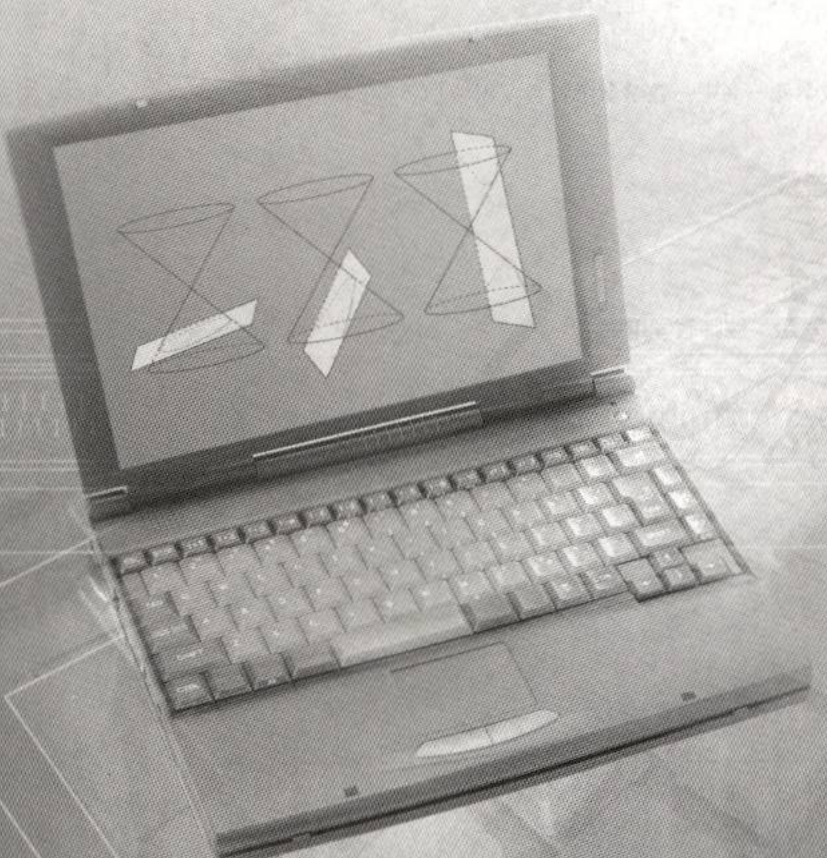
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-1

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：王申怀
主要编者：俞求是　郭玉峰　胡永建　陶维林　张劲松
　　　　　章建跃　王　嵘　田载今　李海东
责任编辑：张劲松
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 2—1（A 版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —3 版. —北京：人民教育出版社，2007.5(2019.7 重印)
ISBN 978-7-107-18984-5

Ⅰ. ①普…　Ⅱ. ①人… ②课…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 031613 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修　2-1　A 版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　人民教育出版社印刷厂
版　　次　2007 年 5 月第 3 版
印　　次　2019 年 7 月第 25 次印刷
开　　本　890 毫米 × 1 240 毫米　1/16
印　　张　7.75
字　　数　196 千字
定　　价　16.70 元

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、独立性检验思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

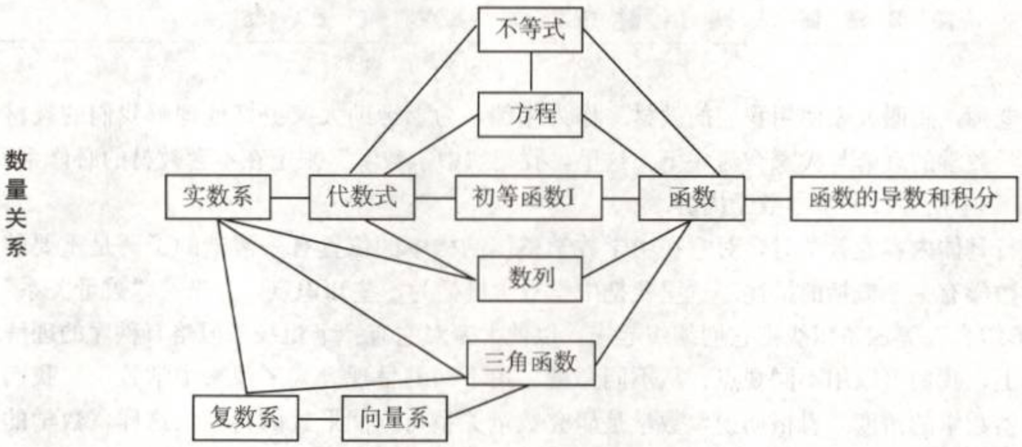
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对（x，y），而空间中向量的坐标是三实数组（x，y，z）. 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数（$a+b\mathrm{i}$）曾被推广到四元数（$a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$），而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段、位移、力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“＝”换成实数系所特有的“＞”（或“＜”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “＞”的性质比“＝”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数Ⅰ 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数、多项式函数、指数函数及其反函数即对数函数.

数列 数列及数列的运算. 在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列. 我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比. 不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型. 为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石. 三角函数是数形结合的产物.

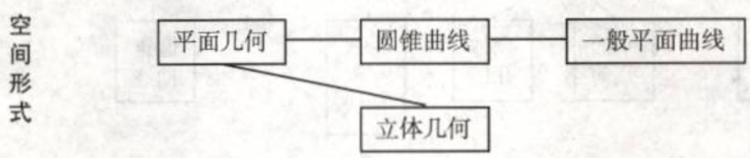
函数 函数及函数的运算（+、−、×）. 函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系. 它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点.

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物. 这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算.

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点、直线、直线的平行和垂直、三角形、圆等. 这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础.

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们. 这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础.

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系. 特别重要的是垂直和平行关系. 对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉.

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方. 想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的.

“数形结合”

用三角函数解三角形 参看**三角函数**．把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a，b，C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

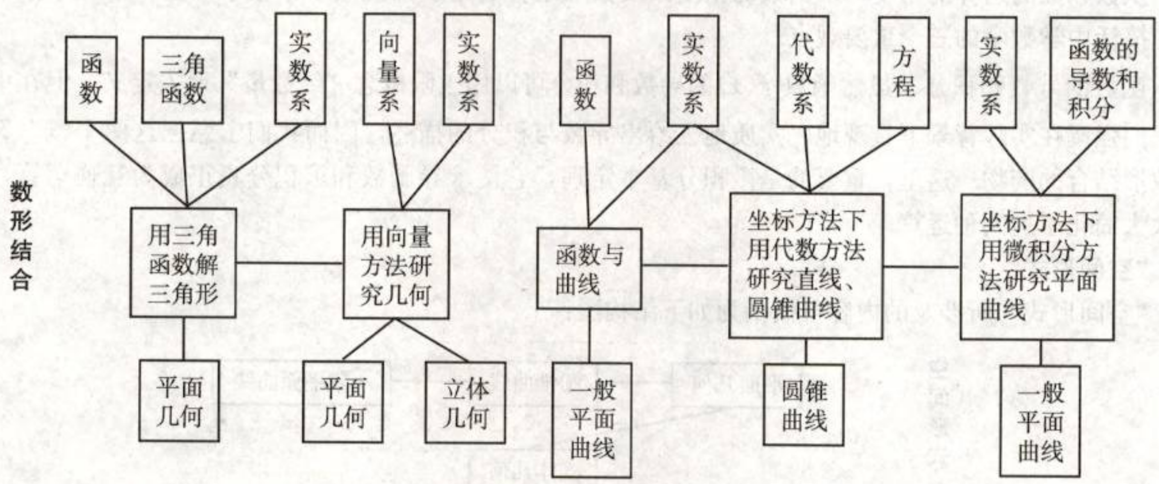
用向量来研究几何 用向量及其运算为工具．用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线、圆锥曲线 用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标）、代数式、方程表示出问题中关键的点、距离、直线、圆锥曲线；对这些数、代数式、方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具．用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法．它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了．

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵．让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感．

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点．参看**函数**．

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等．

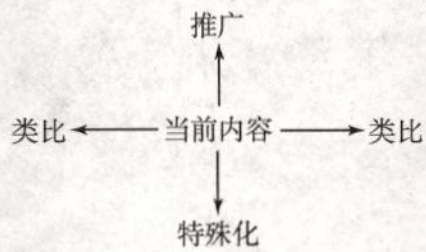
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形．直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等．一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了．

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质．这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积、代数式的恒等变换、三角函数的恒等变换、方程的同解变换、一组数据的各种不同形式的组合、整数（或一元多项式）的带余除法等等．

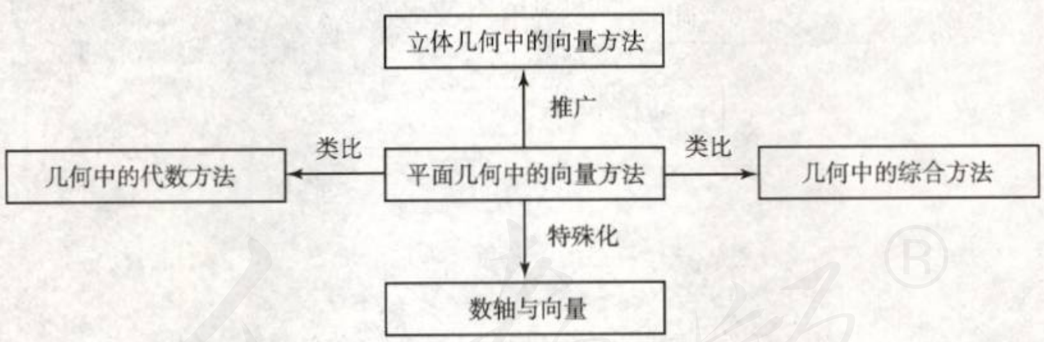
6. 相等的定义处处都有．我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的．例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的．

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据．在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理．这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体．如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等．

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示．例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考．例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题．

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性等**，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3．“科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. “时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识.

