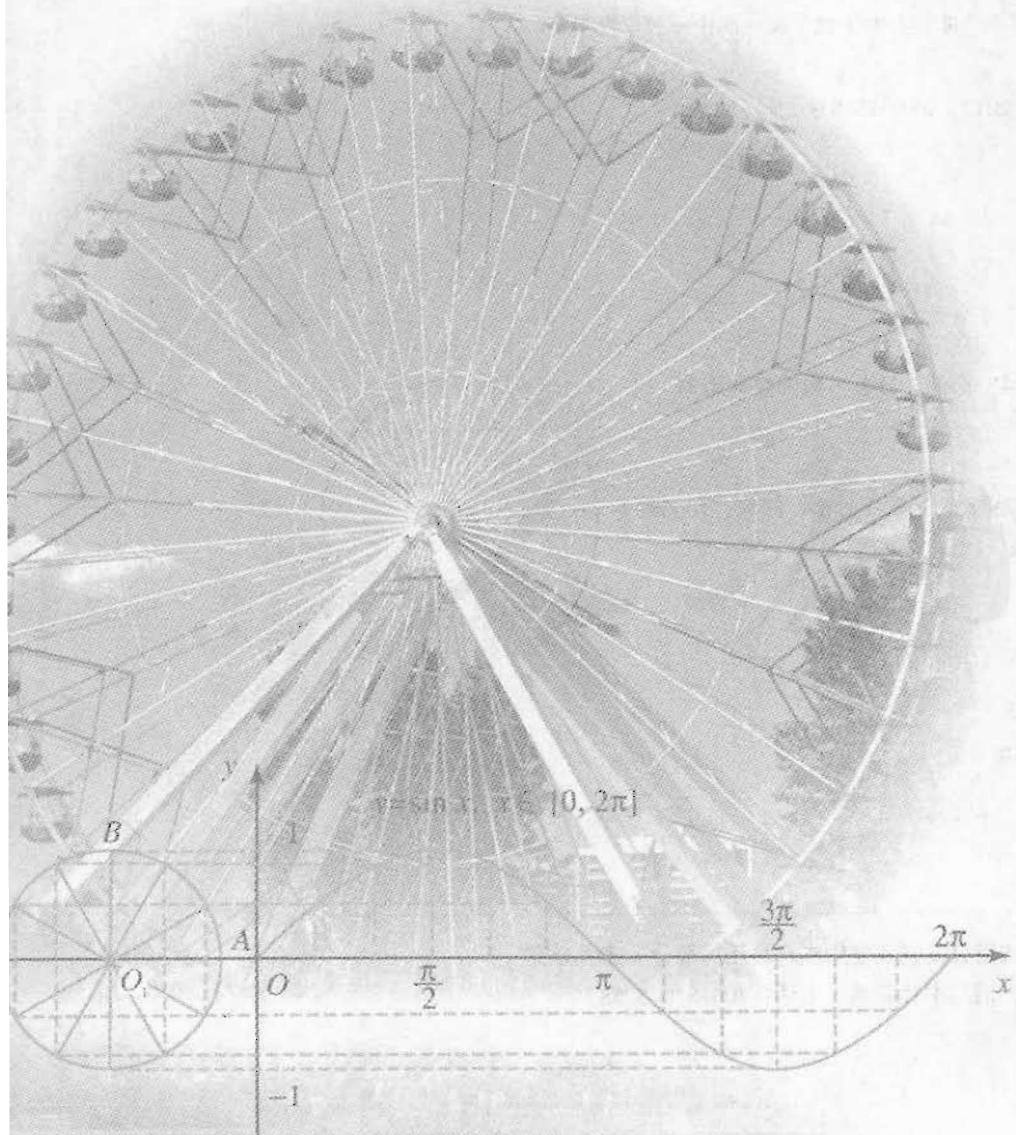
普通高中课程标准实验教科书

数学 ④

必修

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编：高存明　韩际清
本册主编：段发善　尹玉柱
审　　定：丁尔陞
编　　者：尹玉柱　张合钦　李明照　王　强　韩际清
责任编辑：龙正武　王　鑫
版式设计：王　喆
封面设计：林荣桓

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学 4 必修（B版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著．—3 版．—北京：人民教育出版社，2007.5（2018.7重印）

ISBN 978-7-107-18297-6

Ⅰ．①普…　Ⅱ．①人…　②课…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 031588号

普通高中课程标准实验教科书　数学4　必修　B版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京新华印刷有限公司
版　　次　2007年 5 月第 3 版
印　　次　2018年 7 月第 19 次印刷
开　　本　890毫米 × 1 240毫米　1/16
印　　张　10.75
字　　数　285 千字
定　　价　31.30 元

说　明

本套教师教学用书是依据《普通高中数学课程标准（实验）》和《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》，由中学数学教材实验研究组组织编写的.

编写的原则是：

1. 努力体现B版教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这套教师教学用书的每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价.

本书课程目标确定的主要依据是，《普通高中数学课程标准（实验）》相关内容的教学要求. 考虑到教学的实际需要，对相关内容的教学要求作了一些调整. 教科书中，通过增加选修内容，增设“思考与讨论”和“探索与研究”等栏目，同时将练习和习题分成A、B两组，以达到不同的教学要求. 教师可根据实际情况，确定相应的教学要求.

在教材分析中，首先指出教材的编写特色，然后分析内容结构，给出课时分配建议，接着分小节给出教学建议.

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用. 另外，还设计了一些教学案例供教师参考.

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，检查学生学习本章内容的效果.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述. 希望教师在教学时努力贯彻这套教材的指导思想，体现各章编写的特色.

在教学中一定要贯彻“温故而知新”的原则. 数学知识的连贯性是十分强的，学生如果基础不好，继续学习就会有一些困难，也会因此丧失学好数学的信心. 所以在教材编写时，我们尽量降低了知识的起点，采取循序渐进的方式编排主要知识点，以此来帮助学生克服数学学习中的障碍，提高学生学习数学的兴趣.

B版教材把学习数学的思想方法放到首位. 教材中涉及到的数学方法有：（一）代数基本方法和技能（例如，设未知数列方程和解方程、待定系数法、配方法），（二）坐标法，（三）微分法等. 这些方法在教材中都得到了加强. 教师要重视这些基本数学思想方法的教学.

强调数形结合是本套教材的重要特色. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直观，形少数时难入微. 数形结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系、切莫分离！

这段话精辟地阐述了数与形之间的密切关系和相互作用. 教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

另外，B版教材还特别重视算法思想的渗透，培养学生用“通性、通法”思考问题的习惯.

为此，我们选用了科学计算软件Scilab来实现具体的算法．希望教师能运用好这一工具，从而达到使用计算机技术辅助教学的目的．同时，也希望教师能积极研究算法在数学教学中的作用和意义，为算法这一内容进入中学数学课堂贡献自己的力量．

数学1～5教师教学用书均附有两张光盘．一张内容是课堂实录，供教师教学时参考；另一张内容是为相关教学内容研制的课件（其中几何画板课件由北京20中学几何画板研究组协助制作），供教师教学时选用．数学3的课件光盘中还附有Scilab的安装程序，供大家使用．

本套教师教学用书的编写得到了山东省教学研究室、济南市教学研究室、潍坊市教学研究室、日照市教学研究室、山东省实验中学、山东师范大学附属中学等单位的大力协助，在此深表谢意！

由于时间紧，书中一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正．

我们的联系方式如下：

电　话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep. com. cn

中学数学教材实验研究组

目录

第一章 基本初等函数（II）

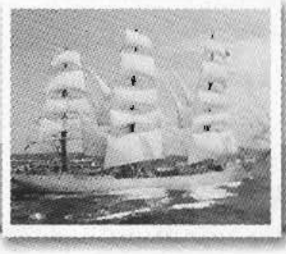
一 课程目标 …… 1
（一）知识与技能目标 …… 1
（二）过程与方法目标 …… 1
（三）情感、态度与价值观目标 …… 2
二 教材分析 …… 2
（一）编写特色 …… 2
（二）内容结构 …… 2
1. 内容编排 …… 2
2. 地位与作用 …… 3
3. 重点与难点 …… 3
4. 本章知识结构 …… 4
（三）课时分配 …… 4
（四）教学建议 …… 4
1.1 任意角的概念与弧度制 …… 4
1.2 任意角的三角函数 …… 8
1.3 三角函数的图象与性质 …… 15
三 拓展资源 …… 22
（一）纸扇能否按照黄金比例设计？ …… 22
（二）驾驭着波峰的数学 …… 22
四 教学案例 …… 23

案例 1：1.1.1 角的概念的推广 …… 23
案例 2：1.2.1 三角函数的定义 …… 27
案例 3：1.3.1-3 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 30

五 **习题参考答案与提示** …… 34

六 **反馈与评价** …… 66

Ⅰ 知识与方法测试 …… 66
Ⅱ 评价建议 …… 70



第二章 平面向量

一 **课程目标** …… 71

（一）知识与技能目标 …… 71
（二）过程与方法目标 …… 71
（三）情感、态度与价值观目标 …… 72

二 **教材分析** …… 72

（一）编写特色 …… 72
（二）内容结构 …… 72
1. 内容编排 …… 72
2. 地位与作用 …… 73
3. 重点与难点 …… 73
4. 本章知识结构 …… 73
（三）课时分配 …… 74
（四）教学建议 …… 74
2.1 向量的线性运算 …… 74
2.2 向量的分解与向量的坐标运算 …… 77
2.3 平面向量的数量积 …… 78
2.4 向量的应用 …… 79

三 拓展资源 …… 80

（一）向量的由来 …… 80

（二）用向量解决平面几何问题 …… 81

（三）利用平行、垂直的条件，求未知量 …… 82

（四）向量与三角函数的联系 …… 83

（五）向量与解析几何的联系 …… 83

四 教学案例 …… 84

案例 1：2.1.1 向量的概念 …… 84

案例 2：2.2.1 平面向量基本定理 …… 87

案例 3：2.3.2 向量数量积的运算律 …… 89

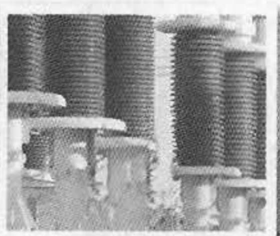
案例 4：2.4.1 向量在几何中的应用（1） …… 91

五 习题参考答案与提示 …… 93

六 反馈与评价 …… 113

Ⅰ 知识与方法测试 …… 113

Ⅱ 评价建议 …… 115



第三章 三角恒等变换

一 课程目标 …… 117

（一）知识与技能目标 …… 117

（二）过程与方法目标 …… 117

（三）情感、态度与价值观目标 …… 117

二 教材分析 …… 118

（一）编写特色 …… 118

（二）内容结构 …… 118

1. 内容编排 …… 118

2. 地位与作用 …… 118
3. 重点与难点 …… 118
4. 本章知识结构 …… 119
（三）课时分配 …… 119
（四）教学建议 …… 119
3.1 和角公式 …… 119
3.2 倍角公式和半角公式 …… 122
3.3 三角函数的积化和差与和差化积 …… 125
三 拓展资源 …… 127
（一）数学家米勒 …… 127
（二）万能公式 …… 128
（三）用构造模型法解三角题 …… 129
四 教学案例 …… 132
案例1：3.1.3 两角和与差的正切 …… 132
案例2：3.2.1 倍角公式 …… 134
案例3：3.3 三角函数的积化和差与和差化积 …… 138
五 习题参考答案与提示 …… 141
六 反馈与评价 …… 160
Ⅰ 知识与方法测试 …… 160
Ⅱ 评价建议 …… 163

第一章 基本初等函数（II）

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解任意角的概念和弧度制，能正确地进行弧度和角度的互化.

2. 使学生理解任意角的正弦、余弦、正切的定义；了解任意角的余切、正割、余割的定义；并会利用单位圆中的有向线段表示正弦、余弦和正切.

3. 理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2x+\cos^2x=1$，$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$；借助单位圆的直观性探索正弦、余弦和正切的诱导公式，并掌握其应用.

4. 理解正弦函数、余弦函数和正切函数的性质，理解周期函数与最小正周期的意义.

5. 能正确使用“五点法”、“几何法”、“图象变换法”画出正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，能正确地作出正切函数的简图；结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数 A，ω，φ 对函数图象变化的影响以及它们的物理意义.

6. 会用三角函数解决简单实际问题，了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

7. 会由已知三角函数值求角.

（二）过程与方法目标

1. 用运动变化的观点了解角的概念的推广是解决现实生活和生产中实际问题的需要，通过对各种角的表示法的训练，提高分析、抽象、概括的能力.

2. 正确理解三角函数是以实数为自变量的函数，通过研究三角函数的性质和图象，进一步体会数形结合的思想方法.

3. 通过图象变换的学习，培养运用数形结合思想分析、理解问题的能力；培养利用联系、变化的辩证唯物主义观点去分析问题的能力.

4. 结合有关内容(如角度与弧度的换算，已知角求它的三角函数值，已知三角函数值求角)进行算法的基本训练，鼓励学生运用计算器、计算机求函数值，作函数图象，探索和解决问题.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过对角的概念的推广，培养学生学习数学的兴趣；理解并认识角度制与弧度制是辩证统一的，不是孤立、割裂的.

2. 通过对同角三角函数的基本关系的学习，揭示事物之间普遍联系的规律，培养辩证唯物主义思想.

3. 通过图象变换的学习，培养从特殊到一般，从具体到抽象的思维方法，从而达到从感性认识到理性认识的飞跃.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 整章以旋转对称的思想作指导. 以旋转的度量为主线，展开三角函数的教学.

2. 本章设置“观览车”问题情境，在这个情境中，推广角的概念，引入单位圆和三角函数线，研究正弦函数的性质和图象，引入和角公式. 这一章较好地实现了设置情景进行教学的模式.

3. 温故知新，通过复习角度制引入弧度制，复习锐角三角函数引入任意角三角函数的定义. 把角理解为射线绕端点旋转而成的图形，把角的加法运算理解为旋转的代数和. 用任意角的旋转对称（包括轴对称和中心对称）证明诱导公式.

4. 重点学习正弦函数的图象和性质.

5. 使用计算机技术研究三角函数的性质.

6. 建立应用三角函数的数学模型.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章共分三大节，主要内容包括任意角的概念与弧度制、任意角的三角函数、诱导公式、同角三角函数的基本关系、三角函数的图象与性质，以及已知三角函数值求角等.

第一大节，是任意角的概念与弧度制. 首先在初中已学过的角和锐角三角函数的基础上，教科书通过实例，用运动变化的观点讲述了角的概念推广的实际意义，以表明这一推广的必要性；同时把角的概念由0°到360°范围推广到任意角的范围，引出终边相同的角和象限角的概念，这就为引入任意角三角函数和研究它们的性质作了准备. 接着引入度量角的弧度制以及角度制与弧度制的换算，并得到扇形的

弧长、圆心角、半径之间的关系式. 弧度制不仅作为度量角的另一种制度，更主要的是弧度数是十进位的实数，当角用弧度衡量时，每一个角对应一个实数，每一个实数对应一个角，对应关系十分明显，因此，三角函数可看成是以实数为自变量的函数.

第二大节，是任意角的三角函数. 教科书利用直角坐标系把三角函数的概念由锐角三角函数推广到任意角的三角函数，并引入正割和余割的概念，由三角函数定义总结出了三角函数的正负号规律，讲解了单位圆中的正弦线、余弦线、正切线的规定，从而将这些函数表示为有向线段. 教科书充分发挥单位圆的作用，帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性. 教科书借助单位圆推得同角三角函数的两个基本关系式，并导出全部诱导公式；在下一节，还利用单位圆作出三角函数的图象，研究三角函数的性质. 本节的学习目标是理解任意角三角函数的定义，理解用单位圆中的有向线段来表示三角函数值的原理，并初步学会使用单位圆解决关于三角函数性质的简单问题，让学生借助单位圆的直观性，自主地探索三角函数的有关性质，掌握同角三角函数关系式和诱导公式，能进行同角三角函数之间的变换，会求任意角的三角函数值，并记住某些特殊角的三角函数值.

第三大节，是三角函数的图象和性质. 教科书利用正弦线引入正弦曲线，并总结出五点作图法，由正弦曲线和正弦函数的定义讲解正弦函数的性质，包括值域、周期性、奇偶性、单调性，接着教科书重点讲解正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质以及简单应用. 在重点掌握以上内容的基础上，教科书简明扼要地介绍了余弦函数和正切函数的图象与性质，本节最后讲解了已知三角函数值求角的方法，并给出一般记号 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，但不出现反三角函数的名称，也不涉及反三角函数的其他知识. 通过本节学习，应掌握正弦函数、余弦函数、正切函数、正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$和余弦型函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$图象的画法，掌握“五点法”作图，并了解参数 A，ω，φ 的值对函数图象的影响，会用变换法说明有关函数图象之间的关系，能结合三角函数的图象或单位圆理解三角函数的性质，特别是应深入领会三角函数的周期性，领会它在描述自然界周期现象中的作用. 已知三角函数值求角在实际问题中经常用到，也应切实掌握. 正弦型函数在物理中有一定的应用，要引导学生重视学科之间的联系与综合，教科书选用了关于交流电和简谐振动的几个习题，教学上应加以重视.

本章最后安排了数学建模活动. 在数学 1 学习函数的时候已经讲过数学建模的基本思想，这里用一个框图概括了数学建模的一般过程，然后给出一个海水潮汐涨落问题让学生自己解决，在教学上教师要充分重视，精心指导，作为一次重要作业要求学生认真完成，最后应进行讲评，有条件时，还可组织学生深入实际调查研究，发现并解决问题，写出数学小论文.

2. 地位与作用

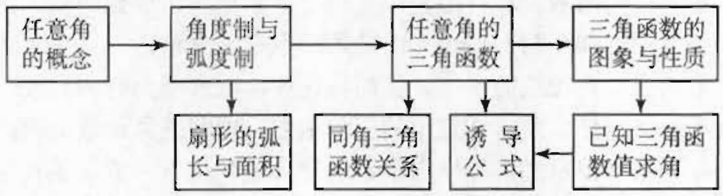
三角函数是基本初等函数之一，它是中学数学的重要内容之一，也是学习高等数学的基础. 它的认知基础主要是几何中圆的性质、相似形的有关知识，在数学 1 中建立的函数概念以及指数函数、对数函数的研究方法. 主要的学习内容是三角函数的概念、图象与性质，以及三角函数模型的简单应用；研究方法主要是代数变形和图象分析. 因此，三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来了. 本章所介绍的知识，既是解决生产实际问题的工具，又是学习后继内容和高等数学的基础，三角函数是数学中重要的数学模型之一，是研究度量几何的基础，又是研究自然界周期变化规律最强有力的数学工具. 三角函数作为描述周期现象的重要数学模型，与其他学科（特别是物理学、天文学）联系紧密.

3. 重点与难点

本章的教学重点是：任意角三角函数的概念，同角三角函数的关系式，诱导公式，正弦函数的性质与图象，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和正弦函数图象的关系.

本章的教学难点是：弧度制和周期函数的概念，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换，综合运用公式进行求值、化简和证明等.

4. 本章知识结构



(三) 课时分配

本章教学时间约 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 任意角的概念与弧度制		
	1.1.1 角的概念的推广	1 课时
	1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算	1 课时
1.2 任意角的三角函数		
	1.2.1 三角函数的定义	2 课时
	1.2.2 单位圆与三角函数线	1 课时
	1.2.3 同角三角函数的基本关系式	1 课时
	1.2.4 诱导公式	3 课时
1.3 三角函数的图象与性质		
	1.3.1 正弦函数的图象与性质	3 课时
	1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质	2 课时
	1.3.3 已知三角函数值求角	1 课时
本章小结		1 课时

(四) 教学建议

1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广

1. 本小节的中心内容是角的概念的推广、角的加法运算与旋转合成之间的联系.

2. 先复习初中学过的角的概念，然后设置“观览车”问题情境，推广角的概念，最后研究象限角的性质及表达式. 与以往教材不同的是，把旋转的合成与角度的加法运算对应起来，使数与形紧密结合以加深学生对角度运算的直观认识. 度数的减法，例如 $30°-60°$，不只是数量的减法计算，而让学生理解为两次旋转的合成. 实践表明，这种结合对学生直观掌握三角函数的种种性质是非常有帮助的.

书中通过4个例题，要求学生能熟练地掌握旋转的合成与角度的加法运算关系、象限角的概念、象限角和终边落在坐标轴上的角的代数表示. 通过思考与讨论，加深学生对象限角的理解. 这里可派生出各种各样的技能题，但最好不要让学生去做，以免分散学生对主要知识的关注与记忆.

3. 在引入大于360°的角和负角时，还可举些学生熟悉的生活中大于360°的角和负角的实例，除了教科书上提到的实例外，还可以通过介绍钟表的指针、自行车轮子、螺丝扳手、曲轴连杆等生活中按不同方向旋转时所形成的角，用以说明引入新概念的必要性和它的实际意义. 要结合动态的或静态的直观图，了解、认识和研究各种角，使学生对任意角的概念的理解与图形密切地结合起来.

4. 正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的，其正负出于习惯，和正负数的规定一样（也就是说，我们也可规定按顺时针方向旋转所成的角为正角，按逆时针方向旋转所成的角为负角）. 零角是一条射线没有作任何旋转而形成的角，它没有正负，就像实数零没有正负一样.

5. 要讲清象限角的概念. 讲解象限角的概念时，要强调直角坐标系的建立方法——顶点与坐标原点重合，角的始边与x轴的正半轴重合，这是判断某角为第几象限的角的前提. 在这个前提下，才能提到由终边所在象限来判定某角是第几象限的角这一标准. 同时应向学生指出终边落在坐标轴上的角不能成为任何象限的角，只说它的终边在哪条轴上. 用不等式表示象限角的范围是一个难点，例如，若角α适合$0°<\alpha<90°$，则α是第一象限的角；但若角α是第一象限的角，那么α是否满足不等式$0°<\alpha<90°$? 答案是：不一定，也可能是$360°<\alpha<360°+90°$等，一般情况是

$$k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,\ k\in\mathbf{Z}.$$

把这个无穷多个不等式所表示的范围表示在数轴上，则是无穷多条开线段，在讲象限角的概念时，教师一定要引导学生将以上问题弄清楚. 只是简单地交待象限角的定义，而不涉及用不等式表示象限角的范围，这是不可取的. 同样，只交待如何用不等式表示象限角所在范围，而不把这些范围见诸于图形(数轴)，也是不可取的. 遇到具体问题，学生可能感到茫然无措，例如，当讲完正弦函数的性质后，可问：若α和β都是第一象限角，且$\alpha<\beta$，那么$\sin\alpha$和$\sin\beta$的大小是否可以确定?

6. 角的概念推广以后，学生对“0°～90°的角”、“第一象限角”、“锐角”和“小于90°的角”这些概念容易混淆，教学时要注意引导他们加以辨别. 应强调指出“0°～90°的角”指的是一个前闭后开的区间$[0°, 90°)$；而其他三种角的集合可以分别表示成$\{\theta\mid k\cdot 360°<\theta<90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$\{\theta\mid 0°<\theta<90°\}$(即$(0°, 90°)$)，$\{\theta\mid \theta<90°\}$.

7. 终边相同的角的概念十分重要，它本身具有周期性，也是理解三角函数为周期函数的基础. 在讲这一概念时，可引导学生观察图形，由特殊到一般，让学生自己归纳出：与角α的终边相同的角的一般形式是$\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$. 同时应强调指出：(1) $k\in\mathbf{Z}$这一条件不可少，它表明了与α终边相同的角都相差360°的整数倍，或者在形成角的过程中，每当射线绕原点转一圈时，就会出现一个与α终边相同的角；(2) α是任意角；(3) 终边相同的角与相等的角是两个不同的概念，两个角相等，这两个角的终边一定相同；但是，两个角的终边相同时，这两个角不一定相等，它们相差360°的整数倍.

$\alpha+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$表示与角α终边相同的所有角. 这无穷多个角组成一个集合$\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，给$k$以适当的整数值，可以从这个集合中找到适合某条件的元素(角)，如教科书中的例4. 用集合的观点认识k，k的值与集合中的元素形成一一对应的关系，从几何意义来看，k表示角的终边按一定的方向转动的圈数. k取正整数时，逆时针转动；k取负整数时，顺时针转动；$k=0$时，没有转动. 总之，在讲终边相同的角时，应让学生明白k到底是怎样一个数、k起什么作用.

8. 例2的目的是使学生能在0°～360°范围内，找出与此范围外的某已知角终边相同的角，并判定

其为第几象限的角，这是为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数的值打基础的. 在 $0°$～$360°$之间求终边相同的角时，可用此角去除以 $360°$，使余数在 $0°$～$360°$之间，当角是正角时，相除后所得的余数即为所要找的角；当角为负角时，商数是负的，它的绝对值应比被除数为其相反数时相应的商大 1，以使余数为正值.

9. 本节的重点是任意角的概念、象限角的概念. 难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来. 理解任意角的概念，会在平面内建立适当的坐标系，通过数形结合来认识角的几何表示和终边相同的角的集合，是学好本节的关键.

1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算

1. 本小节教学的重点是弧度的意义，弧度与角度的换算方法. 难点是理解弧度制与角度制的区别：一个是十进制，一个是六十进制.

讲清 1 弧度的角的意义是建立弧度概念的关键. 学生可能会提出问题：为什么可以用等于半径的弧所对的圆心角来作为度量角的单位呢？这个角是否与所取的圆的半径大小无关呢？又为什么可以用弧长与其半径的比值来度量角的大小呢？即这个比值是否与所取的圆的半径大小无关呢？为了从直观上说明这些问题，可先在黑板上画出教科书图 1-6 的两个同心圆，使这两个同心圆的半径之比为 1∶2，任意作出一个圆心角，它的两边分别在两个圆上截得两段圆弧，用粗细合适的电线(或铁丝)让两个学生分别弯成圆弧形，量出两段圆弧的长度，就会发现两段圆弧长度之比是 1∶2. 在这个直观印象的基础上，教师再加以理论上的证明，使学生认识到在半径大小不同的圆中，只要圆弧长与对应半径之比相同，那么这些弧长所对的圆心角一定相等，从而说明用圆心角所对的圆弧长与半径之比来度量这个圆心角是合理的，从而可规定长度等于半径的圆弧所对的圆心角为 1 弧度. 此时，可在黑板上画出大小不同的两个圆，用长度等于半径的电线(或铁丝)弯成圆弧形，使它与相应圆弧的某一段重合，再从圆心向这段圆弧的两个端点引两条射线，得到两个圆心角，用量角器量这两个角，可以验证它们相等，这两个角都是 1 弧度的角. 经过这样的演示，可以帮助学生更好地理解弧度制的概念.

2. 讲授新课要本着“教为主导，学为主体”的原则，引导学生去发现和探究弧度的意义. 通过本节课的学习，要使学生理解弧度的意义，能正确进行弧度与角度的换算，熟记特殊角的弧度数. 了解角的集合与实数 **R** 之间可以建立起一一对应关系. 掌握弧度制下的弧长公式，扇形的面积公式. 会利用弧度解决某些实际问题. 要求学生在理解的基础上记忆.

3. 引进弧度制以后，应与角度制进行对比，使学生明确：(1) 弧度制是以“弧度”为单位的度量角的单位制，角度制是以“度”为单位来度量角的单位制；(2) 1 弧度是弧长等于半径长的弧所对的圆心角的大小，而 $1°$是圆周的$\frac{1}{360}$所对的圆心角的大小；(3) 以弧度和度为单位的角，都是一个与半径无关的定值.

4. 用公式 $\alpha=\frac{l}{r}$求圆心角时，应强调其结果是圆心角的弧度数. 在物理学上计算角速度时经常要用到它，因此应要求学生掌握它及其变形后的其他两种形式：$l=\alpha\cdot r$ 和 $r=\frac{l}{\alpha}(\alpha\neq0)$. 运用这两个公式时，如果已知的角以“度”为单位，应先把它化成弧度后再计算. 可以看出，这些公式各有各的用处.

5. 用“弧度”和“度”去度量一个角时，除了零角以外，所得到的数量都是不同的. 但是它们既然是度量同一个角的结果，二者可以相互换算. 角度制与弧度制换算的关键是由周角得到的等式

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad},\ 即\ 180^\circ=\pi\ \text{rad}.$$

将这两个等式的两边除以同一个不为零的数，就可得到一般的换算公式或某些特殊角的换算结果，如

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad},\ 1\ \text{rad}=\frac{180^\circ}{\pi}.$$

对于 $180^\circ=\pi$ 这个等式，应使学生正确理解，它只是说 π 弧度的角相当于角度制的 180°，其中 π 的近似值为 3. 141 592 6…. 抓住 $180^\circ=\pi$ 这一关键，许多特殊角的换算结果就很容易记忆了，即使一时忘记，利用这一等式也会很快求得结果. 教学中要引导学生写出一些常用的特殊角，如 30°，45°，60°，90°，135°，150°，270°等的弧度数. 同时要让学生学会使用计算器进行角度与弧度的互化.

6. 教学时要特别指出：(1) 用"弧度"为单位度量角时，"弧度"两字可以省略不写，这时弧度在形式上虽然是一个不名数，但是应当把它理解为名数，例如 sin 2 是指 sin(2 弧度)，$180^\circ=\pi$ 是指 $180^\circ=\pi$弧度. 但用"度"为单位度量角时，"度"(即"°")不能省去. (2) 用"弧度"为单位度量角时，常常把一个角的弧度数写成 π 的倍数的形式，且无特别要求时不必把 π 写成小数的形式. 例如 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$，不必写成 $45^\circ\approx0.875$.

7. 重视算法是本套教科书的一大特色，要不放弃一切机会进行算法的训练. 教科书介绍了由角度换算为弧度的一个算法，并在练习中要求学生写出由弧度换算为角度的算法. 教师在教学上对于这两个算法应给予一定重视.

8. 讲完弧度制后，应注意角 α 终边相同的角 $\alpha+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 的书写形式，式中的两项所采用的度量制必须一致，如 $30^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，$\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，这样写是正确的，而 $30^\circ+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\frac{\pi}{6}+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$这样写是不正确的.

9. 角的概念推广以后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集合 $\mathbf{R}$ 之间建立一种一一对应关系，所以不要误认为只有弧度制才能将角与实数一一对应.

10. 度量角的制度除角度制和弧度制外，还有军事上常用的密位制，密位制的单位是"密位"，1 密位就是圆周的$\frac{1}{6\,000}$的弧所对的圆心角. 因为 $360^\circ=6\,000$ 密位，所以

$$1^\circ=\frac{6\,000\ 密位}{360}\approx16.7\ 密位；$$

$$1\ 密位=\frac{360^\circ}{6\,000}=0.06^\circ.$$

关于密位制，可以给学生作简单的介绍，我们主要内容还是使学生掌握弧度制，简单介绍一下密位制，是使学生了解，度量角有各种不同的度量制度，这是历史形成的，是随着社会的发展逐步产生的. 角度制以度为单位，圆周的$\frac{1}{360}$的弧所对的圆心角为 1 度，1 度的$\frac{1}{60}$为 1 分，1 分的$\frac{1}{60}$为 1 秒，这种 60 进位制起源于古代的巴比伦. 弧度制把等于半径长的圆弧所对的圆心角规定为 1 弧度，这种以弧度为单位度量角的制度是 1748 年由欧拉正式引入的，将度量半径与圆弧的单位统一起来，这是弧度制的精髓. 采用弧度制后，可以简化许多公式，如计算弧长的公式，在角度制中为 $l=\frac{n\pi r}{180}$(其中 n 为圆心角的角度数)，在弧度制中为 $l=\alpha\cdot r$(其中 α 为圆心角的弧度数). 扇形面积公式，在角度制中为 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$(其中 n

为圆心角的角度数），在弧度制中为$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}r^2\alpha$.

采用弧度制后，三角函数的自变量和函数值都选用十进位的实数，使横坐标与纵坐标的单位取得一致，而在角度制之下是办不到的，角度制是60进制，三角函数是十进制，两者不统一，从而不可能在直角坐标系内作出真实的图形. 在弧度制之下有重要的不等式和极限：当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x<x<\tan x$；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. 这是有了弧度制后所表现出来的优点. 但是弧度制在实用上也有缺点，它的单位太大，所以在军事上常采用密位制，密位制比用角度制或弧度制更加适合军事需要. 除了以上三种制度之外，还有其他的角的度量制度，这里不再一一介绍.

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义

1. 本节的重点是三角函数的定义，明确对应法则和定义域. 难点是通过坐标求任意角的三角函数的值、判定三角函数值在各象限的符号.

2. 三角函数作为描述转角大小的度量，教材分三步引入三角函数的定义：

(1) 复习直角三角形中的边、角关系，锐角三角比.

(2) 在象限角的终边上任取一点，启发学生研讨这一点的坐标与象限角大小的关系. 然后证明三个比值

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{y}{x}$$

与点在终边上的位置无关.

(3) 根据判断函数的标准（函数值是否唯一、是否给出定义域)、定义正弦、余弦和正切这三个三角函数. 并且了解一下正割、余割和余切函数（课标没有要求). 这一小节的第二个内容是判断三个三角函数在各象限的符号，为进一步研究三角函数的性质作好准备.

建议增加一个练习，求120°和135°的三角函数.

三角函数的定义是本章最基本的概念，是其他所有知识的出发点，务必要求学生学好. 三角函数的定义是在初中对锐角三角函数的定义以及刚学过的“角的概念的推广”的基础上讨论和研究的，定义对象从锐角三角函数推广到任意角的三角函数，定义媒介则从直角三角形改为平面直角坐标系. 使学生在认知结构上发生了很大变化. 教学中应从学生已有的知识谈起，引导学生将三角函数的概念由锐角三角函数推广到任意角的三角函数. 首先把α的终边画在第一象限，在α的终边上任取一点，记$P(x,y)$，明确x、y和$|OP|$（记为r)的几何意义，然后按照锐角三角函数的定义写出

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

这些都是学生已经知道的，我们就是在这一基础上进行推广，当α为任意角时，仍然按上述的比值来定义各三角函数，并进而给出$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$，从而完成了任意角的六个三角函数的定

义. 这样讲可以很自然地把新旧知识连成线，同时也可体会到由特殊到一般的思维方法.

3. 在讲三角函数的定义时，首先应使学生理解每一个三角函数都是以角为自变量的函数，在角的终边上所取的点 $P(x, y)$ 是任意取定的(当然不取原点)，由三角形的相似可知，所得比值都对应相等，因此，三角函数值都决定于角的终边的位置. 三角函数都是以角为自变量，以比值为函数值的函数. 在此基础上进一步讲解，由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应的关系，三角函数就可以看成是以实数为自变量的函数，这里的角通常采用弧度制来度量，使得角所取的值与三角函数值都是十进制的实数. 即

对于三角函数的定义域，应抓住分母不为零这一关键，为此需要注意，当角的终边在坐标轴上时，点 P 的横、纵坐标中必有一个为零，由此可启发学生自己得出有关结论.

4. 教科书把六个三角函数分成两段分别给出定义，使用“有时我们还用到下面三个函数”的话语，其意是重点突出正弦、余弦、正切. 在关于函数的定义列表中，也是只列出这三个函数的定义域，但是教科书仍然给出了 $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$，$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$，$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$ 这三个关系式，在例题和练习中也有求正割、余割、余切值的内容，在教学中要突出重点，让学生切实掌握正弦、余弦、正切的有关知识，同时兼顾全面，让学生知道正割与余弦、余割与正弦、余切与正切的关系.

5. 应当引导学生深刻认识三角函数符号的含义. 如 $\sin\alpha$ 这个符号，它表示 $\frac{y}{r}$，即角 α 的正弦，不能把 $\sin\alpha$ 看成 sin 与 α 的乘积，犹如 $f(x)$ 不能看成 f 与 (x) 的乘积一样，离开了自变量 α，符号 sin 就没有意义了. 同时也应注意，每个函数记号的第一个字母“s”或“c”或“t”都不能大写，不能让学生养成写“$\text{Sin}\,\alpha$”，“$\text{Cos}\,\alpha$”等习惯.

6. 函数的定义域是函数概念两要素(定义域、对应法则)之一，因此，对正弦、余弦、正切函数定义域的教学要十分重视. 确定这三种三角函数的定义域时，应抓住分母等于 0 时比值无意义这一关键. 为此需要注意：如果点 P 不在原点，那么角的终边 OP 落在坐标轴上的充要条件是点 P 的坐标中有且只有一个为 0，由此可以启发学生自己去得出结论. 其中对于正切函数的定义域要特别小心. 教科书中，用表格列出了这三种三角函数的定义域，最好让学生根据这个表格来进行对比和记忆.

7. 三角函数的正负号规律是十分重要的，后面三角函数的学习几乎处处要用到它. 在初讲三角函数正负号规律时，一定要充分重视，让学生明白道理，也就是如何确定比值的正负号. 要让学生自己去观察、思考、总结. 正弦、余弦、正切函数值的符号，是根据这三种函数的定义和各象限内坐标的符号导出的. 因为从原点到角的终边上任一其他的点的距离 $r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ 总是取正值，根据这三种函数的定义可知，正弦值、余弦值的符号分别取决于纵坐标 y、横坐标 x 的符号；正切值则是纵坐标 y、横坐标 x 同号时为正，纵坐标 y、横坐标 x 异号时为负. 教科书把正负号规律总结为图 1-12 中的三个图，这三个图分别说明当角在不同象限时，各函数值应取的正负号，按这三个图记忆正负号规律是最好的记忆方法. 另外，也可以用口诀“一全正，二正弦，三正切，四余弦”来记忆，此口诀表示正

弦、余弦、正切这三种三角函数的值，“第一象限全正，第二象限只有 sin 正，第三象限只有 tan 正，第四象限只有 cos 正”，可简化为“全，s，t，c”.

8. 特殊角的三角函数值是常用的数值，学生在初中已经记住 30°，45°，60°的正弦、余弦、正切、余切等值. 本章在讲完任意角的三角函数以后，配备了求 0，π，$\frac{3\pi}{2}$的各三角函数值的例题，在练习中要求学生把 0°，90°，180°，270°，360°的各三角函数值填入表中，并加以记忆. 当讲完诱导公式后，将把特殊角的范围进一步扩大，要求学生记住 120°，135°，150°，210°，225°等特殊角的各三角函数值，教师在教学上要全盘考虑，逐步要求学生记忆.

9. 例 1 是已知角 α 终边上一点的坐标，求角 α 的六个三角函数值；例 2 是求某些特殊角的六个三角函数值，这两道例题都是为了巩固任意角三角函数的概念. 例 3、例 4 的目的都是为了使学生掌握正弦、余弦、正切这三个三角函数的值在各象限的符号.

1.2.2 单位圆与三角函数线

1. 本小节的教学重点是，正确地用三角函数线表示任意角的三角函数值，培养学生数形结合的良好的思维习惯. 难点是，正确地用与单位圆有关的三角函数线表示三角函数值.

2. 三角函数的单位圆模型，是研究三角函数的最得力的工具. 从这一节开始，教材基本上都是利用单位圆来研究三角函数的性质与图象的.

三角函数线作为三角函数值的几何表示，它给三角函数的定义以直观的解释，同时能帮助学生理解和掌握三角函数的定义域及三角函数的符号规律，养成数形结合的良好习惯.

在掌握正弦线、余弦线、正切线画法的基础上，利用它们推导同角三角函数的关系式和诱导公式，利用它们作三角函数的图象和由三角函数值求角，在第三章还利用它们推导和角公式. 本节内容具有承前启后的重要作用. 由于三角函数线是三角函数定义的几何表示，所以应用三角函数线来解决三角问题非常直观，有利于提高学生自主地分析问题和解决问题的能力，在教学中一定要特别重视.

3. 用现实生活中的例子引入本节内容，学生不仅可以认识到三角函数还可以用一条(有向)线段来表示，而且可以感受到数学知识在现实生活中的巨大作用，从而激发他们学习数学的浓厚兴趣.

单位圆是三角函数线建立的基石，离开单位圆就谈不上三角函数线，因此单位圆概念的建立是前提. 单位圆概念要着重理解“一个单位”的含义.

单位圆中的三角函数线是用轴上向量表示的，关于轴上向量的概念在解析几何初步中已经学过，在本节教学中要进行复习，要明确轴上向量是既有长度又有方向的线段，用轴上向量的数量表示三角函数值，其长度表示三角函数的绝对值，其方向表示三角函数值的正负号. 为什么能用轴上向量来表示三角函数值呢？关键是使比值的分母等于 1. 由此导出了正弦线、余弦线和正切线. 教学时，要抓住这一关键，使学生理解这一原理. 教科书上，首先根据三角函数定义说明角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，就是依据这一原理得到的，接着指出 $\cos\alpha=OM$，$\sin\alpha=MP$，进而得到 $\tan\alpha=AT$(或 AT'). 教学时，为了更加明确起见，最好在黑板上，或者在投影屏幕上画出角 α 的终边分别在四个象限的四个圆(图 1-1).

结合这个图形，引导学生弄清以下几点：

(1) 三角函数线的位置：正弦线为 α 的终边与单位圆的交点到 x 轴的垂直的有向线段；余弦线在 x 轴上；正切线在过单位圆与 x 轴正方向的交点的切线上. 三条有向线段中两条在单位圆内，一条在单位圆外.

(2) 三角函数线的方向：正弦线由垂足指向 α 的终边与单位圆的交点；余弦线由原点指向垂足；正

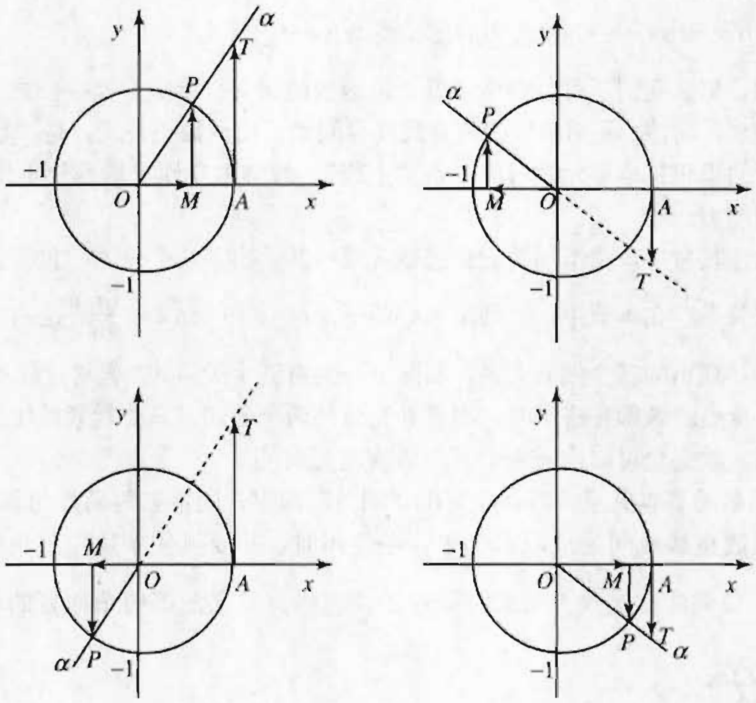


图 1-1

切线由切点指向与 α 终边(或其反向延长线)和切线的交点.

