盲校义务教育实验教科书

数 学

八年级下册

（盲文版）

盲校义务教育实验教科书

数学

八年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：薛　彬　李海东
本册主编：张唯一
主要编写人员：章建跃　张瑞坤　王鲁春　陈保水
　　　　　　　张艳娇　张唯一
责任编辑：宋莉莉　王翠巧
美术编辑：王俊宏

盲校义务教育实验教科书　数学　八年级　下册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　×××印刷厂
版　　次　　　年　月第　版
印　　次　　　年　月第　次印刷
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张
字　　数　　　千字
书　　号　ISBN 978-7-107-　　-
定　　价　　　元
价格依据文件号：京发改规［2016］13号

编者的话

同学们，欢迎大家使用这套数学教科书，它是我们根据《盲校义务教育数学课程标准（2016 年版）》编写的，希望它能成为你们学习数学的好帮手.

为什么要学习数学呢？主要的理由有两个方面：

数学应用很广泛. 数学是重要的基础科学. 华罗庚说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在." 随着与计算机技术的结合，数学在我们的生活、学习、工作乃至娱乐中的作用与日俱增.

数学使人更聪明. 数学是锻炼思维的体操. 学习数学能使我们更合乎逻辑、更有条理、更精确、更深入地思考和解决问题，增强我们的想象力和创造性，有助于提高我们的学习能力. 懂得并能运用数学，就意味着你有更多的机会和选择.

这套教科书有什么特点呢？主要有以下三个方面：

整体设计，加强联系，突出数学核心内容. 教科书围绕课程标准的核心内容整体设计，构建符合数学逻辑和学习心理的教科书体系. 循序渐进地安排核心的数学概念和重要的数学思想方法，以便同学们更好地掌握它们.

反映背景，加强应用，体现数学基本思想. 教科书精选现实生活和数学发展的典型问题为背景，让同学们感受知识的自然发展过程，感受数学的抽象思想. 通过解决具有真实背景的问题，让同学们感受数学与生活的联系，体现数学的

模型思想.

体现过程，加强探究，积累数学活动经验. 教科书在内容的呈现上努力体现数学思维规律，以问题引导学习，给同学们自主探索的机会，经历数学概念的概括过程、数学结论的形成过程，从中体会数学的研究方法，积累数学活动经验.

如何使用这套教科书学好数学呢？下面提出一些想法：

勤于思考，勇于探究，善于归纳. 我们所学的数学基础知识，大多是从丰富的实际背景中抽象概括而成的，这是一个由表及里、逐步深入的过程. 教科书安排了“思考”“探究”“归纳”等栏目，引导同学们经历上述过程，通过观察、实验、猜想、推理、反思、交流等活动积累学习经验，逐步学会发现、提出、分析和解决问题.

巩固基础，注重运用，提高能力. 学数学首先要充分重视概念、公式和定理等，并且要通过解题等实践活动，深化认识和提高能力. 同学们在学习教科书“巩固运用”“复习题”“数学活动”等内容时，应加强独立思考，认真地分析问题、探寻解题思路、落实解题步骤，并要反思解题过程，使自己学数学、用数学的能力不断提高.

开阔视野，自主学习，立足发展. 数学源远流长、博大精深，奥妙无穷. 教科书提供了“阅读与思考”等选学内容，还提供了标有“*”的内容供学生选学. 希望同学们通过生动活泼、积极主动的学习，在更广阔的数学天地中提升学习能力和增强探究能力.

让我们开始八年级下册的学习吧！

面积为 $2\ \mathrm{dm}^2$ 的正方形的边长是多少？体积为 $3\ \mathrm{dm}^3$ 的

正方体的棱长是多少？为解决这些问题，需要引入无理数，这也使我们认识的数的范围扩大到了**“实数”**.

整式与分式可以用来表示实际问题中的数量关系，接下来我们学习**“二次根式”**. 掌握二次根式的内容，我们就能够解决更多的数量关系问题.

你知道直角三角形的三条边有什么关系吗？请你到**“勾股定理”**中去探索. 在探索的过程中，你会由衷地感叹数学的美妙与和谐.

平行四边形在我们的生活中随处可见. 它有什么特殊的性质？一般的平行四边形与特殊的平行四边形之间有什么联系与区别？通过**“平行四边形”**一章的学习，你会对这些问题有更深刻的认识.

我们生活在变化的世界中，变化的例子举不胜举，函数将给你提供描述变化的一种数学工具. 学习了**“一次函数”**，你将可以通过分析实际问题中的变量关系，得到相应的函数，进而解决非常广泛的问题.

“数据的分析”将引导你进一步学习数据处理的方法，比如如何分析数据的集中趋势、如何刻画数据的离散程度等. 通过一些统计问题的解决，你会对数据的作用有更深刻的认识.

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

编者

2018 年 1 月

目　　录

第十九章　实数

我们知道，边长为 a 的正方形面积是 a^2. 已知正方形的边长就能求它的面积，例如，当正方形的边长 $a=2$ 时，它的面积 $a^2=4$. 同学们有没有想过，把问题反过来，即已知正方形的面积，能求出它的边长吗？如果正方形的面积 $a^2=4$，我们能求出它的边长 $a=2$. 如果正方形的面积 $a^2=2$，那么它的边长 a 是多少呢？事实上，就像把数的范围局限在正有理数将无法表示相反意义的量一样，如果把数的范围局限在有理数，我们将无法表示这个 a. 为此，我们需要引入一种新的数——无理数.

本章我们先学习平方根与立方根，再引入无理数，把数的范围扩充到实数，并在数轴上表示实数. 在此基础上介绍实数的运算，并用实数的有关知识解决一些实际问题.

19.1 平方根

我们知道，通过平方运算可以计算出一个数的平方. 反过来，如果知道一个数的平方，如何求这个数呢？

思考

如果一个数的平方等于 9，那么这个数是多少？

由于 $3^2=9$，因而这个数可以是 3；由于 $(-3)^2=9$，因而这个数也可以是 -3.

因此，如果一个数的平方等于 9，那么这个数是 3 或 -3.

填表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**（square root）或**二次方根**. 这就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根或二次方根. 例如，3 和 -3 是 9 的平方根，简记为 ± 3 是 9 的平方根. 几千年前，古埃及人就已经知道了平方根.

求一个数的平方根的运算，叫做**开平方**（extraction of square root）.

我们看到，±3 的平方等于 9，9 的平方根是 ±3，所以平方与开平方互为逆运算（图 19.1-1）. 根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根.

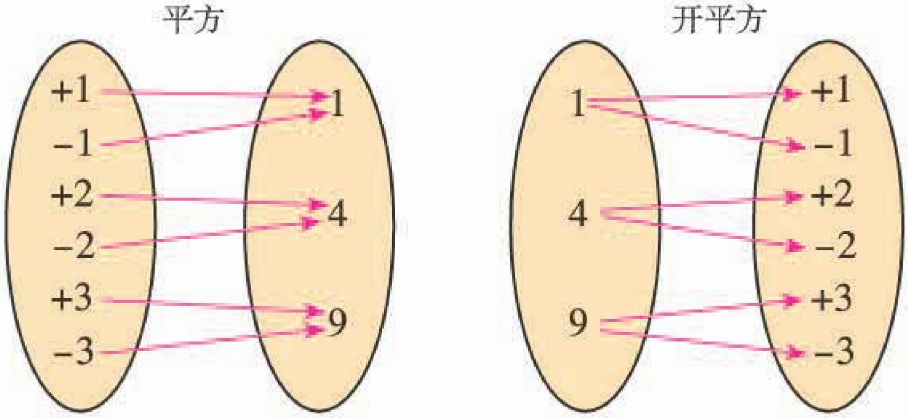


图 19.1-1

例 1 求下列各数的平方根：

（1）25；（2）$\frac{9}{16}$；（3）0.01.

解：（1）因为 $(\pm5)^2=25$，所以 25 的平方根是 ±5；

（2）因为 $\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，所以 $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{4}$；

（3）因为 $(\pm0.1)^2=0.01$，所以 0.01 的平方根是 ±0.1.

思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数.

因为 $0^2=0$，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.

归纳

正数有两个平方根，它们互为相反数；

0 的平方根是 0；

负数没有平方根.

一个正数 a 的正的平方根，用符号“$\sqrt{a}$”表示，读作“根号 a”，a 叫做**被开方数**（radicand）；正数 a 的负的平方根，用符号“$-\sqrt{a}$”表示，故正数 a 的平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示. 例如，$\pm\sqrt{9}$ 表示 9 的平方根，$\pm\sqrt{9}=\pm 3$. 符号 $\sqrt{a}$ 只有当 $a\geqslant 0$ 时有意义，$a<0$ 时无意义. 你知道为什么吗？

例 2 下列各数有平方根吗？如果有，求它的平方根；如果没有，说明理由.

（1）81；（2）-64；（3）0；（4）$(-4)^2$.

解：（1）因为 81 是正数，所以 81 有两个平方根，$\pm\sqrt{81}=\pm 9$；

（2）因为-64是负数，所以-64没有平方根；

（3）0 只有一个平方根，它是 0；

（4）因为$(-4)^2=16>0$，所以$(-4)^2$有两个平方根，$\pm\sqrt{(-4)^2}=\pm\sqrt{16}=\pm 4$.

巩固运用19.1

1. 求下列各数的平方根：

（1）64；　（2）$\dfrac{4}{81}$；　（3）7^2；　（4）0.16.

2. 判断下列说法是否正确：

（1）0 的平方根是 0；

（2）1 的平方根是 1；

（3）-1的平方根是-1；

（4）0.01 是 0.1 的一个平方根.

3. 下列各式是否有意义？为什么？

（1）$-\sqrt{3}$；　（2）$\sqrt{-3}$；

（3）$\sqrt{(-3)^2}$；　（4）$\sqrt{\dfrac{1}{10^2}}$.

4. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2=25$；　（2）$9x^2=4$.

我们知道，正数 a 有两个平方根$\pm\sqrt{a}$，其中正的平方根$\sqrt{a}$也叫做 a 的**算术平方根**（arithmetic square root）.

0 的平方根也叫做 0 的算术平方根. 由此可知，0 的算术平方根是 0，这就是说$\sqrt{0}=0$.

例 3 求下列各数的算术平方根：

(1) 81； (2) $\frac{49}{64}$； (3) 0.000 1.

解：(1) 因为 $9^2=81$，所以 81 的算术平方根是 9，即 $\sqrt{81}=9$；

(2) 因为$\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，所以$\frac{49}{64}$的算术平方根是$\frac{7}{8}$，即$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$；

(3) 因为 $0.01^2=0.000\,1$，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即$\sqrt{0.000\,1}=0.01$.

从例 3 可以看出：被开方数越大，对应的算术平方根也越大. 这个结论对所有正数都成立.

探究

如图 19.1-2，能否用两个面积为 1 dm^2的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2的大正方形？

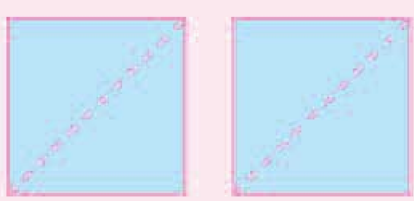


图 19.1-2

把两个小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形（图 19.1-3）. 你知道这个大正方形的边长是多少吗？

图 19.1-3

设大正方形的边长为 x dm，则

$$x^2=2.$$

由算术平方根的意义可知

$$x=\sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是 $\sqrt{2}$ dm.

由此，你能求出小正方形的对角线的长吗？

探究

$\sqrt{2}$ 有多大呢？

因为 $1^2=1$，$2^2=4$，

所以 $1<\sqrt{2}<2$；

因为 $1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，

所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$；

因为 $1.41^2=1.988\ 1$，$1.42^2=2.016\ 4$，

所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$；

因为 $1.414^2=1.999\ 396$，$1.415^2=2.002\ 225$，

所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$；

……

如此进行下去，可以得到$\sqrt{2}$的更精确的近似值. 事实上，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$，它是一个无限不循环小数. 无限不循环小数是指小数位数无限，且小数部分不循环的小数. 你以前见过这种数吗？

实际上，许多正有理数的算术平方根（例如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等）都是无限不循环小数.

巩固运用19.2

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 36；　(2) 0.04；　(3) $\frac{25}{64}$；　(4) 3^2.

2. 判断下列说法是否正确：

(1) 5 是 25 的算术平方根；

(2) $\frac{1}{7}$是$\frac{1}{49}$的一个平方根；

(3) $(-3)^2$的平方根是-3；

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1}$；　(2) $-\sqrt{100}$；　(3) $\sqrt{\frac{9}{25}}$；

(4) $-\sqrt{0.49}$；　　(5) $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$；　　(6) $\pm\sqrt{\frac{49}{9}}$.

4. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关. 如果一个正方形的面积为 A，那么这个正方形的边长是多少？

在生活中，我们经常遇到估计一个数的大小的问题. 请看下面的例子.

例 4　小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片，使它的长宽之比为 3∶2. 她不知道能否裁得出来，正在发愁. 小明见了说："别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片." 你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？

解：设长方形纸片的长为 $3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系，得

$$3x\cdot 2x=300,$$
$$6x^2=300,$$
$$x^2=50,$$
$$x=\sqrt{50}.$$

因此长方形纸片的长为 $3\times\sqrt{50}$ cm，即 $3\sqrt{50}$ cm.

因为 $50>49$，所以 $\sqrt{50}>7$.

由上可知 $3\sqrt{50}>21$，即长方形纸片的长应该大于

21 cm.

因为$\sqrt{400}=20$，所以正方形纸片的边长只有 20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不能同意小明的说法. 小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

大多数计算器都有 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）. 要注意，不同品牌的计算器，按键顺序有所不同.

例 5 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{3\,136}$；

(2) $\sqrt{2}$（精确到 0.001）.

解：(1) 依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 3136 $\boxed{=}$，

显示：56.

$\therefore\ \sqrt{3\,136}=56$.

(2) 依次按键 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 $\boxed{=}$，

显示：1.414213562（这是$\sqrt{2}$的近似值）.

$\therefore\ \sqrt{2}\approx1.414$.

例 6 宇宙飞船离开地球进入地面附近轨道运行的速度要大于第一宇宙速度 v_1（单位：m/s），而小于第二宇宙速度 v_2（单位：m/s）. v_1，v_2的大小满足 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，其中 g（重力加速度）是物理中的一个常数，$g\approx9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$R$ 是

地球半径，$R \approx 6.4 \times 10^6$ m. 请你求出 v_1，v_2的值（用科学记数法把结果写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位）.

解：由 $v_1^2 = gR$，$v_2^2 = 2gR$，得 $v_1 = \sqrt{gR}$，$v_2 = \sqrt{2gR}$. 将 $g \approx 9.8$，$R \approx 6.4 \times 10^6$分别代入，利用计算器求得

$$v_1 \approx \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 7.9 \times 10^3,$$

$$v_2 \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 1.1 \times 10^4.$$

因此，第一宇宙速度 v_1大约是 7.9×10^3 m/s，第二宇宙速度 v_2大约是 1.1×10^4 m/s.

巩固运用19.3

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\ 369}$；　　(2) $\sqrt{101.203\ 6}$.

2. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) $-\sqrt{5}$；　　(2) $\pm\sqrt{2\ 402}$.

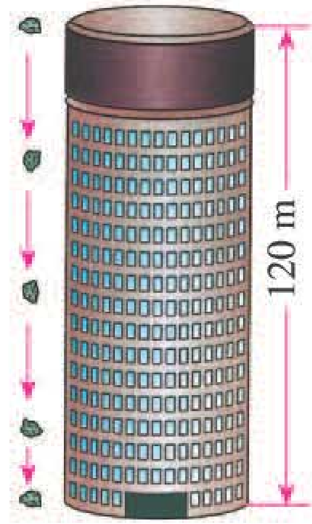
3. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{10}$；　　(2) $\sqrt{65}$ 与 8；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与 0.5；　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与 1.

4. 估计与 $\sqrt{40}$ 最接近的两个整数是多少.

5. 物体自由下落的高度 h（单位：m）与下落时间 t（单位：s）的关系是 $h=4.9t^2$. 如图，有一个物体从 120 m高的建筑物上自由落下，到达地面需要多长时间（结果取整数）？



（第 5 题）

19.2 立方根

问题 要制作一种容积为27 m^3的正方体形状的包装箱，这种包装箱的棱长应该是多少？

设这种包装箱的棱长为 x m，则

$$x^3=27.$$

这就是要求一个数，使它的立方等于 27.

因为 $3^3=27$，所以 $x=3$.

因此这种包装箱的棱长应为 3 m.

一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**（cube root）或**三次方根**. 这就是说，如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根或三次方根. 在上面的问题中，由于 $3^3=27$，因而 3 是 27 的立方根.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方**（extraction of cube root）.

正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算. 我们可以根据这种关系求一个数的立方根.

探究

根据立方根的意义填空. 你能发现正数、0 和负数的立方根各有什么特点吗？

因为 $2^3=8$，所以 8 的立方根是（　）；

因为（　）$^3=0.064$，所以 0.064 的立方根是（　）；

因为（　）$^3=0$，所以 0 的立方根是（　）；

因为（　）$^3=-8$，所以 -8 的立方根是（　）；

因为（　）$^3=-\frac{8}{27}$，所以 $-\frac{8}{27}$ 的立方根是（　）.

归纳

正数的立方根是正数，

负数的立方根是负数，

0 的立方根是 0.

类似于平方根，一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数**（radical exponent）. 例如，$\sqrt[3]{8}$ 表示 8 的立方根，$\sqrt[3]{8}=2$；$\sqrt[3]{-8}$ 表示 -8 的立方根，$\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略.

对比算术平方根的符号 $\sqrt{a}$，可以发现，它实际上省略了 $\sqrt[2]{a}$ 中的根指数 2. 因此，$\sqrt{a}$ 也可读作“二次根号 a”.

例 1　求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{64}$；　（2）$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$；　（3）$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

解：（1）因为 $4^3=64$，所以 $\sqrt[3]{64}=4$；

（2）因为$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，所以$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$；

（3）因为$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$，所以$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

巩固运用19.4

1. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{1}$；（2）$\sqrt[3]{-1}$；

（3）$\sqrt[3]{0.008}$；（4）$-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$.

2. 判断下列说法是否正确：

（1）2 是 8 的立方根；

（2）± 4 是 64 的立方根；

（3）$-\frac{1}{3}$是$-\frac{1}{27}$的立方根；

（4）$(-4)^3$的立方根是-4.

3. 下列各式是否有意义？为什么？

（1）$-\sqrt[3]{3}$；（2）$\sqrt[3]{-3}$；

（3）$\sqrt[3]{(-3)^3}$；（4）$\sqrt[3]{\frac{1}{10^3}}$.

4. 立方根概念的起源与几何中的正方体有关．如果一个正方体的体积为 V，这个正方体的棱长为多少？

探究

因为$\sqrt[3]{-8}=$____，$-\sqrt[3]{8}=$____，所以$\sqrt[3]{-8}$____$-\sqrt[3]{8}$；

因为$\sqrt[3]{-27}=$____，$-\sqrt[3]{27}=$____，所以$\sqrt[3]{-27}$____$-\sqrt[3]{27}$.

一般地，

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$；　　(2) $\sqrt[3]{-0.008}$.

解： (1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$；

(2) $\sqrt[3]{-0.008}=-\sqrt[3]{0.008}=-0.2$.

本例也可以用立方根的定义直接求解.

实际上，很多有理数的立方根是无限不循环小数. 例如$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$等都是无限不循环小数. 我们可以用有理数近似地表示它们.

一些计算器设有 $\sqrt[3]{\ }$ 键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）.

例如，用计算器求$\sqrt[3]{1\,845}$，可以按照下面的步骤进行：

依次按键 $\sqrt[3]{\ }$ 1845 = ，显示：12.26494081.

这样就得到$\sqrt[3]{1\ 845}$的近似值 12.264 940 81.

有些计算器需要用第二功能键求一个数的立方根. 用这种计算器求$\sqrt[3]{1\ 845}$，可以依次按键 2nd F $\sqrt[3]{\ }$ 1845 =，显示：12.26494081.

巩固运用19.5

1. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{1}$；　(2) $\sqrt[3]{-8}$；　(3) $-\sqrt[3]{0.027}$；

(4) $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$；　(5) $\sqrt[3]{1-\dfrac{37}{64}}$；　(6) $\sqrt[3]{\dfrac{7}{8}-1}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\ 728}$；　(2) $\sqrt[3]{15\ 625}$；

(3) $\pm\sqrt[3]{2\ 197}$；　(4) $\sqrt[3]{0.426\ 254}$（精确到 0.001）.

3. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=-0.064$；(2) $x^3-3=\dfrac{3}{8}$.

4. 要生产一种容积为 50 L 的圆柱形热水器，使它的高等于底面直径的 2 倍，这种容器的底面直径应取多少分米（用计算器计算，结果保留小数点后一位）？

19.3 实数

探究

我们知道有理数包括整数和分数，请把下列分数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2},\ -\frac{3}{5},\ \frac{27}{4},\ \frac{11}{9},\ \frac{9}{11}.$$

我们发现，上面的分数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式，即

$$\frac{5}{2}=2.5,\ -\frac{3}{5}=-0.6,\ \frac{27}{4}=6.75,\ \frac{11}{9}=1.\dot{2},\ \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

事实上，如果把整数看成小数点后是 0 的小数（例如，将 3 看成 3.0），那么任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式. 反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数.

通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，无限不循环小数又叫做**无理数**（irrational number）. 例如 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$ 等都是无理数，$\pi=3.141\,592\,65\cdots$ 也是无理数.

像有理数一样，无理数也有正负之分. 例如，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，π 是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{3}$，$-\pi$ 是负无理数.

有理数和无理数统称**实数**（real number）. 这样，我们学过的数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{matrix}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

由于非 0 有理数和无理数都有正负之分，实数也有正负之分，所以实数还可以按大小分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\0\\\text{负实数}\end{cases}$$

我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示. 无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？

探究

如图 19.3-1，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O'，点 O' 对应的数是多少？

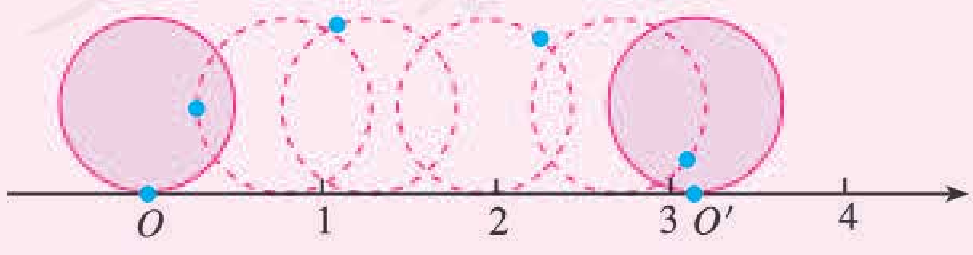


图 19.3-1

从图中可以看出，OO'的长是这个圆的周长 π，所以点 O'对应的数是 π.

这样，无理数 π 可以用数轴上的点表示出来.

又如，以单位长度为边长画一个正方形（图 19.3-2），以原点为圆心，正方形的对角线长为半径画弧，与正半轴的交点就表示$\sqrt{2}$，与负半轴的交点就表示$-\sqrt{2}$.（为什么?）

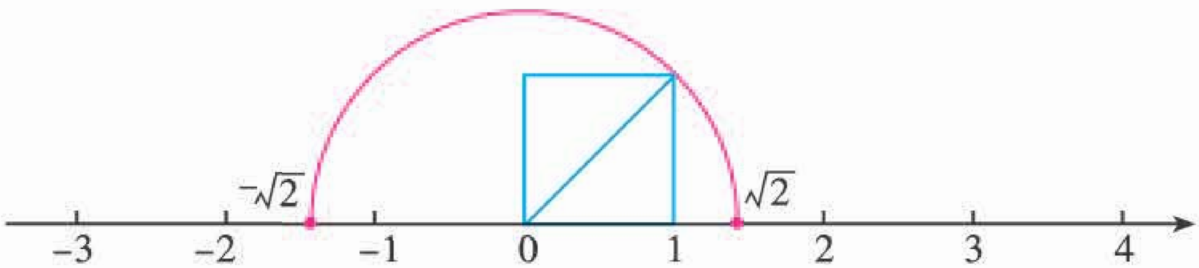


图 19.3-2

事实上，每一个无理数都可以用数轴上的一个点表示出来.

当数的范围从有理数扩充到实数后，实数与数轴上的点是一一对应的，即任意一个实数都可以用数轴上的一点来表示；反过来，数轴上的任意一点都表示一个实数.

与规定有理数的大小一样，对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.

由数轴上的点与实数是一一对应的，我们还可以得出：对于直角坐标平面内的任意一点 M，都有唯一的一对有序实数 (x, y)（即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 (x, y)，在直角坐标平面内都有唯一的一点 M（即坐标为 (x, y) 的点）和它对应. 也就是说，直角坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的.

巩固运用19.6

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 无限小数都是无理数；

(2) 无理数都是无限小数；

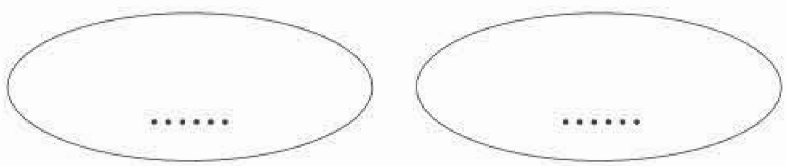
(3) 带根号的数都是无理数；

(4) 所有有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示有理数；

(5) 所有实数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示实数.

2. 把下列各数分别填在相应的集合中：

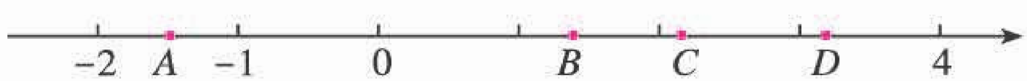
$\frac{22}{7}$，3.141 592 65，$\sqrt{7}$，-8，$\sqrt[3]{2}$，0.6，0，$\sqrt{36}$，$\frac{\pi}{3}$.



有理数集合　　无理数集合

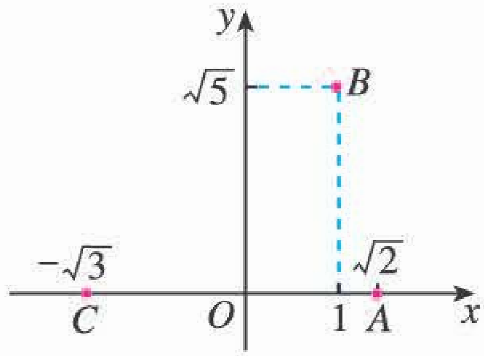
3. 请将图中数轴上标有字母的各点与下列实数对应起来，并按从小到大的顺序用“<”号将这些数连接起来：

$$\sqrt{2}，-1.5，\sqrt{5}，\pi.$$



（第 3 题）

4. 如图，写出平面直角坐标系中的点 A，B，C 的坐标.



（第 4 题）

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

思考

（1）$\sqrt{2}$ 的相反数是____，$-\pi$ 的相反数是____，0 的相反数是____；

（2）$|\sqrt{2}|=$____，$|-\pi|=$____，$|0|=$____.

数 a 的相反数是 $-a$，这里 a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.

设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases}a，当 a>0 时；\\0，当 a=0 时；\\-a，当 a<0 时.\end{cases}$$

例 1 （1）分别写出 $-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数；

（2）指出$-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$分别是什么数的相反数.

解：（1）因为

$$-(-\sqrt{6})=\sqrt{6}, \quad -(\pi-3.14)=3.14-\pi,$$

所以，$-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数分别为$\sqrt{6}$，$3.14-\pi$.

（2）因为

$$-(\sqrt{5})=-\sqrt{5}, \quad -(\sqrt[3]{3}-1)=1-\sqrt[3]{3},$$

所以，$-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$分别是$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

例 2 （1）求$\sqrt[3]{-64}$的绝对值；

（2）已知一个数的绝对值是$\sqrt{3}$，求这个数.

解：（1）因为

$$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4,$$

所以

$$\left|\sqrt[3]{-64}\right|=|-4|=4.$$

（2）因为

$$|\sqrt{3}|=\sqrt{3}, \quad |-\sqrt{3}|=\sqrt{3},$$

所以绝对值为$\sqrt{3}$的数是$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$.

巩固运用19.7

1. 求下列各数的相反数与绝对值：

2.5，$\sqrt{17}$，$-\sqrt{7}$，$-\dfrac{\pi}{2}$，$\sqrt[3]{-8}$，$1.4-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}-2$，0.

2. 求下列各式中实数 x 的值：

(1) $|x|=\frac{2}{3}$； (2) $|x|=0$； (3) $|x|=\sqrt[3]{27}$；

(4) $|x|=\sqrt{10}$； (5) $|x|=\pi$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

例 3 计算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$； (2) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}\\=&\sqrt{3}+(\sqrt{2}-\sqrt{2}) \qquad \text{（加法结合律）}\\=&\sqrt{3}+0=\sqrt{3};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\\=&(3+2)\times\sqrt{3} \qquad \text{（分配律）}\\=&5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

在实数运算中，当遇到无理数并且需要求出结果的近似值时，可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数，再进行计算.

例 4 计算（结果保留小数点后两位）：

（1）$\sqrt{5}+\pi$；（2）$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$.

解：（1）$\sqrt{5}+\pi\approx 2.236+3.142\approx 5.38$；

（2）$\sqrt{3}\times\sqrt{2}\approx 1.732\times 1.414\approx 2.45$.

巩固运用19.8

1. 计算：

（1）$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$；（2）$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt[3]{3}-|-\sqrt[3]{3}|$.

2. 用计算器计算（结果保留小数点后两位）：

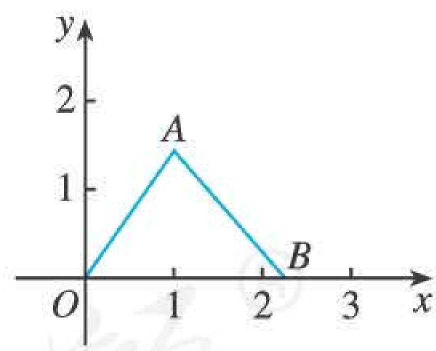
（1）$\sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145$；

（2）$\sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{3}\times\sqrt{6}$；

（4）$\sqrt[3]{5}\div\sqrt[3]{15}$.

3. 如图，A，B 两点的坐标分别是 $A(1,\sqrt{2})$，$B(\sqrt{5},0)$，求 $\triangle ABO$ 的面积（结果保留小数点后一位）.



（第 3 题）

阅读与思考

为什么说$\sqrt{2}$不是有理数

随着对数的认识的不断深入，人们发现$\sqrt{2}$不是有理数. 下面给出欧几里得《原本》中的证明方法.

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么存在两个互质的正整数 p，q，使得

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

于是

$$p=\sqrt{2}q.$$

两边平方得

$$p^2=2q^2.$$

由 $2q^2$是偶数，可得 p^2是偶数. 而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数.

因此可设 $p=2s$，代入上式，得 $4s^2=2q^2$，即

$$q^2=2s^2.$$

所以 q 也是偶数. 这样，p 和 q 都是偶数，不互质，这与假设 p，q 互质矛盾.

这个矛盾说明，$\sqrt{2}$不能写成分数的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数. 实际上，$\sqrt{2}$是无限不循环小数.

用类似的方法，你能证明$\sqrt[3]{2}$不是有理数吗？

事实上，无理数只是一种命名，并非“无理”，而是实际存在的不能写成分数形式的数，它和有理数一样，都是现实世界中客观存在的量的反映.

数学活动

1. 制作一个表面积为 12 dm^2的正方体纸盒.

(1) 这个正方体的棱长是多少?

(2) 做出这个正方体纸盒.

2. 制作一个底面半径为 10 cm，高为 20 cm 的圆柱形纸盒.

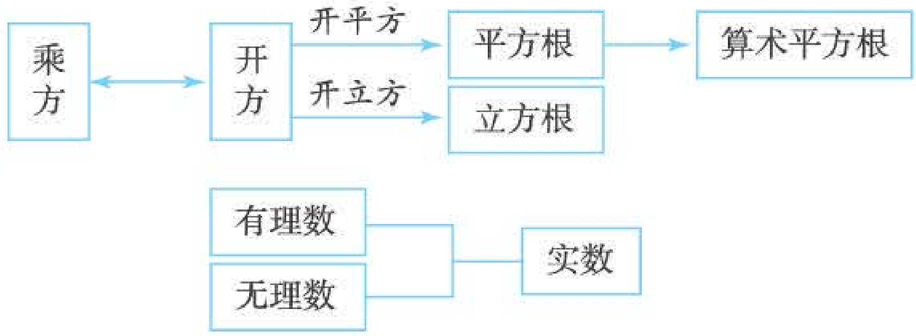
(1) 圆柱的侧面展开图是什么形状?

(2) 这个侧面展开图各边的长分别是多少?

(3) 做出这个圆柱形纸盒.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 回顾平方根与立方根的概念. 开平方与平方有什么关系? 开立方与立方呢?

2. 无理数和有理数的区别是什么?

3. 实数由哪些数组成? 数轴上的点与实数有什么关系? 直角坐标平面内的点与有序实数对有什么关系?

4. 本章我们通过开平方、开立方运算认识了一些不同于有理数的数, 在此基础上引入无理数, 使数的范围由有理数扩充到实数. 请你梳理一下数的概念是怎样从正整数逐步发展到实数的. 随着数的不断扩充, 数的运算有什么发展?

复习题 19

复习巩固

1. 求下列各数的平方根及算术平方根：

(1) 100；　　(2) 0.25；

(3) $\frac{4}{9}$；　　(4) $\left(-\frac{4}{13}\right)^2$.

2. 求下列各数的立方根：

(1) $\frac{27}{8}$；　　(2) $-\frac{1}{64}$；

(3) -0.001；　　(4) 5^3.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt{\frac{49}{25}}$；　　(2) $-\sqrt[3]{10^3}$；

(3) $\pm\sqrt{0.09}$；　　(4) $\sqrt[3]{-0.027}$.

4. 下列各数分别介于哪两个相邻的整数之间：

(1) $\sqrt{28}$；　　(2) $\sqrt{38}$；　　(3) $\sqrt[3]{99}$.

5. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) $-\sqrt{94.3}$；　　(2) $\sqrt[3]{0.43}$；

(3) $\sqrt{55\ 225}$；　　(4) $\sqrt[3]{34\ 012\ 224}$.

6. 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的平方根及立方根中，哪些是有理数？哪些是无理数？

7. 比较下列各组数的大小：

(1) $|-1.5|$，$1.\dot{5}$；　　(2) 1.414，$\sqrt{2}$；

(3) $\frac{2}{3}$，0.666 67；　　　　(4) $\sqrt[3]{9}$ 与 2.5.

8. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$；　　　　(2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

综合运用

9. 解下列方程：

(1) $(x-1)^2=4$；　　　　(2) $(x-1)^3=64$.

10. 已知 $|x|<2\pi$，x 是整数，求 x 的值，并在数轴上表示求得的数.

11. 一个圆与一个正方形的面积都是 $2\pi\ \text{cm}^2$，它们中哪一个的周长比较大？你能从中得到什么启示？

12. 一个排球的体积为 4 855 cm^3，它的半径是多少厘米（结果保留小数点后一位）？（球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 是球的半径.）

拓广探索

13. 填空：

(1) 一个数的平方等于它本身，这个数是______；
一个数的平方根等于它本身，这个数是______；
一个数的算术平方根等于它本身，这个数是______.

(2) 一个数的立方等于它本身，这个数是______；
一个数的立方根等于它本身，这个数是______.

14. 在实数范围内分解因式：

(1) x^2-2；

(2) $x^2+2\sqrt{3}x+3$.

第二十章　二次根式

电视塔越高，从塔顶发射出的电磁波传播得越远，从而能收看到电视节目的区域就越广．电视塔高 h（单位：km）与电视节目信号的传播半径 r（单位：km）之间存在近似关系 $r=\sqrt{2Rh}$，其中 R 是地球半径，$R\approx 6\ 400$ km．如果两个电视塔的高分别是 h_1 km，h_2 km，那么它们的传播半径之比是 $\dfrac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$．你能将这个式子化简吗？

化简这个式子需要二次根式的有关知识．我们学过整式的运算、分式的运算．如何进行二次根式的运算呢？这就是本章要解决的主要问题．本章的学习，可以为后面的勾股定理、一元二次方程等内容的学习打下基础．

20.1 二次根式

思考

用带有根号的式子填空，看看写出的结果有什么特点：

(1) 面积为 3 的正方形的边长为______，面积为 S 的正方形的边长为______.

(2) 一个长方形的围栏，长是宽的 2 倍，面积为 130 m^2，则它的宽为______m.

(3) 一个物体从高处自由落下，落到地面所用的时间 t（单位：s）与开始落下时离地面的高度 h（单位：m）满足关系 $h=5t^2$. 如果用含有 h 的式子表示 t，那么 t 为______.

上面问题的结果分别是 $\sqrt{3}$，$\sqrt{S}$，$\sqrt{65}$，$\sqrt{\dfrac{h}{5}}$，它们表示一些正数的算术平方根.

我们知道，一个正数有两个平方根；0 的平方根为 0；在实数范围内，负数没有平方根. 因此，在实数范围内开平方时，被开方数只能是正数或 0.

一般地，我们把形如 $\sqrt{a}$ （$a\geqslant 0$）的式子叫做**二次根式**(quadratic radical).

例 1 当 x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{x-2}$；　　(2) $\sqrt{x^2}$.

解：(1) 由 $x-2\geqslant 0$，得

$$x\geqslant 2.$$

当 $x\geqslant 2$ 时，$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义.

(2) 因为对任意实数 x，都有 $x^2\geqslant 0$，所以 x 为任意实数时，$\sqrt{x^2}$ 都有意义.

巩固运用20.1

1. 当 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

   (1) $\sqrt{a-1}$；　(2) $\sqrt{a+2}$；　(3) $\sqrt{5a}$；

   (4) $\sqrt{5-a}$；　(5) $\sqrt{-a}$；　(6) $\sqrt{2a+1}$.

2. 用式子表示：

   (1) 面积为 S 的圆的半径；

   (2) 面积为 S 且两条邻边的比为 $2:3$ 的长方形的长和宽.

3. 当 x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

   (1) $\sqrt{x^2+1}$；　(2) $\sqrt{(x-1)^2}$；

   (3) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$；　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，因此$\sqrt{a}>0$；当 $a=0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 0 的算术平方根，因此$\sqrt{a}=0$. 这就是说，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\geqslant 0$.

探究

根据算术平方根的意义填空：

$(\sqrt{4})^2=$______；$(\sqrt{2})^2=$______；

$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=$______；$(\sqrt{0})^2=$______.

$\sqrt{4}$是 4 的算术平方根，根据算术平方根的意义，$\sqrt{4}$是一个平方等于 4 的非负数. 因此有 $(\sqrt{4})^2=4$.

同理，$\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{0}$分别是 2，$\frac{1}{3}$，0 的算术平方根. 因此有 $(\sqrt{2})^2=2$，$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$，$(\sqrt{0})^2=0$.

一般地，

$$\boxed{(\sqrt{a})^2=a\quad(a\geqslant 0)}$$

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{1.5})^2$；　　(2) $(2\sqrt{5})^2$.

解： (1) $(\sqrt{1.5})^2=1.5$；

(2) $(2\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20.$

在本例第(2)小题中，用到了 $(ab)^2=a^2b^2$ 这个结论.

探究

填空：

$\sqrt{2^2}=$______；$\sqrt{0.1^2}=$______；

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$______；$\sqrt{0^2}=$______.

可以得到

$\sqrt{2^2}=2$；$\sqrt{0.1^2}=0.1$；$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$；$\sqrt{0^2}=0$.

一般地，根据算术平方根的意义，

$$\boxed{\sqrt{a^2}=a\,(a\geqslant0)}$$

例 3 化简：

(1) $\sqrt{16}$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$.

解：(1) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$；

(2) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$.

回顾我们学过的式子，如 5，a，$a+b$，$-ab$，$\frac{s}{t}$，$-x^3$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{a}$ ($a\geqslant0$)，它们都是用基本运算符号（基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数或表示数的字母连接起来的式

子，我们称这样的式子为**代数式**（algebraic expression）.

巩固运用20.2

1. 计算：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　(2) $(3\sqrt{2})^2$；　(3) $(-\sqrt{0.2})^2$；

(4) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)^2$；　(5) $(5\sqrt{5})^2$；　(6) $(-\sqrt{6})^2$.

2. 说出下列各式的值：

(1) $\sqrt{0.3^2}$；　(2) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}$；　(3) $\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}$；

(4) $-\sqrt{(-\pi)^2}$；(5) $\sqrt{10^{-2}}$；　(6) $-\sqrt{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}$.

3. 利用 $a=(\sqrt{a})^2$ $(a\geqslant 0)$，把下列非负数分别写成一个非负数的平方的形式：

(1) 9；　(2) 5；　(3) 2.5；　(4) 0.25；

(5) $\dfrac{1}{2}$；　(6) 0.

4. 半径为 r cm 的圆的面积是半径为 2 cm 和 3 cm 的两个圆的面积之和，求 r 的值.

5. $\triangle ABC$ 的面积为 12 cm^2，AB 边上的高是 AB 边长的 4 倍. 求 AB 的长.

20.2 二次根式的乘除

由算术平方根的意义，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，…都是实数．当 a 取某个非负数值时，$\sqrt{a}$ 就是非负数 a 的算术平方根，也是一个实数．这类实数的运算满足怎样的运算法则呢？我们该如何进行二次根式的加、减、乘、除运算呢？

下面先探究二次根式的乘法法则．

探究

计算下列各式，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$______，$\sqrt{4\times 9}=$______；

(2) $\sqrt{16}\times\sqrt{25}=$______，$\sqrt{16\times 25}=$______；

(3) $\sqrt{25}\times\sqrt{36}=$______，$\sqrt{25\times 36}=$______．

一般地，二次根式的乘法法则是

$$\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)}$$

例 1 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}$．

解：（1）$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$；

（2）$\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}=\sqrt{\frac{1}{3}\times 27}=\sqrt{9}=3$.

把$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$反过来，就得到

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$

利用它可以进行二次根式的化简.

在本章中，如果没有特别说明，所有的字母都表示正数.

例 2 化简：

（1）$\sqrt{16\times 81}$；　　　　（2）$\sqrt{4a^2b^3}$.

解：（1）$\sqrt{16\times 81}=\sqrt{16}\times\sqrt{81}=4\times 9=36$；

（2）$\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^3}$

$=2\cdot a\cdot\sqrt{b^2\cdot b}$

$=2a\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{b}$

$=2ab\sqrt{b}$.

在本例第（2）小题中，被开方数$4a^2b^3$含 4，a^2，b^2这样的因数或因式，它们被开方后可以移到根号外，是开得尽方的因数或因式.

例 3 计算：

（1）$\sqrt{14}\times\sqrt{7}$；

（2）$\sqrt{3x}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}xy}$.

解：(1) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}=\sqrt{14\times7}=\sqrt{7^2\times2}=\sqrt{7^2}\times\sqrt{2}=7\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}xy}=\sqrt{3x\cdot\frac{1}{3}xy}=\sqrt{x^2y}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y}=x\sqrt{y}$.

巩固运用20.3

1. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$；　　(2) $\sqrt{6}\times(-\sqrt{15})$；

(3) $\sqrt{288}\times\sqrt{\frac{1}{72}}$；　　(4) $\sqrt{18}\times\sqrt{20}\times\sqrt{75}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{4\times49}$；　　(2) $\sqrt{300}$；

(3) $\sqrt{4y}$；　　(4) $\sqrt{16ab^2c^3}$.

3. 根据下列条件求代数式$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$的值：

(1) $a=1$，$b=10$，$c=-15$；

(2) $a=2$，$b=-8$，$c=5$.

4. 设长方形的面积为S，相邻两边分别为a，b.

(1) 已知$a=\sqrt{8}$，$b=\sqrt{12}$，求S；

(2) 已知$a=2\sqrt{50}$，$b=3\sqrt{32}$，求S.

5. 计算：

(1) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{3.6}$；　　(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{8}}$.

探究

计算下列各式，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$_____，$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=$_____；

(2) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=$_____，$\sqrt{\dfrac{16}{25}}=$_____；

(3) $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=$_____，$\sqrt{\dfrac{36}{49}}=$_____.

一般地，二次根式的除法法则是

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geqslant 0，b>0)$$

例 4 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\div\sqrt{\dfrac{1}{18}}$.

解：(1) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{24}{3}}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\div\sqrt{\dfrac{1}{18}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\div\dfrac{1}{18}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\times 18}=\sqrt{3\times 9}=3\sqrt{3}$.

把$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$反过来，就得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0),$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 5 化简：

(1) $\sqrt{\frac{3}{100}}$； (2) $\sqrt{\frac{75}{27}}$； (3) $\sqrt{\frac{25x^4}{9y^2}}$.

解：(1) $\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{3}}{10}$；

(2) $\sqrt{\frac{75}{27}}=\sqrt{\frac{5^2\times 3}{3^2\times 3}}=\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{3^2}}=\frac{5}{3}$；

(3) $\sqrt{\frac{25x^4}{9y^2}}=\frac{\sqrt{25x^4}}{\sqrt{9y^2}}=\frac{\sqrt{5^2(x^2)^2}}{\sqrt{3^2y^2}}=\frac{5x^2}{3y}$.

巩固运用20.4

1. 计算：

(1) $\sqrt{18}\div\sqrt{2}$； (2) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$； (3) $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$；

(4) $\sqrt{\frac{5}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{6}}$； (5) $\sqrt{6a}\div\sqrt{2a}$； (6) $\sqrt{\frac{b}{5}}\div\sqrt{\frac{b}{20a^2}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{8}{25}}$； (2) $\sqrt{\frac{25}{36}}$； (3) $\sqrt{\frac{5n^2}{9}}$； (4) $\sqrt{\frac{98}{9x^2}}$.

例 6 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$； (2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$； (3) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}$.

解：(1) 解法 1：$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{\dfrac{3\times5}{5\times5}}=\sqrt{\dfrac{15}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

解法 2：$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2\times3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}=\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}}=\dfrac{4\sqrt{a}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{a}}{a}$.

在本例第（1）小题的解法 2 中，式子变形$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$是为了去掉分母中的根号.

在例 6 各小题的最后结果 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2\sqrt{a}}{a}$中，可以发现这些式子有如下两个特点：

(1) 被开方数不含分母；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫做**最简二次根式**（simplest quadratic radical）.

在二次根式的运算中，一般要把最后结果化为最简二次根式，并且分母中不含二次根式.

例 7 设长方形的面积为 S，相邻两边长分别为 a，b. 已知 $S=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{10}$，求 a.

解： 因为 $S=ab$，所以

$$a=\frac{S}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{5}.$$

现在来看本章引言中的问题.

如果两个电视塔的高分别是 h_1 km，h_2 km，那么它们的传播半径之比是$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$. 这个式子还可以化简：

$$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}=\frac{\sqrt{2R}\cdot\sqrt{h_1}}{\sqrt{2R}\cdot\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{h_1}\cdot\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_2}\cdot\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}.$$

我们看到，比值与地球半径无关. 这样，只要知道 h_1，h_2，就可以求出比值.

巩固运用20.5

1. 把下列二次根式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{32}$；　(2) $\sqrt{40}$；　(3) $\sqrt{1.5}$；

(4) $\sqrt{\frac{4}{3}}$；　(5) $\sqrt{\frac{a^2b}{4c^2}}$；　(6) $\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{8}}{3\sqrt{40}} \times \sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt{27} \times \sqrt{50} \div \sqrt{6}$.

3. 已知长方体的体积 $V=4\sqrt{3}$，高 $h=3\sqrt{2}$，求它的底面积 S.

20.3 二次根式的加减

问题　现有一块长为 7.5 dm、宽为 5 dm 的木板，能否采用如图 20.3-1 的方式，在这块木板上截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板？

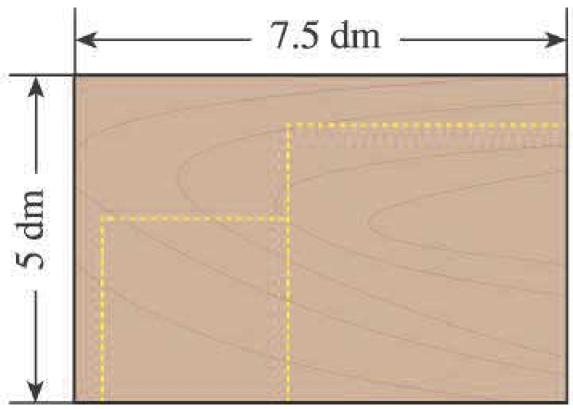


图 20.3-1

因为大、小正方形木板的边长分别为 $\sqrt{18}$ dm 和 $\sqrt{8}$ dm，显然木板够宽. 下面考虑木板是否够长.

由于两个正方形的边长的和为（$\sqrt{8}+\sqrt{18}$）dm. 这实际上是求 $\sqrt{8}$，$\sqrt{18}$ 这两个二次根式的和，我们可以这样来计算：

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}+\sqrt{18}\\=&2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\quad\text{（化成最简二次根式）}\\=&(2+3)\sqrt{2}\quad\text{（分配律）}\\=&5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

在有理数范围内成立的运算律，在实数范围内仍然成立.

由 $\sqrt{2}<1.5$ 可知 $5\sqrt{2}<7.5$，即两个正方形的边长的和小于木板的长，因此可以用这块木板按要求截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板.

分析上面计算 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ 的过程，可以看到，把 $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{18}$

化成最简二次根式 $2\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 后，由于被开方数相同（都是 2），可以利用分配律将 $2\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 进行合并.

一般地，**二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.**

例 1 计算：

（1）$\sqrt{80}-\sqrt{45}$；

（2）$\sqrt{9a}+\sqrt{25a}$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&\sqrt{80}-\sqrt{45}\\=&4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=\sqrt{5}；\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&\sqrt{9a}+\sqrt{25a}\\=&3\sqrt{a}+5\sqrt{a}=8\sqrt{a}.\end{aligned}$$

比较二次根式的加减与整式的加减，你能得出什么结论？

例 2 计算：

（1）$2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}$；

（2）$(\sqrt{12}+\sqrt{20})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}\\=&4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+12\sqrt{3}\\=&14\sqrt{3}；\end{aligned}$$

(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{20})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$=3\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

巩固运用20.6

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；　(2) $\sqrt{8}-\sqrt{3}=\sqrt{8-3}$；

(3) $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；　(4) $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$；

(5) $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{2}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$.

2. 计算：

(1) $2\sqrt{7}-6\sqrt{7}$；　(2) $\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$；

(3) $2\sqrt{12}+\sqrt{27}$；　(4) $\sqrt{18}-\sqrt{\dfrac{9}{2}}$；

(5) $\sqrt{18}+(\sqrt{98}-\sqrt{27})$；　(6) $\dfrac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\dfrac{x}{4}}$.

3. 已知$\sqrt{5}\approx 2.236$，求 $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\sqrt{45}$ 的近似值（结果保留小数点后两位）.

例 3 计算：

(1) $(\sqrt{8}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$；　(2) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{2}$.

解：(1) $(\sqrt{8}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{8}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{8\times6}+\sqrt{3\times6}$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$；

(2) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{6})\div2\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}\div2\sqrt{2}-3\sqrt{6}\div2\sqrt{2}$

$=2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

本例第（1）小题运用了分配律.

例 4 计算：

(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5)$；　　(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$；

(3) $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$.

解：(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5)$

$=(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}-15$

$=2-2\sqrt{2}-15$

$=-13-2\sqrt{2}$；

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=5-3$

$=2$；

(3) $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$

$=(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=7-2\sqrt{42}+6$

$=13-2\sqrt{42}.$

本例第（1）小题用了多项式乘法法则；第（2）小题用了公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；第（3）小题用了公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. 在二次根式的运算中，多项式乘法法则和乘法公式仍然适用.

巩固运用20.7

1. 计算：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$；　(2) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}$；

(3) $(\sqrt{80}+\sqrt{40})\div\sqrt{5}$；　(4) $(\sqrt{48}+\frac{1}{4}\sqrt{6})\div\sqrt{27}$

(5) $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+2)$；　(6) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

2. 计算：

(1) $(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$；　(2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$；

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$；(4) $(\sqrt{3}+2)^2$；

(5) $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2$；　(6) $(2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

3. 已知$x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$，求下列各式的值：

(1) $x^2+2xy+y^2$；　(2) x^2-y^2.

阅读与思考

立方根与三次根式

可以发现，二次根式与《实数》一章中的算术平方根有紧密的联系．实际上，二次根式是在算术平方根的基础上进一步抽象得到的．

在《实数》一章中我们还学过立方根．类比二次根式与算术平方根的关系，你能想到什么？

我们知道，体积为 3 的立方体，它的棱长是$\sqrt[3]{3}$；体积为 697 cm^3的铅球，根据公式 $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$，可求得它的半径大约是$\sqrt[3]{166}$ cm；等等．它们表示一个数的立方根．类比二次根式，我们可以把形如$\sqrt[3]{a}$的式子叫做三次根式．

我们知道，$\sqrt[3]{2}$是 2 的立方根，根据立方根的意义，有$(\sqrt[3]{2})^3=2$．同理，$(\sqrt[3]{-2})^3=-2$，$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3=\frac{1}{3}$，$(\sqrt[3]{0})^3=0$．一般地，

$$(\sqrt[3]{a})^3=a.$$

观察这个式子，你发现这个等式与二次根式中对应的等式有什么不同了吗？

容易发现，在$(\sqrt{a})^2=a$ 中，a 不能取负数；而$(\sqrt[3]{a})^3=a$ 中，a 可以取一切实数．

你能类比二次根式的学习过程，自己进一步研究一下三次根式吗？

我们可以像研究二次根式那样，研究三次根式的各种运算法则，对三次根式进行化简、运算等. 你能自己尝试一下吗？

数学活动

纸张规格与$\sqrt{2}$的关系

书籍和纸张的长与宽都有固定的尺寸，常用纸张的规格（单位：mm）由下列两个表给出：

A 型	宽×长
A5	148×210
A4	210×297
A3	297×420
A2	420×594
A1	594×841

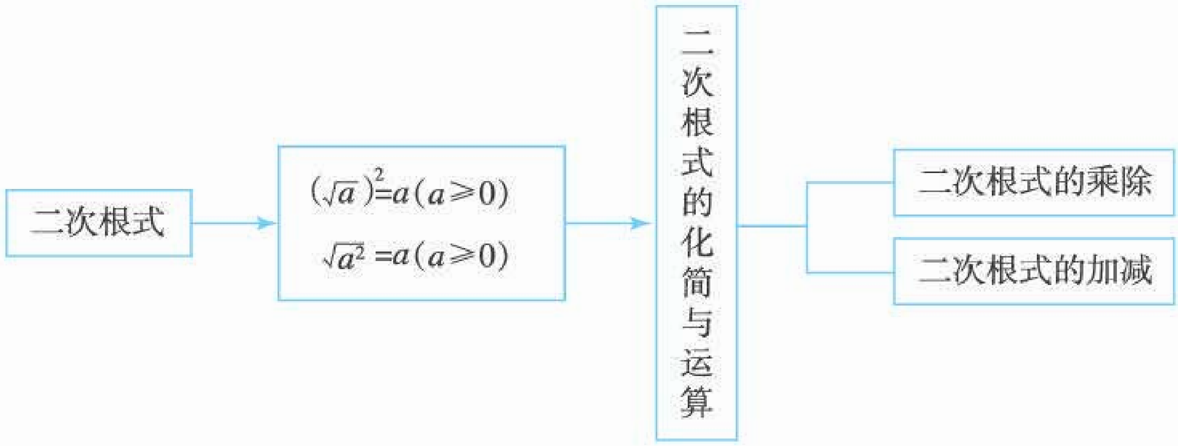
B 型	宽×长
B5	182×257
B4	257×364
B3	364×515
B2	515×728
B1	728×1 030

1. 使用计算器求出各规格纸张长与宽的比值，你有什么发现？各规格纸张的长与宽的比有什么关系？

2. 测量教科书与课外读物的长与宽，看看它们的长与宽的比是否也有类似确定的关系？

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 什么样的式子叫做二次根式?

2. 对于二次根式，要注意被开方数必须是非负数. 当 x 是怎样的实数时，$\sqrt{x}$ 在实数范围内有意义?

3. 在二次根式的运算和化简中，要利用运算法则. 你能举例说明二次根式的加、减、乘、除运算法则吗?

4. 二次根式的加减法与整式的加减法类似，只要将二次根式化为最简二次根式，然后去括号与合并被开方数相同的二次根式就可以了. 二次根式的乘法与整式的乘法类似，以往学过的乘法公式等都可以运用. 二次根式的除法与分式的运算类似，如果分子与分母中含有相同的因式，可以直接约去.

5. 至此，我们已经学习了整式（单项式、多项式）、分式、二次根式等代数式的概念和运算. 因为字母表示数，所

以代数式的运算也就是含有字母符号的算式之间的运算，实际上就是用数的运算法则和运算律对这些符号进行运算.

复习题 20

复习巩固

1. 当 x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{3+x}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{2-3x}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{500}$；　　(2) $\sqrt{12x}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{9}{8}}$；　　(4) $\sqrt{4\dfrac{2}{3}}$；

(5) $-\sqrt{120y^6}$；　　(6) $\sqrt{\dfrac{5a^5}{6}}$；

(7) $\sqrt{\dfrac{2}{3a^2}}$　　(8) $\sqrt{2x^2y^3}$.

3. 计算：

(1) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{1}{8}}+\sqrt{6}\right)$；

(2) $\sqrt{75}-\sqrt{54}+\sqrt{96}-\sqrt{108}$；

(3) $(\sqrt{45}+\sqrt{18})-(\sqrt{8}-\sqrt{125})$；

(4) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\dfrac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{27})$；

(5) $(\sqrt{24}+\sqrt{0.5})-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$；

(6) $a^2\sqrt{8a}+3a\sqrt{50a^3}$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\div5\sqrt{2}$；　　(2) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$；

(3) $(2\sqrt{48}-3\sqrt{27})\div\sqrt{6}$；(4) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$.

5. 正方形的边长为 a cm，它的面积与长为 96 cm、宽为 12 cm 的长方形的面积相等. 求 a 的值.

综合运用

6. 已知 $x=\sqrt{5}-1$，求代数式 x^2+5x-6 的值.

7. 已知 $x=2-\sqrt{3}$，求代数式$(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$的值.

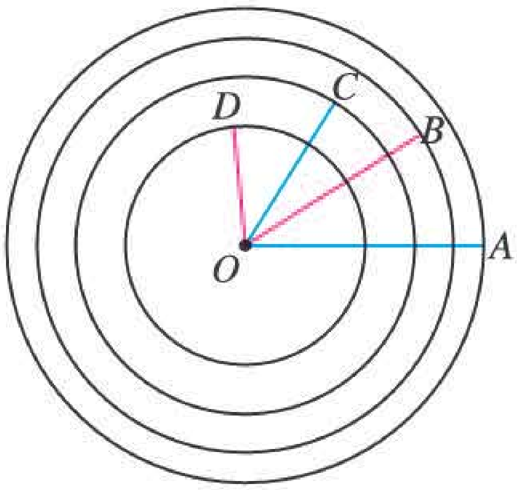
8. 电流通过导线时会产生热量，电流 I（单位：A）、导线电阻 R（单位：Ω）、通电时间 t（单位：s）与产生的热量 Q（单位：J）满足 $Q=I^2Rt$. 已知导线的电阻为 5 Ω，1 s 时间导线产生 30 J 的热量，求电流 I 的值（结果保留小数点后两位）.

9. 如果一个三角形的三条边长分别为 a，b，c，记 $p=\frac{a+b+c}{2}$，那么三角形的面积为 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（此公式叫做海伦—秦九韶公式）. 当一个三角形三条边分别为 4 cm，5 cm，7 cm 时，试用上述公式求这个三角形的面积 S.

拓广探索

10. （1）把一个圆心为点 O，半径为 r 的圆的面积四等分. 请你尽可能多地设想各种分割方法.

（2）如图，以点 O 为圆心的三个同心圆把以 OA 为半径的大圆 O 的面积四等分. 求这三个圆的半径 OB，OC，OD 的长.



（第 10（2）题）

11. 判断下列各式是否成立：

$$\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}；\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}；\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

类比上述式子，再写出几个同类型的式子. 你能看出其中的规律吗？用字母表示这一规律，并给出证明.

第二十一章　勾股定理

在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．根据我国古代数学书《周髀算经》记载，在约公元前11世纪，人们就已经知道，如果勾是三、股是四，那么弦就是五．后来人们进一步发现并证明了直角三角形三边长度之间的关系，这就是勾股定理．

本章我们将探索勾股定理及其逆定理，并运用这两个定理去解决有关问题．由此可以加深对直角三角形的认识．

21.1 勾股定理

本章引言提到，直角三角形三边长度之间具有一定的关系，下面我们就来探究这种关系. 我们首先从特殊的直角三角形开始.

思考

图 21.1-1 中三个正方形的面积有什么关系？等腰直角三角形的三边之间有什么关系？

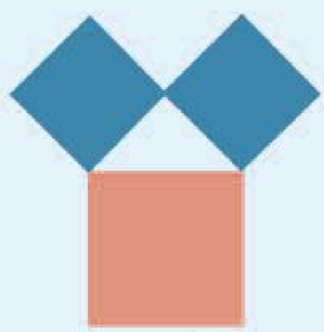


图 21.1-1

可以发现，以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积. 即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和.

探究

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 21.1-2 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A，B，C 的面积，看看能得出什么结论.（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积.）

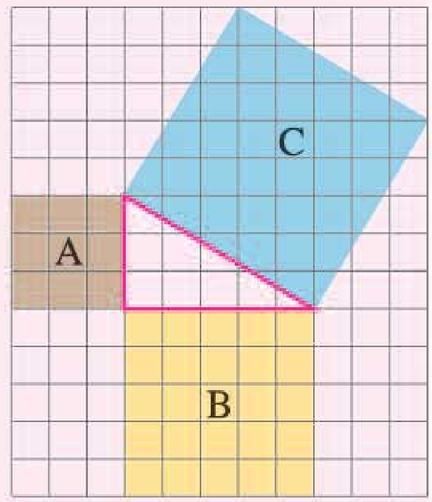


图 21.1-2

由上面的几个例子，我们猜想（图 21.1-3）：

命题 1　如果直角三角形的两条直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

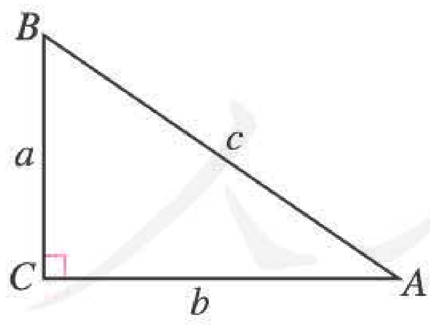


图 21.1-3

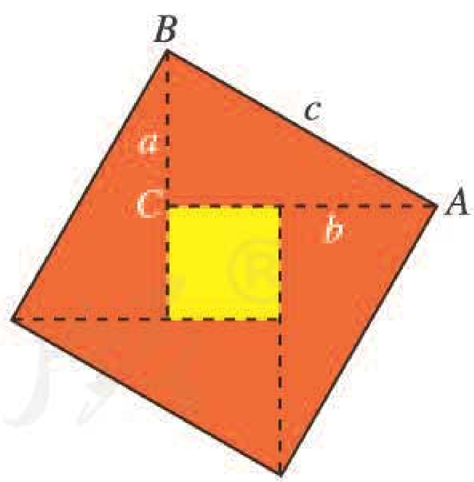
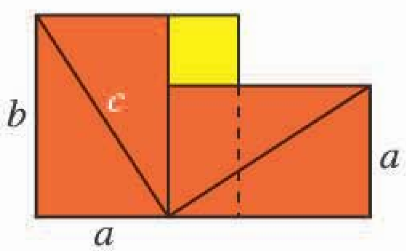


图 21.1-4

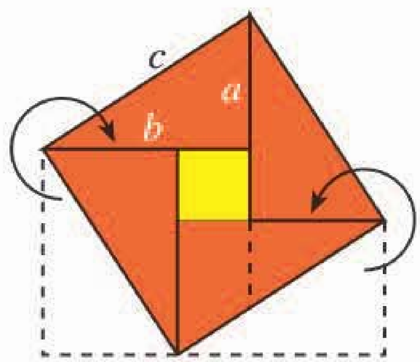
证明命题 1 的方法有很多，下面介绍 3 世纪我国汉代数学家赵爽的证法. 如图 21.1-4，这个图案是赵爽在注解《周

髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”．赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形可以如图围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形．

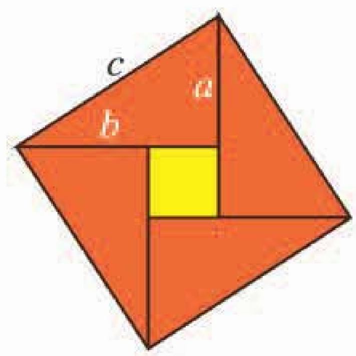
赵爽利用弦图证明命题1的基本思路如下：如图21.1-5（1），把边长为 a，b 的两个正方形连在一起，它的面积是 a^2+b^2；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形和一个正方形．把图21.1-5（1）中左、右两个三角形移到图21.1-5（2）中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图21.1-5（3））．因为图21.1-5（1）与图21.1-5（3）都由四个全等的直角三角形和一个正方形组成，所以它们的面积相等．因此，$a^2+b^2=c^2$．



（1）



（2）



（3）

图21.1-5

这样我们就证实了命题1的正确性，命题1与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理**（Pythagoras theorem）．在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理．

“赵爽弦图”通过对图形的切割、拼接，采用我国古代数学家常用的“出入相补法”，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理．它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲．因此，这个图案（图21.1-4）

被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

思考

由赵爽弦图，你能得出一个关于图形面积的等式，并由这个等式得出勾股定理吗？

巩固运用21.1

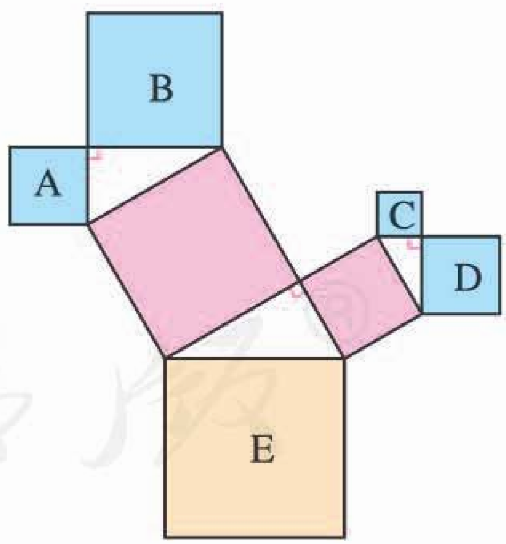
1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b，斜边长为 c.

   (1) 已知 $a=6$，$c=10$，求 b；

   (2) 已知 $a=5$，$b=12$，求 c；

   (3) 已知 $c=25$，$b=15$，求 a.

2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形. 已知正方形 A，B，C，D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积.



(第 2 题)

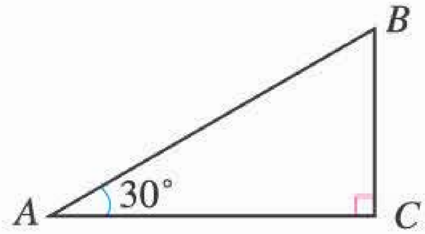
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=15$. 求：

   (1) $\triangle ABC$ 的面积；

   (2) 斜边 AB；

   (3) 高 CD.

4. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$AC=2$. 求斜边 AB 的长.



（第 4 题）

勾股定理有广泛的应用，下面我们用它解决几个问题.

例 1 一个门框的尺寸如图 21.1-6 所示，一块长 3 m，宽 2.2 m 的长方形薄木板能否从门框内通过？为什么？

分析： 可以看出，木板横着或竖着都不能从门框内通过，只能试试斜着能否通过. 门框对角线 AC 的长度是斜着能通过的最大长度. 求出 AC，再与木板的宽比较，就能知道木板能否通过.

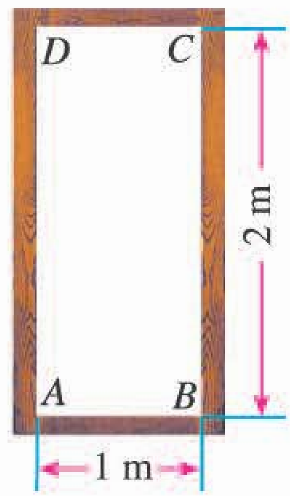


图 21.1-6

解： 在 Rt△ABC 中，根据勾股定理，

$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+2^2=5$.

$AC=\sqrt{5}\approx 2.24$.

因为 AC 大于木板的宽 2.2 m，所以木板能从门框内通过.