5. “联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序，以节为单位进行分析，着重说明编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写意图与教学建议、教学设计案例、习题解答等.

(1) 本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系). 说明学

习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

(3) 难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(4) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

(5) 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

(Ⅰ) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(Ⅱ) 教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(Ⅲ) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(Ⅳ) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

(6) 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题在巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等方面的功能.

3. 自我检测题提供了每章的自我检测题目，目的是检测学生掌握每章知识内容的情况. 教学时，教师可直接使用.

4. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网上下载.

本书是数学选修课程 2-1 的教师教学用书，包含常用逻辑用语、圆锥曲线与方

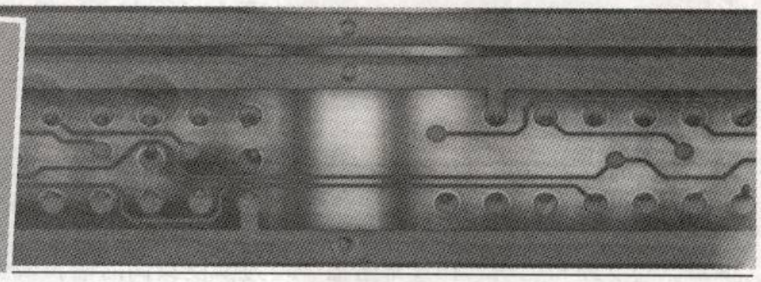
程、空间向量与立体几何等三章内容. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一章 常用逻辑用语	约 8 课时
第二章 圆锥曲线与方程	约 16 课时
第三章 空间向量与立体几何	约 12 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

第一章 常用逻辑用语



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质．无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维．在本章中，学生将在义务教育阶段的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，从而更好地进行交流．

2. 学习目标

（1）命题及其关系

①了解命题的逆命题、否命题与逆否命题，会分析四种命题的相互关系．

②理解必要条件、充分条件与充要条件的意义．

（2）简单的逻辑联结词

通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义．

（3）全称量词与存在量词

①通过生活和数学中的实例，理解全称量词与存在量词的意义．

②能正确地对含有一个量词的命题进行否定．

二、内容安排

1. 本章知识结构框图

- 常用逻辑用语
  - 命题及其关系
  - 充分条件与必要条件
  - 简单的逻辑联结词
  - 全称量词和存在量词

2. 对内容安排的说明

本章共分 4 节：1.1 命题及其关系，1.2 充分条件与必要条件，1.3 简单的逻辑联结词，1.4 全称量词与存在量词.

逻辑是研究思维规律的学科，本章中要学习的是数学中常用的逻辑用语. 逻辑用语在数学中具有重要的作用. 学习数学需要准确全面地理解概念，正确地进行表述、判断和推理，这些都离不开对逻辑知识的掌握和运用. 在日常生活中，为了使我们的语言表达和信息的传递更加准确、清楚，常常要用一些逻辑用语、基本的逻辑知识. 常用逻辑用语是认识问题、研究问题不可缺少的工具.

教科书在章引言中简要阐述了学习常用逻辑用语的意义. 接着，在各节中介绍了命题、真命题、假命题、命题的条件和结论等基本概念，以及原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念，归纳了四种命题之间的关系，借助互为逆否的命题具有相同的真假性，判断命题的真假. 教科书还简明扼要地介绍了充分条件、必要条件和充要条件. 对于简单的逻辑联结词“且”“或”“非”，规定了判断由它们联结得到的新命题真假的法则，最后，简要介绍全称量词、存在量词以及含有一个量词的命题的否定.

三、课时安排

本章约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

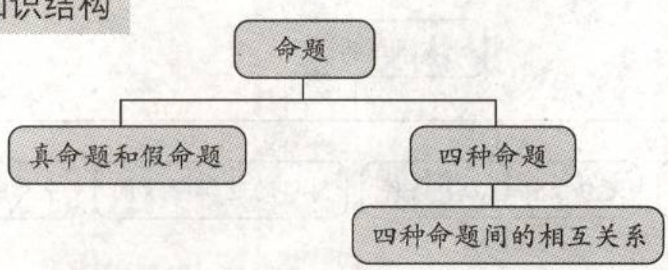
1.1 命题及其关系	约 2 课时
1.2 充分条件与必要条件	约 2 课时
1.3 简单的逻辑联结词	约 2 课时
1.4 全称量词与存在量词	约 2 课时

II 教科书分析

章引言简要地介绍了学习常用逻辑用语的意义. 一方面，逻辑用语被广泛用于日常生活，是语言表达的工具、信息交流的工具；另一方面，常用逻辑用语是数学语言的组成部分，是描述、判断、推理的工具，学习数学离不开常用逻辑用语.

1.1 命题及其关系

一、本节知识结构



二、教学重点和难点

重点：了解命题的逆命题、否命题、逆否命题，难点：分析四种命题间的相互关系以及四种命题真假性之间的关系.

三、编写意图与教学建议

本节约需要 2 课时.

命题、四种命题及其相互关系是逻辑学的基础知识，数学学科包含了大量的命题. 了解命题的基础知识，认识命题的相互关系，对于掌握具体的数学学科知识很有帮助.

1.1.1 命题

1. 关于命题

本节首先引入命题以及真命题、假命题的概念，要求学生能够判断语句是不是命题. 本节涉及比较多的命题具有“若 p，则 q”的形式，某些命题则可以改写成为这种形式. 这样，命题的条件和结论就很清楚了，其中 p 是命题的条件，q 是命题的结论. “若 p，则 q”形式的命题，也经常写成“如果 p，那么 q”的形式.

命题陈述了我们所思考的对象具有某种属性，或者不具有某种属性. 它总是肯定什么，或者否定什么. 教科书规定“可以判断真假的陈述句叫做命题.”，使我们对于一个语句是否命题的判断更加简单. 根据这样的规定，如果一个语句不是陈述句（比如是疑问句、祈使句、感叹句等），那么这个语句就一定不是命题. 命题是否正确，要看它是否与客观事实相符合，也就是要用实践来检验. 因而，命题可分为真命题和假命题. 在一个命题系统中，一个命题的真实性已经为人类实践所证实而被认为不需要证明，并作为证明其他命题的依据，这样的真命题就是公理. 如果命题的真实性是根据公理或其他已知的真命题经过符合逻辑的推理证明出来的，这样的真命题就是定理.

例 1 的目的是引导学生学习判断一个语句是否为命题，以及判断一个命题真假的方法.

2. 关于命题的形式

数学中的命题大都可以表示成以下形式：如果某个对象具有某种性质 p，那么这个对象也具有性质 q；或者，更简单些：若 p，则 q. 这里，p 是命题的条件，q 是命题的结论.

有些命题的叙述，如“对顶角相等.”，其中条件、结论并不那么分明，但我们可以把它改写成上述形式：“若两个角是对顶角，则这两个角相等.”本章的讨论中，要求学生能够分清命题的条件和结论是什么. 教科书中也出现类似这样的命题，实际上是一些命题简缩的写法.

例 2 和例 3 的目的是对于命题中的条件与结论作判断，以及改写命题的形式.

1.1.2 四种命题

本节依次介绍了四种命题：原命题、逆命题、否命题和逆否命题.

命题“若 p，则 q”反映了条件 p 对于 q 的因果关系. 为了更深入地掌握 p 与 q 之间的关系，往往不仅研究原命题“若 p，则 q”，而且还要研究它的各种形变.

(1) 把“若 p，则 q”的条件和结论换位，即“若 q，则 p”，考察 q 对于 p 的因果关系，称这个命题为原命题的逆命题.

(2) 把“若 p，则 q”的条件和结论分别否定，即“若 $\neg p$，则 $\neg q$”，考察 $\neg p$ 对于 $\neg q$ 的因果关系，称这个由命题的条件、结论同时换质得到的命题为原命题的否命题.

(3) 把“若 p，则 q”的条件和结论换位后再分别否定，或分别换质后再换位，得到“若 $\neg q$，则 $\neg p$”，考察 $\neg q$ 对于 $\neg p$ 的因果关系，称命题“若 $\neg q$，则 $\neg p$”为原命题的逆否命题.

要注意的是，对于一个一般的数学命题，由于命题的条件和结论可能未清楚地给出，给出其逆命题就是一个容易混淆的问题. 在此，只要求考虑明确地给出条件和结论的命题.

以下的例题可以供教学时参考.

例 写出以下命题的逆命题、否命题和逆否命题：

(1) 如果直线垂直于平面内的两条相交直线，那么这条直线垂直于平面；

(2) 如果 $x>10$，那么 $x>0$.

解：(1) 逆命题：如果直线垂直于平面，那么直线垂直于平面内的两条相交直线；

否命题：如果直线不垂直于平面内的两条相交直线，那么直线不垂直于平面；

逆否命题：如果直线不垂直于平面，那么直线不垂直于平面内的两条相交直线.

(2) 逆命题：如果 $x>0$，那么 $x>10$；

否命题：如果 $x\leqslant 10$，那么 $x\leqslant 0$；

逆否命题：如果 $x\leqslant 0$，那么 $x\leqslant 10$.

