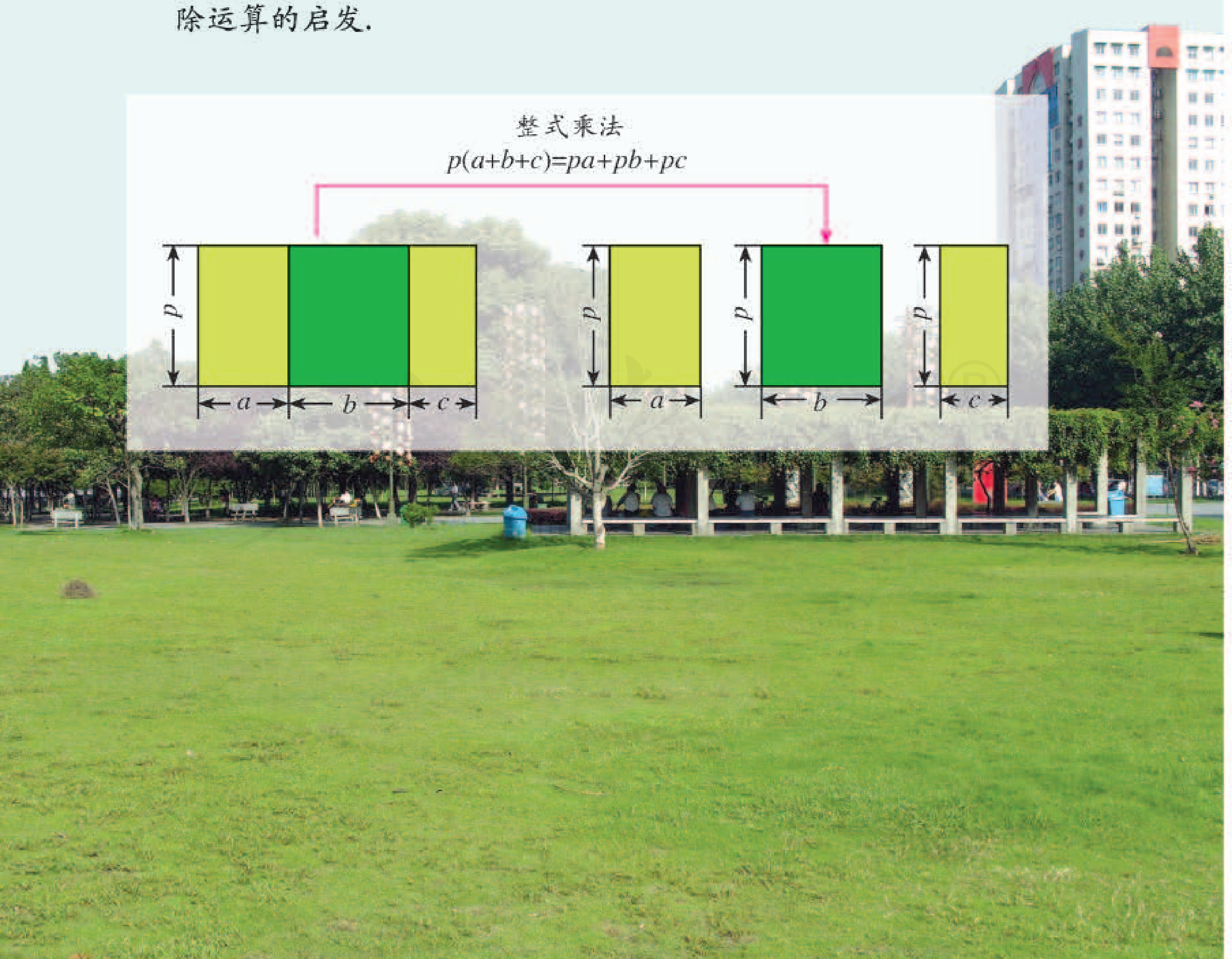


（第 11 题）

第十章　整式的乘除

为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长 p m、宽 b m 的长方形绿地，向两边分别加宽 a m 和 c m，你能用几种方法表示扩大后的绿地面积？不同的表示方法之间有什么关系？

回答上面的问题，要用到整式的乘法运算的知识. 本章我们将在上册学习整式的加减法的基础上，继续学习整式的乘除运算，它们是代数运算以及解决许多数学问题的重要基础. 我们可以类比数的运算，以运算律为基础，得到关于整式的乘除运算的启发.



10.1 整式的乘法

10.1.1 同底数幂的乘法

问题 1 一种电子计算机每秒可进行 1 千万亿（10^{15}）次运算，它工作 10^3 s可进行多少次运算？

它工作 10^3 s 可进行运算的次数为 $10^{15}\times10^3$. 怎样计算 $10^{15}\times10^3$呢？

根据乘方的意义可知

$$\begin{aligned}10^{15}\times10^3&=(\underbrace{10\times\cdots\times10}_{15\text{个}10})\times(10\times10\times10)\\&=\underbrace{10\times10\times\cdots\times10}_{18\text{个}10}\\&=10^{18}.\end{aligned}$$

探究

根据乘方的意义填空，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $2^5\times2^2=(2\times2\times2\times2\times2)\times(2\times2)=2^{(\quad)}$；

(2) $a^3\cdot a^2=$________________$=a^{(\quad)}$；

(3) $5^m\times5^n=$________________$=5^{(\quad)}$（m，n 都是正整数）.

一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$\begin{aligned}a^m\cdot a^n&=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{个}a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a})\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)\text{个}a}=a^{m+n}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (m,\ n\text{ 都是正整数}).}$$

即**同底数幂相乘，底数不变，指数相加**.

例 1 计算：

(1) $x^2 \cdot x^5$；

(2) $a \cdot a^6$；

(3) $(-2)\times(-2)^4\times(-2)^3$；

(4) $x^m \cdot x^{3m+1}$.

$a=a^1$.

解：(1) $x^2 \cdot x^5=x^{2+5}=x^7$；

(2) $a \cdot a^6=a^{1+6}=a^7$；

(3) $(-2)\times(-2)^4\times(-2)^3=(-2)^{1+4+3}=(-2)^8=256$；

(4) $x^m \cdot x^{3m+1}=x^{m+3m+1}=x^{4m+1}$.

巩固运用10.1

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $x^3 \cdot x^2=x^6$；

(2) $a \cdot a^3=a^{0+3}=a^3$；

(3) $b^3 \cdot b^3=2b^3$；

(4) $x^{2m} \cdot x^{4n+2}=x^{2m+4n+2}$.

2. 计算：

(1) $b^5 \cdot b$；

(2) $x^5 \cdot x^5$；

(3) $a^2 \cdot a^6$；

(4) $y^{2n} \cdot y^{n+1}$.

3. 计算：

(1) $10^2\times10^4\times10^6$；

(2) $(-3)\times(-3)^2\times(-3)^2$；

(3) $x^5 \cdot x^6 \cdot x^3$；

(4) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^2$.

4. 计算：

(1) $x^2 \cdot x^3+x^2 \cdot x^2 \cdot x$；

(2) $y^m \cdot y^{m+2}+y^{2m-1} \cdot y^{3-m} \cdot y^m$.

5. 长方形地块的长是 10^5 m，宽是 10^4 m，求长方形地块的面积.

10. 1. 2 幂的乘方

探究

根据乘方的意义及同底数幂的乘法填空，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $(3^2)^3=3^2\times3^2\times3^2=3^{(\ )}$；

(2) $(a^2)^3=$__________$=a^{(\ )}$；

(3) $(a^m)^3=$__________$=a^{(\ )}$ (m 是正整数).

一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n\text{个}a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}=a^{mn}.$$

因此，我们有

$$\boxed{(a^m)^n=a^{mn}\ (m,\ n\text{ 都是正整数}).}$$

即**幂的乘方，底数不变，指数相乘.**

例 2 计算：

(1) $(10^3)^5$； (2) $(a^4)^4$； (3) $(a^m)^2$； (4) $-(x^4)^3$.

解：(1) $(10^3)^5=10^{3\times5}=10^{15}$；

(2) $(a^4)^4=a^{4\times4}=a^{16}$；

(3) $(a^m)^2=a^{m\times2}=a^{2m}$；

(4) $-(x^4)^3=-x^{4\times3}=-x^{12}$.

巩固运用10.2

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

   (1) $(a^5)^2=a^7$； (2) $(a^3)^2=a^6$；

   (3) $(x^3)^n=x^{3n}$； (4) $(a^3)^3\cdot a^4=a^{10}$.

2. 计算：

   (1) $(10^3)^3$； (2) $(x^3)^2$； (3) $-(x^m)^5$； (4) $(x^{2m})^n$.

3. 计算：

   (1) $(a^2)^3\cdot a^5$； (2) $(x^4)^2\cdot x^5$；

   (3) $(y^3)^4\cdot(y^4)^3$； (4) $(c^2)^n\cdot(c^m)^3$.

4. 计算：

   (1) $(x^2)^4\cdot x+(x^3)^2\cdot x^3$；

   (2) $(x^2)^3\cdot x^5+(x^5)^2\cdot x$.

5. 计算：

   $x(x^2\cdot x^3)^2-(x^3)^3\cdot x^2+(x^4)^3\cdot x$.

10.1.3 积的乘方

探究

填空，运算过程用到哪些运算律？运算结果有什么规律？

(1) $(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^{(\ )}b^{(\ )}$；

(2) $(ab)^3=$__________$=$____________$=a^{(\ )}b^{(\ )}$.

一般地，对于任意底数 a，b 与任意正整数 n，

$$(ab)^n=\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n\text{个}ab}$$
$$=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}a}\cdot\overbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}^{n\text{个}b}=a^nb^n.$$

因此，我们有

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n\ (n\text{ 为正整数}).}$$

即**积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.**

例 3 计算：

(1) $(2a)^3$； (2) $\left(-\frac{1}{5}b\right)^3$；

(3) $(xy^2)^2$； (4) $(-2x^3)^4$.

解：(1) $(2a)^3=2^3\cdot a^3=8a^3$；

(2) $\left(-\frac{1}{5}b\right)^3=\left(-\frac{1}{5}\right)^3\cdot b^3=-\frac{1}{125}b^3$；

(3) $(xy^2)^2=x^2\cdot(y^2)^2=x^2y^4$；

(4) $(-2x^3)^4=(-2)^4\cdot(x^3)^4=16x^{12}$.

巩固运用10.3

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $(3a)^3=27a^3$； (2) $(xy^3)^3=x^3y^6$；

(3) $(ab^2)^3=ab^6$； (4) $(-2a)^2=-4a^2$.

2. 计算：

(1) $(ab)^4$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3$；

(3) $(-3\times10^2)^3$；　　(4) $(2ab^2)^3$.

3. 计算：

(1) $(-c)^4\cdot(c^2)^2$；　　(2) $(x^2y)^2\cdot(x^2y)^3$.

4. 计算：

(1) $(x^2)^3\cdot x^3+(-2x^3)^3$；

(2) $a^6\cdot(-a^2)^2-(-3a^5)^2$.

*5. 已知 $x^{2n}=16$，$y^{2n}=\frac{1}{64}$，求 $(xy)^{6n}$.

10.1.4　整式的乘法

问题 2　光的速度约是 3×10^5 km/s，太阳光照射到地球上需要的时间约是 5×10^2 s，你知道地球与太阳的距离约是多少吗？

地球与太阳的距离约是 $(3\times10^5)\times(5\times10^2)$ km.

地球与太阳的距离约是 $15\times10^7=1.5\times10^8$(km).

思考

(1) 怎样计算 $(3\times10^5)\times(5\times10^2)$？计算过程中用到哪些运算律及运算性质？

(2) 如果将上式中的数字改为字母，比如 $ac^5\cdot bc^2$，怎样计算这个式子？

$ac^5\cdot bc^2$ 是单项式 ac^5 与 bc^2 相乘，我们可以利用乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质来计算：

$$ac^5\cdot bc^2=(a\cdot b)\cdot(c^5\cdot c^2)=abc^{5+2}=abc^7.$$

一般地，**单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.**

例 4 计算：

(1) $3xy^2 \cdot 2y^3$；　　(2) $(-5a^2b)(3a)$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}xy^2\right)^2$.

解：(1) $3xy^2 \cdot 2y^3$

$=(3\times2)x \cdot (y^2 \cdot y^3)$

$=6xy^5$；

(2) $(-5a^2b)(3a)$

$=[(-5)\times3](a^2 \cdot a) \cdot b$

$=-15a^3b$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}xy^2\right)^2$

$=\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \frac{9}{4}x^2y^4$

$=\left[-\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}\right](x^2 \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^4)$

$=-\frac{3}{2}x^4y^5$.

巩固运用10.4

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $3a^3 \cdot 2a^2=6a^6$；　　(2) $-2x^2 \cdot 3x^2=-6x^4$；

(3) $3x^2 \cdot (-4x^2)=-12x^2$；　　(4) $5y^3 \cdot 3y^5=15y^{15}$.

2. 计算：

(1) $3x^2 \cdot 5x^3$；　　(2) $6x^2 \cdot 3xy$；

(3) $4y \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^2\right)$；　　(4) $2ab^2 \cdot (-3ab)$.

3. 计算：

(1) $(-3x)^2 \cdot 4x^2$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^3 \cdot (-3a)^2$；

(3) $6x^2y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^3$；　　(4) $(a^{n+1}b)^2 \cdot (3ab^n)^3$.

4. 计算：

(1) $(4\times10^5)\times(5\times10^6)\times(3\times10^4)$；

(2) $(-4x^2y)\cdot(-x^2y^2)\cdot\frac{1}{2}y^3$；

(3) $(2c^3)\cdot\left(\frac{1}{4}abc^2\right)\cdot(-2ac)$；

(4) $(-3ab)\cdot(-a^2c)^2\cdot(c^2)^3$.

下面我们来看本章引言中提出的问题.

为了求扩大后的绿地面积，一种方法是先求扩大后的绿地的边长，再求面积，即为

$$p(a+b+c). \qquad ①$$

我们也可以先分别求原来绿地和新增绿地的面积，再求它们的和，即为

$$pa+pb+pc. \qquad ②$$

由于①②表示同一个数量，所以

$$p(a+b+c)=pa+pb+pc.$$

上面的等式提供了单项式与多项式相乘的方法. 这个结果也可以由图 10.1-1 得出.

你能根据分配律得到这个等式吗？

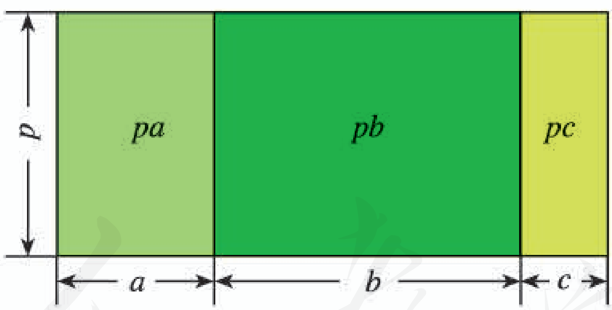


图 10.1-1

一般地，**单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.**

例 5 计算：

(1) $(-4x^2)(3x+1)$；

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab$；

(3) $3x\left[6xy-3\left(\frac{1}{2}x^2y+xy\right)\right]$.

解：(1) $(-4x^2)(3x+1)$

$=(-4x^2)(3x)+(-4x^2)\times 1$

$=(-4\times 3)(x^2\cdot x)+(-4x^2)$

$=-12x^3-4x^2$；

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab$

$=\frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{1}{2}ab+(-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2$；

(3) $3x\left[6xy-3\left(\frac{1}{2}x^2y+xy\right)\right]$

$=3x\left(6xy-\frac{3}{2}x^2y-3xy\right)$

$=3x\left(-\frac{3}{2}x^2y+3xy\right)$

$=-\frac{9}{2}x^3y+9x^2y$.

把单项式与多项式相乘的问题转化为单项式与单项式相乘的问题.