(3) 三角函数线的正负，即三条有向线段的正负：凡与 x 轴或与 y 轴同向的为正值，反向的为负值.

若角 α 的终边在坐标轴上，要注意引导学生考虑特殊情况，使他们养成良好的思维习惯，正确处理好特殊与一般的关系.

4. 学习单位圆的主要目的在于利用它来解决问题，在教学上，应不放弃可能的机会，引导学生借助单位圆的直观，探索三角函数的有关性质. 教科书在练习或思考题中编排了一些习题，要求学生认真完成. 三角函数线作为三角函数的几何表示，可适当补充一些三角函数线的应用，如比较三角函数值的大小；已知 $\sin x=\frac{1}{2}$，求 x. 让学生增强“数形结合”的意识，也为今后学习有关内容打下基础. 有条件时，可用计算机演示，例如当角 α 由 0 增加到 2π 时，观察正弦线、余弦线、正切线的变化，从而得知各函数值的增减情况. 在适当的时候，可以让有兴趣的学生写篇小论文，说明单位圆的应用.

1.2.3 同角三角函数的基本关系式

1. 本小节的重点是同角三角函数基本关系式的推导及其应用，难点在于关系式在解题中的灵活运用和对学生进行思维灵活性的培养上.

2. 应注意，这一节与以往教材的不同点是，在求三角函数值时，贯彻解方程组的通法. 不过，这里的未知数是正弦、余弦或正切. 实验证明，利用通法求三角函数的值，多数学生都会从中受益.

3. 同角三角函数关系式是借助单位圆得到的，关键是必须理解角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)，即 OM=\cos\alpha,\ MP=\sin\alpha,$$

再由勾股定理得到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，由正切的定义得 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

如果避开单位圆，那么我们还可以完全依据三角函数的定义直接推导这些公式. 教材采用单位圆来处理，主要是为了直观、简洁. 利用单位圆的直观推导同角三角函数关系式，是“数”与“形”的一次完美结合，数形结合的思想是本单元学习的一条“主线”. 教学中应注重培养学生用数学的思想方法分析和解决数学问题的能力.

应该说明，在以往教材中，关于同角三角函数关系一共给出了八个公式，包括三个平方关系、三个倒数关系、两个商数关系. 在本节中，只列出 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 和 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$这两个关系式，再加上前面讲三角函数定义时，列出的三个倒数关系，实际上一共有五个关系式. 教材这样处理，是为了减轻学生的学习负担，突出重点. 教师在讲课时，不要补充另外两个公式，只要紧紧抓住这两个最主要的关系式，再加上倒数关系，就完全可以沟通六个三角函数的关系了.

4. 讲同角三角函数的基本关系式时，应突出“同角”两字，同角三角函数的基本关系式将“同角”的三种重要的三角函数直接或间接地联系起来，在使用时，一要抓住本质，跟角的具体形式无关(如 $\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha=1$)；二要注意这些关系式都是对于使它们有意义的那些角而言的(如 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$中，要求 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$).

另外，要提醒学生注意：$\sin^2\alpha$ 是$(\sin\alpha)^2$的简写，读做 $\sin\alpha$ 的平方，不能将 $\sin^2\alpha$ 写成 $\sin\alpha^2$，前者是 α 的正弦的平方，后者是 α 的平方的正弦，两者迥然不同.

5. 同角三角函数的基本关系式主要用于：

(1) 已知某角的一个三角函数值，求它的其余各三角函数值；

(2) 化简三角函数式；

(3) 证明三角恒等式.

6. 在应用基本关系式做以上求值、化简、证明时，应能灵活运用公式，例如，根据需要可把公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，变形为 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$；把 1 用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha$，$\sin\alpha\cdot\csc\alpha$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha$ 代替；把 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$变形为 $\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$，$\cos\alpha=\cot\alpha\cdot\sin\alpha$ 等等.

已知某角的一个三角函数值，求它的其余各三角函数值时，要注意角所在的象限，这主要是使用 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$或 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$时，要根据角 α 所在的象限，恰当选定根号前面的正负号，而使用 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$时，没有选定正负号的问题. 这类题通常有下列几种情况：

(1) 如果已知三角函数的值，且角的象限已被指定时，那么只有一组解；

(2) 如果已知三角函数的值，但没有指定角在哪个象限，那么由已知三角函数值确定角可能在的象限，然后再求解，这种情况一般有两组解；

(3) 如果所给的三角函数值是由字母给出的，且没有指定角在哪个象限，那么就需要进行讨论. 例如：已知 $\sin\alpha\neq0$ 且 $\sin\alpha\neq\pm1$，用 $\sin\alpha$ 表示 $\tan\alpha$.

解：因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

当 α 在第一、四象限时，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，从而得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

当 α 在第二、三象限时，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，从而得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

7. 对于三角函数式的化简，实际上是一种不指定答案的恒等变形，体现了由繁到简的最基本的数学解题原则. 它不仅要求学生熟悉和灵活运用所学的三角公式，还需要熟悉和灵活运用这些公式的等价形式. 同时，这类问题还具有较强的综合性，对其他非三角知识的运用也有较高的要求，在教学时要注意正确的引导和及时的总结. 三角函数化简时，在题设的要求下，首先应合理利用有关公式，还要明确化简的基本要求：尽量减少角的种数，尽量减少三角函数种数，尽量化为同角、同名等. 其他思想还有：异次化同次、高次化低次、化弦或化切、化和差为乘积、化乘积为和差、特殊角三角函数与特殊值互化等. 教学时应通过例题说明，化简一定要尽量化为最简形式. 例如教科书中的例 5，化简 $\sqrt{1-\sin^2 80^\circ}$，最后要化简到 $\cos 80^\circ$，如果只化到 $|\cos 80^\circ|$ 为止，则不能认为是最后结果，另外由于 80° 不是特殊角，一般无须求出其余弦值(实际上，写出的余弦值只是一个近似值，这不符合恒等变形的要求).

8. 三角恒等式的证明在三角函数学习中有一定的作用，有利于发展学生的推理能力和运算能力，证明恒等式的过程就是通过转化和消去等式两边差异来促成统一的过程，证明的方法在形式上显得较为灵活，常用下面的方法：

第一种方法，是从不等式的一边开始证，得它的另一边. 一般从比较复杂的一边开始化简到另一边(如例 6 第(1)题的证法)，其依据是相等关系的传递性.

第二种方法是综合法. 由一个已知成立的等式(如公式等)恒等变形得到所要证明的等式(如例 6 第(3)题证法 2)，其依据是等价转化的思想，即 “$a=b$ 等价于 $c=d$，所以 $a=b$ 成立当且仅当 $c=d$ 成立”.

第三种方法是证明等式左右两边都等于同一个式子. 其依据是等于同一个量的两个量相等，即 “$a=c$，$b=c$，则 $a=b$”，它可由相等关系的传递性及对称性推出.

第四种方法是分析法.

例：求证 $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证明：要使原等式成立，只需

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$$

成立，即 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

由基本关系式知上式显然成立，所以原等式成立.

以上推理过程可简写为下列格式：

原式成立 $\Leftarrow \cos\alpha\cdot\cos\alpha=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha) \Leftarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，由于最后这个式子显然成立，所以原等式成立.

用分析法证题的实质是执果索因，一般对证明题，可先用分析法探求其成立的充分条件，然后用综合法写出证明. 因此，用综合法写出的证明过程并不等于其探索过程，其实在写证明之前，答题者已经用分析法思考过了.

在讲分析法时，必须对学生强调推理过程要写正确，如 “只需” 的词语或者 “$\Leftarrow$” 的符号是不能省

略的. 如果写成下面的形式，则是错误的：

证明：$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cos\alpha\cdot\cos\alpha=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以成立.

1.2.4 诱导公式

1. 本小节的重点是四组诱导公式以及这四组诱导公式的综合应用. 难点是公式(四)的推导和对称变换思想在学生学习过程中的渗透.

2. 诱导公式表述的是各三角函数的性质及它们之间的关系，我们用对称的观点推导各诱导公式.

与传统教材不同的是，我们把 $2k\pi+\alpha$ 写为 $\alpha+2k\pi$，$\pi+\alpha$ 写为 $\alpha+\pi$，这种改写，更容易使学生理解旋转的合成与对称之间的关系. 另外改写后的表达式就与后面三角函数周期性等的表达式统一了起来. 实践证明这种改写对学生理解诱导公式和三角函数的性质极为有利. 第一组公式描述各三角函数的周期性：α 与 $\alpha+2k\pi$ 的终边相同.

第二组公式描述各三角函数奇偶性：余弦函数是偶函数，正弦函数和正切函数是奇函数. 分别由点关于 y 轴、x 轴的对称点之间的坐标关系导出.

第四组描述正弦和余弦函数之间的关系，正切和余切函数（课标不要求）之间的关系. 正是有了这些关系，所以我们只要重点研究正弦函数的性质与图象就可以了. 根据这些关系，我们很容易知道余弦和正切函数的性质. 这组公式的证明说明，不同的教材，各有千秋. 以前的证明是把 α 作为锐角，利用直角三角形全等完成，虽有缺陷，不能不说这仍是一个很好的选择，学生直观易懂. 本教材依据的是旋转对称的性质：任一个旋转变换都可以分解为两个轴对称变换的合成.

α 到 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的旋转可以分解为两个轴对称的合成. 这只要选直线 $y=x$ 和 x 轴分别作为两次轴对称变换的对称轴就可达到. 若点 P 关于 $y=x$ 的轴对称点为 M，作 M 关于 y 轴的对称点 N，设单位圆与 $y=x$ 和 y 轴分别相交于点 Q，S. 则

$$\angle xOP=\alpha,\ \angle xON=\alpha+\angle PON,$$

$$\angle PON=2(\angle QOM+\angle MOS)=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\angle xON=\alpha+\frac{\pi}{2}$. 由于上式都用转角表达，因此上式对任意角 α 都成立.

3. 概括起来，教科书共给出了四组诱导公式，每组中包括正弦、余弦和正切这三个三角函数的有关等式. 在 $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 中，还给出了余切的有关等式. 公式数量比以往教科书减少了很多. 实际上，所有的诱导公式可以概括为 $k\cdot 90^\circ\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的各三角函数值，当 k 为偶数时，得 α 的同名三角函数值；当 k 为奇数时，得 α 的余名三角函数值；然后在前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号. 为了便于记忆，还可编成一句口诀："奇变偶不变，符号看象限."

4. 在诱导公式的学习过程中，变换思想贯穿始终. 在教学中应注意将数学思想渗透于知识传授之中，让学生了解对称变换思想在研究数学问题中的应用，初步形成用对称变换思想思考问题的习惯.

5. 知识的纵向延伸可以获得知识，而加强知识间的横向联系更能发展学生的思维能力，提高其灵活运用知识分析和解决问题的能力. 在例、习题的安排上，要由浅入深，循序渐进，并有意识地把诱导公式的运用综合起来.

1.3 三角函数的图象与性质

1.3.1 正弦函数的图象与性质

1. 本小节的教学重点是正弦函数的性质与图象. 难点是，理解弧度值到 x 轴上点的对应和正弦型函数. 开始时，教学进程一定要慢一些，让学生有一个形成正确概念的过程. 在小学度量角度使用的是60°进制，弧度用弧长（十进制）度量，再转化为 x 轴上的有向长度. 实践证明，这个抽象过程对初学者有一定的难度. 画出图象后，接着要解决确定函数的主要因素：在一个周期内的关键的五个点.

2. 单位圆的教学. 引领学生沿单位圆"旅行"，通过观察函数线的变化来认识三角函数的性质，是很多教师成功的教学经验. 近几年来，很多教师在用单位圆画完三角函数的图象后，改用图象研究三角函数的性质，弱化单位圆中有向线段的作用. 应该说，这两种教学方法各有优缺点：前者生动直观，但正弦线和余弦线与两条坐标轴平行或重合，实质上是用参数表示，用它理解函数的性质，学生需要一次转化，在认识上，有的学生会产生困难；后者已实现了转化，从图象认识函数的性质，同样具体、直观. 做好两种方法的结合，可能会引导学生更深刻地理解三角函数的性质.

3. 正弦函数的性质.

(1) 讲正弦函数的性质时，要从多方面讲解，一方面要用正弦函数的定义，从理论上分析推导，例如用 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 证明正弦函数的值域是$[-1, 1]$；用诱导公式证明正弦函数是周期函数，且周期为 $2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$且 $k\neq0$ 等等. 另一方面要观察图形，使学生对这些性质有直观印象，图形有正弦线和正弦曲线，都应教会学生如何观察，这两者的观察方法是有区别的，教师在讲课时，可充分利用多媒体设备，让学生观察、理解、记忆，如果没有多媒体设备，可以自已制作教具，例如单位圆示教板就可以自制，这对于提高教学效果有很大的帮助.

(2) 对于函数的周期性，先通过正弦函数图象的重复出现的特点，让学生对周期有直观的认识，周期函数的定义也可以叙述为：当函数对于自变量的一切值，每增加或减少一个定值(定值可以有很多个)，函数值就重复出现时，这个函数就叫做周期函数. 然后再给出严格定义. 将定义分解讲清，使学生理解定义包含的要素、关键词语，如"如果存在"说明不是所有函数都有周期，"T"要满足"非零"和"常数"两个条件. 函数的周期性是函数的一种重要性质. 把学生已学过的奇函数、偶函数与现在学习的周期函数像下面这样对比着讲，对学生了解周期函数的意义将是有益的.

如果函数 $f(x)$对于其定义域内的每一个值，都有：

$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$叫做奇函数；

$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$叫做偶函数；

$f(x+T)=f(x)$，其中 T 是非零常数，那么 $f(x)$叫做周期函数.

以上仅是形式上的对比，讲解时还应利用函数的图象来说明"奇函数""偶函数""周期函数"这三个概念各是什么意义.

(3) 讲解周期函数与周期的意义时，还应向学生强调以下几点：

① 在周期函数的定义中，有"当 x 取定义域内的每一个值时"这一说明，这里要特别注意"每一个值"四字. 如果函数 $f(x)$不是当 x 取定义域内的"每一个值"时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么 T 就

不是 $f(x)$ 的周期．例如，分别取 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{\pi}{6}$，则由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$，$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\frac{\pi}{6}$ 可知，$\frac{\pi}{2}$ 虽然是一个非零常数，但对于正弦函数来说，不是当 x 取定义域内的"每一个值"时，都有 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$，所以 $\frac{\pi}{2}$ 不是正弦函数的周期．但是 $\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in\mathbf{Z})$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，所以 $2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$ 是 $\sin x$ 的周期．

② 对于某些周期函数 $f(x)$，在它所有的周期中，不一定存在一个最小的正数，即某些周期函数没有最小正周期．例如常数函数 $f(x)=C(C$ 为常数$)$，$x\in\mathbf{R}$，这个函数适合 $f(x+T)=f(x)=C$，因此它是周期函数，周期 T 可以是任意非零常数，然而正数集合没有最小元素，所以该函数没有最小正周期．又如，函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

设 r 是任意一个有理数，当 x 是有理数时，$x+r$ 也是有理数，当 x 是无理数时，$x+r$ 也是无理数，于是

$$D(x+r)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

这说明 $D(x+r)=D(x)$，即 $D(x)$ 是周期函数，且任意非零有理数都是它的周期，然而正有理数集合中没有最小正元素，所以 $D(x)$ 没有最小正周期．

③ 对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期．如果不特别说明，教科书中今后所涉及的周期，一般都是指函数的最小正周期．

(4) 关于正弦函数的周期与最小正周期，一般只要讲清定义，并根据正弦曲线观察出结果就可以了．对于学有余力的学生，让他们证明正弦函数的最小正周期是 2π，可以训练他们对反证法的运用．下面证明正弦函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 2π．我们使用反证法：

设 T 是 $y=\sin x$ 的最小正周期，且 $0<T<2\pi$，根据周期函数的定义，当 x 取定义域内每一个值时，都有

$$\sin(x+T)=\sin x.$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，代入上式，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

但是 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\cos T$，于是 $\cos T=1$，这表明 T 的值是 0，2π，…，即 $T=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，这与 $0<T<2\pi$ 相矛盾．所以不存在小于 2π 的正周期．即 $y=\sin x$ 的最小正周期为 2π．

以上的证明过程不必给学生讲，只要讲清周期函数的意义，理解正弦函数是周期函数，最小正周期是 2π，知道周期函数的特征就可以了．

(5) 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期，要让学生从周期的定义上去理解：周期是指能使函数值重复出现的自变量 x 要加上的那个数，这个数是针对 x 而言的．例 4(1) 函数 $y=\sin 2x$，如果对 $2x$ 而言，每增加 2π，$\sin 2x$ 的值就重复出现；但对自变量 x 而言，每增加 π，$\sin 2x$ 的值就能重复出现，因此 $\sin 2x$ 的周期是 π．如果不设辅助未知数，本例的解答可写为

$$f(x)=\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)=f(x+\pi).$$

即 $f(x)$ 中的 x 以 $x+\pi$ 代替，函数值不变，所以 $\sin 2x$ 的周期为 π. 由此可知，三角函数的周期与自变量 x 的系数有关.

（6）从正弦曲线的形状，可以很清晰地看出正弦函数的定义域、值域、最大（小）值、符号、周期性、奇偶性、单调性等. 其中最大（小）值的存在，说明正弦函数是上下有界的，称正弦函数具有有界性. 正弦函数的这些特性，为归纳出用“五点法”画出它在长度为一个周期的闭区间上的简图，并把这一简图向左、右连续平行移动，从而得出在整个定义域内的简图提供了可能. 从图象看性质，用性质画图象（或简图），体现了“数形结合”这一基本数学思想的巨大作用，教学时应让学生认真体会.

4. 关于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

（1）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象在物理和工程技术领域中应用广泛，在引入函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象时，教科书以生活中的一个实际问题——观览车的问题作为引例，并列举了一个物理学问题引出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，并说明参数 A，ω，φ 的实际意义，这样既结合了实际，又体现了学以致用的思想. 教师在教学中要尽量将其与学生已有的物理知识联系起来，对于教材中配备的少量有关的应用题要充分重视，作业中出现的问题，应及时讲评，使学生切实弄清楚. 本章最后安排了一个数学建模题，也是利用该函数解决的.

（2）本部分的一个教学目的，首先是使学生会用“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象. 正确列表，作图正确、美观，坐标轴上的单位要标正确，曲线形状要正确，不要画成折线. 教材由简单到复杂，通过具体的例题一步步讲解. 作图的关键是列表，应注意到教材中的例题讲了两种列表方法. 例如：$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

方法 1：分别令 $2x-\frac{\pi}{3}$ 等于 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π.

得到相应的 x 值为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{11\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{6}$.

得到相应的 y 值为 0，2，0，-2，0.

方法 2：令 $2x-\frac{\pi}{3}=0$，得 $x=\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{12}$，周期 $T=\pi$，四分之一个周期 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{12}$，然后由第一点的 x 值 $\frac{2\pi}{12}$ 开始递加 $\frac{T}{4}$ 得到下表：

x	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{14\pi}{12}$
y	0	2	0	-2	0

以上过程中，记 $\frac{\pi}{4}$ 为 $\frac{3\pi}{12}$，$\frac{\pi}{6}$ 为 $\frac{2\pi}{12}$，是为了计算上的方便，也为了下一步标注 x 轴上的单位的方便. 在 x 轴上选定适合的长度为 $\frac{\pi}{12}$，以此为单位很容易准确地找到 $\frac{2\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{8\pi}{12}$，$\frac{11\pi}{12}$，$\frac{14\pi}{12}$ 的位置，找到位置后，把需要约分的约尽，把既约分数标在该位置处即可. 如果不这样作，学生很难准确地直接找到分母不同的 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{12}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{11\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{6}$ 的位置. 至于 y 轴，则以 x 轴上 π 的 $\frac{1}{3}$ 作为 1 即可. 除了以上方法之外，还可以用等分线段等方法标注单位.

(3) 本部分的另一个教学目的是使学生掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中 A，ω，φ 对于图象的影响. 教材在讲“五点法”的同时，指出了 $|A|$ 的大小反映曲线波动幅度的大小；$|\omega|$ 的大小，决定曲线的周期的大小；φ 的值与曲线左右平移有关. 在倒数第二个例题中指出了，如何由正弦曲线开始，经过适当的变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的曲线. 总的来说，其思维过程是：

① 画出正弦曲线 $y=\sin x$ 在长度为 2π 的某闭区间上的简图；

② 沿 x 轴平行移动，得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 在长度为 2π 的某闭区间上的简图；

③ 横坐标伸长或缩短，得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 在长度为一个周期的某闭区间上的简图；

④ 纵坐标伸长或缩短，得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在长度为一个周期的某闭区间上的简图；

⑤ 沿 x 轴扩展，得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图.

这一思维过程并不常用来实际作图，主要是用来揭示函数图象之间的关系以及 A，ω，φ 对函数图象的影响. 实际作图，通常还是用“五点法”.

由函数 $y=\sin x$ 的图象变换到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象过程中，变换的顺序不同可能变换的量不相同，例如，先变相位，再变周期，与先变周期，再变相位，相位变换的量不同. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$，再将所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 得到；也可先将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，再将所得各点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到. 这一不同，学生很难理解，很容易出错，也是经常被考查的内容. 首先给学生说明对于 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的 ω，φ 均是针对 x 而言的，因此在变换的过程中关键就看 x 变换了多少，其他因素暂时不考虑. 可以借助多媒体课件讲解，能起到更好的效果.

(4) 求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最大值、最小值、周期和单调区间等，是本节的又一教学要求，其中，求取得函数最大值和最小值时相应的 x 的值以及求函数的单调区间要会使用换元法，设 $t=\omega x+\varphi$，化为 $y=A\sin t$，再解决问题.

(5) 通过本部分的学习，要使学生会用“五点法”画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图. 这种函数在物理学和工程技术中应用比较广泛；会画出这种函数的简图，也就会举一反三地画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k(k\neq0)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的简图. 同时，还应通过本部分了解其中渗透的由简单到复杂，由特殊到一般的化归思想.

(6) 本部分的重点是用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图. 当 $\omega\neq1$ 时，弄清函数 $y=A\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的关系，是学习上的一个难点.

1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质

1. 教材讲余弦函数 $y=\cos x$ 的图象是用变换法讲的，没有使用描点法. 由

$$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

可知，把 $y=\sin x$ 的图象向左平行移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就得到 $y=\cos x$ 的图象. 这说明余弦曲线的形状和正弦曲线相同，只是位置不同而已. 引入余弦曲线以后，应让学生在同一坐标系中，画出 $[0, 2\pi]$ 上的正弦曲线和余弦曲线，标出曲线与两条坐标轴的交点坐标，观察曲线，弄明白它们的相同点和不同点. 抓住 $[0, 2\pi]$ 上这一周期上的曲线的区别，两条曲线就不会混淆.

2. 画余弦曲线，通常也使用“五点法”，使用“五点法”时，五个横坐标的确定方法与画正弦曲线相同，只是纵坐标的确定方法不同. 在 $y=\sin x$ 中，相对于 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π 的 y 值是 0，1，0，-1，0；而在 $y=\cos x$ 中，则为 1，0，-1，0，1.

3. 关于余弦函数 $y=\cos x$ 的性质，教科书写得比较简明，这是因为学生已经有了研究正弦函数 $y=\sin x$ 性质的经验. 对于余弦函数的性质很容易理解，讲课时，让学生观察余弦线或余弦曲线，逐一说出余弦函数的定义域、值域、最大值和最小值以及何时取得最大值和最小值，奇偶性，单调区间. 其中单调区间不必死记硬背，只要观察$[0, 2\pi]$上的图象，可知$[0, \pi]$是余弦函数的一个减区间，$[\pi, 2\pi]$是余弦函数的一个增区间，然后根据余弦函数的周期为 2π 的整数倍，就可得到一般结果.

4. 用“五点法”和变换法作函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$的图象，求这个函数的最大值、最小值、周期以及单调区间等，是本节的又一重要内容. 解决问题的方法与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$是一脉相承的，例如，求单调区间问题，设 $t=\omega x+\varphi$，则把 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$转化为 $y=A\cos t$，而当 $A>0$ 且 $2k\pi\leqslant t\leqslant 2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，函数为减函数，再由 $2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，就可求得 x 应该适合的数值范围，从而得到使函数成为减函数的区间. 这里的思想方法是化归的思想. 把复杂问题通过换元化为简单问题.

应该说明，图象的平行移动，也可以将坐标轴平行移动来完成. 即图象向左(右)平行移动可以转化为 y 轴向右(左)平行移动，图象向上(下)平行移动可以转化为 x 轴向下(上)平行移动. 例如函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象是把 $y=\cos x$ 的图象的 y 轴向右平行移动$\frac{\pi}{3}$单位得到；把函数 $y=\cos x$ 图象中的 x 轴向下平行移动 2 个单位，就得到函数 $y=\cos x+2$ 的图象. 如果用移轴的方法进行实际作图，比移动图象要省事，但可能不太习惯.

5. 正切函数的图象和性质的教学关键是：

(1) 用几何法作正切曲线，也就是用单位圆中的正切线画出正切曲线，并把握正切曲线的特征：沿 y 轴的上、下两个方向无限伸展，并被无穷多条与 x 轴垂直的直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$隔开的无穷多条曲线所组成的. 这些直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$成为正切曲线的渐近线，在每两条这样的相邻直线之间，曲线是连续变化的，并且从左向右看是上升的.

(2) 观察正切线或正切曲线，得到正切函数 $y=\tan x$ 的主要性质，正切线是正切函数定义的直观表示，由正切线得到的正切曲线更加鲜明地表示了正切函数的性质，应使学生通过观察正切线、正切曲线得到正切函数的各种性质，包括能看出它的定义域、值域、周期性、奇偶性和单调性，培养学生使用函数图象研究函数性质的能力.

(3) 对于正切函数的性质有以下几点应使学生注意：

第一，正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是$\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$，这与已经学过的正弦函数与余弦函数不同. 在解题中学生往往注意不到. 例如，求函数 $y=\frac{1}{\tan x-1}$的定义域，不仅要考虑到 $\tan x\neq 1$，也要考虑到 $\tan x$ 自身的限制. 于是有

$$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}\text{且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.$$

而后者往往被学生忽略.

第二，正切函数 $y=\tan x$ 的最小正周期为 π，这一点也是与正弦函数、余弦函数不同的. 形如 $y=\tan \omega x$的函数的周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$，这可以作为公式使用. 只是教科书中没有出现这一公式，遇到这类习题，还需要按照教科书上例题的方法进行推导. 但教师在讲课中，不妨引导学生归纳出这一公式.

第三，关于正切函数的单调性有下列命题：

命题一　正切函数 $y=\tan x$ 是增函数；

命题二　正切函数 $y=\tan x$ 在其定义域上是增函数；

命题三　正切函数 $y=\tan x$ 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in \mathbf{Z})$ 内是增函数.

应指出，只有命题三是真命题.

6. 本小节的重点是余弦函数和正切函数的图象及其主要性质(包括定义域、值域、周期性、奇偶性和单调性). 利用正弦曲线和诱导公式画出余弦曲线，利用正切线画出函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，并认识到直线 $x=\pm\frac{\pi}{2}$是此图象的两条渐近线，是本小节的难点所在. 充分利用图形讲清余弦曲线和正切曲线的特性，通过一定的训练使学生了解图象性质，是学好本部分的关键.

1.3.3　已知三角函数值求角

1. 本小节是介绍如何根据角的正弦、余弦或正切值求出这个角，并引入了 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 等数学符号. 本节没有涉及三角方程的概念和求解公式，教师在讲课时，没有必要补充.

2. 关于反三角函数，教科书的要求是会用这些符号表示角，对于反三角函数的其他内容，教师不必要再进行补充. 具体说来，教材对于反正弦、反余弦、反正切的要求是：

(1) 反三角函数是三角函数在某确定定义域中的反函数，根据反函数的概念，当函数是由定义域到值域的一一对应时，才存在反函数，也就是说，在函数的一个单调区间上，该函数才有反函数，正是依据这一原理，才规定了反正弦、反余弦、反正切这三个符号，例如：

$\arcsin y$(其中$|y|\leqslant 1$)只表示$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上正弦等于 y 的一个角，原因是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$是函数 $y=\sin x$ 的一个单调区间，对于每一个可能的函数值 $y(|y|\leqslant 1)$，在这个区间上都有唯一的 x 值和它对应；反之，对于$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上每一个 x 的值，在区间$[-1, 1]$上都有唯一的 y 值和它对应. 因此，函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上有反函数，并且把这个反函数记为 $x=\arcsin y$. 本来按照习惯，应把 x 和 y 对调，只是因为我们只用这个符号表示角，而不再研究反函数的其他性质. 所以教材只讲到这里为止. 要求学生知道反三角符号的来源和功能即可.

(2) 要能正确运用 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 表示角. 对于特殊的 x 值，要求学生知道对应的反三角符号表示多少度或多少弧度，如：$\arcsin \frac{1}{2}=30°=\frac{\pi}{6}$，$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-45°=-\frac{\pi}{4}$，$\arctan 1=45°=\frac{\pi}{4}$，…. 对于非特殊的 x 值，要求学生能通过查表或用计算器、计算机得出相应的角度或弧度. 不要求得出具体度数的，学会用反三角符号来表示角. 如：$\cos x=-0.1234$，且 $x\in[0, \pi]$. 则 $x=\arccos(-0.1234)$.

符号 arcsin x、arccos x，arctan x，在解决非特殊角的问题(例如，立体几何中求异面直线的夹角、直线与平面所成的角、二面角等)时有用，所以应该让学生了解它们的意义，并学会正确使用它们.

3. 通过本小节学习，学生应该学会由已知三角函数值求角，并会用符号 arcsin x，arccos x，arctan x 表示. 已知角 x 的一个三角函数值求角 x，所得的角不一定只有一个，角的个数要根据角的取值范围来确定，这个范围应该在题目中给定. 如果在这个范围内有已知三角函数值的角不止一个，且当三角函数值不是 ±1 或 0 时，解法可以分为以下几步：

第一步，决定角 x 可能是第几象限的角. 确定的方法有两种：一是借助单位圆运用三角函数线来判断，根据已知的三角函数值，画出相应的三角函数线. 常犯的错误是画不全面. 例如：$\sin x=\frac{1}{2}$，不仅想到第一象限，也应想到第二象限，即长度为$\frac{1}{2}$的正弦线有两条；二是借助三角函数的图象来思考，此时应画出已知三角函数在一个周期上的图象，这一周期不一定必须是$[0, 2\pi]$，例如对于 $\cos x=\frac{1}{2}$，可使用$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$这一周期的图象. 应该说明，根据三角函数值确定角所在的象限问题当然完全可以不用以上的两种方法，只根据三角函数的正负号法则和诱导公式就可以求解了，只不过用数形结合，更容易理解而已.

第二步，如果函数值为正，则先求出对应的锐角 x_1；如果函数值为负，则先求出与其绝对值对应的锐角 x_1.

第三步，如果函数值为负数，则根据角 x 可能是第几象限的角，得出$(0, 2\pi)$内对应的角——如果是第二象限的角，那么可表示为$-x_1+\pi$；如果它是第三或第四象限角，那么可表示为 $x_1+\pi$ 或$-x_1+2\pi$.

第四步，如果要求出$(0, 2\pi)$以外对应的角，则可利用终边相同的角有相同的三角函数值这一规律写出结果.

4. 本小节的重点是已知三角函数值求角. 难点有以下三个：一是根据$[0, 2\pi)$范围确定有已知三角函数值的角；二是对符号 arcsin x，arccos x，arctan x 的正确认识；三是用符号 arcsin x，arccos x，arctan x 表示所求的角.

本章小结

1. 在本章小结中，列出了本章的主要内容，在教学上，要适当安排小结，使学生对本章主要内容形成知识链.

2. 教科书中渗透了变换思想，教学上应引起学生的注意.

(1) 对称变换. 诱导公式的证明应用了对称的思想. 余弦函数是偶函数，其图象关于 y 轴对称，我们很容易由它在$[0, \pi]$上的图象得到它在$[-\pi, 0]$上的图象. 正弦函数是奇函数，图象关于原点对称. 利用这种对称性，由$[0, \pi]$上的图象很容易得到它在$[-\pi, 0]$上的图象.

(2) 平移变换和对称变换. 例如，由函数 $y=\sin x$ 通过这两种变换得到函数 $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

(3) 移轴变换. 将图象的平行移动转化为坐标轴的平行移动.

(4) 变量代换也是一种变换. 例如，求函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调区间和使得该函数取得最大值、最小值的 x 值，就要进行相应的变换，令 $t=2x-\frac{\pi}{3}$，然后加以解决.

3. 从三角函数的定义方法可以看出，三角函数及其性质与圆有着直接的联系．事实上，任意角、任意角的三角函数、三角函数的性质(周期性、单调性、最大值、最小值等)、同角三角函数的关系式、诱导公式、三角函数的图象等，都可以借助单位圆得到认识，这是人们也把三角函数称作“圆函数”的原因．因此，在三角函数的研究中，借助单位圆的几何直观是非常重要的手段，而且这也是使学生领会数形结合思想，学会用数形结合来思考和解决问题的好机会．

三、拓展资源

（一）纸扇能否按照黄金比例设计？

在炎炎夏日，用纸扇驱走闷热，无疑是一个好的方法．扇子在美观设计上，可考虑用料、图案和形状．若从数学角度看，我们能否利用黄金比例(0.618)去设计一把富有美感的白纸扇？

在设计纸扇张开角(θ)时，可考虑从一圆形(半径为 r)分割出来的扇形的面积(A_1)与剩余面积(A_2)的比值．若假设这比值等于黄金比例，便可以找出 θ.

若$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{\frac{1}{2}r^2\theta}{\frac{1}{2}r^2(2\pi-\theta)}=0.618$，$\theta$ 以弧度表示，则

$$\theta=0.618(2\pi-\theta).$$

所以 $\theta=0.764\pi\approx140^\circ$(精确至最接近的 10°)．

除了找市面上的纸扇去度量其张开的角度外，我们更可自制不同形状的纸扇，去测试一下 θ 接近 140°的设计是否最美．

（二）驾驭着波峰的数学

如果你是冲浪运动员，你知道有时难以预料何时浪会升起．有时浪在岸边完整地出现，但是当你进入水中时，它已经消失了，因此你就得等待完整波的到来，有时似乎要好几小时．在另外一些时候，完整波一个接一个地来到，有许多个供你选择．不用说，波理论和波活动性是一个复杂的系统，许多因素影响着和创造着海浪．风、地震、船的尾波，当然还有月亮和太阳所产生的引起潮汐的万有引力，都扰动着海洋．海浪在水面上行动．当有多重的扰动或因素互相作用时，这些波动形式多少有点随机性．19 世纪初，对海浪的数学开展了很多研究．在海上和在受控制的实验室中所作的观测，帮助科学家们获得了有趣的结论．1802 年在捷克斯洛伐克，弗朗兹·格特纳开始提出最早的波理论．在他的观测中，他记录着波中水粒是如何作圆周运动

加利福尼亚阿普托斯的海浪

的．位于波峰(最高点)的水的运动方向与波相同，位于波谷(最低点)的水的运动方向则相反．在水面上，每一水粒都沿着圆形轨道运动，然后回到原位．圆的直径被发现等于波的高度．水的整个深度中水粒都在生成圆．但水粒愈深，它的圆愈小．事实上，人们发现在相当于波长(两个相邻波峰之间的水平距离)的 1/9 的深度，圆形轨道的直径大约是水面上水粒的圆形轨道的直径的一半．

因为波浪与这些作圆周运动的水粒有关，并且因为正弦曲线和摆线也与转动着的圆有关，这些数学曲线和它们的方程被用来描述海洋波浪就不奇怪了．但是人们发现，波浪既不是严格的正弦曲线，也不是任何别的纯粹的数学曲线．水的深度、风的强度和潮汐只是在描述波浪时必须考察的变量中的几个而已．今天研究波浪时，用到了概率、统计学这些数学工具．人们考察了大量水波，并从所收集到的数据提出预测．

海洋波浪的另外一些有趣的数学特性是：

(1) 波长与周期(波峰行经一个波长所需时间(以秒为单位))有关．

(2) 波高(从波峰到波谷的垂直距离)与周期和波长(相邻两波峰间的水平距离)都无关(有一些例外，但周期和波长的影响很小)．

(3) 当峰角超过 120°时，波会破裂．波破裂时，它的大部分能量都消耗掉了．

(4) 确定波何时将会破裂的另一方法是把波高与波长比较．当这比率大于 1/7 时，波将破裂．

四、教学案例

案例 1：1.1.1　角的概念的推广

一、教学目标

1. 知识目标：(1) 使学生初步理解用“旋转”定义角的概念；

(2) 理解“正角”、“负角”、“零角”、“象限角”、“终边相同的角”的含义．

(3) 掌握所有与 α 角终边相同的角(包括 α 角)的表示方法．

2. 能力目标：(1) 了解角的概念的推广是解决现实生活和生产中实际问题的需要，学会用数学的观点分析、解决实际问题；

(2) 通过对各种角表示法的训练，提高分析、抽象、概括的能力．

3. 情感目标：从“由一点出发的两条射线形成的图形”到“射线绕着其端点旋转而形成的图形”的这一认识过程，使学生感受“动”与“静”的对立统一，运动是绝对的，静止是相对的，静是动的一个状态．培养学生用运动转化的观点分析问题．

二、教学重点、难点

重点是理解并掌握正角、负角、零角的定义，掌握终边相同的角的表示方法及判定；难点是把终边相同的角用集合和符号语言表示出来．

三、教学方法

本节教学方法选用讨论法，通过实际问题，教师抽象并通过用几何画板等多媒体课件演示角的形成，如螺丝扳手紧固螺丝、时针与分针、车轮的旋转等等，都能形成角的概念，给学生以直观的印象，

形成正角、负角、零角的概念，明确“规定”的实际意义，突出角的概念的理解与掌握. 通过具体问题，让学生从不同角度作答，理解终边相同的角的概念，并给以表示. 从特殊到一般，归纳出终边相同的角的表示方法，达到突破难点的目的.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习在初中学习的角的定义. 注意此定义的特点以及此定义下的角的范围.	教师提出问题：初中是如何定义角的？ 学生回答：从一个点出发引出的两条射线构成的几何图形. 教师点评：这种概念的优点是形象、直观、容易理解，但它的弊端在于“狭隘”.	温故知新.
概念形成	1. 生活中很多角不在范围[0°, 360°]内，学生讨论并列举一二. 2. 提出问题：从以上实例中可以看出，不但角的范围发生了变化，而且角也具有了方向性. 3. 用运动的观点进行角的概念的推广. 4. 一条射线由原来的位置 OA，绕着它的端点 O 按逆时针方向旋转到另一位置 OB，就形成角 α. 旋转开始时的射线 OA 叫做角 α 的始边，旋转终止的射线 OB 叫做角 α 的终边，射线的端点 O 叫做角 α 的顶点. 突出“旋转”，注意“顶点”、“始边”、“终边”. 5. 我们把按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角；把按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角；特别地，当一条射线没有作任何旋转时，我们也认为这时形成了一个角，并把这个角叫做零角. 旋转生成的角又常称为转角. 6. 学习各角和的旋转量与各角旋转量的和的关系：各角和的旋转量等于各角旋转量的和. 7. 用“旋转”定义角之后，角	1. 教师对学生列举的实例予以评价，并纠正学生举例中存在的错误. 2. 师生共同寻找范围与方向发生变化的对应实例. 3. 教师用多媒体演示角的形成. 4. 教师指导学生依定义分别作出大小和方向不同的角. 并指出角的“顶点”、“始边”、“终边”. 5. 教师设计以下问题组织学生讨论思考回答： (1) 正角与负角有何本质区别？ (2) 正角与负角的实际意义有何不同？ (3) 角的概念推广以后应包括哪些角？ 6. 教师利用多媒体演示射线绕其端点旋转时所生成的角，引导学生分析判断旋转的绝对量发生了怎样的变化，从而归纳出各角和的旋转量与各角旋转量的和的关系. 7. 教师指明：正角和负角是表示具有相反意义的旋转量，它的正负规定纯系习惯，就好像与正数、负数的规定一样，零角无正负，就好像实数零无正负一样.	1. 引导学生通过切身感受来认识角的概念推广的必要性. 2. 为引入正角与负角的概念作好准备. 3. 用运动的观点认识角. 4. 使学生通过亲手作图获取对新概念的直观印象. 5. 促使学生从本质上认识角的形成以及角的分类. 6. 通过观察旋转绝对量的变化学习角的加减运算. 7. 让学生弄清角的正负规定纯系习惯.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	的范围扩大了. (1) 角有正负之分，如：$\alpha=210°$，$\beta=-150°$，$\gamma=660°$. (2) 角可以任意大. 实例：体操动作：旋转 2 周($360°\times2=720°$)、3 周($360°\times3=1\,080°$). (3) 还有零角：一条射线，没有旋转.		
概念形成	8. 为了研究方便，我们往往在平面直角坐标系中来讨论角： 角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角(角的终边落在坐标轴上，则此角不属于任何一个象限). 如：$30°$，$390°$，$-330°$ 是第一象限角，$300°$，$-60°$ 是第四象限角，$585°$，$1\,180°$ 是第三象限角，$-2\,000°$ 是第二象限角等.	8. 提出问题：学生讨论回答. (1) 在坐标系中讨论角时，对角的顶点与角的始边有何要求？ (2) 你对“角的终边落在坐标轴上，则此角不属于任何一个象限”这句话是怎样理解的？ (3) 分别举几个第一、二、三、四象限的角的例子.	8. 学习新概念与问题讨论相结合，进一步加深学生对新概念的理解与掌握.
	9. 终边相同的角. (1) 观察：$390°$，$-330°$ 角，它们的终边都与 $30°$ 角的终边相同. (2) 探究：终边相同的角都可以表示成一个 $0°\sim360°$ 的角与 $k(k\in\mathbf{Z})$ 个周角的和： $390°=30°+360°(k=1)$； $-330°=30°-360°(k=-1)$； $30°=30°+0\times360°(k=0)$； $1\,470°=30°+4\times360°(k=4)$； $-1\,770°=30°-5\times360°(k=-5)$. (3) 结论：所有与 α 终边相同的角连同 α 在内可以构成一个集合 $S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$， 即：任何一个与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.	9. 引导学生观察分析： (1) 终边相同的角有何特点？(相差整数个周角.) (2) 试表示出与 $30°$ 角的终边相同的角的集合. (3) 用集合表示终边相同的角需注意以下几个问题： ① $k\in\mathbf{Z}$； ② α 是任意角； ③ $k\cdot360°$ 与 α 之间是“+”，如 $k\cdot360°-30°$，应看成 $k\cdot360°+(-30°)$； ④ 终边相同的角不一定相等，但相等的角，终边一定相同，终边相同的角有无数多个，它们相差 $360°$ 的整数倍.	9. 从观察分析入手，通过具体例子，归纳总结出终边相同的角的表示方法. 并初步认识用集合表示终边相同的角需注意的几个问题.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念的深化	1. 角的概念推广之后，把角的范围从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的范围推广到任意角的范围. 2. 角的分类：从数值上看，可分为正角、负角和零角；从终边所在位置看，可分为第一、二、三、四象限的角以及终边在坐标轴上的角. 3. 用运动的观点来认识角以及进行角的加减运算. 4. 用集合的形式来表示终边相同的角的集合.	教师设计以下问题组织学生讨论思考回答. 1. 角的概念推广之后，把角的范围从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的范围推广到一个什么样的范围？包括些什么样的角？ 2. 角的分类方法有哪几种？如何分类？ 3. 用运动的观点如何求多个角的和？	通过对三个问题的探讨引导学生认识以下三点： 1. 角的概念推广后的范围； 2. 弄清角的分类； 3. 能利用旋转量的变化求多个角的和.
应用举例	例 1　射线 OA 绕端点 O 顺时针旋转 80° 到 OB 位置，接着逆时针旋转 250° 到 OC 位置，然后再顺时针旋转 270° 到 OD 位置，求 $\angle AOD$ 的大小. 巩固练习： 练习 A，1，2. 例 2　在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它是哪个象限的角： (1) -150°；(2) 650°；(3) $-950^\circ 15'$. 巩固练习： 练习 A，4. 例 3　写出终边在 x 轴上的角的集合. 巩固练习： 练习 B，1，2，3，4. 例 4　分别写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-360^\circ \leqslant \beta < 720^\circ$ 的元素写出来： (1) 60°；(2) -21°；(3) $363^\circ 14'$.	1. 师生共同作图分析例 1，由一个学生板书示范解题步骤，教师及时指出解题过程中出现的问题. 2. 学生练习. 完成后找学生口述题目答案，教师进行及时评价. 3. 选例 2 的第(1)小题板书来示范解题的步骤，其他例题让几个学生板演，其余学生在下面自己完成，针对板演的同学所出现的步骤上的问题进行及时指出，教师要适时引导学生做好总结归纳. 4. 例 3 可组织学生讨论，然后让学生回答，对出现的错误及时给予纠正. 然后让学生练习，并要求学生熟练掌握这些常见的角的集合的表示方法. 5. 例 4 可以放手让学生自行解决，然后教师加以点拨.	1. 通过例 1 让学生掌握如何由各角旋转量的和求多个角的和. 2. 例 2 主要让学生学会如何在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与某个角终边相同的角，及如何判断它是哪个象限的角. 3. 例 3 及巩固练习说明：一个角按顺、逆时针旋转 $k \cdot 360^\circ$ $(k \in \mathbf{Z})$ 后与原角终边重合，同样一个“区间”内的角，按顺、逆时针旋转 $k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 角后，所得“区间”仍与原区间重叠. 4. 例 4 的解决说明：与角 α 终边相同的角，连同 α 在内可记为 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$，$k \in \mathbf{Z}$. 这里 (1) $k \in \mathbf{Z}$； (2) α 是任意角； (3) $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是用“+”连接，如 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$ 应看作 $(-30^\circ) + k \cdot 360^\circ$； (4) 终边相同的角不一定相等，但相等的角终边必相同，终边相同的角有无数个，它们彼此相差 360° 的整数倍； (5) 检查两角 α_1，α_2 终边是否相同，只要看 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{360}$ 是否为整数.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳小结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.	教师归纳：判断一个角α是第几象限角，只要把α改写成$\alpha'+k\cdot360°$，$k\in\mathbf{Z}$，$0°\leqslant\alpha'<360°$，那么α'在第几象限，α就是第几象限角，若角α与角β适合关系：$\alpha-\beta=(2k)\cdot180°$，$k\in\mathbf{Z}$，则$\alpha$，$\beta$终边相同；若角$\alpha$与$\beta$适合关系：$\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°$，$k\in\mathbf{Z}$，则$\alpha$，$\beta$终边互为反向延长线. 判断一个角所有象限或不同角之间的终边关系，可首先把它们化为$\alpha'+k\cdot360°$，$k\in\mathbf{Z}$这种形式($0°\leqslant\alpha'<360°$)，然后只要考查α'的相关问题即可. 另外，数形结合思想、运动变化观点都是学习本课内容的重要思想方法.	让学生跟随教师的叙述回顾本节的核心内容.
布置作业	1. 练习A，3，4. 2. 在$0°\sim360°$范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角： (1) $-54°18'$；　(2) $395°8'$； (3) $-1\ 190°30'$；(4) $1\ 563°$.	本节课只涉及一个层次的作业，每个同学都必须完成，从而使学生进一步巩固和应用所学知识.	通过作业让学生巩固以下三点： 1. 角的概念推广后的范围. 2. 弄清角的分类. 3. 能利用旋转量的变化求多个角的和.