1.1.3 四种命题间的相互关系

本段内容介绍四种命题间的相互关系，互为逆否的命题具有相同的真假性.

由于“逆”“否”“逆否”等关系是对称的，所以有教科书中图 1.1-1 所示的四种命题的关系图.

原命题与逆否命题具有相同的真假性，需要学生对于一些具体命题的讨论后归纳得到. 以下的命题可供参考：

如果一个数列中各项都相等，那么这个数列是等差数列. 它是一个真命题.

此命题的逆命题是：如果一个数列是等差数列，那么这个数列中各项都相等. 它是一个假命题.

此命题的否命题是：如果一个数列中各项不都相等，那么这个数列不是等差数列. 它是一个假命题.

此命题的逆否命题是：如果一个数列不是等差数列，那么这个数列中各项不都相等. 它是一个真命题.

关于命题之间的等价性的证明有不同的方法，这里借助真值表加以说明. 对于四种命题有如下真值表：

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to\neg q$	$\neg q\to\neg p$
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见

$$p\to q\equiv\neg q\to\neg p,$$
$$q\to p\equiv\neg p\to\neg q.$$

即原命题与逆否命题逻辑等价，逆命题与否命题逻辑等价. 不过教学中不要求借助真值表表述互为逆否命题的两个命题之间的等价性.

由于原命题和它的逆否命题等价，具有相同的真假性，因此在直接证明原命题有困难时，可以考

虑证明与它等价的逆否命题，这种方法是间接证明命题的方法，是反证法的一种．教科书的例 4 就是这种证法的一个例子．

四、教学设计案例

1.1 命题及其关系

1. 教学任务分析

使学生了解命题的概念，了解命题的逆命题、否命题与逆否命题．会分析四种命题间的相互关系．

命题、四种命题及其相互关系是逻辑学的基本知识．数学学科包含了大量的命题，了解命题的基础知识，认识命题的相互关系，对于掌握具体的数学学科知识很有帮助．

2. 教学重点

命题的概念和四种命题间的相互关系．

3. 教学基本流程

(1) 全章内容的引入：为什么要学习常用逻辑用语，本章基本内容的概述．

(2) 命题概念的教学，“若 p，则 q” 形式命题的条件与结论．第 4 页练习．

(3) 四种命题间的相互关系的教学．

4. 教学情境设计

问题 1：我们在初中已经学过许多数学命题，什么叫做命题？你能举出一些数学命题的例子吗？

设计意图：命题是一个基本而常用的概念，学生应该了解这个概念．可以通过一些数学命题的例子加深对命题概念的理解，并为引入“若 p，则 q” 形式的数学命题，以及这种形式的数学命题的条件和结论作准备．

师生活动：举例说明数学命题，分析命题的概念．

问题 2：分析第 4 页中的“思考”，你还能写出具有类似的条件和结论关系的四个命题吗？

设计意图：教科书第 4 页中的“思考”给出了典型的具有互逆、互否、互为逆否关系的四个命题，学生通过观察，对于四种命题有一个初步的认识，有利于后续内容的教学．

师生活动：给出具有四种命题关系的命题．

问题 3：对于某一个命题，写出它的逆命题、否命题、逆否命题．它们之间有什么关系呢？它们的真假性之间有什么关系呢？它们的真假性之间有什么必然联系吗？

设计意图：原命题、逆命题、否命题与逆否命题两两之间的关系并不显然，而对于互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性的结论，在教学中需要通过归纳，并作出初步的解释说明，应该通过具体的命题让学生学习和体会这些知识．

师生活动：学生构造四种命题的具体例子，分析归纳得到四种命题的关系，以及真假性的联系．

五、习题解答

练习（第 4 页）

1. 略．

2. (1) 真；(2) 假；(3) 真；(4) 真.

3. (1) 若三角形是等腰三角形，则这个三角形两边上的中线相等. 这是真命题.

(2) 若函数是偶函数，则这个函数的图象关于 y 轴对称. 这是真命题.

(3) 若两个平面垂直于同一个平面，则这两个平面平行. 这是假命题.

练习（第6页）

1. 逆命题：若一个整数能被5整除，则这个整数的末位数字是0. 这是假命题.

否命题：若一个整数的末位数字不是0，则这个整数不能能被5整除. 这是假命题.

逆否命题：若一个整数不能被5整除，则这个整数的末位数字不是0. 这是真命题.

2. 逆命题：若一个三角形有两个角相等，则这个三角形有两条边相等. 这是真命题.

否命题：若一个三角形有两条边不相等，则这个三角形有两个角也不相等. 这是真命题.

逆否命题：若一个三角形有两个角不相等，则这个三角形有两条边也不相等. 这是真命题.

3. 逆命题：图象关于原点对称的函数是奇函数. 这是真命题.

否命题：不是奇函数的函数的图象不关于原点对称. 这是真命题.

逆否命题：图象不关于原点对称的函数不是奇函数. 这是真命题.

练习（第8页）

证明：若 $a-b=1$，则

$$\begin{aligned}&a^2-b^2+2a-4b-3\\=&(a+b)(a-b)+2(a-b)-2b-3\\=&a-b-1\\=&0.\end{aligned}$$

所以，原命题的逆否命题是真命题，从而原命题也是真命题.

习题1.1 A组

1. (1) 是；(2) 是；(3) 不是；(4) 不是.

2. (1) 逆命题：若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 是偶数，则 a，b 都是偶数. 这是假命题.

否命题：若两个整数 a，b 不都是偶数，则 $a+b$ 不是偶数. 这是假命题.

逆否命题：若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 不是偶数，则 a，b 不都是偶数. 这是真命题.

(2) 逆命题：若方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$. 这是假命题.

否命题：若 $m\leqslant 0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根. 这是假命题.

逆否命题：若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 $m\leqslant 0$. 这是真命题.

3. (1) 命题可以改写成：若一个点在线段的垂直平分线上，则这个点到线段的两个端点的距离相等.

逆命题：若一个点到线段的两个端点的距离相等，则这个点在线段的垂直平分线上.
这是真命题.

否命题：若一个点不在线段的垂直平分线上，则这个点到线段的两个端点的距离不相等.
这是真命题.

逆否命题：若一个点到线段的两个端点的距离不相等，则这个点不在线段的垂直平分线上.
这是真命题.

(2) 命题可以改写成：若一个四边形是矩形，则四边形的对角线相等.

逆命题：若四边形的对角线相等，则这个四边形是矩形. 这是假命题.

否命题：若一个四边形不是矩形，则四边形的对角线不相等. 这是假命题.

逆否命题：若四边形的对角线不相等，则这个四边形不是矩形. 这是真命题.

4. 证明：如果一个三角形的两边所对的角相等，根据等腰三角形的判定定理，这个三角形是等腰三角

形，且这两条边是等腰三角形的两条腰，也就是说这两条边相等．这就证明了原命题的逆否命题，表明原命题的逆否命题为真命题．所以，原命题也是真命题．

B组

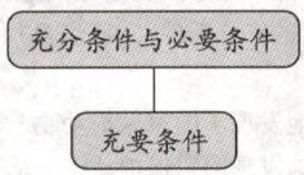
证明：要证的命题可以改写成的“若 p，则 q”的形式：若圆的两条弦不是直径，则它们不能互相平分．此命题的逆否命题是：若圆的两条相交弦互相平分，则这两条相交弦是圆的两条直径．

可以先证明此逆否命题：设 AB，CD 是$\odot O$ 的两条互相平分的相交弦，交点是 E，若 E 和圆心 O 重合，则 AB，CD 是经过圆心 O 的弦，AB，CD 是两条直径．若 E 和 O 不重合，连接 AO，BO，CO 和 DO，则 OE 是等腰$\triangle AOB$，$\triangle COD$ 的底边上中线，所以，$OE\perp AB$，$OE\perp CD$．AB 和 CD 都经过点 E，且与 OE 垂直，这是不可能的．所以，E 和 O 必然重合．即 AB 和 CD 是圆的两条直径．

原命题的逆否命题得证，由互为逆否命题的相同真假性，知原命题是真命题．

1.2　充分条件与必要条件

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：充分条件与必要条件，难点：必要条件概念的理解．

三、编写意图与教学建议

本节约需 2 课时，建议充分条件与必要条件用 1 课时，充要条件用 1 课时．

充分条件、必要条件和充要条件是基本的数学用语，数学学科中大量的命题用它们来叙述．

1.2.1　充分条件与必要条件

教科书结合“若 p，则 q”形式的命题给出了充分条件与必要条件的概念，并引入推断符号“$\Rightarrow$”．通过教学，要使学生理解必要条件、充分条件的意义．

学生对于充分条件和必要条件的理解，需要经过一定时间的体会．为了帮助学生理解概念，教学中可以适当举一些数学命题的例子，结合具体的数学命题来学习．数学上的充分条件和必要条件的概念，与日常生活中的“充分”“必要”的意义相近，教学中可以适当地借助日常生活中“充分条件”“必要条件”的例子，帮助学生理解充分条件和必要条件．

下面的例子供教学中选用：

(1) 如果函数是一次函数 $y=x$，那么它是增函数．所以，“函数是一次函数 $y=x$”是“函数是增

函数”的充分条件，“函数是增函数”是“函数是一次函数 $y=x$”的必要条件.

(2) 如果曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$，那么曲线 C 是一个圆. 所以，“曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$”是“曲线 C 是一个圆”的充分条件，“曲线 C 是一个圆”是“曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$”的必要条件.

(3) 如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n$，那么数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 所以，“数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n$”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的充分条件，“数列 $\{a_n\}$ 是等差数列”是“数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n$”的必要条件.