巩固运用10.5

1. 计算：

(1) $3a(5a-2b)$；　(2) $(x-3y)(6x)$；

(3) $\left(\frac{3}{4}a-b^2\right)(-2b)$；　(4) $5ab(2a-b+1)$.

2. 计算：

(1) $(x^2y)^2\cdot(4x-3y)$；　(2) $(x^2-y)\cdot(xy^2)^2$；

(3) $(-2ab^2)^2\cdot(3a^2b-2ab)$；　(4) $\left(\frac{2}{3}a^2b-\frac{1}{3}b^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}bc\right)^2$.

3. 化简：

(1) $x(x-1)+2x(x+1)-3x(2x-5)$；

(2) $x(x^2+3)+x^2(x-3)-3x(x^2-x-1)$.

4. 先化简，再求值：

$$x^2\left(\frac{1}{4}x-1\right)-\frac{1}{4}x(x^2-2x-4)，其中 x=\frac{1}{2}.$$

问题 3　如图 10.1-2，为了扩大街心花园的绿地面积，把一块原长 a m、宽 p m 的长方形绿地，加长了 b m，加宽了 q m. 你能用几种方法求出扩大后的绿地面积？

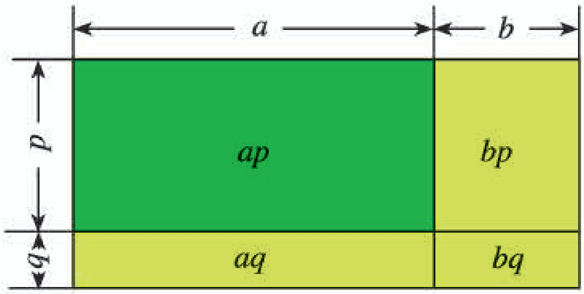


图 10.1-2

扩大后的绿地可以看成长为 $(a+b)$ m，宽为 $(p+q)$ m 的长方形，所以这块绿地的面积（单位：m^2）为

$$(a+b)(p+q).$$

扩大后的绿地还可以看成由四个小长方形组成，所以这块绿地的面积（单位：m^2）为

$$ap+aq+bp+bq.$$

因此 $(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq$.

上面的等式提供了多项式与多项式相乘的方法.

计算 $(a+b)(p+q)$，可以先把其中的一个多项式，如 $p+q$，看成一个整体，运用单项式与多项式相乘的法则，得

$$(a+b)(p+q)=a(p+q)+b(p+q),$$

再利用单项式与多项式相乘的法则，得

$$a(p+q)+b(p+q)=ap+aq+bp+bq.$$

把多项式相乘的问题转化为单项式与多项式相乘的问题.

总体上看，$(a+b)(p+q)$ 的结果可以看作由 $a+b$ 的每一项乘 $p+q$ 的每一项，再把所得的积相加而得到的，即

$$(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq.$$

一般地，**多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.**

例 6 计算：

(1) $(3x+1)(x+2)$； (2) $(x-8y)(x-y)$；

(3) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

解：(1) $(3x+1)(x+2)$

$=(3x)\cdot x+(3x)\times 2+1\cdot x+1\times 2$

$=3x^2+6x+x+2$

$=3x^2+7x+2$；

(2) $(x-8y)(x-y)$

$=x^2-xy-8xy+8y^2$

$=x^2-9xy+8y^2$；

(3) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3$

$=x^3+y^3$.

巩固运用10.6

1. 计算：

(1) $(2x+1)(x+3)$； (2) $(m+2n)(3n-m)$；

(3) $(a-1)(a+4)$； (4) $(a+3b)(a-3b)$；

(5) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$； (6) $\left(\frac{1}{2}y+4\right)\left(6y-\frac{3}{4}\right)$.

2. 计算：

(1) $(2x-5)(x^2+2x+3)$； (2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$；

(3) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{4}+1\right)$； (4) $(a+b)(a^2-2ab+3b^2)$.

3. 计算：

(1) $5x(x^2+2x+1)-(2x+3)(x-5)$；

(2) $(3x-y)(y+3x)-(4x-3y)(4x+3y)$；

(3) $\left(3y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)+(6y-5)\left(\frac{1}{2}y-3\right)$.

4. 先化简，再求值：

$(3x+1)(2x-3)-(6x-5)(x-4)$，其中 $x=-2$.

10.2 乘法公式

某些特殊形式的多项式相乘，可以写成公式的形式，当遇到相同形式的多项式相乘时，就可以直接运用公式写出结果.

10.2.1 平方差公式

探究

计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(x+1)(x-1)=$________；

(2) $(m+2)(m-2)=$________；

(3) $(2x+1)(2x-1)=$________.

上面的几个运算都是形如 $a+b$ 的多项式与形如 $a-b$ 的多项式相乘. 由于

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a^2-ab+ab-b^2\\&=a^2-b^2,\end{aligned}$$

所以，对于具有与此相同形式的多项式相乘，我们可以直接写出运算结果，即

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.}$$

也就是说，**两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差**.

> 平方差公式是多项式乘法 $(a+b)(p+q)$ 中 $p=a$，$q=-b$ 的特殊情形.

这个公式叫做（乘法的）**平方差公式**（formula for the difference of squares）.

思考

你能根据图 10.2-1 中图形的面积说明平方差公式吗？

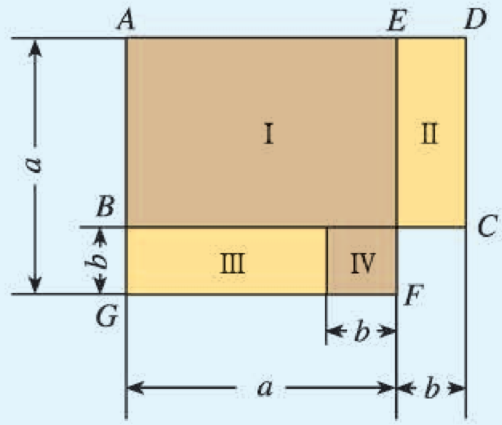


图 10.2-1

由图 10.2-1 知，图形Ⅱ和Ⅲ的面积相等，因此图形Ⅰ和Ⅱ的面积之和等于图形Ⅰ和Ⅲ的面积之和. 图形Ⅰ和Ⅱ组成的长方形 $ABCD$ 的面积为 $(a+b)(a-b)$，而图形Ⅰ和Ⅲ的面积之和为正方形 $AGFE$ 与图形Ⅳ的面积之差，即 a^2-b^2，因此 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

例 1 运用平方差公式计算：

(1) $(3x+2)(3x-2)$； (2) $(-x+2y)(-x-2y)$.

分析： 在(1)中，可以把 $3x$ 看成 a，2 看成 b，即

$$\begin{array}{c}(3x+2)(3x-2)=(3x)^2-2^2. \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ (a\ +b)(a\ -b)=a^2\ -\ b^2\end{array}$$

解： (1) $(3x+2)(3x-2)$

$=(3x)^2-2^2$

$=9x^2-4$；

(2) $(-x+2y)(-x-2y)$

$=(-x)^2-(2y)^2$

$=x^2-4y^2$.

你还有其他的计算方法吗？

例 2 计算：

(1) 102×98； (2) $(x+1)(x^2+1)(x-1)$.

解：(1) $\quad 102\times98$

$=(100+2)(100-2)$

$=100^2-2^2$

$=9\ 996$；

(2) $\quad (x+1)(x^2+1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)$

$=x^4-1$.

巩固运用10.7

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $(x+2)(x-2)=x^2-2$；　　(2) $(-3a-2)(3a-2)=9a^2-4$；

(3) $(x-2y)(2x+y)=x^2-4y^2$；　　(4) $(3a+4b)(3a-4b)=9a^2-4b^2$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(a+3b)(a-3b)$；　　(2) $(3+2a)(-3+2a)$；

(3) $(xy+1)(xy-1)$；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}x+3y\right)\left(-\frac{1}{2}x-3y\right)$；

(5) $\left(4x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+4x\right)$；　　(6) $(3x+2)(9x^2+4)(3x-2)$.

3. 运用平方差公式计算：

(1) 51×49；　(2) 103×97；　(3) 68×72；　(4) 201×199.

10.2.2　完全平方公式

探究

计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(p+1)^2=(p+1)(p+1)=$____________；

(2) $(m+2)^2=$____________；

(3) $(p-1)^2=(p-1)(p-1)=$____________；

(4) $(m-2)^2=$____________.

上面的几个运算都是形如$(a\pm b)^2$的多项式相乘，由于

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2,\\(a-b)^2&=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2\\&=a^2-2ab+b^2,\end{aligned}$$

所以，对于具有与此相同形式的多项式相乘，我们可以直接写出运算结果，即

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.\end{aligned}}$$

完全平方公式是多项式乘法$(a+b)(p+q)$中$p=a$，$q=b$的特殊情形.

也就是说，**两个数的和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上（或减去）它们的积的2倍.**

这两个公式叫做（乘法的）**完全平方公式**(formula for the square of the sum).

思考

你能根据图10.2-2和图10.2-3中图形的面积说明完全平方公式吗？

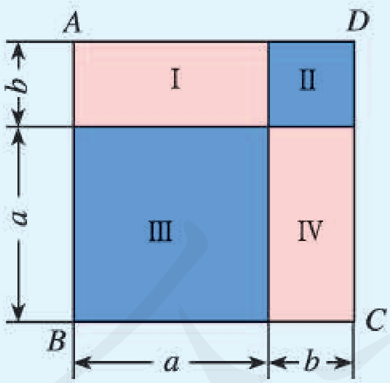


图10.2-2

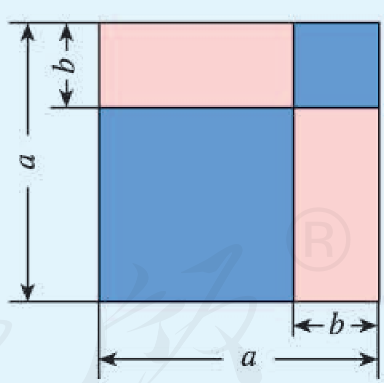


图10.2-3

由图10.2-2可知，正方形$ABCD$的边长为$a+b$，面积为$(a+b)^2$，而正方形$ABCD$由图形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ组成，其面积等于图形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的面积之和. 因为图形Ⅰ和Ⅳ的面积都为ab，图形Ⅱ和Ⅲ的面积分别为b^2，a^2，

所以$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 同样，由图 10.2-3 可推得$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

例 3 运用完全平方公式计算：

(1) $\left(y-3\right)^2$；(2) $(4m+n)^2$.

解：(1) $(y-3)^2=y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2$

$=y^2-6y+9$；

(2) $(4m+n)^2=(4m)^2+2\cdot(4m)\cdot n+n^2$

$=16m^2+8mn+n^2$.

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) 102^2；(2) 99^2.

解：(1) $102^2=(100+2)^2$

$=100^2+2\times100\times2+2^2$

$=10\ 404$；

(2) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2$

$=10\ 000-200+1$

$=9\ 801$.

巩固运用10.8

1. 下面各式对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；(2) $(a-b)^2=a^2-b^2$；

(3) $(a+b)^2=(-a-b)^2$；(4) $(a-b)^2=(b-a)^2$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(x+6)^2$；(2) $(y-5)^2$；

(3) $(5-2x)^2$；(4) $(-1+3m)^2$；

(5) $(2a+5b)^2$；(6) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)^2$.

3. 运用完全平方公式计算：

(1) 98^2；(2) 61^2；(3) 199^2；(4) 301^2.

运用乘法公式计算，有时要在式子中添括号. 在第三章中，我们学过去括号法则，即

$$a+(b+c)=a+b+c;$$
$$a-(b+c)=a-b-c.$$

反过来，就得到添括号法则：

$$a+b+c=a+(b+c);$$
$$a-b-c=a-(b+c).$$

也就是说，**添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号.**

例 5 运用乘法公式计算：

(1) $(a+b+c)(a-b-c)$； (2) $(a+b+c)^2$.

解：(1) $(a+b+c)(a-b-c)$

$=[a+(b+c)][a-(b+c)]$

$=a^2-(b+c)^2$

$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$

$=a^2-b^2-2bc-c^2$；

(2) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

> 有些整式相乘需要先作适当变形，然后再用公式.

巩固运用10.9

1. 在等号右边的括号内填上适当的项，并用去括号法则检验.

(1) $a+b-c=a+(\qquad)$； (2) $a-b+c=a-(\qquad)$；

(3) $a+b-c=a-(\qquad)$； (4) $a+b+c=a-(\qquad)$.

2. 运用乘法公式计算：

(1) $(x+y+1)(x+y-1)$； (2) $(2x+y+z)(2x-y-z)$；

(3) $\left(a+2b-\frac{1}{2}\right)\left(a-2b+\frac{1}{2}\right)$； (4) $(x+3y-2)(x-3y+2)$.

3. 运用乘法公式计算：

(1) $(a+b-1)^2$；　　(2) $(-3+x-y)^2$；

(3) $(a+2b+c)^2$；　　(4) $(x+\frac{y}{2}+5)^2$.

阅读与思考

杨辉三角

我国著名数学家华罗庚曾在给青少年撰写的《数学是我国人民所擅长的学科》一文中谈到，我国古代数学的许多创新与发展都曾居世界前列. 他说："实际上我们祖国伟大人民在人类史上，有过无比睿智的成就." 其中"杨辉三角"(图 1) 就是一例.

在我国南宋数学家杨辉（约 13 世纪）所著的《详解九章算术》(1261 年) 一书中，用图 1 的三角形解释二项和的乘方规律. 杨辉在注释中提到，在他之前北宋数学家贾宪（1050 年左右）也用过上述方法，因此我们称这个三角形为"杨辉三角"或"贾宪三角".

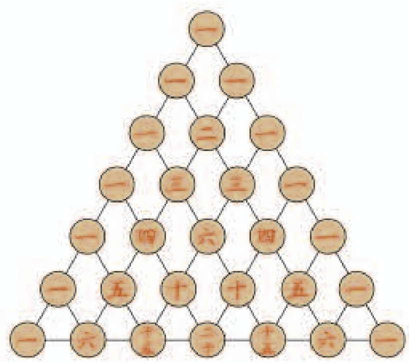


图 1

杨辉三角两腰上的数都是 1，其余每个数为它的上方（左右）两数之和. 事实上，这个三角形给出了$(a+b)^n$ ($n=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 的展开式（按 a 的次数由大到小的顺序）的系数规律. 例如，此三角形中第 3 行的 3 个数 1，2，1，恰好对应着 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展开式中的各项的系数；第 4 行的 4 个数 1，3，3，1，恰好对应着 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 展开式中各项的系数，等等.

利用上面的三角形，你能写出$(a+b)^6$的展开式吗？请利用整式的乘法验证你的结果.

这个三角形被欧洲学者称为"帕斯卡三角". 法国数学家帕斯卡 (Pascal，1623—1662) 于 1654 年发现了此三角形.

10.3 整式的除法

问题 一种数码照片的文件大小是 2^{11}KB，一个存储量为 16 GB（1 GB=2^{10}MB，1 MB=2^{10}KB）的移动存储器能存储多少张这样的数码照片？

这个移动存储器的容量为 $2^4\times2^{10}\times2^{10}=2^{24}$(KB)，因而它能存储这种数码照片的数量为 $2^{24}\div2^{11}$. 怎样计算 $2^{24}\div2^{11}$ 呢？

根据除法是乘法的逆运算，求 $2^{24}\div2^{11}$ 的商，就是求一个数，使它与 2^{11} 的积等于 2^{24}.

$\because\quad 2^{13}\times2^{11}=2^{24}$,

$\therefore\quad 2^{24}\div2^{11}=2^{13}$.

上面我们解决了一个同底数幂相除的问题. 一般地，对于 $a^m\div a^n$（$a\neq0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$），由于式中的字母表示数，同样根据除法是乘法的逆运算，计算$a^m\div a^n$，就是求一个式子，使它与 a^n 的乘积等于 a^m.

$\because\quad a^{m-n}\cdot a^n=a^{(m-n)+n}=a^m$,

$\therefore\quad a^m\div a^n=a^{m-n}$.