案例2：1.2.1　三角函数的定义

一、教学目标

1. 知识目标：(1) 让学生理解任意角的三角函数的定义，了解终边相同的角的同一三角函数值相等；

(2) 掌握三角函数(正弦、余弦、正切)的定义域.

2. 能力目标：(1) 培养学生应用图形分析数学问题的能力；

(2) 学会运用任意角三角函数的定义求相关角的三角函数值；

(3) 树立映射观点，正确理解三角函数是以实数为自变量的函数.

3. 情感目标：通过三角函数定义的学习，体会同一角的三角函数值，不因在其终边上取点的变化而变化，从而启示我们在研究问题时，要能在千变万化中，抓住事物的本质属性，不被表面现象所迷惑，从中体会三角函数，像一般实函数一样，体现了一般函数的抽象美.

二、教学重点、难点

任意角的三角函数定义既是本节的重点又是难点，另外三角函数的定义域，根据任意角三角函数的定义求三角函数值、判定三角函数值的符号也是本节的重点.

三、教学方法

(1) 通过三角函数定义的变化：从锐角三角函数到任意角三角函数，由边的比变为坐标与距离、坐标与坐标、距离与坐标的比，使学生在理解、掌握定义的基础上，加深特殊与一般关系的理解.

(2) 通过对定义的剖析，使学生对正弦、余弦、正切函数的定义域有比较深刻的认识，达到突破难点的目的.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	角的概念. 初中学过的锐角三角函数的定义.	教师运用多媒体展示在初中学习的锐角三角函数的定义. 师：前面我们对角的概念进行了扩充，并学习了弧度制，知道角的集合与实数集是一一对应的，在这个基础上，今天我们来研究任意角的三角函数.	共同回顾，点明主题.
概念形成	1. 用坐标的形式表示出初中所学的锐角三角函数： 设点 $P(x,\ y)$ 是锐角 α 终边上的任意一点，记 $OP=r(r\neq0)$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$， $\cos\alpha=\frac{x}{r}$， $\tan\alpha=\frac{y}{x}$. 2. 任意角的三角函数： (1) 确立任意角 α 在直角坐标系中的位置； 以坐标原点为角 α 的顶点，以 x 轴的正方向为角 α 的始边. (2) 点 $P(x,\ y)$ 是角 α 终边上任意一点，$OP=r(r\neq0)$，根据三角形的相似知识得到 $\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{y}{x}$ 均为定值. (3) 定义三角函数如下： $\frac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$； $\frac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；	1. 以坐标原点为锐角 α 的顶点，以 x 轴为角 α 的始边，则角 α 的终边落在直角坐标系的第一象限内，若设点 $P(x,\ y)$ 是终边上的任意一点，记 $OP=r(r\neq0)$，试将角 α 的三角函数用 x，y，r 表示出来. 学生作图，教师在此过程中要引导学生在坐标系中作出符合锐角三角函数定义要求的直角三角形.该过程中要适时指点学生，并加强学生与学生之间的讨论与交流. 回答问题：教师通过多媒体将此过程展示给学生，明确坐标与三角函数的关系. 2. 教师提出问题： 问题 1：根据刚才我们在直角坐标系中讨论的锐角三角函数，你能给出任意角的三角函数定义吗? 教师一边鼓励学生大胆说出自己的想法，一边组织学生分组讨论，并及时肯定. 回答问题： 通过鼓励和肯定一些好的想法，让一位能代表大多数意见的学生主动地说出自己对任意角三角函数的定义.	1. 将初中定义的锐角三角函数放到坐标系中讨论，指明研究函数问题的工具，完成从三角形到坐标系的转化，为后面在直角坐标系中定义任意角的三角函数搭建平台. 2. 通过对比，让学生对知识进行类比、迁移及联想，树立他们勇于探索的信心. 通过分组讨论，加强学生间的交流与合作，充分发挥学生学习的主动性.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	$\frac{x}{r}$叫做角α的正切，记作$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=\frac{y}{x}$. (4) 角α的其他三种三角函数： 角α的正割：$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x}$； 角$\alpha$的余割：$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}$； 角$\alpha$的余切：$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{x}{y}$.	问题2：角α的三角函数值不受终边上的点P的位置的影响吗？ 这是一个较有思考价值的问题，教师要注意正确地引导和必要地提示，锐角三角函数的大小仅与锐角的大小有关，与直角三角形的大小无关．类似地……（留给学生思考）教师边引导，边结合多媒体演示. 问题3：依据函数的定义，这几个比值可以分别构成函数吗？若能构成，它们的自变量是什么？x还是y？r还是角α？	
概念深化	1. 角是“任意角”，当$\beta=2k\pi+\alpha$ ($k\in\mathbf{Z}$)时，β与α的同名三角函数值应该是相等的，即凡是终边相同的角的三角函数值都相等. 2. 定义中只说怎样的比值叫做α的什么函数，并没有说α的终边在什么位置(终边在坐标轴上的除外)，即函数的定义与α的终边位置无关．实际上，如果终边在坐标轴上，上述定义同样适用. 3. 三角函数是以“比值”为函数值的函数. 4. 对于正弦函数$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，因为$r>0$，所以$\frac{y}{r}$恒有意义，即α取任意实数，$\frac{y}{r}$恒有意义，也就是说$\sin\alpha$恒有意义，所以正弦函数的定义域是$\mathbf{R}$；类似地可写出余弦函数的定义域；对于正切函数$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，因为$x=0$时，$\frac{y}{x}$无意义，即$\tan\alpha$无意义，又当且仅当角α的终边落在纵轴上时，才有$x=0$，所以当α的终边不在纵轴上时，$\frac{y}{x}$恒有	对于第1到第3点教师要点拨，学生思考．对于第4点教师提出问题：谈到函数，定义域要先行．在此，对三角函数的定义域要进一步地明确，确定三角函数的定义域的依据就是任意角的三角函数的定义．三角函数是以角为自变量的函数，如何去确定这些函数定义域(即限定角的范围)？它们的定义域是什么？ 由学生讨论回答.	1. 让学生明确定义是对任意角而言的，OP是角α的终边，至于是转了几圈，按什么方向旋转的不清楚，也只有这样，才能说明角α是任意的. 2. 使学生明确任意角的三角函数的定义与锐角三角函数的定义的联系与区别：任意角的三角函数包含锐角三角函数．实质上锐角三角函数的定义与任意角的三角函数的定义是一致的，锐角三角函数是任意角三角函数的一种特例．所不同的是，锐角三角函数是以边的比来定义的，任意角的三角函数是以坐标与距离、坐标与坐标、距离与坐标的比来定义的. 3. 让学生掌握正弦函数、余弦函数、正切函数的定义域.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	意义，即 $\tan\alpha$ 恒有意义，所以正切函数的定义域是 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$．从而有 $y=\sin\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$， $y=\cos\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$， $y=\tan\alpha$，$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$．		
应用举例	例 1　已知角 α 的终边过点 $P(2,\ -3)$，求 α 的六个三角函数值． 例 2　求下列各角的六个三角函数值： (1) 0； (2) π； (3) $\frac{3\pi}{2}$．	学生板演，教师对学生在解题思路和规范性方面进行指导．	让学生巩固六种三角函数的概念，感受三角函数的定义在三角函数求值中的应用． 熟记 0 到 2π 范围内的某些特殊角的三角函数值．
归纳小结	1. 知识：三角函数的定义及其定义域． 2. 数学思想方法： 数形结合思想； 类比法．	学生反思本节内容，对知识进行总结，教师对思想方法进行提炼．	让学生学会学习，学会反思，学会总结，重视数学思想方法在分析问题和解决问题中的作用．
布置作业	层次一：教材练习 A，1～3． 层次二：教材习题1-2A，1，2．	层次一的题目要求所有学生完成，层次二的题目要求中等以上水平的学生完成．	使学生进一步巩固和应用所学知识．

案例 3：1.3.1-3　正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

一、教学目标

1. 知识目标：

(1) 了解振幅、周期、频率、初相的定义；

(2) 掌握振幅变换和相位变换的规律．

2. 能力目标：

(1) 通过实际事例描述振幅、周期、频率、初相，明确 A，ω，φ 的物理意义；

(2) 理解振幅变换和相位变换的规律，会对函数 $y=\sin x$ 进行振幅变换和相位变换；

(3) 培养学生发现问题、研究问题的能力，以及探究、创新的能力．

3. 情感目标：

(1) 渗透数形结合思想；

（2）培养动与静的辩证关系；

（3）培养学生普遍联系、运动变化、数学来源于实践又指导实践的辩证唯物主义观点及勇于探索的创新精神．

二、教学重点、难点

本节课的重点是理解振幅变换和相位变换的规律；熟练地对函数 $y=\sin x$ 进行振幅变换和相位变换．难点是理解振幅变换和相位变换的规律．

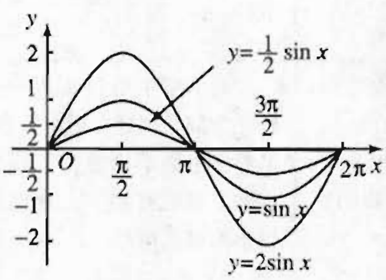
三、教学方法

引导学生结合作图过程理解振幅和相位变化的规律（启发诱导式）．本节课采用作图、观察、归纳、启发探究相结合的教学方法，运用现代化多媒体教学手段，进行教学活动．首先按照由特殊到一般的认知规律，由形及数、数形结合，通过设置问题引导学生观察、分析、归纳，形成规律，使学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探索和交流的过程中获得对正弦函数图象变换全面的体验和理解．

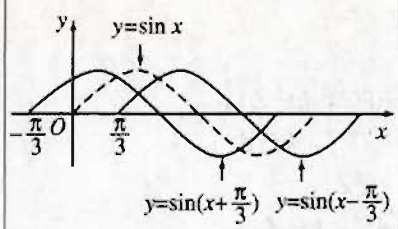
四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习 $y=\sin x$ 的图象和性质．	教师提出问题． 学生回答．	为学生认识函数 $y=A\sin x$，$y=\sin(x+\varphi)$ 的图象特征作好准备．
概念形成	通过观察、考虑观览车，引出振幅、周期、频率、初相的概念． 在函数 $y=R\sin(\omega t+\varphi)$ 中，点 P 旋转一周所需要的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，叫做点 P 的转动周期．在 1 秒内，点 P 旋转的周数 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，叫做转动的频率．$OP_0$ 与 x 轴正方向的夹角 φ 叫做初相．	1. 教师演示观览车旋转过程，指导学生认识、感受． 2. 教师提问：通过分析，R，ω，φ 对观览车的旋转有什么影响？ 3. 学生回答． 4. 教师引导归纳． （幻灯片）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in[0,+\infty)$（其中 $A>0$，$\omega>0$）表示一个振动量时，A 就表示这个量振动时离开平衡位置的最大距离，通常称为这个振动的振幅；往复振动一次所需要的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，称为这个振动的周期；单位时间内往复振动的次数 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，称为振动的频率；$\omega x+\varphi$ 称为相位；$x=0$时的相位 φ 称为初相．	要求学生通过实例，将问题转化为数学问题，引出数学概念，培养学生数学来源于实践又指导实践的辩证唯物主义观点及勇于探索的创新精神．

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>应用举例</td>
<td>
首先我们来看形如 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图如何来画？
例6 （幻灯片）作函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的简图.
解：易知，函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$的周期 $T=2\pi$. 作 $x\in[0,2\pi]$时的函数的简图.
列表：
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$\sin x$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$2\sin x$</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>-2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}\sin x$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>0</td></tr>
</table>
描点作图：


利用这类函数的周期性，我们可把上面的简图向左、向右连续平移 2π，4π，…，就可得出 $y=2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，及 $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图(图略).
例7 （幻灯片）在同一坐标系中作函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的简图.
解：这两个函数的周期都是 2π，先用“五点法”画出它们在$[0,2\pi]$上的简图. 列表：
</td>
<td>
师：请同学们观察它们之间的关系.
师：通过观察我们可以看出：(幻灯片)
(1) $y=2\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是$[-2,2]$，图象可看作把 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)而得到；
(2) $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，图象可看作把 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 上所有点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(横坐标不变)而得到.
引导归纳：(幻灯片)
(1) 类似于用“五点法”作函数 $y=\sin x$ 的简图的方法，选出关键的五点，我们可以作出函数 $y=A\sin x$的简图.
(2) 一般地，函数 $y=A\sin x$ 的值域是$[-|A|,|A|]$，最大值是$|A|$，最小值是$-|A|$. 由此可知，$|A|$的大小，反映曲线 $y=A\sin x$ 波动幅度的大小.
(3) 一般地，函数 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$(其中 $A>0$ 且 $A\neq 1$)的图象，可以看作把正弦曲线上所有点的纵坐标伸长(当 $A>1$ 时)或缩短(当 $0<A<1$时)到原来的 A 倍(横坐标不变)而得到.
师：请同学们从列表、图象两个角度观察、分析这三个函数图象之间的关系.
师：通过观察，我们可以发现：(幻灯片)
(1) 列表时，如何确定自变量 x 的取值？令 $x+\varphi=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，解出 x 即可.
</td>
<td>
1. 通过作图，使学生加深对“五点法”的理解.
2. 观察图象之间的关系，通过对比，探求有关性质以及图象的变换方法.
3. 鼓励学生大胆猜想，使学生将直观问题抽象化，揭示本质，培养学生思维的深刻性.
4. 培养学生由特殊到一般的解决问题的方法，以及归纳概括的能力.
5. 通过例 7，进一步强化“五点法”作图的原理与步骤.
6. 进一步培养学生观察、分析、类比、抽象概括的能力.
7. 总结作函数 $y=A\sin(x+\varphi)$ 的图象的步骤：
(1) 确定函数的周期；
(2) 先用“五点法”画出在一个周期内的简图；
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{7\pi}{6}$</td><td>$\frac{5\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td>$x+\frac{\pi}{3}$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>$\frac{4\pi}{3}$</td><td>$\frac{11\pi}{6}$</td><td>$\frac{7\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td>$x-\frac{\pi}{3}$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
</table>
描点作图：


把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间$[0, 2\pi]$上的图象分别向左、右平移，每次平移 2π 个单位长度，则得它们在 $\mathbf{R}$ 上的图象(图略).
</td><td>
(2) 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可看作把正弦曲线上所有的点向左平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度而得到.

函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可看作把正弦曲线上所有点向右平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度而得到.

一般地，把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平行移动 $|\varphi|$ 个单位长度，就得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象.
</td><td>
(3) 列表；
(4) 描点作图；
(5) 移动图象.
</td></tr>
<tr><td>归纳小结</td><td>从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.</td><td>让学生谈本节课的收获，并进行反思.
教师归纳.</td><td>关注学生的自主体验，反思和发表本堂课的体验和收获.</td></tr>
<tr><td>布置作业</td><td>层次一：教材，练习 A，第 1 题 (2)，第 2 题 (3)、(4)；习题 1-3A，第 7 题.
层次二：教材，练习 A，第 2 题 (1)；习题1-3B，第 1，2，3 题.</td><td>作业分两个层次，第一层次要求所有学生都要完成；第二层次要求学有余力的学生完成.</td><td>通过分层作业使学生进一步巩固本节课所学内容.</td></tr>
</table>

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 6 页）

1. (1) 假.　(2) 假.　(3) 真.　(4) 假.　(5) 真.　(6) 假.
2. 略.
3. 略.
4. (1) 315°，第四象限角.　(2) 40°，第一象限角.
   (3) 240°，第三象限角.
5. 由题意知$\angle AOB=270^\circ$，$\angle BOC=-360^\circ$，
   因此，$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=270^\circ+(-360^\circ)=-90^\circ$.
6. 略.

练习 B（第 7 页）

1. 终边在 y 轴正半轴上的角的集合是：$S_1=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
   终边在 y 轴负半轴上的角的集合是：$S_2=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+270^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
   终边在 y 轴上的角的集合是：$S_3=\{\alpha|\alpha=k\cdot 180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
2. 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是：$S_1=\{\alpha|\alpha=k\cdot 180^\circ+45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
   终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合是：$S_2=\{\alpha|\alpha=k\cdot 180^\circ+135^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
3. 角的终边落在坐标轴上.
4. 终边在第二象限的角的集合是：$S_1=\{\alpha|k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
   终边在第三象限的角的集合是：$S_2=\{\alpha|k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
   终边在第四象限的角的集合是：$S_3=\{\alpha|k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<(k+1)\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$或
   $\{\alpha|k\cdot 360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
5. 星期一；星期三.

练习 A（第 11 页）

1. 相等．由公式 $\alpha=\frac{l}{r}$ 可知，此比值即为圆心角的弧度数，与圆的大小无关.
2. (1) $-\frac{4\pi}{3}$.　(2) $-\frac{5\pi}{4}$.　(3) $\frac{\pi}{15}$.　(4) 6π.　(5) $\frac{\pi}{8}$.　(6) $\frac{7\pi}{8}$.
3. (1) 15°.　(2) 300°.　(3) 54°.　(4) 22.5°.　(5) -270°.　(6) -150°.
4. (1) 1.448 6；2.408 6；4.852 0.
   (2) $68.754\,9^\circ$；$206.264\,8^\circ$；$286.478\,9^\circ$.
5. 1 m，1.5 m.

练习 B（第 12 页）

1. $\frac{\pi}{3}$ rad.

2. $-120°$，$-\frac{2\pi}{3}$；$-1\,440°$，-8π.

3. 1.2 rad，约等于 $68.75°$.

4. (1) 因为圆心角为 1 rad 的扇形面积为 $\frac{\pi R^2}{2\pi}=\frac{R^2}{2}$，所以圆心角为 α 弧度的扇形面积为

   $S=\alpha\cdot\frac{R^2}{2}=\frac{1}{2}R^2\alpha$.

   (2) $S=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{1}{2}\times5^2\times2=25(\text{cm}^2)$，即所求扇形的面积为 25 cm^2.

5. (1) $\frac{11\pi}{6}+2\pi$，第四象限角.　　(2) $\frac{5\pi}{3}-10\pi$，第四象限角.

   (3) $\frac{10\pi}{7}-4\pi$，第三象限角.　　(4) $\frac{6\,241\pi}{3\,600}+2\pi$，第四象限角.

6. 记 n 是角的弧度数.

   (1) 给变量 n 和圆周率 π 的近似值赋值；

   (2) 计算 $\frac{180}{\pi}$，得出的结果赋给变量 a；

   (3) 计算 na，赋值给变量 α.

   α 就是这个角的度数.

习题 1-1A（第 12 页）

1. α_1 为第一象限角；α_2 为第二象限角；α_3 为第三象限角；α_4 为第四象限角.

2. $\frac{19\pi}{6}$ 是第三象限角；$-\frac{25\pi}{6}$ 是第四象限角；

   与 $\frac{19\pi}{6}$ 终边相同的角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

   与 $-\frac{25\pi}{6}$ 终边相同的角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. (1) $-\frac{16}{45}\pi=\frac{74\pi}{45}-2\pi$.　　(2) $\frac{20}{9}\pi=\frac{2\pi}{9}+2\pi$.　　(3) $-\frac{289}{72}\pi=\frac{143\pi}{72}-6\pi$.

4. $11.25°$；$\frac{\pi}{16}$.

5. $64°$.

习题 1-1B（第 13 页）

1. 第一象限角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

   第二象限角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

第三象限角的集合是$\left\{\alpha \mid 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

第四象限角的集合是$\left\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$或$\left\{\alpha \mid 2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 14.3 m.

3. 3 点时，以时针为角的始边，以分针为角的终边，所成角的一般形式为：

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z};$$

6 点时，以时针为角的始边，以分针为角的终边，所成角的一般形式为：

$$\alpha=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z};$$

8 点时，以时针为角的始边，以分针为角的终边，所成角的一般形式为：

$$\alpha=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

4. (1) 600π.　　(2) 6π m.

5. 约为 111 km.

练习 A（第 17 页）

1. (1) $\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，2，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，-1.

(3) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\frac{1}{3}$.

2. $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\tan\frac{\pi}{2}$不存在，$\cot\frac{\pi}{2}=0$，$\sec\frac{\pi}{2}$不存在，$\csc\frac{\pi}{2}=1$.

3.

角 α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
角 α 的弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

4. (1) 因为 $156°$是第二象限角，所以 $\sin 156°>0$.

(2) 因为 $\cos\frac{16\pi}{5}=\cos\left(2\pi+\frac{6\pi}{5}\right)$，而$\frac{6\pi}{5}$是第三象限角，所以 $\cos\frac{16\pi}{5}<0$.

(3) 因为$-80°$是第四象限角，所以 $\cos(-80°)>0$.

(4) 因为 $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)=\tan\left(-2\pi-\frac{\pi}{8}\right)$，而$-\frac{\pi}{8}$是第四象限角，所以 $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)<0$.

(5) 因为 $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$，而 $\frac{2\pi}{3}$是第二象限角，所以 $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)>0$.

(6) 因为 $\tan 556°12'=\tan(360°+196°12')$，而 $196°12'$是第三象限角，所以 $\tan 556°12'>0$.

练习 B（第 18 页）

1. 设交点为 $P(x,\ y)$，则 $r=2$，

所以 $x=r\cos\alpha=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$，$y=r\sin\alpha=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

所以交点 P 的坐标为$(-\sqrt{3},\ -1)$.

2. $\cos A$，$\tan A$ 有可能是负值.

3. (1) 二.　(2) 三.　(3) 四.　(4) 四.

4. (1) 第三或第四象限角.　(2) 第一或第二象限角.

(3) 第二或第四象限角.　(4) 第一或第四象限角.

5. 设 $P(a,\ 2a)(a\neq 0)$是角 α 终边上一点，则 $\tan\alpha=\frac{2a}{a}=2$.

若 $a>0$，则 α 是第一象限角，$r=\sqrt{5}a$，

此时 $\sin\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

若 $a<0$，则 α 是第三象限角，$r=-\sqrt{5}a$，

此时 $\sin\alpha=\frac{2a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

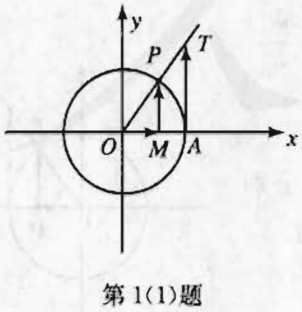
综上，当角 α 的终边落在射线 $y=2x(x\geqslant 0)$上时，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$；

当角 α 的终边落在射线 $y=-2x(x\leqslant 0)$上时，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$.

练习 A（第 21 页）

1.

(1)



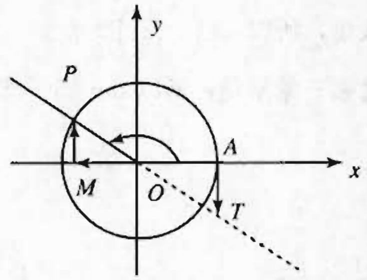
第 1(1)题

如图，$\frac{\pi}{3}$的正弦线为$\overrightarrow{MP}$；

余弦线为$\overrightarrow{OM}$；

正切线为$\overrightarrow{AT}$.

(2)



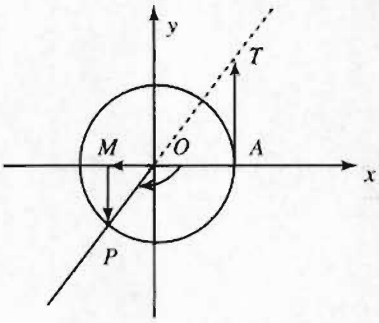
第 1(2) 题

如图，$\frac{5\pi}{6}$的正弦线为$\overrightarrow{MP}$；

余弦线为$\overrightarrow{OM}$；

正切线为$\overrightarrow{AT}$.

(3)



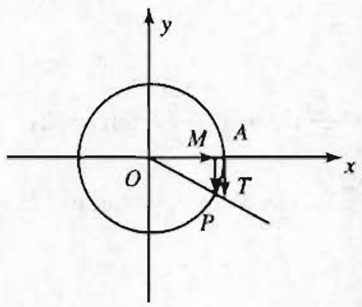
第 1(3) 题

如图，$-\frac{2\pi}{3}$的正弦线为$\overrightarrow{MP}$；

余弦线为$\overrightarrow{OM}$；

正切线为$\overrightarrow{AT}$.

(4)



第 1(4) 题

如图，$-\frac{13\pi}{6}$的正弦线为$\overrightarrow{MP}$；

余弦线为$\overrightarrow{OM}$；

正切线为$\overrightarrow{AT}$.

2. 略.

练习 B（第 21 页）

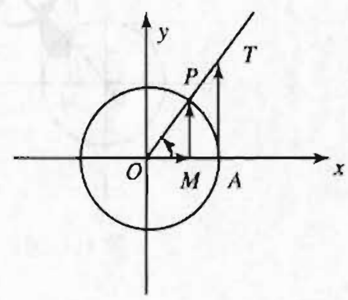
1. 如图所示，α 是第一象限角，其正弦线、余弦线、正切线分别是$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{AT}$，即 $\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\tan\alpha=AT$.

   在 Rt$\triangle OMP$ 中，根据勾股定理，可得

   $MP^2+OM^2=OP^2=1$，

   即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

   又因为$\triangle OMP\backsim\triangle OAT$，



第 1 题

所以$\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{AT}{OA}$.

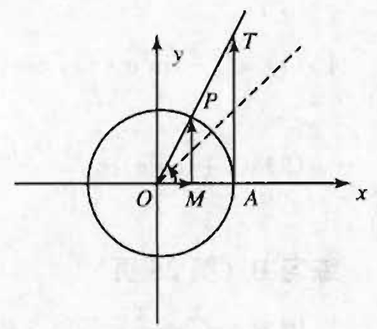
所以 $\tan\alpha=\dfrac{AT}{OA}=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

若α是第二、三、四象限角，以上等式仍然成立.

2. 如图所示，角α的正弦线、余弦线、正切线分别为$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{AT}$，则 $MP=a$，$OM=b$，$AT=c$.

由图可知，$c>a>b$.

若$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，则 $a>b>c$.



第 2 题

练习 A（第 25 页）

1. (1) 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，又$\alpha$是第一象限角，所以 $\cos\alpha>0$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，又$\alpha$是第三象限角，所以 $\sin\alpha<0$.

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.$$

(3) 由题意可得方程组$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{9}{25}\\ \cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}\end{cases}$

又α是第四象限角，所以$\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

(4) 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，又$\alpha$是第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. (1) $\sin\theta$.　　(2) $\cos^2\theta$.

3. (1) 左边$=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$右边，所以原等式成立.

(2) 左边$=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1=$右边，

所以原等式成立.

4. (1) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\tan\alpha=|\cos\alpha|\cdot\tan\alpha=\begin{cases}\sin\alpha & (\alpha\text{ 是第一或第四象限角})\\ 0 & (\alpha\text{ 的终边在 }x\text{ 轴上})\\ -\sin\alpha & (\alpha\text{ 是第二或第三象限角})\end{cases}$

(2) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=1.$

练习 B（第 25 页）

1. 因为 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，所以 θ 是第一或第四象限角.

若 θ 是第一象限角，则

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3},\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3},\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}.$$

若 θ 是第四象限角，则

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3},\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3},\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{5}}=-\frac{5}{4}.$$

2. 由 $\tan\alpha=-4$，知 $\cos\alpha\neq 0$.

(1) $\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{(-4)^2}{(-4)^2+1}=\dfrac{16}{17}.$

(2) $3\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{3\times(-4)}{(-4)^2+1}=-\dfrac{12}{17}.$

(3) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1-(-4)^2}{(-4)^2+1}=-\dfrac{15}{17}.$

(4) $\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{4\tan\alpha-2}{5+3\tan\alpha}=\dfrac{4\times(-4)-2}{5+3\times(-4)}=\dfrac{18}{7}.$

3. (1) $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=1.$

(2) $\sin\alpha\cos\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$=\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=1.$$

4. (1) 右边 $=1+2\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=1+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=$ 左边，所以原等式成立.

(2) 提示：

$$\text{右边}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}-1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}+1}=\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{\sin\alpha-1+\cos\alpha},$$

$$\text{左边}-\text{右边}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{\sin\alpha-1+\cos\alpha}=\frac{(1+\sin\alpha)(\sin\alpha-1+\cos\alpha)-\cos\alpha(\sin\alpha+1-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha-1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{(\sin\alpha-1+\cos\alpha+\sin^2\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)-(\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha-1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha-1+\cos\alpha+\sin^2\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha-1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{-1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha-1+\cos\alpha)}=\frac{-1+1}{\cos\alpha(\sin\alpha-1+\cos\alpha)}=0.$$

所以原等式成立.

5. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=-1$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}}-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=-1$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{|\sin\alpha|}}-\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{|\cos\alpha|}}=-1.$

则应有 $\sin\alpha|\sin\alpha|-\cos\alpha|\cos\alpha|=-1$,

即 $-\sin\alpha|\sin\alpha|+\cos\alpha|\cos\alpha|=1$，要使该等式成立必须有

$$\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha>0\end{cases}$$

所以 α 是第四象限角.

练习 A（第 27 页）

1. (1) 0. (2) 0. (3) -1. (4) -1. (5) 1.

(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (7) 0. (8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (9) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (10) 1.

2. (1) $\frac{1}{2}$. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (4) 1.

3. (1) 0.347 8.　(2) 0.497 5.　(3) -0.6745.　(4) -0.2349.

练习 B（第 28 页）

1. (1) 0.　(2) 1.　(3) $\sqrt{3}$.　(4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. (1) $\sin\frac{35\pi}{6}+\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=0.$$

(2) $3\cos 365^\circ-4\cos 355^\circ+\tan 337^\circ$

$=3\cos(360^\circ+5^\circ)-4\cos(360^\circ-5^\circ)+\tan(360^\circ-23^\circ)$

$=3\cos 5^\circ-4\cos 5^\circ-\tan 23^\circ$

$=-\cos 5^\circ-\tan 23^\circ$

$\approx-0.996-0.424$

$=-1.42$.

练习 A（第 30 页）

1. (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(2) $-\frac{1}{2}$.　(3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(4) $\frac{1}{2}$.

2. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. (1) $-\sqrt{3}$.　(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(3) 1.　(4) 1.

练习 B（第 31 页）

1. (1) $\frac{1}{2}$.　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(3) $\sqrt{3}$.　(4) $\sqrt{3}$.

2. (1) 原式$=\frac{(-\cos\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha}=-\tan\alpha$.

(2) 原式$=\sin^2\alpha-\tan^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha=-\tan^2\alpha$.

练习 A（第 33 页）

1. (1) 提示：$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

(2) 提示：$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

2. (1) $\sin 115^\circ=\sin(90^\circ+25^\circ)=\cos 25^\circ$.

(2) $\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$.

(3) $\tan 110^\circ=\tan(90^\circ+20^\circ)=-\cot 20^\circ$.

(4) $\sin 85^\circ=\sin(90^\circ-5^\circ)=\cos 5^\circ$.

3. (1) $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

(2) $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$.

4. (1) 原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha$.

(2) 原式$=\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cot\alpha=-\cos^2\alpha$.

练习B（第33页）

1. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(2) $-\frac{1}{2}$.　(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 提示：原式$=(\tan 1^\circ\tan 89^\circ)\cdot(\tan 2^\circ\tan 88^\circ)\cdot\cdots\cdot(\tan 44^\circ\tan 46^\circ)\cdot\tan 45^\circ$

$=(\tan 1^\circ\cot 1^\circ)\cdot(\tan 2^\circ\cot 2^\circ)\cdot\cdots\cdot(\tan 44^\circ\cot 44^\circ)\cdot\tan 45^\circ$

$=1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot 1$

$=1$.

习题1-2A（第33页）

1. 设$P(a,\ -2a)(a\neq 0)$是角α终边上的一点，

则$\tan\alpha=\frac{-2a}{a}=-2$，$\cot\alpha=\frac{a}{-2a}=-\frac{1}{2}$.

若$a>0$，则α是第四象限角，$r=\sqrt{5}a$，

此时$\sin\alpha=\frac{-2a}{\sqrt{5}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sec\alpha=\frac{\sqrt{5}a}{a}=\sqrt{5}$，$\csc\alpha=\frac{\sqrt{5}a}{-2a}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$；

若$a<0$，则α是第二象限角，$r=-\sqrt{5}a$，

此时$\sin\alpha=\frac{-2a}{-\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sec\alpha=\frac{-\sqrt{5}a}{a}=-\sqrt{5}$，$\csc\alpha=\frac{-\sqrt{5}a}{-2a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. (1) 0.　(2) 8.　(3) 5.

3. (1) 原式$=\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

$=0.$

(2) 原式$=\dfrac{\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right]\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=-\dfrac{1}{8}.$

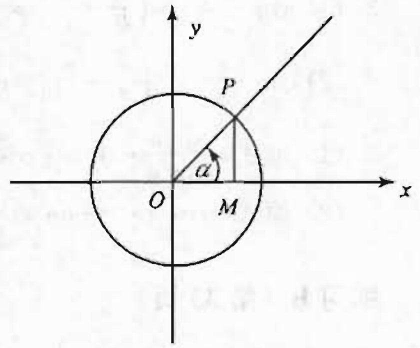
4. 如图所示，在直角坐标系内作单位圆，以 Ox 轴正方向为角 α 始边，角 α 的终边交单位圆于点 P，作 $PM\perp Ox$ 轴，垂足为 M. 则

$$\sin\alpha=MP,\ \cos\alpha=OM.$$

所以 $|\sin\alpha|=|MP|,|\cos\alpha|=|OM|.$

若 α 的终边不在坐标轴上，则 O, P, M 三点可以构成三角形 OPM，由三角形的性质可知 $|MP|+|OM|>|OP|=1.$

即 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|>1.$



第 4 题

若角 α 的终边落在 x 轴上时，$|MP|=0$，$|OM|=1$. 则 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=|MP|+|OM|=1.$

若角 α 的终边落在 y 轴上时，$|MP|=1$，$|OM|=0$. 则 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=|MP|+|OM|=1.$

所以对于任意角 α，不等式 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant1$ 总成立.

5. (1) 角 α 是第二或第三象限角.

(2) 角 α 是第二或第四象限角.

6. (1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，$\cot\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sec\alpha=2$，$\csc\alpha=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\cot\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\sec\alpha=-\sqrt{10}$，$\csc\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

(3) $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，$\cot\alpha=-\dfrac{12}{5}$，$\sec\alpha=\dfrac{13}{12}$，$\csc\alpha=-\dfrac{13}{5}$.

(4) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cot\alpha=\sqrt{3}$，$\sec\alpha=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\csc\alpha=-2$.

7. (1) 由 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 知，原式$=\sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$

$$=-2\tan\alpha.$$

(2) 由 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ 知，原式$=\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}+\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{-\sin\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{-\sin\alpha}$$

$$=-2\csc\alpha.$$

(3) 原式$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$
$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|.$$

(4) $\cot\alpha\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha\cdot|\sin\alpha|=\begin{cases}\cos\alpha & (\alpha\text{ 是第一或第二象限角})\\ 0 & (\alpha\text{ 的终边落在 }y\text{ 轴上})\\ -\cos\alpha & (\alpha\text{ 是第三或第四象限角})\end{cases}$

8. (1) 左边$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha=$右边，所以原等式成立.

(2) 左边$=\tan^2\alpha\cdot\cot^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cot^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=$右边，所以原等式成立.

(3) 左边$=(\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)$

$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=$右边，

所以原等式成立.

(4) 左边$=\dfrac{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}=\dfrac{1}{2\sin^2\alpha-1}=$右边，所以原等式成立.

9. (1) 原式$=\dfrac{\sin\alpha(-\cos\alpha)\cot\alpha}{\cos\alpha(-\cot\alpha)(-\tan\alpha)}=-\cos\alpha.$

(2) 原式$=1+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)-2\cos^2\alpha=-\cos^2\alpha.$

(3) 原式$=\dfrac{\sqrt{1-2\cos10^\circ\sin10^\circ}}{\cos10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 10^\circ}}=\dfrac{\cos10^\circ-\sin10^\circ}{\cos10^\circ-\sin10^\circ}=1.$

(4) 原式$=\dfrac{(-\cos\alpha)\cdot(-\cot\alpha)}{(-\tan\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}=\cot^3\alpha.$

习题 1-2B（第 35 页）

1. 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，知：

(1) $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)=\sqrt{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

(4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$

$=\sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)$，

而$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\dfrac{1}{2}=0$，

所以 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=0.$

2. 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，

因为　$\alpha\in(0,\ \pi)$，所以　$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.

所以　$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

因此可得　$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 由 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$，得　$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$，

又 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha<\sin\alpha$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\frac{\sec\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{\tan\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}=-1$

$\Leftrightarrow\frac{1+\sin\theta|\sin\theta|}{\cos\theta|\cos\theta|}=-1\Leftrightarrow\frac{1+\sin\theta|\sin\theta|+\cos\theta|\cos\theta|}{\cos\theta|\cos\theta|}=0$

$\Leftrightarrow\frac{1+(\sin\theta|\sin\theta|+\cos\theta|\cos\theta|)}{\cos\theta|\cos\theta|}=0$.

则应有 $1+(\sin\theta|\sin\theta|+\cos\theta|\cos\theta|)=0$，

即 $\sin\theta|\sin\theta|+\cos\theta|\cos\theta|=-1$，要使该等式成立，必须有

$$\begin{cases}\sin\theta<0\\ \cos\theta<0\end{cases}$$

所以 θ 是第三象限角.

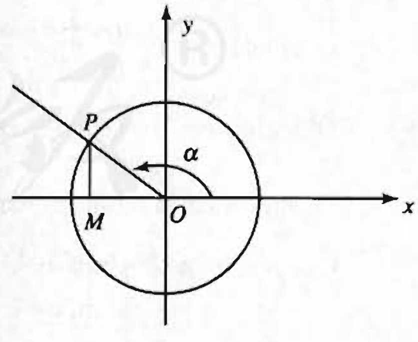
5. 如图所示，在直角坐标系中作单位圆，以 x 轴正半轴为始边作角 α，角 α 的终边与单位圆交于点 P，过 P 作 $PM\perp x$ 轴于点 M，则

$|\sin\alpha|=|MP|\leqslant|OP|=1$，

$|\cos\alpha|=|OM|\leqslant|OP|=1$.