(4) 如果几何体是球，那么几何体的主视图是圆. 所以，“几何体是球”是“几何体的主视图是圆”的充分条件，“几何体的主视图是圆”是“几何体是球”的必要条件.

(5) 如果 $x=y$，那么 $x^2=y^2$. 所以，“$x=y$”是“$x^2=y^2$”的充分条件，“$x^2=y^2$”是“$x=y$”的必要条件.

(6) 如果两个三角形全等，那么这两个三角形的面积相等. 所以，“两个三角形全等”是“这两个三角形的面积相等”的充分条件，“两个三角形面积相等”是“这两个三角形全等”的必要条件.

(7) 当集合 $A\subseteq B$ 时，如果 $x\in A$，那么 $x\in B$. 所以，“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要条件；

(8) 若 $x>1$，则 $x^2>1$. 所以，“$x>1$”是“$x^2>1$”的充分条件，“$x^2>1$”是“$x>1$”的必要条件.

(9) 如果今天某同学已经踢足球，那么他今天已经参加过球类活动. 所以“今天某同学已经踢足球”是“他今天已经参加过球类活动”的充分条件，“已经参加过球类活动”是“他今天已经踢足球”的必要条件.

(10) 如果某地发现了老虎，则某地发现了国家保护动物. 所以，“某地发现了老虎”是“某地发现了国家保护动物”的充分条件，“某地发现国家保护动物”是“某地发现老虎”的必要条件.

充分条件、必要条件与命题的四种形式有密切关系. 如果原命题成立，但它的逆命题不成立，那么原命题的条件对于结论的成立是充分的但不必要；如果原命题不成立，而逆命题成立，那么原命题的条件对于结论的成立是必要的但不充分；如果原命题成立，它的逆命题也成立，那么原命题的条件对其结论是既充分又必要的. 当然，在教学中没有必要对学生提以上的学习要求.

必要条件的理解是学生学习中的一个难点，通常可以借助原命题与逆否命题的等价性，帮助理解必要条件. 若原命题是“$p\Rightarrow q$”，则它的逆否命题是“$\neg q\Rightarrow\neg p$”，这意味着 q 成立对于 p 成立是必要的. 教科书在边框中引入与不等式有关的例子，帮助学生从原命题与逆否命题的等价性角度理解必要条件. 具体教学中建议作以下分析：

命题

$$\text{“如果 } x>a^2+b^2\text{，那么 } x>2ab\text{”}$$

是真命题（因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，利用不等式的传递性可以得到以上的结论）. 根据四种命题之间的关系，它的逆否命题

$$\text{“如果 } x>2ab \text{ 不成立，那么 } x>a^2+b^2 \text{ 不成立”}$$

也是真命题. 也就是说，要使 $x>a^2+b^2$ 成立，必须使 $x>2ab$ 成立. 所以，我们说“$x>2ab$”是“$x>a^2+b^2$”的必要条件.

一般地，如果从 p 可以推出 q，即 $p\Rightarrow q$，根据四种命题之间的关系，命题

$$\text{“}p\Rightarrow q\text{”}$$

的逆否命题也是真命题. 这就是说，如果 q 不成立，那么 p 也不成立. 如果 p 成立，那么 q 必须成立. 所以，我们说，q 是 p 的必要条件.

例 1、例 2 意在通过具体的例子理解充分条件与必要条件.

1.2.2 充要条件

学生学习完充分条件和必要条件之后安排充要条件的内容，是顺理成章的. 要让学生掌握，若 p 是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，则 p 是 q 的充要条件，同时 q 也是 p 的充要条件.

对于充要条件的学习，也应该通过讨论一些数学命题逐步体会，通过实际例子来学习和理解. 以下的例题供教学时参考：

(1) 如果 $b=0$，那么函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数；如果函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数，那么 $b=0$. 所以，"$b=0$" 是 "函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数" 的充分必要条件. 也可以说，"函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数" 的充分必要条件是 "$b=0$".

(2) 如果三角形的两个角相等，那么三角形是等腰三角形；如果三角形是等腰三角形，那么三角形的两个角相等. 所以，"三角形的两个角相等" 是 "三角形是等腰三角形" 的充分必要条件.

在数学中，形如 "p 是 q 的充要条件" 的命题是相当普遍的，教科书安排的例 4 就是这种类型的例题. 要证明命题的条件是充要条件，就是既要证明原命题，又要证明命题的逆命题. 证明原命题即证明命题条件的充分性，证明原命题的逆命题，即证明命题条件的必要性. 当然，也可以证明与原命题和逆命题等价的逆否命题和否命题.

通过本节教学，应让学生了解形如 "若 p，则 q" 的命题中，存在以下四种关系：

(1) p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件.

例如，p：曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=r^2$，q：曲线 C 是半径为 r 的圆. p 是 q 的充分不必要条件.

(2) p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件.

例如，p：$(x-1)(x-2)=0$，q：$x=1$. p 是 q 的必要不充分条件.

(3) p 是 q 的充分必要条件.

例如，p：直线 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 与直线 l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交，q：方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 有唯一解. p 是 q 的充分条件.

(4) p 是 q 的既非充分又非必要的条件.

例如，p：$y=ax^3+bx+c$ 是奇函数，q：$a=0$. p 既非 q 的充分条件也非 q 的必要条件.

四、教学设计案例

1.2 充分条件和必要条件（2 课时）

1. 教学任务分析

通过本节教学，应使学生理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

充分条件、必要条件和充要条件是常用的逻辑用语，在数学中有广泛应用，对于学生理解数学有很大的帮助. 在此引入概念，对于这几个概念的准确理解需要一定时间的体会和思考，对于这些概念的运用和掌握有赖于后续的学习，教学中不要急于求成，而应在后续的教学中经常借助这些概念表达、阐述和分析.

2. 教学重点和难点

重点：充分条件、必要条件、充要条件的概念，难点：必要条件的概念.

3. 教学基本流程

第 1 课时 充分条件和必要条件

(1) 引入课题.

(2) 充分条件和必要条件概念的引入和教学.

(3) 例 1、例 2 的教学.

(4) 练习.

第 2 课时 充要条件

(1) 充要条件的概念.

(2) 例 3、例 4 的教学.

(3) 讨论“若 p，则 q”形式的命题条件与结论的关系，得到四种可能的情况.

4. 教学情境设计

第 1 课时 充分条件与必要条件

问题 1：前面我们讨论了“若 p，则 q”形式的命题，其中有的命题是真命题，有的命题是假命题，你能分别举出一些这样的命题的例子吗？

设计意图：对于充要条件和必要条件概念的学习涉及命题的真假，通过具体的命题，有助于学生对于这两个概念的理解.

师生活动：分析具体命题“若 p，则 q”中 p 对于 q 是否“充分”，q 对于 p 是否“必要”，引入充分条件和必要条件的概念. 也可以引入一些生活中或其他学科中的“若 p，则 q”形式命题帮助学生理解充分条件和必要条件概念.

问题 2：第 1.1 节讨论了四种命题，对于“若 p，则 q”形式的命题，能否分析一下原命题、逆命题真假的不同情形下，命题的条件 p 分别是命题结论 q 的什么条件吗？

设计意图：以上问题的讨论，沟通了充分条件、必要条件与四种命题之间的关系，可帮助学生进一步理解充分条件和必要条件，也为以后的充要条件的学习作准备.

师生活动：学生举出几种不同情况下的命题，总结归纳，得到不同情况下的结论. 讨论中应该特别注意：如果“若 p，则 q”形式的命题是真命题，则它的逆否命题也是真命题. 这意味着，若 q 不成立，则 p 也不成立，从而 q 对于 p 的成立是必要的. 可以用一些简明的实例加以说明：若 $x>3$，则 $x>2$. 从而若 $x>2$ 不成立，则 $x>3$ 也不成立. 因此 $x>2$ 是 $x>3$ 的必要条件.

第 2 课时 充要条件

问题 1：举出原命题和逆命题都是真命题的形如“若 p，则 q”形式的命题的例子.

设计意图：充要条件的概念与原命题和逆命题都是真命题，且具有以上形式的命题是分不开的，充要条件的概念应该结合具体的命题来引入，并加深理解.

师生活动：分析命题中 p，q 之间充分性和必要性的关系，引入充要条件的概念.

问题 2：例 4 中要求证明 $d=r$ 是直线 l 与⊙O 相切的充要条件，怎么理解这个要求？

设计意图：在数学中，形如“p 是 q 的充要条件”的命题是相当普遍的. 教科书安排的例 4 就是这种类型的例题. 要证明命题的条件是充要条件，就既要证明原命题，又要证明原命题的逆命题. 证明原命题即证明命题条件的充分性，证明原命题的逆命题，即证明命题条件的必要性. 首先要让学生弄

清命题的要求是什么.

师生活动：分析例题的要求，得到例题的解答.

问题3：在“若 p，则 q”形式的命题中，有的 p 是 q 的充分条件，有的是必要条件，有的既是充分条件，又是必要条件，能否对于存在的各种情况作分类？对于存在的各种情况能否举例说明？

设计意图：通过以上这些问题的讨论，可以让学生进一步加深对于充分条件、必要条件、充要条件的理解.

师生活动：讨论数学命题的分类，分析总结得到四种情况：

(1) p 是 q 的充分但不必要条件；

(2) p 是 q 的必要但不充分条件；

(3) p 是 q 的充分必要条件；

(4) p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

五、习题解答

练习（第10页）

1. (1) $\not\Rightarrow$；(2) $\Rightarrow$；(3) $\Rightarrow$；(4) $\not\Rightarrow$.
2. (1).
3. (1).
4. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真.