例 2 如图 21.1-7，一架 2.6 m 长的梯子 AB 斜靠在一竖直的墙 AO 上，这时 AO 为 2.4 m. 如果梯子的顶端 A 沿墙下滑 0.5 m，那么梯子底端 B 也外移0.5 m吗？

解： 可以看出，$BD=OD-OB$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，根据勾股定理，

$OB^2=AB^2-OA^2=2.6^2-2.4^2=1.$

$OB=\sqrt{1}=1.$

在 $Rt\triangle COD$ 中，根据勾股定理，

$OD^2=CD^2-OC^2=2.6^2-(2.4-0.5)^2=3.15.$

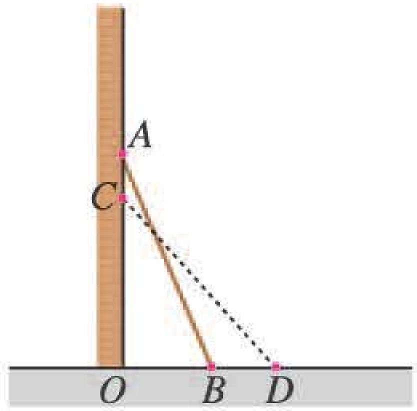


图 21.1-7

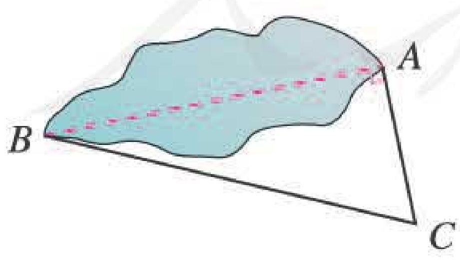
$OD=\sqrt{3.15}\approx 1.77$，

$BD=OD-OB\approx 1.77-1=0.77.$

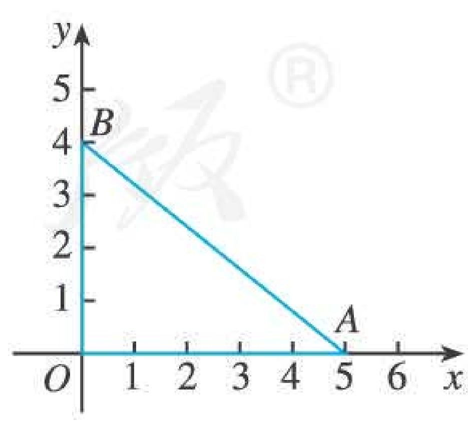
所以当梯子的顶端沿墙下滑 0.5 m 时，梯子底端并不是外移 0.5 m，而是外移约 0.77 m.

巩固运用21.2

1. 如图，池塘边有两点 A，B，点 C 是与 BA 方向成直角的 AC 方向上一点，测得 $BC=60$ m，$AC=20$ m. 求 A，B 两点间的距离（结果取整数）.



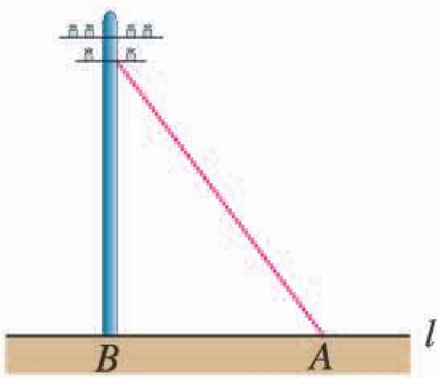
（第 1 题）



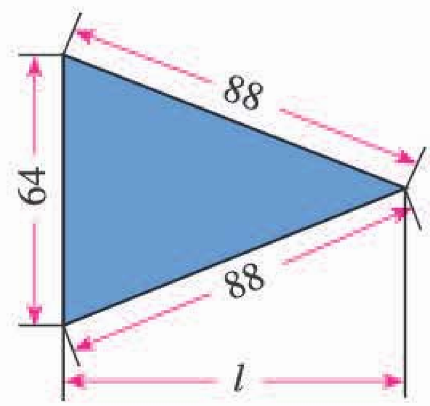
（第 2 题）

2. 如上页图，在平面直角坐标系中有两点 $A(5, 0)$ 和 $B(0, 4)$. 求这两点之间的距离.

3. 如图，要从电线杆离地面 5 m 处向地面拉一条长为 7 m的钢缆. 求地面钢缆固定点 A 到电线杆底部 B 的距离（结果保留小数点后一位）.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知一个三角形工件的尺寸（单位：mm）如图所示，计算高 l 的长（结果取整数）.

5. 我国古代数学著作《九章算术》中有一个问题：今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何. 翻译成现代语言是：有一个水池，水面是一个边长为 10 尺的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它高出水面 1 尺. 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点，它的顶端恰好到达池边的水面. 水的深度与这根芦苇的长度分别是多少？（丈、尺是长度单位，1 丈 = 10 尺，1 尺 = $\frac{1}{3}$m.）

（第 5 题）

思考

在八年级上册中，我们曾经通过画图得到结论：斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等. 学习了勾股定理后，你能证明这一结论吗？

先画出图形，再写出已知、求证如下：

已知：如图 21.1-8，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明： 在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C = \angle C' = 90°$，根据勾股定理，得

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$，

$B'C'=\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}$.

又 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

$\therefore$ $BC=B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (SSS).

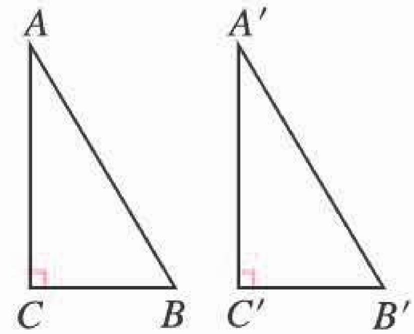


图 21.1-8

探究

我们知道数轴上的点有的表示有理数，有的表示无理数，你能在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点吗？

如果能画出长为$\sqrt{13}$的线段，就能在数轴上画出表示

$\sqrt{13}$的点．容易知道，长为$\sqrt{2}$的线段是两条直角边的长都为 1 的直角三角形的斜边．长为$\sqrt{13}$的线段能是两条直角边的长都为正整数的直角三角形的斜边吗？

利用勾股定理，可以发现，两直角边的长分别为正整数 2，3 的直角三角形的斜边长为$\sqrt{13}$．由此，可以依照如下方法在数轴上画出表示$\sqrt{13}$的点．

如图 21.1-9，在数轴上找出表示 3 的点 A，则 $OA=3$，过点 A 作直线 l 垂直于 OA，在 l 上取点 B，使 $AB=2$，以原点 O 为圆心，以 OB 长为半径作弧，弧与数轴的交点 C 即为表示$\sqrt{13}$的点．

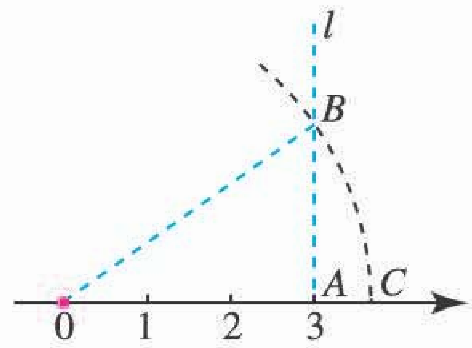


图 21.1-9

类似地，利用勾股定理，可以作出长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…的线段（图 21.1-10）．按照同样方法，可以在数轴上画出表示$\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，… 的点（图 21.1-11）．

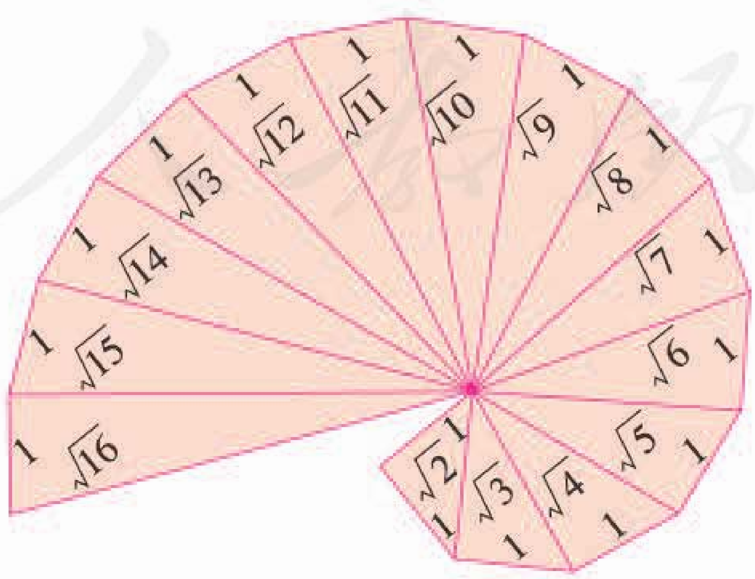


图 21.1-10

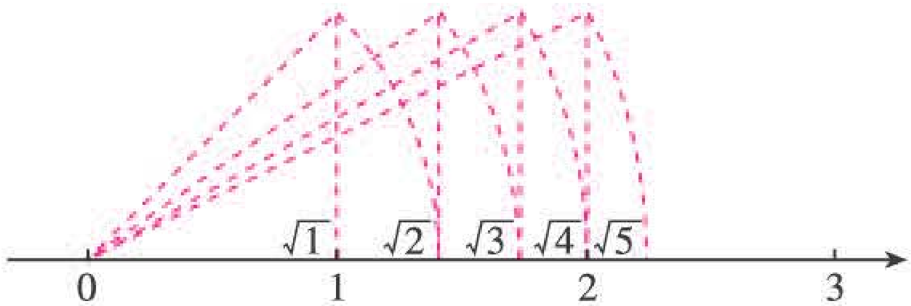


图 21.1-11

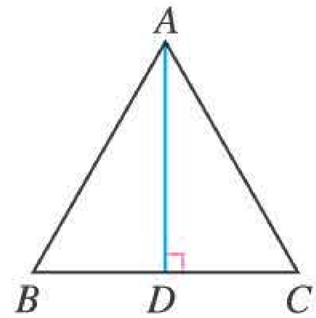
巩固运用21.3

1. 在数轴上作出表示$\sqrt{17}$的点.

2. 如图，等边三角形的边长是 6. 求：

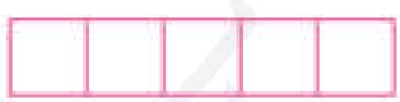
   (1) 高 AD 的长；

   (2) 这个三角形的面积.

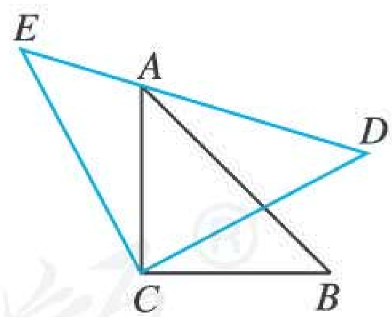


（第 2 题）

*3. 有 5 个边长为 1 的正方形，排列形式如图. 请把它们分割后拼接成一个大正方形.



（第 3 题）



（第 4 题）

*4. 如图，$\triangle ACB$ 和$\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$CA=CB$，$CE=CD$，$\triangle ACB$ 的顶点 A 在$\triangle ECD$ 的斜边 DE 上. 求证：$AE^2+AD^2=2AC^2$.（提示：连接 BD）

阅读与思考

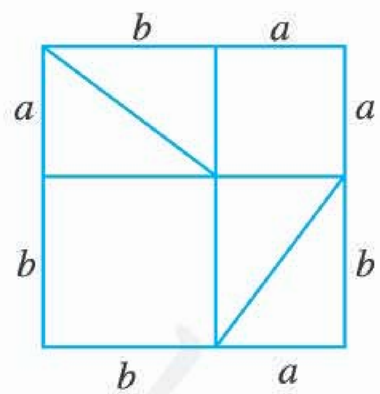
勾股定理的证明

自古至今，人们对勾股定理的证明有许多研究，这不仅仅因为这个定理重要、基本，还由于这个定理贴近人们的生活实际，应用广泛.

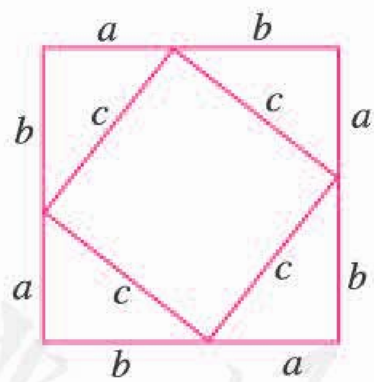
下面介绍三种用来证明勾股定理的图形，你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗？

1. 传说中毕达哥拉斯学派的证法（图 1）

提示：(1) 中拼成的正方形与 (2) 中拼成的正方形面积相等.



(1)



(2)

图 1

2. 弦图的另一种证法（图 2）

提示：以斜边为边长的正方形的面积＋4 个三角形的面积＝外正方形的面积.

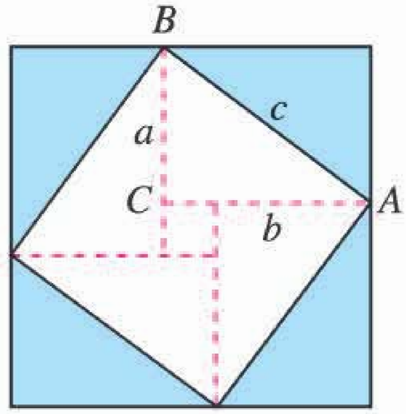


图 2

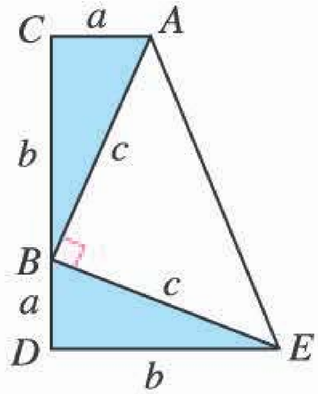


图 3

3. 美国第 20 任总统詹姆斯·加菲尔德的证法（图 3）

提示：3 个三角形的面积之和＝梯形的面积.

21.2 勾股定理的逆定理

据说，古埃及人用图 21.2-1 的方法画直角：把一根长绳打上等距离的 13 个结，然后以 3 个结间距、4 个结间距、5 个结间距的长度为边长，用木桩钉成一个三角形，其中一个角就是直角. 相传，我国古代大禹治水测量工程时，也用类似方法确定直角.

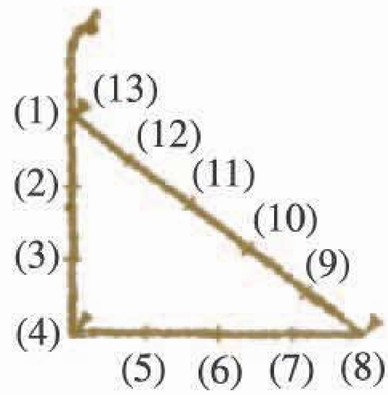


图 21.2-1

这个问题意味着，如果三角形的三边长分别为 3，4，5，它们满足关系“$3^2+4^2=5^2$”，那么三角形是直角三角形.

画画看，如果三角形的三边长分别为 2.5 cm，6 cm，6.5 cm，它们满足关系“$2.5^2+6^2=6.5^2$”，画出的三角形是直角三角形吗？换成三边分别为 4 cm，7.5 cm，8.5 cm，再试一试.

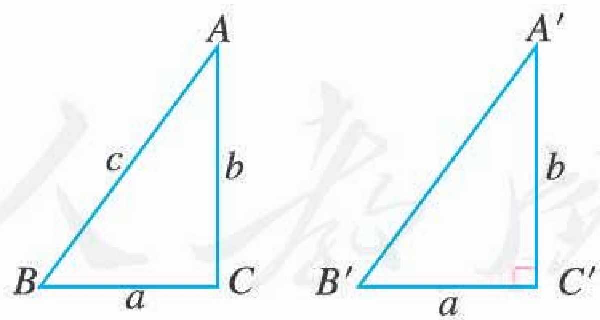
由上面的几个例子，可以猜想：

命题 2　如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

以上命题 2 和上节的命题 1 的题设、结论正好相反. 一般地，像这样的两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个叫做**原命题**，那么另一个叫做它的**逆命题**. 例如，如果把命题 1 当成原命题，那么命题 2 是命题 1 的逆命题. 上节已证明命题 1 正确，能证明命题 2 正确吗?

在图 21.2-2（1）中，已知$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，且满足 $a^2+b^2=c^2$，要证$\triangle ABC$ 是直角三角形. 可以先画一个两条直角边长分别为 a，b 的直角三角形，如果$\triangle ABC$ 与这个直角三角形全等，那么$\triangle ABC$ 就是一个直角三角形.

如图 21.2-2（2），画一个 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，使 $B'C'=a$，$A'C'=b$，$\angle C'=90°$. 根据勾股定理，$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $A'B'=c$. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$BC=a=B'C'$，$AC=b=A'C'$，$AB=c=A'B'$，所以$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 因此$\angle C=\angle C'=90°$，即$\triangle ABC$ 是直角三角形.



（1）　　　　（2）

图 21.2-2

这样就证明了勾股定理的逆命题是正确的，它也是一个定理. 我们把这个定理叫做**勾股定理的逆定理**. 它是判定直

角三角形的一个依据．一般地，如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，那么它也是一个定理，称这两个定理互为逆定理．

一般地，原命题成立时，它的逆命题可能成立，也可能不成立．如本章中的命题 1 成立，它的逆命题命题 2 也成立；命题“对顶角相等”成立，而它的逆命题“如果两个角相等，那么这两个角是对顶角”却不成立．

例 1 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

（1）$a=15$，$b=8$，$c=17$；

（2）$a=13$，$b=14$，$c=15$．

分析： 根据勾股定理及其逆定理，判断一个三角形是不是直角三角形，只要看两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方．

解：（1）因为 $15^2+8^2=225+64=289$，$17^2=289$，

所以 $15^2+8^2=17^2$．

因此这个三角形是直角三角形．

（2）因为 $13^2+14^2=169+196=365$，$15^2=225$，

所以 $13^2+14^2\neq15^2$．

因此这个三角形不是直角三角形．

像本例第（1）小题的 15，8，17 这样，能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数．

巩固运用21.4

1. 如果三条线段长 a，b，c 满足 $a^2=c^2-b^2$，这三条线段组成的三角形是不是直角三角形？为什么？

2. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形：

   (1) $a=7$，$b=24$，$c=25$；

   (2) $a=\sqrt{41}$，$b=4$，$c=5$；

   (3) $a=\frac{5}{4}$，$b=1$，$c=\frac{3}{4}$；

   (4) $a=40$，$b=50$，$c=60$.

3. 说出下列命题的逆命题. 这些逆命题成立吗？

   (1) 两条直线平行，内错角相等；

   (2) 如果两个实数相等，那么它们的绝对值相等；

   (3) 全等三角形的对应角相等；

   (4) 在角的内部，到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$BC=10$，BC 边上的中线 $AD=12$. 求 AC.

*5. 3，4，5 是一组勾股数，$3k$，$4k$，$5k$（k 是正整数）也是一组勾股数吗？一般地，如果 a，b，c 是一组勾股数，那么 ak，bk，ck（k 是正整数）也是一组勾股数吗？

例 2 如图 21.2-3，在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=12$，$BC=13$，求 BC 边上的高 AD.

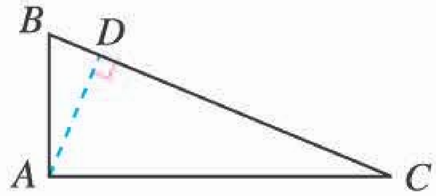


图 21.2-3

分析： 不难看出$\triangle ABC$的三边长是勾股数，可以先判定$\triangle ABC$的现状，再利用三角形面积公式求高.

解： 因为 $5^2+12^2=13^2$，即 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以$\triangle ABC$是直角三角形，且$\angle A=90°$.

如图 21.2-3，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D. 由三角形面积公式，得

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD,$$

即$\frac{1}{2}\times5\times12=\frac{1}{2}\times13\cdot AD$. 可得 $AD=\frac{60}{13}$.

例 3 如图 21.2-4，某港口 P 位于东西方向的海岸线上. “远航”号、“海天”号轮船同时离开港口，各自沿一固定方向航行，“远航”号每时航行 16 n mile，“海天”号每时航行 12 n mile. 它们离开港口一个半小时后分别位于点 Q，R 处，且相距 30 n mile. 如果知道“远航”号沿东北方向航行，能知道“海天”号沿哪个方向航行吗？

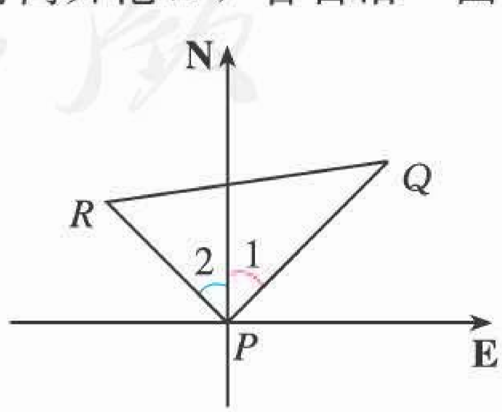


图 21.2-4

分析： 在图 21.2-4 中可以看到，由于“远航”号的航向已知，如果求出两艘轮船的航向所成的角，就能知道“海天”号的航向了.

解： 根据题意，

$PQ=16\times1.5=24$,

$PR=12\times1.5=18$,

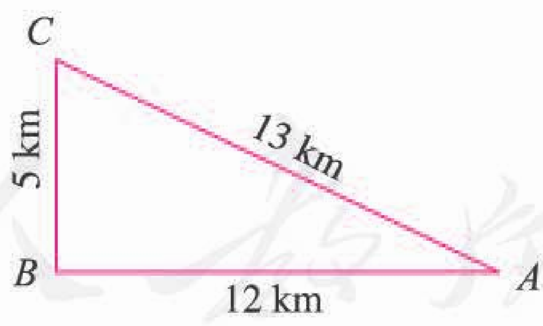
$QR=30$.

因为 $24^2+18^2=30^2$，即 $PQ^2+PR^2=QR^2$，所以 $\angle QPR=90^\circ$.

由“远航”号沿东北方向航行可知，$\angle1=45^\circ$. 因此 $\angle2=45^\circ$，即“海天”号沿西北方向航行.

巩固运用21.5

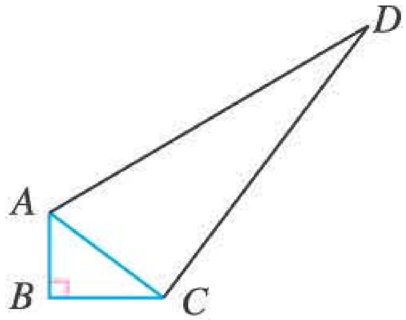
1. A，B，C 三地的两两距离如图所示，A 地在 B 地的正东方向，C 地在 B 地的什么方向？



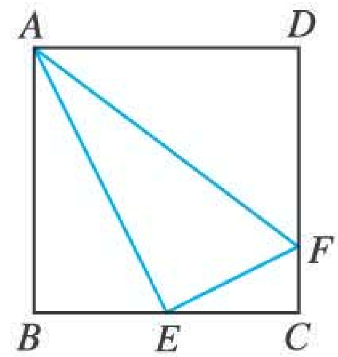
（第 1 题）

2. 小明向东走 80 m 后，沿另一方向又走了 60 m，再沿第三个方向走 100 m 回到原地. 小明向东走 80 m 后是向哪个方向走的？

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$，$\angle B=90^{\circ}$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 是 CD 上一点，且 $CF=\frac{1}{4}CD$. 求证：$\angle AEF=90^{\circ}$.

数学活动

如图 1，学校需要测量旗杆的高度. 同学们发现系在旗杆顶端的绳子垂到了地面，并多出了一段，但这条绳子的长度未知. 请你应用勾股定理提出一个解决这个问题的方案，并与同学交流.

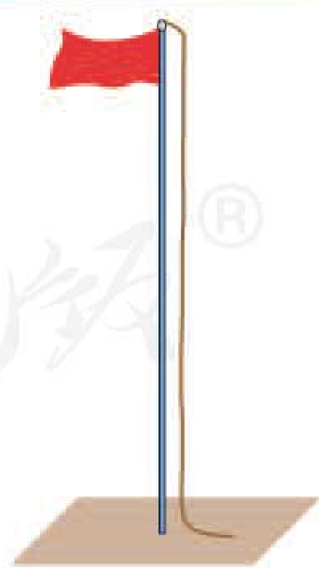


图 1

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

1. 直角三角形是特殊形状的三角形，它的三边长有什么特殊的数量关系？

2. 借助于图形的面积研究相关的数量关系，是我国古代数学研究中经常采用的重要方法，它充分显示了我国古人的卓越智慧. 赵爽是怎样证明勾股定理的？运用了什么思想方法？你还会用其他方法证明勾股定理吗？

3. 勾股定理是数学中最重要的定理之一，此定理不仅在解决和直角三角形相关的问题时很有用，而且在解决其他许多数学问题时也很有用. 请举例说明勾股定理的一些应用.

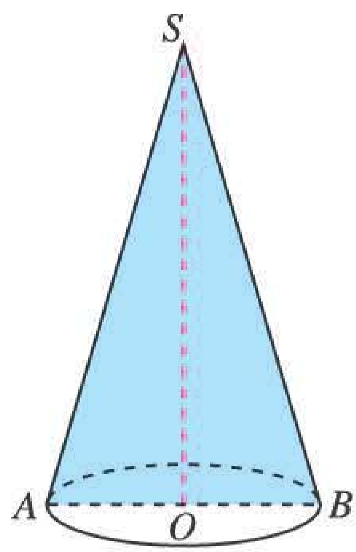
4. 得到一个数学结论后，经常要研究其逆命题是否成立. 原命题成立，逆命题也一定成立吗？请举例说明.

5. 勾股定理及其逆定理分别是直角三角形的性质和判定方法. 已知一个三角形的三边长，怎样判断它是不是直角三角形？你作判断的依据是什么？

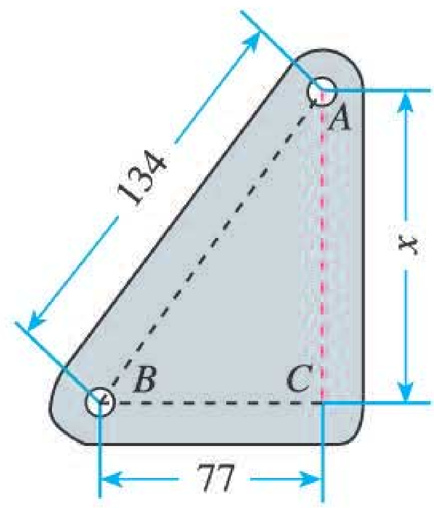
复习题 21

复习巩固

1. 如图，过圆锥的顶点 S 和底面圆的圆心 O 的平面截圆锥得截面$\triangle SAB$，其中 $SA=SB$，AB 是圆锥底面圆 O 的直径. 已知 $SA=7$ cm，$AB=4$ cm，求截面$\triangle SAB$ 的面积.



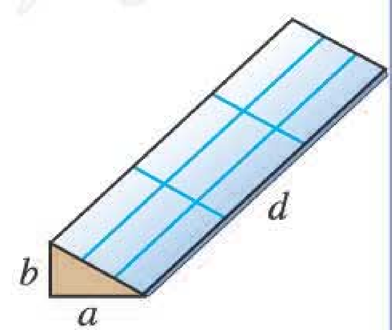
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，车床齿轮箱壳要钻两个圆孔，两孔中心的距离是 134 mm，两孔中心的水平距离是 77 mm. 计算两孔中心的垂直距离（结果保留小数点后一位）.

3. 如图，要修一个育苗棚，棚的横截面是直角三角形，棚宽 $a=3$ m，高 $b=1.5$ m，长 $d=10$ m. 求覆盖在顶上的塑料薄膜需多少平方米（结果保留小数点后一位）.



（第 3 题）

4. 一个三角形三边的比为 $1:\sqrt{3}:2$，这个三角形是直角三角形吗？

5. 下列各命题都成立，写出它们的逆命题. 这些逆命题成立吗？

(1) 两条直线平行，同位角相等；

(2) 如果两个实数都是正数，那么它们的积是正数；

(3) 等边三角形是锐角三角形；

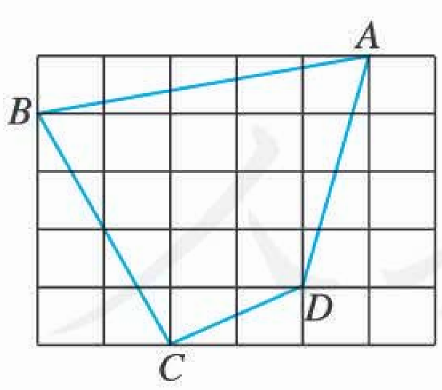
(4) 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

综合运用

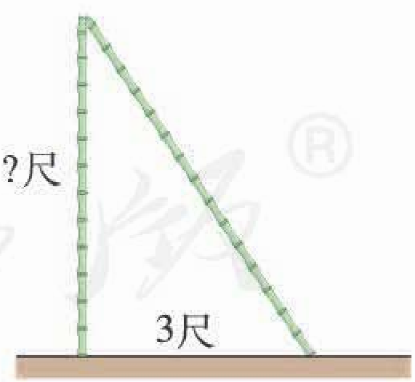
6. 如图，每个小正方形的边长都为 1.

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积和周长；

(2) $\angle BCD$ 是直角吗？



(第 6 题)



(第 7 题)

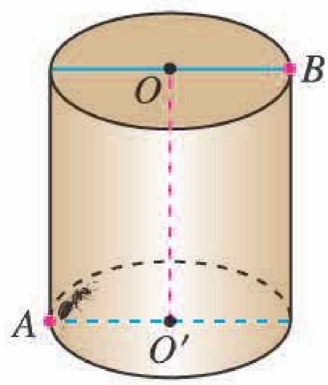
7. 如图，一根竹子高 1 丈，折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处. 折断处离地面的高度是多少？(注：

这是我国古代数学著作《九章算术》中的一个问题.）

8. 古希腊的哲学家柏拉图曾指出，如果 m 表示大于 1 的整数，$a=2m$，$b=m^2-1$，$c=m^2+1$，那么 a，b，c 为勾股数. 你认为对吗？如果对，你能利用这个结论得出一些勾股数吗？

拓广探索

9. 如图，圆柱的底面半径为 6 cm，高为 10 cm，蚂蚁在圆柱侧面爬行，从点 A 爬到点 B 的最短路程是多少厘米（结果保留小数点后一位）？



（第 9 题）

10. 设直角三角形的两条直角边长及斜边上的高分别为 a，b 及 h，求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$.

第二十二章　平行四边形

与三角形一样，平行四边形也是一种基本的几何图形. 宏伟的建筑物、开关自如的栅栏门、别具一格的窗棂、很多球类的比赛场地……现实世界中很多物体都有平行四边形的形象. 为什么平行四边形形状的物体到处可见呢？这与平行四边形的性质有关.

前面我们学习了许多图形与几何的知识，掌握了一些探索和证明图形几何性质的方法. 本章我们将进一步学习平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，并在理解它们之间关系的基础上，利用已有的几何知识和方法，探索并证明它们的性质定理和判定定理；进一步体会研究图形几何性质的思路和方法，即通过观察、类比、特殊化等途径和方法发现图形的几何性质，再通过逻辑推理证明它们.

22.1 平行四边形

平行四边形是常见的图形. 小区的伸缩门、庭院的竹篱笆、斜向停车位等，都有平行四边形的形象. 你还能举出一些例子吗?

我们知道，两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**（parallelogram）. 平行四边形用“▱”表示，如图 22.1-1，平行四边形 $ABCD$ 记作“▱$ABCD$”.

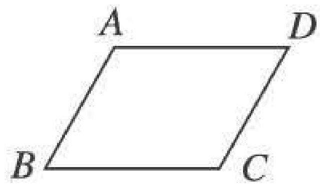


图 22.1-1

22.1.1 平行四边形的性质

由平行四边形的定义，我们知道平行四边形的两组对边分别平行. 除此之外，平行四边形还有什么性质呢?

探究

根据定义画一个平行四边形，观察它，除了“两组对边分别平行”外，它的边之间还有什么关系? 它的角之间有什么关系? 度量一下，和你的猜想一致吗?

通过观察和度量，我们猜想：平行四边形的对边相等；平行四边形的对角相等. 下面我们来证明这个猜想.

上述猜想涉及线段相等、角相等. 我们知道，利用三角形全等得出全等三角形的对应边、对应角都相等，是证明线

段相等、角相等的一种重要的方法. 为此，我们通过添加辅助线，构造两个三角形，通过三角形全等进行证明.

证明： 如图 22.1-2，连接 AC.

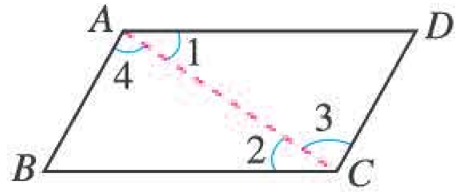


图 22.1-2

$\because AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又 AC 是$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 的公共边，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore AB = DC$，$BC = AD$，

$\angle B = \angle D$.

请同学们自己证明$\angle BAD = \angle DCB$.

不添加辅助线，你能否直接运用平行四边形的定义，证明其对角相等？

这样我们证明了平行四边形具有以下性质：

平行四边形的对边相等；

平行四边形的对角相等.

例 1 如图 22.1-3，在$\square ABCD$ 中，$DE \perp AB$，$BF \perp CD$，垂足分别为 E，F. 求证 $AE = CF$.

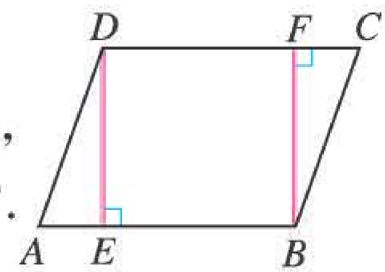


图 22.1-3

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle A=\angle C$，$AD=CB$.

又 $\angle AED=\angle CFB=90^\circ$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$.

$\therefore AE=CF$.

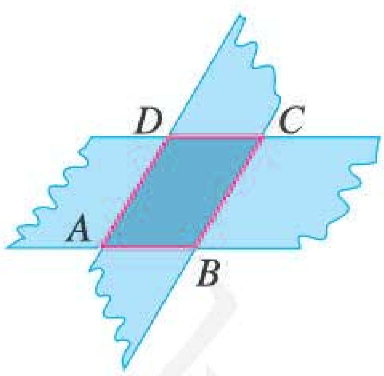
巩固运用22.1

1. 在$\square ABCD$ 中，

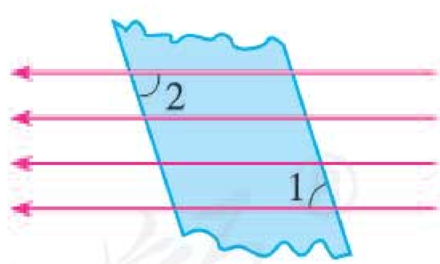
(1) 已知 $AB=5$，$BC=3$，求它的周长；

(2) 已知$\angle A=38^\circ$，求其余各内角的度数.