所以　$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$，

$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$.



第 5 题

6. (1) 由 $\cos\alpha=0.68$，知 α 为第一或第四象限角.

若 α 为第一象限角，则

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(0.68)^2}=0.73$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0.73}{0.68}=1.07$，$\cot\alpha=0.93$;

若 α 为第四象限角，则

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(0.68)^2}=-0.73$，

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0.73}{0.68}=-1.07,\ \cot\alpha=-0.93.$$

(2) 由 $\tan\alpha=2.05$，知 $\cot\alpha=0.49$ 且 α 为第一或第三象限角.

若 α 为第一象限角，则

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2.05\\ \sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}\sin\alpha=0.90\\ \cos\alpha=0.44\end{cases}$$

若 α 为第三象限角，则

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2.05\\ \sin\alpha<0\\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}\sin\alpha=-0.90\\ \cos\alpha=-0.44\end{cases}$$

7. (1) 提示：左边$-$右边$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)-\cos^2\theta(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos\theta\cdot\sin\theta(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)-\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta\cdot\sin\theta(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}=0.$$

(2)提示：左边$-$右边$=\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}-\tan^2\alpha$

$$=\frac{1+\tan^4\alpha-\tan^2\alpha(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\tan^4\alpha-\tan^4\alpha-\tan^2\alpha\cdot\cot^2\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\tan^4\alpha-\tan^4\alpha-1}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=0.$$

(3) 提示：此题先将等式左右两边的“切”、“割”统一化为“弦”，整理后再证，该题与第 25 页练习 B 的第 4 题的第(2)小题类似.

8. 由 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\dfrac{1}{4}$，知

$$\sin\alpha=\log_8\frac{1}{4}=-\frac{2}{3}.$$

又 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

所以 $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

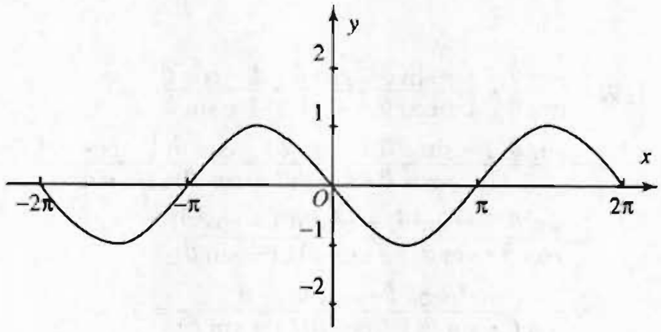
9\. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10\. 由 $\cos 460°=t$，得 $\cos 100°=t$， 所以 $\sin 100°=\sqrt{1-\cos^2 100°}=\sqrt{1-t^2}$，

$\tan 260°=\tan(360°-100°)=-\tan 100°=-\dfrac{\sin 100°}{\cos 100°}=-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$.

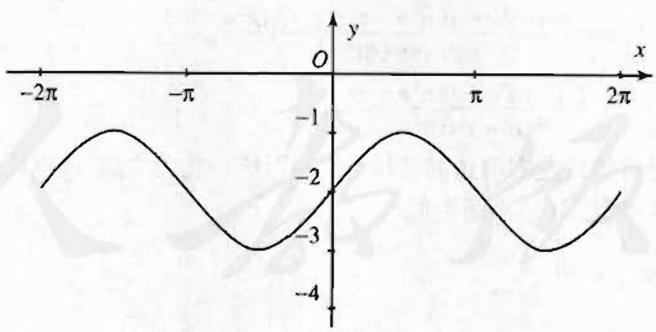
练习 A（第 39 页）

1\. (1) 先运用“五点法”作出函数 $y=-\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图象，再把所得图象向左扩展 2π 个单位，即得 $y=-\sin x$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的图象.



第 1(1)题

(2) 先运用“五点法”作出函数 $y=\sin x-2$ 在$[0,2\pi]$上的图象，再把所得图象向左扩展 2π 个单位，即得 $y=\sin x-2$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的图象.

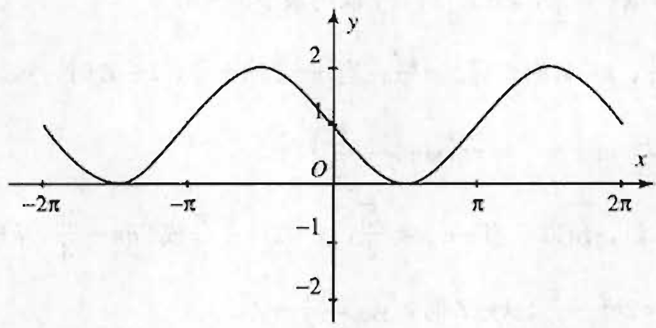


第 1(2)题

2\. 作 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi,2\pi]$关于 x 轴的对称图象，即得函数 $y=-\sin x$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的图象.
将 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的图象向下平移 2 个单位，即得 $y=\sin x-2$，$x\in[-2\pi,2\pi]$的图象.

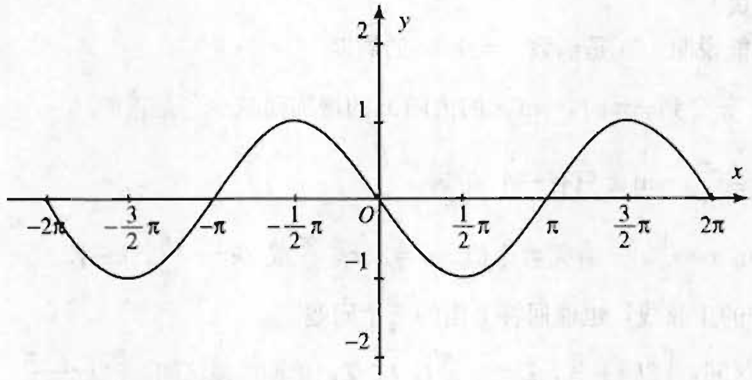
练习 B（第 39 页）

1. (1) $y=1-\sin x$ 在 $x\in[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象如图所示：



第 1(1)题

(2) $y=\sin(-x)$ 在 $x\in[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象如图所示：



第 1(2)题

2. 作函数 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 关于 x 轴的对称图象，得到函数 $y=-\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 的图象，再将函数 $y=-\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 的图象向上平移 1 个单位，即得函数 $y=1-\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 的图象；

作 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 关于 y 轴对称的图象，即得函数 $y=\sin(-x)$，$x\in[-2\pi, 2\pi]$ 的图象.

练习 A（第 43 页）

1. (1) $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$.　　(2) $(2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. (1) 不能成立，因为 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的值域是 $[-1, 1]$，而 $\frac{3}{2}\notin[-1, 1]$.

(2) 能成立. $\sin^2 x=\frac{1}{2}$，$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的值域是 $[-1, 1]$，而 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1, 1]$.

3. (1) 当$x\in\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y$取得最小值$-2$.

(2) 当$x\in\left\{x \middle| x=6k\pi-\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y$取得最小值$-3$.

4. (1) 当$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{\max}=\frac{17}{4}$；当$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{\min}=-\frac{7}{4}$.

(2) $y=-\sin^2x+\sqrt{3}\sin x+\frac{5}{4}=-\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2$,

因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以 当$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$或$2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{\max}=2$；

当$\sin x=-1$，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{\min}=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$.

5. (1) $\frac{2\pi}{3}$. (2) 8π. (3) π.

练习 B（第 43 页）

1. 能成立，但不能说明$120°$是函数$y=\sin x$的周期.

2. (1) 当x从$-\frac{3\pi}{2}$变到$-\pi$时，$\sin x$的值随x的增加而减少，是正的.

(2) 对应于$x=\frac{\pi}{6}$，$\sin x$只有一个值$\frac{1}{2}$.

(3) 对应于$\sin x=\frac{1}{2}$，x有无数个值，$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$或$2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

观察单位圆中的正弦线，也能回答上面的三个问题.

3. (1) 单调递增区间：$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；单调递减区间：$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 单调递增区间：$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；单调递减区间：$\left[k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) 单调递增区间：$[4k\pi-\pi,\ 4k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$；单调递减区间：$[4k\pi+\pi,\ 4k\pi+3\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

4. (1) $103°15'$，$164°30'\in[90°,\ 180°]$，且$103°15'<164°30'$，而$y=\sin x$在$[90°,\ 180°]$单调递减，所以$\sin 103°15'>\sin 164°30'$.

(2) $\sin\left(-\frac{54\pi}{7}\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin\frac{2\pi}{7}$，$\sin\left(-\frac{63\pi}{8}\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$,

因为 $\frac{2\pi}{7}$，$\frac{\pi}{8}\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，且$\frac{2\pi}{7}>\frac{\pi}{8}$，$y=\sin x$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

所以 $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{8}$，即$\sin\left(-\frac{54\pi}{7}\right)>\sin\left(-\frac{63\pi}{8}\right)$.

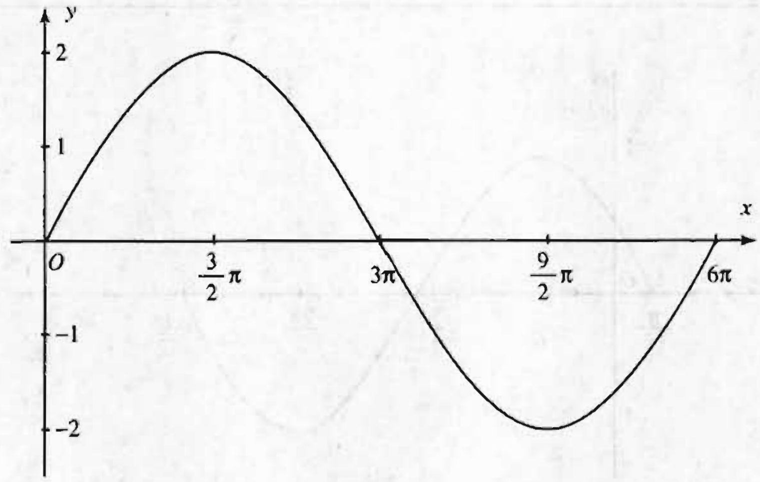
5. 解：因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以 $-2\leqslant4-m\leqslant2\Rightarrow2\leqslant m\leqslant6$.

练习 A（第 49 页）

1. (1) 列表：

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$\frac{1}{3}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin\frac{1}{3}x$	0	2	0	-2	0

描点作图：

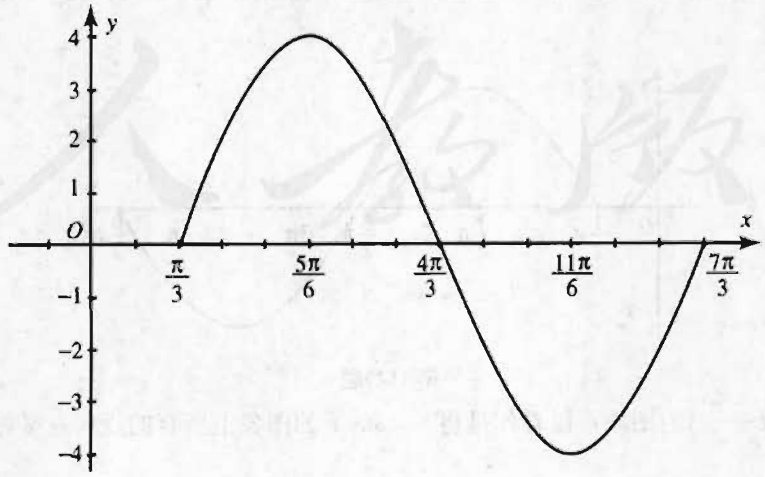


第 1(1)题

(2) 列表：

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	0	4	0	-4	0

描点作图：

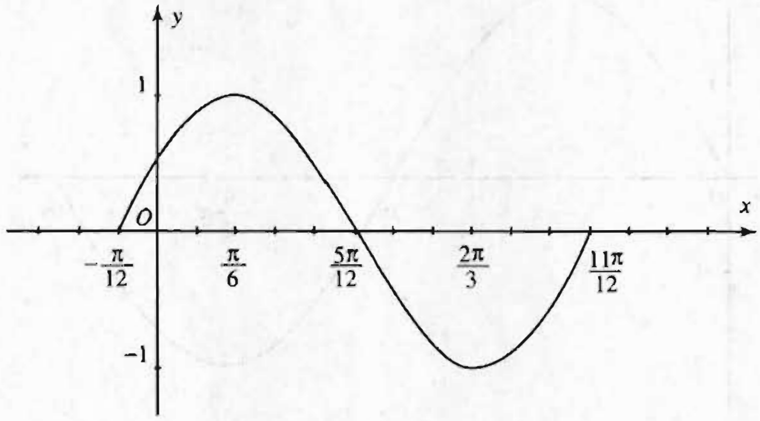


第 1(2)题

(3) 列表：

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	0	1	0	-1	0

描点作图：

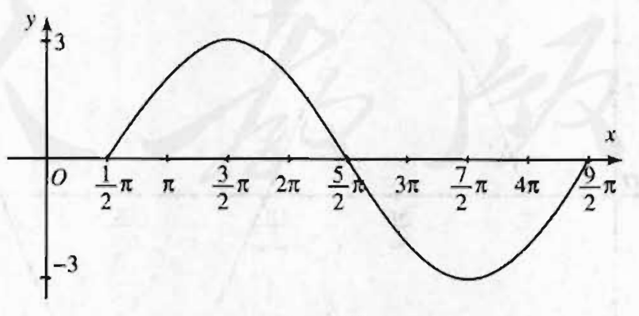


第1(3)题

(4) 列表：

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图：



第1(4)题

2. (1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象可以看作是将 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平行移动$\frac{\pi}{4}$个单位而得到的.

(2) 先将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到 $y=\sin 2x$ 的图象，再将 $y=\sin 2x$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，就得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象;或先将 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

(3) 先将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin 3x$ 的图象，再将 $y=\sin 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再将 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 5 倍(横坐标不变)，就得到 $y=5\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 图象.

(4) 先将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍(纵坐标不变)，就得到 $y=\sin \frac{1}{3}x$ 的图象，再将 $y=\sin \frac{1}{3}x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，就得到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,最后再将 $y=\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(横坐标不变)，就得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

3. 由图象知，周期为 π，最大值为 3，因此 $A=3$，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$.

而 $\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=0$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

从而所求解析式为 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4. 由图象知，周期为 0.02，频率为 50，电压的最大值为 536 伏.

设 $U=A\sin(\omega t+\varphi)$，则 $A=536$，$\frac{2\pi}{\omega}=0.02\Rightarrow\omega=100\pi$，$\varphi=0$.

所以电压 U 和时间 t 之间的函数解析式为：$U=536\sin 100\pi t$，$t\in[0, +\infty)$.

练习 B (第 50 页)

1. (1) D. (2) B.

2. (1) 当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=\frac{3}{2}$；当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=3$；当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x=k\pi-\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=-3$.

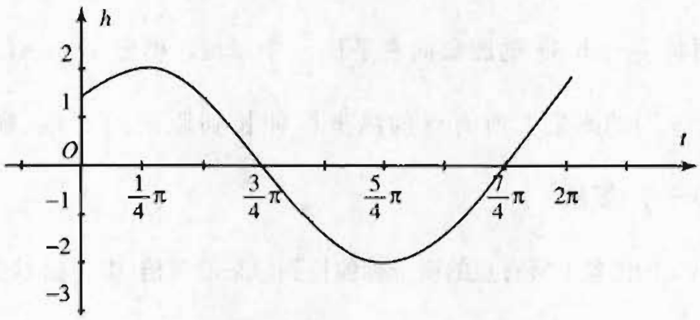
3. (1) 将函数 $y=\sin 3x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{9}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

(2) 将函数 $y=\sin 3x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，再将 $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向下平移 2 个单位长度，就得到函数 $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2$ 的图象.

(3) 把函数 $y=\sin 3x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍(纵坐标不变)，再作所得图象关于 x 轴对称的图象，就得到函数$y=-\sin x$的图象.

(4) 作函数 $y=\sin 3x$ 的图象关于 x 轴的对称图象，即得到函数 $y=-\sin 3x$ 的图象.

4. 函数 $h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$[0, 2\pi]$上的图象如图所示：



第 4 题

(1) $t=0$ 小球在平衡位置上方$\sqrt{2}$ cm 处.

(2) 小球最高、最低点与平衡位置的距离都是 2 cm.

(3) 2π s.

(4) $\frac{1}{2\pi}$次.

5. 设游人所乘吊舱的底部距地面的高度为 h 米，巨轮转动的时间为 t min，

则 $h=30-30\cos\frac{\pi}{6}t$.

当 $t=4$ 时，$h=45$.

即转动到 4 min 时，该游人所乘吊舱的底部距地面的高度是 45 米.

练习 A（第 53 页）

1. (1) $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.　(2) $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. (1) 不能成立，因为 $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$的值域是$[-1, 1]$，而$\frac{3}{2}\notin[-1, 1]$.

(2) $\cos^2 x=0.8$，即 $\cos x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$能成立，因为$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\in[-1, 1]$.

3. 略.

4. $y_{max}=3$，此时 x 的集合是$\{x \mid x=6k\pi+3\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，$y_{min}=1$，此时 x 的集合是$\{x \mid x=6k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

5. (1) 6π.　　(2) π.

练习 B（第 54 页）

1. (1) 当 x 由 $-\pi$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x$ 的值随 x 的增大而增加，是负的.

(2) 当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\cos x=0$.

(3) 当 $x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\cos x$ 取得最大值，当 $x=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，取得最小值.

2. 单调递减区间是：$\left[\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{9},\ \frac{2}{3}k\pi+\frac{4\pi}{9}\right](k\in\mathbf{Z})$；

单调递增区间是：$\left[\frac{2}{3}k\pi+\frac{4\pi}{9},\ \frac{2}{3}k\pi+\frac{7\pi}{9}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

3. (1) $\cos\frac{15\pi}{8}>\cos\frac{14\pi}{9}$.　　(2) $\cos 515^\circ>\cos 530^\circ$.

4. (1) 把 $y=\frac{1}{3}\cos x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 3 倍（横坐标不变），就得到函数 $y=\cos x$的图象.

(2) 把 $y=\cos\frac{3}{5}x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{3}{5}$倍（纵坐标不变），就得到函数 $y=\cos x$的图象.

(3) 把 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，就得到函数 $y=\cos x$ 的图象.

(4) 把 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，就得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象.

5. 方法一：先把 $y=\cos x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），可得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象，再将函数 $y=\cos 2x$ 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，就得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍（横坐标不变），得到函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

方法二：先把 $y=\cos x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，得到函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再将函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），可得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的2倍（横坐标不变），得到函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

练习 A（第 56 页）

1. (1) $\left\{x \middle| k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.　　(2) $\{x \mid x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) $\left\{x \middle| k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

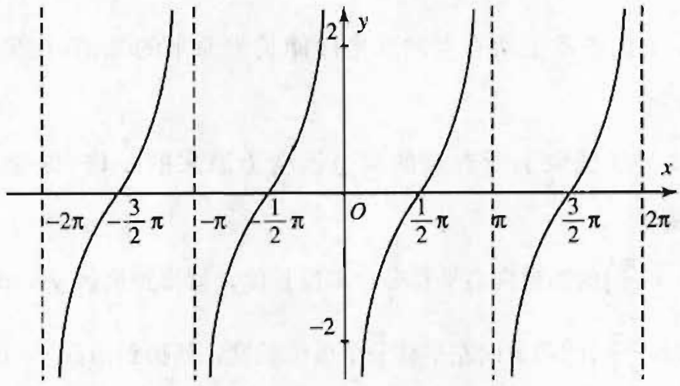
2. $\left\{x \middle| x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. (1) 2π.　　(2) $\frac{\pi}{\omega}$.

4. (1) $\tan 138°<\tan 143°$.

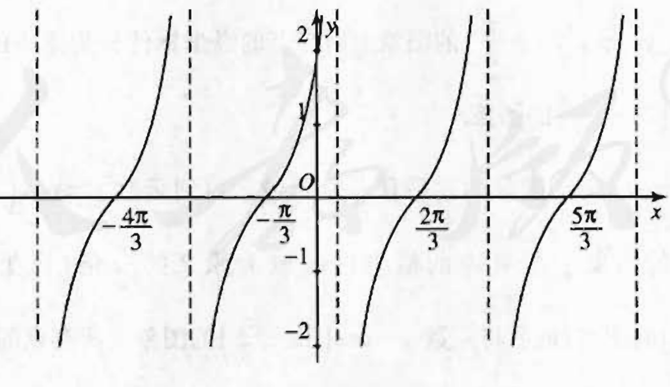
(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

5. (1) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$的图象如图所示：



第 5(1)题

(2) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象如图所示：



第 5(2)题

练习 B（第 57 页）

1. $\left\{x \,\middle|\, x\in \mathbf{R}\text{ 且 } x\neq \frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.

2. (1) $f(-x)=-\tan(-x)=-(-\tan x)=-f(x)$，且 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，可知 $y=-\tan x$，$x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 是奇函数.

   (2) $f(-x)=-|\tan(-x)|=-|-\tan x|=-|\tan x|=f(x)$，且 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，可知 $y=-|\tan x|$，$x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 是偶函数.

3. (1) $\left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.　　(2) $\left\{x \,\middle|\, \frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.

4. (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)>\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$.　　(2) $\tan 1\,519°>\tan 1\,493°$.

5. $\frac{\pi}{2}$.

6. 单调增区间是：$\left(k\pi-\frac{7\pi}{10},\ k\pi+\frac{3\pi}{10}\right)$，$k\in \mathbf{Z}$.

练习 A（第 60 页）

1. (1) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$.　　(2) $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.　　(3) $\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$.　　(4) $\frac{4\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$.

2. 略.

3. (1) $\frac{\pi}{3}$.　　(2) $-\frac{\pi}{6}$.　　(3) $\frac{3\pi}{4}$.　　(4) $\frac{\pi}{6}$.

4. (1) $\pm\frac{\pi}{6}$.　　(2) $\pm\frac{\pi}{3}$.

   (3) $\arctan 3.415\approx 1.29$，$-\pi+\arctan 3.415\approx -1.86$.　　(4) $\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}\pi$.

5. (1) $\frac{\pi}{2}$.　　(2) 0.　　(3) 0.　　(4) $\frac{\pi}{2}$.　　(5) 1.31.　　(6) -1.40.

练习 B（第 61 页）

1. (1) $-\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$.　　(2) $\pm\frac{2\pi}{3}$.

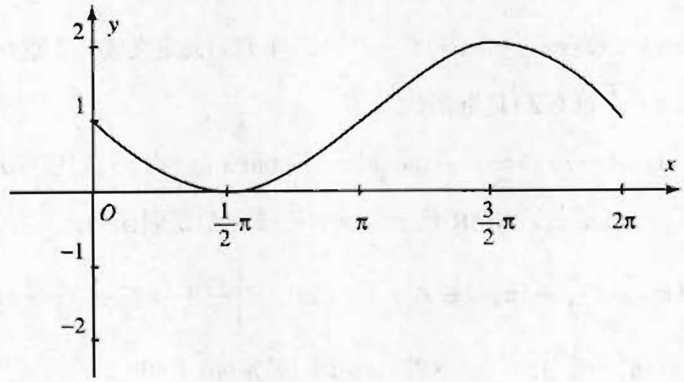
   (3) $\arctan(-3.415)\approx -1.29$，$\pi+\arctan(-3.415)\approx 1.85$.　　(4) $-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$.

2. (1) $\{\arcsin 0.346\,9,\ \pi-\arcsin 0.346\,9\}$.　　(2) $\{\pi-\arccos 0.857\,2,\ \pi+\arccos 0.857\,2\}$.
   (3) $\{\arctan 0.8,\ \pi+\arctan 0.8\}$.

3. (1) $\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$.　　(2) $\frac{5\pi}{6}$.　　(3) $\frac{2\pi}{3}$.　　(4) $\frac{\pi}{6}$.

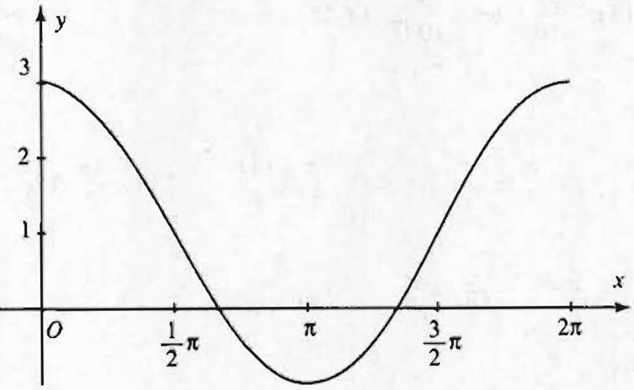
习题 1-3A（第 61 页）

1. (1) $y=1-\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的简图如图所示：



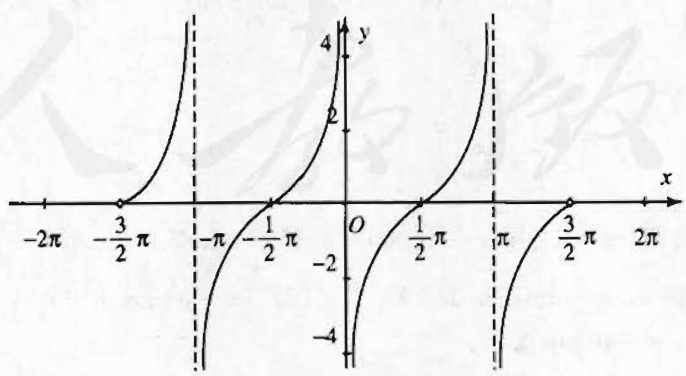
第 1(1)题

(2) $y=2\cos x+1$，$x\in[0,\ 2\pi]$的简图如图所示：



第 1(2)题

(3) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\left(-\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$的简图如图所示：



第 1(3)题

2. (1) $\left\{x \middle| x\in \mathbf{R}\text{ 且 } x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.

(2) $\{x \mid x\in \mathbf{R}\text{ 且 } x\neq 2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$.

(3) $\left\{x \middle| k\pi\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$.

3. (1) 当 $x\in\{x \mid x=2k\pi+\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\max}=3$；当 $x\in\{x \mid x=2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\min}=-3$.

(2) 当 $x\in\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=-\frac{1}{2}$；当 $x\in\left\{x \middle| x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$.

(3) 当 $x\in\left\{x \middle| x=k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=2$；当 $x\in\left\{x \middle| x=k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=-2$.

(4) 当 $x\in\left\{x \middle| x=2k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\max}=5$；当 $x\in\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 时，$y_{\min}=1$.

4. (1) $\frac{8\pi}{3}$.　(2) $\frac{3\pi}{2}$.　(3) π.　(4) 4π.

5. (1) $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$，$k\in \mathbf{Z}$.　(2) $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\ \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in \mathbf{Z}$.

(3) $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$，$k\in \mathbf{Z}$.　(4) $\left[k\pi-\frac{5\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in \mathbf{Z}$.

6. (1) 奇函数.　(2) 偶函数.　(3) 偶函数.　(4) 非奇非偶函数.

7. (1) 4，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{5}$.　(2) $\frac{1}{2}$，8π，$-\frac{\pi}{7}$.

8. (1) C.　(2) D.　(3) B.　(4) C.

9. (1) $\frac{5\pi}{6}$.　(2) $-\frac{\pi}{4}$.　(3) $-\frac{\pi}{4}$.

10. (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}$.　(2) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)=-\arcsin\frac{1}{4}$.　(3) $\arccos\frac{1}{3}$.　(4) $-\arccos\frac{3}{7}$.

习题 1-3B（第 63 页）

1. 略.

2. $y=3\sin\left(3x-\frac{7\pi}{6}\right)$.

3. 先把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，再把所得函数图象向下平移 2 个单位长度，即得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-2$ 的图象.

4. 先把 $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上的所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，然后把所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，即得函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 再把函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍(横坐标不变)，得到 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

5. (1) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.　　(2) $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

6. (1) 当 $x\in\left\{x \middle| x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\max}=1$，$x\in\{x|x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$时，$y_{\min}=\frac{1}{2}$.

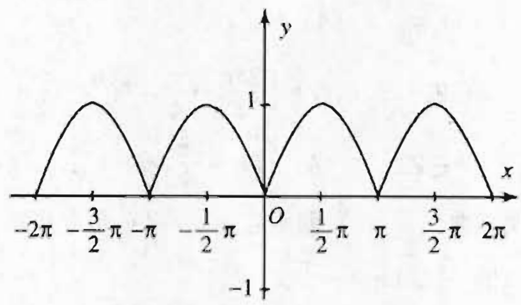
(2) 当 $x\in\{x|x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$时，$y_{\max}=1$；当 $x\in\left\{x \middle| x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$时，$y_{\min}=\frac{1}{6}$.

(3) 因为$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以由二次函数的图象知，

当 $\sin x=-1$，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=2$；

当 $\sin x=1$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\min}=-2$.

7.



第7题

观察图象可知，它的周期是 π. 证明如下：

对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$，所以　$T=\pi$.

8. B.

9. (1) 周期 $T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$，频率 $f=\frac{1}{T}=50$，振幅为 5，初相为$\frac{\pi}{3}$.

(2) 当 $t=0$，$\frac{1}{600}$，$\frac{1}{150}$，$\frac{7}{600}$，$\frac{1}{60}$时，代入解析式，得电流强度 I 依次为$\frac{5\sqrt{3}}{2}$，5，0，-5，0.

10. (1) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.　　(2) 约 24.8 cm.

11. 设解析式为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$，由图象知 $A=k=\frac{3}{2}$.

又　$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$，所以　$T=\frac{5\pi}{3}$. 所以　$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}}=\frac{6}{5}$.

令　$\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{9}{10}\pi$.

所以　$y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x+\frac{9}{10}\pi\right)+\frac{3}{2}$.

12. (1) $\frac{\pi}{3}$.　　(2) $-\frac{\pi}{6}$.　　(3) $-\frac{\pi}{2}$.　　(4) π.

13. (1) -0.2527.　　(2) 0.5511.

14. (1) $x=\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.　　(2) $x=\pi+\arcsin\dfrac{1}{4}$.

本章小结

III 巩固与提高（第 68 页）

1. 设点 $P(t, -3t)$ $(t\neq 0)$，

若角 α 的终边在射线 $y=-3x(x\geqslant 0)$ 上，则 $t>0$，$x=t$，$y=-3t$，$r=\sqrt{t^2+9t^2}=\sqrt{10}t$.

由三角函数的定义知

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3t}{\sqrt{10}t}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{t}{\sqrt{10}t}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

若角 α 的终边在射线 $y=-3x(x\leqslant 0)$ 上，

则 $t<0$，$x=t$，$y=-3t$，$r=\sqrt{t^2+9t^2}=-\sqrt{10}t$.

由三角函数的定义知

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3t}{-\sqrt{10}t}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{t}{-\sqrt{10}t}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

2. 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $\cos(\sin x)\geqslant 0$ 恒成立，所以函数定义域为 $\mathbf{R}$.

3. $\{-2, 0, 4\}$.

4. (1) 负.　(2) 正.　(3) 负.　(4) 正.

5. 当 x 为第一象限角时，$\tan x=2$，$\cot x=\dfrac{1}{2}$，$\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sec x=\sqrt{5}$，$\sin x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\csc x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；

当 x 为第三象限角时，$\tan x=2$，$\cot x=\dfrac{1}{2}$，$\cos x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sec x=-\sqrt{5}$，$\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\csc x=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

6. $x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6}, (2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

7. $\sqrt{1+2\sin(\pi-2)\cdot\cos(\pi-2)}=\sqrt{1-2\sin 2\cdot\cos 2}$

$=\sqrt{(\sin 2-\cos 2)^2}=|\sin 2-\cos 2|$.

因为 $\sin 2>0$，$\cos 2<0$，所以 原式 $=\sin 2-\cos 2$.

8. (1) 原式 $=\dfrac{4\tan\alpha-2}{5+3\tan\alpha}=\dfrac{4\times 3-2}{5+3\times 3}=\dfrac{5}{7}$.

(2) 原式 $=\tan\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{\tan\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{3}{3^2+1}=\dfrac{3}{10}$.

(3) 原式 $=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{8}{5}$.

(4) 原式 $=\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan^2\alpha+\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}=\cdots=\dfrac{9}{5}$.

9.（1）当 α 为第一象限角时，$\cos(2\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 α 为第二象限角时，$\cos(2\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）当 α 为第一象限角时，$\tan(\alpha-7\pi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$；当 α 为第二象限角时，$\tan(\alpha-7\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10.（1）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$；　　（2）1.077 1.

11.

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12.（1）提示：左边$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=1+\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=$右边.

（2）提示：左边$=\cos^2\alpha\left(2+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=(2\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha+2\sin\alpha)$

$=2\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=2+5\sin\alpha\cos\alpha=$右边.

（3）左边$=\dfrac{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{1}{\sin^2 A}}=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$，

右边$=\left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2=\left(\dfrac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}\right)^2=\left(-\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)^2=\tan^2 A$，

左边＝右边，所以原式成立.

（4）因为　$(\tan A-\tan B)\cot A=\tan A\cot A-\tan B\cot A=1-\tan B\cot A$，

$(\cot B-\cot A)\tan B=\cot B\tan B-\cot A\tan B=1-\cot A\tan B$，

所以　$(\tan A-\tan B)\cot A=(\cot B-\cot A)\tan B$.

所以　$\dfrac{\tan A-\tan B}{\cot B-\cot A}=\dfrac{\tan B}{\cot A}$.

13.（1）$\sin 378°21'=0.314\ 8$，$\cos 742°30'=0.923\ 9$，$\tan 1\ 111°=0.600\ 9$.

（2）$\sin(-879°)=-0.358\ 4$，$\tan\left(-\frac{33\pi}{8}\right)=-0.414\ 2$，$\cos\left(-\frac{13\pi}{10}\right)=-0.587\ 8$.

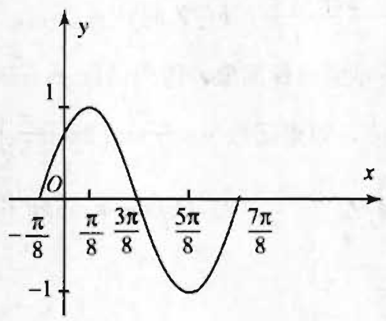
（3）$\sin 3=0.141\ 1$，$\cos(\sin 2)=0.614\ 3$.

14.（1）偶函数.　（2）偶函数.　（3）偶函数.　（4）奇函数.

15. (1) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期为 π. 列表：

x	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
$2x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

描点作图：

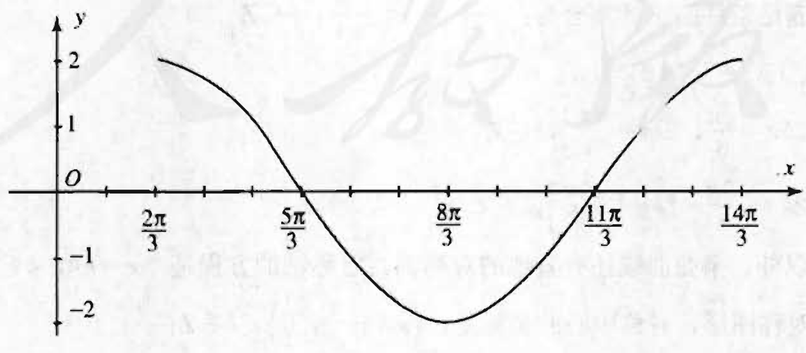


第 15(1)题

(2) $y=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的周期为$4\pi$. 列表：

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$	2	0	-2	0	2

描点作图：



第 15(2)题

16. 函数 $y=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$的振幅是2，周期是$\frac{2\pi}{5}$，初相是$\frac{\pi}{6}$.

先把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{5}$倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin 5x$ 的图象，再把函数 $y=\sin 5x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{30}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，最后把函数 $y=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长为原来2倍(横坐标不变)，得到函数 $y=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

当 $5x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{15}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=2$.

17. 先作 $y=\sin 2x$ 的图象关于 x 轴的对称图象，得到函数 $y=-\sin 2x$ 的图象，再把函数 $y=-\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，即得函数 $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象.

18. (1) $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.　　(2) $[6k\pi-\pi, 6k\pi+2\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.

19. (1) $1+\sqrt{3}\tan x=0\Rightarrow\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以满足条件的 x 的集合为：$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $3\tan x-1=0\Rightarrow\tan x=\frac{1}{3}$，

所以满足条件的 x 的集合为：$\{x\mid x=k\pi+0.32, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) $\cos(\pi-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以满足条件的 x 的集合为：$\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(4) $2\sin^2 x=1\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以满足条件的 x 的集合为：$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

20. (1) $30°$或 $150°$.　　(2) $150°$.

21. (1) $x\in\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3}, 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2) $x\in\left[2k\pi+\frac{5\pi}{6}, 2k\pi+\frac{13\pi}{6}\right], k\in\mathbf{Z}$.

22. 除了 y 轴以外，余弦曲线还有其他的对称轴，对称轴的方程是：$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；可以说余弦曲线是中心对称图形，对称中心的坐标是：$\left(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象是轴对称图形，对称轴的方程是：$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

23. (1) $h=5.6+4.8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$.　　　(2) $h=5.6+4.8\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{2}\right)$.

(3)

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
h/m	0.8	1.44	3.2	5.6	8	9.76	10.4

t/s	0	5	10	15	20	25	30
h/m	0.8	1.44	3.2	5.6	8	9.76	10.4

IV　自测与评估（第 71 页）

1. $A=B$.

2. 由$\frac{1}{2}lR=5$，$l=5$，得 $R=2$，所以 $\theta=\frac{l}{R}=\frac{5}{2}=2.5$(弧度)$\approx 143.2°$.

3. 因为 α 为第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$.

$$原式=\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}+\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$$
$$=\cos\alpha\cdot\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$
$$=\cos\alpha\cdot\left(-\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

4. $$左边=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\sin\alpha+\cos\alpha$$
$$=右边.$$

5. $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$的减区间为 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的增区间，

即$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{3\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

6. 周期 π，最大值 3，使函数取得最大值的 x 的集合是：$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

7. (1) 由题中图所示，这段时间的最大温差是 30−10=20(℃).

(2) 图中从 6 时到 14 时的图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期的图象，

所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=14-6=8$. 所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$.

由图示，$A=\frac{1}{2}(30-10)=10$，$b=\frac{1}{2}(30+10)=20$. 这时，$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)+20$.

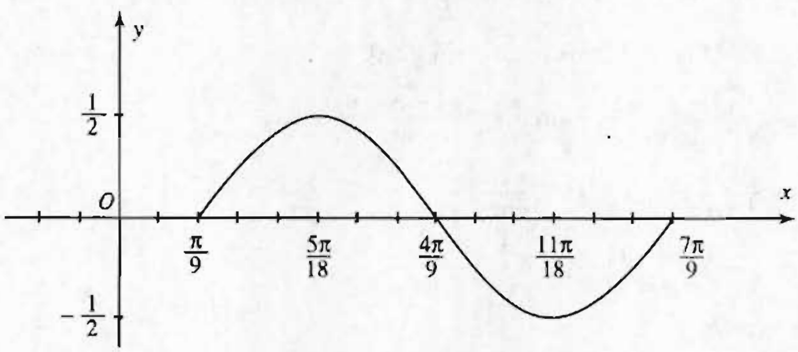
将 $x=6$，$y=10$ 代入上式，可取 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

综上，所求的解析式为 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20$，$x\in[6,\ 14]$.

8. (1) 函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$. 列表

x	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$
$3x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

描点作图：



第 8(1)题

(2) 先将 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再把 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$倍(纵坐标不变)，得到 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后把所得图象上所有点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(横坐标不变)，就得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

六、反馈与评价

I 知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列说法中，正确的是(　　).

(A) 第二象限的角是钝角

(B) 第三象限的角必大于第二象限的角

(C) $-831°$是第二象限的角

(D) $-95°20'$, $984°40'$, $264°40'$是终边相同的角

2. 如果 $\sin\theta=m$, $|m|<1$, $180°<\theta<270°$, 那么 $\tan\theta$ 等于(　　).

(A) $\dfrac{m-3}{\sqrt{1-m^2}}$　　(B) $-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

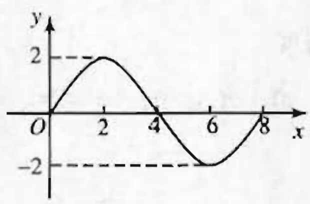
(C) $\pm\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　(D) $-\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

3. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，且 $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, 则 α 可以表示成(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{1}{5}$

(C) $\pi-\arcsin\dfrac{1}{5}$　　(D) $\pi+\arcsin\dfrac{1}{5}$

4. 如图是函数 $f(x)=A\sin\omega x(A>0, \omega>0)$一个周期的图象，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$的值等于(　　).



第 4 题

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $2+\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

5. 设 α 是第三象限的角，且 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$, 则$\dfrac{\alpha}{2}$所在的象限是(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

6. 已知 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$在同一周期内，$x=\dfrac{\pi}{9}$时有最大值$\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{4\pi}{9}$ 时有最小值$-\dfrac{1}{2}$, 则函数的解析式为(　　).

(A) $y=2\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(B) $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(D) $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 在半径为 2 米的圆中，120°的圆心角所对的弧长为________________.

8. 在$-360°$到 720°之间与$-1\ 050°$终边相同的角是________________.

9. 将函数 $y=f(x)$的图象上的各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，再将图象上的各点

横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)，然后再将所得的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$，恰好得到函数$y=\sin x$的图象，则$f(x)=$________.

10. 下列说法正确的是________(填上你认为正确的所有命题的代号).

① 函数$y=-\sin(k\pi+x)(k\in \mathbf{Z})$是奇函数；

② 函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$关于点$\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$对称；

③ 函数$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期是$\pi$；

④ 函数$=\cos^2 x+\sin x$的最小值是-1.

三、解答题（本大题共4小题，共50分）

11. (12分) 求值：(1) $\sin(-930^\circ)$； (2) $\tan\left(-\frac{23}{6}\pi\right)$.

12. (12分)某工厂使用交流电的电流强度I(A)随时间t(s)变化的函数为$I=10\sin\left(100\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$.

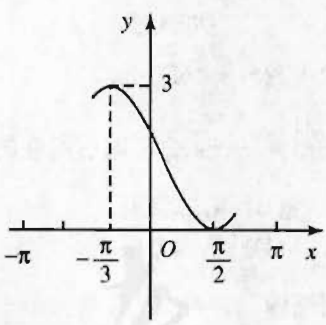
(1) 求电流强度变化的周期和频率；

(2) 求当$t=\frac{1}{120}$(s)时的电流强度.