因此，我们有

$$\boxed{a^m\div a^n=a^{m-n}\ (a\neq0,\ m,\ n\text{ 都是正整数，并且 } m>n).}$$

即**同底数幂相除，底数不变，指数相减.**

同底数幂相除，如果被除式的指数等于除式的指数，例如 $a^m\div a^m$，根据除法的意义可知所得的商为 1. 另一方面，如果依照同底数幂的除法来计算，又有 $a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$.

于是规定

$$\boxed{a^0=1\ (a\neq0).}$$

这就是说，**任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.**

例 1 计算：

(1) $x^8\div x^2$；　(2) $(-a)^7\div(-a)^3$；　(3) $(ab)^5\div(ab)^2$.

解：(1) $x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$；

(2) $(-a)^7 \div (-a)^3 = (-a)^{7-3} = (-a)^4 = a^4$；

(3) $(ab)^5 \div (ab)^2 = (ab)^{5-2} = (ab)^3 = a^3b^3$.

巩固运用10.10

1. 计算：

(1) $x^7 \div x^5$； (2) $m^8 \div m^8$；

(3) $(-a)^{10} \div (-a)^7$； (4) $(a^2)^4 \div (a^2)^2$；

(5) $(-a^4)^4 \div (-a^4)^2$； (6) $(a^3)^3 \div (a^3)^2 \div a$.

2. 计算：

(1) $(xy)^5 \div (xy)^3$； (2) $(2x^2y)^5 \div (2x^2y)^3$；

(3) $\left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)^4 \div \left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)^2$； (4) $(ab^2)^{2m} \div (ab^2)^m$.

*3. 若 $x^m = 64$，$x^n = 8$，求 x^{m-n} 的值.

对于单项式除以单项式，例如计算 $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$，就是要求一个单项式，使它与 $3ab^2$ 的乘积等于 $12a^3b^2x^3$.

$12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$ 是 $(12a^3b^2x^3) \div (3ab^2)$ 的意思.

∵ $4a^2x^3 \cdot 3ab^2 = 12a^3b^2x^3$，

∴ $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3$.

上面的商式 $4a^2x^3$ 的系数 $4 = 12 \div 3$，a 的指数 $2 = 3-1$，b 的指数 $0 = 2-2$，而 $b^0 = 1$，x 的指数 $3 = 3-0$.

一般地，**单项式相除，把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.**

例 2 计算：

(1) $28x^4y^2 \div 7x^3y$； (2) $-5a^5b^3c \div 15a^4b$；

(3) $8m^3n^4 \div (2mn)^2$.

解：(1) $28x^4y^2 \div 7x^3y$

$= (28 \div 7) \cdot x^{4-3} \cdot y^{2-1}$

$= 4xy$；

(2) $-5a^5b^3c\div 15a^4b$

$=[(-5)\div 15]a^{5-4}b^{3-1}c$

$=-\frac{1}{3}ab^2c$;

(3) $8m^3n^4\div(2mn)^2$

$=8m^3n^4\div 4m^2n^2$

$=(8\div 4)m^{3-2}n^{4-2}$

$=2mn^2$.

巩固运用10.11

1. 计算：

(1) $10ab^3\div(-5ab)$；　(2) $-4a^2b^3\div 8ab^2$；

(3) $-3x^2y^4\div(-21x^2y^3)$；　(4) $24x^2y\div(-6xy)$；

(5) $(6\times10^8)\div(3\times10^5)$；　(6) $(4\times10^9)\div(-9\times10^3)$.

2. 计算：

(1) $(ab^2)^3\div(-ab)^2$；　(2) $(-0.5a^2bx)^2\div\left(-\frac{2}{5}ax^2\right)$；

(3) $(6x^2y^3)^2\div(3xy^2)^2$；　(4) $(4a^2b^2c)^3\div(3ab^3)^2$.

3. 已知地球的体积大约是 1.1×10^{12} km³，月球的体积大约是 2.2×10^{10} km³，则地球的体积约是月球体积的多少倍？

对于多项式除以单项式，例如，计算 $(am+bm)\div m$，就是要求一个多项式，使它与 m 的积是 $am+bm$.

$\because\ (a+b)m=am+bm$,

$\therefore\ (am+bm)\div m=a+b$.

又 $am\div m+bm\div m=a+b$,

$\therefore\ (am+bm)\div m=am\div m+bm\div m$.

一般地，**多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.**

把多项式除以单项式问题转化为单项式除以单项式问题来解决.

例 3 计算：

(1) $(12a^3-6a^2+3a)\div 3a$； (2) $(10x^2y^2-x^2y)\div 5xy$；

(3) $(8a^2b-4ab^2+2ab)\div 2ab$.

解：(1) $(12a^3-6a^2+3a)\div 3a$

$=12a^3\div 3a-6a^2\div 3a+3a\div 3a$

$=4a^2-2a+1$；

(2) $(10x^2y^2-x^2y)\div 5xy$

$=10x^2y^2\div 5xy-x^2y\div 5xy$

$=2xy-\frac{1}{5}x$；

(3) $(8a^2b-4ab^2+2ab)\div 2ab$

$=8a^2b\div 2ab-4ab^2\div 2ab+2ab\div 2ab$

$=4a-2b+1$.

巩固运用10.12

1. 计算：

(1) $(6ab+5a)\div a$；

(2) $(6x^4-8x^3)\div(-2x^2)$；

(3) $(15x^2y-10xy^2)\div 5xy$；

(4) $(12a^3b^2-8ab^2)\div(-4ab)$.

2. 计算：

(1) $(-4a^3+12a^2b-7a^3b^2)\div 4a^2$；

(2) $(9a^2b-6a^3b^2-3a^4b^3)\div(-3a^2b)$；

(3) $(36x^4y^3-24x^3y^2+3x^2y)\div(-6xy)$；

(4) $\left(0.25a^3b^2-\frac{1}{2}a^4b^5-\frac{1}{6}a^5b^3\right)\div(-0.5a^3b^2)$.

数学活动

日历上的数字满足一定的规律. 如图 1 是某月的日历.

(1) 选择其中所示的方框部分，将每个方框部分中 4 个位置上的数交叉相乘，再相减，你能得出什么结论?

(2) 请你再选择两个类似的部分试一试，看看是否符合这个规律.

(3) 换一个月的日历试一下，是否有同样的规律?

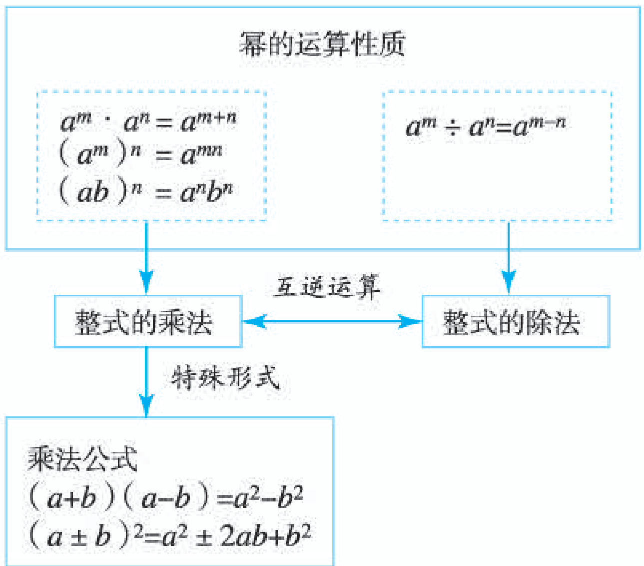
(4) 请你利用整式的运算对以上的规律加以证明.

日	一	二	三	四	五	六
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

图 1

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 本章我们类比数的乘法学习了整式的乘法. 整式的乘法主要包括幂的运算性质、单项式的乘法、多项式的乘法等. 同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方如何运算? 请举例说明.

2. 由于整式中的字母表示数，因此数的运算律和运算性质在整式的运算中仍然成立. 在整式的乘法中，多项式的乘法要利用分配律转化为单项式的乘法，而单项式的乘法又要利用交换律和结合律转化为幂的运算. 因此，幂的运算是基础，单项式的乘法是关键. 举例说明怎样将单项式乘多项式转化为单项式相乘. 多项式乘多项式是如何转化为单项式相乘的?

3. 某些具有特殊形式的多项式相乘，可以写成乘法公式的形式，利用它们可以简化运算. 本章我们学习了哪几个乘法公式? 你能说出它们的结构特点吗? 你能从几何直观的角度用图形解释乘法公式吗?

4. 利用“除法是乘法的逆运算”，我们学习了同底数幂的除法、单项式除以单项式、多项式除以单项式等基本的整式除法. 与整式的乘法类似，同底数幂的除法是基础，单项式除以单项式是整式除法的关键. 举例说明同底数幂的除法如何运算，怎样将多项式除以单项式转化为单项式相除.

复习题 10

复习巩固

1. 计算：

(1) $(x^2)^3\cdot x^2$；　　(2) $(x^2)^2\cdot(x^3)^3$；

(3) $(-m)^2\cdot(-m^2)\cdot m^3$；　　(4) $m^4\cdot(-m)^2\cdot m^3$；

(5) $a^3b\cdot(-2ab)^3$；　　(6) $(-2x^2y)^2\cdot\left(\frac{1}{3}xy\right)^3$.

2. 计算：

(1) $2a^2b(3ab^2-4b^3)$；　　(2) $(xy^2)^2(x^2y+xy^2)$；

(3) $(2a+3b)(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})$；　　(4) $(5x+2y)(3x-6y)$；

(5) $(7a-5b)(4a-3b)$；　　(6) $(4xy+3y^2)(2xy-1)$.

3. 卫星绕地球运动的速度（即第一宇宙速度）是 7.9×10^3 m/s，求卫星绕地球运行 2×10^2 s 走过的路程.

4. 计算：

(1) $5x^2(x+1)(x-1)$；　　(2) $(-3x+8y)(-3x-8y)$；

(3) $(2x+y)^2$；　　(4) $(-5m-7n^2)^2$；

(5) 101×99；　　(6) 198^2.

5. 计算：

(1) $(x+2)(x^2+4)(x-2)$；

(2) $3(x-1)(x+3)-(x+2)^2$；

(3) $\left[\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\left(-\frac{1}{2}x-2\right)\right]^2$；

(4) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y\right)^2+\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2$.

6. 先化简，再求值：

(1) $(x+2)^2+x(2-x)$，其中 $x=4$；

(2) $(2x+3y)^2-(2x+y)(2x-3y)$，其中 $x=3$，$y=-2$.

7. 计算：

(1) $(a^4)^3\div(a^2)^2\div a$；　　(2) $(x^2y)^4\div(x^2y)^2\div x^2y$；

(3) $(2a)^3\cdot b^4\div4a^3b^2$；　　(4) $\left(-6a^7b^5\right)\div3a^2b^5$.

8. 计算：

(1) $(16x^2y^3-8x^3y^2z)\div 8x^2y$；

(2) $\left(\frac{3}{4}a^3x^4-\frac{1}{2}ax^3\right)\div 3ax^3$；

(3) $(9x^2y^3z^2-6x^3y^2z)\div 3x^2yz$；

(4) $\left(\frac{6}{5}a^3x^4+0.9a^2x^3-3ax^2\right)\div 3ax^2$.

综合运用

9. 计算：

(1) $2(x+1)(x-1)-3(x+5)^2$；

(2) $4(-2x+3)^2-(2x+5)(2x-5)$；

(3) $3(y-z)^2-(2y+z)(-z+2y)$；

(4) $(2x+y)^2-(x+y+2)^2$；

(5) $\left[\frac{1}{4}x(x^2y-xy)-\frac{2}{5}x^3y^2\right]\div\frac{1}{2}x^2y$；

(6) $[(2x+y)(2x-y)+(x-y)^2]\div x$.

10. 先化简，再求值：

(1) $(2x-y)^2-(-x+2y)(-x-2y)$，其中 $x=1$，$y=3$；

(2) $\left(\frac{1}{2}xyz+z^2\right)\left(-\frac{1}{2}xyz-z^2\right)\div\frac{1}{4}z$，其中 $x=3$，$y=2$，$z=1$.

11. 一个正方形的边长增加 3 cm，它的面积就增加 39 cm^2，这个正方形的边长是多少？

拓广探索

12. 已知 $a+b=5$，$ab=3$，求 a^2+b^2 的值.

13. 解方程组

$$\begin{cases}(x+2)^2-(y-3)^2=(x+y)(x-y),\\ x-3y=2.\end{cases}$$

第十一章　数据的收集与整理

在报纸、杂志、电视、互联网等媒体上，经常出现统计数据和统计图表. 例如，某大学毕业生的就业率达 90%；某电台音乐广播的收听率为 2.9%；某地年人均生活用水量为 36 m^3；2015 年我国国内生产总值为 67.67 万亿元，比上年增长 6.9%；等等. 这些数据可以帮助人们了解周围世界的现状和变化规律，从而为人们制定决策提供依据. 你知道它们是怎样得到的吗？

统计学（statistics）能帮助我们回答上述问题. 这一章我们将在小学所学统计知识的基础上，学习收集数据的一些基本方法，并进一步学习如何整理数据，从中发现数据蕴含的规律，获取我们需要的信息.

11.1 全面调查

问题 1 如果想了解全班同学对阅读、运动、听音乐、演奏乐器和表演戏剧五种课外活动的喜爱情况，你会怎么做？

为解决问题 1，首先需要进行统计调查收集数据. 我们可以用对全班同学进行问卷调查的方法收集数据，为此要设计调查问卷.

思考

请你自己设计一个调查问卷，要求提问的语言清晰，提供的选项全面、简洁，而且不能使任何一个选项比其他选项更容易被选中.

下面就是一个调查问卷. 问卷的第一行是调查问卷的标题，说明了这次调查的目的. 第二行提出了调查的问题，调查的问题是根据调查的目的提出来的.

> **全班同学最喜爱的课外活动的调查问卷**
>
> 在下面五类课外活动中，你最喜爱的是（　　）（单选）.
>
> (A) 阅读　　(B) 运动　　(C) 听音乐
>
> (D) 演奏乐器　　(E) 表演戏剧

如果想了解男、女生喜爱节目的差异，问卷中还应该包含什么内容？

利用调查问卷，可以收集到全班每位同学最喜爱的课外活动的编号（字母），我们把它们称为数据. 例如，一位同学经过调查，得到如下 50 个数据：

A	C	A	D	C	B	A	D	B	C
B	E	A	C	D	D	C	B	A	A
A	C	D	A	D	C	A	E	D	E
E	A	C	D	A	C	C	A	B	A
A	C	B	A	C	A	C	A	C	A

从上面的数据中，你能看出全班同学喜爱课外活动的情况吗？

杂乱无章的数据不利于我们发现其中的规律. 为了更清楚地了解数据蕴含的规律，需要对数据进行整理. 统计中经常用表格整理数据，我们用下面的表 11-1 来整理前面的数据.

表 11-1　全班同学最喜爱的课外活动的人数统计表

活动类型	划记	人数	百分比
A 阅读	正正正下	18	36%
B 运动	正一	6	12%
C 听音乐	正正正	14	28%
D 演奏乐器	正下	8	16%
E 表演戏剧	正	4	8%
合计		50	100%

此例中，用划记法记录数据时，“正”字的每一划（笔画）代表一名同学. 例如，编号为 A 的课外活动对应的人数是 18，记为“正正正下”.

表 11-1 可以清楚地反映出全班同学喜爱各种课外活动的情况. 例如，最喜爱阅读的同学有 18 名，占全班总人数的 36%；最喜爱运动的同学有 6 名，占全班总人数的 12%；等等.

为了更直观地展示表 11-1 中的信息，还可以用如图 11.1-1 的**条形图**（bar chart）和如图 11.1-2 的**扇形图**（pie chart）来描述数据.