练习（第12页）

1. (1) 原命题和它的逆命题都是真命题，p 是 q 的充要条件；
   (2) 原命题和它的逆命题都是真命题，p 是 q 的充要条件；
   (3) 原命题是假命题，逆命题是真命题，p 是 q 的必要条件.
2. (1) p 是 q 的必要条件；
   (2) p 是 q 的充分条件；
   (3) p 是 q 的充要条件；
   (4) p 是 q 的充要条件.

习题1.2　A组

1. 略.
2. (1) 假；(2) 真；(3) 真.
3. (1) 充分条件，或充分不必要条件；　(2) 充要条件；(3) 既不是充分条件，也不是必要条件；
   (4) 充分条件，或充分不必要条件.
4. 充要条件是 $a^2+b^2=r^2$.

B组

1. (1) 充分条件；(2) 必要条件；(3) 充要条件.
2. 证明：(1) 充分性：如果 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，那么

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0,$$

所以，

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0,$$

所以，

$$a-b=0,\ a-c=0,\ b-c=0.$$

即

$$a=b=c,$$

所以，$\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) 必要性：如果$\triangle ABC$ 是等边三角形，那么

$$a=b=c,$$

所以，

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0,$$

所以，

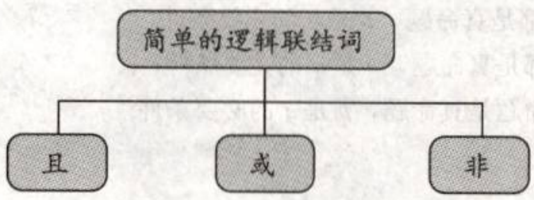
$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0,$$

所以

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc.$$

1.3 简单的逻辑联结词

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

教学重点：通过数学实例，了解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义，使学生能正确地表述相关数学内容.

教科书中用逻辑联结词“且”“或”“非”联结得到的新命题“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”的真假性是直接规定的，如何让学生理解和接受这些规定是教学中的一个难点. 如何使学生简洁、准确地表述新命题“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”是教学中的另一个难点.

三、编写意图与教学建议

教科书对逻辑联结词“且”“或”“非”的含义和用法的介绍，都是通过学生熟悉的数学实例讲授的. 这是因为《普通高中数学课程标准（实验）》中对“且”“或”“非”的含义，只要求通过数学实例加以了解. 这样做能给学生提供更多的机会从实际问题中学习“且”“或”“非”的用法，体会运用逻辑用语表述数学内容的准确性和简洁性，避免学生对这三个常用逻辑联结词的含义和用法的机械记忆和抽象解释.

1.3.1 且

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第 14 页的“思考”. 其中选取的三个数学命题是学生非常熟悉的，命题(3)与命题(1)(2)之间的关系也容易观察，目的是引出逻辑联结词“且”，让学生较轻松地感受到用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题. 同时，激发学生学习和研究新命题的兴趣.

为了加深学生对用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，教师可引导学生列举数学中其他方面的例子. 例如，引导学生回顾平面几何中菱形的对角线的性质，有如下两个命题：

p：菱形的对角线互相垂直；

q：菱形的对角线互相平分.

上面的两条性质可简单地表述为下面的命题：

r：菱形的对角线互相垂直且平分.

在学生对用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识后，我们引出新命题的记号“$p\wedge q$”和读法，进而提出问题让学生思考：命题 $p\wedge q$ 的真假如何判断呢？命题 $p\wedge q$ 的真假与命题 p 和 q 的真假之间有什么关系？

2. 通过实例，归纳出命题 $p\wedge q$ 的真假的一般规律

教科书中关于命题 $p\wedge q$ 的真假是直接规定的，并且在旁白中指出可以从串联电路去理解命题$p\wedge q$ 真假的规定. 这样处理的好处是简洁、清晰. 具体教学时，教师可根据学生的实际情况，灵活选择教学方法.

例如，教学时教师可以引导学生对大量的实例进行分析，从中概括出判断命题 $p\wedge q$ 真假的一般规律. 实例应包含命题 p，q 真假性的所有可能情况（共四种），并且根据每个命题表达的内容，学生容易确定真假性. 这些实例可在教师的引导下由学生自主给出. 如下面的三个例子：

例 1　命题 p：函数 $y=x^3$ 是奇函数；命题 q：函数 $y=x^3$ 是减函数；命题 $p\wedge q$：函数 $y=x^3$ 是奇函数且是减函数.

例 2　命题 p：三角形三条中线相等；命题 q：三角形三条中线交于一点；命题 $p\wedge q$：三角形三条中线相等且交于一点.

例 3　命题 p：相似三角形的面积相等；命题 q：相似三角形的周长相等；命题 $p\wedge q$：相似三角形的面积相等且周长相等.

教师引导学生分析思考题和上面三个例子中每个命题的真假性，从中观察命题 $p\wedge q$ 的真假和命题 p，q 的真假之间有什么关系.

需要指出的是，此时命题 $p\wedge q$ 的真假性是根据其表达的内容是否符合客观实际来确定的. 如果内容符合客观实际，它就是真命题，否则它是假命题. 例如，“思考”中命题(3)，“12 能被 3 整除且能被 4 整除”是符合客观实际的，所以它是真命题. 当然，这里命题 p 和 q 都是真命题.

通过分析，学生不难发现，上面的

例 1 中命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，命题 $p\wedge q$ 是假命题；

例 2 中命题 p 是假命题，命题 q 是真命题，命题 $p\wedge q$ 是假命题；

例 3 中命题 p，q 和命题 $p\wedge q$ 都是假命题.

如果需要，可再分析一些数学中学生熟悉的例子，然后引导学生整理、归纳上面通过分析得到的结论，得到命题 $p\wedge q$ 的真假与命题 p，q 真假性之间的关系的一般规律：

当命题 p，q 之一为假命题时，命题 $p\wedge q$ 是假命题；当命题 p，q 都为真命题时，命题 $p\wedge q$ 是真

命题.

命题 $p\wedge q$ 的真假还可以用下表表示：

表1

命题 p	命题 q	命题 $p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

我们把这种表示命题的真假的表叫做真值表. 真值表中也常用“1”表示真命题，“0”表示假命题. 两种表述方式是一致的. 需要指出的是，《普通高中数学课程标准（实验）》中不要求使用真值表.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例1是介绍如何用“且”联结两个命题得到新命题，并判断新命题的真假. 通过这个例子达到下面的目的：

(1) 使学生会用“且”联结两个命题 p 与 q，并会用语言简洁、准确地表述新命题 $p\wedge q$.

例如，对教科书上例1(2)中的命题 p 与 q，学生开始学习时，容易受命题 $p\wedge q$ 的读法“p 且 q”的影响，将命题 $p\wedge q$ 表述为“菱形的对角线互相垂直且菱形的对角线互相平分”，非常冗长. 教学时，教师需要引导学生将其简洁地表述为“菱形的对角线互相垂直且平分”.

(2) 使学生体会用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性.

例如，上面用逻辑联结词“且”将菱形对角线的两个重要特征（命题 p 与命题 q）用一句话（命题 $p\wedge q$）准确、简洁地表达出来了. 数学中还有许多这样的例子.

(3) 使学生会根据“且”的含义，判断命题 $p\wedge q$ 的真假.

根据“且”的含义，确定命题 $p\wedge q$ 的真假是本小节的教学重点之一. 利用表1，通过判断命题 p 与 q 的真假，判断形式较复杂的命题 $p\wedge q$ 的真假. 这样一来，把判断一个较复杂命题的真假归结为判断两个简单命题的真假.

教科书上例2介绍如何用“且”改写一些数学命题，并判断真假. 通过这个例子是让学生认识到，数学中有些命题可以改写成命题 $p\wedge q$ 的形式，从而原命题的真假性可以通过命题 p 与 q 的真假性来判断.

需要指出的是，在能用“且”改写成 $p\wedge q$ 形式的数学命题中，通常有“……和……”“……与……”“既……，又……”等词语.

教科书第18页练习的第1题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，让学生在课堂上完成. 习题1.3A组第1题中的(2)(4)可在课堂上选作练习，第2题中的(1)与习题1.3B组中的(2)(4)可供课后作业选用.

1.3.2 或

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第15页的“思考”. 如同前一小节，我们在“思考”中选取了三个学生非常熟悉的数学命题，其中命题(3)与命题(1)(2)之间的关系也容易发现. 目的是引出逻辑联结词“或”，让学生感受用联结词“或”联结两个命题也可以得到一个新命题. 同时，激发学生学习和研究这个新命题的兴趣.