13. (12分)已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0, |\varphi|<\pi, b$为常数) 的一段图象如图所示.

(1) 求函数的解析式；

(2) 求这个函数的单调区间.



第13题

14. (14分)已知$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$，求：

(1) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$的值；

(2) $\tan\theta$的值.

知识与方法测试参考答案

一、选择题：

1. D； 2. B； 3. C； 4. A； 5. B； 6. B.

二、填空题：

7. $\frac{4\pi}{3}$ m； 8. $-330°$，$30°$，$390°$； 9. $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$； 10. ①③④.

三、解答题：

11. (1) $\sin(-930°)$

$=-\sin 930°$

$=-\sin(720°+210°)$

$=-\sin 210°$

$=-\sin(180°+30°)$

$=\sin 30°$

$=\frac{1}{2}$.

(2) $\tan\left(-\frac{23}{6}\pi\right)$

$=-\tan\left(\frac{23}{6}\pi\right)$

$=-\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. (1)电流强度的周期 $T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$，频率为 $\frac{1}{T}=50$；

(2) 将 $t=\frac{1}{120}$ 代入 $I=10\sin\left(100\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$，得 $I=10\sin\left(100\pi\cdot\frac{1}{120}+\frac{2\pi}{3}\right)=10\sin\frac{3}{2}\pi=-10$.

即 $t=\frac{1}{120}$ s 时的电流强度的大小是 10 A，方向与所规定的正方向相反.

13. (1) $A=\frac{1}{2}(y_{\max}-y_{\min})=\frac{3}{2}$，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$，$\omega=\frac{6}{5}$. 易知 $b=\frac{3}{2}$，

所以 $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x+\varphi\right)+\frac{3}{2}$，将点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 代入得 $\varphi=2k\pi-\frac{11\pi}{10}(k\in\mathbf{Z})$ 又 $|\varphi|<\pi$，则 $k=1$，$\varphi=\frac{9\pi}{10}$. 所以 $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x+\frac{9\pi}{10}\right)+\frac{3}{2}$.

(2) 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{6}{5}x+\frac{9\pi}{10}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{5k\pi}{3}-\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$；

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{6}{5}x+\frac{9\pi}{10}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{5k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

所以 $\left[\frac{5k\pi}{3}-\frac{7\pi}{6},\ \frac{5k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 是单调递增区间，$\left[\frac{5k\pi}{3}-\frac{\pi}{3},\ \frac{5k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 是单调递减区间.

14. (1) 因为 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{10}$.

所以 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{3}\sqrt{10}$.

(2) 因为 $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{10}{3}$，所以 $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}=-\frac{10}{3}$.

即 $3\tan^2\theta+10\tan\theta+3=0$，所以 $\tan\theta=-3$ 或 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$.

II 评价建议

1. 根据本章的内容安排，在学习过程中可进行两次阶段性小测试和一次章节测试，第一次阶段测试考查前两节的内容，重点突出三角函数的定义和同角三角函数的基本关系，以加强学生对三角函数定义的理解和三角公式的灵活运用，第二次阶段性小测试考查第三节的内容，重点是正弦函数的图象和性质，测试后，教师要对学生进行合理的评价，并指导学生写试卷分析，及时总结经验和纠正错误，使学生正确认识自己，让评价成为反思、调节和提高的动力.

2. 数学建模是数学学习的一种新的方式，它把学到的知识应用于实践，可以使学生体验到数学在解决实际问题中的价值和作用. 为提高学生的创新精神和实践能力，可指导学生研究教材第 65 页的数学建模问题，根据题目的要求写出数学建模报告，要求过程简明、理由充分、结论明确. 有条件的学校，可组织学生深入实际探索研究，通过学生的独立思考、交流讨论、探索合理的解决方案，写出数学建模的小论文，并将写得好的小论文在班级中展览.

第二章

平 面 向 量

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义，理解向量的几何表示.
2. 掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义.
3. 掌握数乘向量的运算，并理解其几何意义，以及两个向量共线的条件.
4. 了解向量的线性运算性质及其几何意义.
5. 了解平面向量的基本定理及其意义.
6. 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示.
7. 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘向量运算.
8. 会用坐标表示平面向量共线的条件.
9. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义.
10. 知道平面向量的数量积与向量投影的关系.
11. 掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的坐标运算.
12. 能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.
13. 会用向量方法处理简单的物理和几何问题.

（二）过程与方法目标

1. 通过本章的学习，研究用向量处理问题的两种方法——向量法和坐标法.
2. 经历概念的形成过程，解题的思维过程，体验数形结合思想的指导作用.
3. 经历用向量方法解决某些简单的几何问题、物理问题的过程，体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过大量实例，体会向量语言或运算在解决数学问题和实际问题中的工具作用.

2. 向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，通过本章的学习，认真体会它们之间的联系.

3. 本章的学习较多地运用了几何直观、类比、从特殊到一般等思维方法，认真体会这些思维方法，逐渐提高理性思维能力.

4. 通过本章学习，逐步认识向量的科学价值、应用价值和文化价值，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 用点的相对位置和位移理解自由向量（向量）. 用位移的合成理解向量的加法. 建立平行、全等与向量加法及其运算律的联系.

2. 用放大、缩小理解数乘向量. 用相似三角形的性质理解数乘向量的分配律.

3. 用物理中的做功计算和向量在轴上的投影计算，引入向量的数量积. 用向量和的投影的性质引入数量积的分配律. 用数量积计算长度和角度.

4. 强调了向量在几何、三角和解析几何中的应用. 用向量的观点重新认识几何、三角中的基本概念和有关性质.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章主要包括向量的线性运算、向量的分解与向量的坐标运算、平面向量的数量积、向量的应用四大节.

第一大节，是向量的线性运算，教材通过学生熟悉的位移引入向量的概念，并用有向线段来描述向量，通过例题说明向量源于实际并应用于实际. 在此基础上，教材接着讲了向量加法、减法、数乘向量的运算法则、几何意义、运算律，向量共线的条件与轴上向量的坐标运算.

第二大节，是向量的分解与向量的坐标运算. 教材首先介绍了平面向量基本定理，并以此为依据引入向量的正交分解的概念和向量的直角坐标，进而给出了向量的加法、减法、数乘向量的直角坐标运算，利用坐标表示平面向量共线的条件.

第三大节，是平面向量的数量积. 教材先以力做功为背景引入向量的数量积的概念，然后探索向量的数量积的概念，接着把向量数量积的计算坐标化，通过向量的坐标运算推导直角坐标平面上的度量公

式，包括求向量的长度、距离和夹角公式.

第四大节，是向量的应用. 介绍了向量在平面几何、解析几何和物理中的应用. 通过本节学习，使学生了解向量丰富的实际背景，其物理背景是力、速度、加速度等概念，几何背景是有向线段，这对于学生理解向量概念和运用向量解决问题十分重要.

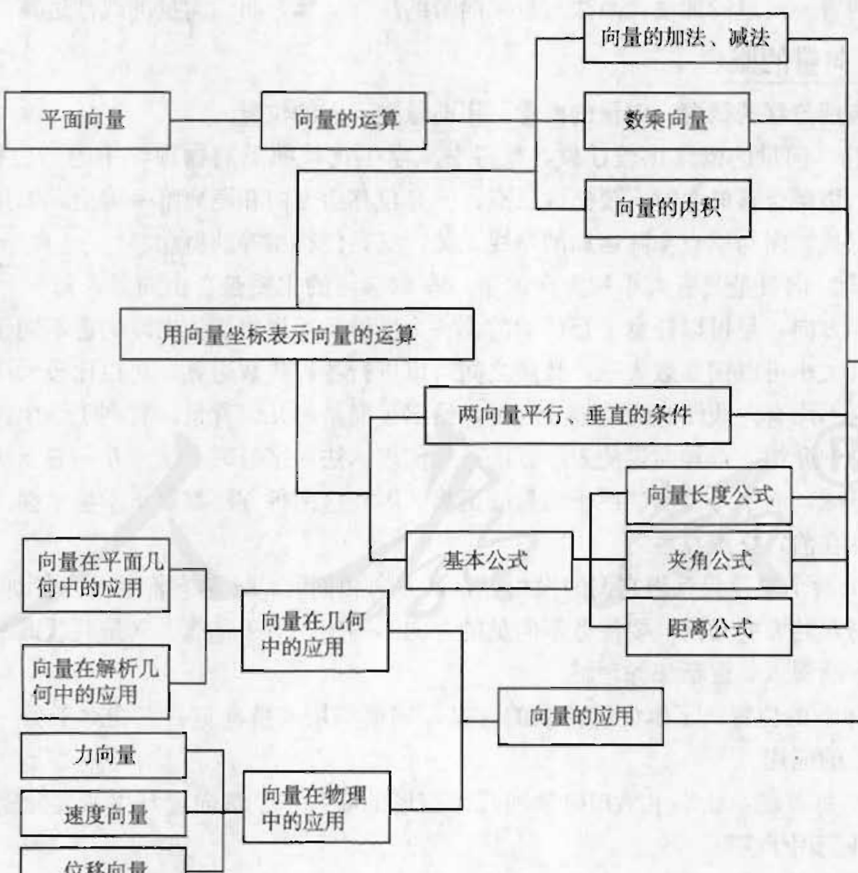
2. 地位与作用

向量是数学中重要的、基本的概念，它既是代数的对象，又是几何的对象. 作为代数对象，向量可以运算，作为几何对象，向量有方向，可以刻画直线、平面、切线等几何对象；向量有长度，可以刻画长度、面积、体积等几何度量问题. 向量由大小和方向两个因素确定，大小反映了向量数的特征，方向反映了向量形的特征，因此是集数形于一身的数学概念，是数学中数形结合思想的体现. 向量是重要的物理模型，在现实生活中有广泛的应用. 与时俱进地审视，它应该成为高中数学的基础知识. 把向量这一章放在三角函数和三角恒等变换之间，一方面是学习向量需要三角函数作准备，另一方面是为了利用向量的数量积推导两角差的余弦公式.

3. 重点与难点

重点是向量的线性运算和数量积运算及其应用；难点是理解平面向量基本定理和平面向量分解定理. 理解了这两个定理，就能很好地掌握平面向量的各种知识.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1	向量的线性运算	4 课时
2.2	向量的分解与向量的坐标运算	2 课时
2.3	平面向量的数量积	2 课时
2.4	向量的应用	2 课时
本章小结		2 课时

（四）教学建议

2.1 向量的线性运算

本大节主要包括向量的概念、向量的加法、向量的减法、数乘向量、向量共线的条件与轴上向量坐标运算等五小节内容．向量的加法、减法和数乘向量的综合运算，叫做向量的线性运算．

2.1.1 向量的概念

本小节主要包括位移的概念、向量的概念、用向量表示点的位置．

1．位移的概念．向量的概念比较抽象，教科书从学生比较熟悉的物理学中的“位移”概念出发，引入向量的概念．讲解位移概念时，要把握三点：一是位移由方向和距离唯一确定；二是位移只与质点的起、终点位置有关，而与质点实际运动的路线无关；三是位移相等的概念．

2．向量的概念．向量是具有大小和方向的量，本章学习的主要是自由向量，对于一个向量，只要不改变它的大小和方向，是可以任意平行移动的，它为后继学习提供了依据．向量不同于数量，数量是只有大小的量，其大小可以用实数表示，数量之间可以进行各种代数运算，可以比较大小．两个向量不能比较大小．教科书用有向线段直观地描述向量，给出了向量的几何背景，有利于学生进一步去理解向量的概念．教科书中介绍了两种向量的表示方法，几何表示法和字母表示法．几何表示法为用向量处理几何问题打下了基础，而字母表示法便于向量的运算，因此这两种方法都要求学生掌握．对字母表示法书写时要注意始点在前，终点在后．

3．有关概念．两个向量只有当它们的模相等，且方向相同时，才称它们相等．例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，意味着 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同．要注意零向量的方向不确定．对于基线、向量共线或平行的概念要了解，随着学习的不断深入，逐渐加深理解．

4．用向量表示点的位置．了解位置向量的含义，知道利用向量确定一点相对于另一点的位置，在现实生活中有广泛的应用．

5．通过例题、练习题，让学生感知向量和几何图形的联系，了解向量与生活实际密切联系，说明向量来源于实际并应用于实际．

6．本小节的重点是向量的概念，相等向量的概念，向量的表示，难点是对向量概念的理解．

7. 在向量概念的教学中，要利用学生的生活经验以及其他学科的相关知识，创设丰富的问题情景，如物理中的速度、加速度，以及生活中的例子，通过实例使学生进一步理解概念的实质．还可采用类比的方法与实数比较找出区别与联系．

2.1.2 向量的加法

本小节主要包括向量加法、向量加法的三角形法则、向量加法的平行四边形法则、向量求和的多边形法则、向量加法的交换律和结合律．

1. 向量的加法定义．几何中的向量加法是用几何作图来定义的，教科书给出了两个向量求和的三角形法则和平行四边形法则，多个向量求和的多边形法则．教科书采用三角形法则来定义向量的加法，这种定义对两向量共线时同样适用，而当两个向量共线时，平行四边形法则就不适用了．当两向量不共线时，向量加法的三角形法则和平行四边形法则是一致的．当求两个或多个不共线向量的和时，和向量是从第一个向量的始点指向最后一个向量的终点．

对向量的加法可作如下说明：

(1) 几个向量的和仍是一个向量．

(2) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$．

(3) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．

2. 向量加法的交换律．教科书对 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的情况给出了证明，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时也成立，证明方法如下：

证明：(1) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，由向量加法的定义知，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \text{ 与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向，且 } |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向，且 } |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|.$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，不妨设 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，由向量加法的定义知，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \text{ 与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向，且 } |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|,$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向，且 } |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|.$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

综上所述，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

3. 向量加法的结合律的证明，可用向量加法的三角形法则得出．通过证明，可巩固向量加法的三角形法则．

4. 本小节的重点是向量加法的三角形法则和平行四边形法则，难点是对向量加法定义的理解．

5. 教学中，要多结合几何图形去说明法则，同时可联系物理中力的合成去理解法则．引导学生通过动手作图，结合几何图形求解进一步体会法则的运用．

2.1.3 向量的减法

1. 教科书中给出了向量减法的两种定义方法．第一种定义是，类比数的运算中减法是加法的逆运算，将向量的减法定义为向量加法的逆运算．教学时，要结合三角形法则认真体会其含义．两个向量的减法是把两个向量的始点放在一起，它们的差是以减向量的终点为起点，被减向量的终点为终点的向量．

第二种方法是在定义相反向量的基础上，通过向量加法定义向量减法，用向量加法的平行四边形法

则给出其几何意义．两种定义方法的实质是一样的，但相对于其几何表示看，第二种定义方法更直观、更容易理解．但第一种定义方法在实际教学中应用更广泛．

2. 本节的重点是向量减法法则的运用，难点是对向量减法定义的理解．

3. 在定义、法则的教学中，要借助于几何直观，通过几何背景，帮助学生理解向量减法的几何意义，通过例子体会向量减法在解决问题中的运用．

2.1.4 数乘向量

1. 关于数乘向量．教科书用平面几何中，讨论图形的“放大”“缩小”，帮助学生理解数乘向量．类比数的乘法的定义方法，从三个相同向量相加入手，引出数乘向量，由特殊到一般给出了数乘向量的一般定义．教学中要强调：（1）$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量；（2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 有长度和方向，其长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，其方向与 λ 的符号有关，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；（3）数乘向量的几何意义是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向延长或缩短．

2. 关于数乘向量的运算律，可类比中学代数运算中实数乘法的运算律去记忆．由于运算律的证明比较复杂，故教科书并未给出证明，教学时，也不必给出证明．下面给出运算律①②的证明，供教师参考．

设 λ，μ 为实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为任意向量，则：

（1）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； ①

（2）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$． ②

证明：（1）如果 $\lambda=0$，$\mu=0$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 中至少有一个成立，则①式显然成立．

如果 $\lambda\neq0$，$\mu\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，可分两种情况：

Ⅰ　当 λ，μ 同号时，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向，而且

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$
$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|&=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|\\&=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|.\end{aligned}$$

即有 $|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$，且①式两边向量方向相同，所以①式成立．

Ⅱ　当 λ，μ 异号时，若 $|\lambda|>|\mu|$，①式两边向量的方向都与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同，所以

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=(|\lambda|-|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$
$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|&=|\lambda\boldsymbol{a}|-|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|-|\mu||\boldsymbol{a}|\\&=(|\lambda|-|\mu|)|\boldsymbol{a}|.\end{aligned}$$

即有 $|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$，所以①式成立．

若 $|\lambda|<|\mu|$，①式两边向量的方向都与 $\mu\boldsymbol{a}$ 的方向相同，同理可证 $|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$，所以①式成立；若 $|\lambda|=|\mu|$，①式显然成立．

（2）如果 $\lambda=0$，$\mu=0$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 中至少有一个成立，则②式显然成立．

如果 $\lambda\neq0$，$\mu\neq0$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$
$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|.$$
$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|.$$

如果λ，μ同号，则②式两边向量的方向都与$\boldsymbol{a}$同向；如果λ，μ异号，则②式两边向量的方向都与$\boldsymbol{a}$反向．综上所述，向量$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$的模相等且方向相同，所以②式成立．

3．本节的重点是数乘向量的定义、运算律．难点是正确地运用法则、运算律，进行向量的线性运算．

2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算

本小节主要包括平行向量基本定理、单位向量、轴上的坐标公式、数轴上两点间的距离公式．

1．平行向量基本定理．教科书通过例子验证定理成立的充要条件，教学时，不必给出严格的证明．需要说明的是，在平面向量中，向量平行包括向量基线重合的情况，与几何中两直线的平行的概念有点不同．利用定理可以证明有关点共线、相似等问题，也可利用平行的条件，解决几何问题．引入单位向量是为了后面向量的坐标运算服务．

2．轴上向量的坐标是平行向量基本定理的应用，同时，也为后面向量的平面直角坐标运算的学习打下基础，奠定了向量运算的数量化基础．在轴l上取单位向量$\boldsymbol{e}$，使$\boldsymbol{e}$的方向与l同方向，对轴上任意向量$\boldsymbol{a}$，一定存在唯一实数x，使$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}$，$x$叫做$\boldsymbol{a}$在$l$上的坐标．教学时注意：(1) 当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$同方向时，$x$是正数，当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$反向时，$x$是负数；(2) 实数与轴上的向量建立起一一对应关系，就可用数值来表示向量；(3) 轴与初中学过的数轴不同，当在轴上选一定点O作为原点时，轴就成了数轴．

教科书在给出了轴上向量的坐标的基础上，定义了轴上两个向量相等和求两个向量的和的法则．教学时，要注意$\overrightarrow{AB}$的坐标又常用AB表示．

初中学过的数轴是特殊的轴．教科书用向量的观点，定义了在数轴上向量的坐标，进而给出了数轴上两点的向量坐标公式．在应用公式时，要特别注意终点坐标减去始点坐标，不要记混．接着又给出了数轴上两点间的距离公式．教科书将向量知识与解析几何的知识有机地结合在了一起．

3．本小节的重点是平行向量基本定理，难点是平行向量基本定理的应用．由于本小节涉及的概念比较多，教学时，要借助于几何直观引导学生理解其实质．另外，要利用类比的方法，如轴上向量坐标与数轴上向量的坐标，数轴上向量的坐标公式与解析几何中的公式进行类比，通过类比找出区别、联系，有利于学生系统地记忆和运用．

2.2 向量的分解与向量的坐标运算

2.2.1 平面向量基本定理

1．平面向量基本定理．教科书用具体例子引出了定理，意在培养学生的观察、抽象、概括能力．在平面上任一向量都可唯一地表示为两个不共线向量的线性组合．对于平面上的向量，任意一组不共线向量都可作为基底．平面向量基本定理是平面向量坐标表示的依据．对于定理的证明教科书作为选学内容出现，意在降低要求．但证明存在性、唯一性的方法，既要证明存在性，又要证明唯一性，可以介绍给学生．

2．作为定理的应用，教科书安排了例1、例2两个例题，例2给出了直线的向量参数方程式，以及线段中点的向量表达式．教学时，要结合其几何模型去理解记忆，特别是线段中点的向量表达式在解题时经常用到．

3．本小节的重点、难点是平面向量基本定理及其应用．

2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算

1. 将平面上的一个向量用正交基底表示就是向量的正交分解，即平面上的任一向量都可以分解成两个正交向量的和. 在直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$就叫直角坐标系 xOy 的基底. 从几何的角度看，在坐标平面内，把一个向量正交分解就是把一个向量分解成两个互相垂直的向量的和，这两个互相垂直的向量的长度正是原向量在基向量$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$的两个方向上的投影的长度. 从代数的角度看，就是把一个向量在坐标平面 xOy 内，表示为正交基向量$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$的线性组合，这个线性组合的系数就是该向量在坐标平面内的坐标，即向量可以用数对来表示.

2. 在直角坐标平面 xOy 内，给出了向量的坐标，定义了向量加法、减法和数乘向量的运算法则，从而将向量运算数量化、代数化. 将数与形紧密地联系在一起，使一些几何问题的证明，转化为数量的运算，学生更容易掌握.

3. 教科书为了让学生掌握向量的直角坐标运算，体会向量运算代数化的优点，安排了六个例题. 例 1 是在直角坐标系中给出向量的方向和长度，求它们的坐标，让学生体会向量正交分解的几何意义. 例 2、例 3 是用向量坐标运算法则求解. 教学时要注意例题后的结论和公式. 对例 4、例 5、例 6 的教学，要注意作出草图，寻找解题思路，进一步渗透数形结合思想的运用.

4. 本小节的重点是向量的直角坐标运算，难点是应用向量直角坐标运算的法则解决具体问题. 教学中要注意运用几何直观手段、帮助学生理解问题的实质.

2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件

在 2.1.5 节中，已经学过了平行向量基本定理，引入向量的直角坐标后，只要用向量的坐标表示即可. 教学时，可在复习平面向量基本定理的基础上，引导学生自己探索用平面向量坐标表示向量共线的条件. 教学时要注意零向量可与任一向量平行的规定.

运用平面向量坐标表示向量共线的条件，除了能判定给定向量平行外，还可利用共线条件证明三点共线；与解析几何联系，写出过定点与已知向量平行的直线方程等应用.

2.3 平面向量的数量积

2.3.1 向量数量积的物理背景与定义

1. 教科书以力做功为背景引入向量的数量积运算，在力做功的计算中，涉及到两个向量夹角和向量在轴上射影的概念. 为此先给出了两个向量的夹角和向量在轴上的正射影的概念. 让学生通过熟悉的物理背景去感知数学问题，便于学生接受和理解.

关于两向量的夹角，要注意其范围是$[0,\pi]$，当$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，并规定零向量与任一向量垂直. 向量在轴上的正射影是一个向量，正射影在轴上的坐标是一个数量.

关于向量数量积的定义. 两向量的数量积是两个向量之间的一种乘法，与数的乘法是有区别的. 教学时，要注意：(1) 两个向量的数量积是一个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角决定；(2) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能推出 $\boldsymbol{b}$ 一定是零向量，这是因为任一与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；(3) 一个向量与单位向量的数量积，其几何意义就是向量在

单位向量上的正射影的数量.

2. 两个向量内积的性质. 教科书给出了两个向量内积的五条性质，性质(2)给出了两个向量垂直的充要条件；性质(3)求向量的长度，在向量的内积运算中经常用到；性质(4)求两个向量夹角，体现了向量的内积与三角的联系. 对于性质的证明教科书未作要求，教学时，不必补充证明方法. 对性质的运用，可结合具体的例题去说明.

3. 本小节的重点是向量的数量积的定义及性质，难点是对向量数量积定义及性质的理解和应用.

4. 本小节的教学，要利用好力做功这一物理背景. 事实上，利用这一物理背景可以启发我们去研究两向量的乘积. 对于向量的内积定义，要运用几何直观引导学生理解定义的实质，揭示其几何意义.

2.3.2 向量数量积的运算律

1. 教科书给出了向量数量积运算的三条算律，对于分配律，用向量数量积的几何意义给出了证明. 教学时要注意类比数量乘法的算律，指出它们的不同. 如：(1) a，b，c 为实数，若 $ab=bc$ 且 $b\neq 0$，可以推得$a=c$；但对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，就不一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. 如$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=30^\circ$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$. (2) a，b，c 为实数时，$(ab)c=a(bc)$. 但对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$. 因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 表示一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，所以$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

2. 本小节有两个例题，例 1 是直接对数量积性质、运算律的应用. 其中推得结论$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，在以后的运算中，可以直接运用. 例 2 是用向量知识证明几何问题. 用向量解题可以分为三步：一是用向量表示几何关系；二是进行向量运算；三是还原为几何结论.

3. 本节的重点和难点是对向量数量积运算律的理解和应用.

4. 本小节教科书采用了提出问题引导学生研究的编写方法，意在培养学生的自主探索能力. 教学中，要创设问题情境，引导学生动脑、动手自主解决问题.

2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式

1. 本小节在前面学习了向量数量积的定义、性质、运算律的基础上，给出了向量内积的坐标运算公式，两向量垂直的坐标公式，向量的长度、距离、夹角的坐标公式，从而使向量数量积的运算代数化.

2. 本小节有 4 个例题，例 1 是应用向量数量积的坐标公式求值. 例 2 是利用数量积的坐标运算，证明向量垂直. 例 3 是利用两向量夹角的坐标公式求正弦值，揭示了向量与三角的联系. 例 4 是证明线段的垂直平分线，用到了中点坐标公式、两向量垂直的充要条件，本题是用向量知识解决解析几何问题.

3. 本小节的重点是向量数量积的坐标运算与度量公式，难点是灵活运用公式解决有关问题. 在例题教学中，要引导学生分析解题思路，总结解题规律.

2.4 向量的应用

2.4.1 向量在几何中的应用

本小节包括向量在两方面的应用，一是向量在平面几何中的应用，二是向量在解析几何中的应用. 教科书通过 6 个例题说明向量在这两方面的应用. 教学中要注意通过例题教学，总结用向量解题的一般

方法，让学生体会向量的工具作用，从而建立向量与平面几何、解析几何的联系，提高学生分析问题、解决问题的能力.

例 1 是用向量证明几何问题，证明过程简捷．可通过例 1 进一步总结用向量解决平面几何问题的步骤：(1) 建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；(2) 通过向量运算，研究几何元素之间的关系；(3) 把运算结果转化为几何关系.

例 2 是用向量证明平面几何定理，学生寻找思路有一定的困难，教师要帮助学生分析思路．事实上，结合教材的图 2-56，要证点 M 平分 AC，BD，只要证明$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$即可，为此需设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BD}$，然后通过向量运算建立等式，求出 x，y 的值即可．要让学生反思解题过程，体会解题中的数学思想、方法.

例 3 是利用向量的直角坐标运算证明两线段垂直．一般步骤为：(1) 选取正交基底，写出相应向量的坐标；(2) 根据条件，进行向量的坐标运算；(3) 还原为几何关系．这一方法对解决有关正方形的问题比较简单，当向量的坐标确定后，几何问题的证明转化为代数运算解决.

例 4 是求过定点与已知向量平行的直线方程．教科书通过例题给出了直线 l 的倾斜角、斜率与 l 平行的向量三者间的关系，教学中，要让学生体会向量与解析几何有关知识的联系.

例 5 证明了一个结论：已知直线 l：$Ax+By+C=0$，则向量$(A, B)\perp l$．证明中用到了设而不求的方法，教学中要引导学生去体会.

例 6 是利用例 5 的结论用向量知识解决解析几何问题.

本小节的重点和难点是利用向量解决平面几何问题和解析几何问题．教学中，通过例题，分析思路，总结规律，并通过学生练习，进一步巩固所学知识、方法.

2.4.2 向量在物理中的应用

本小节包括力向量、速度向量两种应用．由于向量来源于物理，并且兼具“数”与“形”的特点，所以它在物理中具有广泛的应用．教科书通过两个例题，说明向量在物理中的应用.

例 1 是运用向量坐标法求合力．例 2 是用向量法求轮船的实际航行的方向和航速.

本小节的重点是用向量方法解决实际问题，选择适当的方法是关键．教学中，要发挥几何直观的作用.

三、拓展资源

向量是沟通代数、几何、三角函数的工具，掌握向量的解题技巧、方法显得非常重要．向量的解题方法主要有向量法和坐标法．运用向量方法解题时，要善于运用向量的平移、伸缩、合成、分解等变换，正确地进行向量的各种运算；运用坐标法解题时，要抓住形的几何特征，进行数与形的转化.

(一) 向量的由来

向量又称为矢量，最初被应用于物理学．很多物理量如力、速度、位移以及加速度等都是向量．大

约在公元前350年，古希腊著名学者亚里士多德就知道了力可以表示成向量，两个力的组合作用可用著名的平行四边形法则来得到．“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段．最先使用有向线段表示向量的是英国大科学家牛顿．

课本上讨论的向量是一种带几何性质的量，除零向量外，总可以画出箭头表示方向．但是在高等数学中还有更广泛的向量．例如，把所有实系数多项式的全体看成一个多项式空间，这里的多项式都可看成一个向量．在这种情况下，要找出起点和终点以及画出箭头表示方向是办不到的．这种空间中的向量比几何中的向量要广泛得多，可以是任意数学对象或物理对象．这样，就可以把线性代数方法应用到广阔的自然科学领域中去了．因此，向量空间的概念，已成了数学中最基本的概念和线性代数的中心内容，它的理论和方法在自然科学的各领域中得到了广泛的应用．而向量及其线性运算也为“向量空间”这一抽象的概念提供了一个具体的模型．

从数学发展史来看，历史上很长一段时间，空间的向量结构并未被数学家们所认识，直到19世纪末20世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量成为具有一套优良运算通性的数学体系．

向量能够进入数学并得到发展，首先应从复数的几何表示谈起．18世纪末期，挪威测量学家韦塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数 $a+bi$，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算．把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题．人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样平静地进入了数学．

但复数的利用是受限制的，因为它仅能用于表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找所谓三维“复数”以及相应的运算体系．19世纪中期，英国数学家汉密尔顿发明了四元数(包括数量部分和向量部分)，以代表空间的向量．他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础．随后，电磁理论的发现者、英国的数学物理学家麦克斯韦把四元数的数量部分和向量部分分开处理，从而创造了大量的向量分析．

三维向量分析的开创，以及同四元数的正式分裂，是英国的吉布斯和海维塞德于19世纪80年代各自独立完成的．他们提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数．他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积，并把向量代数推广为向量微积分．从此，向量的方法被引进到分析和解析几何中来，并逐步完善，成为了一套优良的数学工具．

（二）用向量解决平面几何问题

例1 已知如图2-1，点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB、BC、CA 的中点，求证：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$；

(2) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$.

分析：解题的关键，一是利用 E，F，D 为 $\triangle ABC$ 三边中点的条件，二是合理地选取加法的三角形法则和平行四边形法则．

证明：(1) 在 $\triangle ABE$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$；

在 $\triangle ACE$ 中，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$.

(2) 因为 D，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，所以四边形 $ADEF$ 为平行四边形．

在平行四边形 $ADEF$ 中，$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$；

在平行四边形 $BEFD$ 中，$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}$；

在平行四边形 $CFDE$ 中，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DE}$.

将上面三式相加得 $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$.

说明：求两个向量的和，当一个向量的终点为另一个向量的始点时，可用向量加法的三角形法则；而当它们的始点相同时，可采用向量加法的平行四边形法则，本题(2)的证明，也可用向量减法.

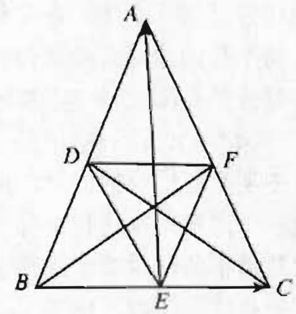


图 2-1

例 2 已知直角三角形的两直角边长为 4 和 6，试用向量求两直角边中线所成钝角的余弦值.

分析：本题给出了直角三角形的两直角边长，用坐标法写出相应点的坐标，再用两向量夹角的坐标公式求解.

解：以直角三角形的顶点为坐标原点，两直角边所在的直线为 x 轴、y 轴，建立如图 2-2 所示的直角坐标系，则 $A(4,\ 0)$，$B(0,\ 6)$，设 AF，BE 为直角边 OA，OB 的中线，则 $E(2,\ 0)$，$F(0,\ 3)$.

因为 $\overrightarrow{AF}=(-4,\ 3)$，$\overrightarrow{BE}=(2,\ -6)$，所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AF}|\ |\overrightarrow{BE}|}=-\frac{13}{50}\sqrt{10}.$$

所以两中线所成钝角的余弦值为 $-\frac{13}{50}\sqrt{10}$.

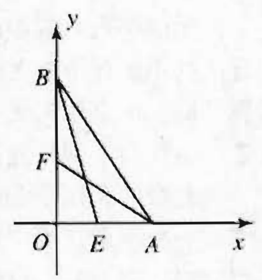


图 2-2

说明：(1) 在未给出点的坐标的题目中，选用坐标法往往要考虑几何图形的特点，如直角三角形、正方形等用坐标法有时比较方便.

(2) 在求两向量夹角的问题时，要注意向量方向的选取，在上题中，若用 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}$，求出余弦值为正，不符合题目要求.

(三) 利用平行、垂直的条件，求未知量

解决此类问题，主要是利用平行、垂直的条件列出方程，通过解方程使问题解决，体现了方程思想的运用.

例 3 平面内三点 A，B，C 在一条直线上，$\overrightarrow{OA}=(-2,\ m)$，$\overrightarrow{OB}=(n,\ 1)$，$\overrightarrow{OC}=(5,\ -1)$，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求实数 m，n 的值.

分析：因为 A，B，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$；由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 知 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，由上述两个关系列出方程，可求得 m、n 的值.

解：因为 A，B，C 三点共线，所以

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}.$$

因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(7,\ -1-m)$，而且

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(n+2,\ 1-m),$$

所以$(7, -1-m)=\lambda(n+2, 1-m)$，即

$$7=\lambda(n+2), 1+m=\lambda(m-1).$$

所以$mn-5m+n+9=0$. 由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$得

$$m-2n=0.$$

由此可解得$m=6$，$n=3$或$m=3$，$n=\frac{3}{2}$.

（四）向量与三角函数的联系

向量是沟通三角函数与其他内容之间的工具，往往通过向量的数量积运算，求三角函数的值.

例4 已知向量$\boldsymbol{a}=(1+\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1-\cos\beta, \sin\beta)$，$\boldsymbol{c}=(1, 0)$，$\alpha\in(0, \pi)$，$\beta\in(\pi, 2\pi)$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$\theta_1$，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$\theta_2$，且$\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{6}$，求$\sin\frac{\alpha-\beta}{4}$的值.

分析：本题的关键是用α，β表示θ_1，θ_2，为此通过向量的数量积运算，找出θ_1与α的关系，θ_2与β的关系.

解：因为$\boldsymbol{a}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$，$\frac{\alpha}{2}\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

$$\cos\theta_1=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|}=\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \theta_1=\frac{\alpha}{2},$$

$$\boldsymbol{b}=2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\beta}{2}\right), \quad \frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\cos\theta_2=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|}=\sin\frac{\beta}{2},$$

所以$\theta_2=\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}$.

因为$\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{6}$，所以

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

所以$\sin\frac{\alpha-\beta}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

（五）向量与解析几何的联系

几何中的向量方法与解析几何的思想具有一致性，不同的只是用“向量和向量运算”代替解析几何中的“数和数的运算”. 在平面直角坐标系中，用坐标表示向量，实现了数与形的转化. 在与解析几何的联系中，往往通过用向量表示几何条件，如平行、垂直、线段的中点、线段的长度、角，然后利用向量的有关知识去求解.

例5 已知向量$\boldsymbol{c}=(0, 1)$，$\boldsymbol{i}=(1, 0)$，经过原点O，以$\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{i}$为方向向量的直线与经过定点$A(0, 1)$以$\boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{c}$为方向向量的直线交于点$P$，其中$\lambda\in\mathbf{R}$，求$P$点的轨迹方程.

分析：分别写出过点 O，A 的直线的参数方程，消去参数 λ 就可求得 P 点的轨迹.

解：设 P 点坐标为 (x, y).

因为 $\boldsymbol{i}=(1, 0)$，$\boldsymbol{c}=(0, 1)$，所以

$$\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{i}=(\lambda, 1),\ \boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{c}=(1, -2\lambda).$$

直线 OP 和 AP 的方程分别为 $\lambda y=x$ 和 $y-1=-2\lambda x$，消去参数 λ，所求的轨迹方程为 $2x^2+y^2-y=0$.

说明：本题通过直线的方向向量与解析几何联系.

例 6 已知 $A(-1, 0)$，$B(1, 0)$ 两点，点 C 在直线 $2x-3=0$ 上，且 $2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，求 $\cos\langle\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\rangle$.

分析：写出向量的坐标，利用两个向量夹角的坐标公式求解.

解：设点 $C(x_0, y_0)$，所以 $2x_0-3=0$，$C\left(\frac{3}{2}, y_0\right)$. 则

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{5}{2}, y_0\right),\ \overrightarrow{AB}=(2, 0),\ \overrightarrow{CB}=\left(-\frac{1}{2}, -y_0\right).$$

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=5$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{5}{4}+y_0^2$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$.

根据条件有 $y_0^2=\frac{3}{4}$，由此可得 $\cos\langle\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\rangle=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

说明：本题利用向量的数量积运算与解析几何联系.

四、教学案例

案例 1：2.1.1 向量的概念

（一）教学目标

1. 知识与技能：

（1）了解向量产生的物理背景，理解位移的概念；

（2）理解向量的概念、向量的几何意义，能用向量表示点的位置；

（3）初步理解零向量、相等向量、共线向量的意义.

2. 过程与方法：

（1）经历向量概念的形成过程，体会由实例引入概念的方法；

（2）通过实例，体验用向量表示点的位置的方法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的学习，使学生认识到向量在刻画现实问题、物理问题和数学问题中的作用，从而激发学习兴趣，养成锲而不舍的钻研精神和科学态度.

（二）教学重点、难点

教学的重点是向量的概念，难点是对向量概念的理解.

（三）教学方法

本节内容学生比较陌生，难于理解，教学中采用提出问题，引导学生通过观察、类比、归纳、抽象的方式，形成概念．再结合几何直观引导学生去理解概念．教师为学生创设问题情景，鼓励学生合作探究．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入新课	教师介绍本章的主要内容，本章的地位和作用．		让学生了解大致内容和学习本章的重要性，激发学生的学习兴趣．
概念形成	1．位移的概念 引例1　教科书图2-1所示，一个质点从点A运动到点A'，如何表示点A'相对于点A的位置？ 位移只与方向和直线距离有关，并被方向和距离唯一确定．	教师提问：位移和哪些因素有关？如何确定位移？ 学生思考后回答．	通过对引例的观察、比较、分析，总结出位移的特点，为向量的定义提供了物理背景，有利于学生理解向量概念．
	引例2　分析物理中的重力、位移、速度、加速度等有什么共同特点．	教师提问：这些物理量都是向量，请同学们给向量下定义． 学生回答．	
	2．向量的概念 具有大小和方向的量称为向量． 向量的概念中要注意： （1）向量的两要素：大小和方向； （2）本章主要学习自由向量．		提高学生抽象，概括能力，发展学生的理性思维．
	练习：判定下列各量中哪些是向量： 浮力；密度；质量；路程；面积；电流强度．	教师提问，学生回答，并再次强调向量的两要素．	通过练习，让学生初步理解向量的概念．
	3．向量的表示 用有向线段表示向量，记作向量$\overrightarrow{AB}$，注意始点在前，终点在后；也可用黑体小写字母$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$…表示向量．	教师要求学生自己画出向量，并用两种方法表示出来．	加强几何直观，有利于学生理解概念．因为向量的记法很重要，且容易出错，所以让学生及时巩固．
	4．向量的模 向量的长度叫做向量的模．如向量$\overrightarrow{AB}$的长度记作$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$． 特别地，当向量长度为零时，叫做零向量，记作$\boldsymbol{0}$．注意：零向量的方向不确定．	教师用有向线段的长度类比，给出向量的模的定义．	让学生学会类比的方法．

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	5. 相等的向量 同向且等长的向量叫相等的向量．向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.	提出问题：怎样的向量是相等向量？ 教师用教具演示，让学生归纳定义.	用几何直观，让学生理解相等向量的概念.
	6. 共线向量 通过有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的直线，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的基线. 如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行．向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.	教师提问：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是共线向量，它们的方向是怎样的？ 学生回答. 教师提问：两个向量平行与初中学过的两直线平行有怎样的关系？ 学生课后思考.	平行向量比较难于理解，通过提出问题，帮助学生突破难点．作为思考题提出是因为后面还要学习平行向量基本定理，作为悬念让学生去探究.
概念深化	练习：判断下列说法是否正确，并说明理由： 1. 方向相同或相反的非零向量是平行向量； 2. 长度相等且方向相同的向量叫相等向量； 3. 共线向量一定在同一条直线上； 4. 向量的模是一个正实数； 5. 若 $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.	教师提出问题，学生思考讨论并回答. 1，2 正确；3，4，5 不正确；学生举反例来说明 3，4，5 不正确，并作出相应的图示帮助学生理解.	通过判断题，让学生理解零向量、相等向量、平行向量、向量的模等概念，进一步深化对向量概念的理解.
应用举例	例 1　设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出与 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.	教师提问：如何找相等的向量？ 学生回答. 教师小结：根据向量相等的条件，只要方向相同、长度相等就是相等向量.	把问题放给学生，让学生去自主解决，培养学生独立学习的习惯.
	练习 B，2.	让学生完成题目.	
	7. 用向量表示点的位置 利用向量可以确定一点相对于另一点的位置. 例 2　天津位于北京东偏南 50°，114 km，用向量表示天津相对于北京的位置.	教师在黑板上作出点 O 和向量 $\boldsymbol{a}$．教师提问：任给一定点 O 和向量 $\boldsymbol{a}$，如何确定点 A 相对于 O 点的位置呢？ 学生动手作图.	培养学生动手的习惯. 初步了解向量的简单应用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	练习 A，3.	学生完成.	
归纳小节	（1）让学生回顾本节所学向量的概念及相关知识. （2）向量的简单应用：找相等向量和用向量表示点的相对位置.	师生共同总结、交流、完善.	引导学生养成自己归纳总结的习惯，体会知识的形成、发展、应用的过程.
布置作业	练习 A，5； 练习 B，3； 阅读教材.	学生独立完成.	巩固所学知识，养成及时复习的好习惯.

案例 2：2.2.1　平面向量基本定理

（一）教学目标

1. 知识与技能：

（1）了解平面向量基本定理及其意义，会利用向量基本定理解决简单问题；

（2）掌握线段中点的向量表达式.

2. 过程与方法：

（1）通过平面向量基本定理的得出过程，体会由特殊到一般的思维方法；

（2）通过本节学习，体验用基底表示平面内任一向量的方法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的学习，培养学生的理性精神.