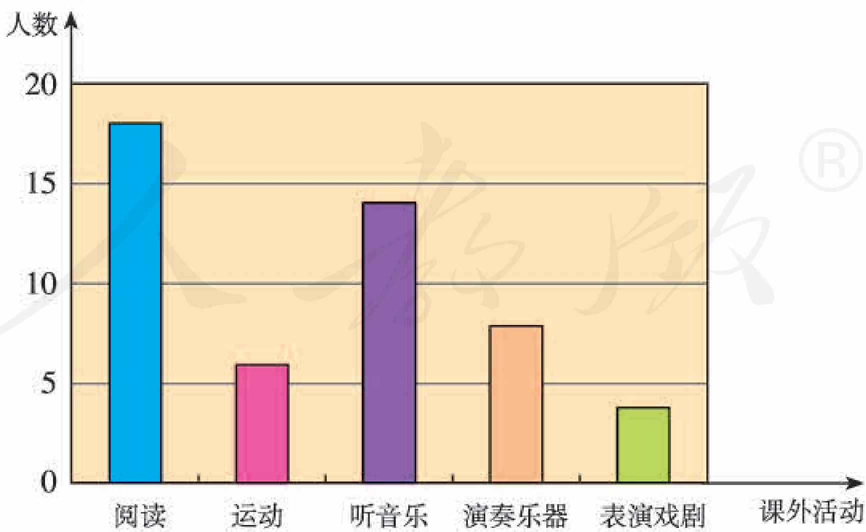


图 11.1-1

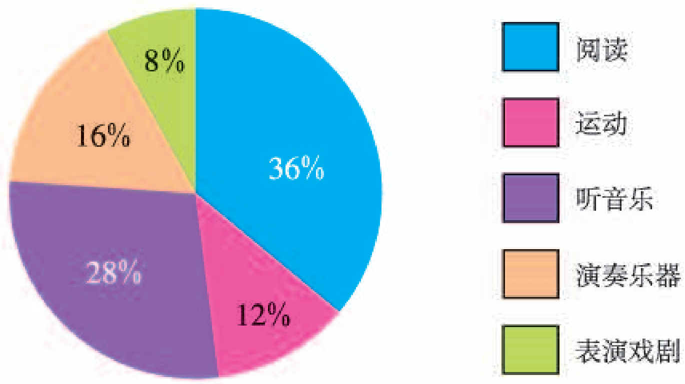


图 11.1-2

从图 11.1-1 的条形图中，我们可以发现最喜爱阅读的同学最多，其次是最喜爱听音乐的同学，最喜爱表演戏剧的同学最少等. 图 11.1-2 的扇形图反映了最喜爱各种课外活动的同学人数在总人数中所占的百分比，如最喜爱听音乐的同学人数占总人数的 28%，最喜爱演奏乐器的同学人数占总人数的 16%等.

在上面的调查中，我们利用调查问卷得到了全班同学最喜爱的课外活动的数据，利用表格整理数据，并用统计图进行直观形象的描述. 通过分析表和图，我们了解到了全班同学喜爱各种课外活动的情况. 在这个调查中，全班同学是要考察的全体对象，我们对全体对象都进行了调查. 像这样考察全体对象的调查叫做**全面调查**. 例如，2010 年我国进行的第六次人口普查，就是一次全面调查.

巩固运用11.1

1. 你认为下列调查问题的设计合理吗？为什么？
   (1) 你睡眠充足吗？
   (2) 难道你不认为富士苹果比国光苹果更好吃吗？
   (3) 你有多少个好朋友？
   (4) 许多市民认为应该给本市的红绿灯安装声音提醒装置，你同意吗？
2. 你认为下列问题选项的设计合理吗？如果不合理，如何修改？
   (1) 你最喜欢的一项课外活动是什么？
   (A) 听收音机　(B) 演奏乐器　(C) 朗诵诗歌　(D) 弹古筝
   (2) 你对学校食堂的早餐满意吗？

(A) 非常满意　(B) 满意　(C) 一般　(D) 不满意

3. 请你调查全班同学出生的月份，并填写下表，统计出全班同学的生日最集中的月份.

全班同学出生月份统计表

月份	人数	百分比	月份	人数	百分比
1			7		
2			8		
3			9		
4			10		
5			11		
6			12		

4. 请你举出一些生活中运用全面调查的例子.

请以小组为单位解决下列问题.

问题 2　调查全年级男、女同学的身高情况.

(1) 设计调查问卷，利用课余时间对全年级同学进行调查.

(2) 画出表格，整理收集到的数据，并分析男、女同学的身高情况：

① 你们年级男同学的平均身高更高一些，还是女同学的平均身高更高一些？

② 你们年级男同学的身高在什么范围内？女同学呢？

③ 全年级男同学的身高差距小，还是女同学的身高差距小？

(3) 每组安排一名代表向全班介绍本组的调查结果，并进行小组间比较和评议.

巩固运用11.2

1. 10 名七年级男生的体重（单位：kg）为 55，54，43，45，57，70，68，50，37，55. 请用统计表整理这些数据，从中你可以发现这些男生体重的哪些情况？

2. 如果请你根据问题 2 的调查结果为本年级购置校服的尺码提建议，你会提出什么建议？

3. 为了了解七年级学生对三种秋季实践活动方案的意见，李明对七年级全体学生进行了一次调查（每人至多赞成一种方案）. 结果有 14 人赞成方案 1，5 人赞成方案 2，10 人赞成方案 3，1 人弃权. 根据调查结果，李明会为学校组织七年级学生的秋季实践活动提出什么建议？

阅读与思考

你了解人口普查工作吗

为全面了解人口情况，如人口总数、人口增长情况、性别构成、年龄构成、城乡人口分布、文化程度等，世界各国一般要定期进行国家人口普查. 国家人口普查属于全面调查，即调查对象应包括全国人口.

我国第四次全国人口普查（1990 年）的总人口约为 116 002 万人，第五次全国人口普查（2000 年）的总人口约为 129 533 万人，第六次全国人口普查（2010 年）的总人口约为 137 054 万人.

我国的人口普查工作是在国务院和地方各级人民政府的统一领导下，由普查工作人员按计划逐户登记，最后通过计算机处理数据来进行的.

除人口普查外，我国还要定期进行农业普查和工业普查等.

普查一般有以下几个特点：

1. 通过普查可直接得到较为全面、可靠的信息.

2. 花费的时间较长，耗费的人力、物力也非常大.

3. 一般要规定统一的标准调查时间. 例如，我国于 2010 年 11 月 1 日 0 时开始进行了第六次全国人口普查的登记工作.

4. 一般是周期性进行的. 我国普查工作正在走向规范化和制度化，一般每逢末尾数字是“0”的年份进行人口普查，每逢末尾数字是“5”的年份进行工业普查，每逢末尾数字是“7”的年份进行农业普查等.

11.2 抽样调查

问题 1 某校有 1 000 名学生，要想了解全校学生对阅读、运动、听音乐、演奏乐器、表演戏剧五种课外活动的喜爱情况，怎样进行调查？

可以用全面调查的方法对全校学生逐个进行调查，然后整理收集到的数据，统计出全校学生对五种课外活动的喜爱情况．但是，由于学生比较多，全面调查花费的时间长，消耗的人力、物力大．因此，需要寻找一种不作全面调查就能了解全校学生喜爱课外活动的情况的方法，达到既省时省力又能解决问题的目的．这就是我们要讨论的抽样调查．

抽样调查（sampling survey）是这样一种方法，它只抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况．在问题1中，我们只抽取一部分学生进行调查，然后通过分析被调查学生的数据来推断全校学生喜爱课外活动的情况．全校学生是要考察的全体对象，称为总体，组成总体的每一个学生称为个体，而被抽取调查的那部分学生构成总体的一个样本．

> 为了强调调查目的，人们有时也把全校学生喜爱的课外活动作为总体，每一个学生喜爱的课外活动作为个体．

抽取多少名学生进行调查比较合适？被调查的学生又如何抽取呢？

如果抽取调查的学生很少，样本就不容易具有代表性，也就不能客观地反映总体的情况；如果抽取调查的学生很多，虽然样本容易具有代表性，但花费的时间、精力也很多，达不到省时省力的目的．因此抽取调查的学生数目要适当．例如，这个问题中可以抽取 100 名学生作为样本进行调查．一个样本中包含的个体的数目称为样本容量，上述抽取的样本容量为 100．

> 想了解一锅八宝粥里各种成分的比例，只要搅拌均匀后，舀一勺查看，就能对整锅的情况估计个八九不离十．你能说说这与抽取部分学生估计全校学生情况之间的相似之处吗？

为了使样本尽可能具有代表性，除了抽取调查的学生数要合适外，抽取样本时，不能偏向某些学生，应使学校中的每一个学生都有相等的机

会被抽到．例如，上学时，在学校门口随机调查 100 名学生；在全校学生的注册学号中，随机抽取 100 个学号，调查这些学号对应的学生；等等.

你还能想出使每个学生都有相等机会被抽到的方法吗?

下面是某同学抽取样本容量为 100 的调查数据统计表（表 11-2).

表 11-2　抽样调查 100 名学生最喜爱的课外活动的人数统计表

活动类型	划记	人数	百分比
A 阅读	正正正正正正正下	38	38%
B 运动	正正丅	12	12%
C 听音乐	正正正正正一	26	26%
D 演奏乐器	正正正下	18	18%
E 表演戏剧	正一	6	6%
合计		100	100%

在表 11-2 中，我们可以发现，样本中最喜爱阅读的学生最多，有 38 人，占样本总人数的 38%；样本中只有 6 名学生最喜爱表演戏剧，人数占样本总人数的 6%．从表 11-2 中还可以看出样本中最喜爱其他课外活动的学生人数，和它们占样本总人数的百分比.

用条形图和扇形图可以将表 11-2 中的信息更直观地展示出来，如图 11.2-1 和图 11.2-2 所示.

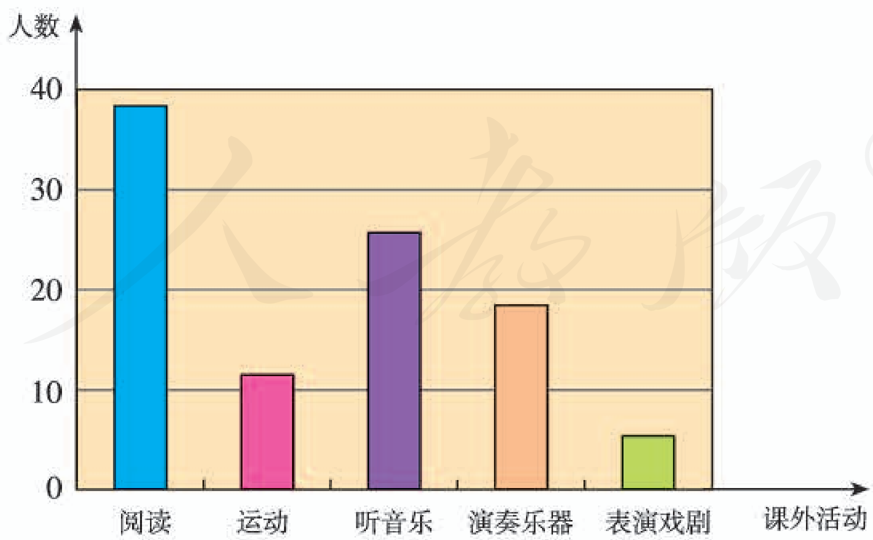


图 11.2-1

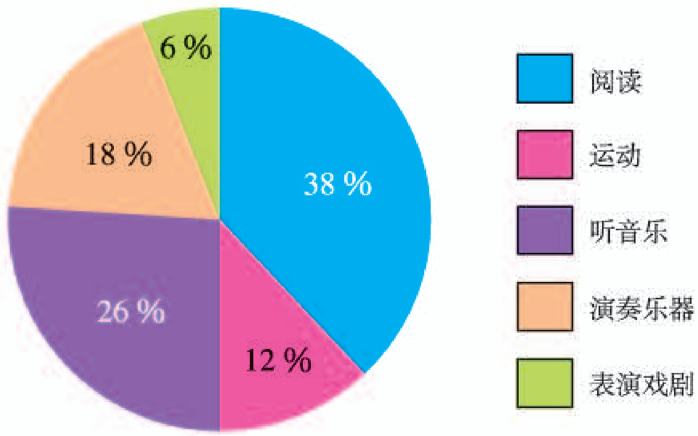


图 11.2-2

由表 11-2 和图 11.2-1、图 11.2-2 可以估计出，这个学校约有 38%的学生最喜爱阅读，约有 26%的学生最喜爱听音乐，最喜爱演奏乐器和运动的学生分别约为 18%和 12%，最喜爱表演戏剧的学生人数最少，约占全校学生总人数的 6%.

上面抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法是一种**简单随机抽样**（simple random sampling）.

抽样调查是实际中经常采用的收集数据的方法. 除了具有花费少、省时省力的特点外，还适用于一些不宜用全面调查的情况，例如，检测某批次灯泡的使用寿命、火柴的质量等具有破坏性的调查. 需要注意的是，在抽样调查中，如果抽取样本的方法得当，通常样本能客观地反映总体的情况，抽样调查的结果会比较接近总体的情况，否则抽样调查的结果往往会偏离总体的情况.

归纳

全面调查和抽样调查是收集数据的两种方法. 全面调查收集到的数据全面、准确，但一般花费多、耗时长，而且某些调查不宜用全面调查. 抽样调查具有花费少、省时的特点，但抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度.

巩固运用11.3

1. 为了解全校学生的平均身高，小明调查了座位在自己旁边的3名同学，把他们身高的平均值作为全校学生平均身高的估计.

(1) 小明的调查是抽样调查吗？

(2) 这个调查结果能较好地反映总体的情况吗？如果不能，请说明理由.

2. 某班要选3名同学代表本班参加班级间的交流活动. 现在按下面的办法抽取：把全班同学的姓名分别写在没有明显差别的小纸片上，把纸片放进一个不透明的盒子里，充分搅拌后，随意抽取3张，按照纸片上所写的名字选取3名同学. 你觉得上面的抽取过程是简单随机抽样吗？为什么？

3. 请指出下列哪些调查的样本缺乏代表性，为什么？

(1) 为了解全校学生最喜爱的诗歌，对参加诗歌诵读比赛的学生进行调查；

(2) 为了解某住宅小区内居民的出行方式，对小区内的老年人进行调查；

(3) 为了解某商场的平均日营业额，选在周末进行调查.

4. 学校准备购买一批演出服，供学生活动时借用. 七（2）班的学生为配合学校工作，随机调查了全校40名同学的穿衣尺码，结果发现，穿S号的有5人，穿M号的有16人，穿L号的有10人，穿XL号的有5人，穿XXL号的有4人. 根据调查结果，七（2）班的学生会为学校购买服装提出什么建议？

5. 在以下调查中，哪些适宜全面调查？哪些适宜抽样调查？

(1) 调查某批次汽车的抗撞击能力；

(2) 了解某班学生的身高情况；

(3) 调查中央人民广播电台黄金时段的新闻节目的收听率；

(4) 选出某盲校钢琴调律技术最好的学生参加全国盲人调律大赛.

6. 请你举出一些不宜用全面调查的例子，并说明理由.

请以小组为单位解决如下问题.

问题2 调查你所在学校的学生喜爱收听新闻、音乐、小说、评书和广播

剧五类节目的情况.

（1）制定调查方案，利用课余时间实施调查；

（2）画出表格，整理收集到的数据，并估计全校学生最喜爱收听各类节目的人数和百分比；

（3）每组安排一位代表向全班介绍本组解决上述问题的情况，并进行小组间比较和评议.

巩固运用11.4

1. 对“您觉得该不该在公共场所禁烟”作民意调查，下面是三名同学设计的调查方案：

   同学 A：我把要调查的问题放到访问量很大的网站上，这样大部分上网的人就可以看到调查的问题，并很快就可以得到反馈.

   同学 B：我给我们小区的每一住户发一份问卷，一两天就可以得到结果了.

   同学 C：我只要在班级上调查一下同学就可以了，马上就可以得到结果.