2. 如图，剪两张对边平行的纸条，随意交叉叠放在一起，重合的部分构成一个四边形. 转动其中一张纸条，线段 AD 和 BC 的长度有什么关系？为什么？



（第 2 题）

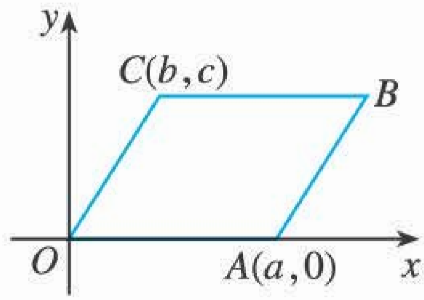


（第 3 题）

3. 如图，在一束平行光线中插入一张对边平行的纸板. 如果光线与纸板右下方所成的 $\angle 1$ 是 72°，那么光线与纸板左上方所成的$\angle 2$ 是多少度？为什么？

4. 如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=6$，且 AB 的长是$\square ABCD$ 周长的$\dfrac{3}{16}$，那么 BC 的长是多少？

5. 如图，$\square OABC$ 的顶点 O，A，C 的坐标分别是 $(0,0)$，$(a,0)$，(b,c). 求顶点 B 的坐标.



（第 5 题）

上面我们研究了平行四边形的边、角这两个基本要素的性质，下面我们研究平行四边形对角线的性质.

探究

如图 22.1-4，在$\square ABCD$ 中，连接 AC，BD，并设它们相交于点 O，OA 与 OC，OB 与 OD 有什么关系？你能证明发现的结论吗？

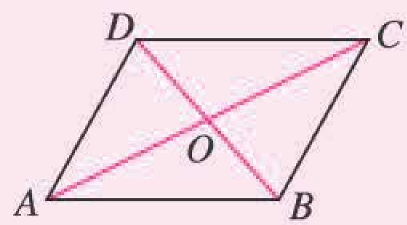


图 22.1-4

我们猜想，在$\square ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$.

与证明平行四边形的对边相等、对角相等的方法类似，我们也可以通过三角形全等证明这个猜想. 请你结合图 22.1-5 完成证明.

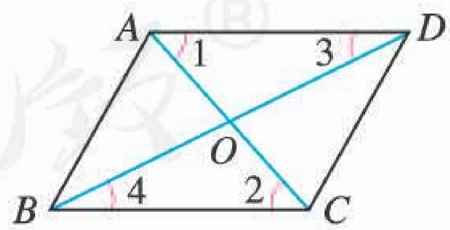


图 22.1-5

由此我们又得到平行四边形的一个性质：

平行四边形的对角线互相平分.

例 2 如图 22.1-6，在▱$ABCD$中，$AB=10$，$AD=8$，$AC\perp BC$，垂足为 C. 求 BC，CD，AC，OA 的长，以及▱$ABCD$ 的面积.

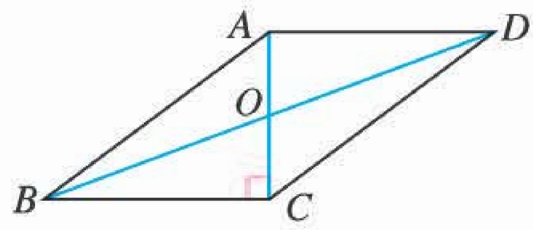


图 22.1-6

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BC=AD=8$，$CD=AB=10$.

∵ $AC\perp BC$，

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

根据勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6.$$

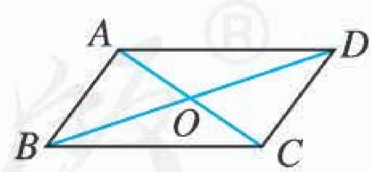
又 $OA=OC$，

∴ $OA=\frac{1}{2}AC=3$，

$$S_{\square ABCD}=BC\cdot AC=8\times 6=48.$$

巩固运用22.2

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$BC=10$，$AC=8$，$BD=14$. $\triangle AOD$ 的周长是多少？$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的周长哪个长？长多少？



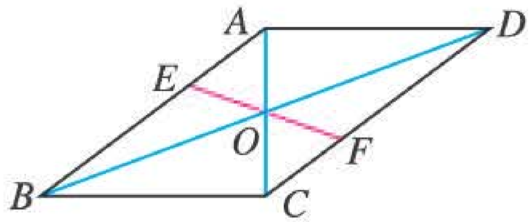
（第 1 题）

2. ▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O.

（1）如果 $AC+BD=36$，$AB=11$，求 $\triangle OCD$ 的周长；

(2) 如果▱$ABCD$ 的周长为 120，△AOB 的周长比△BOC 的周长小 10，求 AB，BC 的长.

3. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F. 求证 $OE=OF$.



（第 3 题）

22.1.2 平行四边形的判定

思考

通过前面的学习，我们知道，平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分. 反过来，对边相等，或对角相等，或对角线互相平分的四边形是平行四边形吗？也就是说，平行四边形的性质定理的逆命题成立吗？

可以证明，这些逆命题都成立. 这样我们得到平行四边形的判定定理：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

两组对角分别相等的四边形是平行四边形；
对角线互相平分的四边形是平行四边形.

你能根据平行四边形的定义证明它们吗？

下面我们以“对角线互相平分的四边形是平行四边形”为例，通过三角形全等进行证明.

如图 22.1-7，在四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

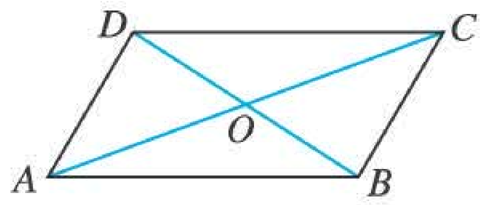


图 22.1-7

证明：∵ $OA=OC$，$OD=OB$，

$\angle AOD=\angle COB$，

∴ $\triangle AOD \cong \triangle COB$.

∴ $\angle OAD=\angle OCB$.

∴ $AD \parallel BC$.

同理 $AB \parallel DC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由上我们知道，平行四边形的判定定理与相应的性质定理互为逆定理. 也就是说，当定理的条件与结论互换以后，所得命题仍然成立.

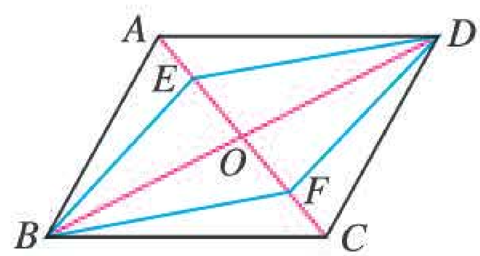


图 22.1-8

例 3 如图 22.1-8，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是 AC 上的两点，且 $AE=CF$. 求

证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=CO$，$BO=DO$.

$\because AE=CF$，

$\therefore AO-AE=CO-CF$，即 $EO=FO$.

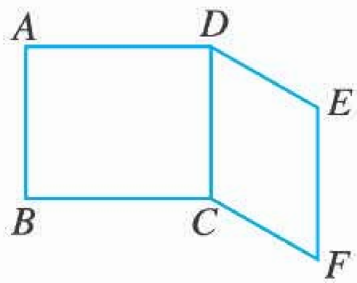
又 $BO=DO$，

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

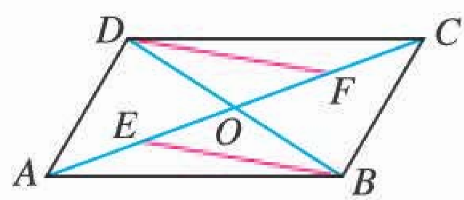
你还有其他证明本例的方法吗？

巩固运用22.3

1. 如图，$AB=DC=EF$，$AD=BC$，$DE=CF$. 图中有哪些互相平行的线段？

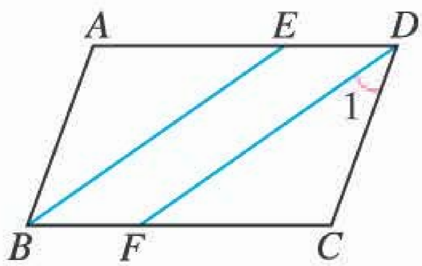


（第 1 题）

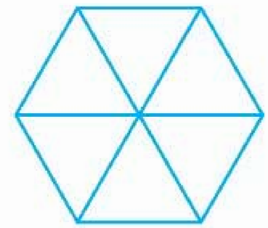


（第 2 题）

2. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别是 OA，OC 的中点. 求证 $BE=DF$.
3. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=70^\circ$，BE 平分 $\angle ABC$ 且交 AD 于点 E，$DF \parallel BE$ 且交 BC 于点 F. 求 $\angle 1$ 的大小.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，由六个全等的正三角形拼成的图中，有多少个平行四边形？为什么？

思考

我们知道，两组对边分别平行或相等的四边形是平行四边形. 如果只考虑四边形的一组对边，它们满足什么条件时这个四边形是平行四边形？

我们知道，如果一个四边形是平行四边形，那么它的任意一组对边平行且相等. 反过来，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗？

我们猜想这个结论正确，下面进行证明.

如图 22.1-9，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AB=CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

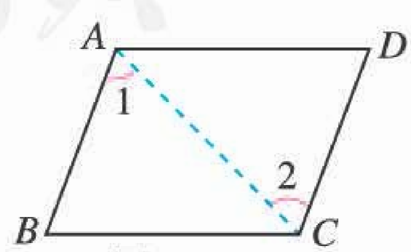


图 22.1-9

证明： 连接 AC.

$\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle 1=\angle 2.$

又 $AB=CD$，$AC=CA$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA.$

$\therefore \quad BC=DA.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的两组对边分别相等，它是平行四边形.

于是我们又得到平行四边形的一个判定定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例 4 如图 22.1-10，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 的中点. 求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

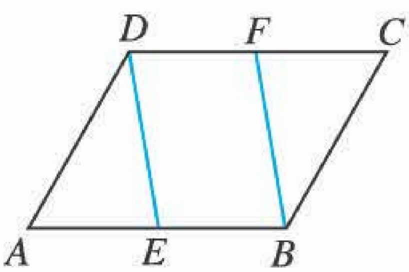


图 22.1-10

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$EB \parallel FD$.

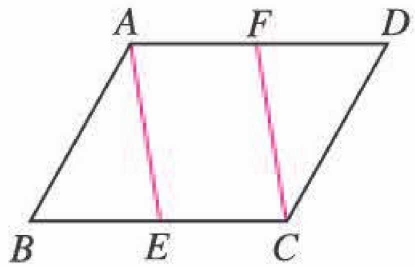
又 $EB=\dfrac{1}{2}AB$，$FD=\dfrac{1}{2}CD$，

$\therefore EB=FD.$

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

巩固运用22.4

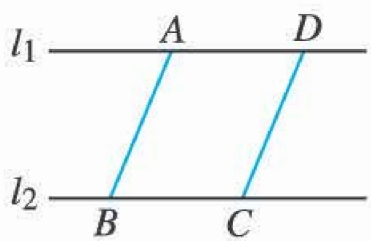
1. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，AD 上，且 $AF=CE$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.



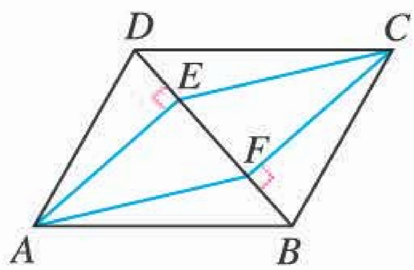
（第 1 题）

2. 为了保证铁路的两条直铺的铁轨互相平行，只要使互相平行的夹在铁轨之间的枕木长相等就可以了. 你能说出其中的道理吗？

3. 如图，直线 $l_1 /\!/ l_2$，在 l_1，l_2 上分别截取 AD，BC，使 $AD=BC$，连接 AB，CD. AB 和 CD 有什么关系？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点分别作 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，E，F 为垂足. 求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

22.1.3 三角形的中位线

前面我们研究平行四边形时，常常把它分成几个三角形，利用三角形全等的性质研究平行四边形的有关问题. 下面我们利用平行四边形研究三角形的有关问题.

如图 22.1-11，在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别是AB，AC 的中点，连接 DE. 像 DE 这样，连接三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**. 想一想，一个三角形有几条中位线？三角形的中位线和中线一样吗？

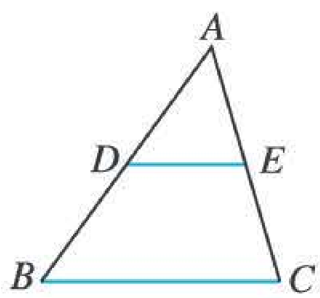


图 22.1-11

探究

观察图 22.1-11，你能发现$\triangle ABC$ 的中位线 DE 与边 BC 的位置关系吗？度量一下，DE 与 BC 之间有什么数量关系？

我们猜想，$DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$. 下面我们对它进行证明.

如图 22.1-11，D，E 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的

中点. 求证：$DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

分析：本题既要证明两条线段所在的直线平行，又要证明其中一条线段的长等于另一条线段长的一半. 将 DE 延长一倍后，可以将证明 $DE = \frac{1}{2}BC$ 转化为证明延长后的线段与 BC 相等. 又由于 E 是 AC 的中点，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形构造一个平行四边形，利用平行四边形的性质进行证明.

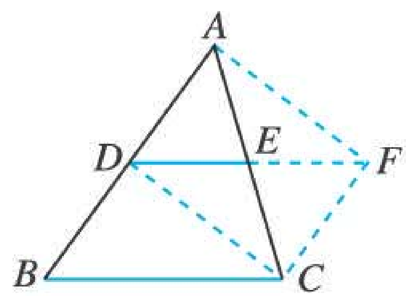


图 22.1-12

证明：在图 22.1-11 中，延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 DC，AF，FC，得到图 22.1-12.

$\because$ $AE = EC$，$DE = EF$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$CF \mathrel{\underline{\parallel}} DA$（其中“$\underline{\parallel}$”表示平行且相等）.

$\therefore$ $CF \mathrel{\underline{\parallel}} BD$.

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形，

$DF \mathrel{\underline{\parallel}} BC$.

又 $DE = \frac{1}{2}DF$，

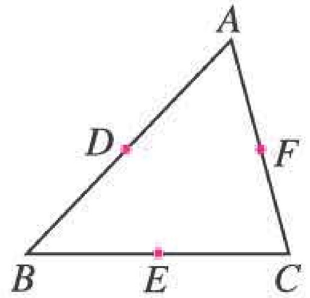
$\therefore$ $DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

通过上述证明，我们得到三角形的中位线定理：

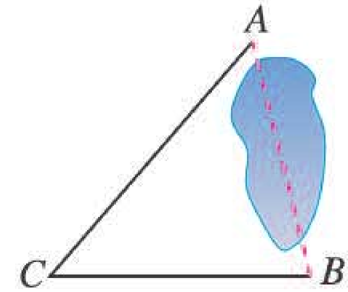
三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

巩固运用22.5

1. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是AB，BC，CA的中点. 以这些点为顶点，在图中，你能画出多少个平行四边形？为什么？



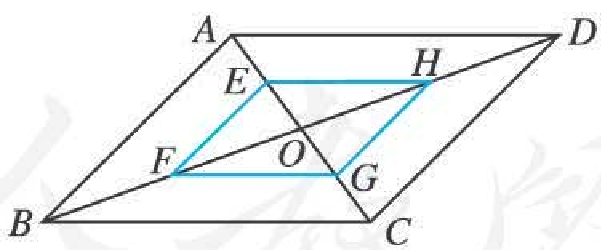
（第1题）



（第2题）

2. 如图，A，B两点被池塘隔开，在AB外选一点C，连接AC和BC. 怎样测出A，B两点间的距离？根据是什么？

3. 如图，▱$ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，且E，F，G，H分别是AO，BO，CO，DO的中点. 求证：四边形$EFGH$是平行四边形.



（第3题）

22.1.4 两条平行线之间的距离

距离是几何中的重要度量之一. 前面我们已经学习了点

与点之间的距离、点到直线的距离. 在此基础上，我们结合平行四边形的概念和性质，介绍两条平行线之间的距离.

如图 22.1-13，$a \parallel b$，$c \parallel d$，c，d 与 a，b 分别相交于 A，B，C，D 四点. 由平行四边形的概念和性质可知，四边形 $ABDC$ 是平行四边形，$AB=CD$. 也就是说，两条平行线之间的任何两条平行线段都相等.

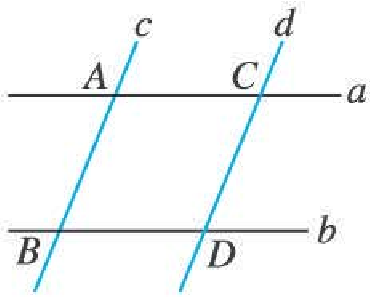


图 22.1-13

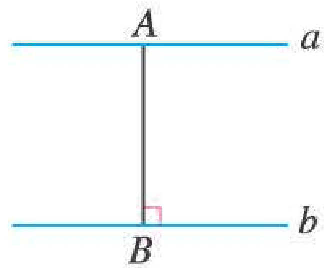


图 22.1-14

从上面的结论可以知道，如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等. 两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做**两条平行线之间的距离**. 如图 22.1-14，$a \parallel b$，A 是直线 a 上的任意一点，$AB \perp b$，B 是垂足，线段 AB 的长就是 a，b 之间的距离. 想一想，两条平行线之间的距离和点与点之间的距离、点到直线的距离有何联系与区别？

例 5 如图 22.1-15，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD=BC$，求证$\angle A=\angle B$.

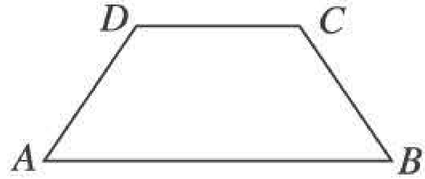


图 22.1-15

分析： 由于 $AB \parallel DC$，我们考虑运用平行线之间的距离相等的结论，

通过三角形全等进行证明.

证明： 在图 22.1-15 中，过点 C，D 分别作 $CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别为 E，F，得到图 22.1-16. 则 $\triangle CEB$，$\triangle DFA$ 是直角三角形，CE，DF 的长表示平行线 AB，DC 之间的距离. 由于平行线之间的距离相等，所以 $CE=DF$.

$\because AD=BC$，$DF=CE$，

$\therefore \text{Rt}\triangle DFA \cong \text{Rt}\triangle CEB$.

$\therefore \angle A=\angle B$.

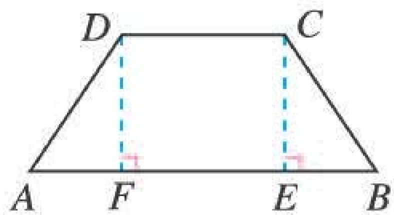
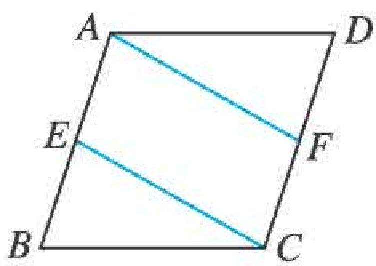


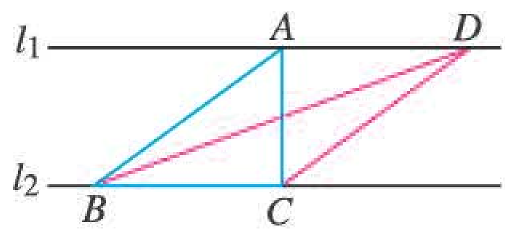
图 22.1-16

巩固运用22.6

1. 如图，在$\square ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，CD 上的点，且 $AF \parallel EC$. 求证：$AF=EC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等吗？为什么？你还能画出一些与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？

22.2 矩形

上节我们研究了平行四边形，下面我们通过平行四边形角、边的特殊化，研究特殊的平行四边形.

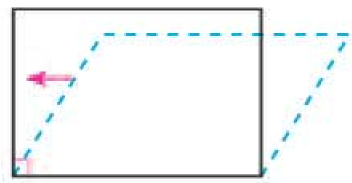


图 22.2-1

我们先从角开始，如图 22.2-1，当平行四边形的一个角为直角时，这时的平行四边形是一个特殊的平行四边形. 有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(rectangle)，也就是长方形.

矩形也是常见的图形. 门窗框、教科书封面、网球比赛场地等都有矩形的形象. 你还能举出一些例子吗?

思考

因为矩形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 又由于它有一个角为直角，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢?

对于矩形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究. 可以发现并证明（请你自己完成证明），矩形还有以下性质:

矩形的四个角都是直角;

矩形的对角线相等.

上节我们运用平行四边形的判定和性质研究了三角形的中位线，下面我们用矩形的性质研究直角三角形的一个性质.

思考

如图 22.2-2，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O. 观察 Rt$\triangle ABC$，在 Rt$\triangle ABC$ 中，BO 是斜边 AC 上的中线，BO 与 AC 有什么关系？

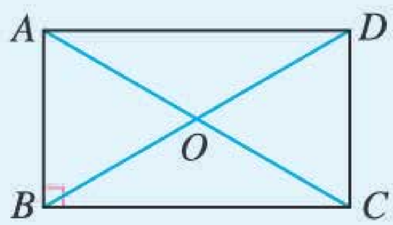


图 22.2-2

根据矩形的性质，我们知道，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$. 由此，我们得到直角三角形的一个性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例 1 如图 22.2-3，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，$AB=4$. 求矩形对角线的长.

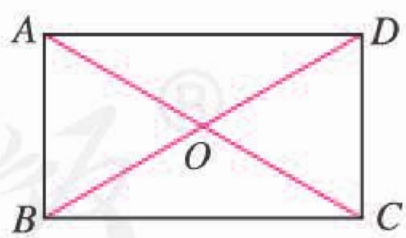


图 22.2-3

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ AC 与 BD 相等且互相平分.

∴ $OA=OB$.

又 $\angle AOB=60°$，

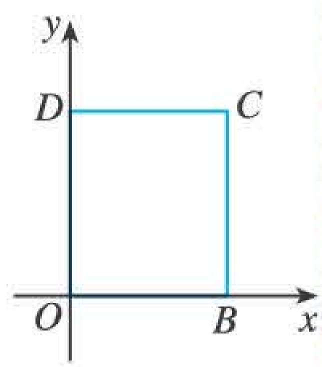
∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形.

∴ $OA=AB=4$.

$\therefore AC=BD=2OA=8.$

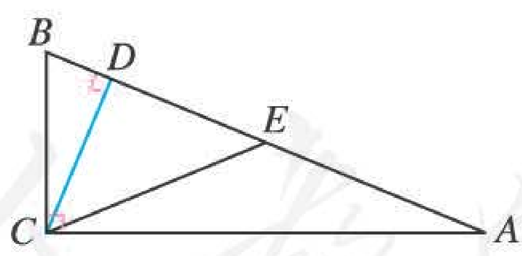
巩固运用22.7

1. 矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？
2. 一个矩形的一条对角线长为 8，两条对角线的一个交角为 120°. 求这个矩形的边长.
3. 如图，四边形 $OBCD$ 是矩形，顶点 O，B，D 的坐标分别是 (0，0)，(b，0)，(0，d). 求点 C 的坐标.



（第 3 题）

4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$. 求$\angle A$，$\angle B$ 的度数（提示：设 AB 中点为 D，连接 CD）.
5. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle ACD=3\angle BCD$，E 是斜边 AB 的中点. $\angle ECD$ 是多少度？为什么？



（第 5 题）

上面我们研究了矩形的性质，下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是矩形.

由矩形的定义可知，有一个角是直角的平行四边形是矩

形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢？

与研究平行四边形的判定方法类似，我们研究矩形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.

思考

我们知道，矩形的对角线相等. 反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？

可以发现并证明矩形的一个判定定理：

对角线相等的平行四边形是矩形.

下面我们给出证明过程.

如图 22.2-4，在▱$ABCD$ 中，$AC=BD$，求证：▱$ABCD$ 是矩形.

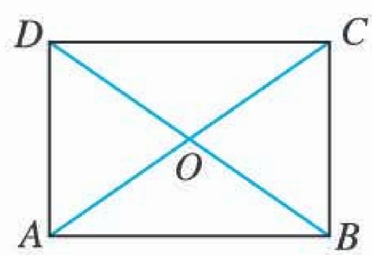


图 22.2-4

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BC=AD$.

又 $AC=BD$，$AB=BA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

∴ $\angle ABC=\angle BAD$.

又 $\angle ABC+\angle BAD=180°$，

∴ $\angle ABC=90°$.

∴ ▱$ABCD$ 是矩形.

工人师傅在做门窗或矩形零件时，不仅要测量两组对边的长度是否分别相等，常常还要测量它们的两条对角线是否相等，以确保图形是矩形. 你知道其中的道理吗?

思考

前面我们研究了矩形的四个角，知道它们都是直角. 它的逆命题成立吗? 即四个角都是直角的四边形是矩形吗? 进一步，至少有几个角是直角的四边形是矩形?

可以发现并证明矩形的另一个判定定理:

有三个角是直角的四边形是矩形.

例 2 如图 22.2-5，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $OA=OD$，$\angle OAD=50°$. 求$\angle OAB$ 的度数.

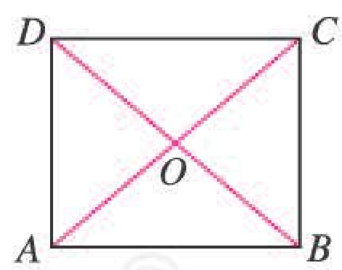


图 22.2-5

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.

又 $OA=OD$，

∴ $AC=BD$.

∴ ▱$ABCD$ 是矩形.

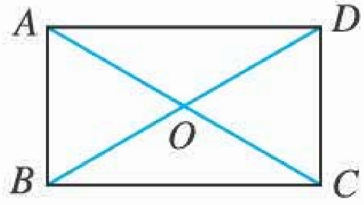
∴ $\angle DAB=90°$.

又 $\angle OAD=50°$，

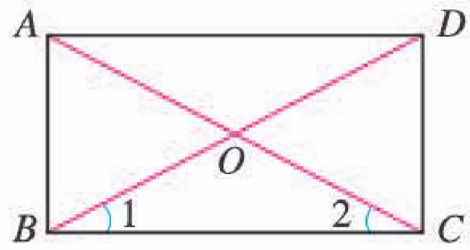
∴ $\angle OAB=40°$.

巩固运用22.8

1. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle OAB$ 是等边三角形，且 $AB=4$. 求$\square ABCD$ 的面积.



（第 1 题）



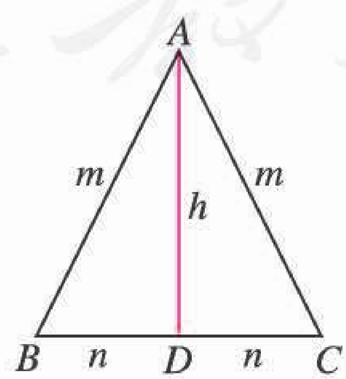
（第 2 题）

2. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $\angle 1=\angle 2$. $\square ABCD$ 是矩形吗？为什么？

3. 一个木匠要制作矩形的踏板，他只要在一个对边平行的长木板上分别沿与长边垂直的方向锯两次，就能得到矩形踏板. 为什么？

4. 求证：四个角都相等的四边形是矩形.

5. 如图，将等腰三角形纸片 ABC 沿底边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形. 你能用这两个三角形拼成多少种平行四边形？试一试，分别求出它们的对角线的长.



（第 5 题）

22.3 菱形

我们观察平行四边形的一组邻边，如图 22.3-1，当这组邻边相等时，这时的平行四边形也是一个特殊的平行四边形. 有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

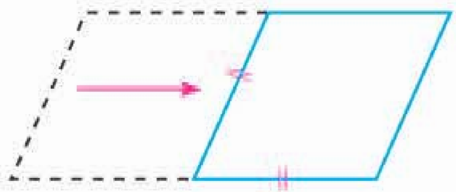


图 22.3-1

菱形也是常见的图形. 一些门窗的窗格、美丽的中国结、伸缩的衣帽架等都有菱形的形象. 你还能举出一些例子吗？

思考

因为菱形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质. 由于它的一组邻边相等，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？

对于菱形，我们仍然从它的边、角和对角线等方面进行研究. 可以发现并证明，菱形还有以下性质：

菱形的四条边都相等；

菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角.

下面我们给出“菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角”的证明.

如图 22.3-2，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，求证：$AC \perp BD$；AC 平分 $\angle BAD$ 与 $\angle BCD$，BD 平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$.

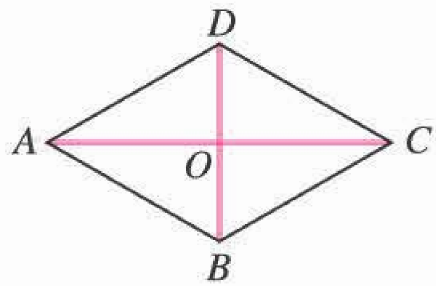


图 22.3-2

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore$ $AB=AD$，$BO=DO$.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because$ $BO=DO$，

$\therefore$ $AC \perp BD$，AC 平分 $\angle BAD$.

同理可证，AC 平分 $\angle BCD$，BD 平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$.

如图 22.3-3，比较菱形的对角线和平行四边形的对角线，我们发现，菱形的对角线把菱形分成四个全等的直角三角形，而平行四边形通常只被分成两对全等的三角形. 想一想，由菱形两条对角线的长，你能求出它的面积吗？

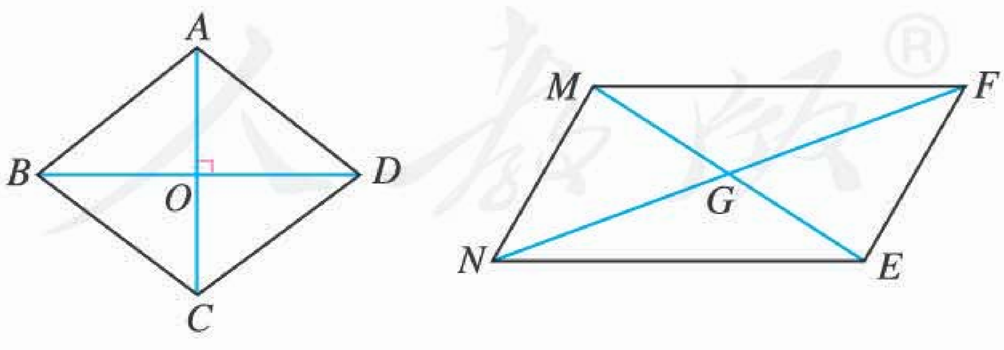


图 22.3-3

菱形是轴对称图形，它的对角线所在的直线就是它的对称轴.

例 1 如图 22.3-4，菱形花坛 $ABCD$ 的边长为 20 m，$\angle ABC=60°$，沿着菱形的对角线修建了两条小路 AC 和 BD. 求两条小路的长（结果保留小数点后两位）和花坛的面积（结果保留小数点后一位）.

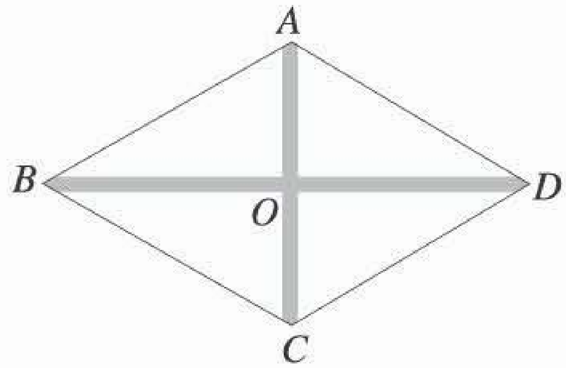


图 22.3-4

解： $\because$ 花坛 $ABCD$ 的形状是菱形，

$\therefore$ $AC\perp BD$，$\angle ABO=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 60°=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，

$AO=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 20=10$，

$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$.

$\therefore$ 花坛的两条小路长

$AC=2AO=20$（m），

$BD=2BO=20\sqrt{3}\approx 34.64$（m）.

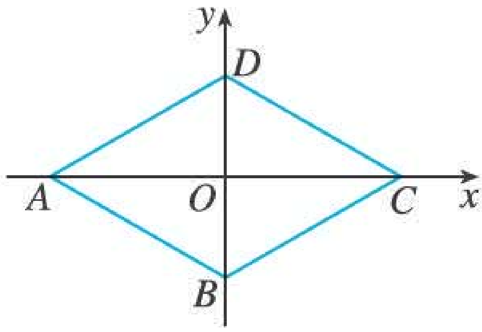
花坛的面积

$$S_{\text{菱形}ABCD}=4\cdot S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=200\sqrt{3}\approx 346.4\ (\mathrm{m}^2).$$

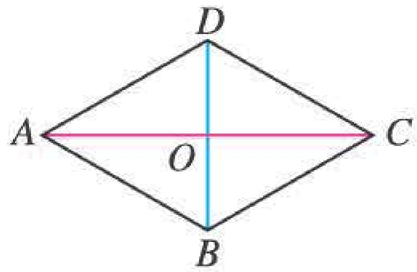
巩固运用22.9

1. 四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$. 求 AC 和 BD 的长.
2. 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8，求菱形的周长和面积.

3. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，C，D 两点的坐标分别是 $(c, 0)$，$(0, d)$，点 A，B 在坐标轴上. 求 A，B 两点的坐标.



（第 3 题）



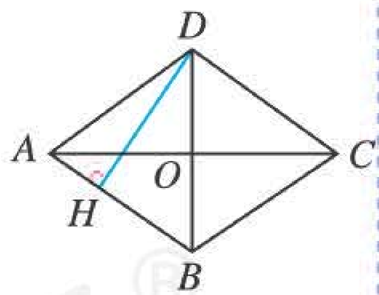
（第 4 题）

4. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ACD=30°$，$BD=6$. 求：

(1) $\angle BAD$，$\angle ABC$ 的度数；

(2) AB，AC 的长.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=8$，$DB=6$，$DH\perp AB$，垂足为 H. 求 DH 的长.



（第 5 题）

上面我们研究了菱形的性质，下面我们研究如何判定一个平行四边形或四边形是菱形.

由菱形的定义可知，有一组邻边相等的平行四边形是菱形. 除此之外，还有没有其他判定方法呢？

与研究平行四边形、矩形的判定方法类似，我们研究菱形的性质定理的逆命题，看看它们是否成立.