（二）教学重点、难点

教学重点是平面向量基本定理的应用.

教学难点是对平面向量基本定理的理解.

（三）教学方法

本节内容是在学习了平面向量线性运算的基础上，进一步学习向量的坐标运算的基础. 教学中要引导学生联系已有知识，在平面向量基本定理的教学中，采用让学生观察、抽象、概括的方式，自主得出定理；在定理的运用中，引导学生分析思路，总结规律，体验解题方法.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问	（1）向量加法的运算法则； （2）平行向量基本定理.	学生回答.	复习旧知识，引出新知识.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
定理形成	引例：如教材中图 2-34，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不平行的向量，用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{GH}$. **平面向量基本定理** 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是一平面内的两个不平行的向量，那么该平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一的一对实数 a_1，a_2，使 $$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$ 把不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底. 说明：(1) 定理中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两不共线向量； (2) $\boldsymbol{a}$ 是平面内的任一向量，且实数对 a_1，a_2 是唯一的； (3) 平面内任意两个不共线向量都可作为一组基底.	教师提出问题，学生动手解题. 教师提问：由引例的结果，你能得出怎样的结论？ 学生思考，回答. 教师完善. 教师：该定理的证明涉及到存在性和唯一性两方面，证明时既要证明存在性，又要证明唯一性. 证明过程不要求掌握，有余力的同学可以了解此方法.	通过学生动手实践、观察、比较、抽象、概括得出定理，让学生体会由特殊到一般的思维方法，发展学生的理性思维能力. 让学生了解存在性、唯一性问题，要证明两个方面，有利于开拓学生的视野.
应用举例	例 1 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$. 小结：解题的关键是找所求向量与基底间的关系，然后用向量的线性运算表示出来.	教师提问：$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$ 与哪些向量有关？ 学生：$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$； 教师提问：能否用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$？用怎样的法则运算？ 学生思考，回答. 学生完成题目，并归纳解题方法.	通过分步设问，引导学生体会解题思路的形成过程，培养学生独立分析解决问题的能力.
课堂练习	教材练习 A，1，2.	学生独立完成.	让学生及时巩固所学方法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 2　已知 A，B 是直线 l 上任意两点，O 是 l 外一点(教材中图 2-37)，求证：对直线 l 上任一点 P，存在实数 t，使 $\overrightarrow{OP}$ 关于基底 $\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\}$ 的分解式为 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　① 并且，满足①式的点 P 一定在 l 上. 说明：(1) ①式叫直线 l 的向量参数方程式. (2) 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，得到线段 AB 的中点 M 的向量表达式 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.	教师：让学生根据例 1 的方法把 $\overrightarrow{OP}$ 用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示出来. 学生动手解题. 教师说明满足①式的点 P 在 l 上. 教师说明：线段中点的向量表达式应用较多，要记住并会应用.	用基底表示 $\overrightarrow{OP}$，是例 1 的延伸，方法比较容易，因此让学生自己完成．而说明点 P 在 l 上，是证明 A，B，P 三点共线，是本题的难点，故由教师说明.
课堂练习	教材练习 A，5.	学生完成，教师指导.	巩固所学知识、方法.
归纳小结	(1) 学习了平面向量基本定理，要注意应用条件； (2) 学会用基底表示平面内任一向量的方法.	师生共同完成.	使学生养成归纳总结的习惯，不断提高自己的反思、构建能力.
布置作业	教材练习 B，2，3.	学生独立完成.	巩固所学知识方法.

案例 3：2.3.2　向量数量积的运算律

（一）教学目标

1. 知识与技能：

掌握平面向量数量积的运算律及其应用.

2. 过程与方法：

(1) 通过向量数量积分配律的学习，体会类比、猜想、证明的探索性学习方法；

(2) 通过解题实践，体会向量数量积的运算方法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的探究性学习，让学生初步尝试数学研究的过程，体验创造的激情，培养学生发现、提出、解决数学问题的能力，有助于发展学生的创新意识.

（二）教学重点、难点

教学重点：向量数量积的运算律及应用.

教学难点：向量数量积分配律的证明.

（三）教学方法

本节内容教科书采用了探究性设计方法，教学中要提出问题，创设情境，引导学生参与教学过程，使数学学习成为再创造的过程.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习向量数量积定义及其重要性质.	教师提问，学生回答.	复习上节内容，有利于学生更好地应用.
概念形成	问题1　数量乘法满足交换律，向量的数量积是否满足交换律？ 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.	教师提出问题，学生思考回答. 教师：让学生自己证明. 学生动手证明.	提出问题，引导学生去猜想、证明，培养学生的探索精神.
	问题2　数量乘法满足分配律，向量的数量积是否也满足分配律？ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 如教材中图 2-51. 证明过程略. 至此，我们证明了向量数量积的分配律. 另外，对任意实数λ，有 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.	教师提出问题，学生相互交流. 教师写出分配律，并提问：怎样证明式子的正确性？ 教师引导：结合图形，考虑用数量积的几何意义证明. 可把$\boldsymbol{c}$换成单位向量$\boldsymbol{c}_0$考虑. 学生讨论，探索.	通过与数量的分配律类比，猜想出结论，然后引导学生证明结论的正确性. 让学生通过自己的思考，探究获取新知识，发展学生的创新能力.
概念深化	问题3　对于不共线向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，判断 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是否成立. 不成立，因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$表示一个与$\boldsymbol{c}$共线的向量，而$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$表示一个与$\boldsymbol{a}$共线的向量，而$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$不共线，所以式子不成立.	教师提出问题，学生讨论并回答. 教师纠正、完善.	通过判断题，进一步加深学生对向量数量积运算律的理解，并养成缜密推理的习惯.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1 求证： (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2$； (3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2)$. 说明：(1)(2)的结论，可在今后的运算中直接运用. 例2 求证菱形的两条对角线互相垂直. 说明：利用向量的数量积证明几何中的垂直问题是常用方法，解题的关键是找出向量之间的关系，将几何关系用向量表示.	教师：考虑运用向量数量积的性质和运算律证明，教师板书(1)，学生证明(2)，(3). 教师要求学生自己作出图形，写出已知、求证．学生动手画图. 教师提问：怎样把几何条件转化为向量证明？ 学生思考，回答.	对向量数量积的运算，学生比较陌生，教师通过(1)的证明，说明每一步的依据，帮助学生进一步理解性质、算律. 前面已经学习了用向量的线性运算，证明几何问题．对于用向量证几何问题的方法，学生比较熟悉，因此，把问题放给学生，让他们进一步掌握性质算律.
课堂练习	教材练习A，2，3.	学生独立完成. 教师指导.	巩固所学知识方法.
归纳小结	(1) 本节主要学习了向量数量积的运算律； (2) 能正确进行数量积的运算，并能证明简单的几何问题.	师生共同总结、交流、完善.	帮助学生总结知识方法，便于学生系统掌握.
布置作业	教材练习B，1，2.	学生独立完成.	进一步巩固本节所学知识、方法.

案例4：2.4.1 向量在几何中的应用（1）

（一）教学目标

1. 知识与技能：

运用向量的有关知识，解决平面几何中线段的平行、垂直、相等等问题.

2. 过程与方法：

通过应用举例，让学生体会用平面向量解决平面几何问题的两种方法——向量法和坐标法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的学习，让学生体验向量在解决平面几何问题中的工具作用，增强学生的探究意识，培养创新精神.

（二）教学重点、难点

重点：用向量知识解决平面几何问题.

难点：选择适当的方法，将几何问题转化为向量问题解决.

（三）教学方法

本小节主要是例题教学，要让学生体会思路的形成过程，体会数学思想方法的运用．教学中，教师创设问题情境，引导学生发现解题方法，展示思路的形成过程，总结解题规律．指导学生搞好解题后的反思，从而提高学生综合运用知识分析和解决问题的能力．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 向量加法的三角形法则、平行四边形法则. 2. 向量平行、垂直的判定方法. 3. 用向量法证明平面几何问题的步骤.	教师提问，学生回答.	让学生回顾学过的知识，有利于本节课的顺利进行.
应用举例	例 1　如教材中图 2-55，已知平行四边形 $ABCD$，且 E，F 在对角线 BD 上，并且 $BE=FD$，求证 $AECF$ 是平行四边形. 小结：本题的关键是选取适当的基底，把四边形 $AECF$ 的一组对边表示出来.	问题 1　证明 $AECF$ 是平行四边形你选择哪一组对边来证明？ 学生思考，回答. 问题 2　如何转化为用向量条件表示？ 学生思考，回答，并完成证明过程. 让学生总结解题方法.	通过教师分步设问，引导学生展示思维过程，让学生体会分析、解决问题的方法.
	例 2　求证平行四边形对角线互相平分（如教材中图 2-56）. 小结：本题选取基底设未知数，列向量方程，解方程组得到结论，体现了方程思想在向量解题中的运用.	问题 3　如何证明？ 学生思考，回答. 老师点评学生思路：(1) 要证两对角线互相平分，可以证 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，但本题关系不确定，此法不易操作. (2) 如果能证明 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，问题就可解决，请同学们用此法思考如何证明. 学生讨论，师生交流，共同完成证明过程.	本题所用方法比较特殊，学生不易想到，教师在分析学生提供的思路的基础上，点出方法，又不直接说怎样做，引导学生再去探究，让学生体验思路的形成过程，学会分析问题的方法.
课堂练习	教材练习 A，1.	学生完成.	让学生巩固所学方法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 3　已知正方形 $ABCD$，P 为对角线 AC 上任一点，$PE\perp AB$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F，连 DP，EF，求证 $DP\perp EF$. 小结：结合图形特点，选定正交基底，用坐标法解决几何问题，体现几何问题代数化的特点．常采用坐标法的题目，往往存在互相垂直的关系，且坐标易写出．如正方形、长方形、直角三角形等.	问题 4　本题几何图形比较特殊，让同学结合图形特点考虑采用哪种方法简便一些. 学生回答，师生交流. 问题 5　能否用坐标法完成题目证明？ 学生独立完成.	本题用向量的坐标法证明比较简单，因此选定方法是难点，确定方法后学生可以独立完成.
课堂练习	教材练习 B，1.	学生完成，教师指导.	进一步巩固所学方法.
归纳小结	(1) 本节主要研究了用向量知识解决平面几何问题； (2) 掌握向量法和坐标法，以及用向量解决平面几何问题的步骤.	师生交流，共同完成.	帮助学生总结知识，归纳方法.
布置作业	教材练习 A，1，2.	学生独立完成.	巩固所学方法，规范解题步骤.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 79 页）

1. 略.
2. 终点位置不相同；终点位置相同.
3. 略.
4. 略.
5. 略.

练习 B（第 80 页）

1. 略.
2. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$；
   $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}$；
   $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}$.

3. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EO}$；$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FO}$；

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{GO}$；$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$.

练习 A（第 83 页）

1. 略.
2. （1）$\overrightarrow{AC}$.（2）$\overrightarrow{AO}$.（3）$\overrightarrow{AD}$.（4）$\mathbf{0}$.
3. 飞机飞行路程为 600 km；位移的和为“北偏西 45°，$300\sqrt{2}$ km”.
4. 正确. 证明略.

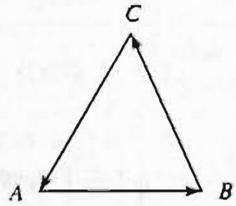
练习 B（第 84 页）

1. 略.
2. 因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\mathbf{0}$.



第 2 题

3. 作图略，沿北偏东 42°方向，以 7.5 m/s 的速度行驶.

练习 A（第 85 页）

1. 略.
2. 略.
3. （1）$\overrightarrow{DB}$.（2）$\overrightarrow{CA}$.（3）$\overrightarrow{AC}$.（4）$\overrightarrow{BA}$.（5）$\overrightarrow{AD}$.

练习 B（第 86 页）

1. 略.
2. (1) $\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}$.

   (2) $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
3. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$

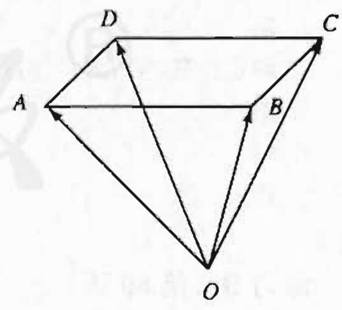
$=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$.



第 3 题

练习 A（第 89 页）

1. 略.

2. (1) $23\boldsymbol{a}-22\boldsymbol{b}$. (2) $-11\boldsymbol{b}+11\boldsymbol{c}$. (3) $-\frac{7}{12}\boldsymbol{a}+\frac{13}{12}\boldsymbol{b}$.

3. (1) $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

(2) $\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(3) $\frac{4}{21}\boldsymbol{a}-\frac{1}{7}\boldsymbol{b}+\frac{1}{7}\boldsymbol{c}$.

练习 B（第 89 页）

1. (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$,

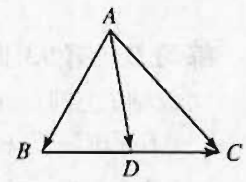
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.

因为 D 为 BC 的中点，

所以$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$,

所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.



第 1 题

(2) 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

所以 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$=3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AD}$.

2. 略.

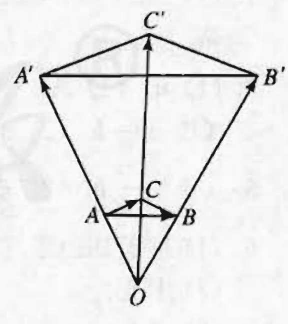
3. 因为$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{AB}$,

所以$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|}=\frac{1}{3}$,

同理$\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{B'C'}=3\overrightarrow{BC}$,

$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|}=\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|}=\frac{1}{3}$,

所以$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.



第 3 题

练习 A（第 93 页）

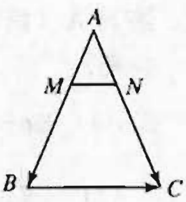
1. (1) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. (2) $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. (3) $-2\boldsymbol{b}$. (4) $-\frac{9}{8}\boldsymbol{b}$.

2. 因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以$MN/\!/BC$，$|MN|=\frac{1}{3}|BC|$.



第2题

3. (1) 8. (2) -2. (3) 15. (4) -15.

4. $AB=6$，$|\overrightarrow{AB}|=6$；

$BC=7$，$|\overrightarrow{BC}|=7$；

$CA=-13$，$|\overrightarrow{CA}|=13$.

练习 B（第 93 页）

1. 设轴 l 上的点 A，B，C，D 的坐标分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，则

$AB+BC+CD+DA$

$=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+(x_1-x_4)$

$=0$.

2. 3，8，11.

3. 设 AB 的中点 P 的坐标为 x，则

$AP=PB$，

$x-x_1=x_2-x$，

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

习题 2-1A（第 93 页）

1. (1) $\overrightarrow{AC}$. (2) $\overrightarrow{CE}$. (3) $\overrightarrow{AB}$.

2. 略.

3. (1) $\mathbf{0}$. (2) $\overrightarrow{AB}$. (3) $\overrightarrow{AC}$. (4) $\overrightarrow{BA}$.

4. (1) $5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. (2) $\boldsymbol{a}$. (3) $-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

5. (1) $-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$. (2) $\frac{7}{8}\boldsymbol{a}$. (3) $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

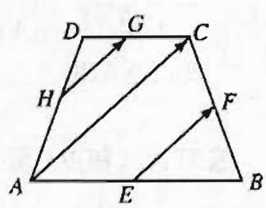
6. (1) 平行四边形.

(2) 梯形.

(3) 菱形.

7. 因为 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，所以

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$



第7题

$=2(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE})$

$=2\overrightarrow{EF}$.

同理 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{HG}$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

8. (1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标分别为 11，-11；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的长度分别为 11，11.

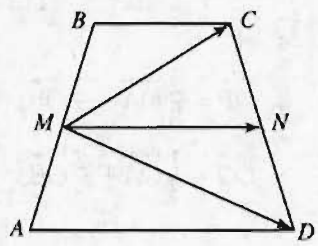
(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标分别为-8.5，8.5；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的长度分别为 8.5，8.5.

(3) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标分别为 7.5，-7.5；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的长度分别为 7.5，7.5.

(4) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标分别为-11，11；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的长度分别为 11，11.

习题 2-1B（第 94 页）

1. (1) $\mathbf{0}$. (2) $\mathbf{0}$. (3) $\mathbf{0}$. (4) $\overrightarrow{CB}$.
2. 不一定构成三角形，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不是共线向量时，才能构成三角形.
3. $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$($\lambda$，$\mu$ 是不同时为零的实数).
4. 方法一：



第 4 题

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$.

因为 M 是 AB 的中点，

所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=0$,

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

因为 N 是 CD 的中点，

所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$.

所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

方法二：

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$.

因为 M、N 分别是 AB、CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=\mathbf{0}$.

所以 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

5. (1) -2. (2) -9. (3) 1. (4) -8. (5) ±2. (6) -7 或 -3.

练习 A（第 98 页）

1. $\overrightarrow{AB}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,

   $\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,

   $\overrightarrow{EF}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,

   $\overrightarrow{GH}=6\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

2. $\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}$;

   $\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$;

   $\overrightarrow{DC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;

   $\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

3. 原式可化为：$(3x-4y-7)\boldsymbol{a}=(2x+y-10)\boldsymbol{b}$.

   因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，

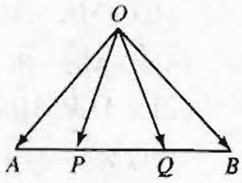
   所以$\begin{cases}3x-4y=7\\2x+y=10\end{cases}$

   解得 $x=\dfrac{47}{11}$，$y=\dfrac{16}{11}$.

4. 略.

5. $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$;

   $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.



第 5 题

练习 B（第 99 页）

1. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$;

   $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$;

   $\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;

   $\overrightarrow{DE}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$;

   $\overrightarrow{DB}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$;

   $\overrightarrow{EC}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

2. $$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}\\&=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\\&=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BM}$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}$

$=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

3. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$

$=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AM}$

$=-\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

练习 A（第 103 页）

1. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{a}=(2,3)$；
$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$；
$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=(-2,-3)$；
$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{d}=(2,-3)$.
2. (1) $(3,6)$，$(-7,2)$，$(-16,8)$.
(2) $(1,11)$，$(7,-5)$，$(18,-7)$.
3. 设向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$相对 x 轴正方向的转角为α，β.
(1) $\overrightarrow{OA}=(3,5)$，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{34}$，$\alpha=59^\circ$，
$\overrightarrow{OB}=(6,9)$，$|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{13}$，$\beta=56.3^\circ$.
(2) $\overrightarrow{OA}=(-3,4)$，$|\overrightarrow{OA}|=5$，$\alpha=126.9^\circ$，
$\overrightarrow{OB}=(6,3)$，$|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{5}$，$\beta=26.6^\circ$.
(3) $\overrightarrow{OA}=(0,3)$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$\alpha=90^\circ$，
$\overrightarrow{OB}=(0,5)$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\beta=90^\circ$.
(4) $\overrightarrow{OA}=(-3,6)$，$|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{5}$，$\alpha=116.6^\circ$，
$\overrightarrow{OB}=(-8,-7)$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{113}$，$\beta=221.2^\circ$.
4. (1) $(0,3)$. (2) $\left(-\frac{3}{2},-3\right)$.
5. $A'(-2,-3)$，$B'(3,-5)$，$C'(2,4)$，$D'(-3,5)$.

练习 B（第 103 页）

1. 设点 D 的坐标为(x, y)，在平行四边形 $ABCD$ 中，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

$(x+1, y+2)=(-3, 1)$，

所以$\begin{cases}x+1=-3\\y+2=1\end{cases}$

所以点 D 坐标为$(-4, -1)$.

2. 设点 P 的坐标为(x, y)，则

$\overrightarrow{AP}=(x-1, y-4)$，

$\overrightarrow{AB}=(2, -2)$.

因为$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以$(x-1, y-4)=\frac{3}{2}(2, -2)$，

即$\begin{cases}x-1=3\\y-4=-3\end{cases}$

所以点 P 的坐标为$(4, 1)$.

3. 设点 P 坐标为(x, y)，则

$\overrightarrow{AP}=(x+2, y-5)$，

$\overrightarrow{PB}=(4-x, 2-y)$.

因为$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，

所以 $(x+2, y-5)=\frac{1}{2}(4-x, 2-y)$，

即$\begin{cases}x+2=\frac{1}{2}(4-x)\\y-5=\frac{1}{2}(2-y)\end{cases}$

所以点 P 坐标为$(0, 4)$.

4. 设 AB 的中点为 M，AB 的三等分点为 P，Q，

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=(0, 1)$；

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=(-1, 0)$；

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$=(1, 2)$.

所以 AB 的中点为 $M(0, 1)$，三等分点的坐标为 $P(-1, 0)$，$Q(1, 2)$.

练习 A（第 105 页）

1. $\frac{8}{3}$.

2. $\overrightarrow{AB}=(1, 2)$，$\overrightarrow{AC}=(2, 4)$.

   因为 $1\times4-2\times2=0$，

   所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，

   所以 A，B，C 三点共线.

3. $\overrightarrow{AB}=(1, -1)$，

   $\overrightarrow{CD}=(1, -1)$.

   因为 $1\times(-1)-(-1)\times1=0$，

   所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

练习 B（第 105 页）

1. $\overrightarrow{AB}=(1, -3)$，

   $\overrightarrow{DC}=(1, -3)$.

   因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

   所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. $\overrightarrow{AP}=(x, y+3)$.

   因为 $\boldsymbol{a}/\!/\overrightarrow{AP}$，

   所以 $2x-(y+3)=0$.

   所以 $2x-y-3=0$.

习题 2-2A（第 105 页）

1. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，

   $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，

   $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，

   $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

2. (1) $(6, 9)$.　　(2) $(-1, -16)$.

   (3) $(-1, 25)$. (4) $(-2, 0)$.

3. $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，

   $\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2, y_3-y_2)$，

   $\overrightarrow{CA}=(x_1-x_3, y_1-y_3)$，

   $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.

4. 因为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(3,\ 4)$，

所以$(x+2y,\ 2x+3y)=(3,\ 4)$．

所以$\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=4\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$

5. 设点 A'，B'的坐标为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，则

$A'(4,\ -1)$，$B'(-1,\ -3)$，

$\overrightarrow{AB}=(5,\ 2)$，

$\overrightarrow{A'B'}=(-5,\ -2)$，

所以$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

6. $C(5,\ -7)$，$D(-10,\ 13)$，$E\left(-\dfrac{5}{2},\ 3\right)$.

习题 2-2B（第 106 页）

1. (1) $(-11,\ -9)$. (2) $(47,\ -50)$.

2. 因为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(-3,\ 5)$，

所以$(6x+3y,\ -4x-8y)=(-3,\ 5)$，

即 $\begin{cases}6x+3y=-3\\-4x-8y=5\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

3. $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，

$|\overrightarrow{A_1B_1}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$.

4. 设点 A，B 关于点 M 的中心对称点为 $A'(x_1',\ y_1')$，$B'(x_2',\ y_2')$，

$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_1'}{2}\\y_0=\dfrac{y_1+y_1'}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}x_1'=2x_0-x_1\\y_1'=2y_0-y_1\end{cases}$

所以 $A'(2x_0-x_1,\ 2y_0-y_1)$.

同理 $B'(2x_0-x_2,\ 2y_0-y_2)$.

5. $\overrightarrow{AP}=(x-x_1,\ y-y_1)$，

$\overrightarrow{PB}=(x_2-x,\ y_2-y)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,

所以 $(x-x_1, y-y_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y)$,

即$\begin{cases}(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2\\(1+\lambda)y=y_1+\lambda y_2\end{cases}$

因为$\lambda\neq-1$,

所以$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

练习 A（第 109 页）

1. (1) 16. (2) -42. (3) 0. (4) 4.
2. (1) 60°. (2) 120°. (3) 180°. (4) 30°.

练习 B（第 109 页）

1. (1) 30. (2) -30. (3) 40. (4) -40.
2. $-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

练习 A（第 111 页）

1. -93.
2. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=52$;

   $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{13}$.
3. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,

   $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2=19$,

   $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{19}$.
4. 在直角$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,

   $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$,

   $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CB}|^2$,

   $=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2$,

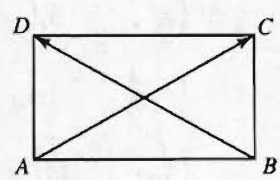
   所以 $AB^2=AC^2+CB^2$.

练习 B（第 111 页）

1. $\sqrt{113+56\sqrt{3}}$.
2. 在矩形 $ABCD$ 中，

   $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,

   $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2$,



第 2 题

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2$,

所以$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BD}|^2$.

所以 $AC=BD$,

即长方形的两条对角线相等.

练习 A（第 114 页）

1. (1) -1, $\sqrt{41}$, 5, $-\frac{\sqrt{41}}{205}$.

   (2) 0, $\sqrt{34}$, $\sqrt{34}$, 0.

   (3) -96, $\sqrt{89}$, $\sqrt{113}$, $-\frac{96\sqrt{10\,057}}{10\,057}$.

   (4) -15, $5\sqrt{5}$, $3\sqrt{10}$, $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

2. $\overrightarrow{AB}=(-6, 6)$,

   $\overrightarrow{AC}=(-3, -3)$.

   因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

   所以 $AB\perp AC$.

3. $\overrightarrow{AB}=(-4, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, 7)$, $\overrightarrow{BC}=(3, 4)$,

   $\cos\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

   所以$\angle A=45°$.

   因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

   所以$\angle B=90°$.

   所以$\triangle ABC$ 三个内角为$\angle A=45°$, $\angle B=90°$, $\angle C=45°$.

练习 B（第 115 页）

1. $\frac{9\sqrt{29}}{29}$.

2. (1) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$或$\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

   (2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   (3) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$或$\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

   (4) $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$或$\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

3. $(-3, 3)$.

4. $(-1, 5)$.

5. $B(-2, 2)$ 或 $B(2, -2)$，$C(-2, -2)$，$D(2, -2)$ 或 $D(-2, 2)$.

习题 2-3A（第 115 页）

1. -10.

2. 15.

3. -15.

4. (1) 4. (2) 26. (3) -8. (4) 10.

5. $\overrightarrow{AB}=(8, 0)$，$\overrightarrow{AC}=(10, -4)$，$\overrightarrow{BC}=(2, -4)$，

$\angle A=21°48'$，$\angle C=41°36'$，$\angle B=116°36'$.

6. $\overrightarrow{AB}=(-5, -2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1, -12)$，$\overrightarrow{BC}=(4, -10)$.

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

所以 $AB\perp BC$.

所以$\triangle ABC$ 为直角三角形.

习题 2-3B（第 115 页）

1. (1) (2) 中各对向量垂直，(3) (4) 中各对向量不垂直.

2. 因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-xy+xy=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=xy-xy=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

3. (1) $\dfrac{14\sqrt{29}}{145}$. (2) $-\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

4. $120°$.

5. $\overrightarrow{QR}=(3, 4)$，与$\overrightarrow{QR}$垂直的一个单位向量为$\boldsymbol{n}_0=\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

所以$\overrightarrow{QR}$边上的高$h=|\overrightarrow{PR}\cdot\boldsymbol{n}_0|=\dfrac{11}{5}$.

6. 设正方形 $ABCD$ 的中心为 P，P 点的坐标为$\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

因为 $\overrightarrow{AC}=(3, -2)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(2, 3)$或$(-2, -3)$.

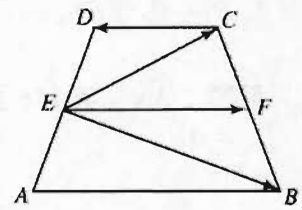
所以 $\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$或$\left(-1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

因此$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

所以点 D 的坐标为$\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$或$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

练习 A（第 120 页）

1. 如图，EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，



第 1 题

$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$，因为 E 是 AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

因为 F 是 BC 的中点，

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

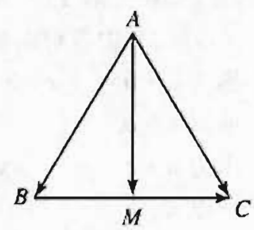
因为 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=1$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|$.

所以 $|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)$，

即 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

2. 因为 M 为 BC 边的中点，



第 2 题

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

在等腰△ABC 中，$AB=AC$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

所以 $AM\perp BC$.

3. (1) $2x-y-11=0$；$63°26'$.

(2) $4x+3y-9=0$；$126°52'$.

(3) $3x+2y+4=0$；$123°42'$.

(4) $x+2=0$；$90°$.

4. (1) $9x+7y+13=0$；$127°52'$.

(2) $5x+3y-15=0$；$120°58'$.

练习 B（第 121 页）

1. 设△ABC 各顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，分三条中线 AD，BE，CF 为 $2:1$ 的点分别为 G_1，G_2，G_3，则

$D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AG_1}=2\,\overrightarrow{G_1D}$，

所以 G_1 点的坐标 (x,y) 满足

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

同理可得，G_2，G_3 点的坐标都是$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，即 G_1、G_2，G_3 重合为一点 G.

所以三角形的三条中线相交于一点，且交点分每条中线为 2∶1 两段.

2. 设 $Q(x,\ y)$是所求直线上的任一点，则

$\overrightarrow{PQ}=(x-1,\ y+1)$.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，

所以 $4(x-1)-3(y+1)=0$.

所以 $4x-3y-7=0$ 为所求的直线方程.

3. (1) $4x+3y+1=0$，图形略.

(2) $x+4y-17=0$.

(3) $3x-4y-1=0$.

(4) $y-3=0$.

练习 A（第 123 页）

1. 如图，设$\overrightarrow{OA}$为无风时，飞机的飞行向量，$\overrightarrow{OB}$为风速向量，$\overrightarrow{OC}$为飞机的实际飞行向量，则

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

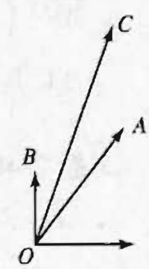
$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cos 45°$,

所以 $|\overrightarrow{OC}|=380.79$(km/h).

飞行方向 $\tan\theta=\frac{80+160\sqrt{2}}{160\sqrt{2}}$,

$\theta=53.5°$.

所以飞机实际沿东偏北 53.5°以 380.79 km/h 飞行.



第 1 题

2. 力的大小为$\sqrt{37}$，在第四象限与 x 轴正向夹角为 80.5°.

3. 略.

4. 大小为 5.

练习 B（第 123 页）

1. $5\sqrt{3}$ N.

2. 沿北偏西 8.6°，以 3.58 m/s 行驶.

3. 沿北偏西 32.6°，以 26.27 km/h 行驶.

习题 2-4A（第 123 页）

1. 2∶3.

2. $\boldsymbol{a}=(-4,\ 3)$与 l_1 平行，$\boldsymbol{b}=(1,\ 5)$与 l_2 平行，

$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{11\sqrt{26}}{130}$.

3. 因为 $\overrightarrow{AB}=(2, 1)$,

所以 $\overrightarrow{BC}=(1, -2)$或$(-1, 2)$.

当$\overrightarrow{BC}=(1, -2)$时,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(1, 0)$,

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-1, -1)$.

当$\overrightarrow{BC}=(-1, 2)$时,

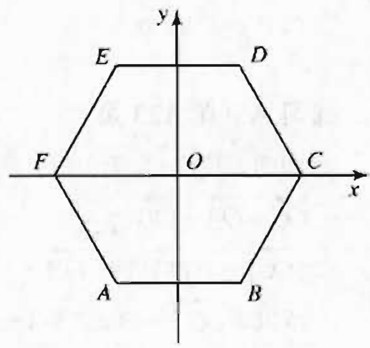
同理可得 $\overrightarrow{OC}=(-1, 4)$,

$\overrightarrow{OD}=(-3, 3)$.

所以,C,D 的坐标为$C(1, 0)$,$D(-1, -1)$或$C(-1, 4)$,$D(-3, 3)$.

4. 以正六边形中心为原点,FC 所在直线为 x 轴,其垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系,设正六边形边长为 a,则$\overrightarrow{AB}=(a, 0)$,$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{3}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,$\overrightarrow{AD}=(a, \sqrt{3}a)$,$\overrightarrow{AE}=(0, \sqrt{3}a)$,$\overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=(3a, 3\sqrt{3}a)$.

所以其合力的大小为 $6a$,与 x 轴正向的夹角为 $60°$.



第 4 题

习题 2-4B(第 123 页)

1. $\overrightarrow{LD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AL}$

$=\overrightarrow{AD}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AB})$,

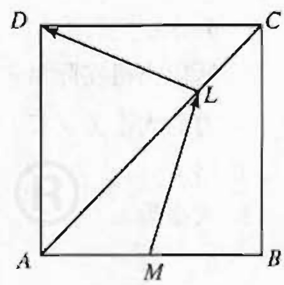
$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AM}$

$=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD})$.

在正方形 $ABCD$ 中,$AB\perp AD$,$AB=AD$,

因为$\overrightarrow{LD}\cdot\overrightarrow{ML}=0$,

所以 $LD\perp ML$,$\angle MLD$ 为直角.



第 1 题

2. 设 D 点的坐标为(x, y),

$\overrightarrow{OB}=(4, 3)$,$\overrightarrow{AD}=(x-5, y)$,

因为$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OB}$,

所以$\begin{cases}x=4\lambda\\ y=3\lambda\end{cases}$

因为$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{OB}$，

所以 $4x+3y-20=0$.

所以点 D 的坐标为$\left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$.

3. 设点 D 的坐标为$(x,\ y)$，则

$\overrightarrow{BC}=(10,\ 5)$，$\overrightarrow{AD}=(x+2,\ y-11)$.

因为$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

所以 $\begin{cases}x=10\lambda-4\\ y=5\lambda-5\end{cases}$

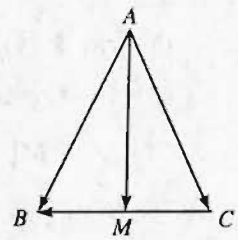
因为$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，

所以 $2x+y=7$.

所以 $x=4$，$y=-1$.

所以点 D 的坐标为$(4,\ -1)$，高为 $6\sqrt{5}$.

4. 因为 M 是 BC 的中点，



第 4 题

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，

$4|\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$，

$4|\overrightarrow{BM}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$，

所以$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=2(|\overrightarrow{AM}|^2+|\overrightarrow{BM}|^2)$，

即$|AB|^2+|AC|^2=2|AM|^2+2|BM|^2$.

本章小结

III　巩固与提高（第 126 页）

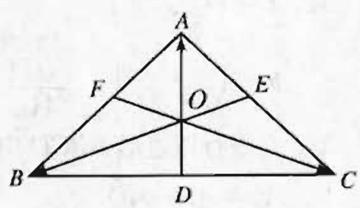
1. (1) $\overrightarrow{AC}$. (2) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$. (3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. (4) $3\overrightarrow{AB}$. (5) $\mathbf{0}$. (6) 中点. (7) $\frac{1}{3}$.

(8) $(2,\ -6)$. (9) 10. (10) $\left(-\frac{4}{3},\ -1\right)$.

2. (1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. (2) 共线向量. (3) 共线且方向相同. (4) 共线且方向相同. (5) 共线且方向相反，$|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$. (6) 共线且方向相反.

3. 略.

4. 因为 D 是 BC 的中点，



第 4 题

所以 $2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

因为 $AO:OD=2:1$，

所以$\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OD}$.

所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

5. 因为D，E，F分别是BC，AC，AB的中点，

所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$.

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

6. 因为$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$

$=4x\boldsymbol{i}+(3y+x)\boldsymbol{j}$，

$\boldsymbol{c}=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，

所以 $\begin{cases}4x=12\\x+3y=-3\end{cases}$

所以$x=3$，$y=-2$.

7. 32.

8. (1) $(8,\ 8\sqrt{3})$.　　(2) $(13\sqrt{2},\ 13\sqrt{2})$.

(3) $(-40,\ 40\sqrt{3})$.　　(4) $(200\cos 65^\circ,\ 200\sin 65^\circ)$.

9. $C(4,\ 6)$，$M\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

10. 设$B(x,\ y)$，则

$\overrightarrow{AB}=(x-1,\ y-2)=(3,\ 4)$，

所以$x=4$，$y=6$.

所以点B的坐标为$(4,\ 6)$.

11. 设D点的坐标为$(x,\ y)$，则

$\overrightarrow{DC}=(5-x,\ 2-y)$，

$\overrightarrow{AB}=(4,\ 4)$.

因为在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

所以$x=1$，$y=-2$.

所以D点坐标为$(1,\ -2)$.

所以平行四边形的中心为$\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$.

12. $\boldsymbol{a}_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\boldsymbol{b}_0=\left(-\frac{4\sqrt{41}}{41},\ \frac{5\sqrt{41}}{41}\right)$.

13. 在平行四边形$ABCD$中，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$,

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$.

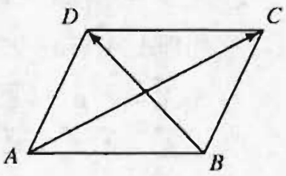
因为$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$,

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

所以 $AB\perp AD$.

所以对角线相等的平行四边形是长方形.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中,



第 14 题

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$,

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2$.

在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC$, $AB=CD$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\theta+|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos(\pi-\theta)$

$=0$,

所以$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2$.

所以平行四边形两条对角线长度的平方和, 等于平行四边形四边长度的平方和.

15. $|\overrightarrow{OM}|=9.5$ km, 方向西偏北 79°.

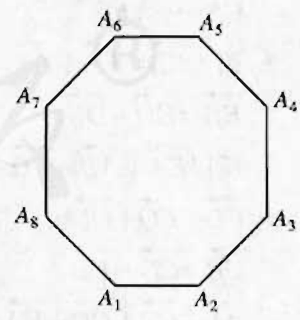
16. 在平行四边形 $ABCD$ 中, M 为中心,

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$,

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$,

所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$.

17. $\overrightarrow{A_4A_5}=\boldsymbol{b}$,



第 17 题

$\overrightarrow{A_5A_6}=-\boldsymbol{a}$.

设$\overrightarrow{A_2A_3}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,

过 A_1 作$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_2A_3}$, 由正八边形 $A_1A_2A_3\cdots A_8$ 知

$$\begin{cases}\overrightarrow{A_1N}\cdot\boldsymbol{a}=x|\boldsymbol{a}|^2+y\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \overrightarrow{A_1N}\cdot\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+y|\boldsymbol{b}|^2\end{cases}$$

$\overrightarrow{A_1N}\cdot\boldsymbol{a}=|\overrightarrow{A_1N}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}|^2$,

$\overrightarrow{A_1N}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

所以$\begin{cases} x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$

所以 $x=\sqrt{2}$，$y=1$，

即$\overrightarrow{A_2A_3}=\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{A_6A_7}=-\sqrt{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

同理$\overrightarrow{A_3A_4}=\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{A_7A_8}=-\boldsymbol{a}-\sqrt{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{A_2A_4}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=(1+\sqrt{2})\boldsymbol{a}+(1+\sqrt{2})\boldsymbol{b}$.

18. $\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{11}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{11}\boldsymbol{b}$；

$\boldsymbol{y}=\dfrac{3}{11}\boldsymbol{a}-\dfrac{5}{11}\boldsymbol{b}$.

19. (1) $(11，-6)$；(2) 2；(3) 9.

20. $P(-10，7)$，$M(2，1)$.

21. $\dfrac{7}{13}\sqrt{13}$.

22. $P\left(\dfrac{5}{2}，\dfrac{5}{2}\right)$.

IV　自测与评估（第 127 页）

1. $\overrightarrow{BC}=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；

$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$；

$\overrightarrow{EC}=3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$；

$\overrightarrow{CF}=-2\boldsymbol{b}$.

2. 因为$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$，

所以$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$，

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA})+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}$

$=2\overrightarrow{ED}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{CD}$

$=2(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})$

$=2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ED})$.

3. (1) $m=4$，$n=-2$. (2) 这样的实数 m，n 不存在.

4. (1) 71.6°. (2) 5. (3) $\sqrt{13}$. (4) 34.7°. (5) 123.7°. (6) 86.8°.

5. $\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{6+4k}{5\sqrt{4+k^2}}$，

$\cos\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{8+3k}{5\sqrt{4+k^2}}$.

因为 $\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$，

所以 $k=2$.

六、反馈与评价

I 知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列说法中正确的是（　　）.

(A) 两个长度相等的向量一定相等

(B) 相等的向量起点必定相同

(C) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，则 A，B，C，D 四点必在同一直线上

(D) 相等的向量一定是平行向量

2. 已知向量 $\boldsymbol{i}=(1, 0)$，$\boldsymbol{j}=(0, 1)$，则与 $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 垂直的向量是（　　）.

(A) $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$　　(B) $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$　　(C) $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$　　(D) $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

3. 若 G 是$\triangle ABC$ 的重心，D，E，F 分别是 AB，BC，CA 的中点，则$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$等于（　　）.

(A) $6\overrightarrow{GB}$　　(B) $-6\overrightarrow{GB}$　　(C) $-6\overrightarrow{GE}$　　(D) $\mathbf{0}$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x, 1)$，$\boldsymbol{b}=(4, x)$，当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且方向相同时，x 的值为（　　）.

(A) 2　　(B) -2　　(C) 4　　(D) -4

5. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3, 1)$，$B(-1, 3)$，若点 C 满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha+\beta=1$，α，$\beta\in\mathbf{R}$，则点 C 的轨迹方程是（　　）.

(A) $3x+2y-11=0$　　(B) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(C) $x+2y-5=0$　　(D) $2x-y=0$

6. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则四边形 $ABCD$ 为（　　）.

(A) 平行四边形　　(B) 矩形　　(C) 梯形　　(D) 菱形

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 若 $\boldsymbol{b}=(1,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=3$，则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

8. 已知三个向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$，且 A，B，C 三点共线，则$k=$________.

9. 已知点 $A(2,-2)$，$B(5,1)$，$C(1,4)$，则$\angle BAC$ 的余弦值为________.

10. 在四边形 $ABCD$ 中，已知$\overrightarrow{AB}=(4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(7,4)$，$\overrightarrow{AD}=(3,6)$，则四边形 $ABCD$ 的面积是________.

三、解答题（共 50 分）

11. (满分 12 分)已知$\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB、AC 的中点，求证：$DE/\!/BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

12. (满分 12 分)设$\overrightarrow{OA}=(3,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$，试求满足$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$的$\overrightarrow{OD}$的坐标($O$ 为坐标原点).

13. (满分 12 分)

平面向量$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，$\overrightarrow{OB}=(5,1)$，$\overrightarrow{OP}=(2,1)$，点 Q 为直线 OP 上的一个动点.

(1) 当$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$取到最小值时，求$\overrightarrow{OQ}$的坐标；

(2) 当点 Q 满足 (1) 的条件和结论时，求 $\cos\angle AQB$ 的值.