同样地，具体教学时为了加深学生对用“或”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，教师可补充数学中其他方面的一些例子．例如，引导学生回顾两个三角形相似的条件，有如下两个命题：

p：三边对应成比例的两个三角形相似；

q：三角对应相等的两个三角形相似．

上面的两个条件可用一个命题简单地表述出来：

r：三边对应成比例或三角对应相等的两个三角形相似．

如果学生对用联结词“或”联结两个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识，我们引出新命题的记号“$p\vee q$”和读法，进而提出问题：命题 $p\vee q$ 的真假如何判断呢？命题 $p\vee q$ 的真假与命题 p 和 q 的真假之间有什么关系？

教师引导学生仿照命题 $p\wedge q$ 的真假的确定方法，来确定命题 $p\vee q$ 的真假性．

2. 通过实例，归纳出命题 $p\vee q$ 的真假的一般规律

类似于前一节，教科书中对命题 $p\vee q$ 的真假是直接规定的，并且在旁白中指出可以从并联电路去理解命题 $p\vee q$ 真假的规定．同样地，这样做的好处是非常简洁、清晰，同时留给教师发挥的空间．具体教学时，教师可选择适当的教学方法．

教学时，教师尽可能采用学生容易理解和接受的方法．例如，教师在课堂上可以引导学生对大量的实例进行分析，从中归纳出判断命题 $p\vee q$ 真假性的一般规律．这里要求所选实例应包含命题 p，q 真假性的所有可能情况（共四种），并且对实例中的每个命题，学生容易判断其真假．这些实例同样可在教师的引导下由学生自主给出．为了节省课堂教学时间，同样可选用我们在前面给出的例子：

例 4　命题 p：三边对应成比例的两个三角形相似；命题 q：三角对应相等的两个三角形相似．那么命题 $p\vee q$：三边对应成比例或三角对应相等的两个三角形相似．

例 5　命题 p，q 同前面例 1．那么命题 $p\vee q$：函数 $y=x^3$ 是奇函数或是减函数．

例 6　命题 p，q 同前面例 3．那么命题 $p\vee q$：相似三角形的面积相等或周长相等．

教师引导学生分析“思考”和上面三个例子中命题 $p\vee q$ 的真假性，从中观察命题 $p\vee q$ 的真假和命题 p，q 真假之间的关系．

同样地，这里命题 $p\vee q$ 的真假性是根据其表达的内容是否符合客观实际来确定的．如果内容符合客观实际，它就是真命题，否则它是假命题．

例如，“思考”中的命题(3)，“27 是 7 的倍数或是 9 的倍数”是符合客观实际的，所以它是真命题．其中命题 p 是假命题，而命题 q 都是真命题．

通过进一步分析，学生不难发现：上面的

例 4 中命题 p，q 与命题 $p\vee q$ 都是真命题；

例 5 中命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，命题 $p\vee q$ 是真命题；

例 6 中命题 p，q 与命题 $p\vee q$ 都是假命题．

如果需要的话，可引导学生再分析一些数学中学生熟悉的例子，如教科书 1.3.1 中例 1 中的例子(用联结词联结命题 p，q 可得到命题 $p\vee q$)．然后引导学生整理、归纳经分析得到的结论，得到命题 $p\vee q$的真假与命题 p，q 真假性之间关系的一般规律：

当命题 p，q 之一为真命题时，命题 $p\vee q$ 是真命题；当命题 p，q 都为假命题时，命题 $p\vee q$ 是假命题．

命题 $p\vee q$ 的真假也可用下面的真值表表示：

表 2

命题 p	命题 q	命题 $p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

同样地，《普通高中数学课程标准（实验）》中关于命题 $p\vee q$ 的真假的判断不要求使用真值表.

观察、比较表 1 和表 2 中命题 $p\wedge q$ 与命题 $p\vee q$ 的真假性，可以得到下面的结论：如果命题 $p\wedge q$ 为真命题，那么命题 $p\vee q$ 一定是真命题；反过来，如果命题 $p\vee q$ 是真命题，那么命题 $p\wedge q$ 不一定是真命题. 这就回答了本小节最后的“思考”栏目中问题.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上的例 3 介绍如何判断用“或”联结两个命题后得到的新命题 $p\vee q$ 的真假. 安排这个例子的目的是使学生根据“或”的含义，判断新命题 $p\vee q$ 的真假.

根据“或”的含义，判断命题 $p\vee q$ 的真假是这一小节的教学重点之一. 利用表 2，学生可以通过判断命题 p 与命题 q 的真假，来判断形式较复杂的命题 $p\vee q$ 的真假. 这样一来，我们将一个较复杂命题的真假的判断归结为两个简单命题的真假的判断.

教科书第 18 页练习的第 2 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，教师应该让学生在课堂上完成. 习题 1.3A 组第 1 题中的(1)(3)可在课堂上选作练习，第 2 题中的(2)(3)与习题 1.3B 组中的(1)(3)可供课后作业选用.

4. 需要注意的问题

本小节例题中没有安排用逻辑联结词“或”联结两个命题得到新命题 $p\vee q$，并用语言表述新命题 $p\vee q$ 的内容. 主要是考虑到课时较少，而且在教科书 1.3.1 中关于逻辑联结词“且”安排了相应的内容.

需要注意的是，学生用语言表述命题 $p\vee q$ 比用语言表述命题 $p\wedge q$ 更容易出现逻辑错误. 看下面的例子：

例 7　已知下面两个命题：

p：能被 5 整除的整数的个位数一定为 5；

q：能被 5 整除的整数的个位数一定为 0.

有些学生把命题 $p\vee q$ 表述为：“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或 0”，这是不对的. 这一点可以从命题的真假性方面判断出来：命题 p，q 都是假命题，所以命题 $p\vee q$ 也是假命题，而命题“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或 0”是一个真命题. 事实上，命题 $p\vee q$ 正确的表述为“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或一定为 0”.

1.3.3　非

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第 17 页的“思考”. 我们在“思考”中选取了两个非常简单的数学命题，其中命题(2)是对命题(1)的全盘否定. 目的是引出逻辑联结词“非”，让学生感受对一个命题全盘否定可以得到一个新命题，激发学生学习和研究这个新命题的兴趣.

为了加深学生对全盘否定一个命题可以得到一个新命题的认识，教师可补充数学中其他方面的一些例子．例如，命题

p：方程 $x^2+x+1=0$ 有实数根．

对命题 p 全盘否定得如下命题：

q：方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根．

学生对全盘否定一个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识后，我们引出新命题的记号“$\neg p$”和读法，进而提出问题：命题 $\neg p$ 的真假如何判断呢？它与命题 p 的真假之间有什么关系？

2. 通过实例，判断命题 $\neg p$ 的真假

判断命题 $\neg p$ 的真假性比判断前两小节中命题 $p\wedge q$ 与命题 $p\vee q$ 的真假性容易一些．因为命题 $\neg p$ 是 p 的否定，所以它们不可能同时为真命题，也不能同时为假命题，只能一个为真命题，一个为假命题．

具体教学时，教师可引导学生分析一些数学实例，归纳得出判断命题 $\neg p$ 的真假性的一般规律．如分析教科书上第 17 页“思考”中命题(1)(2)的真假性与前面命题 p，q（即 $\neg p$）的真假性，引导学生整理、归纳得到判断命题 p 的真假性与命题 $\neg p$ 的真假性之间关系的一般规律：

当命题 p 为真命题时，命题 $\neg p$ 为假命题；当命题 p 为假命题时，命题 $\neg p$ 为真命题．

命题 $\neg p$ 的真假也可用下面的真值表表示：

表 3

命题 p	命题 $\neg p$
真	假
假	真

3. 例题和习题的教学分析

教科书上的例 4 是介绍如何写出一个命题的否定，并判断其真假．通过这个例子达到下面两个目的：

(1) 使学生会写出一个已知命题的否定，掌握一些基本规律；

(2) 使学生会根据表 3 判断一个命题的否定的真假性．

表 3 表明，要确定命题 $\neg p$ 的真假，只需确定出命题 p 的真假即可．

事实上，在实际应用中，如果确定一个命题 p 的真假比较困难时，我们可以尝试判断命题 $\neg p$ 的真假．一旦命题 $\neg p$ 的真假确定了，那么命题 p 的真假性也就确定了．关于这一点，我们在下一节学习全称量词和存在量词时会看到．

教科书第 18 页练习的第 3 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成．习题 1.3A 组第 3 题中的部分题目可在课堂上选作练习，余下作课后作业选用．

4. 需要注意的问题

(1) 具体教学时，不要求写出 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 形式命题的否定．有关 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 形式命题的否定，以及它们与命题 $\neg p$，$\neg q$ 之间的联系，我们将在本章的“拓展资源”部分加以介绍．

(2) 一个命题的否定与它的否命题是有区别的．如下面的两个例子．

例 8　命题 p：正方形的四条边相等．

命题 $\neg p$：正方形的四条边不相等．

p 的否命题：若一个四边形不是正方形，则它的四条边不相等.

显然，命题 p 为真命题，而命题 p 的否定 $\neg p$ 与否命题均为假命题.

四、教学设计案例

1.3.1 且（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）了解联结词“且”的含义.

通过数学实例，认识用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题；会用语言简洁、准确地表述新命题，知道新命题的记号和读法；通过分析一些数学实例，归纳出联结词“且”的含义.

（2）会用联结词“且”联结两个命题或改写某些数学命题，并判断新命题的真假.

会用联结词“且”联结两个命题，会根据逻辑联结词“且”的含义判断新命题的真假；会用联结词“且”改写某些数学命题，根据改写后的命题判断原先命题的真假.

在数学语言中经常使用一些逻辑联结词，学习并掌握它的最好方法是使用. 注意在引导学生使用逻辑联结词的过程中，掌握逻辑联结词的用法，纠正出现的错误，避免对逻辑联结词含义的机械记忆和抽象解释.

2. 教学重点与难点

教学重点：通过数学实例，了解逻辑联结词“且”的含义.

教学难点：判断用逻辑联结词“且”联结两个命题后得到的新命题的真假.