思考

我们知道，菱形的对角线互相垂直. 反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

可以发现并证明菱形的一个判定定理:

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

例 2 如图 22.3-5，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AB=5$，$AO=4$，$BO=3$. 求证：▱$ABCD$ 是菱形.

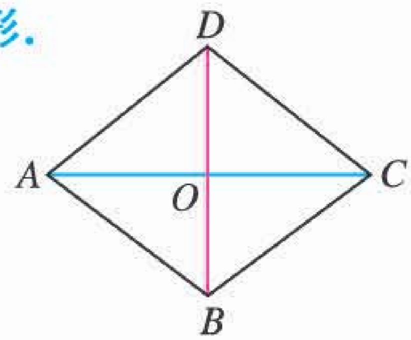


图 22.3-5

证明： $\because AB=5$，$AO=4$，$BO=3$，

$\therefore AB^2=AO^2+BO^2$.

$\therefore \triangle OAB$ 是直角三角形，

$AC \perp BD$.

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是菱形.

思考

我们知道，菱形的四条边相等. 反过来，四条边相等的四边形是菱形吗?

可以发现并证明菱形的另一个判定定理:

四条边相等的四边形是菱形.

巩固运用22.10

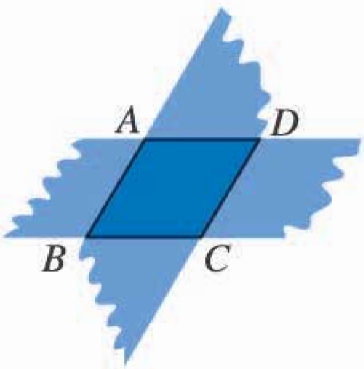
1. 求证：

(1) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

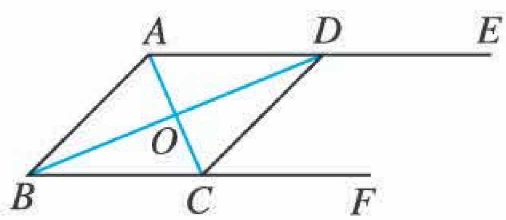
(2) 四条边相等的四边形是菱形.

2. 一个平行四边形的一条边长是 9，两条对角线的长分别是 12 和 $6\sqrt{5}$，它是菱形吗？为什么？求出它的面积.

3. 如图，两张对边平行且宽度相等的纸条交叉叠放在一起，重合部分构成的四边形 $ABCD$ 是一个菱形吗？为什么？



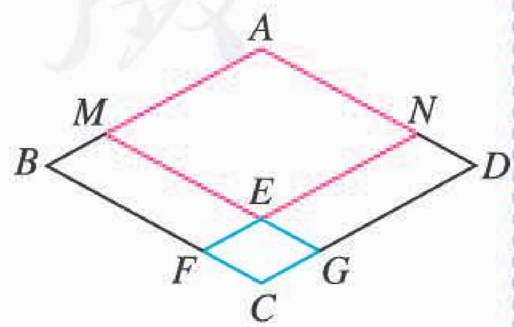
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AE \parallel BF$，AC 平分 $\angle BAD$，且交 BF 于点 C，BD 平分 $\angle ABC$，且交 AE 于点 D，连接 CD. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 M，N 分别在 AB，AD 上，且 $BM=DN$，$MG \parallel AD$，$NF \parallel AB$；点 F，G 分别在 BC，CD 上，MG 与 NF 相交于点 E. 求证：四边形 $AMEN$，$EFCG$ 都是菱形.



（第 5 题）

22.4 正方形

正方形（square）是我们熟悉的几何图形，它的四条边都相等，四个角都是直角．因此，正方形既是矩形，又是菱形（图 22.4-1）．它既有矩形的性质，又有菱形的性质．

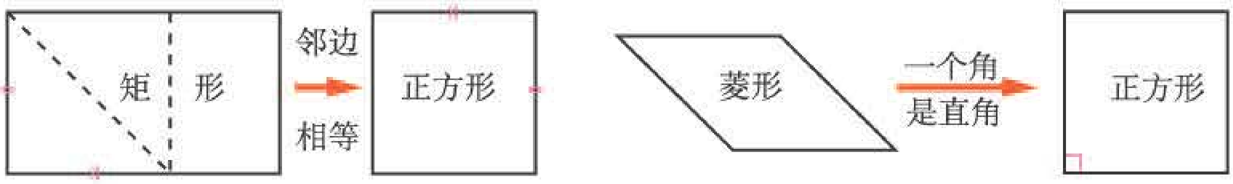


图 22.4-1

想一想，正方形是轴对称图形吗？它的对称轴是什么？

思考

正方形有哪些性质？如何判定一个四边形是正方形？把它们写出来，并和同学交流一下，然后证明其中的一些结论．

例 1 求证：正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形．

如图 22.4-2，四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC，BD 相交于点 O．求证：$\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 是全等的等腰直角三角形．

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AC=BD$，$AC\perp BD$，$AO=BO=CO=DO$.

∴ $\triangle ABO$，$\triangle BCO$，$\triangle CDO$，$\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形，并且 $\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DAO$.

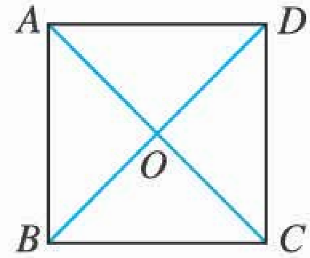


图 22.4-2

例 2 如图 22.4-3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CF 为$\triangle ABC$ 的角平分线，$FD\perp AC$，垂足为 D，$FE\perp BC$，垂足为 E，求证：四边形 $CDFE$ 是正方形.

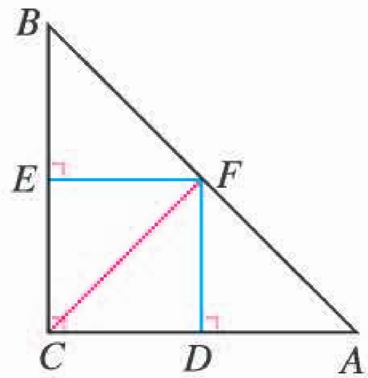


图 22.4-3

证明： ∵ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$FD\perp AC$，$FE\perp BC$，

∴ $\angle FDC=\angle FEC=\angle ECD=90^\circ$，

∴ 四边形 $CDFE$ 是矩形.

∵ CF 平分 $\angle ACB$，$FE\perp BC$，$FD\perp AC$，

∴ $FE=FD$.

∴ 矩形 $CDFE$ 是正方形.

对于本例，你还有其他证明方法吗？

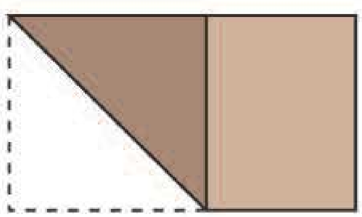
思考

正方形、菱形、矩形、平行四边形之间有什么关系？与同学们讨论一下，并列表或用框图表示这些关系.

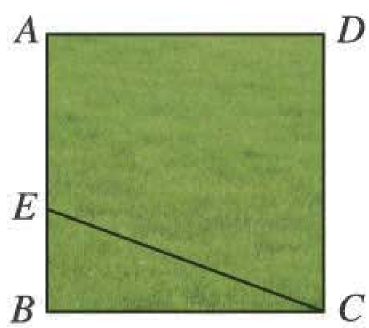
巩固运用22.11

1. (1) 如图，把一张长方形纸片按如图方式折一下，就可以裁出正方形纸片. 为什么？

   (2) 如何从一块长方形木板中裁出一块最大的正方形木板呢？



(第 1 (1) 题)



(第 2 题)

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是一块正方形场地. 小华和小芳在 AB 边上取定了一点 E，测量知 $EC=30$ m，$EB=10$ m. 这块场地的面积和对角线长分别是多少？

3. 满足下列条件的四边形是不是正方形？为什么？

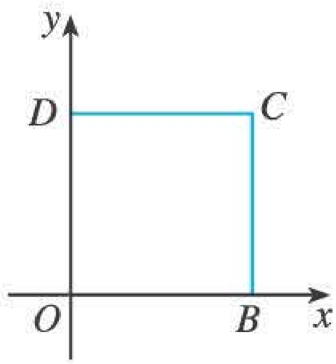
   (1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；

   (2) 对角线互相垂直的矩形；

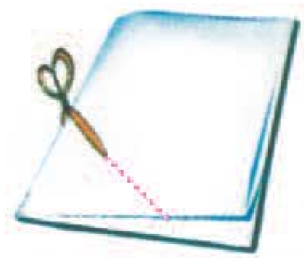
(3) 对角线相等的菱形；

(4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.

4. 如图，四边形 $OBCD$ 是正方形，O，D 两点的坐标分别是 $(0,\ 0)$，$(0,\ d)$. 求 B，C 两点的坐标.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，把一个长方形的纸片对折两次，然后剪下一个角. 要得到一个正方形，剪口与折痕应成多少度的角？

阅读与思考

丰富多彩的正方形

我们学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形．比较一下，哪种图形的性质最多？答案无疑是正方形．

正方形的四个角相等、四条边相等、对角线相等且互相垂直平分．它的对称轴比其他四边形都多．以后我们还会学到，它还是中心对称图形．这些特点使正方形得到了人们的喜爱和广泛应用．

例如，人们用边长为单位长度的正方形的面积，作为度量其他图形面积的基本单位；人们也常利用正方形美化生活环境，比如，用正方形地砖镶嵌地面，不仅美观大方，而且施工简单易行．

正方形还有许多有趣的性质．例如，要用给定长度的篱笆围成一个面积最大的四边形区域，那么应当把这个区域选为正方形．

下面是两个有关正方形的小实验，想一想其中的道理：

1．如图 1，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等．无论正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕点 O 怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的 $\frac{1}{4}$．想一想，这是为什么．

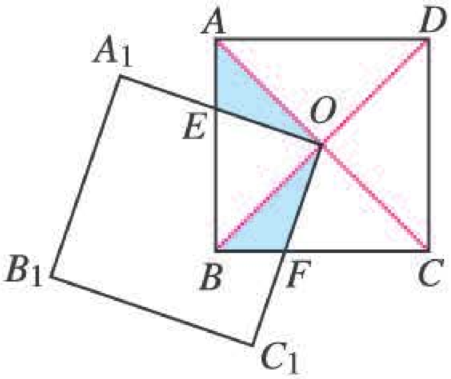


图 1

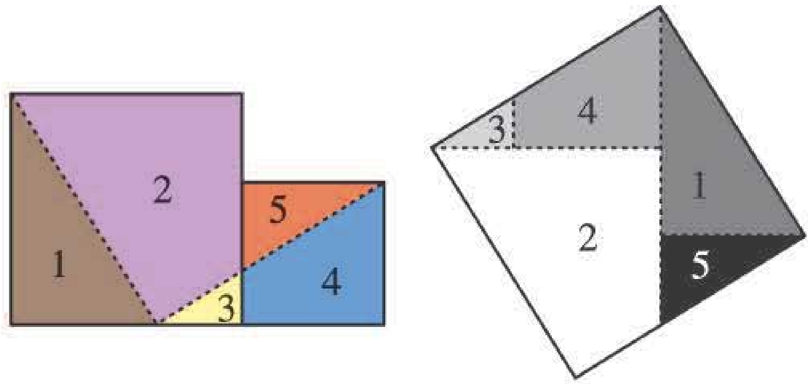


图 2

2. 给你两个大小不等的正方形，你能通过切割把它们拼接成一个大正方形吗？（参考图 2）说明你的拼法的道理.

数学活动

折纸做 60°，30°，15°的角

如果我们身旁没有量角器或三角尺，又需要作 60°，30°，15°等大小的角，可以采用下面的方法（图 1）：

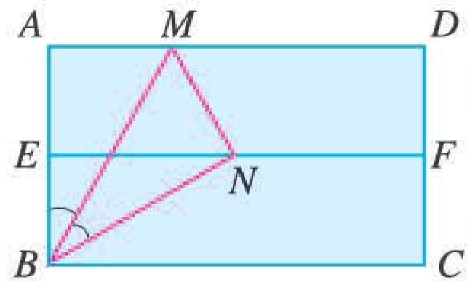


图 1

1. 对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展平.

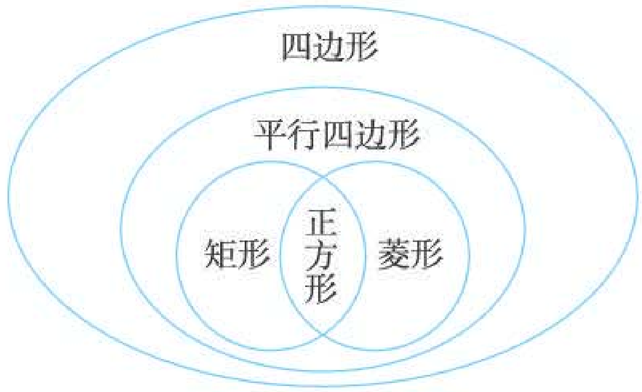
2. 再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上的点 N 处，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM. 同时，得到了线段 BN.

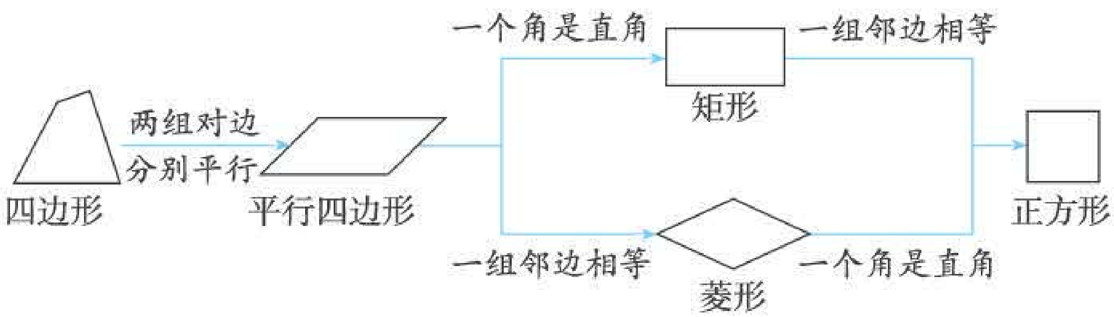
观察所得的 $\angle ABM$，$\angle MBN$ 和 $\angle NBC$，这三个角有什么关系？你能证明吗？

通过证明可知，这是从矩形得到 30°角的好方法，简单而准确. 由此，15°，60°，120°，150°等角就容易得到了.

小　结

一、本章知识结构图





二、回顾与思考

1. 平行四边形有哪些性质？如何判定一个四边形是平行四边形？

2. 矩形、菱形、正方形除了具有平行四边形的性质外，分别还具有哪些性质？如何判定一个平行四边形（或四边形）是矩形、菱形、正方形？你能总结一下研究这些性质和判定的方法吗？

3. 本章我们在三角形及全等三角形的基础上，学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形的性质及其判定方法．同时利用平行四边形的性质，得到了三角形中位线定理；利用

矩形的性质，得到了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的结论. 也就是说，利用平行四边形（矩形）的性质研究了三角形（直角三角形）的有关性质. 结合上述研究方法，谈谈你的体会.

4. 矩形、菱形和正方形都是特殊的平行四边形，而正方形既是特殊的菱形，又是特殊的矩形. 如何先把一个图形特殊化，再进行研究呢？通过上述图形之间一般与特殊关系的转化，谈谈你的认识.

5. 通过平行四边形、矩形、菱形和正方形性质定理和判定定理的学习，谈谈你对性质定理和判定定理之间关系的认识.

复习题 22

复习巩固

1. 选择题.

(1) 若平行四边形中两个内角的度数比为 1∶2，则其中较小的内角是（　　）.

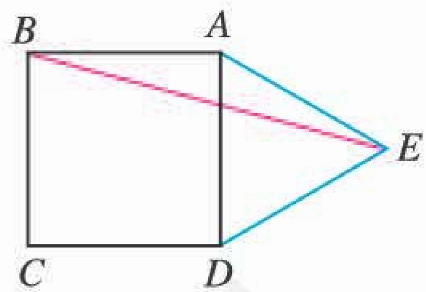
(A) 90°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 45°

(2) 若菱形的周长为 8，高为 1，则菱形两邻角的度数比为（　　）.

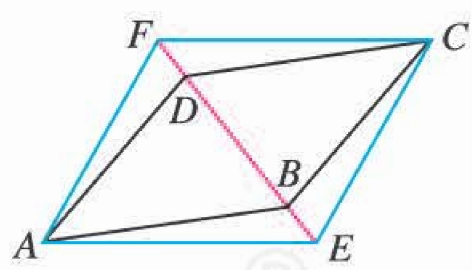
(A) 3∶1　(B) 4∶1　(C) 5∶1　(D) 6∶1

(3) 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边三角形 ADE，则 $\angle AEB$ 为（　　）.

(A) 10°　(B) 15°　(C) 20°　(D) 125°



（第 1（3）题）

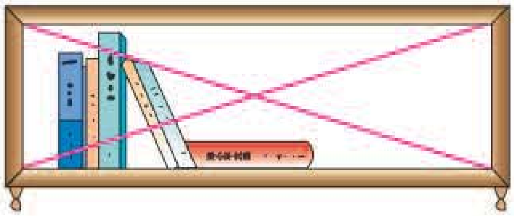


（第 2 题）

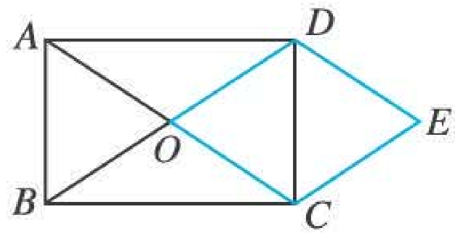
2. 如图，将▱$ABCD$ 的对角线 BD 向两个方向延长，分别至点 E 和点 F，且使 $BE=DF$. 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

3. 矩形对角线组成的对顶角中，有一组是两个 50°的角. 对角线与各边组成的角是多少度？

4. 如图，你能用一根绳子检查一个书架的侧边是否和上、下底都垂直吗？为什么？



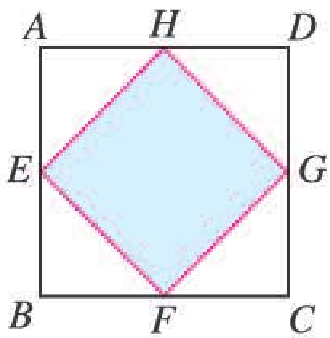
（第 4 题）



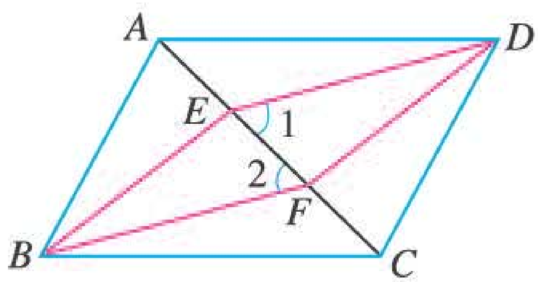
（第 5 题）

5. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $DE \parallel AC$，$CE \parallel BD$. 求证：四边形 $OCED$ 是菱形.

6. 如图，E，F，G，H 分别是正方形 $ABCD$ 各边的中点. 四边形 $EFGH$ 是什么四边形？为什么？



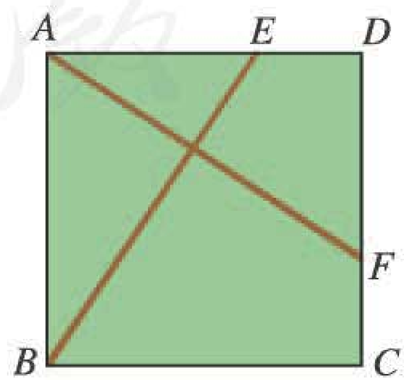
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$BE \parallel DF$，且分别交对角线 AC 于点 E，F，连接 ED，BF. 求证 $\angle 1 = \angle 2$.

8. 如图，$ABCD$ 是一个正方形花园，E，F 是它的两个门，且 $DE = CF$. 要修建两条路 BE 和

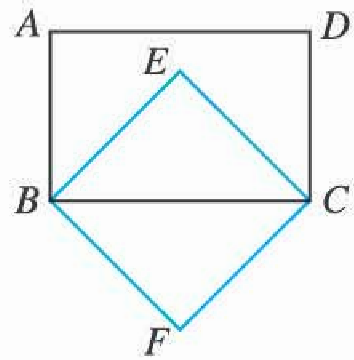


（第 8 题）

AF，这两条路等长吗？它们有什么位置关系？为什么？

综合运用

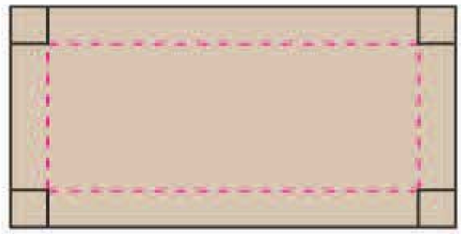
9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，$BF \parallel EC$，$FC \parallel BE$. 求证：四边形 $BFCE$ 是正方形.



（第 9 题）

10. 我们把顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形.
    (1) 任意四边形的中点四边形是什么形状？为什么？
    (2) 任意平行四边形的中点四边形是什么形状？为什么？
    (3) 任意矩形、菱形和正方形的中点四边形分别是什么形状？为什么？
11. 如果一个四边形是轴对称图形，并且有两条互相垂直的对称轴，它一定是菱形吗？一定是正方形吗？
12. 用纸板剪成的两个全等三角形能够拼成什么四边形？要想拼成一个矩形，需要两个什么样的全等三角形？要想拼成菱形或正方形呢？动手剪拼一下，并说明理由.

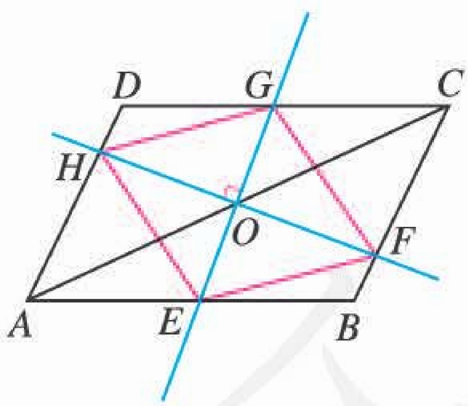
13. 如图，为了做一个无盖纸盒，小明先在一块矩形硬纸板的四角画出四个相同的正方形，用剪刀剪下，然后把纸板的四边沿虚线折起，并用胶带粘好，一个无盖纸盒就做成了．纸盒的底面是什么形状？为什么？



（第 13 题）

拓广探索

14. 如图，过▱$ABCD$ 的对角线 AC 的中点 O 作两条互相垂直的直线，分别交 AB，BC，CD，DA 于 E，F，G，H 四点，连接 EF，FG，GH，HE．试判断四边形 $EFGH$ 的形状，并说明理由．



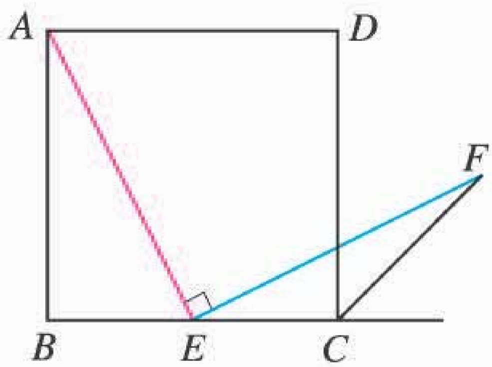
（第 14 题）

（第 15 题）

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle B = 90^\circ$，$AB = 8$ cm，$AD = 24$ cm，$BC = 26$ cm．点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度向点 D 运动；点 Q 从点 C 同时出发，以 3 cm/s 的速度向点 B 运动．规定其中一个动点到达端点时，另一个动点

也随之停止运动. 从运动开始，到使 $PQ /\!/ CD$ 和 $PQ=CD$，分别需经过多少时间？为什么？

16. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证 $AE=EF$.（提示：取 AB 的中点 G，连接 EG.）



（第 16 题）

第二十三章　一次函数

“万物皆变”——行星在宇宙中的位置随时间而变化，气温随海拔而变化，树的年轮随树龄而变化……在你周围的事物中，这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在.

为了研究这些运动变化现象中变量间的依赖关系，数学中逐渐形成了函数概念. 人们通过研究函数及其性质，可以更深入地认识现实世界中许多运动变化的规律.

在本章中，我们将从初步认识变量与函数开始，重点学习一类最基本的函数——一次函数，结合它的图象讨论它的性质，并利用它研究一些数学问题和实际问题，感受函数在解决运动变化问题中的重要作用.

23.1 函数

23.1.1 变量与函数

先请思考下面几个问题：

(1) 汽车以 60 km/h 的速度匀速行驶，行驶路程为 s km，行驶时间为 t h. 如表 23-1 所示，s 的值随 t 的值的变化而变化吗？

表 23-1

t	1	2	3	4	5
s	60	120	180	240	300

(2) 电影票的售价为 20 元/张. 第一场售出 150 张票，第二场售出 205 张票，第三场售出 310 张票，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元，y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

(3) 某银行的定期存款年利率为 1.75%，当存入的本金 x 分别为 10 000 元，20 000 元，50 000 元时，一年后的利息 y 分别为多少？y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

(4) 用 10 m 长的绳子围一个矩形. 当矩形的一边长 x 分别为 3 m，3.5 m，4 m，4.5 m 时，它的邻边长 y 分别为多少？y 的值随 x 的值的变化而变化吗？

上面几个问题反映了不同事物的变化过程. 在一个变化过程中，有些量的数值是变化的，我们称这样的量为**变量**

(variable). 例如，上面问题中的汽车行驶时间 t，行驶路程 s，售出票数 x，票房收入 y，本金 x，利息 y，矩形的一边长 x，它的邻边长 y 等都是变量. 在一个变化过程中，有些量的数值是始终不变的，我们称这样的的量为**常量**（constant). 例如，上面问题中的汽车行驶速度60 km/h，票价 20 元/张，定期存款年利率 1.75%，绳子的长度 10 m 等都是常量.

思考

上面问题（1）～（4）中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，可以发现：t 和 s 是两个变量，$s=60t$. 每当 t 取定一个值时，s 就有唯一确定的值与其对应. 例如，若 $t=1$，则 $s=60$；若 $t=2$，则 $s=120$；……；若 $t=5$，则 $s=300$.

在问题（2）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，$y=20x$. 每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 例如，若 $x=150$，则 $y=3\ 000$；若 $x=205$，则 $y=4\ 100$；若 $x=310$，则 $y=6\ 200$.

在问题（3）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，$y=1.75\%x$. 每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对应. 例如，若 $x=10\ 000$，则 $y=175$；若 $x=20\ 000$，则 $y=350$；若 $x=50\ 000$，则 $y=875$.

在问题（4）中，可以发现：x 和 y 是两个变量，$y=5-x$. 每当 x 取定一个值时，y 就有唯一确定的值与其对

应. 例如，若 $x=3$，则 $y=2$；若 $x=3.5$，则 $y=1.5$；若 $x=4$，则 $y=1$；若 $x=4.5$，则 $y=0.5$.

归纳

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应.

巩固运用23.1

1. 指出下列问题中的变量和常量：

(1) 某市的自来水价为 4 元/t. 现要抽取若干户居民调查水费支出情况，记某户月用水量为 x t，月应交水费为 y 元.

(2) 某地手机通话费为 0.2 元/min. 李明在手机话费卡中存入 30 元，记此后他的手机通话时间为 t min，话费卡中的余额为 w 元.

(3) 小明用圆规画圆. 记圆的半径为 r，面积为 S，圆周率为 π.

(4) 把 10 本书随意放入两个抽屉（每个抽屉内都放），第一个抽屉放入 x 本，第二个抽屉放入 y 本.

2. 第 1 题各小题中是否有两个互相联系的变量？如果有，指出它们之间的联系. 当其中一个变量取定一个值时，另一个变量是否只有唯一确定的值与其对应？

3. 变量 x，y 之间的关系为 $y=x^2+1$，根据下表中 x 的值写出 y 的对应值.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

4. 举生活中的实例说明常量、变量以及变量之间的对应关系.

除了用数学式子表达的问题外，在一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个互相联系的变量，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与其对应.

思考

(1) 图 23.1-1 是某天的气温走势图，其中图上点的横坐标 t 表示时刻，纵坐标 T 表示温度（单位:℃），它们是两个变量. 在气温走势图中，对于 t 的每一个确定的值，T 都有唯一确定的值与其对应吗?

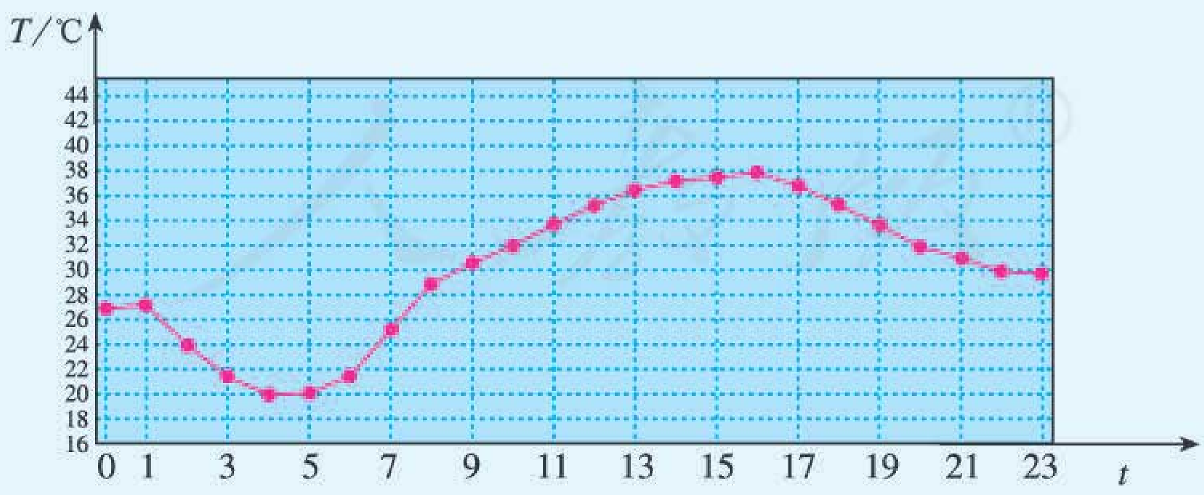


图 23.1-1

（2）表 23-2 是我国人口数统计表，其中年份与人口数可以分别记作两个变量 x 与 y. 对于表中 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的人口数对应值吗？

表 23-2　中国人口数统计表

x	y /亿
1982	10.32
1990	11.60
2000	12.95
2010	13.71

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量**（independent variable），y 是 x 的**函数**（function）. 如果当 $x=a$ 时，$y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

可以认为：在前面的问题（1）中，时间 t 是自变量，路程 s 是 t 的函数，当 $t=1$ 时，函数值 $s=60$，当 $t=2$ 时，函数值 $s=120$；在气温走势图中，时刻 t 是自变量，气温 T 是 t 的函数；在人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=2\ 010$ 时，函数值 $y=13.71$.

从上面可知，函数是刻画变量之间对应关系的数学模型，许多问题中变量之间的关系都可以用函数来表示.

例 1　匀速行驶的汽车油箱中有汽油 50 L. 如果不再加油，那么油箱中的油量 y（单位：L）随行驶路程 x（单位：

km）的增加而减少，耗油量为 0.1 L/km.

（1）写出表示 y 与 x 的函数关系的式子；

（2）指出自变量 x 的取值范围；

（3）汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少汽油？

解：（1）行驶路程 x 是自变量，油箱中的油量 y 是 x 的函数，它们的关系为

$$y=50-0.1x.$$

（2）仅从式子 $y=50-0.1x$ 看，x 可以取任意实数．但是考虑到耗油量 $0.1x$ 不能超过油箱中现有汽油量 50，即 $0.1x\leqslant 50$；而且这里 x 代表的实际意义为行驶路程，x 不能取负数. 因此，自变量 x 的取值范围是

$$0\leqslant x\leqslant 500.$$

（3）汽车行驶 200 km 时，油箱中的汽油量是函数 $y=50-0.1x$ 在 $x=200$ 时的函数值. 将 $x=200$ 代入 $y=50-0.1x$，得

$$y=50-0.1\times 200=30.$$

所以，汽车行驶 200 km 时，油箱中还有 30 L 汽油.

本例第（2）小题说明，确定自变量的取值范围时，不仅要考虑使函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

像 $y=50-0.1x$ 这样，用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，是描述函数的常用方法. 这种式子叫做函数的**解析式**（analytic expression）.

巩固运用23.2

1. 下列问题中哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出函数的解析式.

   (1) 改变正方形的边长 x，正方形的面积 S 随 x 的变化而变化.

   (2) 每支铅笔 0.5 元，购物款 y（单位：元）随所买铅笔的支数 x 的变化而变化.

   (3) 秀水村的耕地面积是 10^6 m^2，这个村人均占有耕地面积 y（单位：m^2）随这个村人数 n 的变化而变化.

   (4) 仓库中原有 200 kg 稻种，此后每时运出 40 kg 稻种，仓库中的稻种数量 y（单位：kg）随时间 t（单位：h，$0\leqslant t\leqslant 5$）的变化而变化.

2. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？对 x 的取值有什么限制？为什么？

   (1) $y=3x-5$；　(2) $y=\dfrac{x-2}{x-1}$；　(3) $y=\sqrt{x-1}$.

3. 游泳池中原有水 100 m^3，现以 20 m^3/h 的速度向内加水，游泳池中的水量 y（单位：m^3）随加水时间 x（单位：h，$0\leqslant x\leqslant 20$）的变化而变化.

   (1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子；

   (2) 加水 10 h 时，游泳池中的水量是多少？

23.1.2 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用气温走势图来表示气温与时刻的关系. 即使对于能列式表示的函数关系，如果也能画图表示，那么会使函数关系更直观.

例如，正方形的面积 S 与边长 x 的函数解析式为 $S=x^2$. 根据问题的实际意义，可知自变量 x 的取值范围是 $x>0$. 我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 S 的对应值，列表 23-3（为了画图方便，表中还算出了 x 取 0 时 S 的值）. 自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S，就确定了一个点 (x, S).

表 23-3

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	…
S	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	…

如图 23.1-2，在平面直角坐标系中，画出上面表格中各对数值所对应的点（用空心圈表示不在曲线上的点），然后用光滑曲线连接这些点. 所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应. 例如点 $(2, 4)$ 表示当 $x=2$ 时，$S=4$. 表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个. 但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置.