14. (满分 14 分)

已知平面内三个已知点 $A(1,7)$，$B(0,0)$，$C(8,3)$，D 为线段 BC 上的一点，且有$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA})\perp\overrightarrow{BC}$，求点 D 的坐标.

知识与方法测试题参考答案

一、选择题：

1. D.　2. B.　3. D.　4. A.　5. C.　6. C.

二、填空题：

7. $\sqrt{5}$.　8. -2 或 11.　9. $\frac{5\sqrt{74}}{74}$.　10. 30.

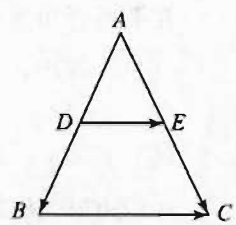
三、解答题：

11. 因为 D，E 分别是 AB，AC 的中点，

所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

所以 $DE/\!/BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$.



第 11 题

12. 设$\overrightarrow{OC}=(x,y)$，则

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(x+1,\ y-2)$.

因为$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$，

所以$\begin{cases}-x+2y=0\\ x-3y+7=0\end{cases}$

所以 $x=14$，$y=7$，

$\overrightarrow{OC}=(14,\ 7)$，

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(11,\ 6)$.

13. (1) 因为$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda(2,\ 1)=(2\lambda,\ \lambda)$，

所以$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}=(1-2\lambda,\ 7-\lambda)$，

$\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}=(5-2\lambda,\ 1-\lambda)$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}&=5\lambda^2-20\lambda+12\\&=5(\lambda-2)^2-8.\end{aligned}$$

所以当 $\lambda=2$ 时，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$有最小值$-8$，$\overrightarrow{OQ}=(4,\ 2)$.

(2) 当 $\lambda=2$ 时，$\overrightarrow{QA}=(-3,\ 5)$，$\overrightarrow{QB}=(1,\ -1)$，

$$\cos\angle AQB=\frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{QA}|\cdot|\overrightarrow{QB}|}=-\frac{4\sqrt{17}}{17},$$

所以 $\cos\angle AQB=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

14. 因为 $A(1,\ 7)$，$B(0,\ 0)$，$C(8,\ 3)$，

所以$\overrightarrow{BC}=(8,\ 3)$.

因为点 D 在线段 BC 上，

所以$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}=(8\lambda,\ 3\lambda)$.

因为 $B(0,\ 0)$，所以 $D(8\lambda,\ 3\lambda)$.

又因为$\overrightarrow{BA}=(1,\ 7)$，$\overrightarrow{CA}=(-7,\ 4)$，

所以$\overrightarrow{DA}=(1-8\lambda,\ 7-3\lambda)$，

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}=(-5-8\lambda,\ 18-3\lambda)$.

因为$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA})\perp\overrightarrow{BC}$，

所以$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

即 $14-73\lambda=0$.

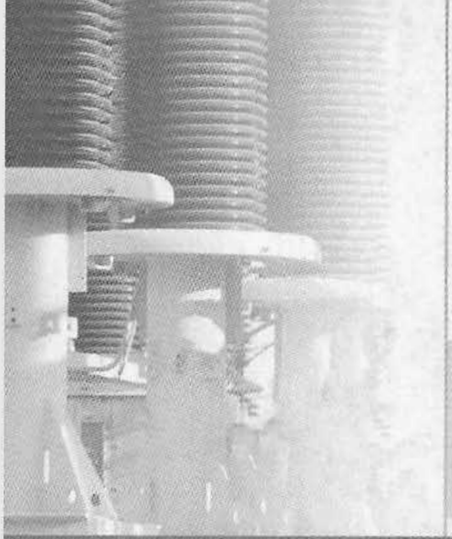
所以 $D\left(\dfrac{112}{73},\ \dfrac{42}{73}\right)$.

II 评价建议

1. 针对本章内容，除进行综合测试外，在学习过程中可安排两次诊断性小测试：第一次重点考查向量的线性运算和向量的坐标运算，注重基础，控制难度，以低中档题为主，通过测试了解学生对向量

的有关概念、法则的理解和运用情况，反思教与学的情况．第二次测试的重点是向量的数量积和向量的应用，考查学生综合运用向量知识解决问题的能力．在日常教学中，通过课堂提问、学生练习、作业，师生交流等形式，及时发现学生存在的问题，制订相应措施，不断改进教与学的方式，使学生的数学素养有较大提高．

2. 向量既是物理模型，又是重要的数学模型，是沟通代数、几何、三角函数的工具，在物理学和实际生活中，有广泛的应用．可让学生广泛搜集相关材料，写出向量应用方面的小论文．也可让学生写出向量在代数、几何、三角函数中应用的专题研究报告，从而培养学生的合作意识和自主探究精神．



第三章

三角恒等变换

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 经历用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，掌握用向量证明问题的方法，进一步体会向量法的作用.

2. 能从两角差的余弦公式导出两角和的余弦公式，以及两角和与差的正弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系.

3. 能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括尝试导出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆），解决比较简单的有关的应用问题.

（二）过程与方法目标

1. 引导学生推导和角公式，使学生认识整个公式体系的推理和形成的过程. 从这一过程中，使学生领会其中体现出来的数学基本思想、蕴含的创新思想，掌握研究数学的基本方法，从而提高数学素质.

2. 通过运用公式进行简单的恒等变换（包括尝试导出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆），使学生进一步提高运用联系的观点、化归的思想方法处理问题的自觉性，体会换元思想、方程思想等在三角恒等变换中的作用，在学习三角恒等变换的基本思想和方法的过程中，发展推理能力和运算能力.

（三）情感、态度与价值观目标

通过公式的推导，了解它们的内在联系和知识的发展过程，体会一般与特殊的关系与转化，培养利用联系、变化的辩证唯物主义观点去分析问题的能力.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 用向量证明和角公式，引导学生用向量研究和差化积公式.
2. 建立和角公式与旋转变换之间的联系.
3. 融入算法，引导学生找出求正弦函数值的算法.
4. 引导学生独立的由和角公式推导出倍角公式与和差化积、积化和差公式.
5. 呈现了和角公式在三角恒等变换及三角形计算中的应用.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是和角公式、倍角公式和半角公式、三角函数的积化和差公式与和差化积公式. 为了引起学生学习本章内容的兴趣，同时为了加强三角变换的实际应用，本章的开篇从一个实际问题出发，通过数学化，得到一个必须通过三角变换才能解决的数学问题，从而激发学生对本章内容的学习兴趣和求知欲. 全章共分三大节.

第一大节，首先利用向量的方法证明了两角差的余弦公式，接着导出两角和的余弦公式，再利用诱导公式推出两角和、差的正弦公式，又利用同角三角函数关系式推出两角和、差的正切公式；

第二大节，推导出倍角公式和半角公式；

第三大节，推导出积化和差与和差化积公式，并通过例题讲解以上各公式的应用.

2. 地位与作用

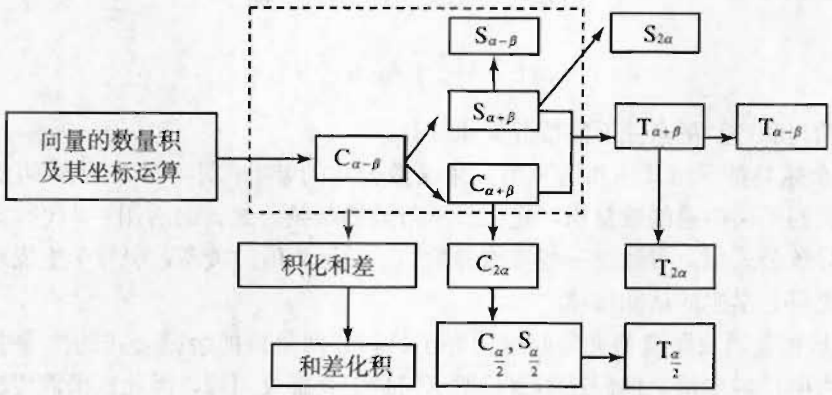
变换是数学的重要工具，也是数学学习的主要对象之一. 代数变换是学生熟悉的，与代数变换一样，三角变换也是只变其形不变其质的，它可以揭示那些外形不同但实质相同的三角函数式之间的内在联系. 在本册第一章，学生接触了同角三角函数式的变换. 在本章，学生将运用向量方法推导两角差的余弦公式，由此出发导出其他的三角恒等变换公式，并运用这些公式进行简单的三角恒等变换. 通过本章学习，学生的推理能力和运算能力将得到进一步提高.

三角恒等变换在数学及应用科学中应用广泛、同时有利于发展学生的推理能力和计算能力. 本章将通过三角恒等变形揭示一些问题的数学本质.

3. 重点与难点

本章的重点是掌握和角公式的推导过程；难点是理解和角公式的几何意义.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 和角公式		
	3.1.1 两角和与差的余弦	2 课时
	3.1.2 两角和与差的正弦	1 课时
	3.1.3 两角和与差的正切	1 课时
3.2 倍角公式和半角公式		
	3.2.1 倍角公式	1 课时
	3.2.2 半角的正弦、余弦和正切	1 课时
3.3 三角函数的积化和差与和差化积		1 课时
本章小结		1 课时

（四）教学建议

3.1 和角公式

3.1.1 两角和与差的余弦

1. 本小节是在学生学过任意角的三角函数和平面向量的有关知识的基础上，进一步研究两角和与差的三角函数与单角三角函数的关系，在讲解之前，可用本章开头部分提到的观览车问题来引导学生认识学习和角公式的必要性，借助三角函数线理解两角和（差）的三角函数的几何意义，并通过具体实例消除对 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 的误解，例如当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$ 时，

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\neq\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}.$$

使学生认识两角和(差)的余弦不能按分配律展开.

2. 两角和的余弦是推导出其他和(差)角三角函数公式的基础. 本小节在推导两角和与差的余弦公式时，利用单位圆与平面向量的数量积，先证得两角差的余弦公式，而后用$-\beta$代替β推得了两角和的余弦公式. 在推导该公式前，可通过一些特殊的角的三角函数值的关系，引导学生发现公式，然后再加以证明，这样做更符合学生的认知规律.

3. 向量的数量积是解决距离与夹角问题的好工具，在两角差的余弦公式的推导中正好能够体现它的作用. 由于学生刚接触向量，他们还不太习惯用向量工具解决问题，因此这里需要教师作引导. 教学时应当注意以下要点：

(1) 在回顾求角的余弦的方法时，有意识地提醒学生联想向量方法；

(2) 充分利用单位圆，分析其中有关几何元素（角的终边及其夹角）的关系，为向量方法的运用作好准备.

4. 由于α、β是任意角，所以两角和与差的余弦公式适用于任意角α，β. 也就是说，余弦的差角公式及其推导过程都具有一般性. 从而余弦的和角公式也具有一般性，必须使学生理解这一点.

5. 例1和例2是三角函数的求值问题，让学生体验和学会公式的应用. 对于例2，在由$\cos\alpha$求$\sin\alpha$时要注意角的范围，避免出现增解. 另外要通过课后练习题，加强训练，使学生熟练掌握公式的“正”和“反”两方面的应用.

例3是运用公式$C_{\alpha+\beta}$推导学过的诱导公式，通过此例题一是使学生了解三角函数恒等式的证明方法不唯一，二是使学生认识诱导公式实际上是和角公式的特例.

本节练习A中第2题是为推导两角和的正弦公式作准备的，应给予足够重视.

6. 本小节的重点是应用两角和与差的余弦公式求值和证明，难点是两角和的余弦公式的推导.

3.1.2 两角和与差的正弦

1. 在学习本小节时，应先复习上一节学习的两角和与差的余弦公式，利用公式$C_{\alpha-\beta}$和诱导公式，引导学生自己将$S_{\alpha\pm\beta}$的公式推导出来.

2. 公式$S_{\alpha-\beta}$也可以这样来推导：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

教科书上的方法是从两角和的三角函数公式推导两角差的三角函数公式的一般方法，上述方法可启发学生自己得出，这样可使学生了解公式的推导方法并不是唯一的，以培养学生的发散思维能力.

3. 例2和例3是三角与向量的综合问题，其过程是一次旋转变换，例2是例3的一个特例，在编排上体现了由特殊到一般的认识规律，例3求证的结论是一组旋转变换公式. 利用这组公式可以解决课后练习B中的第2题.

例4是一个重点例题，该题的目标是把函数的解析式变形为一个角的三角函数的形式. 首先把α和

b 看成一对有序实数对(a, b)，它对应平面直角坐标系中的一点 $P(a, b)$，以 OP 为终边的一个角设为θ，然后把解析式变形为两角和的正弦公式右边的形式，再反用公式就可把解析式变成一个角的三角函数的形式，问题得以解决. 应使学生掌握此变形的实质和方法，并学会运用此方法来研究类似的三角函数的性质问题.

例 5 是一个常见的物理学问题，问题的解决最后要用到与例 4 相同的解决方法，体现了学以致用的思想，要引导学生发现一条规律：几个振幅和初相不同，但频率相同的正弦波之和，总是等于另一个具有相同频率的正弦波.

4. 本节的重点是两角和与差的正弦公式的应用和旋转变换公式，难点是利用两角和的正弦公式变 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 为一个角的三角函数的形式.

3.1.3 两角和与差的正切

1. 两角和与两角差的正切公式应启发学生根据同角三角函数间的商数关系$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 及正弦、余弦的和、差角公式导出，以培养他们的推理能力. 在导出公式 $\mathrm{T}_{\alpha\pm\beta}$后，要向学生说明以下几点：

(1) 因为公式 $\mathrm{S}_{\alpha\pm\beta}$，$\mathrm{C}_{\alpha\pm\beta}$具有一般性，所以公式 $\mathrm{T}_{\alpha\pm\beta}$也具有一般性.

(2) 公式 $\mathrm{T}_{\alpha\pm\beta}$在 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha\pm\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时成立，否则不成立. 当 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 或 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 的值不存在时，不能使用公式 $\mathrm{T}_{\alpha\pm\beta}$，有些问题的解决可改用诱导公式或其他方法.

例如：化简 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)$. 因为 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan\dfrac{\pi}{2}$不存在，所以不能用公式 $\mathrm{T}_{\alpha+\beta}$，所以改用诱导公式或其他方法来解：

解法一：用诱导公式 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=-\cot\beta$.

解法二：用同角三角函数间的关系式：

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta+\cos\frac{\pi}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta}=\frac{\cos\beta}{-\sin\beta}=-\cot\beta.$$

2. 由于 $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，在运用两角差的正切公式时，有时要对式子中的“1”灵活进行代换，然后利用公式解决问题. 例如课后练习 A 中的第 3 题和练习 B 中的第 1 题.

另外，此公式的变形应用也很关键.

例如，求值：$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$.

解：因为 $\tan 60^\circ=\tan(40^\circ+20^\circ)=\dfrac{\tan 40^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ}=\sqrt{3}$，所以

$$\tan 40^\circ+\tan 20^\circ=\sqrt{3}(1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ).$$

所以

$$\begin{aligned}\tan 40^\circ+\tan 20^\circ+\sqrt{3}\tan 40^\circ\tan 20^\circ&=\sqrt{3}(1-\tan 20^\circ\tan 40^\circ)+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ\\&=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

3. 到本小节为止，学完了两角和与差的正弦、余弦和正切公式，应通过框图的形式对公式之间的

内在关系加以说明，对公式之间的异同进行分析和对比，并要求学生注意：

(1) 角及函数的排列顺序．特别是弄准余弦、正切的和（差）角公式．

(2) 牢记公式并能熟练地掌握公式的"正用"、"逆用"和"变形应用"．

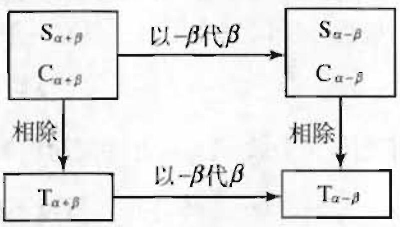
(3) 向学生指出两角和或差的三角函数公式是诱导公式的推广，诱导公式是它的特例．当 α，β 中有一角为 90° 的整数倍时，以用诱导公式为简便．

(4) 灵活运用和(差)角公式，有时需要将式子中的两个角的和或差看成整体来运用公式．例如，化简 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$ 时，不要将 $\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$ 展开，而应将角 $\alpha+\beta$ 看成一个角，把整个式子直接运用公式化为 $\cos[(\alpha+\beta)-\beta]=\cos\alpha$．

有些题目需要灵活地将所求角用已知角表示出来，例如，已知 $\tan(\alpha+\beta)=2$，$\tan(\alpha-\beta)=4$，求 $\tan 2\alpha$．这时可以看出 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，所以

$$\tan 2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2+4}{1-2\times4}=-\frac{6}{7}.$$

4. 正弦、余弦、正切的和(差)角公式的内在联系如下：



5. 本小节的重点是两角和与差的正切公式的应用，难点是公式的变形应用．

3.2 倍角公式和半角公式

3.2.1 倍角公式

1. 本小节运用正弦、余弦、正切的和角公式，推导出它们对应的倍角公式及公式 $C_{2\alpha}$ 的两种变形，然后是公式的应用．通过本小节的学习，要使学生掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式，能正确运用这些公式进行简单三角函数式的化简、求值与恒等式的证明．通过倍角公式的推导，了解它们之间，以及它们与和角公式之间的内在联系，从而培养逻辑推理能力．

2. 本小节的重点是二倍角的正弦、余弦、正切公式以及公式 $C_{2\alpha}$ 的两种变形：$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$．难点是倍角公式与以前学过的同角三角函数的基本关系式、诱导公式、和角公式的综合应用．理清倍角公式与和角公式的关系，以及公式 $C_{2\alpha}$ 的三种等价形式，是学好本小节的关键．

3. 在两角和的三角函数公式中，当两角相等时，就可得到倍角的三角函数公式．由此可知：二倍角的三角函数公式是两角和的三角函数公式的特殊情况．在公式 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$ 中，角 α 没有限制，但公式 $T_{2\alpha}$，则只有当 $\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时才成立，否则不成立．（因为当 $\alpha=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\tan 2\alpha$ 不存在；当 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\tan\alpha$ 不存在.）当 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，虽然 $\tan\alpha$ 不存在，但 $\tan 2\alpha$ 是存在的，所以可改用诱导公式．

例 当 $\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，求 $\tan 2\alpha$ 的值.

解：$\tan 2\alpha=\tan\left[2\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\tan(2k\pi+\pi)=\tan\pi=0.$

讲解倍角公式时要注意，一般情况下 $\sin 2\alpha\neq 2\sin\alpha$. 例如 $\sin\dfrac{\pi}{3}\neq 2\sin\dfrac{\pi}{6}$，但是当 $\alpha=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha$ 也能成立. 同样应让学生知道在一般情况下，$\cos 2\alpha\neq 2\cos\alpha$，$\tan 2\alpha\neq 2\tan\alpha$. 至于当且仅当 α 取什么值时这两个等式分别成立，涉及解三角方程，可以不要求掌握.

4. 二倍角公式不仅限于 2α 是 α 的二倍的形式，其他如 4α 是 2α 的二倍，$\dfrac{1}{2}\alpha$ 是 $\dfrac{1}{4}\alpha$ 的二倍，3α 是 $\dfrac{3}{2}\alpha$ 的二倍，$\dfrac{\alpha}{3}$ 是 $\dfrac{\alpha}{6}$ 的二倍等，所有这些都可以应用二倍角公式. 要使学生熟练地应用二倍角公式，必须使他们熟悉多种形式的两个角的倍数关系，配合足够数量的习题进行巩固. 通常在要用到倍角公式来对半角的函数进行变换时，学生往往产生困难，例如 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}$，$\cos\dfrac{\alpha}{3}=\cos^2\dfrac{\alpha}{6}-\sin^2\dfrac{\alpha}{6}$ 等. 在倒过来的变换中，学生感到更困难. 例如：

$$\sin 3\alpha\cos 3\alpha=\frac{1}{2}\sin 6\alpha;$$

$$4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}=2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{2\tan 40^\circ}{1-\tan^2 40^\circ}=\tan 80^\circ;$$

$$\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha.$$

教学时，应注意这方面的训练.

5. 倍角公式与和(差)角公式的内在联系如下：

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}S_{2\alpha}\\C_{2\alpha}\end{matrix} \arrow[d, "相除"'] & \begin{matrix}S_{\alpha+\beta}\\C_{\alpha+\beta}\end{matrix} \arrow[l, "\beta=\alpha"'] \arrow[r, "以-\beta代\beta"] \arrow[d, "相除"'] & \begin{matrix}S_{\alpha-\beta}\\C_{\alpha-\beta}\end{matrix} \arrow[d, "相除"'] \\
T_{2\alpha} & T_{\alpha+\beta} \arrow[l, "\beta=\alpha"'] \arrow[r, "以-\beta代\beta"] & T_{\alpha-\beta}
\end{tikzcd}$$

6. 例 1 是倍角公式的直接运用. 在由 $\sin\alpha$ 求 $\cos\alpha$ 时，由于运用了公式 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，所以要根据角 α 的终边所在象限来确定. 通过这道例题可以告诉学生，如果已知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 这三个值中的一个以及角 α 的终边所在象限，那么不仅可求出其余两个值，还可以求出 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 这三个值.

例 2 是运用倍角公式的一道证明题. 不仅体现倍角公式的灵活选择，还可引导学生通过角的变换来选择公式及思维，如化为同角等. 本小节的练习 A 中的第 4 题，研究三角函数的性质，必须把三角函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的形式.

3.2.2 半角的正弦、余弦和正切

1. 本小节运用二倍角的变形公式推导出半角的正弦、余弦和正切公式，并由例 2 给出半角正切公式的有理表达式. 通过本小节的学习，要使学生掌握半角的正弦、余弦和正切公式，能正确运用这些公

式进行简单三角函数式的化简、求值和证明恒等式. 通过公式的推导，了解它们之间，以及它们与倍角公式之间的内在联系，以及角与角之间的转化关系，从而培养逻辑推理能力.

2. 本小节的重点是半角的正弦、余弦和正切公式，难点是半角公式与倍角公式之间的内在联系，以及运用公式时正负号的选取.

3. 半角的正弦、余弦和正切公式都可以用单角的余弦来表示. 它是上一节二倍角三角函数公式的推论. 例如：

在公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 中，把 α 用 $\frac{\alpha}{2}$ 代替即得

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}，\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.$$

由此可得 $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

把上列两式的两端分别相除即得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

这里要特别注意公式中根号前的双重符号，它决定于 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

一般处理方法如下：

(1) 如果没有给出决定符号的条件，则在根号前保留正负两个符号，如练习 B 的第 1 题；

(2) 若给出角 α 的具体范围（即某一区间）时，则先求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在范围，然后再根据 $\frac{\alpha}{2}$ 所在范围选用符号，如练习 B 的第 1 题.

(3) 如给出的角 α 是某一象限的角时，则根据下表决定符号：

α	$\frac{\alpha}{2}$	$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\cos\frac{\alpha}{2}$	$\tan\frac{\alpha}{2}$
第一象限	第一、三象限	+、−	+、−	+
第二象限	第一、三象限	+、−	+、−	+
第三象限	第二、四象限	+、−	−、+	−
第四象限	第二、四象限	+、−	−、+	−

上表结论，应让学生自己分析得出. 现将上表中由角 α 所在象限来决定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的分析，说明如下：

若 α 为第一象限的角，则 $\alpha=2k\pi+\alpha_1$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$.

于是 $\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\alpha_1}{2}$. 当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 也在第一象限；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限.

若 α 为第二象限的角，则 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha_1$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$.

于是 $\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_1}{2}$. 因为 $0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\alpha_1}{2}<\frac{\pi}{4}$，从而 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_1}{2}<\frac{\pi}{2}$.

当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$在第一象限；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$在第三象限.

若 α 为第三象限的角，则 $\alpha=2k\pi+\pi+\alpha_1$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$.

于是$\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_1}{2}$. 当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$也在第二象限；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$在第四象限.

若 α 为第四象限的角，则 $\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha_1$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$.

于是$\frac{\alpha}{2}=k\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha_1}{2}$. 因为 $0<\frac{\alpha_1}{2}<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha_1}{2}<\pi$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_1}{2}<\frac{\pi}{2}$.

当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$在第二象限；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$在第四象限.

4. 半角的正弦和余弦，根号前的正负符号是必须的，而半角的正切可以变形为有理表达式，无需取正负号. 教科书通过例 2 给出这个结论

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}，\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

在求半角的正切时，如果 α 的正弦、余弦已经知道或容易求出，则使用此公式就避免了符号问题，尤其是 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，分母是单项式，容易计算. 但如由余弦求正弦时，需要开平方，选取正负号，就不是那么合适了.

5. 在推导半角公式的过程中，有下列两个等式：

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}，1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

通常称为升（降）幂公式. 在三角式变形中，用处很大. 如化简$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$，可将原式化为

$\frac{(1-\cos\theta)+\sin\theta}{(1+\cos\theta)+\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$. 又如求函数 $y=\cos^2x$ 的周期. 可化为 $y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$，则知该函数的周期为 π. 将 $1-\cos\alpha$，$1+\cos\alpha$ 分别化为 $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，$2\cos^2\frac{\alpha}{2}$可达到化积的目的，反之，将 $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，$2\cos^2\frac{\alpha}{2}$化为 $1-\cos\alpha$，$1+\cos\alpha$ 可达到降次的目的. 可引导学生加以注意.

3.3 三角函数的积化和差与和差化积

1. 三角函数的积化和差与和差化积这两种转化，对于求三角函数值、化简三角函数式以及三角函数式的恒等变形，都有一定的作用.

2. 在已学过的两角和、两角差的三角函数公式的基础上推导出三角函数的积化和差公式较简单，可引导让学生自己导出三角函数的积化和差公式：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];\qquad ①$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];\qquad ②$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];\qquad ③$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].\qquad ④$$

因为公式①②实质一样，所以应用时，可以把它们归纳为下面三个：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

3. 推导完积化和差与和差化积公式后，应让学生明确以下几点：

(1) 积化和差公式的推导用了“解方程组”的思想，和差化积公式的推导用了“换元”思想.

(2) 不论是积化和差还是和差化积中的“和差”与“积”，都是指三角函数间的关系而言，并不是指角的关系.

(3) 只有系数的绝对值相同的同名函数的和与差，才能直接应用公式化成积的形式. 如 $\sin\alpha+\cos\beta$ 不能直接化积，应先化成同名函数后，再用公式化成积的形式. 对三角函数的和差化积，常因所采用的途径不同，而导致结果在形式上的差异，这是正常的，只要没有运算错误，其结果实质上是一样的. 如：

$$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+45^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^\circ\right)$$

或 $$\sin\alpha+\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+45^\circ\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

(4) 三角函数的和差化积，可以理解为代数中的因式分解，因此，因式分解在代数中起什么作用，和差化积公式在三角中就起什么作用.

(5) 积化和差与和差化积关系密切，在解题过程中，要切实注意两者的交替使用. 如在一般情况下，遇有正、余弦函数的平方，要先考虑灵活应用二倍角公式的变形进行降幂，然后应用和差化积、积化和差公式进行化简或计算. 和、积互化公式其基本功能在于：当和、积互化时，角度要重新组合，因此有可能产生特殊角；结构将变化，因此有可能产生互消项或互约因式，从而利于化简求值. 正因为如此，“和、积互化”是三角恒等变形的一种基本手段.

4. 为了能够把三角函数式化成积的形式，有时需要把某些数当作三角函数值，如把 $\frac{1}{2}-\cos\alpha$ 化为积的形式，可将 $\frac{1}{2}$ 看作 $\cos\frac{\pi}{3}$，再化为积.

5. 例 1 要求把两个三角函数式的和化为积的形式，对于这类问题最后结果应是几个三角函数式的积的最简形式. 如将 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 化为积的形式，若最后结果是

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)\text{或}\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

的形式都不符合要求，最后结果应为 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

6. 本节重点是公式的推导与应用，难点是公式的灵活应用.

本章小结

1. 本章学习的主要内容是两角和与差的正弦、余弦和正切公式，倍角公式，以及运用这些公式进行简单的三角恒等变换.

2. 全章始终注意通过问题，引导学生用类比、联系、化归的观点分析与处理问题，引导学生逐渐明确三角变换不仅是三角函数式的结构形式变换，而且还有角的变换，以及不同三角函数之间的变换，使学生领悟有关公式在变换中的作用和用法，学会用恰当的数学思想方法指导选择和设计变换思路.

3. 本章不仅关注使学生得到和(差)角公式，而且还特别关注公式推导过程中体现的数学思想方法. 例如，两角差的余弦公式这一关键性问题的解决体现了数形结合思想以及向量方法的应用；从两角差的余弦公式推出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦和正切公式的过程中，始终引导学生体会化归思想；在应用公式进行恒等变换的过程中，渗透了观察、类比、推广、特殊化、化归等思想方法.

4. 对本章的教学要准确把握教学要求. 与以往的三角恒等变换学习相比较，“标准”强调了用向量方法推导差角的余弦公式，以用三角函数之间的关系推导和(差)角公式、二倍角公式，其他如半角公式、积化和差与和差化积公式只是作为基本训练的素材，结果不要求记忆，教学时应当把握好这种变化，遵循“标准”所规定的内容和要求，不要引进那些繁琐的、技巧性高的变换难题以及强调细枝末节的内容.

三、拓展资源

( ) 数学家米勒

米勒 (Johannes Miiller)，德国数学家，曾在莱比锡、维也纳学习天文学和三角学，1468～1471 年在维也纳大学任教授，1471 年定居纽伦堡，从事天文学研究，米勒对三角学作出了贡献. 大约在 1461～1464年间，他写成《论三角》一书，书中给出了有关球面三角学的正弦定理、余弦定理，计算了三角函数表，相当精确. 他的这些工作使三角学脱离天文学而成为一门独立的学科. 另外，米勒在研究几何时采用了代数方法，这在当时是别具一格的.

1471 年，米勒向诺德尔 (Christian Roder) 教授提出以下十分有趣的问题：在地球表面的什么部位，一根垂直的悬杆呈现最长？(即在什么部位，可见角为最大?) 在米勒的家乡哥尼斯堡，这个问题称为雷奇奥莫塔努斯 (Reqiomontanus) 的极大值问题. 该问题本身并不难，但其是世界数学史上的一个非常有名的极值问题.

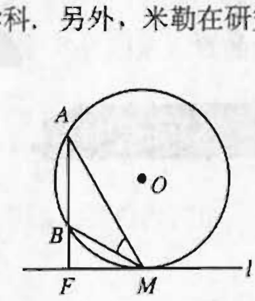


图 3-1

下面这个简明解法是罗斯给出的.

如图 3-1，设 A 为杆的上端点，B 为杆的下端点. AB 垂直于地平面，垂足

记为 F，于是线段长 $FA=a$，$FB=b$ 均为已知，以 F 为中心在地球表面上画的圆上的所有点对 AB 的视角都相等. 因此，我们只需过 F 任作一条垂直于 FA 的直线 l 并在这条水平地沿着地球表面的线上找出这样的点 M，使得在这点的可见角 $\angle AMB$ 最大.

$\triangle AMB$ 的外接圆 O 必与 l 相切于 M 点. 事实上，若 l 不与圆 O 相切，则除点 M 外圆 O 与 l 还有另一个公共点 N，而对于线段 MN 的中点 Q 而言，$\angle AQB$ 是圆 O 的圆内角，这时，$\angle AQB>\angle AMB$，这就与 $\angle AMB$ 是最大可见角矛盾.

设过 AB 的圆 O 与直线 l 相切于点 M，则 $\angle AMB$ 取得最大值. 这是因为对 l 上异于 M 的任一点 P 而言，$\angle APB$ 是圆 O 的圆外角，所以 $\angle APB<\angle AMB$. M 点的位置可以这样来确定，根据切割线定理，$FM^2=FA\cdot FB$，即有 $FM=\sqrt{ab}$.

从而，我们得出结论：以悬杆与地面垂直的垂足为圆心，以悬杆两端到地面距离的乘积的算术平方根为半径，在地球表面上画圆，该圆周上的点对悬杆的视角为最大.

1986 年全国高考数学试题理科第五大题其实就是“米勒问题”：

如图 3-2，在平面直角坐标系中，在 y 轴的正半轴（坐标原点除外）上给定两点 A，B. 试在 x 轴的正半轴（坐标原点除外）上求点 C，使 $\angle ACB$ 取得最大值.

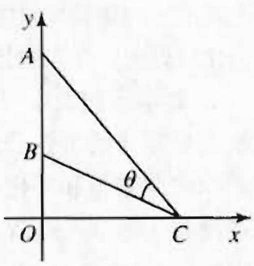


图 3-2

下面，我们运用高中数学知识给出这道高考题的一种简洁解法.（注：本题解法中使用的均值不等式学生没有学过，本解法仅作参考.）

解：如图 3-2，设点 A 的坐标为 $(0,\ a)$，点 B 的坐标为 $(0,\ b)$，$0<b<a$，C 的坐标为 $(x,\ 0)$，$x>0$，并记 $\angle ACO=\alpha$，$\angle BCO=\beta$，$\angle ACB=\theta$，则 $\theta=\alpha-\beta$，且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

所以

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{x\cdot\frac{ab}{x}}}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

因此，当 $x=\frac{ab}{x}$，即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\tan\theta$ 取得最大值 $\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

因为在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内 $\tan\theta$ 是增函数，所以当 $x=\sqrt{ab}$ 时，$\angle ACB$ 取得最大值 $\arctan\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$. 因此，所求的 C 点坐标为 $(\sqrt{ab},\ 0)$.

（二）万能公式

由二倍角公式，得

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

再由同角三角函数关系，得

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

则 $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$，$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

以上公式叫做**万能代换公式**，简称**万能公式**，利用万能公式，可以用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的有理式统一表示任何角 α 的三角函数值，从而实现了“多元”问题向“一元”问题的转化.

例 求 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$ 的值域.

解：令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $t\in\mathbf{R}$，而且

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

所以 $y=\dfrac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+2}=\dfrac{1-t^2}{2t+2+2t^2}$，即

$$(2y+1)t^2+2yt+2y-1=0. \qquad ①$$

(1) 当 $2y+1=0$ 时，即 $y=-\frac{1}{2}$，$t=-2\in\mathbf{R}$ 符合题意；

(2) 当 $2y+1\neq0$ 时，由于 $t\in\mathbf{R}$，所以方程①有实根．则

$$\Delta=(2y)^2-4(2y+1)(2y-1)\geqslant0,$$

即 $y^2\leqslant\frac{1}{3}$．所以 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$．从而

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\text{且 }y\neq-\frac{1}{2}.$$

综合 (1) (2) 可得函数的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

（三）用构造模型法解三角题

三角函数及其恒等变形是中学数学的基础．在高中三角解题中，主要突出了恒等变形的思想，旨在

加强对三角公式的深刻理解和灵活运用. 这里从另一个角度出发，研究如何通过构造数学模型来解决三角问题. 目的在于培养学生观察、分析、联想的思想方法以及创造性思维能力.

1. 思维是支柱

观察是思维的入口，是解题的第一能力. 从五光十色的交叉干扰信号中，能迅速地找到自己需要的闪光点，这是观察能力中最基础、最珍贵的直觉思维能力.

分析是观察之后的去粗取精. 正确地分析就是抓住事物的本质特征，同时也就舍弃了事物的非本质表象.

联想是一种特定的想象，它是把某一领域的事物与其他领域的事物联系起来思考，并由此激发新的认识的思维方式. 联想的过程实质上是一个知识迁移的过程. 联想的目的是为了寻求解题途径、促成问题的解决. 联想是构造的基础，是沟通思维和构造的桥梁.

2. 构造是主体

思维与构造不是平行关系. 思维在于想，构造在于做，想是做的基础和主导，做是想的实践和主体. 举例：

例1 求 $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$的值.

分析：我们可引导学生观察，揭示其本质. 注意到 $\sin 40^\circ=\cos 50^\circ$，$\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$，且问题关于 $\cos 10^\circ$，$\cos 50^\circ$是对称的，所以可通过构造二元对称代换来解决. 若注意到 $\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ=1$，$\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ=1$，也可以利用对偶模型来处理.

解法 1：令 $\cos 10^\circ=a+b$，$\cos 50^\circ=a-b$，则

$$a=\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 50^\circ)=\cos 30^\circ\cos 20^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ,$$

$$b=\frac{1}{2}(\cos 10^\circ-\cos 50^\circ)=\sin 30^\circ\sin 20^\circ=\frac{1}{2}\sin 20^\circ,$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\cos 50^\circ\cos 10^\circ\\&=(a+b)^2+(a-b)^2-(a-b)(a+b)\\&=a^2+3b^2\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)^2=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

解法 2：令 $A=\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ-\sin 40^\circ\sin 80^\circ$，$B=\sin^2 10^\circ+\sin^2 50^\circ-\cos 40^\circ\cos 80^\circ$，则

$$A+B=2-\cos 40^\circ, \qquad ①$$

$$\begin{aligned}A-B&=\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 120^\circ\\&=2\cos 60^\circ\cos 40^\circ+\cos 120^\circ=\cos 40^\circ-\frac{1}{2}.\end{aligned} \qquad ②$$

由①②消去 B，得 $A=\frac{3}{4}$.

评述：以上两种解法都抓住了问题的实质：角和函数，通过构造，使问题得以巧妙地解决.

构造数学模型，发挥模型在解题中的作用，需要我们对知识进行积累和重新组合. 除了以上的对称、对偶模型外，常用的还有函数模型、方程模型、三角模型、复数模型、几何模型、解析模型等.

例2 已知 x，$y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0\\4y^3+\sin y\cos y+a=0\end{cases}$$

求 $\cos(x+2y)$.

分析：看到此题会有无从下手之感，因为已知的两个等式中既含有代数式 x^3 和 $4y^3$，又含有超越式 $\sin x$和 $\sin y\cos y$. 这时可以这样来分析：已知条件是通过参数 a 将 x，y 联系在一起的，由题设消去 a，得

$$x^3+\sin x=(-2y)^3+\sin(-2y). \quad ①$$

①式的两边具有相同的表现形式. 因此，可构造函数 $f(t)=t^3+\sin t$. 由①得

$$f(x)=f(-2y).$$

又因为 $f(t)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以 $x=-2y$，即 $x+2y=0$.

所以 $\cos(x+2y)=1$.

评述：上面通过构造函数，使这个看上去很难解决的问题得到巧妙地解答.

例 3 求 $\tan^2\frac{\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}$的值.

分析：注意到题目中的三个角$\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{7}$，$\frac{3\pi}{7}$，每一个角的 3 倍角与 4 倍角的和均为 π 的整数倍，故其正切值互为相反数. 由此可构造方程

$$\tan 3\theta+\tan 4\theta=0. \quad ①$$

因为$\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{7}$，$\frac{3\pi}{7}$是方程①的三个根，所以

$$\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}+\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=0,$$

即 $\tan^6\theta-21\tan^4\theta+35\tan^2\theta-7=0$.

令 $x=\tan^2\theta$，则 $x^3-21x^2+35x-7=0$. ②

因为$\frac{\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{7}$，$\frac{3\pi}{7}$是方程①的三个根，所以 $\tan^2\frac{\pi}{7}$，$\tan^2\frac{2\pi}{7}$，$\tan^2\frac{3\pi}{7}$是方程②的三个根，由根与系数的关系，得

$$\tan^2\frac{\pi}{7}+\tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{3\pi}{7}=21.$$

评述：本题是构造方程模型解题.

例 4 已知函数 $y=\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x}$，求函数的最大值和最小值.

分析：注意观察 $\sin x$ 和$\sqrt{1+\cos^2 x}$的关系，可发现 $\sin^2 x+(\sqrt{1+\cos^2 x})^2=2$，则可令

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\cos\theta\\\sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right)$$

这样，$y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$，$0\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以函数的最大值为 2，最小值为 0.

评述：上面通过构造三角模型，利用三角函数的性质，巧妙地摆脱了根号的困惑，使问题得到了解决.

四、教学案例

案例 1：3.1.3 两角和与差的正切

（一）教学目标

1. 知识目标：掌握公式及其推导过程，理解公式成立的条件；会用公式求值.

2. 能力目标：培养学生的观察、分析、类比、联想能力；间接推理能力（即不能直接套公式，需要变化条件，寻找依据，才能推出结论）；自学能力.

3. 情感目标：发展学生的正向、逆向思维和发散思维能力，构建良好的数学思维品质.

（二）教学重点、难点

重点是公式的结构特点及其推导方法、成立条件，运用公式求值.

难点是公式的逆向和变形运用.