3. 教学基本流程

创设情境，通过具体数学实例引入新课

↓

给出“且”联结得到的新命题的表述形式、记号和读法，引出判断新命题的真假问题

↓

通过一些数学例子，归纳出“且”的含义

↓

学习用“且”联结命题，并判断真假

↓

学习用“且”改写命题，并判断真假

↓

课堂练习、小结与课后作业

4. 教学情境设计

问题 1：你能发现“思考”中三个命题之间的关系吗？

设计意图：使学生明白用逻辑联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题，启发学生对新命题的思考和探究的兴趣.

师：让学生观察教科书上“思考”中的三个命题，引导学生发现这三个命题在形式上的联系.

生：观察、思考、交流，并发表自己的看法.

问题 2：教师再列举几组命题，让学生观察每组中三个命题之间的联系.

设计意图：加深学生对用逻辑联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，概括出一般特征. 同时，学习如何简洁、准确地表述用“且”联结得到的新命题.

师：让学生再观察几组命题，引导学生发现每组三个命题在形式上的联系，加深对“且”联结两个命题可以得到的新命题的认识.

生：观察、思考、交流，并发表自己的看法.

问题 3：给出用逻辑联结词“且”联结得到的新命题的记号“$p\wedge q$”和读法.

问题 4：你能判断命题 $p\wedge q$ 的真假吗？命题 $p\wedge q$ 的真假和命题 p，q 的真假之间有什么联系？

设计意图：引导学生通过一些数学实例分析命题 p，q 以及命题 $p\wedge q$ 的真假性，概括出这三个命题的真假性之间关系的一般规律，培养学生的抽象概括能力.

师：引导学生分析前面例子中命题 p，q 以及命题 $p\wedge q$ 的真假性；让学生自己举出一些例子进行分析，总结出结论.

生：分析每个例子中命题 p，q 以及 $p\wedge q$ 的真假性（可列表表示），概括出它们真假性之间的联系.

问题 5：对于教科书例 1 中的每组命题 p，q，你能写出命题 $p\wedge q$，并判断它们的真假吗？

设计意图：学习使用逻辑联结词“且”联结两个命题，根据“且”的含义，判断“且”联结成的新命题的真假.

师：引导学生阅读教科书例 1 中每组命题 p，q，让学生尝试写出命题 $p\wedge q$，并判断它们的真假，纠正可能出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例 1，尝试写出命题 $p\wedge q$，然后判断真假.

问题 6：对于教科书例 2 中的每个命题，你能将其改写为命题 $p\wedge q$ 的形式，并判断它们的真假吗？

设计意图：学习使用逻辑联结词“且”改写一些数学命题，根据“且”的含义判断原命题的真假.

师：引导学生阅读教科书例 2 中的每个命题，让学生尝试将其改写成命题 $p\wedge q$ 的形式，判断它们的真假，纠正可能出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例 2，尝试写出命题 $p\wedge q$，然后判断真假.

问题 7：通过学习，你能解决教科书第 18 页练习中的哪些问题？

设计意图：反馈学生掌握逻辑联结词“且”的用法和含义的情况，巩固本小节所学的基本知识.

生：独立思考，解决教科书第 18 页练习第 1 题和习题 1.3A 组第 1 题(2)(4).

师：先让学生讲述解答情况，再作出评判，给出正确解答.

问题 8：小结：如何判断用“且”联结的两个命题得到新命题的真假？

设计意图：归纳整理本节课所学知识.

师：引导学生思考，概括.

生：思考、整理、表述概括的结论.

问题 9：课后作业：习题 1.3A 组第 2 题(1)；习题 1.3B 组(2)(4).

5. 几点说明

(1) 本节课是学生第一次系统地学习逻辑联结词的含义和用法，教学中选用的例子应是学生比较熟悉的数学例子，且命题的真假性容易判断.

(2) 教科书上关于“且”的含义的规定，学生理解和接受起来可能比较困难，教学中注意引导学生通过大量的数学实例，自主分析、思考、交流、讨论，概括出一般规律.

(3) 教学中，应引导学生简洁、准确地表述用逻辑联结词“且”联结成新命题，并纠正出现的逻辑错误.

五、习题解答

练习（第 18 页）

1. (1) 真；(2) 假.
2. (1) 真；(2) 假.
3. (1) $2+2\neq5$，真命题；

(2) 3 不是方程 $x^2-9=0$ 的根，假命题；

(3) $\sqrt{(-1)^2}\neq-1$，真命题.

习题 1.3 A 组

1. (1) $4\in\{2, 3\}$或$2\in\{2, 3\}$，真命题；

(2) $4\in\{2, 3\}$且$2\in\{2, 3\}$，假命题；

(3) 2 是偶数或 3 不是素数，真命题；

(4) 2 是偶数且 3 不是素数，假命题.

2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 假命题.
3. (1) $\sqrt{2}$不是有理数，真命题；

(2) 5 是 15 的约数，真命题；

(3) $2\geqslant3$，假命题；

(4) $8+7=15$，真命题；

(5) 空集不是任何集合的真子集，真命题.

B 组

(1) 真命题. 因为 p 为真命题，q 为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题；

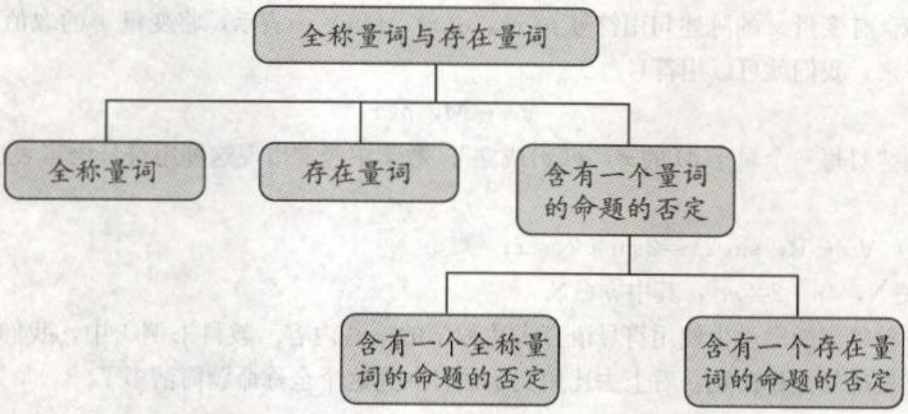
(2) 真命题. 因为 p 为真命题，q 为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题；

(3) 假命题. 因为 p 为假命题，q 为假命题，所以 $p\vee q$ 为假命题；

(4) 假命题. 因为 p 为假命题，q 为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

1.4 全称量词与存在量词

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词和存在量词的意义，能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

教学难点是全称命题和特称命题的真假的判定，以及写出含有一个量词的命题的否定.

三、编写意图与教学建议

本节内容安排在学生学习了命题及命题的否定之后，旨在通过丰富的实例，使学生了解生活和数学中经常使用的两类量词（即全称量词和存在量词）的含义；会判断含有一个量词的全称命题和含有一个量词的特称命题的真假；会正确地写出这两类命题的否定. 认识到含有一个量词的全称命题的否定是特称命题，含有一个量词的特称命题的否定是全称命题.

教科书每一小节均由“思考”引入. 对于量词，重在理解它们的含义，不追求它们的形式化定义.

1.4.1 全称量词

1. 创设情境，引入基本概念

引导学生回顾命题的概念，然后思考、讨论教科书第 21 页的“思考”.“思考”中选取了四个含有变量的陈述句，其中(3)(4)分别是在(1)(2)的基础上分别加了一个短语“对所有的”“对任意一个”对变量进行限定. 学生根据命题的概念容易判断出，(1)(2)不是命题，而(3)(4)是命题. 通过对比，激发学生对这类短语的兴趣，由此引出全称量词的概念、符号以及全称命题的概念.

全称量词有多种表述形式，除了“思考”中出现的两种外，我们在教科书的旁白中列举了其他常用的几种表述形式.

具体教学时，教师可引导学生寻找其他的数学例子，以加深对全称量词的认识. 如下面的例子：

例 1 (1) 每一个三角形都存在外接圆；

(2) 所有实数都有算术平方根；

(3) 对一切无理数 x，$3x+2$ 还是无理数；

(4) 任给函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$，$f(x)$ 总可以表示成一个偶函数和一个奇函数的和.

2. 运用符号语言表述某些全称命题

符号语言是数学的基本语言. 在数学中，我们经常使用符号语言简洁、准确地表达数学的一些内容.

教科书将含有变量 x 的陈述句用符号 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ …表示，将变量 x 的取值范围用符号 M 表示. 这样一来，我们就可以用符号

$$\forall x\in M,\ p(x)$$

表示全称命题"对每一个属于 M 的 x，$p(x)$成立". 数学中经常出现这种用符号语言表达的全称命题. 如下面的例子：

例 1 (1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin 2x=2\sin x\cos x$；

(2) $\forall n\in\mathbf{N}$，$4n+2\neq m^2$，其中 $m\in\mathbf{N}$.

教学中，教师应鼓励学生使用符号语言表达数学的一些内容. 教科书例 1 中，我们有意安排了一个用符号语言表达的全称命题，看上去比用文字语言叙述这个全称命题简洁多了.

3. 例题和习题教学分析

教科书上例 1 是通过几个数学实例介绍全称命题真假的判断方法，通过这个例子达到下面的目的：

(1) 使学生理解全称量词的意义，会判定一个全称命题的真假.

通过生活中和数学中丰富的实例理解全称量词的意义是本小节的教学重点，而判定全称命题的真假则是本小节的教学难点. 教师在介绍完全称命题的概念和符号表示之后，可提出如下问题让学生思考："对给定的全称命题，如何判断它的真假呢?"