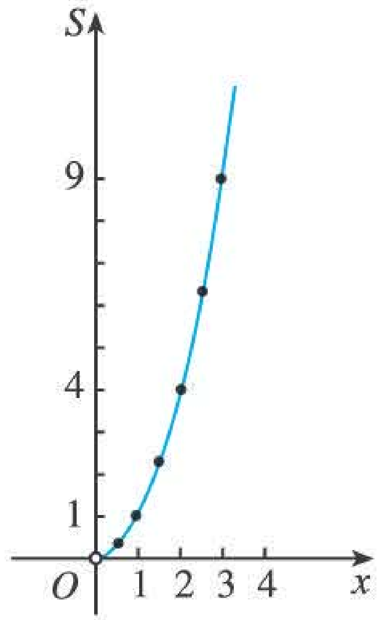


图 23.1-2

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的**图象**（graph）. 图 23.1-2 的曲线即函数

$$S=x^2 \ (x>0)$$

的图象. 通过图象可以数形结合地研究函数.

例 2 在下列式子中，对于 x 的每一个确定的值，y 有唯一的对应值，即 y 是 x 的函数. 画出这些函数的图象：

（1）$y=x+1$；　　（2）$y=\dfrac{6}{x}$ （$x>0$）.

解：（1）从式子 $y=x+1$ 可以看出，x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表 23-4.

表 23-4

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…

根据表中数值，在直角坐标系中描点 (x, y)，并用光滑曲线连接这些点，所得直线（图 23.1-3）即函数 $y=x+1$ 的图象.

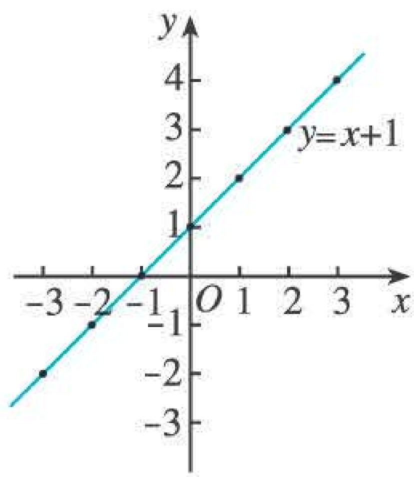


图 23.1-3

从函数图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时，$y=x+1$ 随之增大.

（2）$y=\dfrac{6}{x}$ $(x>0)$ 中 x 的取值范围是全体正实数，从中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表 23-5.

表 23-5

x	…	1	2	3	4	5	6	…
y	…	6	3	2	1.5	1.2	1	…

根据表中数值，在直角坐标系中描点 (x, y)，并用光滑曲

线连接这些点，所得曲线（图 23.1-4）即函数 $y=\frac{6}{x}$（$x>0$）的图象.

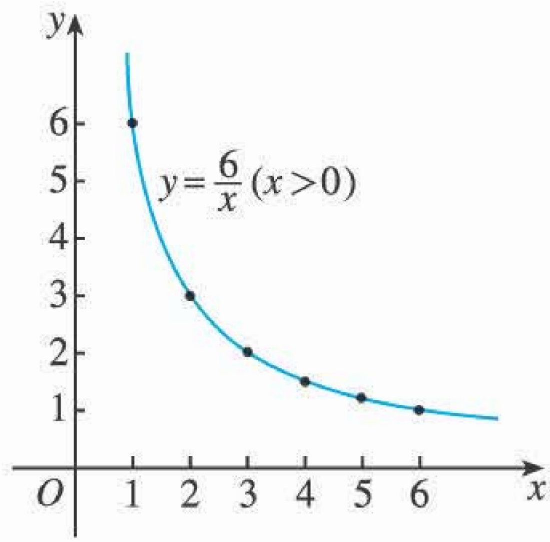


图 23.1-4

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时，$y=\frac{6}{x}$（$x>0$）随之减小.

归纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步，列表——表中给出一些自变量的值及其对应的函数值；

第二步，描点——在平面直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点；

第三步，连线——按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用光滑曲线连接起来.

巩固运用23.3

1. （1）画出函数 $y=x-1$ 的图象；

   （2）判断点 $A(-2,-3)$，$B(1,0)$，$C(2.5,2)$ 是否在函数 $y=x-1$ 的图象上.

2. （1）画出函数 $y=2x$ 的图象；

   （2）画出函数 $y=-2x$ 的图象；

   （3）函数 $y=2x$ 和 $y=-2x$ 的图象有什么相同点和不同点？

3. 画出函数 $y=\frac{6}{x}(x<0)$ 的图象.

*4. （1）画出函数 $y=x^2+1$ 的图象.

   （2）从图象中观察，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x>0$ 时呢？

在例 2 中，$y=x+1$ 和 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 是函数解析式，根据它们可以画出函数的图象. 一般地，函数的图象以图的形式直观地描述了变量之间的对应关系，从图象中可以获取许多信息，了解函数的变化趋势.

思考

图 23.1-5 中的曲线是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时刻 t 的变化而变化. 你从图象中得到了哪些信息？

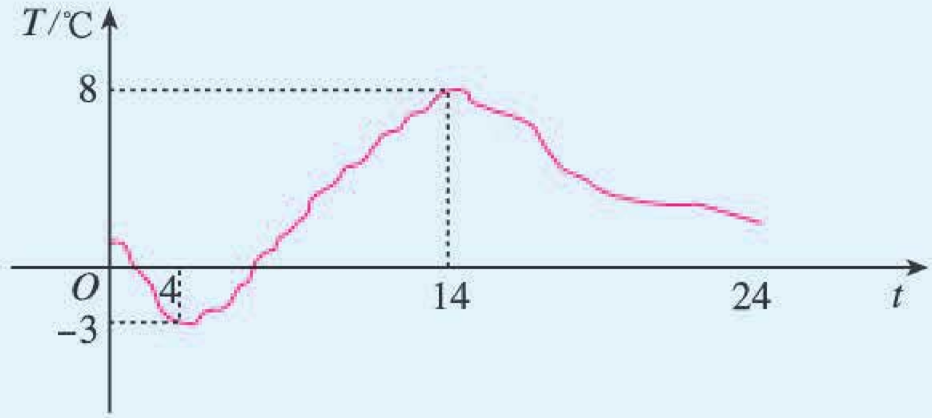


图 23.1-5

可以认为，时刻 t 是自变量，气温 T 是时刻 t 的函数，图 23.1-5 是这个函数的图象．由图象可知：

（1）这一天中早晨 4 时气温最低（-3 ℃），14 时气温最高（8 ℃）.

（2）从 0 时至 4 时，气温呈下降状态（即温度随时刻的增长而下降）；从 4 时到 14 时，气温呈上升状态；从 14 时至 24 时，气温又呈下降状态.

（3）我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少.

例 3 图 23.1-6 表示某长跑运动员的一段越野跑的练习过程，其中 x 表示跑步时间，y 表示所跑路程.

请根据图象回答下列问题：

（1）第 20 min 时运动员已跑了多长的路程？

（2）前 20 min 内运动员跑步的平均速度是多少？

（3）如何用解析式表示前 20 min 内运动员跑的路程与时间的关系？

（4）最后 20 min 内运动员跑的路程与平均速度各是多少？

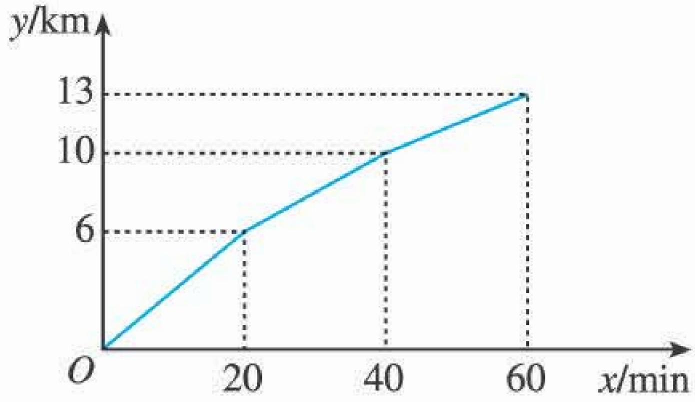


图 23.1-6

分析： 跑步路程 y 是时间 x 的函数，对于 x 的每一个确定的值，y 有唯一确定的对应值. 图象中点的坐标 (x, y) 反映了两个变量之间的对应关系.

解：（1）图象中横坐标为 20 的点的坐标是（20，6），由这点的纵坐标看出，第 20 min 时运动员已跑了 6 km.

（2）平均速度等于路程除以时间，前 20 min 内运动员跑步的平均速度为 $6\div 20=0.3$（km/min）.

（3）路程等于平均速度乘时间，前 20 min 内运动员跑的路程与时间的关系为 $y=0.3x$ $(0\leqslant x\leqslant 20)$.

（4）最后 20 min 内运动员跑的路程为 $13-10=3$（km），平均速度为 $3\div 20=0.15$（km/min）.

由上可知，写出函数解析式，或者列表格，或者画函数图象，都可以表示具体的函数. 这三种表示函数的方法，分别称为解析式法、列表法和图象法.

思考

从前面的几个例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？

巩固运用23.4

1. 如图是某地区一周的日平均气温变化图，根据图象回答问题：

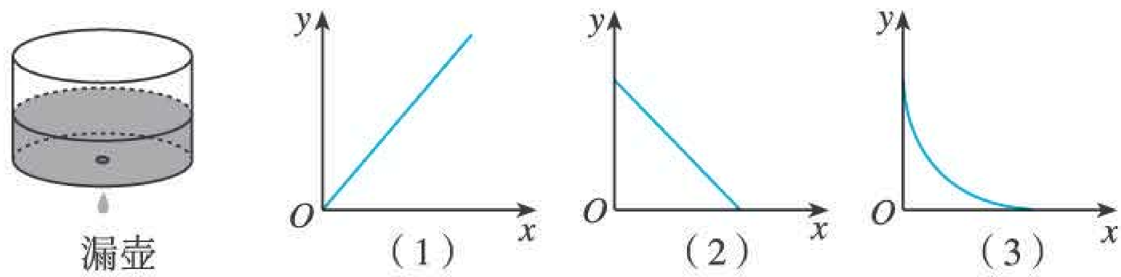
(1) 在这一周内，该地区的日平均气温从何时开始逐日上升，何时开始逐日下降？

(2) 在这一周内，哪一天的日平均气温最高？哪一天的日平均气温最低？

（第 1 题）

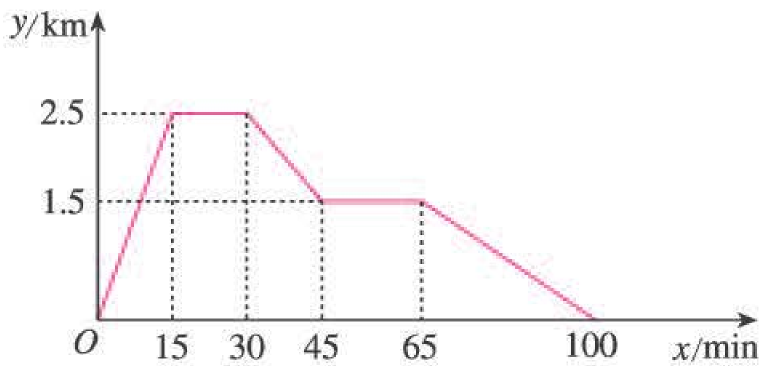
2. “漏壶”是一种古代计时器. 在它内部盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出. 壶内壁有刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间. 如果用 x 表示漏水时间，y 表示壶底到水面的高度. 下面哪个图象适合

表示 y 随 x 的增加而匀速变化的规律？



（第 2 题）

3. 张强家、文具店和体育场在同一直线上，下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家。图中 x 表示时间，y 表示张强离家的距离.



（第 3 题）

根据图象回答下列问题：

（1）体育场离张强家多远？张强从家到体育场用了多长时间？他在体育场停留了多长时间？

（2）文具店离张强家多远？张强在文具店停留了多长时间？

（3）张强从文具店回家的平均速度是多少？

（4）已知张强匀速跑步去体育场，写出表示这段时间内 y 与 x 的关系的函数解析式.

表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要同时使用几种方法.

例 4 一个水库的水位在最近 5 h 内持续匀速上涨. 表 23-6 记录了这 5 h 内 6 个时间点的水位高度，其中 t 表示时间，y 表示水位高度.

表 23-6

t/h	0	1	2	3	4	5
y/m	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5

（1）在平面直角坐标系中描出表中数据对应的点，这些点是否在一条直线上？由此你能发现水位变化有什么规律吗？

（2）水位高度 y 是否为时间 t 的函数？如果是，试写出函数解析式，并画出这个函数的图象.

（3）据估计这种上涨规律还会持续 2 h，预测再过 2 h 水位高度将为多少米.

解：（1）如图 23.1-7，描出表 23-6 中数据对应的点. 可以看出，这 6 个点在一条直线上. 由于水位匀速上涨，所以这 5 h 内其他时刻（如 $t=2.5$ h 等）及其水位高度所对应的点，也在这条直线上. 再结合表中数据，可以发现每时水位上升 0.3 m.

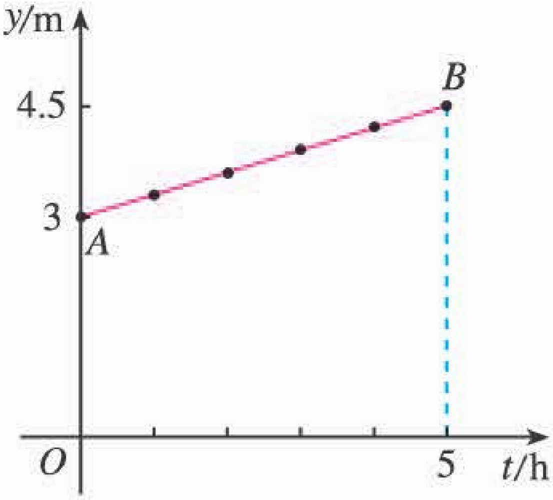


图 23.1-7

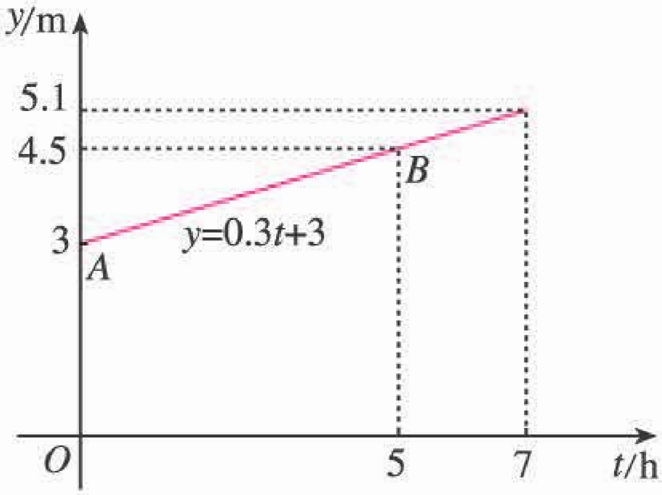


图 23.1-8

（2）由于水位在最近 5 h 内持续上涨，对于时间 t 的每一个确定的值，水位高度 y 都有唯一确定的值与其对应，因而 y 是 t 的函数. 因为开始时水位高度为 3 m，以后以 0.3 m/h 的速度上升，所以函数的解析式为

$$y=0.3t+3(0\leqslant t\leqslant 5).$$

其图象是图 23.1-8 中端点为点 $A(0, 3)$ 和点 $B(5, 4.5)$ 的线段 AB.

（3）如果水位的变化规律不变，则可利用上述函数预测，再过 2 h，即 $t=5+2=7$（h）时，水位高度

$$y=0.3\times 7+3=5.1\ (\text{m}).$$

把图 23.1-8 中的函数图象（线段 AB）向右延伸到 $t=7$ 所对应的位置，从图中也能看出这时的水位高度约为 5.1 m.

由本例可以看出，函数的不同表示法之间可以转化.

巩固运用23.5

1. 等边三角形的周长 l 是边长 a 的函数，用解析式法表示这个函数，并画出它的图象.

2. n 边形的内角和 m（单位：度）是边数 n 的函数，列表表示三角形、四边形、五边形和六边形的内角和，写出 m 关于 n 的函数解析式.

*3. 一条小船沿直线向码头匀速前进. 在 0 min，2 min，4 min，6 min 时，测得小船与码头的距离分别为 200 m，150 m，100 m，50 m. 小船与码头的距离 s 是时间 t 的函数吗？如果是，写出函数解析式，并画出函数图象. 如果船速不变，多长时间后小船到达码头？

阅读与思考

体脂率的计算

体脂率是指人体内脂肪量在体重中所占的比例，又称体脂百分数. 普通人的理想体脂肪率，男性为 14%～20%，女性为 17%～24%. 一般说，运动素质好的人体脂率偏低，运动员的体脂率比普通人低很多.

测定体脂率的方法有多种，下面的计算方法便于自我检测.

在不同时间，人的腰围（记为 l，单位：cm）和体重（记为 w，单位：kg）会有变化，由这些变量，可以计算出不同时间的体脂率．具体计算过程如下：

（1）计算参数 a，a 是腰围 l 的函数，$a=0.74\,l$；

（2）计算参数 b，b 是体重 w 的函数，对于男性 $b=0.082w+44.74$，对于女性 $b=0.082w+34.89$；

（3）计算身体中脂肪总量 d，$d=a-b$；

（4）计算体脂率 p，$p=\dfrac{d}{w}\times 100\%$．

下表记录了张力（男）四次测量腰围 l 和体重 w 的数值，请你把表格填充完整，并在计算 a，b 的过程中，认识其中的自变量、函数及其解析式．

体脂率测定表

	1月	2月	3月	4月
腰围 l/cm	70	73	71	69
体重 w/kg	50	52	51	48
参数 $a=0.74\,l$	51.8			
参数 $b=0.082\,w+44.74$	48.84			
脂肪总量 $d=a-b$	2.96			
体脂率 $p=\dfrac{d}{w}\times 100\%$	5.92%			

请你经常算算自己的体脂率，控制好脂肪增长．

23.2 正比例函数

问题 京沪高速铁路全长 1 318 km，设列车的平均速度为 300 km/h. 考虑以下问题：

(1) 乘京沪高铁列车，从始发站北京南站到终点站上海虹桥站，约需多少小时（结果保留小数点后一位）？

(2) 京沪高铁列车的行程 y（单位：km）与运行时间 x（单位：h）之间有何数量关系？

(3) 京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 后，是否已经过了距始发站 1 100 km 的南京南站？

分析：(1) 京沪高铁列车全程运行时间约需

$$1\,318 \div 300 \approx 4.4 \text{ (h)}.$$

(2) 京沪高铁列车的行程 y 是运行时间 x 的函数，函数解析式为

$$y = 300x \quad (0 \leqslant x \leqslant 4.4).$$

(3) 京沪高铁列车从北京南站出发 2.5 h 的行程，是当 $x = 2.5$ 时函数 $y = 300x$ 的值，即

$$y = 300 \times 2.5 = 750 \text{ (km)}.$$

这时列车尚未到达距始发站 1 100 km 的南京南站.

以上我们用函数 $y = 300x$ $(0 \leqslant x \leqslant 4.4)$ 对京沪高铁列车的行程问题进行了讨论. 尽管实际情况可能会与此不完全相同，但这个函数基本上反映了列车的行程与运行时间之间的对应规律.

思考

下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式。这些函数解析式有哪些共同特征？

（1）正五边形的周长 l 随边长 a 的变化而变化．

（2）铁的密度约为 $7.9\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，铁块的质量 m（单位：g）随它的体积 V（单位：$\mathrm{cm^3}$）的变化而变化．

（3）每个练习本的厚度为 0.5 cm，一些练习本摞在一起的总厚度 h（单位：cm）随练习本的本数 n 的变化而变化．

（4）冷冻一个 0 ℃的物体，使它每分下降 2 ℃，物体的温度 T（单位：℃）随冷冻时间 t（单位：min）的变化而变化．

在上面的问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

（1）$l=5a$；（2）$m=7.9V$；

（3）$h=0.5n$；（4）$T=-2t$．

正如函数 $y=300x$ 一样，上面这些函数都是常数与自变量的积的形式．

一般地，形如 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的函数，叫做**正比例函数**（proportional function），其中 k 叫做比例系数．

巩固运用23.6

1. 在下列式子中，哪些表示 y 是 x 的正比例函数？

(1) $y=-0.1x$；　　(2) $y=\frac{x}{2}$；

(3) $y=2x^2$；　　(4) $y^2=4x$.

2. 列式表示下列问题中的 y 与 x 的函数关系，并指出哪些是正比例函数.

(1) 圆的半径为 x cm，周长为 y cm.

(2) 小张一年内平均每月收入 x 元，他这年（12 个月）的总收入为 y 元.

(3) 一个长方体的长为 2 cm，宽为 1.5 cm，高为 x cm，体积为 y cm^3.

(4) 某打印店的传真收费标准为 A4 纸每页 2 元，小华去店里传真了 x 页 A4 纸文件，花费 y 元.

(5) 小涛在一场篮球比赛中共投入 x 个两分球和 3 个三分球，这些球共得 y 分.

(6) 某商场举行促销活动，所有商品按原价的八折销售. 某商品原价为 x 元/件，在促销活动中的价格为 y 元/件.

下面我们研究正比例函数的图象.

例 1 画出下列正比例函数的图象：

(1) $y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=-1.5x$，$y=-4x$.

解：（1）函数 $y=2x$ 中自变量 x 可为任意实数. 表 23-7 是 y 与 x 的几组对应值.

表 23-7

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

如图 23.2-1，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点. 将这些点连接起来，得到一条经过原点和第三、第一象限的直线. 它就是函数 $y=2x$ 的图象.

用同样的方法，可以得到函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象（图 23.2-1）. 它也是一条经过原点和第三、第一象限的直线.

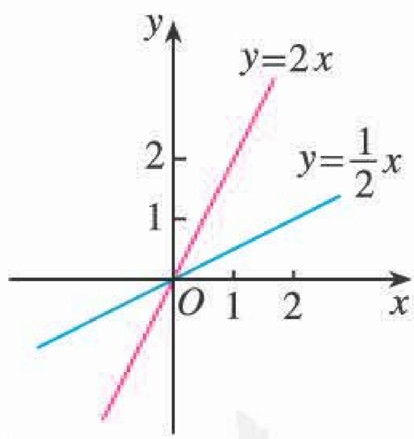


图 23.2-1

（2）函数 $y=-1.5x$ 中自变量 x 可为任意实数. 表 23-8是 y 与 x 的几组对应值.

表 23-8

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	4.5	3	1.5	0	-1.5	-3	-4.5	…

如图 23.2-2，在直角坐标系中描出以表中的值为坐标的点．将这些点连接起来，得到一条经过原点和第二、第四象限的直线，它就是函数 $y=-1.5x$ 的图象.

用同样的方法，可以得到函数 $y=-4x$ 的图象（图 23.2-2）. 它也是一条经过原点和第二、第四象限的直线.

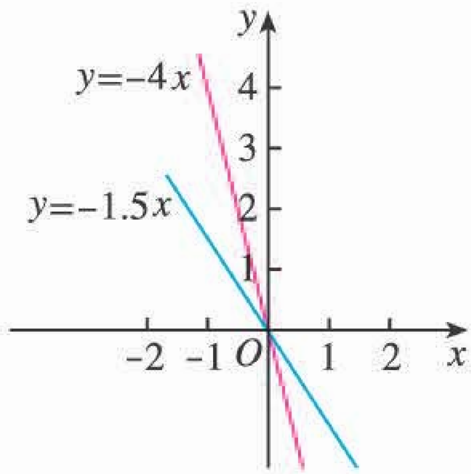


图 23.2-2

以上 4 个函数的图象都是经过原点的直线，其中函数 $y=2x$ 和 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象经过第三、第一象限，从左向右上升；函数 $y=-1.5x$ 和 $y=-4x$ 的图象经过第二、第四象限，从左向右下降.

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线 $y=kx$. 当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第三、第一象限，从左向右上升，即**随着 x 的增大 y 也增大**；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第二、第四象限，从左向右下降，即**随着 x 的增大 y 反而减小**.

思考

经过原点与点（1，k）（k 是常数，$k\neq 0$）的直线是哪个函数的图象？画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？

因为两点确定一条直线，所以可用两点法画正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象. 一般地，过原点和点（1，k）（k 是常数，$k\neq 0$）的直线，是正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象.

例 2 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2.5x$ 和 $y=-5x$ 的图象.

解： 如图 23.2-3，过原点和点（1，2.5）作直线，即函数 $y=2.5x$ 的图象；过原点和点（1，-5）作直线，即函数 $y=-5x$ 的图象.

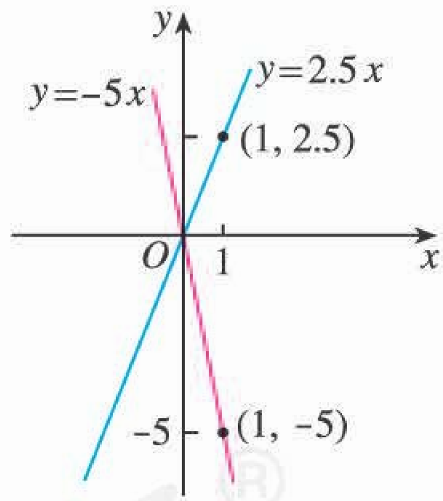


图 23.2-3

巩固运用23.7

1. 用你认为最简单的方法画出下列函数的图象，并说明当 x 从小到大变化时，y 怎样变化：

（1）$y=x$；　　（2）$y=-x$；

（3）$y=\frac{1}{4}x$；　　（4）$y=-\frac{1}{4}x$.

2. 一列火车以 90 km/h 的速度匀速前进．求它的行驶路程 y（单位：km）关于行驶时间 x（单位：h）的函数解析式，并画出函数图象．

3. 如果把王军在一场篮球比赛中投中三分球的次数记作 x，把他在这场比赛中投三分球所得分数记作 y，那么 y 是 x 的函数吗？如果是，写出函数解析式，并画出函数图象．由图象说明 y 随 x 的变化规律．

23.3 一次函数

问题 某登山队大本营所在地的气温为 5 ℃，海拔每升高 1 km 气温下降 6 ℃. 登山队员由大本营向上登高 x km 时，他们所在位置的气温是 y ℃. 试用函数解析式表示 y 与 x 的关系.

分析：y 随 x 变化的规律是：从大本营向上，当海拔增加 x km 时，气温 y 从 5 ℃减少 $6x$ ℃. 因此 y 是 x 的函数，解析式为

$$y=5-6x.$$

这个函数也可以写为

$$y=-6x+5.$$

当登山队员由大本营向上登高 0.5 km 时，他们所在位置的气温就是当 $x=0.5$ 时函数 $y=-6x+5$ 的值，即 $y=-6\times0.5+5=2$.

思考

在下列问题中，变量之间的对应关系是函数关系吗？如果是，请写出函数解析式．这些函数解析式有哪些共同特征？

(1) 有人发现，在 20～25 ℃时蟋蟀每分鸣叫次数 c 与温度 t（单位:℃）有关，即 c 的值约是 t 的 7 倍减

35 所得的差.

(2) 一种计算成年人标准体重 G（单位：kg）的方法是：G 的值等于身高值 h（单位：cm）减常数 105 所得的差.

(3) 某城市的市内电话的月收费额 y（单位：元）包括月租费 22 元和拨打电话 x min 的计时费（按 0.1 元/min 收取）.

(4) 把一个长 10 cm、宽 5 cm 的长方形的长减少 x cm，宽不变，长方形的面积 y（单位：cm^2）随 x 的变化而变化.

在上面的问题中，表示变量之间关系的函数解析式分别为

(1) $c=7t-35$ $(20\leqslant t\leqslant 25)$；(2) $G=h-105$；

(3) $y=0.1x+22$； (4) $y=-5x+50$ $(0\leqslant x<10)$.

正如函数 $y=-6x+5$ 一样，上面这些函数都是常数 k 与自变量的积与常数 b 的和的形式.

一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做**一次函数**（linear function）. 当 $b=0$ 时，$y=kx+b$ 即 $y=kx$，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.

例 1 运动时，心率（每分心跳次数）应在最高和最低的安全运动心率范围内. 如达不到最低心率，说明运动强度不够；如果超过最高心率，说明运动强度太大. 不同年龄的

青少年的安全运动心率范围不同，一般的计算公式为：最低心率 =（220－年龄数）×0.6，最高心率＝（220－年龄数）×0.8.

（1）把年龄数记作 x，最低心率记作 y_1，最高心率记作 y_2. y_1 和 y_2 是 x 的函数吗？如果是，写出函数解析式.

（2）张华 15 岁，她的安全运动心率范围是多少？

解：（1）y_1 和 y_2 都是 x 的函数. 最低心率 $y_1=(220-x)\times0.6$，即 $y_1=-0.6x+132$；最高心率 $y_2=(220-x)\times0.8$，即 $y_2=-0.8x+176$.

（2）当 $x=15$ 时，$y_1=-0.6\times15+132=123$，$y_2=-0.8\times15+176=164$.

所以张华的安全运动心率范围是 123～164 次/分.

巩固运用23.8

1. 下列函数中哪些是一次函数，哪些又是正比例函数？

（1）$y=-8x+3$；（2）$y=-\dfrac{8}{x}+3$；

（3）$y=5x+6$；（4）$y=5x^2-6$；

（5）$y=-4x$；（6）$y=-\dfrac{1}{4}x$.

2. 一次函数 $y=kx+3$，当 $x=1$ 时，$y=5$，求 k 的值.

3. 一个小球由静止开始沿一个斜坡向下滚动，其速度每秒增加 2 m/s.

（1）求小球速度 v（单位：m/s）关于时间 t（单位：s）的函数解析式．它是一次函数吗？是正比例函数吗？

（2）求第 2.5 s 时小球的速度．

例 2 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=-3x$ 和 $y=-3x+3$ 的图象．

解： 在函数 $y=-3x$ 和 $y=-3x+3$ 中，自变量 x 可以是任意实数，列表（表 23-9）表示几组对应值．

表 23-9

x	-2	-1	0	1	2
$y=-3x$	6	3	0	-3	-6
$y=-3x+3$	9	6	3	0	-3

画出函数 $y=-3x$ 和 $y=-3x+3$ 的图象．（图 23.3-1）

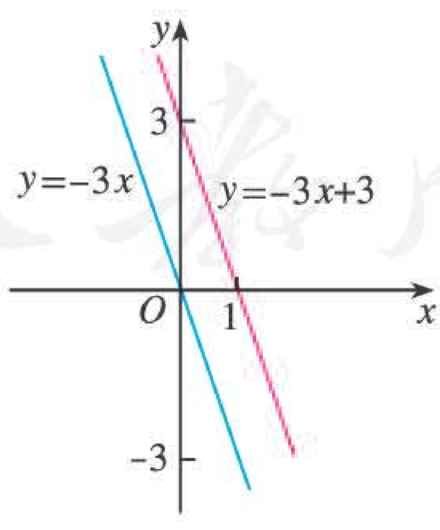


图 23.3-1

思考

比较上面两个函数图象的相同点与不同点，填出你的观察结果：

这两个函数的图象形状都是_____，并且倾斜程度_____. 函数 $y=-3x$ 的图象经过原点，函数 $y=-3x+3$ 的图象与 y 轴交于点_____，即它可以看作由直线 $y=-3x$ 向_____平移_____个单位长度而得到.

比较两个函数解析式，你能说出为什么两个函数的图象有上述关系吗？

联系上面结果，考虑一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象是什么形状，它与直线 $y=kx(k\neq0)$ 有什么关系.

比较一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 与正比例函数 $y=kx(k\neq0)$的解析式，容易得出：

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象可以由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到（当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移）. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象也是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$.

例 3 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=2x-1$ 和 $y=-0.5x+1$ 的图象.

分析： 由于一次函数的图象是直线，因此只要确定直线上的两个点就能画出它.

解： 列表(表 23-10)表示当 $x=0$，$x=1$ 时两个函数的

对应值.

表 23-10

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

如图 23.3-2，过点 $(0,\ -1)$ 与点 $(1,\ 1)$ 画出直线 $y=2x-1$；过点 $(0,\ 1)$ 与点 $(1,\ 0.5)$ 画出直线 $y=-0.5x+1$. 先画直线 $y=2x$ 与 $y=-0.5x$，再分别平移它们，也能得到直线 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$.

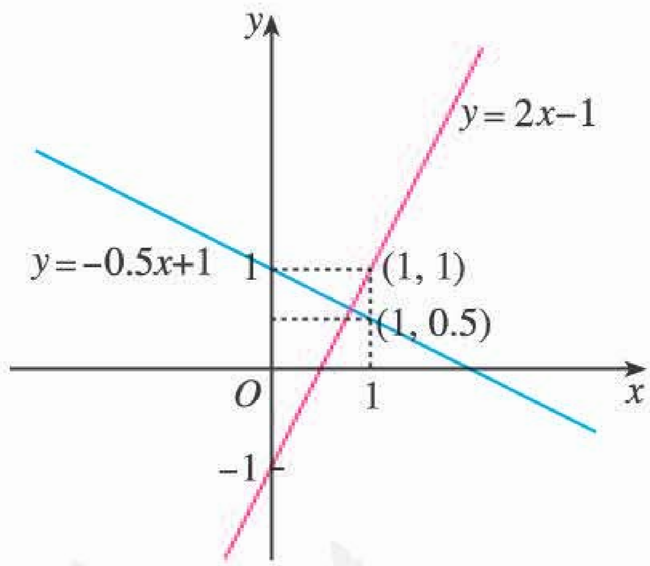


图 23.3-2

观察上面两个一次函数的图象，可以发现：

当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右上升；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右下降. 事实上，所有一次函数都符合这一规律. 由此可知，一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）具有如下性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

前面，我们先通过观察发现图象（形）的规律，再根据这些规律得出关于数值大小的性质，这种数形结合的研究方法在数学学习中很重要.

巩固运用23.9

1. 分别在同一平面直角坐标系中画出下列（1）（2）中各函数的图象，并指出每小题中两个函数的图象有什么关系.

   （1）$y=x-1$，$y=x$；

   （2）$y=-2x+2$，$y=-2x$.

2. 分别在同一平面直角坐标系中画出下列（1）（2）中各函数的图象，并指出每小题中三个函数的图象的共同之处.

   （1）$y=\frac{1}{2}x+2$，$y=x+2$，$y=2x+2$；

   （2）$y=-\frac{1}{2}x-2$，$y=-x-2$，$y=-2x-2$.

3. （1）直线 $y=2x-3$ 与 x 轴的交点坐标为______，与 y 轴的交点坐标为_____，图象经过_____象限，y 随 x 的增大而______.