（三）教学方法

教师按照课本的知识结构先设计若干问题（即“知识台阶”），课前印发给学生，引导他们阅读课本. 课堂上在教师三导（引导、指导、辅导）下，以学生为主体，对所设问题进行读、议、练、讲，其间教师通过提问、参与讨论、巡视学生练习及板演、观察学生情绪等渠道，及时搜集反馈信息，及时作出评价，再发指令，使教学过程处于动态平衡之中.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习公式 $S_{\alpha\pm\beta}$ 和 $C_{\alpha\pm\beta}$，并由此提出问题，引入新课.	先让学生默写两角和与差的正弦、余弦公式，然后指出这两个公式是讨论复角 $\alpha\pm\beta$ 与单角 α，β 的正弦、余弦函数间的关系，且此关系对任意角 α，β 均成立，那么，能否用 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 来表示 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 呢？	以旧引新，注意创设问题的情境，通过设疑，引导学生开展积极的思维活动.
公式的推导及理解	公式 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 的推导及两角和与差的正切公式的“三掌握”.	学生阅读课本中“两角和与差的正切”公式的推导，教师板书课题和公式的推导过程. 阅毕思考讨论：（投影） （1）公式是如何推导出来的？有什么限制条件？ （2）公式有何特点？如何记忆？ （3）公式有何用处？有何变形？	通过对三个问题的分析、讨论，使学生对公式有一个清晰完整的认识，为公式的灵活运用打下基础，并给学生一个自由的空间，逐步培养他们的自学能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
公式的推导及理解		由学生回答上述问题，教师点评，结论如下： (1) 由两角和与差的正弦、余弦公式可推导正切公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$， $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. 由正切函数的定义域可知，公式成立的条件是 α，β，$\alpha\pm\beta$ 都不能取 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. (2) 注意符号和等式的结构特征，可理解记忆，对比记忆. (3) 此公式可用来求值，进行三角变换等(学生的回答可能有很多种，教师择要归纳)，注意公式的逆向形式和变形形式.	
公式的深化	对两角和与差的正切公式"三想".	(1) 特想：$\tan 2\alpha=$？有何限制条件？ (2) 联想：如何推导两角和与差的余切公式？有几种方法？ (3) 扩想：$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=$？由学生推导.	对公式进行深挖掘，显示其"辐射"作用，培养学生的分析、联想能力、优化思维品质.
公式的应用	两角和与差的正切公式的"三会用". 例1　求出下列各式的精确值： (1) $\tan 75^\circ$； (2) $\frac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}$. 巩固练习一： 练习A，1，2；练习B，2，3. 例2　不查表，求值： $\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$. 巩固练习二： 练习A，3(1)；练习B，第1题. 例3　不查表，求值： (1) $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ$； (2) $\tan 17^\circ\tan 43^\circ+\tan 17^\circ\tan 30^\circ+\tan 43^\circ\tan 30^\circ$.	例1　学生练习、板演，教师讲评，注意几个问题： (1) 将一般角转化为特殊角的和或差，可以不查表求值； (2) 运用公式时，不能仅局限在从左到右的正用，还要善于从右到左的逆用. 例2　学生思考、讨论解决，教师巡视指导.然后教师提问，学生回答. 师：有几种解法？如何求解？ 生：两种．解法一：先求出 $\tan 75^\circ$，再求值；解法二：用"$\tan 45^\circ$"代换"1"，再逆用公式. 师：哪种解法运算简捷？ 生：解法二. 师：此法运用的关键是什么？ 生："1"的代换，配凑公式. 教师指出，这里运用了观察、联想、转化的数学思想. 例3　学生思考讨论，教师进行必要的启发引导. 生：先求出 $\tan 15^\circ$，再求解. 师：还有其他解法吗？（略停顿，启发学生回答）这个式子有什么特点？	例1是使学生掌握公式的正向和逆向运用，并进一步熟悉公式的特征，为后面的灵活运用作铺垫. 例2是一道典型例题，对它的解法的深入探讨，有益于启发学生思维，提高学生的解题能力；且在解题过程中提炼思想方法，有利于培养学生良好的数学思维品质. 例3通过具体例子显示出灵活运用公式的优越性，必

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
公式的应用		生：$15°+30°=45°$；出现有"$\tan 15°+\tan 30°$"和"$\tan 15°\tan 30°$". 师：好．由此你能联想到什么？ 生：$\tan(15°+30°)=\dfrac{\tan 15°+\tan 30°}{1-\tan 15°\tan 30°}$. 师：请试解这一题． 学生做题，教师巡视指导，并让学生板演． 点评：在公式 $T_{\alpha+\beta}$ 中，体现了 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan\alpha+\tan\beta$，$\tan\alpha\tan\beta$ 三者之间的关系．通过变形，可得 $\tan\alpha+\tan\beta$ 与 $\tan\alpha\tan\beta$ 的关系． 让学生完成第(2)小题，并板演．	将给学生留下深刻的印象，及时小结，升华公式，有利于学生解题技巧的形成．
归纳小结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结．	对公式做到三个"三"：即"三掌握""三想""三会用"．	使学生对所学内容有一个清晰完整的认识，并点出学习三角公式的基本方法，正体现了"授之以鱼，不如授之以渔"的教育思想．
布置作业	教材习题 3-1A，5． 教材习题 3-1B，1，6．	课后思考题：当 $A+B+C=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，并且 $\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ 存在时，$\tan A+\tan B+\tan C$ 与 $\tan A\tan B\tan C$ 有何关系？其逆命题成立吗？	巩固本节课所学知识，培养学生自觉学习的习惯，同时给学有余力的学生留出自由发展的空间．

案例2：3.2.1 倍角公式

（一）教学目标

1．知识目标：

（1）掌握 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$ 公式的推导，明确 α 的取值范围；

（2）能运用二倍角公式求三角函数值．

2．能力目标：

（1）通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力；

（2）通过综合运用公式，掌握有关技巧，提高分析问题、解决问题的能力．

3．情感目标：通过公式的推导，了解倍角公式之间以及它们与和角公式之间的内在联系，从而培养逻辑推理能力和辩证唯物主义观点．

（二）教学重点、难点

重点是二倍角的正弦、余弦、正切公式以及公式 $C_{2\alpha}$ 的两种变形；难点是倍角公式与以前学过的同角三角函数的基本关系式、诱导公式、和角公式的综合应用．

（三）教学方法

本节课采用观察、赋值、启发探究相结合的教学方法，运用现代化多媒体教学手段，进行教学活动．通过设置问题引导学生观察分析，使学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探索和交流的过程中获得倍角公式，对于倍角公式的应用采取讲、练结合的方式进行处理，使学生边学边练，及时巩固，同时设计问题，探究问题，深化对公式的记忆．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习两角和与差的三角函数公式．	师：我们已经学习了两角和与差的正弦、余弦、正切公式，请大家回忆一下这组公式的来龙去脉，并请一个同学把这六个公式写在黑板上． 生：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$， $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$． 师：很好，对于这些公式，大家一方面要从公式的推导上去理解它，另一方面要从公式的结构特点上去记忆，还要注意公式的正用、逆用和变用．今天，我们学习二倍角的正弦、余弦和正切公式．	以旧引新，让学生明确学习的内容．
公式的推导	探索研究：$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的表达式．	师：请大家想一想，在公式$S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$中对α，β如何合理赋值，才能出现$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的表达式？并请同学把对应的等式写在黑板上． 生：可在$S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$中，令$\alpha=\beta$，就能出现$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$，对应表达式为： $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$， $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$， $\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$． 即：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$， $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$， $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$． 教师提出问题： 若利用$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$，如何用$\tan\alpha$表示$\tan 2\alpha$？ 学生回答，得出二倍角的正切公式．	1．引导学生运用已学过的两角和的三角函数公式推得二倍角公式，使学生理解二倍角公式就是两角和的三角函数公式的特例，这样有助于公式的记忆． 2．问题的提出可以让学生了解公式的不同推导方法，有助于学生发散思维的培养．

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
公式的深化理解	1. 二倍角的正切公式的适用范围.	师：对于公式 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，我们要注意些什么？大家想一想要关注什么？公式中的 α 有限制吗？ 生：要使 $\tan 2\alpha$ 有意义，需 $1-\tan^2\alpha\neq 0$，$\tan\alpha$ 有意义. 师：$\tan 2\alpha$ 有意义，即 $$2\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},$$ $$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in \mathbf{Z}).$$ $1-\tan^2\alpha\neq 0$，即 $\tan\alpha\neq\pm 1$，也就是 $\alpha\neq k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，可变为 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in \mathbf{Z})$. 要使 $\tan\alpha$ 有意义，则需 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$. 综合起来就是 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，且 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in \mathbf{Z})$. 当 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$时，虽然 $\tan\alpha$ 的值不存在，但 $\tan 2\alpha$ 的值是存在的，这时求$\tan 2\alpha$的值可利用诱导公式，即 $$\tan 2\alpha=\tan 2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\tan(\pi+2k\pi)=0.$$	使学生掌握二倍角的余弦公式的不同表示形式，并掌握二倍角正切公式的适用范围，以加深对公式的认识和理解，培养严谨的数学思维品质.
	2. 二倍角余弦公式的不同表示形式.	师：对于 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，还有没有其他的形式？ 生：有（板书）. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \text{ 或 } \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$ 所以 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$. 师：（板书三个公式，并告诉学生公式记号分别为 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$.）对二倍角公式大家要注意以下问题：（1）用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 表示 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，用 $\tan\alpha$ 表示 $\tan 2\alpha$，即用单角的三角函数表示复角的三角函数；（2）$C_{2\alpha}$有三种形式，$T_{2\alpha}$是有条件的.	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
公式的应用	例1 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值. 巩固练习一： 练习A，1，2，3. 例2 证明恒等式： $\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{2\cos 2\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta}=\tan\theta$. 巩固练习二： 习题3-2A，3（1）（2）（3）.	例1可让学生自己解决，本题也可按下列程序来做，并让学生比较方法之优劣. 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，所以 $\cos\alpha<0,\ \cos\alpha=-\frac{12}{13}.$ 所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $=(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)-1$ $=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$ $=\left(\frac{5}{13}-\frac{12}{13}\right)^2-1$ $=\frac{49}{169}-1=-\frac{120}{169}$， $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$ $=\left(-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\right)$ $=-\frac{7}{13}\cdot\left(-\frac{17}{13}\right)=\frac{119}{169}$， $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $=\frac{-\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=-\frac{120}{119}$. 师：证明恒等式有哪些途径? 生：一是由左边证到右边，二是由右边证到左边，三是左右两边同时变形为同一个式子. 师：针对例2待证恒等式中式子的特点，我们应采取哪种途径? 生：由左边证到右边. 师：下面同学们自己试着证明该题. 完成后学生完成巩固练习二.	例1是二倍角公式的应用求值问题，同时复习了同角的三角函数关系及三角函数的符号问题. 为学生展示不同的解题方法，可培养学生灵活运用知识解决问题的能力. 例2是一个三角恒等式的证明问题，要引导学生运用合理的途径进行证明.
归纳小结	（1）在两角和的三角函数公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$ 中，当 $\alpha=\beta$ 时，就可以得到二倍角的三角函数公式 $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$，说明后者是前者的特例.	引导学生总结回顾，可采取提问的方式进行.	系统地总结回顾本节课所学的内容有助于学生形成清晰的知识网络.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	(2) $S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$中，角α没有限制条件，而$T_{2\alpha}$中，只有$\alpha\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$和$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，才成立. (3) 二倍角公式不仅限于$2\alpha$是$\alpha$的两倍形式，其他如$4\alpha$是$2\alpha$的两倍，$\frac{\alpha}{2}$是$\frac{\alpha}{4}$的两倍，$3\alpha$是$\frac{3\alpha}{2}$的两倍等等都是适用的，要熟悉这些多种形式的两个角的倍数关系，才能熟练地应用好二倍角公式，这是灵活运用公式的关键. (4) $\cos 2\alpha$有三种形式$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$. 要依据条件，灵活选用公式. 另外，逆用此公式时，更要注意结构形式.		
布置作业	层次一：教材练习 B，1，2. 层次二：教材练习 B，3，4；教材习题 3-2A，4 (2). 层次三： 1. 教材练习 B，3，4；教材习题 3-2B，1，3 (1) (2) (3).	作业分三个层次，第一层次要求所有学生都要完成；第二层次、第三层次要求学有余力的学生完成.	通过分层作业使学生进一步巩固本节课所学内容，并为有余力的学生的发展提供更加广阔的空间.

案例 3：3.3　三角函数的积化和差与和差化积

（一）教学目标

1. 知识目标：了解积化和差、和差化积公式的推导过程，能初步运用公式进行和、积互化.

2. 能力目标：能应用公式进行三角函数的求值、化简、证明.

3. 情感目标：通过公式的推导和应用培养学生严谨规范的思维品质和辩证唯物主义观点.

（二）教学重点、难点

本节重点是公式的推导与应用，难点是公式的灵活应用.

（三）教学方法

观察、归纳、启发、探究相结合的教学方法.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习两角和与差的正弦、余弦公式.	让学生将两角和与差的正弦、余弦公式写出来. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$； ① $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$； ② $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$； ③ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$. ④	复习旧知识，同时为推导积化和差公式作准备.
积化和差公式的推导	推导积化和差公式： $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$； $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$； $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$； $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.	师：考察写出来的两角和与差的正弦、余弦这四个公式，你能否用 $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$、$\cos(\alpha-\beta)$ 来表示 $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$，$\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$？ 生：①式与②式两边分别相加和相减除以 2 得到： $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$； $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$； ③式与④式两边分别相加和相减除以 2 得到： $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$； $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$. 师：这组公式称为三角函数积化和差公式，熟悉结构，不要求记忆，它的优点在于将“积式”化为“和差”，有利于简化计算.	培养学生运用已有知识分析问题的能力和问题探究的能力，同时也使学生认识到了新公式产生的根源.
积化和差公式的应用	教材练习 A 第 2 题.	学生做练习，教师巡视检查.	让学生初步学会应用公式.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
和差化积公式的推导	推导和差化积公式： $\sin x+\sin y=$ $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$； $\sin x-\sin y=$ $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$； $\cos x+\cos y=$ $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$； $\cos x-\cos y=$ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.	师：从上面的积化和差公式变形可以得到： $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$； $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$； $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$； $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$. 左边是和差的形式，右边是积的形式，设$\alpha+\beta=x$，$\alpha-\beta=y$后请同学自己将上面的四个式子加以整理，把$\alpha$，$\beta$用$x$，$y$换下来．学生整理后得到和差化积公式. 师：下面同学们看课本中的“探索与研究”，同学们讨论一下如何运用向量的知识来推导和差化积的公式. 组织学生讨论. 师：这组公式称为和差化积公式，其特点是同名的正(余)弦才能使用，它与积化和差公式相辅相成，配合使用.	引导学生由积化和差公式推导和差化积公式，在推导过程中运用了代换法进行角的转化. 通过组织学生讨论探究，逐步培养学生团结协作的思想品质，提高学生综合运用知识思考问题解决问题的能力.
和差化积公式的应用	例1　化$\cos 3\theta+\cos\theta$为积的形式. 巩固练习：练习A，1，3. 练习B，1. 例2　已知$A+B+C=180°$，求证 $\sin A+\sin B+\sin C$ $=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. 巩固练习：练习B，第3题.	利用和差化积这四个公式和其他三角函数关系式，我们可以把某些三角函数的和差化成积的形式. 教师指导学生做例1，并检查学生做的情况，用投影仪订正．并强调说明化积的最后结果必须是几个三角函数积的形式，如$\cos\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)$虽然已是积的形式，但这样显然不符合要求，最后结果应为$2\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. 例2是一道综合性较强的证明题，要用到诱导公式、二倍角的正弦公式、和差化积公式，教师要板演整个解题的过程，并在解题过程中注意引导学生思考.	例1是和差化积公式的直接应用，要让学生明确化积问题对最后结果的要求. 例2是一道典型的综合性问题，对于它的解题过程的深入探讨，有益于启发学生思维，提高学生分析问题和解决问题的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.	(1) 本节课重点学习了两组公式，对于公式不要求记住，但要学会运用这些公式进行三角函数和差与积的互化，并能够运用公式解决一些求值、化简和证明问题； (2) 把一个式子化为积的形式是一类重要题型，尤其是要注意其最后结果的形式是否符合要求； (3) 在公式的推导过程中我们用到了换元法，要注意该方法在解题中的应用.	让学生明确本节课的重点和要达到的要求.
布置作业	教材习题 3-3 A，3，4.		对本节内容及时巩固.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 135 页）

1. 不成立. 反例：对 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$，等式不成立.

2. (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. (2) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. (3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. (4) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3. (1) 因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\alpha$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$.

(2) $\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\sin\alpha$.

练习 B（第 135 页）

1. (1) $\frac{1}{2}$. (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 因为 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}.$$

3. 因为 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$.

又因为 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

所以 $\sin\beta=\frac{12}{13}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{8}{17}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{15}{17}\times\frac{12}{13}=-\frac{140}{221},$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{8}{17}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{15}{17}\times\frac{12}{13}=\frac{220}{221}.$$

4. (1) $-\sqrt{2}\sin\varphi$. (2) $\cos\alpha$.

5. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$.

(2) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right).$$

练习 A（第 138 页）

1. 不成立．反例：$\alpha=30°$，$\beta=60°$.

2. (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. (3) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. (4) $\frac{1}{2}$. (5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. (1) $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$
$=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin\beta$.

(2) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$
$=\sin(\alpha-\beta+\beta)=\sin\alpha$.

4. 因为 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$.

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{15}{17}=\frac{15-8\sqrt{3}}{34},$$

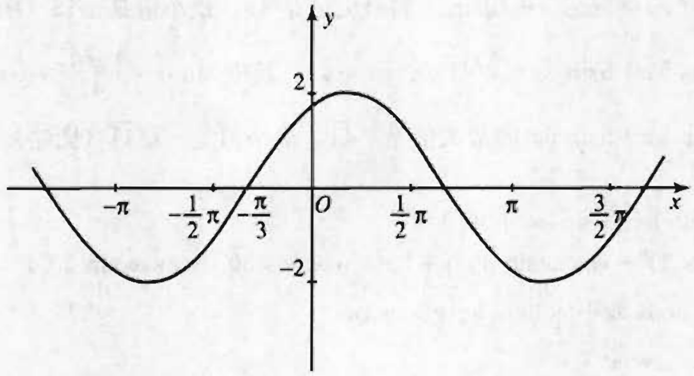
$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{15}{17}=\frac{-15-8\sqrt{3}}{34}.$$

5. $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

所以函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ 的最大值为 2，最小值为 -2.

函数的图象如图所示：



第 5 题

练习 B（第 139 页）

1. 因为 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 且 α 是第二象限角，

所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

又因为 $\cos\beta=-\frac{3}{4}$ 且 β 是第二象限角，

所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{-6-\sqrt{35}}{12},$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{-6+\sqrt{35}}{12}.$$

2. 提示：代入旋转变换公式$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$求解.

$P_1\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2\left(-\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{4\sqrt{3}-3}{2}\right)$，$P_3\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. (1) $f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以函数 $f(x)=\cos x+\sin x$ 的最大值是$\sqrt{2}$，最小值是$-\sqrt{2}$（图略）.

(2) $f(x)=\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以函数 $f(x)=\cos x-\sin x$ 的最大值是$\sqrt{2}$，最小值是$-\sqrt{2}$（图略）.

(3) $f(x)=5\cos x+12\sin x=13\sin(x+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{5}{13}$，$\cos\varphi=\frac{12}{13}$，

所以函数 $f(x)=5\cos x+12\sin x$ 的最大值是 13，最小值是-13（图略）.

(4) $f(x)=4\cos 5x+5\sin 5x=\sqrt{41}\sin(5x+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{4\sqrt{41}}{41}$，$\cos\varphi=\frac{5\sqrt{41}}{41}$，所以函数

$f(x)=4\cos 5x+5\sin 5x$ 的最大值是$\sqrt{41}$，最小值是$-\sqrt{41}$（图略）.

4. $$\begin{aligned}I&=I_1+I_2\\&=12\sin(\omega t-30^\circ)+10\sin(\omega t+30^\circ)\\&=12(\sin\omega t\cos 30^\circ-\cos\omega t\sin 30^\circ)+10(\sin\omega t\cos 30^\circ+\cos\omega t\sin 30^\circ)\\&=6\sqrt{3}\sin\omega t-6\cos\omega t+5\sqrt{3}\sin\omega t+5\cos\omega t\\&=11\sqrt{3}\sin\omega t-\cos\omega t\\&=\sqrt{364}\left(\frac{11\sqrt{3}}{\sqrt{364}}\sin\omega t-\frac{1}{\sqrt{364}}\cos\omega t\right)\\&=2\sqrt{91}\sin(\omega t-\varphi).\end{aligned}$$

其中 $\cos\varphi=\frac{11\sqrt{273}}{182}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{91}}{182}$.

练习 A（第 140 页）

1. (1) $2-\sqrt{3}$. (2) $-2-\sqrt{3}$. (3) 1. (4) 1.

2. $$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{2+\frac{1}{5}}{1-2\times\frac{1}{5}}=\frac{11}{3};$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{2-\frac{1}{5}}{1+2\times\frac{1}{5}}=\frac{9}{7}.$$

3. (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (2) $-\sqrt{3}$.

练习 B（第 141 页）

1. (1) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$.

(2) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$.

2. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}}{1-\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{7}}=1$.

3. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{5}}{1+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{5}}=\dfrac{9}{19}$.

习题 3-1A（第 141 页）

1. 因为 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，且 A 为$\triangle ABC$的内角，

所以 $\sin A=\dfrac{3}{5}$.

因为 $\cos B=\dfrac{12}{13}$，且 B 为$\triangle ABC$的内角，

所以 $\sin B=\dfrac{5}{13}$，

所以 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=-\dfrac{33}{65}$.

2. (1) $\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)$

$=\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha-\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha=2\cos 30^\circ\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$.

(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha=2\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$.

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\varphi-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\varphi-\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\varphi-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\varphi=-\sqrt{2}\sin\varphi$.

(4) $\cos(27^\circ+\alpha)\cos(33^\circ-\alpha)-\sin(27^\circ+\alpha)\sin(33^\circ-\alpha)$

$=\cos(27^\circ+\alpha+33^\circ-\alpha)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)+\cos(\alpha-15^\circ)\sin(\alpha+15^\circ)$

$=\sin(\alpha-15^\circ+\alpha+15^\circ)=\sin 2\alpha.$

3. (1) $\sin 35^\circ\cos 25^\circ+\sin 55^\circ\cos 65^\circ$

$=\sin 35^\circ\cos 25^\circ+\cos 35^\circ\sin 25^\circ$

$=\sin(35^\circ+25^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(2) $\cos 28^\circ\cos 73^\circ+\cos 62^\circ\cos 17^\circ$

$=\cos 28^\circ\cos 73^\circ+\sin 28^\circ\sin 73^\circ$

$=\cos(28^\circ-73^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4. 因为 $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}\quad\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{8}{17}.$

所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=-\frac{15}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{34},$$

$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{8}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{15}{17}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{23\sqrt{2}}{34}.$$

5. (1) $\dfrac{\tan 53^\circ-\cot 67^\circ}{1+\tan 53^\circ\tan 23^\circ}=\dfrac{\tan 53^\circ-\tan 23^\circ}{1+\tan 53^\circ\tan 23^\circ}=\tan(53^\circ-23^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

(2) $\dfrac{1+\cot 75^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\sqrt{3}.$

习题 3-1B（第 142 页）

1. 因为 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=1.$

2. (1) 当旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$时，设 $P_1(x',\ y')$.

设$\angle xOP=\alpha$，则$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$，$\sin\alpha=\dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}.$

因为$x'=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha=-\sqrt{a^2+b^2}\cdot\dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}=-b$，

$$y'=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}=a,$$

所以 $P_1(-b,a)$.

同理，当旋转角为 $-\frac{\pi}{2}$ 时，$P_2(b,-a)$.

(2) 当 $\overrightarrow{OP}=(2,1)$ 时，$P_1(-1,2)$，$P_2(1,-2)$；

当 $\overrightarrow{OP}=(-3,1)$ 时，$P_1(-1,-3)$，$P_2(1,3)$.

3. (1) $y=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin x-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\sin(x+\varphi)$$

$=\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(x+\varphi)$，其中 $\varphi=\arctan(-\sqrt{2}-1)$.

所以函数 $y=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值是 $\sqrt{2-\sqrt{2}}$，最小值是 $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$，周期是 2π.

(2) $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+12\cos(2x+31\pi)$

$$=-5\sin 2x-12\cos 2x$$

$$=-\sqrt{25+144}\sin(2x+\varphi)$$

$=-13\sin(2x+\varphi)$，其中 $\varphi=\arctan\frac{12}{5}$.

所以函数 $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+12\cos(2x+31\pi)$ 的最大值为 13，最小值为 -13，周期是 π.

4. (1) $\tan(45^\circ+\theta)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan\theta}{1-\tan 45^\circ\tan\theta}=\dfrac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$.

(2) $\dfrac{\tan^2x-\tan^2y}{1-\tan^2x\tan^2y}=\dfrac{(\tan x-\tan y)(\tan x+\tan y)}{(1+\tan x\tan y)(1-\tan x\tan y)}$

$=\tan(x+y)\tan(x-y)$.

(3) $\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\dfrac{\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y}}{\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}}=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.

5. $\theta+\varphi=45^\circ$.

6. $1=\tan 45^\circ=\tan(20^\circ+25^\circ)$

$=\dfrac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}$.

7. 因为 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2+3}{1-2\times 3}=-1$，$\alpha$、$\beta$ 都是锐角，所以 $\alpha+\beta=135^\circ$.

练习 A（第 144 页）

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (5) 1. (6) $\frac{1}{4}$.

2. 由 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，解得 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，

则 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)^2-1=\frac{119}{169}$.（由 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 也可以求得）

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{120}{169}$.

3. 因为 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$，

$\cot 2\alpha=\frac{1}{\tan 2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ 或 $\cot 2\alpha=\frac{1}{\tan 2\alpha}=\frac{3}{4}$.

4. 函数 $y=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$，

则该函数的周期是 π，最大值是 1，最小值是 -1.

练习 B（144 页）

1. (1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha$.

(2) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$.

(3) $\cos^4\varphi-\sin^4\varphi=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\cos 2\varphi$.

(4) $\frac{1}{1-\tan\theta}-\frac{1}{1+\tan\theta}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$.

2. 因为 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，而且

$(\alpha-\beta)\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以

$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.

因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，而且

$(\alpha+\beta)\in\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$.

所以 $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\beta+\alpha-\beta)$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=-\frac{7}{25}$.

3. $\frac{1}{8}$.

4. 设 $\angle AOC=\theta$, $\theta\in(0°, 60°)$. $OC=1$, $OF=\cos\theta$, $CF=\sin\theta$,

$$OE=\frac{DE}{\tan 60°}=\frac{CF}{\sqrt{3}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$$EF=OF-OE=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}.$$

矩形 $CDEF$ 的面积 $S=EF\cdot CF=\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\sin\theta=\sin\theta\cos\theta-\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos 30°\sin 2\theta+\sin 30°\cos 2\theta)-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(2\theta+30°)-\frac{\sqrt{3}}{6}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

因为 $\theta\in(0°, 60°)$，所以 $2\theta+30°\in(30°, 150°)$.

当且仅当 $\theta=30°$ 时 S 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 所以当 C 点在 AB 弧的中点时，矩形 $CDEF$ 的面积最大．此时 $\angle AOC=30°$.

练习 A（第 146 页）

1. (1) $\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(2) $\cos 67°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(3) $\cos\frac{13}{12}\pi=-\cos\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(4) $\cot\frac{5}{8}\pi=-\tan\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=1-\sqrt{2}$.

2. 因为 $\cos 2\alpha=-0.5$, $45°<\alpha<90°$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+(-0.5)}{2}}=\frac{1}{2}$,

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-0.5)}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1-(-0.5)}{1+(-0.5)}}=\sqrt{3}$ 或 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

3. 设顶角是 θ，底角是 α，则 $\cos\theta=\frac{7}{20}$，$\alpha=\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\in(0°,\ 90°)$.

所以 $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{20}}{2}}=\frac{3\sqrt{30}}{20}$,

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{20}}{2}}=\frac{\sqrt{130}}{20}.$$

练习 B（146 页）

1. 因为 $\sin\theta=0.64$，且 θ 在第二象限，所以 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}\approx-0.77$.

又因为 $\frac{\theta}{2}$ 为第一或第三象限角，

所以 $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+0.77}{2}}\approx\pm0.94$,

$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-0.77}{2}}\approx\pm0.34$,

$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1+0.77}{1-0.77}}\approx2.77$.

2. （1）$y=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$.

所以周期为 2π.

（2）$y=2\sin^2 x=1-\cos 2x$.

所以周期为 π.

3. （1）因为 $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-1=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$,

所以 $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

（2）因为 $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$,

所以 $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

习题 3-2A（第 147 页）

1. 因为 $\sin\theta=0.28=\frac{7}{25}$，$90°<\theta<180°$，则 $\cos\theta=-\frac{24}{25}$. $\frac{\theta}{2}\in(45°,\ 90°)$，即 $\frac{\theta}{2}$ 为第一象限角，

所以 $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{24}{25}\right)}{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{24}{25}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{24}{25}\right)}{1+\left(-\frac{24}{25}\right)}}=7 \text{ 或 } \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{10}}=7.$$

2. 由 $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$得 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$.

3. (1) 左边$=2(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=$右边.

(2) 左边$=\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos x=$右边.

(3) 左边$=1+2\cos^2\theta-(2\cos^2\theta-1)=2=$右边.

(4) 左边$=\sin(2\theta+\theta)$

$=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=$右边.

(5) 左边$=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=$右边.

4. (1) 因为$y=1+\cos x-\sin x$

$=1+\sqrt{2}\left(\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}-\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=1+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以函数的最大值是 $1+\sqrt{2}$，最小值是 $1-\sqrt{2}$，周期是 2π.

(2) 因为 $y=(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$，所以函数的最大值是 2，最小值是 0，周期是 π.

5. 原式$=\sin 50^\circ\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)$

$=\dfrac{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=1.$

习题 3-2B（第 147 页）

1. 设顶角是 θ，底角是 α，由 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\alpha\in(0^\circ, 90^\circ)$，可求 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，又 $\theta=180^\circ-2\alpha$，

所以 $\sin\theta=\sin(180°-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{120}{169}$；

$\cos\theta=\cos(180°-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=-1+2\left(\frac{5}{13}\right)^2=-\frac{119}{169}$；

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}}=-\frac{120}{119}$.

2. 设顶角是 θ，底角是 α. 则 $\cos\theta=\frac{7}{25}$，$\alpha=\frac{180°-\theta}{2}=90°-\frac{\theta}{2}\in(0°, 90°)$.

所以 $\sin\alpha=\sin\left(90°-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\cos\left(90°-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\frac{3}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$.

3. (1) 左边 $=\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\sin\varphi+\cos\varphi=$ 右边.

(2) 左边 $=\sin\theta(1+2\cos^2\theta-1)=2\sin\theta\cos^2\theta=\sin 2\theta\cos\theta=$ 右边.

(3) 左边 $=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha}{1}=\cos\alpha=$ 右边.

(4) 左边 $=2\sin\theta(1+\cos\theta)=2\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta+\sin 2\theta=$ 右边.

(5) 左边 $=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}=$ 右边.

(6) 左边 $=\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha-\sin\alpha\sin\beta=1-\cos(\alpha-\beta)=1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$ 右边.

4. (1) $y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，函数的最大值是 $\frac{1}{2}$，最小值是 $-\frac{1}{2}$，周期是 π.

(2) $y=\sqrt{3}\cos^2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以最大值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，周期为 π.

练习 A（第 151 页）

1. (1) $\sin 54^\circ+\sin 22^\circ=2\sin 38^\circ\cos 16^\circ$.

   (2) $\sin 5x-\sin 3x=2\cos 4x\sin x$.

   (3) $\cos 40^\circ+\cos 52^\circ=2\cos 46^\circ\cos 6^\circ$.

   (4) $\cos 40^\circ-\cos 52^\circ=2\sin 46^\circ\sin 6^\circ$.

2. (1) $2\sin 64^\circ\cos 10^\circ=\sin 74^\circ+\sin 54^\circ$.

   (2) $\sin 84^\circ\cos 132^\circ=-\frac{1}{2}\sin 48^\circ-\frac{1}{2}\sin 36^\circ$.

   (3) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos 0$.

   (4) $\sin 2\sin 1.2=-\frac{1}{2}\cos 3.2+\frac{1}{2}\cos 0.8$.

3. (1) $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\sin(\alpha+\beta)\sec\alpha\sec\beta$.

   (2) $\sin\alpha+\tan\alpha=\frac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sec\alpha$.

练习 B（第 151 页）

1. (1) $\frac{1}{2}-\cos x=\cos 60^\circ-\cos x=-2\sin\frac{60^\circ+x}{2}\sin\frac{60^\circ-x}{2}$.

   (2) $1+\sin 2x=\sin 90^\circ+\sin 2x=2\sin(45^\circ+x)\cos(45^\circ-x)=2\sin^2(45^\circ+x)$

   或 $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

2. (1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\cot\frac{\alpha-\beta}{2}=\cot\frac{\beta-\alpha}{2}$.

   (2) $\frac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}$.

3. 因为 $A+B+C=\pi$，所以 $C=\pi-(A+B)$.

   所以 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

   $=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2[\pi-(A+B)]$

   $=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

   $=2\sin(A+B)[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

   $=2\sin C\times(-2)\times\sin A\sin(-B)$

$=4\sin A\sin B\sin C.$

习题 3-3A（第 152 页）

1. (1) $\cos 3x+\cos 2x=2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

(2) $1+\sin\theta+\cos\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$

2. (1) $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

(2) $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{2\sin x+2\sin x\cos x}=\frac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)}=\tan^2\frac{x}{2}.$

3. (1) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

(2) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

(3) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)$

$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot(-2)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$

4. 左边 $=\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)}{2\cos^2(x+y)}=\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=$ 右边.

习题 3-3B（第 152 页）

1. (1) 原式 $=\frac{2\cos 30^\circ\sin(-10^\circ)}{-2\sin 30^\circ\sin(-10^\circ)}=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}.$

(2) 原式 $=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\sin 80^\circ=\cos 10^\circ-\cos 10^\circ=0.$

2. (1) 原式 $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$

(2) 原式 $=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$

$=2\sin 2\alpha(\cos\alpha+\cos 60^\circ)=4\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha+60^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-60^\circ}{2}$

或原式$=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$

$=2\sin\frac{3\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}\right)$

$=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot 2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$

$=4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

3. (1) 原式$=\sin 105^\circ\cos 75^\circ=\sin 75^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{2}\sin 150^\circ=\frac{1}{4}$.

(2) 原式$=2\cos 37.5^\circ\cos 22.5^\circ=\cos 60^\circ+\cos 15^\circ=\frac{1}{2}+\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\frac{1}{2}+\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(3) 原式$=-2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}=0$.

(4) 原式$=\frac{1+\cos 146^\circ}{2}+\frac{1+\cos 94^\circ}{2}+\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 26^\circ)$

$=1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 120^\circ\cos 26^\circ-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 26^\circ$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cos 26^\circ+\frac{1}{2}\cos 26^\circ=\frac{3}{4}$.

4. 因为$A+B+C=\pi$，所以$A+B=\pi-C$. 所以$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$.

所以$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cdot(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)+1$

$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

本章小结

III 巩固与提高（第 154 页）

1. 因为α，β都是锐角，且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以$0<\alpha+\beta<\pi$，且$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

于是$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

2. (1) 因为 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，

所以 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$.

所以
$$\begin{aligned}(1+\tan A)(1+\tan B)&=1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B\\&=1+1-\tan A\tan B+\tan A\tan B\\&=2.\end{aligned}$$

(2) 因为 $(1+\tan A)(1+\tan B)=1+\tan A\tan B+\tan A+\tan B=2$，

所以 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$.

所以 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$.

因为 A，B 都是锐角，

所以 $0<A+B<\pi$.

所以 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$.

3. 由题可求 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{0.5+0.2}{1-0.5\times0.2}=\dfrac{7}{9}$，

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}=\frac{\dfrac{7}{9}+0.125}{1-\dfrac{7}{9}\times0.125}=1.$$

又因为 A，B，C 是锐角，且 $\tan A$，$\tan B$，$\tan C\in(0,\ 1)$，

所以 A，B，$C\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

所以 $0<A+B+C<\dfrac{3\pi}{4}$.

所以 $A+B+C=\dfrac{\pi}{4}$.

4. 因为 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，所以 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$.

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{9}$.

5. (1)
$$\begin{aligned}左边&=\frac{\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]}{\sin\alpha}-\frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\\&=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\\&=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=右边.\end{aligned}$$

(2) $左边=\sin x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)=\sin x\cdot\dfrac{\cos x+1-\cos x}{\cos x}=\tan x=右边$.

(3) 左边$=\dfrac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$右边.

6. 因为 $\tan 60^\circ=\tan(40^\circ+20^\circ)=\dfrac{\tan 40^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ}=\sqrt{3}$,

所以 $\tan 40^\circ+\tan 20^\circ=\sqrt{3}(1-\tan 40^\circ\tan 20^\circ)$.

所以 $\tan 40^\circ+\tan 20^\circ+\sqrt{3}\tan 40^\circ\tan 20^\circ=\sqrt{3}$.

7. 因为在$\triangle ABC$中, $A+B+C=\pi$, 所以 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$.

所以 $\tan A+\tan B=\tan(A+B)\cdot(1-\tan A\tan B)$,

所以 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan(A+B)\cdot(1-\tan A\tan B)+\tan C$

$=-\tan C+\tan A\tan B\tan C+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

8. (1) 因为 $y=1+\sin^2 x$

$=\dfrac{2+2\sin^2 x}{2}$

$=\dfrac{3+(2\sin^2 x-1)}{2}$

$=\dfrac{3-(1-2\sin^2 x)}{2}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$,

所以周期是 π, $y_{\max}=2$, $y_{\min}=1$.

(2) $y=2\sin x-3\cos x=\sqrt{13}\sin(x-\varphi)$,

其中 $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, $\sin\varphi=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

因此, 周期是 2π, $y_{\max}=\sqrt{13}$, $y_{\min}=-\sqrt{13}$.

(3) 因为 $y=\cos^2 x-\cos^4 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos^2 2x$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1+\cos 4x}{2}=-\dfrac{1}{8}\cos 4x+\dfrac{1}{8}$,

所以周期是 $\dfrac{\pi}{2}$, $y_{\max}=\dfrac{1}{4}$, $y_{\min}=0$.

(4) 因为 $y=\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\cos 2x$,

所以周期是 π, $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$.

9. (1) $\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ=\dfrac{1}{2}\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{1}{4}\sin 30^\circ=\dfrac{1}{8}$.

(2) 原式$=\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$

$$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ-\sin 50^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}\sin 50^\circ-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

(3) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

$$=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(4) $\frac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=\frac{\sin(15^\circ-8^\circ)+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$

$$=\frac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ-\cos 15^\circ\sin 8^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ+\sin 15^\circ\sin 8^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$$

$$=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\tan 15^\circ=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=2-\sqrt{3}.$$

10. $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$

$$=\frac{(\sin 20^\circ+\sin 40^\circ)+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}.$$

11. 因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

因为 $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，

所以 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$.

所以 $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan 2\beta}{1+\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{7}{24}$.

12. 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$.

所以 $\sin 2\theta-2\cos^2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$$=\frac{2\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\times\frac{1}{2}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=-\frac{4}{5}.$$

13. (1) $d=3\cos\theta+6\sin\theta$.

(2) $d=6\sin\theta+3\cos\theta=3\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$，

其中 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) 当 $\sin(\theta+\alpha)=1$，即 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$d_{\max}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，而 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\alpha=\arctan\frac{1}{2}$.

所以 $\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2}$.

IV 自测与评估（第 155 页）

1. 因为 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，α 为锐角，所以 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

又因为α，β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\ \pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}.$$

2. $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=0.4^2+1.2^2$，

即 $2+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=1.6$，

所以 $\cos(x-y)=-0.2$.

3. 因为 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

又因为 $\tan\beta=-\frac{1}{7}$，

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}=1$.

因为 $\tan\alpha=\frac{1}{3}<1=\tan\frac{\pi}{4}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

又因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以$-\pi<2\alpha-\beta<0$.

所以 $2\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

4. $\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$

$=\frac{1-\cos 40^\circ}{2}+\frac{1+\cos 160^\circ}{2}+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 160^\circ-\cos 40^\circ)+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$

$=1+\frac{1}{2}(-2\sin 100^\circ\sin 60^\circ)+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}(\sin 100^\circ-\sin 60^\circ)$

$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100^\circ-\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}$.

5. $I=I_1+I_2+I_3=22\sin \omega t+22\sin(\omega t-120^\circ)+22\sin(\omega t+120^\circ)$

$=22\sin \omega t+22[\sin(\omega t-120^\circ)+\sin(\omega t+120^\circ)]$

$=22\sin \omega t+22\times 2\sin \omega t\cos 120^\circ$

$=22\sin \omega t-22\sin \omega t=0$.

六、反馈与评价

I 知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列表达式中，正确的是（ ）.

(A) $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$ (B) $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (D) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

2. 函数 $y=\sin x+\cos x+2$ 的最小值是（ ）.

(A) $2-\sqrt{2}$ (B) $2+\sqrt{2}$ (C) 0 (D) 1

3. 表达式 $\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)$ 化简后为（ ）.

(A) $-\sqrt{2}\sin A$ (B) $\sqrt{2}\sin A$ (C) $\frac{1}{2}\sin A$ (D) $-\frac{1}{2}\sin A$

4. 已知 θ 是第三象限角，若 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$，那么 $\sin 2\theta$ 等于（ ）.

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$

5. 已知 α 是第三象限角，且 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 等于（ ）.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{3}{4}$

6. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值是（ ）.

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 若$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$，则化简$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}$等于__________.

8. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，那么 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值为________.

9. 函数 $y=\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的最大值是________.

10. $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$的值为__________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分）

11. （12 分）求$\frac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$的值.

12. （12 分）已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，$0<x<\frac{3\pi}{4}$，求$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$.

13. （12 分）已知函数 $f(x)=\frac{(1+\sin x+\cos x)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos x}}$.

（1）当 $180^\circ<x<360^\circ$时，化简函数 $f(x)$的表达式；

（2）写出函数 $f(x)$的一条对称轴.

14. （14 分）已知 α，$\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\alpha$，$\tan\beta$是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根.

（1）求 $\alpha+\beta$的值；

（2）求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

知识与方法测试题参考答案

一、选择题：

1. A.　2. A.　3. B.　4. A.　5. C.　6. D.

二、填空题：

7. $-\cos\frac{\alpha}{2}$.　8. $\frac{7}{23}$.　9. $\sqrt{3}$.　10. $\frac{1}{16}$.

三、解答题：

11. 原式$=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$$=\frac{2(\cos 30^\circ\cos 20^\circ+\sin 30^\circ\sin 20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$=\sqrt{3}$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，$0<x<\frac{3\pi}{4}$，

得$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{5}{13}$，

$\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{120}{169}$，

而$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，

所以$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{10}{13}$.

13. (1) $f(x)=\frac{\left(2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4\cos^2\frac{x}{2}}}$

$=\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$.

因为$180^\circ<x<360^\circ$，所以$90^\circ<\frac{x}{2}<180^\circ$. 所以$\cos\frac{x}{2}<0$.

所以$f(x)=\frac{-\cos\frac{x}{2}\cos x}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}=\frac{-\cos\frac{x}{2}\cos x}{-\cos\frac{x}{2}}=\cos x$.

(2) 函数$f(x)=\cos x$的一条对称轴是$x=0$（答案不唯一，满足$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）.

14. (1) 由根与系数的关系得$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=5\\ \tan\alpha\tan\beta=6\end{cases}$，所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1-6}=-1$. 又$\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$，$\alpha$，$\beta\in(0,\ \pi)$，所以$\alpha$，$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in(0,\ \pi)$.

所以$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

(2) 由 (1) 得$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ①

由$\tan\alpha\tan\beta=6$得$\sin\alpha\sin\beta=6\cos\alpha\cos\beta$. ②

由①②得

$$\begin{cases}\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{2}}{5}\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{10}\end{cases}$$

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

II 评价建议

1. 本章三角恒等变形，主要有三大类问题即：求值、化简和证明. 由于本章内容少，可在学完本章后进行一次总的章节测试，题目不宜太难，应放在公式运用的基本能力训练上，要重点突出考查和角公式和倍角公式，不要涉及复杂的三角恒等式的证明问题. 通过测试提高学生运用所学知识解决问题的能力. 测试后，除教师对学生进行评价外，还要组织学生进行自评和互评，以便及时发现问题并得到纠正.

2. 要充分利用本章中设计的探索与研究的问题，如：用向量证明和角公式，引导学生用向量研究和差化积公式以及引导学生使用正弦的和角公式找出求正弦函数值的算法等. 及时开展教学探究活动，组织学生进行独立探究或合作探究，并要求学生写出相应的小论文，教师要把学生的研究情况，做好记录，给予合理的评价，分清等次，存入学生的成长记录袋内，通过开展这些探究活动，以激发学生的自主探究、动手实践等积极性，发挥学生学习的主动性，使学生学习方式的改进得到落实.