   上面三名同学能获得比较准确的民意吗？为什么？

2. 中央电视台在每年的春节联欢晚会播出之后都要调查晚会的收视率. 李华同学为电视台设计了一个调查方案：在 001～999 中随机抽取一个数，比如 632，那么身份证后三位数是 632 的观众就是要调查的对象. 你认为这个方案获得的样本有代表性吗？为什么？（提示：查资料了解身份证号码的编制规则.）

3. 一家冷饮店为了选出最受顾客欢迎的饮料，在一个星期日对光顾本店的前 50 位顾客进行了调查. 结果，超过一半的顾客都认为西瓜汁是自己最爱喝的饮料. 这是否意味着大多数光顾这家店的顾客都最喜欢喝西瓜汁？为什么？

4. 你的脉搏一分跳动多少次？测量一下. 你认为一次测量所得的数据能代表一般情况吗？为什么？请设计一个能够较真实地反映你的脉搏数的测量方案.

数学活动

盒子中有多少个乒乓球

把一些同样大小的乒乓球放进一个纸盒中，你能用几种方法估计出盒子中乒乓球的数目？请同学们小组合作，按照下面的步骤完成活动：

第一步，从纸盒中倒出一些乒乓球，记录这些乒乓球的数目 m；

第二步，给这些乒乓球作上记号；

第三步，把这些乒乓球放回纸盒中，充分摇匀；

第四步，从纸盒中再倒出一些乒乓球，记录这些乒乓球的数目 p 和其中带有记号的乒乓球的数目 n；

第五步，利用得到的数据 m，p，n，估计原来盒子中乒乓球的数目 q，则 $q\approx\frac{p}{n}\times m$；

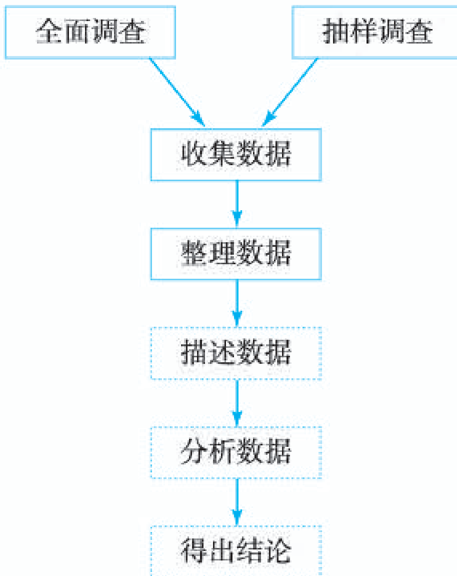
第六步，数出纸盒中乒乓球的总数，验证你的估计.

上面的试验利用了抽样调查的方法. 类似的试验在生产和科研中经常用到. 例如，我们可以用这种方法估计一个养鱼池中鱼的数目.

小　结

一、本章知识结构图

数据处理的一般过程：



二、回顾与思考

1. 为了更好地了解周围世界，根据现有信息作出合理的推断和预测，我们经常需要有目的地收集一些数据. 本章我们学习了两种收集数据的方法——全面调查和抽样调查. 什么是全面调查和抽样调查？它们各有什么优缺点？

2. 哪些情况下宜用全面调查？哪些情况下宜用抽样调查？

3. 为什么抽样调查可以作为了解总体的方法？为了使样本对总体有较好的代表性，抽样时需要注意什么？

4. 简单随机抽样有什么特点？用简单随机抽样抽出的样本是否一定具有代表性？请举例说明.

5. 利用统计图表等整理和描述数据，有利于我们发现和探索数据中蕴含的规律，获取数据中的信息.

复习题 11

复习巩固

1. 下面的问卷是一家餐厅为调查顾客对本餐厅的意见而设计的，你认为这个问卷中存在哪些不足？

> 欣欣餐厅顾客问卷调查
>
> 1. 您对本餐厅的饭菜质量持什么态度？（　　）
> (A) 满意　　(B) 还行　　(C) 不满意
> 2. 您认为本餐厅的饭菜味道是否适合您的口味？（　　）
> (A) 适合　　(B) 一般　　(C) 不适合
> 3. 您对本餐厅的装潢、卫生满意吗？（　　）
> (A) 满意　　(B) 一般　　(C) 不满意
> 4. 大多数顾客都认为本餐厅的服务水平很高，您同意吗？（　　）
> (A) 同意　　(B) 一般　　(C) 不同意
> 5. 您是否希望本餐厅增加饭菜品种？（　　）
> (A) 希望　　(B) 无所谓　　(C) 不希望

2. 某盲校要了解本校初中生平均每天的睡眠时间，下列选取调查对象的方式最合适的是（　　）.

(A) 随机选取初中一个年级的学生

(B) 随机选取初中一个社团的学生

(C) 在初中女生中随机选取 5 人

(D) 在全校初中生中随机选取 20 人

3. 要调查下列问题，你觉得应采用全面调查还是抽样调查？说说理由.

(1) 检测某城市的空气质量；

(2) 了解全班同学的体能达标情况；

(3) 企业招聘，对应聘人员进行面试；

(4) 鞋厂检测生产的鞋底能承受的弯折次数.

4. 某市广播电台的播音员想为本市盲校的学生录制一套有声书，请这所学校七年级的学生帮他们调查本校学生最喜爱的文学形式. 七年级学

生从全校全体学生中随机抽取了50名学生进行调查．结果发现，最喜爱诗歌的有20人，最喜爱小说的有15人，最喜爱散文的有9人，最喜爱传记的有6人．根据调查结果，你会为播音员选择录制有声书提供什么建议？

综合运用

5．一家食品公司的市场调查员将本公司生产的一种新点心免费送给20人品尝，以调查这种点心的甜度是否适中．调查结果如下（A代表太甜，B代表稍甜，C代表适中，D代表稍淡，E代表太淡）：

C C C B C D B C C

D C C A B D C E C

请用表格整理上面的数据，并推断甜点的甜度是否适中．

6．小明想了解光明小区的家庭教育费用支出情况，调查了自己学校家住光明小区的30名同学的家庭，并把这30个家庭的教育费用的平均数作为光明小区家庭教育费用的平均数的估计值，你觉得合理吗？若不合理，请说明理由，并设计一个抽样调查的方案．

拓广探索

7．为了了解全校学生每周的体育锻炼时长是否合适，请你设计一个抽样调查方案，并实施调查．根据调查结果，你会为全校学生安排体育锻炼的时长提出什么建议？

第十二章　数据的描述

在媒体上经常可以看到用统计图描述数据．统计图是数据的一种直观的表示形式，有利于读者了解数据的全貌，以及数据之间的关系．

在小学，我们已经接触过一些统计图，如条形图、折线图、扇形图等．本章将通过一些具体的案例，进一步学习这些常见的统计图，研究如何从统计图中读取信息，以及如何选择合适的统计图去描述数据．之后，我们还将学习一种全新的统计图——直方图．学习完本章，我们将感受到统计图在揭示数据蕴含的规律、传达统计信息等方面的重要作用．

*12.1 条形图与扇形图

表 12-1 中列出了 2016 年 1 月 1 日我国 31 个城市的环境空气质量指数（AQI）（数据来源：生态环境部数据中心）.

表 12-1

城市	AQI	城市	AQI	城市	AQI
北京	226	合肥	212	成都	214
天津	226	福州	103	贵阳	55
石家庄	333	南昌	150	昆明	48
太原	225	济南	144	拉萨	50
呼和浩特	149	郑州	210	西安	175
沈阳	144	武汉	156	兰州	175
长春	150	长沙	120	西宁	96
哈尔滨	162	广州	88	银川	102
上海	79	南宁	90	乌鲁木齐	240
南京	172	海口	62		
杭州	188	重庆	178		

AQI（m）	类别
$0\leqslant m\leqslant 50$	优
$51\leqslant m\leqslant 100$	良
$101\leqslant m\leqslant 150$	轻度污染
$151\leqslant m\leqslant 200$	中度污染
$201\leqslant m\leqslant 300$	重度污染
$300< m$	严重污染

请根据表中数据考虑下面的问题.

问题 2016 年 1 月 1 日，这 31 个城市中，环境空气质量为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染的城市各有多少个？它们各占城市总数的百分之几？

我们可以通过列表，统计出各类别环境空气质量的城市个数，并分别计算出它们占城市总数的百分比，如表 12-2.

* 制作条形图与扇形图为低视力学生选学内容.

表 12-2

类别	划记	频数（城市个数）	频率（频数/31）	百分比
优	丅	2	0.06	6%
良	正一	6	0.19	19%
轻度污染	正下	8	0.26	26%
中度污染	正丅	7	0.23	23%
重度污染	正丅	7	0.23	23%
严重污染	一	1	0.03	3%
合计		31	1	100%

一般我们称落在每个类别中的数据个数为该类别的**频数**（absolute frequency），频数与数据总个数的比值为**频率**（relative frequency）. 频率反映了各类别的频数在总数中所占的份量. 频率×100%就是百分比.

为了更直观地展示表 12-2 中的统计信息，可以用统计图来描述数据.

对各类别环境空气质量的城市个数（频数），我们用条形图来描述，如图 12.1-1. 条形图用条形的高度或长短来表示频数的大小. 从条形图中，我们容易看出条形最高的是“轻度污染”，对应的频数为 8，即空气质量为“轻度污染”的城市最多，有 8 个；条形最低的两个是“优”和“严重污染”，对应的频数分别为 2，1，即空气质量为极端好或坏的城市不多，大部分城市位于“良”和“重度污染”之间；等等. 从条形图中容易看出各类别环境空气质量的城市个数，便于比较各类别的城市个数之间的差距.

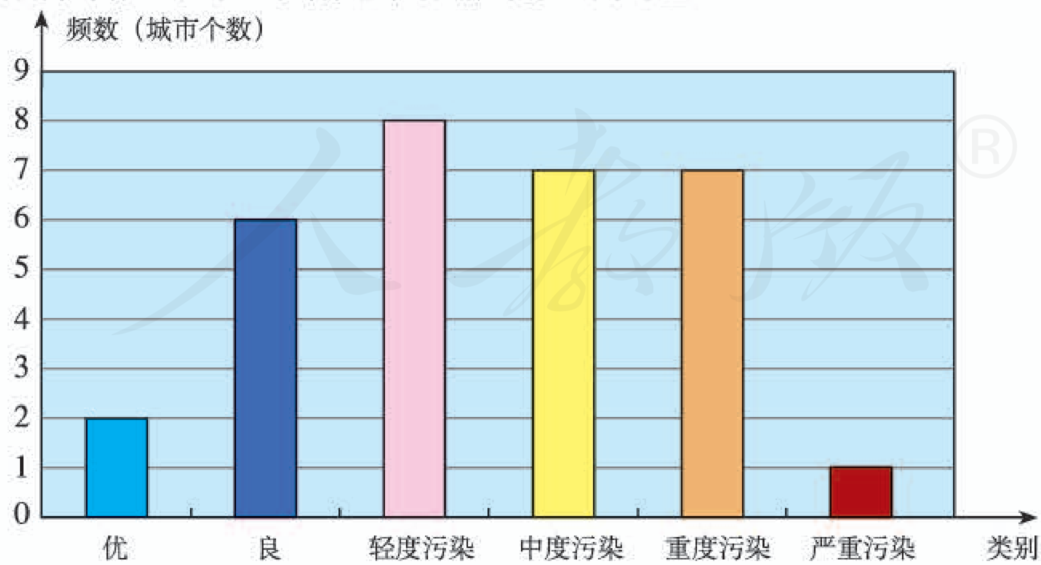


图 12.1-1

对各类别环境空气质量的城市个数占城市总数的百分比，我们用扇形图来描述，如图12.1-2或图12.1-3. 扇形图是用扇形的大小来表示各个部分占总体的百分比. 从扇形图中，我们容易看出扇形最大的是“轻度污染”，它占城市总数的26%；其次是“中度污染”“重度污染”，它们各占城市总数的23%；空气质量为“优”“严重污染”的扇形很小，它们分别占城市总数的6%和3%；等等. 从扇形图中容易看出各类别环境空气质量城市个数占城市总数的百分比，以及各类别之间的相对大小.

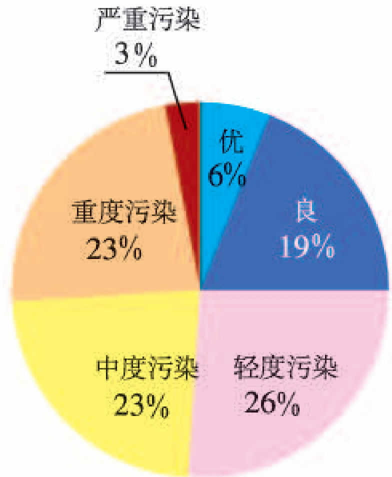


图 12.1-2

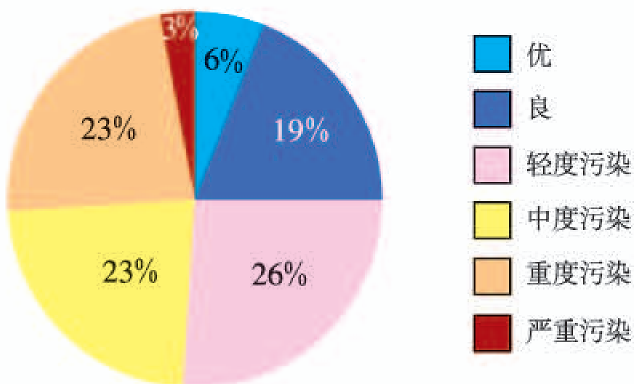


图 12.1-3

思考

根据图12.1-1和图12.1-2回答问题：

（1）这一天，环境空气质量为“重度污染”和“严重污染”的城市共有______个，占城市总数的______.

（2）环境空气质量比“良”差时，不适合进行户外运动. 这一天，不适合户外运动的城市占城市总数的______. 这个数据说明什么？

探究

比较上面的条形图和扇形图，看看它们在描述数据方面各有什么特点.

归纳

条形图的特点：

(1) 能够显示各类别的数据；

(2) 易于比较各类别数据之间的差距.

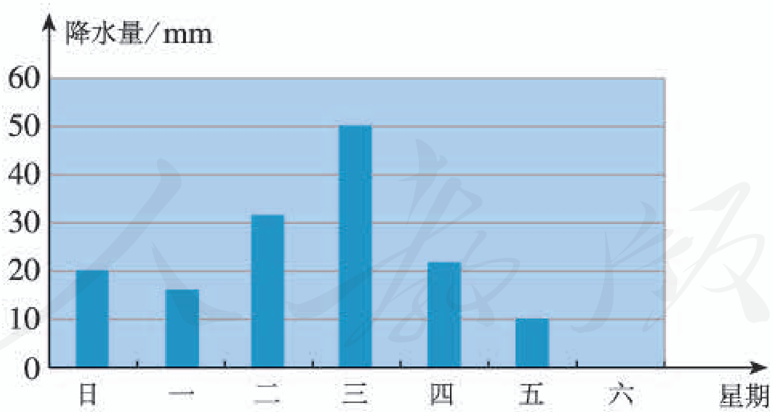
扇形图的特点：

(1) 能够显示每个类别数据占总数的百分比；

(2) 易于显示各类别数据相对总数的大小，以及各类别数据之间的相对大小.

巩固运用12.1

1. 下图是小明画出的雨季中某地某星期的降水量条形图.



(第1题)

(1) 这个星期中哪一天的降水量最多？

(2) 这个星期有没有晴天？

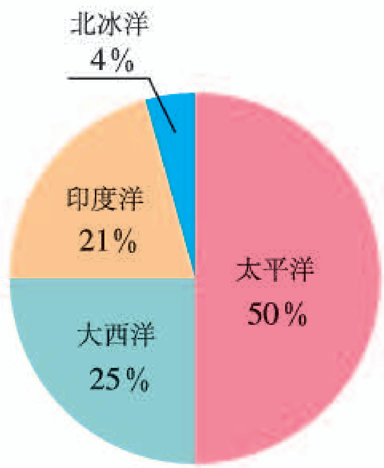
(3) 整个星期的总降水量大概是多少?