   （2）直线 $y=-2x-3$ 与 x 轴的交点坐标为______，与 y 轴的交点坐标为_____，图象经过_____象限，y 随 x 的增大而______.

例 4　已知一次函数的图象过点（3，5）与（−4，−9），求这个一次函数的解析式.

分析：求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式，关键是求出 k，b 的值. 因为函数的图象过点（3，5）与（−4，−9），所以这两点的坐标必满足函数的解析式. 因此可以列出关于 k，b 的二元一次方程组，并求出 k，b.

解：设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$）.

因为 $y=kx+b$ 的图象过点（3，5）和（−4，−9），所以

$$\begin{cases}3k+b=5,\\-4k+b=-9.\end{cases}$$

解这个方程组，得

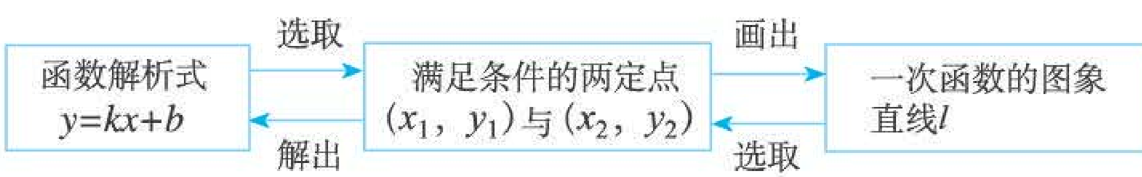
$$\begin{cases}k=2,\\b=-1.\end{cases}$$

因此，这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$.

像例 4 这样先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而得出函数解析式的方法，叫做**待定系数法**.

由于一次函数 $y=kx+b$ 中有 k 和 b 两个待定系数，所以用待定系数法时需要根据两个条件列二元一次方程组（以 k 和 b 为未知数）. 解方程组后就能具体写出一次函数的解析式.

例 3 与例 4 从两方面说明：



巩固运用23.10

1. 已知一次函数的图象经过点（9，0）和点（24，20），写出函数解析式.
2. 对于某个一次函数，当自变量为 1 时，函数值为 3；当自变量为 −1 时，函数值为 −1. 求这个函数的解析式.

*3. 平面上有 $A(1,\ 2)$，$B(2,\ 3)$，$C(2,\ 4)$ 三点，直线 AB 和 AC 各是哪个一次函数的图象？自变量 x 为何值时这两个函数的函数值相等？

做一件事情，有时有不同的实施方案. 比较这些方案，从中选择最佳方案作为行动计划，是非常必要的. 在选择方案时，往往需要从数学角度进行分析，涉及变量的问题常用到函数.

例 5 表 23-11 显示了 A，B 两种上宽带网的收费方式.

表 23-11

收费方式	月使用费/元	包时上网时间/h	超时费/（元·min^{-1}）
A	30	25	0.05
B	50	50	0.05

选取哪种方式能节省上网费？

分析： 在方式 A，B 中，上网时间是影响上网费的变量.

设月上网时间为 x h，则方案 A，B 的收费金额 y_1，y_2

都是 x 的函数. 要比较它们，需在 $x\geqslant 0$ 的条件下，考虑何时 (1) $y_1=y_2$，(2) $y_1<y_2$，(3) $y_1>y_2$.

解： 在方式 A 中，月使用费 30 元与包时上网时间 25 h 是常量. 考虑收费金额时，要把上网时间分为 25 h 以内（含 25 h）和超过 25 h 两种情况，得到的是如下的函数

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 30+0.05\times 60(x-25), & x>25.\end{cases}$$

化简，得

$$y_1=\begin{cases}30, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 3x-45, & x>25.\end{cases}$$

这是一个分段函数，前一段函数值是常数 30，后一段是一次函数，它的图象如图 23.3-3 所示.

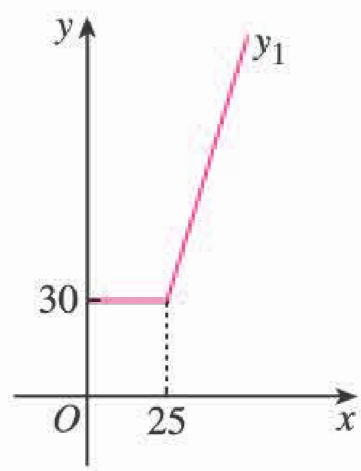


图 23.3-3

类似地，在方式 B 中，月使用费 50 元与包时上网时间 50 h 是常量. 考虑收费金额时，要把上网时间分为 50 h 以内（含 50 h）和超过 50 h 两种情况，得到的是如下的分段函数

$$y_2=\begin{cases}50, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 50+0.05\times 60(x-50), & x>50.\end{cases}$$

化简，得

$$y_2=\begin{cases}50, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 3x-100, & x>50.\end{cases}$$

它的图象与前一个分段函数类似，在同一直角坐标系中，两个函数的图象如图 23.3-4 所示. 从图中可以看出，两个函

数图象交于点 P，解方程 $3x-45=50$，得点 P 的横坐标 $x=31\frac{2}{3}$.

从图 23.3-4 可以看出，当上网时间 $x=31\frac{2}{3}$时，$y_1=y_2$，方式 A，B 收费相等；当上网时间 $0\leqslant x<31\frac{2}{3}$时，$y_1<y_2$，选择方案 A 省钱；当上网时间 $x>31\frac{2}{3}$时，$y_1>y_2$，选择方式 B 省钱.

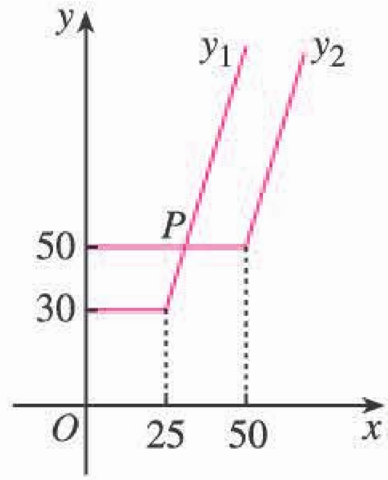


图 23.3-4

巩固运用23.11

1. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y_1=2x$ 和 $y_2=-x+3$ 的图象，根据两图象的位置判断：
   (1) 何时 $y_1=y_2$；　(2) 何时 $y_1<y_2$；
   (3) 何时 $y_1>y_2$.
2. 一个试验室在 0：00—2：00 保持 20 ℃的恒温，在 2：00—4：00 匀速升温，每时升高 5 ℃. 写出试验室温度 y（单位:℃）关于时间 x（单位：h，$0\leqslant x\leqslant 4$）的函数解析式，并画出函数图象.
3. 某水库原水深 15 m，因连续降雨，水库水位以 0.25 m/h的速度不断匀速上涨. 以 x（单位：h，$0\leqslant x\leqslant 8$）表示降雨时间，y（单位：m）表示水库水深，写出 y 关于 x 的函数解析式，并画出函数图象.

23.4 一次函数与二元一次方程（组）

二元一次方程与一次函数有着密切的联系. 例如，方程 $2x-y=1$ 也可以写为 $y=2x-1$，方程 $0.5x+y=1$ 也可以写为 $y=-0.5x+1$. 一般地，因为每个含有未知数 x 和 y 的二元一次方程，都可以改写为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的形式，所以每个二元一次方程都对应一个一次函数.

一个二元一次方程有无数组解. 例如，方程 $2x-y=1$ 的解有 $x=-1$，$y=-3$；$x=0$，$y=-1$；$x=1$，$y=1$；…… 以这些解为坐标的点，都在一次函数 $y=2x-1$ 的图象即直线 $y=2x-1$上. 反过来，直线 $y=2x-1$ 上每个点的坐标（x，y），都是方程 $2x-y=1$ 的解. 一般地，每个二元一次方程都对应一个一次函数，这个函数的图象（一条直线）上每个点的坐标（x，y），都是这个方程的解.

二元一次方程组由两个二元一次方程组成，它对应两个一次函数，于是也对应两条直线. 从“数”的角度看，解二元一次方程组，是求两个方程的公共解，这相当于求自变量为何值时两个函数值相等，以及这个函数值是多少；从“形”的角度看，解这样的方程组，相当于确定两条直线的公共点的坐标.

例 1 号探测气球从海拔 5 m 处出发，以 1 m/min 的速

度上升. 与此同时，2 号探测气球从海拔 15 m 处出发，以 0.5 m/min 的速度上升. 两个气球都上升了 1 h.

（1）用式子分别表示两个气球所在位置的海拔 y（单位：m）关于上升时间 x（单位：min）的函数关系；

（2）在某时刻两个气球能否位于同一高度？如果能，这时气球上升了多长时间？位于什么高度？

分析： 由于气球的速度已知，根据海拔和速度、时间之间的关系，容易列出气球的海拔 y 关于时间 x 的函数解析式，但要注意其中自变量 x 的取值范围. 当两个气球位于同一高度时，对于自变量 x（时间）在这时的值，两个函数值 y（海拔）相等.

解：（1）气球上升时间 x 满足 $0\leqslant x\leqslant 60$.

对于 1 号气球，函数解析式为 $y=x+5$（$0\leqslant x\leqslant 60$）；

对于 2 号气球，函数解析式为 $y=0.5x+15$（$0\leqslant x\leqslant 60$）.

（2）在某时刻两个气球位于同一高度，就是说这一时刻两个函数的函数值相等. 解方程组

$$\begin{cases} y=x+5, \\ y=0.5x+15, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x-y=-5, \\ 0.5x-y=-15, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=20, \\ y=25. \end{cases}$ 由此可知，当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔25 m的高度.

我们也可以用一次函数的图象解释上述问题的解答. 如图 23.4-1，在同一直角坐标系中，画出一次函数 $y=x+5$ 和 $y=0.5x+15$ 的图象. 这两条直线的交点坐标为（20，25），这也说

明当上升 20 min 时，两个气球都位于海拔25 m的高度.

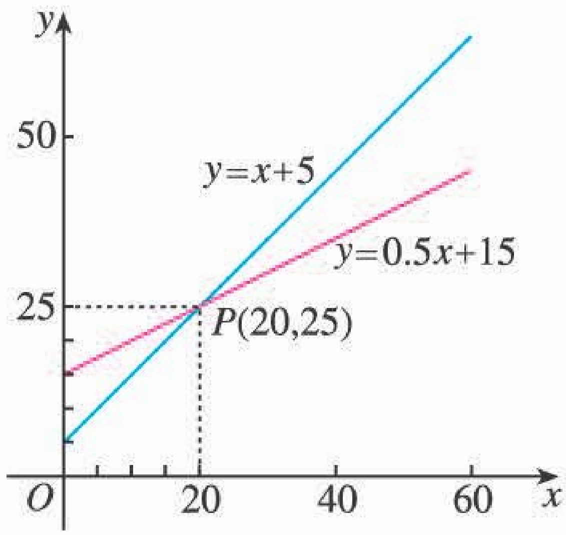


图 23.4-1

归纳

方程（组）与函数之间互相联系，从函数的角度可以把它们统一起来．解决问题时，应根据具体情况灵活地把它们结合起来考虑.

巩固运用23.12

1. 当自变量 x 取何值时，函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等？这个函数值是多少？
2. 在越野滑雪比赛的某一时刻，运动员 A 距终点 9 km，运动员 B 距终点 8.5 km，A，B 分别以 0.3 km/min 和 0.25 km/min 的速度继续匀速滑行.

   (1) 分别写出 A，B 与终点的距离 y（单位：km）关于滑行时间 x（单位：min）的函数关系；

（2）A 能否追上 B？如果能，这时他们滑行了多长时间？距终点多远？

3. 某电信公司对手机的收费标准如下表：

	月租费	通话每分收费
A 类	18 元	0.1 元
B 类	无	0.2 元

（1）两种收费标准的用户每月的手机费 y（单位：元）关于通话时间 x（单位：min）的函数解析式分别是什么？

（2）通话时间多长时，按两类收费标准缴纳的费用一样？

数学活动

1. 根据下表的数据，在直角坐标系中画出世界人口增长曲线图.

世界人口数统计表

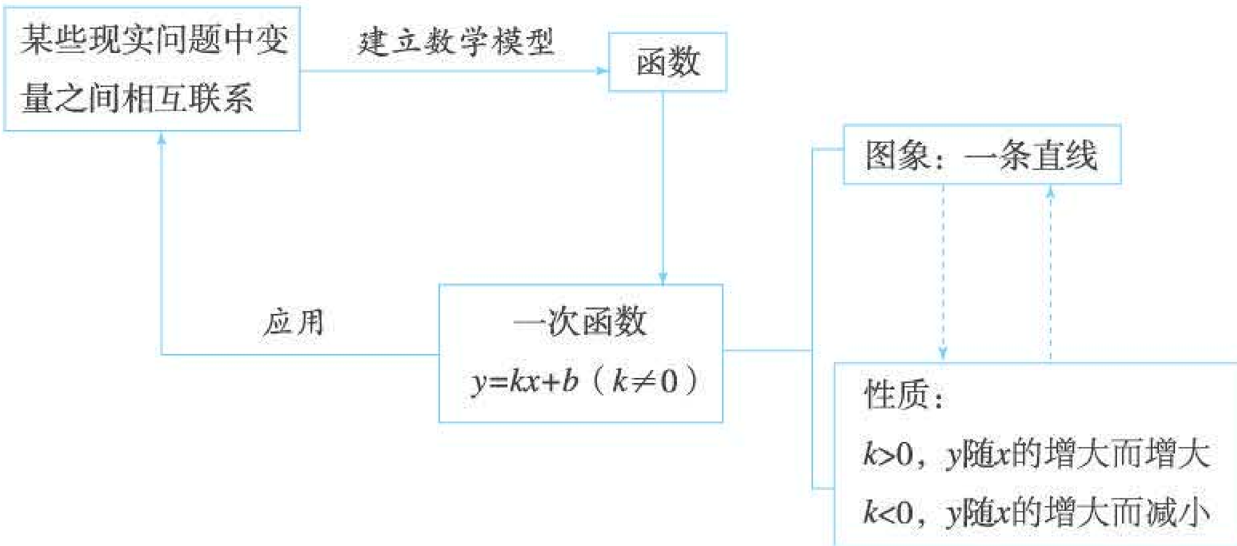
年份 x	1960	1974	1987	1999	2010
人口数 y/亿	30	40	50	60	69

2. 选择一个近似于人口增长曲线的一次函数，写出它的解析式.

3. 按照这样的增长趋势，估计 2020 年的世界人口数.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 客观世界中存在大量的变量，函数是描述变量之间对应关系的数学模型. 举例说明两个变量 x 和 y 满足什么条件时，y 是 x 的函数.

2. 变量间的对应关系可以用不同的方法来表示，函数有哪些表示法？它们各有什么优点？请举例说明.

3. 一次函数是一种最基本的函数，我们可以数形结合地认识它. $y=kx+b$ 的图象是什么图形？常数 k 对函数$y=kx+b$ 的图象有什么影响？由此能说明 y 与 x 之间的什么变化规律？

4. 待定系数法是确定函数解析式的方法之一，已知一次函数的图象上的两个点的坐标，怎样求一次函数的解析式？

5. 函数有广泛的应用，举例说明如何利用函数解决实际问题.

复习题 23

复习巩固

1. 小亮现已存款 200 元，为赞助“希望工程”，他计划今后三年每月存款 10 元．存款总金额 y（单位：元）将随时间 x（单位：月）的变化而改变，指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数解析式．

2. 用描点法画出函数 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的图象．

3. 判断下列各点是否在函数 $y=2x+6$ 的图象上．这个函数的图象与坐标轴交于何处？

$$(1,8),\ (-5,-4),\ (-7,20),\ (2,10).$$

4. 填空：

（1）直线 $y=4x$ 经过第________象限，y 随 x 的增大而________；

（2）直线 $y=-\dfrac{2}{3}x+1$ 经过第________象限，y 随 x 的增大而________．

5. 画出函数 $y=-0.5x$ 和 $y=3x-2$ 的图象．

6. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式：

（1）y 与 x 成正比例，当 $x=5$ 时，$y=6$；

（2）直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3,6)$ 与点 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$．

7. 试根据函数 $y=3x-15$ 的性质或图象，确定 x 取何值时：

(1) $y=0$；

(2) $y>0$；

(3) $y<0$.

8. 修筑一条高速公路的工程预算为 300 万元/km，设公路总长 x km，计划的总成本 y（单位：万元）与 x 是什么关系？写出表示这一关系的解析式，并画出图象.

综合运用

9. 在某火车站托运物品时，不超过 1 kg 的物品需付 2 元，以后每增加 1 kg（不足 1 kg 按 1 kg 计）需增加托运费 0.5 元．设托运 p kg（p 为整数）物品的费用为 c 元，试写出 c 的计算公式.

10. 某水果批发市场规定，批发苹果不少于 100 kg 时，批发价为 2.5 元/kg. 小王携带现金 3 000 元到这市场采购苹果，并以批发价买进. 设购买的苹果为 x kg，小王付款后还剩余现金 y 元，试写出 y 关于 x 的函数解析式，并指出自变量 x 的取值范围.

11. 已知等腰三角形的周长为 20.

(1) 写出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式（x 为自变量）；

(2) 写出自变量的取值范围；

(3) 在平面直角坐标系中，画出这个函数的图象.

12. 已知点 $A(8,0)$ 及在第一象限的动点 $P(x,y)$，且 $x+y=10$. 设△OPA 的面积为 S.

(1) 求 S 关于 x 的函数解析式；

(2) 求 x 的取值范围；

(3) 当 $S=12$ 时，求点 P 的坐标；

(4) 画出函数 S 的图象.

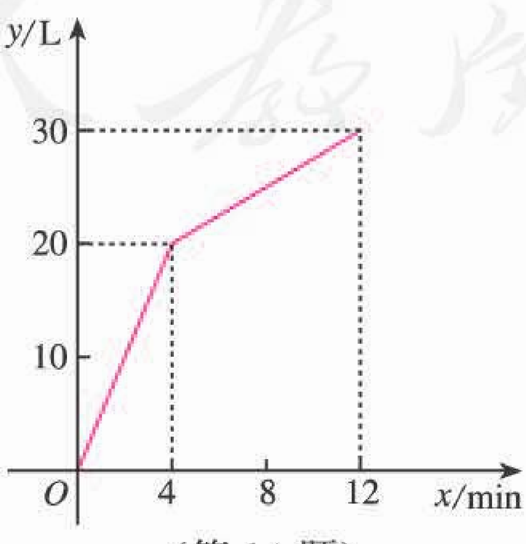
13. A，B 两地相距 25 km. 甲 8：00 由 A 地出发骑自行车去 B 地，平均速度为 10 km/h；乙 9：30 由 A 地出发乘汽车也去 B 地，平均速度为 40 km/h.

(1) 分别写出两个人的行程关于时刻的函数解析式；

(2) 乙能否在途中超过甲？如果能超过，何时超过？

拓广探索

14. 一个有进水管与出水管的容器，从某时刻开始 4 min内只进水不出水，在随后的 8 min 内既进水又出水，每分的进水量和出水量是两个常数. 容器内的水量 y（单位：L）与时间 x（单位：min）之间的关系如图所示.



（第 14 题）

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

(2) 当 $4 < x \leqslant 12$ 时，求 y 关于 x 的函数解析式.

(3) 每分进水、出水各多少升?

15. 一次越野赛跑中，小明和小刚同时出发，当小明跑了 1 600 m 时，小刚跑了 1 450 m. 此后两人分别以 a m/s 和 b m/s 的速度匀速跑，100 s 时小刚追上小明，200 s 时小刚到达终点，300 s 时小明到达终点.

(1) a 和 b 各是多少?

(2) 这次越野赛跑的全程为多少米?

第二十四章　数据的分析

用样本估计总体是统计的基本思想. 当所要考察的总体中个体很多或者考察会对有关对象带有破坏性时，我们常常通过用样本估计总体的方法来了解总体. 看下面的问题：

农科院为了选出适合某地种植的甜玉米种子，对甲、乙两个品种各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量(见下表). 根据这些数据，应为农科院选择甜玉米种子提出怎样的建议呢？

甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院选择种子时所关心的问题. 如何考察一种甜玉米的产量和产量的稳定性呢？这要用到本章将要学习的用样本的平均数和方差估计总体的平均数和方差等知识.

通过本章的学习，你将对数据的作用有更多的认识，对用样本估计总体的思想有更深的体会.

品种	各试验田每公顷产量/t				
甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65
	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49
	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

$\overline{x}_{甲}\approx7.537$　$\overline{x}_{乙}\approx7.515$

$s^2_{甲}\approx0.010$　$s^2_{乙}\approx0.002$

24.1 数据的集中趋势

当我们收集到数据后，通常是用统计图表整理和描述数据. 为了进一步获取信息，还需要对数据进行分析. 以前通过数据计算，我们学习了平均数，知道它可以反映一组数据的平均水平. 本节我们将在实际问题情境中，进一步探讨平均数的统计意义，并学习中位数、众数和方差等另外几个统计中常用来刻画数据特征的量，了解它们在数据分析中的重要作用.

24.1.1 平均数

问题 1 一家公司打算招聘一名英文翻译. 对甲、乙两名应试者进行了听、说、读、写的英语水平测试，他们的各项成绩（百分制）如表 24-1 所示.

表 24-1

应试者	听	说	读	写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

（1）如果这家公司想招一名综合能力较强的翻译，计算两名应试者的平均成绩. 从他们的成绩看，应该录取谁？

（2）如果这家公司想招一名笔译能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 $2:1:3:4$ 的比确定，计算两

名应试者的平均成绩. 从他们的成绩看，应该录取谁?

对于问题（1），根据平均数公式，甲的平均成绩为

$$\frac{85+78+85+73}{4}=80.25,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5.$$

因为甲的平均成绩比乙高，所以应该录取甲.

对于问题（2），听、说、读、写成绩按照 2∶1∶3∶4 的比确定，这说明各项成绩的“重要程度”有所不同，读、写的成绩比听、说的成绩更加“重要”. 因此，甲的平均成绩为

$$\frac{85\times2+78\times1+85\times3+73\times4}{2+1+3+4}=79.5,$$

乙的平均成绩为

$$\frac{73\times2+80\times1+82\times3+83\times4}{2+1+3+4}=80.4.$$

因为乙的平均成绩比甲高，所以应该录取乙.

上述问题（1）是利用平均数的公式计算平均成绩，其中的每个数据被认为同等重要. 而问题（2）是根据实际需要对不同类型的数据赋予与其重要程度相应的比重，其中的 2，1，3，4 分别称为听、说、读、写四项成绩的**权**（weight），相应的平均数 79.5，80.4 分别称为甲和乙的听、说、读、写四项成绩的**加权平均数**（weighted average）. 权的原含义是“称锤”，这里表示数据的重要程度.

一般地，若 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的权分别是 w_1，w_2，…，w_n，则

$$\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

叫做这 n 个数的加权平均数.

思考

如果这家公司想招一名口语能力较强的翻译，听、说、读、写成绩按照 3∶3∶2∶2 的比确定，那么甲、乙两人谁将被录取？与上述问题中的（1）（2）相比较，你能体会到权的作用吗？

例 1 一次演讲比赛中，评委将从演讲内容、演讲能力、演讲效果三个方面为选手打分. 各项成绩均按百分制计，然后再按演讲内容占 50%、演讲能力占 40%、演讲效果占 10%，计算选手的综合成绩（百分制）. 进入决赛的前两名选手的单项成绩如表 24-2 所示，请确定两人的名次.

表 24-2

选手	演讲内容	演讲能力	演讲效果
A	85	95	95
B	95	85	95

分析：这个问题可以看成是求两名选手三项成绩的加权平均数，50%，40%，10%说明演讲内容、演讲能力、演讲效果三项成绩在总成绩中的重要程度，是三项成绩的权.

解：选手 A 的最后得分是

$$\frac{85\times50\%+95\times40\%+95\times10\%}{50\%+40\%+10\%}=90,$$

选手 B 的最后得分是

$$\frac{95\times50\%+85\times40\%+95\times10\%}{50\%+40\%+10\%}=91.$$

由上可知选手 B 获得第一名，选手 A 获得第二名.

例 1 中两名选手的单项成绩都是两个 95 分与一个 85 分，但他们最后的得分却不同，这体现了权的作用.

巩固运用24.1

1. 晨光中学规定学生的学期体育成绩满分为 100，其中早锻炼及体育课外活动占 20%，期中考试成绩占 30%，期末考试成绩占 50%. 小桐的三项成绩（百分制）依次是 95，90，85. 小桐这学期的体育成绩是多少？

2. 某公司欲招聘一名公关人员. 对甲、乙两位应试者进行了面试和笔试，他们的成绩（百分制）如下表所示.

应试者	面试	笔试
甲	86	90
乙	92	83

(1) 如果公司认为面试和笔试成绩同等重要，从他们的成绩看，谁将被录取？

(2) 如果公司认为，作为公关人员面试成绩应该比笔试成绩更重要，并分别赋予它们 6 和 4 的权，计算甲、乙两人各自的平均成绩，谁将被录取？

3. 某商场招聘员工一名，现有甲、乙、丙三人竞聘. 通过计算机、语言和商品知识三项测试，他们各自成绩（百分制）如下表所示.

应试者	计算机	语言	商品知识
甲	70	50	80
乙	90	75	45
丙	50	60	85

(1) 如果商场需要招聘负责将商品拆装上架的人员，对计算机、语言和商品知识分别赋权 2，3，5，计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看，应该录取谁？

(2) 若商场需要招聘电脑收银员，计算机、语言、商品知识成绩分别占 50%，30%，20%，计算三名应试者的平均成绩. 从成绩看，应该录取谁？

例 2 某跳水队为了解运动员的年龄情况，作了一次年龄调查，结果如下：13 岁 8 人，14 岁 16 人，15 岁 24 人，16 岁 2 人. 求这个跳水队运动员的平均年龄（结果取整数）.

分析： 本例中不同年龄的运动员的人数可以看作相应年

龄的权，所以计算平均年龄可以用加权平均数的公式.

解： 这个跳水队运动员的平均年龄为

$$\overline{x}=\frac{13\times8+14\times16+15\times24+16\times2}{8+16+24+2}\approx14\ (岁).$$

探究

为了解 5 路公共汽车的运营情况，公交部门统计了某天 5 路公共汽车每个运行班次的载客量，得到表 24-3.表中的组中值是指这个小组的两个端点的数的平均数. 例如，小组 $1\leqslant x<21$ 的组中值为 $\frac{1+21}{2}=11$. 这一天 5 路公共汽车平均每班的载客量是多少（结果取整数)?

表 24-3

载客量/人	组中值	频数（班次）
$1\leqslant x<21$	11	3
$21\leqslant x<41$	31	5
$41\leqslant x<61$	51	20
$61\leqslant x<81$	71	22
$81\leqslant x<101$	91	18
$101\leqslant x<121$	111	15

根据上面的频数分布表求平均数时，统计中常用各组的组中值代表各组的实际数据，把各组的频数看作相应组中值的权. 例如，把在 $1\leqslant x<21$ 之间的载客量近似地看作组中值 11，组中值 11 的权是它的频数 3. 因此，这一天 5 路公共汽车平均每班的载客量是

$$\bar{x}=\frac{11\times3+31\times5+51\times20+71\times22+91\times18+111\times15}{3+5+20+22+18+15}$$

≈ 73（人）.

一般的计算器都有统计功能，利用统计功能可以求平均数. 使用计算器的统计功能求平均数时，不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 x_1，x_2，…，x_k 以及它们的权 f_1，f_2，…，f_k；最后按动求平均数的功能键（例如 $\boxed{\bar{x}}$ 键），计算器便会求出平均数 $\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 的值.

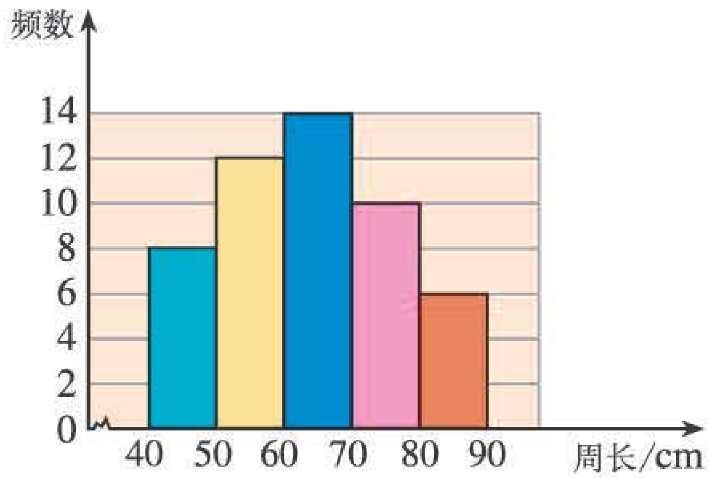
巩固运用24.2

1. 下表是校女子排球队队员的年龄分布.

年龄/岁	13	14	15	16
人数	1	4	5	2

求校女子排球队队员的平均年龄（结果取整数，可以使用计算器）.

2. 为了绿化环境，柳荫街引进一批法国梧桐. 三年后这些树的树干的周长情况如图所示. 计算这批法国梧桐树树干的平均周长（结果取整数，可以使用计算器）.



（第 2 题）

3. 某公司有 15 名员工，他们所在部门及相应每人所创年利润如下表所示.

部门	人数	每人所创年利润/万元
A	1	10
B	3	8
C	7	5
D	4	3

这个公司平均每人所创年利润是多少？

4. 某地某个月中午 12 时的气温（单位：℃）如下：

22	31	25	13	18	23	13	28	30	22
20	20	27	17	28	21	14	14	22	12
18	21	29	15	16	14	31	24	26	29

（1）求这个月中午 12 时的平均气温（结果取整数）；

（2）请以 4 为组距对数据分组，作出频数分布表，根据频数分布表计算这个月中午 12 时的平均气温，与（1）中的结果比较，你有什么发现，谈谈你的看法.

我们知道，当所要考察的对象很多，或者考察会对有关对象带有破坏性时，统计中常常通过用样本估计总体的方法来获得对总体的认识. 例如，实际生活中经常用样本的平均数来估计总体的平均数.

例 3 某灯泡厂为测量一批灯泡的使用寿命，从中随机抽查了 50 只灯泡，它们的使用寿命如表 24-4 所示. 这批灯泡的平均使用寿命是多少？

表 24-4

使用寿命 x/h	$600\leqslant x<1\,000$	$1\,000\leqslant x<1\,400$	$1\,400\leqslant x<1\,800$	$1\,800\leqslant x<2\,200$	$2\,200\leqslant x<2\,600$
只数	5	10	12	17	6

分析： 用全面调查的方法考察这批灯泡的平均使用寿命是不合适的. 由于抽出的 50 只灯泡的使用寿命组成一个样本，因此可以利用样本的平均使用寿命来估计这批灯泡的平均使用寿命.

解： 根据表 24-4，可以得出各小组的组中值，于是

$$\bar{x}=\frac{800\times5+1\ 200\times10+1\ 600\times12+2\ 000\times17+2\ 400\times6}{50}$$

$=1\ 672$,

即样本平均数为 1 672.

因此，可以估计这批灯泡的平均使用寿命大约是1 672 h.

巩固运用24.3

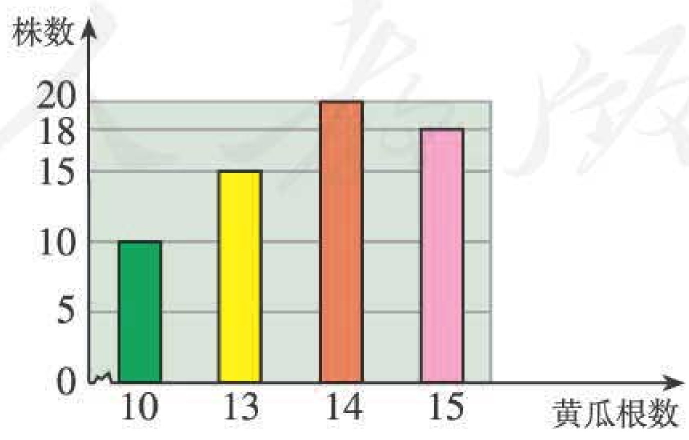
1. 为了检查一批零件的质量，从中随机抽取 10 件，测得它们的长度（单位：mm）如下：

   22.36　22.35　22.33　22.35　22.37

   22.34　22.38　22.36　22.32　22.35

   根据以上数据，估计这批零件的平均长度.

2. 种菜能手李大叔种植了一批新品种黄瓜. 为了考察这种黄瓜的生长情况，他随机抽查了部分黄瓜藤上长出的黄瓜根数，得到如图所示的条形图. 请估计这个新品种黄瓜平均每株结多少根黄瓜（结果取整数）.



（第 2 题）

3. 某水库为了解某种鱼的生长情况，从水库中随机捕捞了 10 条这种鱼，称得它们的质量（单位：kg）如下：

1.15　1.04　1.11　1.07　1.10　1.32　1.25

1.19　1.15　1.21

计算样本平均数（结果保留小数点后两位），并根据计算结果估计水库中这种鱼的平均质量.

4. 某校有 120 名女生参加了今年中考体育的 50 m 跑，学校为了解测试情况，从中随机抽取 10 个数据如下表. 请估计这个学校女生 50 m 跑的平均成绩.

考生编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成绩/s	9.3	9.6	10.5	9.6	9.8	10.2	11.9	11.3	8.8	10.6

24.1.2　中位数和众数

问题 2　表 24-5 是某公司员工月收入的资料.

表 24-5

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 500	5 000	3 400	3 000	1 000
人数	1	1	1	3	6	1	11	1

（1）计算这个公司员工月收入的平均数；

（2）若用（1）算得的平均数反映公司全体员工月收入水平，你认为合适吗？

这个公司员工月收入的平均数为 6 276. 但在 25 名员工中，仅有 3 名员工的月收入在 6 276 元以上，而另外 22 名员

工的月收入都在 6 276 元以下. 因此，用月收入的平均数反映所有员工的月收入水平，不太合适. 利用中位数可以更好地反映这组数据的集中趋势.

将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则称处于中间位置的数为这组数据的**中位数**（median）；如果数据的个数是偶数，则称中间两个数据的平均数为这组数据的中位数.

利用中位数分析数据可以获得一些信息. 例如，上述问题中将公司 25 名员工月收入数据由小到大排列，得到的中位数为 3 400，这说明除去月收入为 3 400 元的员工，一半员工收入高于 3 400 元，另一半员工收入低于 3 400 元.

思考

上述问题中公司员工月收入的平均数为什么会比中位数高得多呢？

例 4 在男子组一分单人跳绳比赛中，随机抽取 12 名选手，他们的成绩（单位：次）如下：

206 197 202 186 194 214

221 209 197 204 189 210

（1）样本数据（12 名选手的成绩）的中位数是多少？

（2）如果一名选手的成绩为 207 次，他的成绩如何？

解：（1）先将样本数据按照由小到大的顺序排列：

186 189 194 197 197 202 204 206 209 210 214 221

这组数据的中位数为处于中间的两个数 202，204 的平均数，即

$$\frac{202+204}{2}=203.$$

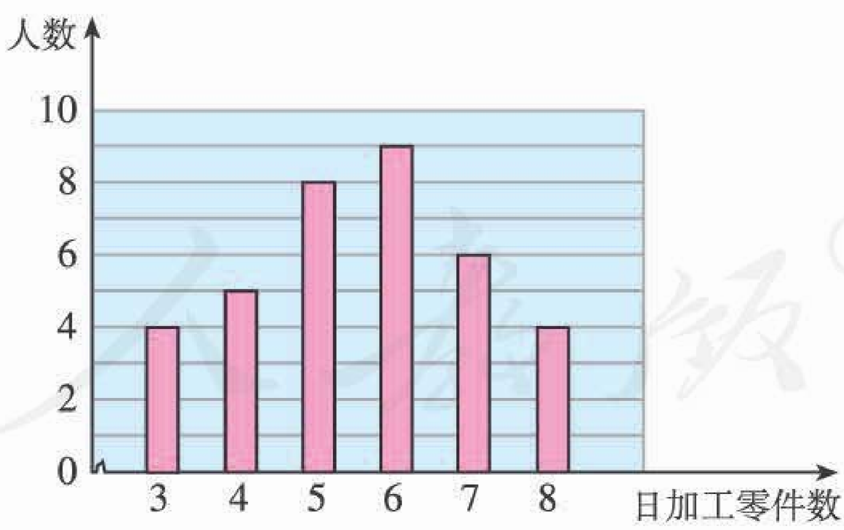
因此样本数据的中位数是 203.

（2）根据（1）中得到的样本数据的中位数，可以估计，在这次跳绳比赛中，大约有一半选手的成绩多于 203 次，有一半选手的成绩少于 203 次. 这名选手的成绩是 207 次，多于中位数 203 次，可以推测他的成绩比一半以上选手的成绩好.

根据本例中的样本数据，你还有其他方法评价（2）中这名选手在这次比赛中的表现吗？

巩固运用24.4

1. 下面的条形图描述了某车间工人日加工零件数的情况.



（第 1 题）

请找出这些工人日加工零件数的中位数，并说明这个中位数的意义.

2. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 15 名运动员的成绩如下表所示.

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	2	3	2	3	4	1

这些运动员成绩的平均数、中位数分别是多少？（结果保留小数点后两位）

3. 在某城市中随机抽取 10 个家庭，调查得到每个家庭的人均月收入数据如下（单位：元）：

2 300　2 900　3 400　3 600　3 800

4 200　5 700　6 500　6 800　12 000

（1）这些家庭的人均月收入的平均数、中位数分别为多少？

（2）小明在计算平均数和中位数的时候，误把12 000看成 1 200，他计算的结果分别为多少？和真实值比较，平均数和中位数哪个受这个错误的影响更大？

一组数据中出现次数最多的数据称为这组数据的**众数**(mode).

当一组数据有较多的重复数据时，众数往往能更好地反映其集中趋势. 例如，问题 2 中公司员工月收入的众数为3 000，这说明公司中月收入 3 000 元的员工人数最多. 如果应聘公司的普通员工一职，这个众数能提供更为有用

的信息.

例 5 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双，各种尺码鞋的销售量如表 24-6 所示. 你能根据表中的数据为这家鞋店提供进货建议吗?

表 24-6

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

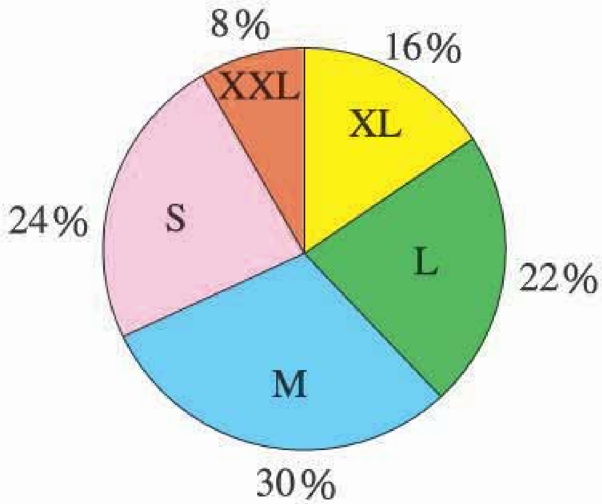
分析：一般来讲，鞋店比较关心哪种尺码的鞋的销售量最大，也就是关心卖出的鞋的尺码组成的一组数据的众数. 一段时间内卖出的 30 双女鞋的尺码组成一个样本数据，通过分析样本数据可以找出样本数据的众数. 进而可以估计这家鞋店销售哪种尺码的鞋最多.

解：由表 24-6 可以看出，在鞋的尺码组成的数据中，23.5 是这组数据的众数，即 23.5 cm 的鞋销售量最大. 因此可以建议鞋店多进 23.5 cm 的鞋.

分析表 24-6 中的数据，你还能为鞋店进货提出哪些建议?

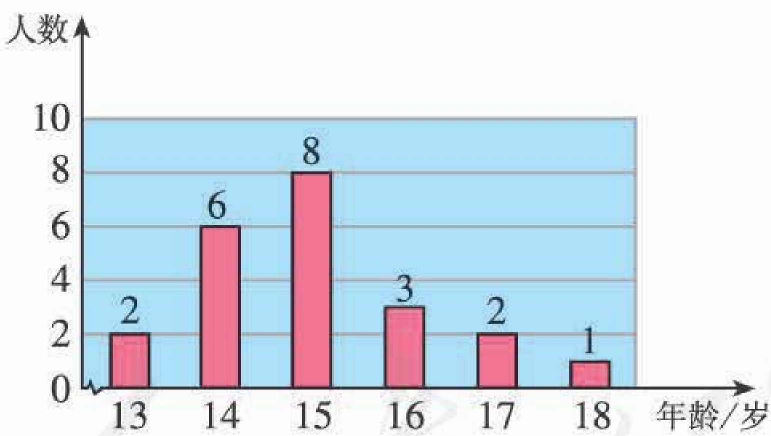
巩固运用24.5

1. 下面的扇形图描述了某种运动服的 S 号，M 号，L 号，XL 号，XXL 号在一家商场的销售情况. 请你为这家商场提出进货建议.



（第 1 题）

2. 某校男子足球队的年龄分布如条形图所示. 请找出这些队员年龄的平均数、众数、中位数，并解释它们的意义.



（第 2 题）

3. 为了提高农民收入，村干部带领村民自愿投资办起了一个养鸡场. 办场时买来的 1 000 只小鸡，经过一段时间精心饲养，可以出售了. 下表是这些鸡出售时质量的统计数据.

质量/kg	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0
只数	112	226	323	241	98

(1) 出售时这些鸡的平均质量是多少（结果保留小数点后一位）？

(2) 质量在哪个值的鸡最多？

(3) 中间的质量是多少？

平均数、中位数和众数都可以反映一组数据的集中趋势，它们各有自己的特点，能够从不同的角度提供信息. 在实际应用中，需要分析具体问题的情况，选择适当的量反映数据的集中趋势.

例 6 某商场服装部为了调动营业员的积极性，决定实行目标管理，根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励. 确定一个适当的月销售目标是一个关键问题. 如果目标定得太高，多数营业员完不成任务，会使营业员失去信心；如果目标定得太低，不能发挥营业员的潜力. 为了确定一个适当的月销售目标，商场服装部统计了每个营业员在某月的销售额（单位：万元），数据如下：

17	18	16	13	24	15	28	26	18	19
22	17	16	19	32	30	16	14	15	26
15	32	23	17	15	15	28	28	16	19

(1) 月销售额在哪个值的人数最多？中间的月销售额是多少？平均月销售额是多少？

（2）如果想确定一个较高的销售目标，你认为月销售额定为多少合适？请说明理由.

（3）如果想让一半左右的营业员都能达到销售目标，你认为月销售额定为多少合适？请说明理由.

分析： 商场服装部统计的每个营业员在某月的销售额组成一个样本，通过分析样本数据的平均数、中位数、众数来估计总体的情况，从而解决问题. 用图表整理和描述样本数据，有助于我们分析数据解决问题.

解： 整理上面的数据得到表 24-7 和图 24.1-1.

表 24-7

销售额/万元	13	14	15	16	17	18	19	22	23	24	26	28	30	32
人数	1	1	5	4	3	2	3	1	1	1	2	3	1	2

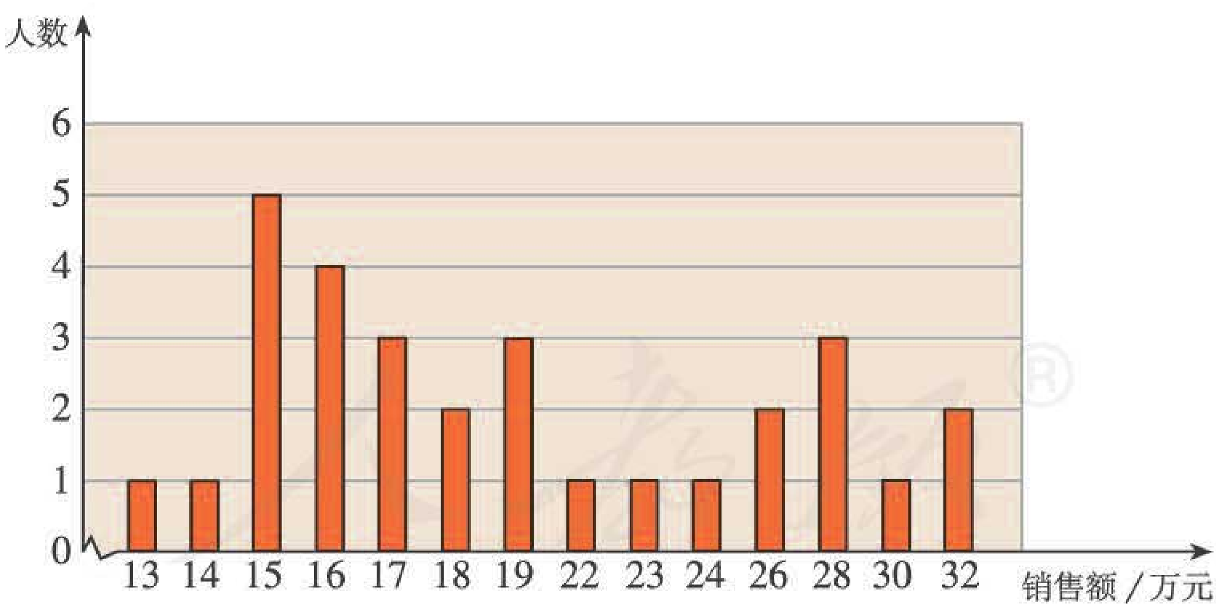


图 24.1-1

（1）从表 24-7 或图 24.1-1 可以看出，样本数据的众数是 15，中位数是 18，利用计算器求得这组数据的平均数约是 20. 可以推测，这个服装部营业员的月销售额为 15 万元

的人数最多，中间的月销售额是 18 万元，平均月销售额大约是 20 万元.

（2）如果想确定一个较高的销售目标，这个目标可以定为每月 20 万元（平均数）. 因为从样本数据看，在平均数、中位数和众数中，平均数最大. 可以估计，月销售额定为每月 20 万元是一个较高目标，大约会有$\frac{1}{3}$的营业员获得奖励.

（3）如果想让一半左右的营业员能够达到销售目标，月销售额可以定为每月 18 万元（中位数）. 因为从样本情况看，月销售额在 18 万元以上（含 18 万元）的有 16 人，占总人数的一半左右. 可以估计，如果月销售额定为 18 万元，将有一半左右的营业员获得奖励.

归纳

平均数、中位数、众数都刻画了数据的集中趋势，但它们各有特点.

平均数的计算要用到所有的数据，它能够充分利用数据提供的信息，因此在现实生活中较为常用. 但它受极端值（一组数据中与其余数据差异很大的数据）的影响较大.

当一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往是人们关心的一个量，众数不易受极端值的影响.

中位数只需要很少的计算，它也不易受极端值的影响.

巩固运用24.6

1. 在一次青年歌手演唱比赛中，评分办法采用 10 位评委现场打分，每位选手的最后得分为去掉一个最低分和一个最高分后的平均数. 已知 10 位评委给某位歌手的打分是：

9.5　9.5　9.3　9.8　9.4　8.8　9.6　9.5　9.2　9.6

求这位歌手的最后得分.

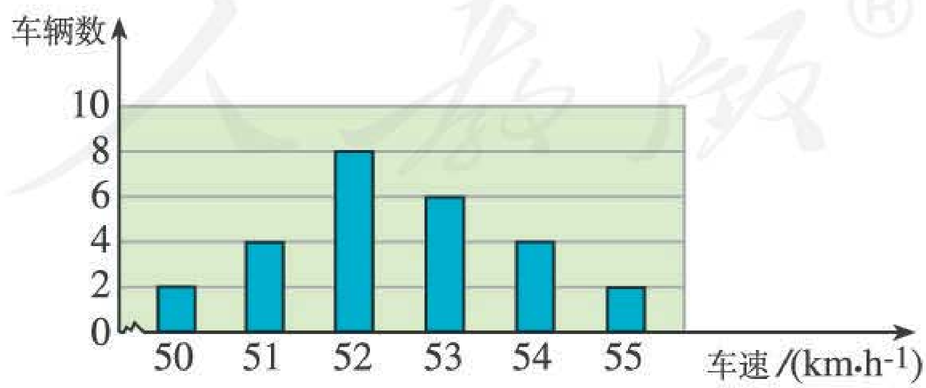
2. 下面是某校八年级(2) 班两组女生的体重(单位：kg)：

第 1 组	35	36	38	40	42	42	75
第 2 组	35	36	38	40	42	42	45

(1) 分别求这两组数据的平均数、众数、中位数，并解释它们的实际意义（结果取整数）；

(2) 比较这两组数据的平均数、众数、中位数，谈谈你对它们的认识.

3. 如图是交警在一个路口统计的某个时段来往车辆的车速情况. 应用你所学的统计知识，写一份简短的报告，让交警知道这个时段路口来往车辆的车速情况.



（第 3 题）

24.2 数据的波动程度

在统计学中，除了平均数、中位数、众数这类刻画数据集中趋势的量以外，还有一类刻画数据波动（离散）程度的量，其中最重要的就是方差. 本节我们将在实际问题情境中，了解方差的统计意义并运用方差解决问题.

我们来看引言中的问题.

问题 农科院计划为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农科院所关心的问题. 为了解甲、乙两种甜玉米种子的相关情况，农科院各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量（单位：t）如表 24-8 所示.

表 24-8

甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.44	7.49	7.52	7.58	7.46	7.53	7.49

根据这些数据估计，农科院应该选择哪种甜玉米种子呢？

上面两组数据的平均数分别是

$$\overline{x}_{甲}\approx 7.537,\ \overline{x}_{乙}\approx 7.515,$$

说明在试验田中，甲、乙两种甜玉米的平均产量相差不大. 由样本平均数估计总体平均数，可以估计出这个地区种植这两种甜玉米，它们的平均产量相差不大.

为了直观地看出甲、乙两种甜玉米产量的情况，我们把这两组数据画成下面的图 24.2-1 和图 24.2-2.

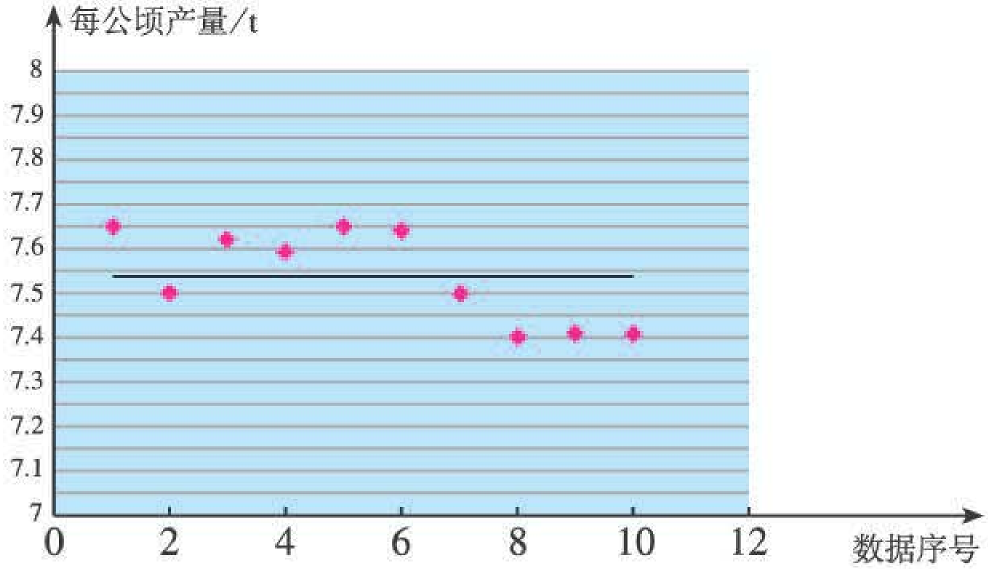


图 24.2-1　甲种甜玉米的产量

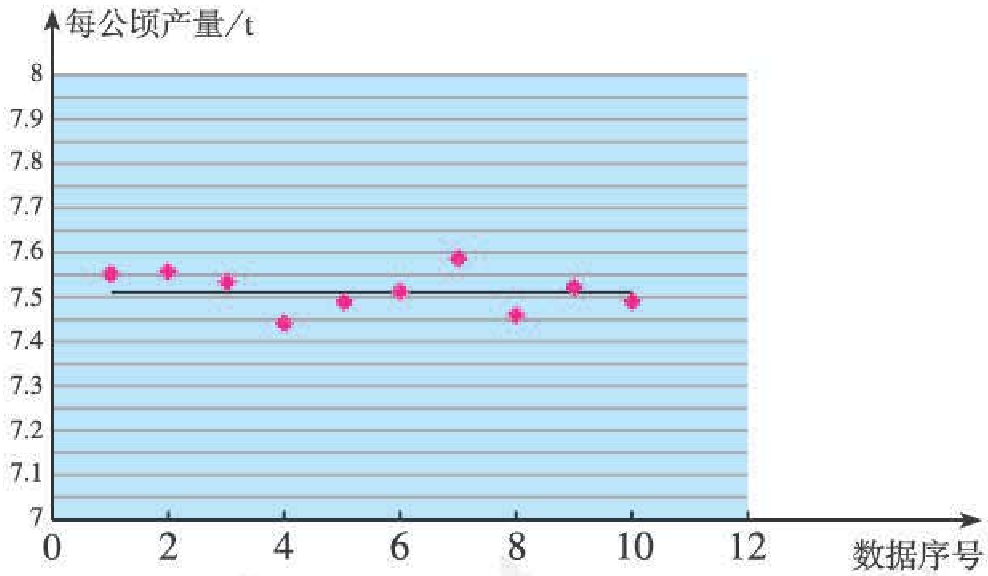


图 24.2-2　乙种甜玉米的产量

比较上面的两幅图可以看出，甲种甜玉米在各试验田的产量波动较大，乙种甜玉米在各试验田的产量较集中地分布在平均产量附近. 从图中看出的结果能否用一个量来刻画呢？

为了刻画一组数据波动的大小，可以采用很多方法. 统计中常采用下面的做法：设有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，各

数据与它们的平均数 $\overline{x}$ 的差的平方分别是

$$(x_1-\overline{x})^2, (x_2-\overline{x})^2, \cdots, (x_n-\overline{x})^2.$$

我们用这些值的平均数，即用

$$\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

来衡量这组数据波动的大小，并把它叫做这组数据的**方差**(variance)，记作“s^2”.

从上面计算方差的式子可以看出：当数据分布比较分散（即数据在平均数附近波动较大）时，各个数据与平均数的差的平方和较大，方差就较大；当数据分布比较集中时，各个数据与平均数的差的平方和较小，方差就较小. 反过来也成立，这样就可以用方差刻画数据的波动程度，即**方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小.**

下面我们利用方差来分析甲、乙两种甜玉米产量的波动程度. 两组数据的方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(7.65-7.537)^2+(7.50-7.537)^2+\cdots+(7.41-7.537)^2}{10}\approx 0.010,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(7.55-7.515)^2+(7.56-7.515)^2+\cdots+(7.49-7.515)^2}{10}\approx 0.002.$$

显然 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$，即甲种甜玉米产量的波动较大，这与我们从图 24.2-1 和图 24.2-2 看到的结果一致.

由此可知，在试验田中，乙种甜玉米的产量比较稳定. 正如用样本的平均数估计总体的平均数一样，也可以用样本的方差来估计总体的方差. 因此可以推测，在这个地区种植乙种甜玉米的产量比甲种的稳定. 综合考虑甲、乙两个品种

的平均产量和产量的稳定性，可以推测这个地区比较适合种植乙种甜玉米.

例 1 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，参加表演的女演员的身高（单位：cm）如表 24-9 所示.

表 24-9

甲	163	164	164	165	165	166	166	167
乙	163	165	165	166	166	167	168	168

哪个芭蕾舞团女演员的身高更整齐?

解： 甲、乙两团演员的身高平均数分别是

$$\bar{x}_{甲}=\frac{163+164\times2+165\times2+166\times2+167}{8}=165,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{163+165\times2+166\times2+167+168\times2}{8}=166.$$

方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(163-165)^2+(164-165)^2+\cdots+(167-165)^2}{8}=1.5,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(163-166)^2+(165-166)^2+\cdots+(168-166)^2}{8}=2.5.$$

由 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$ 可知，甲芭蕾舞团女演员的身高更整齐.

使用计算器的统计功能可以求方差. 在使用计算器的统计功能求方差时，不同品牌的计算器的操作步骤有所不同，操作时需要参阅计算器的使用说明书. 通常需要先按动有关

键，使计算器进入统计状态；然后依次输入数据 x_1，x_2，…，x_n；最后按动求方差的功能键（例如σx^2键），计算器便会求出方差

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

的值.

巩固运用24.7

1. 用条形图表示下列各组数据，计算并比较它们的平均数和方差，体会方差是怎样刻画数据的波动程度的.

   (1) 6　6　6　6　6　6　6

   (2) 5　5　6　6　6　7　7

   (3) 3　3　4　6　8　9　9

   (4) 3　3　3　6　9　9　9

2. 甲、乙两名射击运动员的 10 次射击训练成绩如下表所示.

甲	7	7	8	9	8	9	10	9	9	9
乙	8	9	7	8	10	7	9	10	7	10

   甲、乙这 10 次射击成绩的方差哪个大？

3. 甲、乙两台机床同时生产一种零件. 在 10 天中，两台机床每天出次品的数量如下表.

甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	3	1	1	0	2	1	1	0	1

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 从计算的结果看，在 10 天中，哪台机床出次品的平均数较小？哪台机床出次品的波动较小？

4. 甲、乙两台包装机同时包装糖果. 从中各随机抽出 10 袋，测得它们的实际质量（单位：g）如下表.

甲	501	506	508	508	497	508	506	508	507	499
乙	505	507	505	498	505	506	505	507	506	506

(1) 分别计算两组数据的平均数和方差；

(2) 哪台包装机包装的糖果的质量比较稳定？

例 2 某快餐公司的香辣鸡腿很受消费者欢迎. 现有甲、乙两家农副产品加工厂到快餐公司推销鸡腿，两家鸡腿的价格相同，品质相近. 快餐公司决定通过检查鸡腿的质量（单位：g）来确定选购哪家的鸡腿. 检查人员从两家的鸡腿中各随机抽取 10 只，记录它们的质量如表 24-10 所示. 根据表中数据，你认为快餐公司应该选购哪家加工厂的鸡腿？

表 24-10

甲	74	74	75	74	76	73	76	73	76	75
乙	75	73	79	71	78	71	73	72	78	76

解： 从甲、乙两家农副产品加工厂各随机抽取的 10 只鸡腿分别组成一个样本，样本数据的平均数分别是

$$\overline{x}_{甲}=\frac{74+74+\cdots+75}{10}=74.6,$$

$$\overline{x}_{乙}=\frac{75+73+\cdots+76}{10}=74.6.$$

样本数据的方差分别是

$$s_{甲}^2=\frac{(74-74.6)^2+(74-74.6)^2+\cdots+(75-74.6)^2}{10}=1.24,$$

$$s_{乙}^2=\frac{(75-74.6)^2+(73-74.6)^2+\cdots+(76-74.6)^2}{10}=8.24.$$

由$\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$可知，两家加工厂的鸡腿质量基本相等；由$s_{甲}^2<s_{乙}^2$ 可知，甲加工厂的鸡腿质量更稳定，大小更均匀. 因此，快餐公司应该选购甲加工厂生产的鸡腿.

巩固运用24.8

1. 为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中随机抽取10株麦苗，测得苗高（单位：cm）如下表.

甲	12	13	14	15	10	16	13	11	15	11
乙	11	16	17	14	13	19	6	8	10	16

(1) 分别计算两种小麦的平均苗高；

(2) 哪种小麦的长势比较整齐？

2. 某跳远队准备从甲、乙两名运动员中选取成绩稳定的一名参加比赛. 下表是这两名运动员10次测验成绩（单位：m）.

甲	5.85	5.93	6.07	5.91	5.99	6.13	5.98	6.05	6.00	6.19
乙	6.11	6.08	5.83	5.92	5.84	5.81	6.18	6.17	5.85	6.21

你认为应该选择哪名运动员参赛？为什么？

3. 在体操比赛中，往往在所有裁判给出的分数中，去掉一个最高分和一个最低分，然后计算余下分数的平

均分. 6 个 B 组裁判员对某一运动员的打分数据（动作完成分）为：

9.4，8.9，8.8，8.9，8.6，8.7.

（1）如果不去掉最高分和最低分，这组数据的平均数和方差分别是多少（结果保留小数点后两位）?

（2）如果去掉一个最高分和一个最低分，平均数和方差又分别是多少（结果保留小数点后两位）?

（3）你认为哪种统计平均分的方法更合理?

阅读与思考

数据波动程度的几种度量

我们知道，方差是度量数据波动程度的量．此外，统计中还常用极差、平均差、标准差等来度量数据的波动程度.

一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差. 在反映数据波动程度的各种量中，极差是最简单、最便于计算的一个量. 但是它仅仅反映了数据的波动范围，没有提供数据波动的其他信息，且受极端值的影响较大.

为了更好地刻画数据的波动程度，可以考虑每一个数据与其平均数的“距离”. 一个自然的想法就是计算每一个数据与其平均数的差的平均数，即

$$\frac{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots+(x_n-\overline{x})}{n},$$

想一想，这种做法可行吗？存在什么问题？

上面的做法不可行．因为不论这组数据是什么具体数值，总有

$$上式=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-n\overline{x}}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\overline{x}=\overline{x}-\overline{x}=0,$$

所以它不能反映数据的波动程度．

修正上面缺点的一种做法是考虑每个数据与其平均数的差的绝对值的平均数，即

$$\frac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|}{n},$$

这个式子可以用来度量数据的波动程度，我们把它叫做这组数据的平均差．

另一种做法是用方差

$$s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

来度量数据的波动程度．

此外，人们还引入了标准差的概念．标准差是方差的算术平方根，即

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}.$$

标准差的单位与原始数据的单位相同，实际中也常用它度量数据的波动程度．

请同学们利用上面的几种度量数据波动程度的量解决下面的问题．

一个家具厂有甲、乙两个木料货源．下面是家具厂向两个货源订货后等待交货天数的样本数据统计表：

等待天数		6	7	8	9	10	11	12	13	14
次数	甲	0	0	2	8	7	3	0	0	0
	乙	4	2	0	6	2	2	2	0	2

分别计算样本数据的平均数、极差、平均差、方差和标准差. 根据这些计算结果，看看家具厂从哪个货源进货比较好？为什么？

数学活动

请同学们合作完成下面的活动：

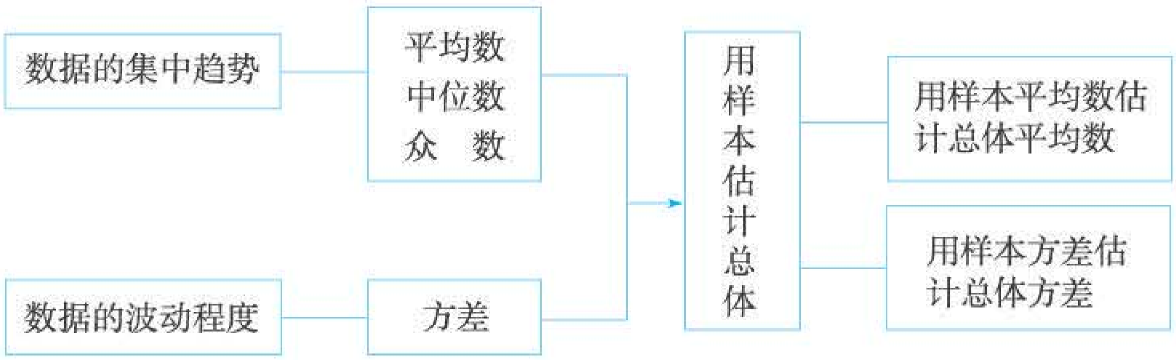
1. 全班同学一起讨论，提出5个问题对全班同学进行调查. 例如，全班同学的平均身高是多少，全班同学的平均体重是多少，等等.

2. 全班同学分成五个小组，每个小组选择一个问题进行调查，并将调查过程和结果向全班介绍和展示.

3. 将各组的结果汇总到一起，得到全班同学的一个“平均情况”，找出一位最能代表全班“平均情况”的同学.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 举例说明平均数、中位数、众数的意义.

2. 算术平均数与加权平均数有什么联系和区别？举例说明加权平均数中“权”的意义.

3. 举例说明怎样用方差刻画数据的波动程度.

4. 举例说明刻画数据特征的量在决策中的作用.

5. 搜集关于“统计学”方面的资料（如学科发展史、思想方法、人物等），根据资料谈谈你对统计的认识.

复习题 24

复习巩固

1. 在一次智力抢答比赛中，四个小组回答正确的情况如图所示. 这四个小组平均正确回答多少道题目（结果取整数）？

（第 1 题）

2. 为了解某一路口的汽车流量，调查了 10 天中同一时段通过该路口的汽车数量（单位：辆），结果如下：

183　209　195　178　204　215　191　208　167　197

在该时段中，平均每天约有多少辆汽车通过这个路口？

3. 一家公司 10 名员工的月薪（单位：元）是：

4 200　2 500　1 750　2 500　2 550　6 500　2 550
2 550　15 000　5 200

（1）计算这组数据的平均数、中位数和众数；

（2）解释本题中平均数、中位数和众数的意义.

4. 某年 A，B 两座城市四季的平均气温（单位：℃）如下表.

城市	春	夏	秋	冬
A	−4	19	9	−10
B	16	30	24	11

（1）分别计算 A，B 两座城市的年平均气温（结果取整数）；

（2）哪座城市四季的平均气温较为接近？

5. 为了在甲、乙两名运动员中选拔一名参加全省跳水比赛，对他们的跳水技能进行考核. 在相同条件下，各跳了 10 次，成绩（单位：分）如下表.

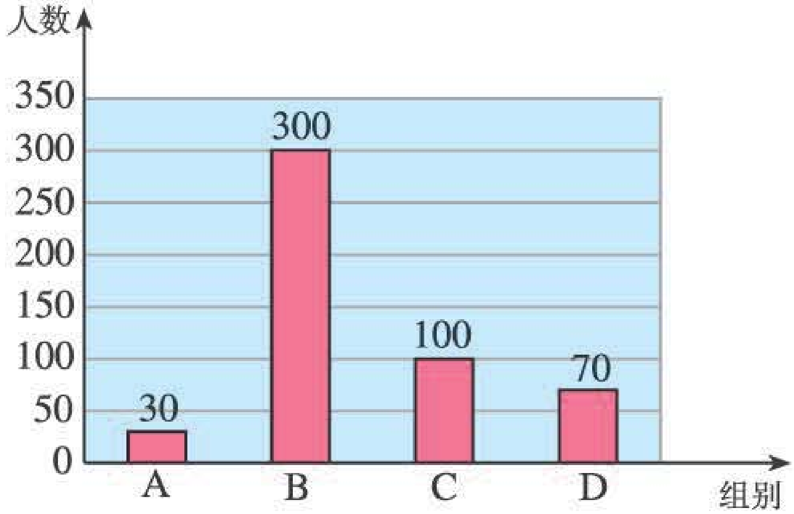
甲	76	84	90	86	81	87	86	82	85	83
乙	82	84	85	89	79	80	91	89	74	79

你认为选谁去参加比赛更合适？为什么？

综合运用

6. 2014 年某市城镇民营企业就业人数突破 20 万. 为了解民营企业员工每月收入情况，统计局对全市民营企业员工 2014 年月平均收入进行了随机抽样调查. 如图，抽样的数据按照“2 000 元以内”“2 000～4 000元”“4 000～6 000 元”“6 000 元以上”分为四组，并分别以 A，B，C，D 表示.

（1）本次抽样调查的员工有多少人？在 2014 年民营企



(第 6 题)

业 20 万员工中，每月收入在“2 000～4 000 元”的有多少人？

(2) 如果把 2014 年民营企业员工的月收入平均数 4 872元作为收入的代表，那么结合以上数据，你认为是否合理？

7. 下表是两种股票一周内的交易日收盘价格（单位：元/股）.

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
A 股票	11.62	11.51	11.39	11.94	11.17
B 股票	13.53	14.07	13.49	13.84	14.80

计算它们的平均数和方差（结果保留小数点后两位），比较这两种股票在这段时间内的涨跌变化情况.

8. 甲、乙两门大炮在相同条件下向同一目标各发射 50 发炮弹，炮弹落点情况如下表.

炮弹落点与目标的距离/m	40	30	20	10	0
甲炮发射的炮弹个数	0	1	3	7	39
乙炮发射的炮弹个数	1	3	2	3	41

（1）分别计算两门大炮所发射的炮弹落点与目标的距离的平均数；

（2）哪门大炮射击的准确性好？

拓广探索

9. 为参加运动会，学校决定购买一批运动鞋供学生选用. 请设计一个样本容量为 30 的调查方案进行调查，并计算样本的鞋码尺寸的平均数、众数、中位数，为学校购买运动鞋提出建议.

部分中英文词汇索引