(4) 如果日降水量在 25 mm 以上为大雨,那么这个星期的哪几天在下大雨?

2. 如图,扇形图给出了北冰洋、印度洋、大西洋和太平洋四大洋占海洋总面积($3.622\ 58\times10^8 km^2$)的百分比.

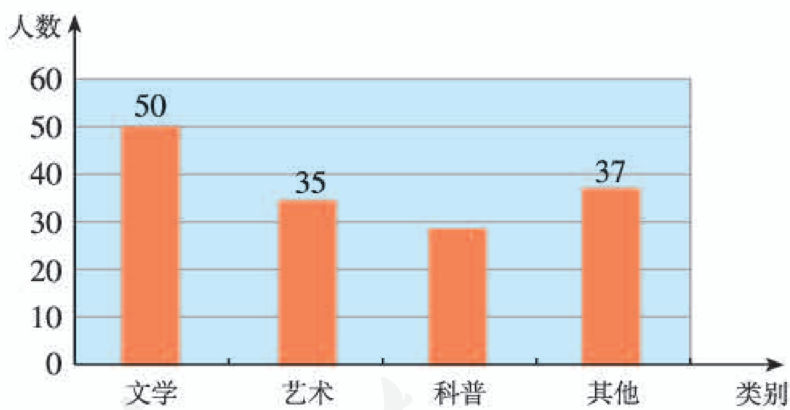
(1) 四大洋中面积最大的是哪一个?

(2) 使用计算器计算四大洋的面积.



(第 2 题)

3. 学校准备购买一批课外读物. 为使课外读物能够满足学生的需求,学校就"我最喜爱的课外读物"作了一次样本为 150 的抽样调查. 如图是根据调查结果绘制的统计图.

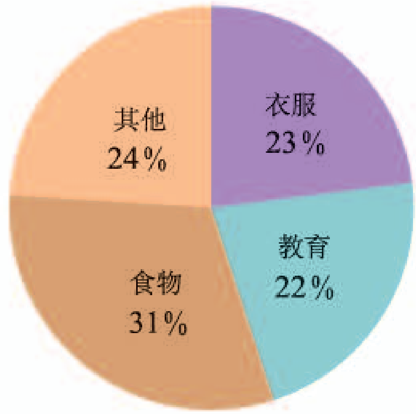


(第 3 题)

(1) 样本中有多少学生最喜爱科普类读物?

(2) 学校计划购买课外读物 4 500 册,根据样本数据,估计学校购买多少册艺术类读物比较合理.

4. 张雪洁家下个月的开支预算如图所示. 如果教育支出是 150 元,请估计她家下个月的总支出,并估计各项支出的大致金额,用条形图表示.



（第 4 题）

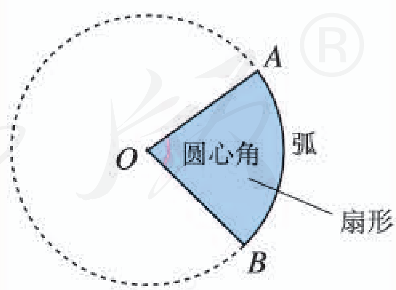
5. 请你上网查询最近某天全国各主要城市的环境空气质量，按照环境空气质量的类别进行统计，并用条形图表示. 与问题中 2016 年 1 月 1 日的数据进行比较，你能得出什么结论？

扇形图可以直观显示出各部分相对总体的大小，以及各部分之间的相对大小，是描述不同类别数据占总数据的百分比的合适统计图. 根据已有的数据，如何画扇形图呢？

我们知道，扇形图用圆代表总体，每一个扇形代表总体中的一部分，通过扇形的大小来反映各部分占总体的百分比. 由于扇形的大小可以通过圆心角来确定，因此只要根据百分比求出圆心角的度数，就可以画出各部分对应的扇形.

画扇形图 12.1-2 或 12.1-3 时，首先按各类别环境空气质量的百分比算出对应扇形的圆心角的度数，例如，“良”对应扇形的圆心角为 $360°\times19\%\approx68°$，“轻度污染”对应扇形的圆心角为 $360°\times26\%\approx94°$等. 然后在一个圆中，根据算得的各圆心角度数画出各个扇形，如图 12.1-4，并

扇形所对圆心角越大，扇形在圆中占的百分比就越大.



注明各类别的名称及其相应的百分比，就得到了图 12.1-2 或图 12.1-3.

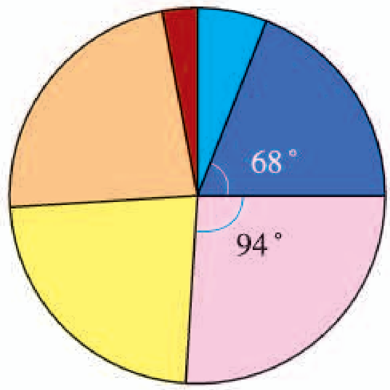


图 12.1-4

例 据调查，某班 40 名学生中，喜欢听流行音乐的有 28 名，喜欢听古典音乐的有 8 名，喜欢听其他类型音乐的有 4 名．请你选择合适的图形，展示班级中喜欢听各种音乐类型人数的相对多少.

分析： 扇形图是直观展示喜欢不同种类音乐人数相对多少的合适图形.

解： 可以用扇形图表示．喜欢听流行音乐、古典音乐、其他类型音乐的人数占全班总人数的百分比分别为

$$\frac{28}{40}\times100\%=70\%,\ \frac{8}{40}\times100\%=20\%,\ \frac{4}{40}\times100\%=10\%.$$

因此，它们所对应的扇形的圆心角分别为

$$360^\circ\times70\%=252^\circ,\ 360^\circ\times20\%=72^\circ,\ 360^\circ\times10\%=36^\circ.$$

画出的扇形图如图 12.1-5 所示.

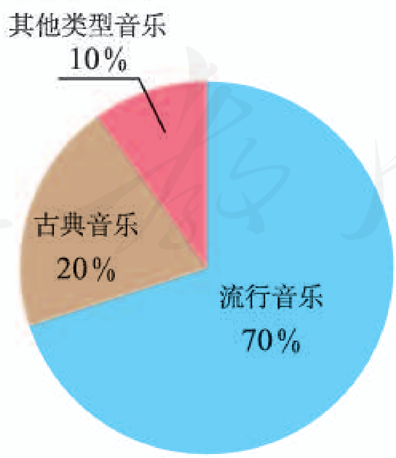


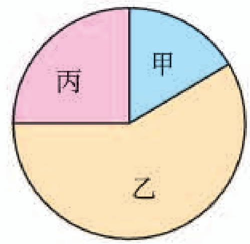
图 12.1-5

巩固运用12.2

1. 某校学生来自甲、乙、丙三个地区，其人数比为2∶7∶3.

   (1) 如果有 180 人来自甲地，那么这个学校共有多少学生；

   (2) 用如图所示的扇形图表示来自三个地区的学生数占总学生数的百分比，求扇形图中各个扇形的圆心角的度数.



(第 1 题)

2. 为了了解足球、篮球、排球运动在学生中的受欢迎程度，学校开展了“我最喜爱的球类运动”的调查. 下表是七 (1) 班和七年级学生最喜爱的球类运动的统计数据.

	足球运动	篮球运动	排球运动
七 (1) 班学生	6	24	13
七年级学生	24	96	52

   (1) 用扇形图分别表示七 (1) 班学生和七年级学生对各种球类运动的喜爱情况.

   (2) 根据画出的扇形图，你能发现什么有趣的现象吗？据此你能说说扇形图的特点吗？

   (3) 全校有 516 名学生，如果用七年级的数据估计全校的情况，全校会有多少人最喜爱篮球运动？

*12.2 折线图

问题 据统计，我国运动员在第 23～30 届夏季奥林匹克运动会上获得的奖牌数如下表所示.

表 12-3

届数	23	24	25	26	27	28	29	30
奖牌数	32	28	54	50	59	63	100	88

用什么样的统计图能比较直观地展示出奖牌数的变化趋势？

在小学，我们学过**折线图**（graph of broken line）. 折线图用折线的上升或下降表示统计数据的增减变化，可以用来描述某个量随时间、年龄等的变化而呈现出的变化趋势.

下面，我们用折线图来描述各届奥林匹克运动会上我国运动员夺得的奖牌数呈现出的变化趋势. 以届为横轴，奖牌数为纵轴建立平面直角坐标系，根据表 12-3，在坐标平面内描点（23，32），（24，28），…，（30，88），再用线段将这些点依次连接起来，得到如图 12.2-1 所示的折线图.

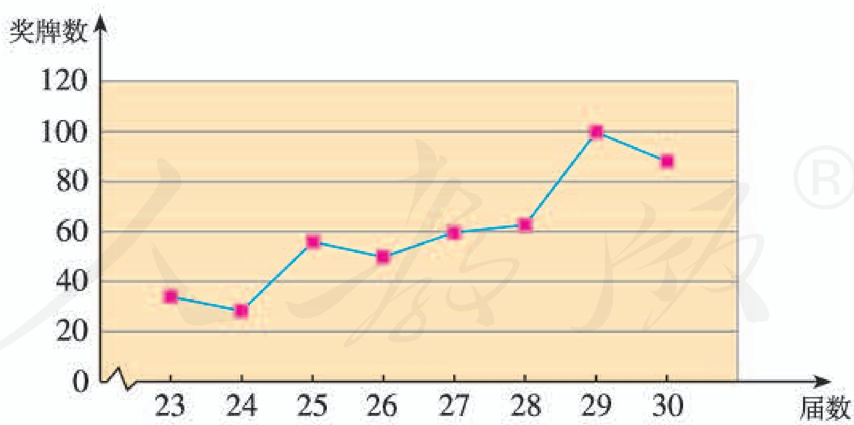


图 12.2-1

* 制作折线图为低视力学生选学内容.

从图 12.2-1 中可以看出，在第 23～30 届夏季奥林匹克运动会上，我国运动员获得的奖牌数总体上保持增长趋势. 还可以看出，我国运动员获得的奖牌数在第 24，26，30 届出现回落，在第 25，29 届增长幅度比较大等.

与条形统计图相比，折线统计图不仅可以表示数量的多少，而且可以反映同一事物在不同时间里的发展变化情况.

探究

1. 用条形图描述表 12-3 中的数据，并与折线图 12.2-1 比较，看看条形图与折线图在描述数据方面各有什么特点.

2. 你能用扇形图描述这些数据吗？说说在什么情况下用扇形图描述数据更好.

归纳

折线图的特点：

(1) 能够显示不同时间的数据；

(2) 易于显示数据的变化趋势.

例 随着我国对外开放程度的不断扩大，我国对外贸易迅速发展. 下表是我国 2007～2013 年的出口总值与进口总值.

表 12-4

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
出口总值/亿美元	12 205	14 307	12 016	15 778	18 983	20 487	22 090
进口总值/亿美元	9 561	11 326	10 059	13 962	17 435	18 184	19 500

请你选择合适的统计图描述进、出口总值的变化情况，并对它们进行比较.

解： 可以画出一个折线图来描述进、出口总值的发展趋势，如图 12.2-2.

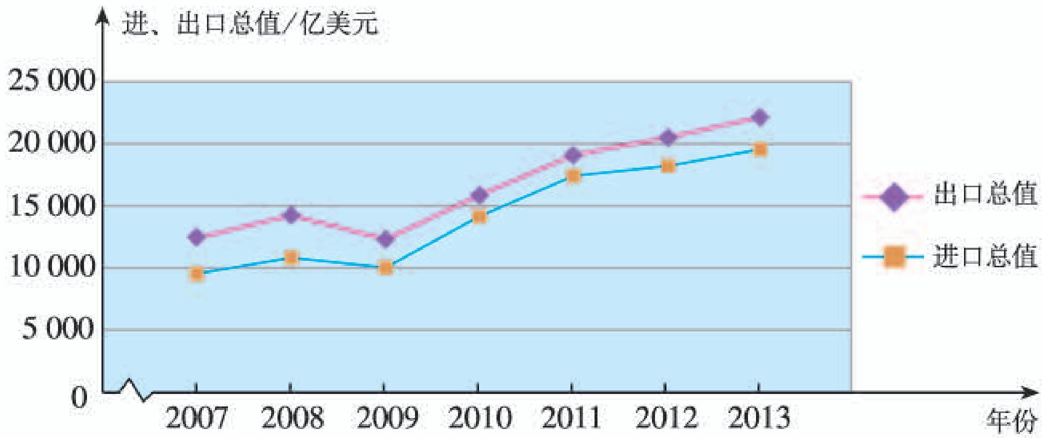


图 12.2-2

也可以用条形图来描述这两组数据，如图 12.2-3.

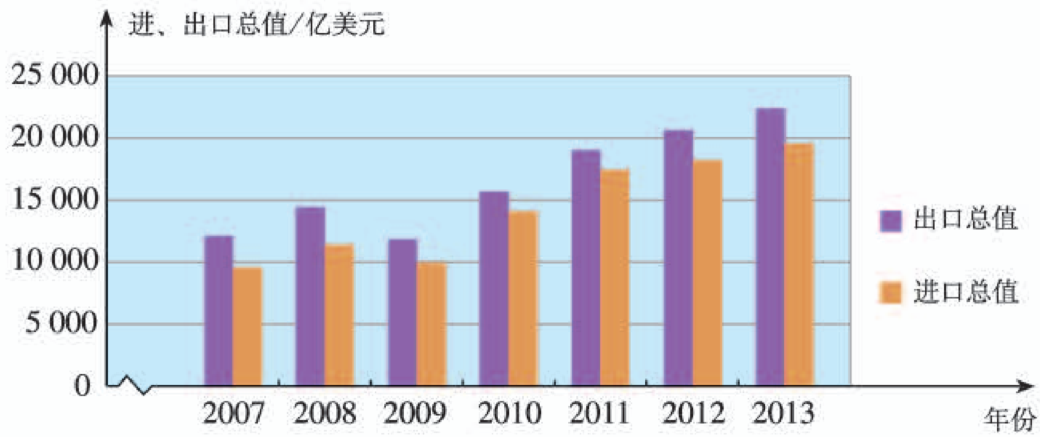


图 12.2-3

从图 12.2-2 或图 12.2-3 可以看出，除了 2009 年，这几年的出口总值与进口总值基本上都保持逐年增长的趋势，而且每年的出口总值都大于进口总值.

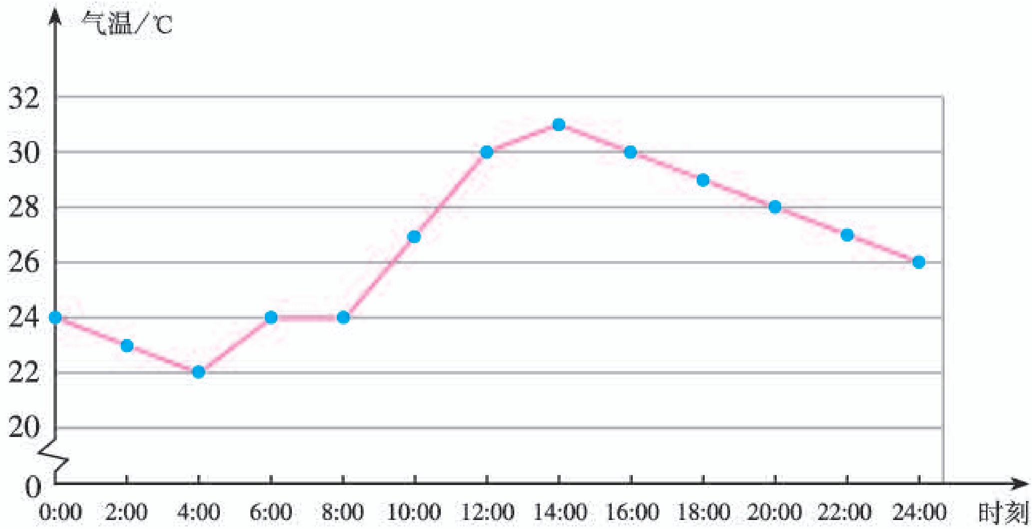
思考

1. 2013 年的出口总值约是 2007 年出口总值的____倍（结果保留小数点后一位）.

2. 根据统计图可以发现，2009 年进、出口总值比前一年都出现明显的回落，你能通过查阅资料，解释其中的原因吗？

巩固运用12.3

1. 下面的折线图描述了某地某日的气温变化情况.



(第 1 题)

(1) 这一天的最高气温是多少? 什么时候达到最高气温?

(2) 这一天的最低气温是多少? 什么时候达到最低气温?

(3) 估计这一天 7 时、11 时、15 时和 19 时的气温.

(4) 请你用自己的语言描述这天的气温的变化情况.

2. 下表是 2008～2014 年全国生活用水总量的数据.

年份	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
生活用水总量/亿 m^3	729	748	766	790	740	750	770

(1) 根据表中的数据, 在下面的平面直角坐标系中画出全国生活用水总量随年份变化的折线图.

(2) 2008～2014 年全国生活用水总量最大和最小分别是哪一年? 各为多少?

(3) 请你用自己的语言描述 2008～2014 年全国生活用水总量的变化情况.

(4) 根据折线图, 你能试着估计一下 2015 年全国生活用水总量吗? 查阅 2015 年实际的全国生活用水总量, 并与你的预测值比较, 你有什么发现?

（第 2 题）

阅读与思考

利用计算机画统计图

在计算机上画统计图不但快捷方便，而且画出的统计图标准、美观．我们可以用电子表格软件画统计图．下面简单介绍用“Microsoft Excel 2010”电子表格软件画图 12.2-1 中折线图的操作过程．

1．打开电子表格软件，在空白工作簿上按列（或行）输入数据或文字并选中它们（图 1）．

2．在“插入”选项卡上的“图表”组中单击“折线图”，在下拉菜单中选择“带数据标记的折线图”（图 2），即生成一个折线图（图 3）．

3．单击生成的折线图的任意位置，将显示“图表工具”，其中包含“设计”“布局”和“格式”选项卡．

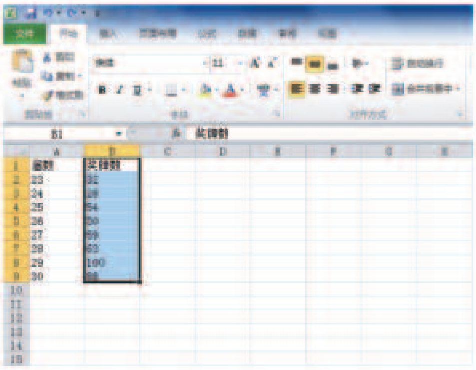


图 1

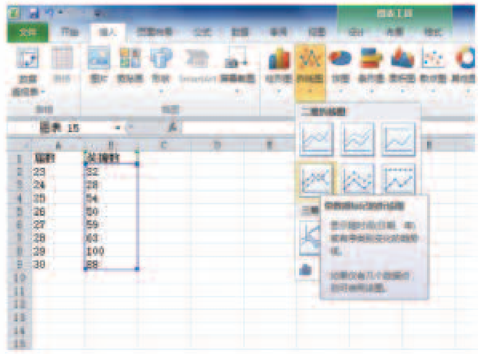


图 2

4. 在“设计”选项卡上的“数据”组中单击“选择数据”，把届数的数据区域作为“水平（分类）轴标签”，并在“布局”选项卡上的“标签”组中单击“坐标轴标题”，为横纵坐标轴加上标题．于是就生成了符合我们要求的折线图（图 4）．

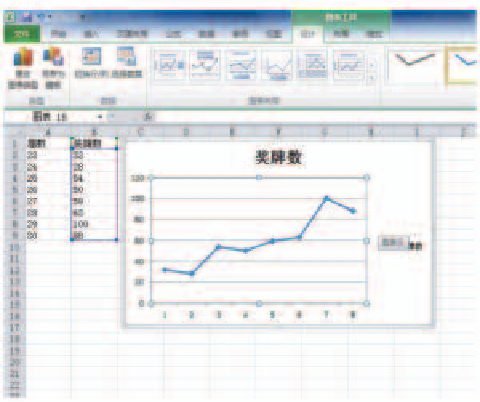


图 3

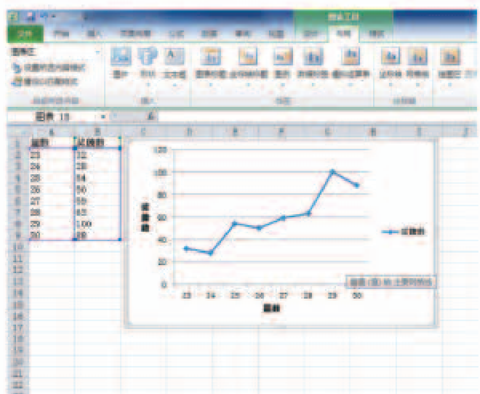


图 4

利用电子表格不仅能够画折线图，类似地，还可以画出其他类型的统计图．你可以尝试利用电子表格画出扇形图、条形图和直方图．

*12.3 直方图

我们学习了条形图、扇形图、折线图等多种统计图，下面将学习另一种常用来描述数据的统计图——**直方图**（histogram）.

问题 为了参加全校各年级之间的集体舞比赛，七年级准备从 63 名同学中挑选身高相差不多的 40 名同学参加比赛. 为此收集到这 63 名同学的身高（单位：cm）如下：

表 12-5

158	158	160	168	159	159	151	158	159
168	158	154	158	154	169	158	158	158
159	167	170	153	160	160	159	159	160
149	163	163	162	172	161	153	156	162
162	163	157	162	162	161	157	157	164
155	156	165	166	156	154	166	164	165
156	157	153	165	159	157	155	164	156

选择身高在哪个范围的同学参加呢？

* 画直方图为低视力学生选学内容.

为了使选取的参赛选手身高比较整齐，需要知道数据（身高）的分布情况，即在哪些身高范围的同学比较多，而哪些身高范围的同学比较少. 为此可以通过对这些数据适当分组来进行整理.

1. 计算最大值与最小值的差

在表 12-5 的数据中，最小值是 149，最大值是 172，最大值与最小值的差是 23，说明身高的变化范围是 23.

2. 决定组距和组数

把所有数据分成若干组，每个小组的两个端点之间的距离（组内数据的取值范围）称为组距. 根据问题的需要，各组的组距可以相同或不同. 本问题中我们作等距分组，即令各组的组距相同. 如果从最小值起每隔 3 作为一组，那么由

$$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$$

可得，可将数据分成 8 组：$149\leqslant x<152$，$152\leqslant x<155$，…，$170\leqslant x<173$. 这里组数和组距分别为 8 和 3.

你能举出其他分组的例子吗？

组距和组数的确定没有固定的标准，要凭借经验和所研究的具体问题来决定. 将一批数据分组，一般数据越多分的组数也越多. 当数据在 100 个以内时，按照数据的多少，常分成 5～12 组.

3. 列频数分布表

对落在各个小组内的数据进行累计，得到各个小组内的数据的频数. 整理可得下面的频数分布表.

表 12-6

身高分组	划记	频数
$149\leqslant x<152$	丅	2
$152\leqslant x<155$	正一	6
$155\leqslant x<158$	正正丅	12
$158\leqslant x<161$	正正正止	19
$161\leqslant x<164$	正正	10
$164\leqslant x<167$	正下	8

续表

身高分组	划记	频数
$167\leqslant x<170$	正	4
$170\leqslant x<173$	丅	2
合计		63

从表 12-6 中可以看出，身高在 $155\leqslant x<158$，$158\leqslant x<161$，$161\leqslant x<164$ 三个组的人数最多，一共有 $12+19+10=41$（人）.

因此，可以从身高在 155 cm 至 164 cm（不含 164 cm）的同学中挑选参加比赛的同学.

探究

上面对数据进行分组时，组距取 3，把数据分成 8 组. 如果组距取 2 或 4，那么数据分成几个组？这样能否选出需要的 40 名同学呢？

4. 画频数分布直方图

如图 12.3-1，为了更直观地看出频数分布的情况，可以根据表 12-5 画出频数分布直方图，如图 12.3-1.

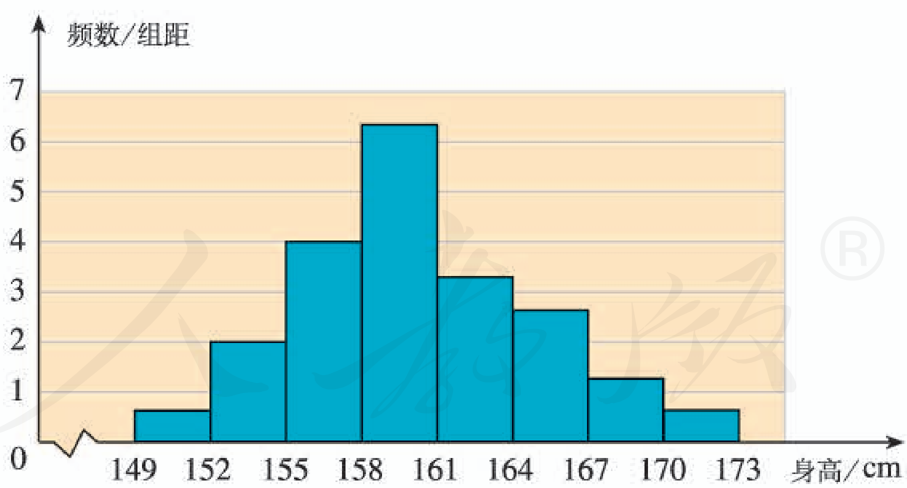


图 12.3-1

在图 12.3-1 中，横轴表示身高，纵轴表示频数与组距的比值. 容易看出，

$$小长方形面积=组距\times\frac{频数}{组距}=频数.$$

可见，频数分布直方图是以小长方形的面积来反映数据落在各个小组内的频数的大小，小长方形的高是频数与组距的比值.

等距分组时，各小长方形的面积（频数）与高的比是常数（组距）. 因此，画等距分组的频数分布直方图时，为画图与看图方便，通常直接用小长方形的高表示频数. 例如，图 12.3-1 表示的等距分组问题通常用图 12.3-2 的形式表示.

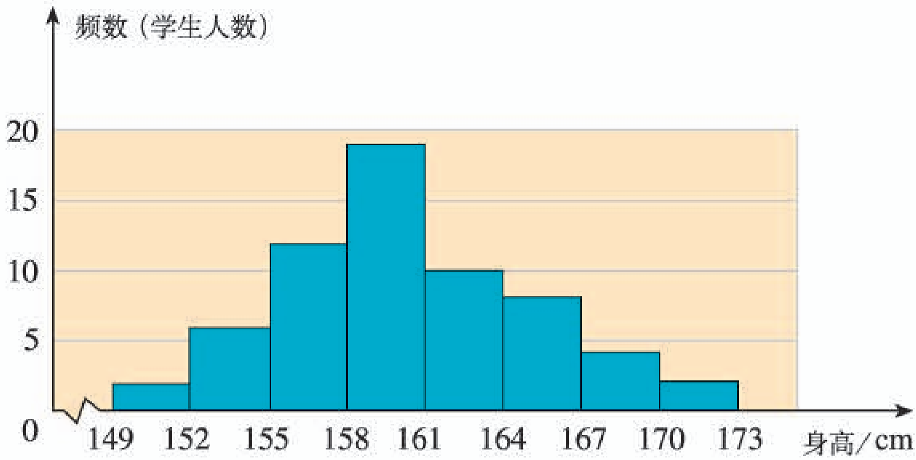
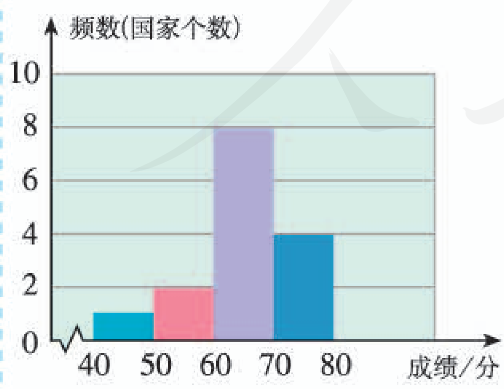


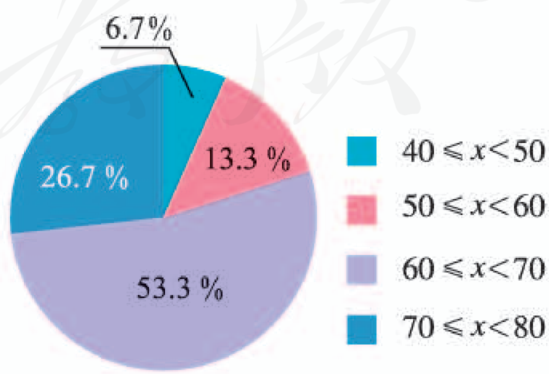
图 12.3-2

巩固运用12.4

1. 下面是某年参加国际教育评估的 15 个国家学生的数学平均成绩（x）的统计图.

(1) 哪一个图能更好地说明一半以上国家的学生成绩在 $60\leqslant x<70$ 之间?





（第 1 题）

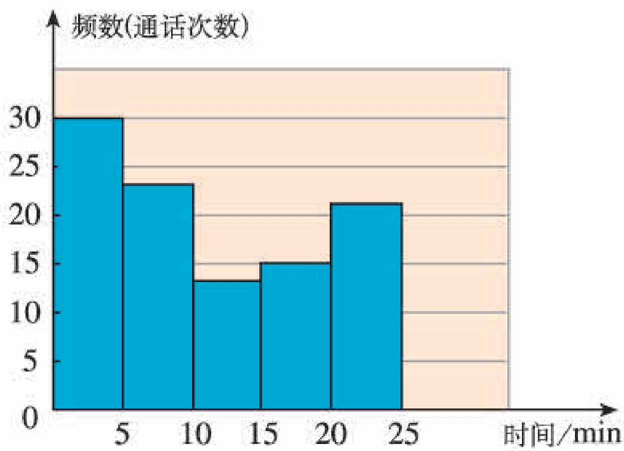
(2) 哪一个图能更好地说明学生成绩在 $70\leqslant x<80$ 的国家多于在 $50\leqslant x<60$ 的国家？

2. 江涛同学统计了他家 10 月份的长途电话明细清单，按通话时间画出如下直方图.

(1) 他家这个月一共打了多少次长途电话？

(2) 通话时间不足 10 min 的多少次？

(3) 哪个时间范围的通话最多？哪个时间范围的通话最少？



（第 2 题）

3. 体育委员统计了全班同学 60 s 跳绳的次数，并列出下面的频数分布表.

次数	$60\leqslant x<100$	$100\leqslant x<140$	$140\leqslant x<180$	$180\leqslant x<220$
频数	4	10	21	5

(1) 全班有多少学生？

(2) 组距是多少？组数是多少？

(3) 跳绳次数 x 在 $100\leqslant x<180$ 范围的学生有多少？占全班学生的百分之几？

(4) 画出适当的统计图表示上面的信息.

(5) 你怎样评价这个班的跳绳成绩？

例 为了考察某种大麦穗长的分布情况，在一块试验田里抽取了 50 根麦穗，量得它们的长度（单位：mm）如下表.

表 12-7

65	64	67	58	59	59	52	40	54	46
58	55	60	65	51	65	53	59	55	58
62	54	50	50	68	60	50	57	60	55
68	60	63	55	50	63	52	60	70	64
64	58	59	57	68	66	60	64	57	74

列出样本的频数分布表，画出频数分布直方图，观察麦穗长的分布有什么特征.

解：(1) 计算最大值与最小值的差

在样本数据中，最大值是 74，最小值是 40，它们的差是

$$74-40=34.$$

(2) 决定组距与组数

在本例中，最大值与最小值的差是 34. 如果取组距为 5，那么由于

$$\frac{34}{5}=6.8,$$

可将样本数据分成 7 组，组数适合. 于是取组距为 5，组数为 7.

(3) 列频数分布表

表 12-8

分组	划记	频数
$40\leqslant x<45$	一	1
$45\leqslant x<50$	一	1
$50\leqslant x<55$	正正	10
$55\leqslant x<60$	正正正	15
$60\leqslant x<65$	正正下	13
$65\leqslant x<70$	正下	8
$70\leqslant x<75$	丅	2
合计		50

（4）画频数分布直方图

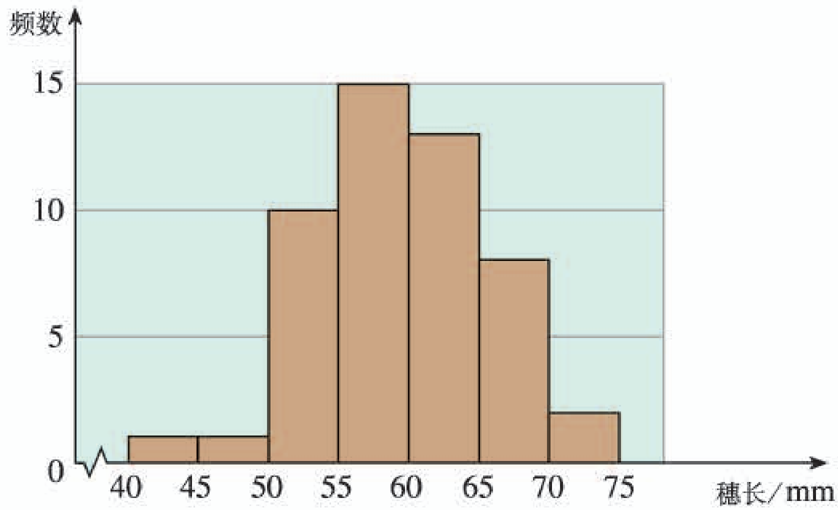
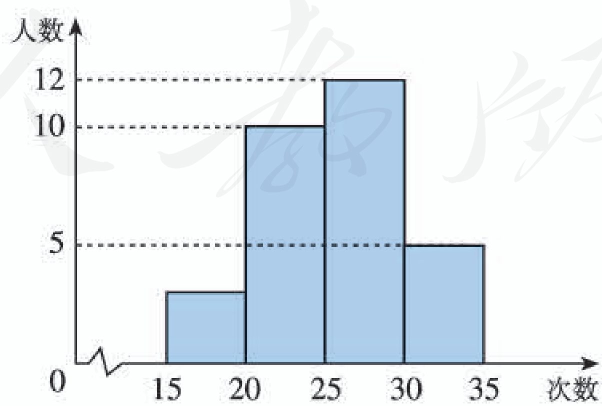


图 12.3-3

从表 12-8 和图 12.3-3 看出，麦穗长度大部分落在 50 mm 至 70 mm 之间，落在其他范围较少. 长度在 $55\leqslant x<60$ 范围内的麦穗根数最多，有 15 根，而长度在 $40\leqslant x<45$，$45\leqslant x<50$，$70\leqslant x<75$ 范围内的麦穗根数很少，总共只有 4 根.

巩固运用12.5

1. 学校为了了解七年级 500 名学生的体能情况，随机抽查了其中的 30 名学生，测试了一分仰卧起坐的次数，并绘制成如图所示的频数分布直方图. 请你估计学校仰卧起坐次数在 15～20 之间的学生有多少人.



（第 1 题）

2. 下面数据是截至 2014 年费尔兹奖得主获奖时的年龄：

29	39	35	33	39	28	33	35
31	31	37	32	38	36	31	39
32	38	37	34	29	34	38	32
35	36	33	29	32	35	36	37
39	38	40	38	37	39	38	34
33	40	36	36	37	40	31	38
38	40	40	37	35	40	39	37

费尔兹奖是国际上享有崇高声誉的一个数学奖项，每 4 年评选一次，主要授予年轻的数学家. 美籍华人丘成桐（1949 年出生）1982 年获费尔兹奖.

请根据下面不同的分组方法列出频数分布表，画出频数分布直方图，比较哪一种分组能更好地说明费尔兹奖得主获奖时的年龄分布：

(1) 组距是 2，各组是 $28\leqslant x<30$，$30\leqslant x<32$，…；

(2) 组距是 5，各组是 $25\leqslant x<30$，$30\leqslant x<35$，…；

(3) 组距是 10，各组是 $20\leqslant x<30$，$30\leqslant x<40$，….

数学活动

下表是 2008～2014 年我国国内生产总值（GDP）的数据.

年份	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
国内生产总值/亿元	316 752	345 629	408 903	484 124	534 123	588 019	636 139

（1）在平面直角坐标系（图 1）中描出表中各对值所对应的点，其中横坐标表示年份，纵坐标表示国内生产总值. 这些点的排列有什么特点?

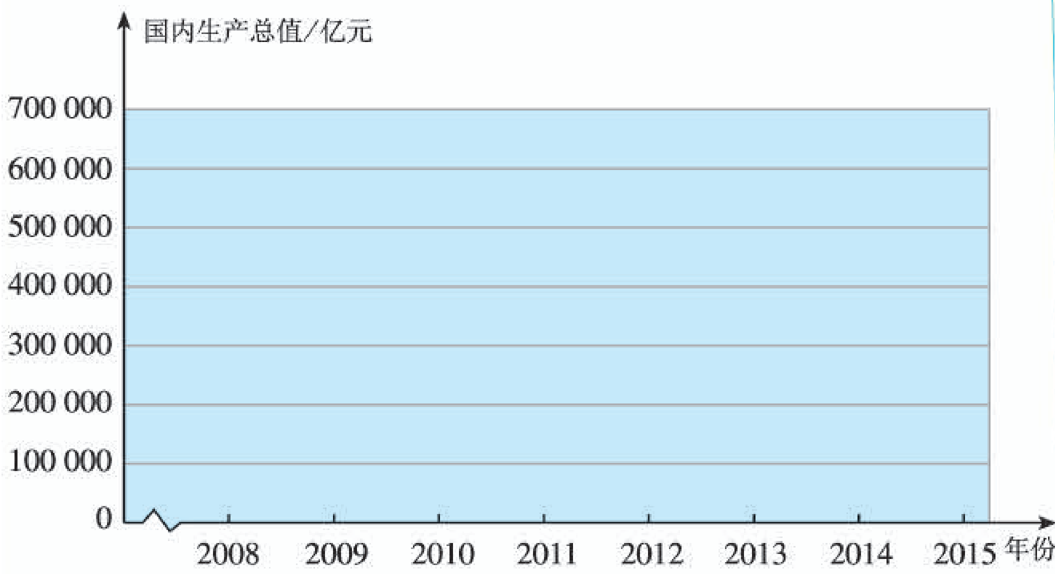


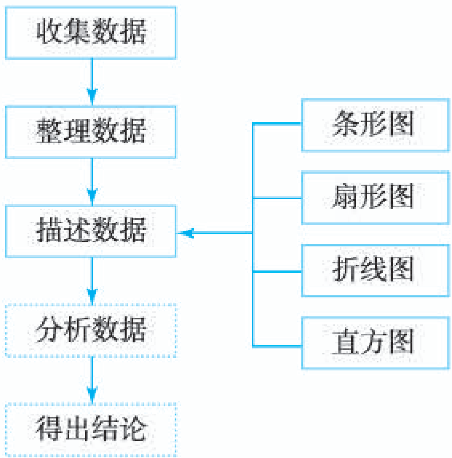
图 1

（2）你能用自己的语言描述国内生产总值随时间的变化趋势吗?

（3）根据这种趋势，请估计 2015 年我国的国内生产总值，并和自己查阅的这一年实际的国内生产总值进行比较. 你的估计准确吗? 为什么?

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 统计的基本过程包括数据的收集、整理、描述和分析，以及最后结论的得出．利用统计图描述数据是统计过程中的一个重要环节，你觉得统计的主要作用是什么？

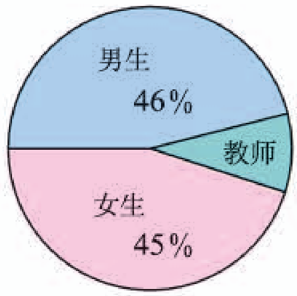
2. 用统计图描述数据，有利于我们发现数据中蕴含的信息或研究问题的线索，是我们进行数据处理的常用手段．到目前为止，我们学习了哪些统计图？

3. 不同的统计图一般都有各自适合描述的数据类型．例如，条形图和扇形图一般适合描述分类数据，折线图适合描述跟时间有关的数据，而直方图主要用于描述连续型数据，等等．你能说说条形图、扇形图、折线图和直方图这四种统计图在描述数据上的特点吗？

复习题 12

复习巩固

1. 某中学男生、女生和教师人数的百分比如图所示，已知该校学生和教师的总人数为 1 200.

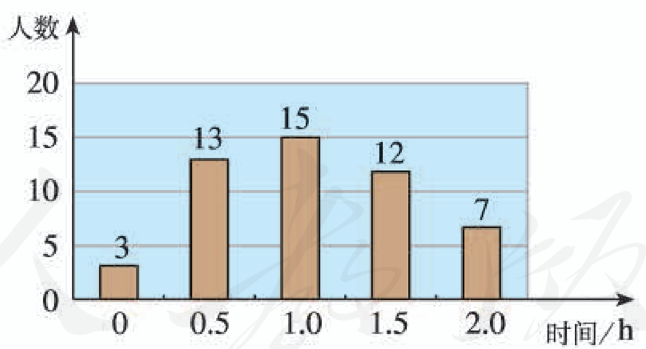


（第 1 题）

（1）该校教师占总人数的百分比为多少？共有多少人？

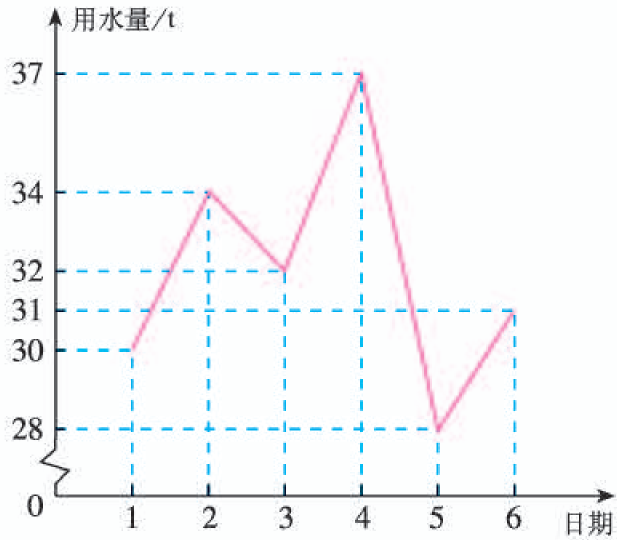
（2）表示女生的扇形的圆心角为多少度？

2. 学校为了了解学生的课外阅读情况，随机调查了 50 个学生，得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据，结果如图所示．这一天该学校学生平均课外阅读时间约为多少？



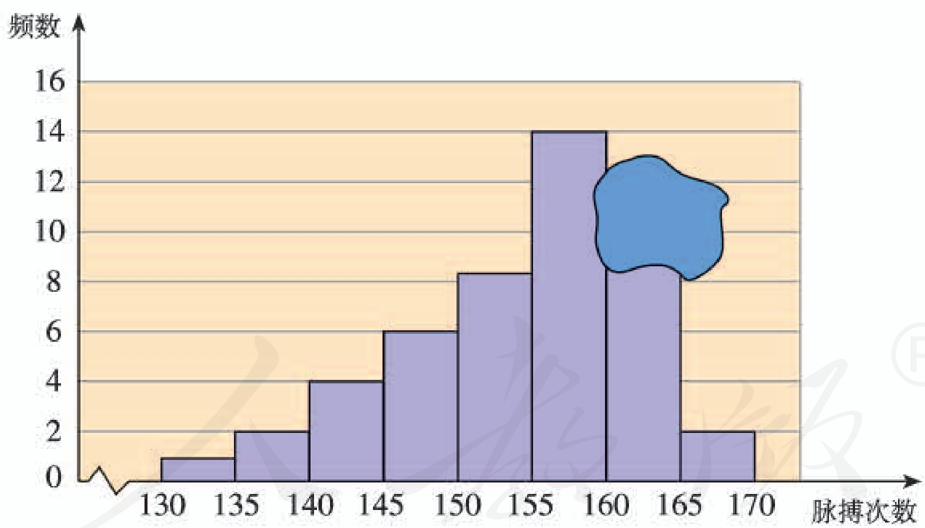
（第 2 题）

3. 某住宅小区 6 月份中 1～6 日每天用水量变化情况如图所示，那么这 6 天的总用水量是多少？



（第 3 题）

4. 为了研究 800 m 赛跑后学生心率的分布情况，体育老师统计了全班 49 名学生的脉搏一分跳动次数，并根据整理的表格画出了频率分布直方图．由于不小心，有一个小长方形被墨水玷污了．你能根据已有信息把直方图补全吗？



（第 4 题）

综合运用

5. 根据下表中世界七大洲的面积（单位：万 km^2），画扇形图表示各大洲面积占全球陆地面积的百分比，并用语言描述你获得的信息．

大洲	亚洲	欧洲	北美洲	南美洲	非洲	大洋洲	南极洲
面积/万 km^2	4 400	1 000	2 400	1 800	3 000	900	1 400

6. 随着经济的发展，我国居民的收入不断提高. 下表是2007～2014年我国城镇居民和农村居民人均可支配收入的数据.

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
城镇收入/元	13 786	15 781	17 175	19 109	21 810	24 565	26 955	28 844
农村收入/元	4 140	4 761	5 153	5 919	6 977	7 917	8 896	10 489

(1) 请你选择合适的统计图描述这两组数据；

(2) 用自己的语言描述统计图中读到的信息.

7. 足球号称世界第一运动，四年一届的世界杯更是足球爱好者的节日. 截至2014年，共举办了20届世界杯，各国夺冠次数统计如下表所示.

排名	国家	夺冠次数
1	巴西	5
2	意大利	4
2	德国	4
4	乌拉圭	2
4	阿根廷	2
6	英格兰	1
6	西班牙	1
6	法国	1

(1) 请你用条形图描述各国夺冠的次数.

(2) 如果夺冠按各大洲统计，请你用扇形图来表示各大洲夺冠次数的百分比. 你发现什么有趣的信息了吗?

8. 一个面粉批发商统计了前48个星期的销售量（单位：t）：

24.4	19.1	22.7	20.4	21.0	21.6	22.8	20.9	21.8	18.6
24.3	20.5	19.7	23.5	21.6	19.8	20.3	22.4	20.2	22.3
21.9	22.3	21.4	19.2	23.5	20.5	22.1	22.7	23.2	21.7
21.1	23.1	23.4	23.3	21.0	24.1	18.5	21.5	24.4	22.6
21.0	20.0	20.7	21.5	19.8	19.1	19.1	22.4		

请将数据适当分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图，并分析这个面粉批发商每星期进面粉多少吨比较合适.

拓广探索

9. 某市在实施居民用水定额管理前，对居民生活用水情况进行了调查，下表是通过简单随机抽样调查获得的 50 个家庭去年的月均用水量（单位：t）.

4.7	2.0	3.1	2.3	5.2	2.8	7.3	4.3	4.8	6.7
4.5	5.1	6.5	8.9	2.0	4.5	3.2	3.2	4.5	3.5
3.5	3.5	3.6	4.9	3.7	3.8	5.6	5.5	5.9	6.2
5.7	3.9	4.0	4.0	7.0	3.7	8.3	4.2	6.4	3.5
4.5	4.5	4.6	5.4	5.6	6.6	5.8	4.5	6.2	7.5

(1) 请选择合适的组距和组数，列出样本频数分布表，画出频数分布直方图. 从直方图中你能得到什么信息？

(2) 为了鼓励节约用水，要确定一个用水量的标准，超出这个标准的部分按 1.5 倍价格收费. 若要使 60% 的家庭水费支出不受影响，你觉得家庭月均用水量标准应该定为多少？为什么？

部分中英文词汇索引