引导学生阅读例 1 中的三个全称命题，理解全称量词的意义，然后思考回答. 为了便于学生理解和接受，教师最好不要先给出判断全称命题真假的一般方法，而是针对具体的全称命题进行分析，最后引导学生自主总结出一般方法.

例如，对于例 1 中的全称命题(1)"所有的素数是奇数"，如何判定它的真假呢? 这里，变量 x 的变化范围 M：全体素数组成的集合；$p(x)$：x 为奇数. 如果要说明(1)为真命题，那么需要说明对任意 $x\in M$，x 为奇数. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非对所有的 $x\in M$，x 为奇数，也就是要找出素数 $x_0\in M$，x_0 为偶数. 我们发现，2 是素数，同时也是偶数. 所以全称命题(1)是假命题.

又如，例 1 中的全称命题(2)"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\geqslant 1$"，其中变量 x 的变化范围 $\mathbf{R}$：全体实数组成的集合；$p(x)$：$x^2+1\geqslant 1$. 如果要说明(2)为真命题，那么需要说明 $\forall x\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+1\geqslant 1$ 成立. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非 $\forall x\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+1\geqslant 1$ 成立，也就是要找出某个 $x_0\in\mathbf{R}$，不等式 ${x_0}^2+1\geqslant 1$ 不成立，即 ${x_0}^2+1\leqslant 1$. 注意到，$\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $x^2\geqslant 0$，从而有 $x^2+1\geqslant 1$. 所以全称命题(2)为真命题.

在分析了例 1 中三个全称命题后，引导学生总结判断全称命题真假的一般方法.

(2) 使学生体会用符号语言表达一些全称命题的准确性、简洁性.

在例 1(2)中，我们用符号语言将这个全称命题表达出来，既准确，又简洁. 目的是让学生体会符号语言表达数学内容的准确性、简洁性，引导学生在今后的数学学习中，自觉地运用符号语言表达一些数学内容.

教科书第 23 页练习的第 1 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成. 习题 1.4A 组第 1 题可供课后作业选用.

1.4.2　存在量词

1. 创设情境，引入基本概念

与前一小节类似，教科书首先通过“思考”栏目引入本小节的基本概念.“思考”中的问题选取了四个含有变量 x 的陈述句，其中(3)(4)分别是在(1)(2)的基础上分别加了一个短语“存在一个”“至少有一个”. 学生根据命题的概念容易判断出，(1)(2)不是命题，因为在(1)(2)中不知道变量 x 代表什么，无法判断真假. 而(3)(4)是命题，因为在(3)(4)中对变量 x 的取值范围进行了限定，从而可以判断它们的真假.

通过对比，激发学生对“存在一个”“至少有一个”这类短语的兴趣，由此引出存在量词的概念、符号，以及特称命题的概念.

存在量词也有多种表述形式，除了这里出现的两种表述形式外，我们在教科书的旁白中列举了其他常用的几种表述形式“有一个”“有的”“有些”“对某个”等.

具体教学时，教师可引导学生寻找其他的数学例子，以加深对这些存在量词的认识. 如下面的例子：

例 2 (1) 有一个四边形没有外接圆；

(2) 对某个实数 x，它的算术平方根为 0；

(3) 有的无理数的平方还是无理数；

(4) 有些奇函数的图象不过原点.

2. 运用符号语言表述某些特称命题

在上一小节中，我们将含有变量 x 的陈述句用符号 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ …表示，将变量 x 的取值范围用符号 M 表示. 利用这些符号，我们就可以用符号

$$\exists x_0 \in M,\ p(x_0)$$

表示特称命题“存在 M 中的元素 x_0，使 $p(x_0)$成立”. 某些特称命题可以用符号语言准确、简洁地表达出来，数学中经常出现这种用符号语言表达的特称命题. 如下面的例子：

例 3 (1) $\exists$直线 l，点 $P\in l$，且 $l\perp$平面 π；

(2) $\exists x,\ y,\ z\in \mathbf{N}_+,\ x^2+y^2=z^2$.

在今后的数学学习中，学生会经常遇到用符号语言表述的数学命题，其主要原因是这种表述既准确，又简洁. 具体教学时，教师应鼓励学生适当使用符号语言来表达数学的一些内容. 在教科书上例 2 中，我们有意安排了一个用符号语言表达的特称命题，让学生体会用符号语言表述某些特称命题比用文字语言更简洁.

3. 例题和习题教学分析

教科书上例 2 是通过几个数学实例介绍特称命题真假的判断方法，通过这个例子使学生理解特称量词的意义，会判断一个特称命题的真假.

通过生活中和数学中丰富的实例理解特称量词的意义是本小节的教学重点，判断特称命题的真假是本小节的一个教学难点. 与前一小节类似，教师在介绍完特称命题的概念和符号表示之后，可提出如下问题让学生思考：“对给定的一个特称命题，如何判断它的真假呢?”

教师先引导学生阅读例 2 中的三个全称命题，然后思考回答这三个命题的真假. 同样地，为了便

于学生理解和接受，教师最好先不要给出判断特称命题真假的一般方法，而是针对具体的特称命题进行分析，引导学生总结归纳出一般方法.

例如，对于例 2 中的特称命题(1) “有一个实数 x_0，使 $x_0^2+2x_0+3=0$”，如何判定它的真假呢？这里，变量 x_0 的变化范围是实数集 $\mathbf{R}$；$p(x_0)$：$x_0^2+2x_0+3=0$. 如果要说明(1)为真命题，那么只需找到某个实数 x_0，使得 $p(x_0)$成立，即 $x_0^2+2x_0+3=0$. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非存在实数 x_0，使得 ${x_0}^2+2x_0+3=0$，也就是说，对一切实数 x，$x^2+2x+3\neq0$. 我们发现，对一切实数 x，$x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant2$. 因此，使 $p(x_0)$成立的实数 x_0 不存在. 所以特称命题(1)是假命题.

这表明，要说明特称命题“$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$”是假命题，需要说明在集合 M 中，使 $p(x_0)$成立的变量 x_0 不存在.

又如，对例 2 中的特称命题(3) “有些整数只有两个正因数”，其中变量 x_0 的变化范围为整数集 $\mathbf{Z}$；$p(x_0)$：x_0 有两个正因数. 如果要说明(2)为真命题，那么需要找到某个整数 x_0，使得 x_0 只有两个正因数. 反过来，如果要说明(2)为假命题，那么要说明并非有些整数只有两个正因数，根据存在量词“有些”的含义，这就是说，整数集 $\mathbf{Z}$ 中不存在只有两个正因数的整数. 注意到，整数 2 恰好只有两个正因数：1，2，所以特称命题(2)为真命题.

这又表明，要说明特称命题“$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$”是真命题，需要说明在集合 M 中存在某个 x_0，使得 $p(x_0)$成立.

教师在分析完例 2 中三个全称命题后，引导学生总结归纳出判断一个特称命题真假的一般方法.

教科书第 23 页练习的第 2 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成. 对于第 2 题中特称命题(1)与(3)，我们选用符号语言将这个全称命题表达出来，其目的是让学生体会符号语言表达数学内容的准确性、简洁性，引导学生在今后的数学学习中，自觉地运用符号语言表达一些数学内容. 习题 1.4 A 组第 2 题可供课后作业选用.

1.4.3 含有一个量词的命题的否定

1. 问题的引入

本小节介绍含有一个量词的命题的否定，它包含两块内容：其一是含有一个全称量词的命题的否定，其二是含有一个存在量词的命题的否定.

首先让学生回顾什么是一个命题的否定，它与否命题之间有什么差别. 然后引导学生探究教科书第 26 页和第 27 页“探究”中命题的否定，并观察原先的命题与它们的否定在形式上有什么变化，由此引入本小节要学习的问题.

在两个“探究”中，我们各选取一个命题用符号语言表达出来，主要有如下两个目的：

① 使学生进一步熟悉用符号语言表达全称命题和特称命题；

② 通过观察原先的命题与它们的否定在形式上的变化，使学生更容易得到全称命题的否定是特称命题，以及特称命题的否定是全称命题的结论.

2. “探究”中命题的教学分析

教科书在分析“探究”中全称命题和特称命题时，并没有直接给出这些命题的否定的最终表述形式，而是根据全称量词和存在量词的含义，直接对原先的命题进行全盘否定，得到这些命题的否定的一种表述形式. 需要强调的是，这些表述过于形式化，不自然也不符合日常语言表达的习惯，所以最后进一步将这些表述改写成常用的表述形式. 为此，教科书在“探究”后的分析中，先后用了六个“也就是说”. 这样处理一方面让学生体会如何用间接、自然的语言表达数学内容；另一方面，通过这

些命题的否定的最终表述，学生很容易观察出原先的命题和它们的否定在形式上的变化，从而降低了学生的认知难度.

例如，对第一个“探究”中的全称命题(1)“所有的矩形都是平行四边形”，根据全称量词“所有的”的含义，它的否定为“并非所有的矩形是平行四边形”. 这种表述有些“绕”，我们换一种说法为“存在一个矩形不是平行四边形”.

如果直接从命题(1)到最终它的否定的表述，学生可能觉得太突然，理解和接受起来可能有困难. 但最终的表述是很有必要的，由此可以观察出命题(1)的否定为一个特称命题. 再通过分析其他的全称命题的否定，便可归纳出含一个全称量词的命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定的一般形式为“$\exists x_0\in M$，$\neg p(x_0)$”.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例 3 是介绍如何写出含有一个全称量词的命题的否定，例 4 是介绍如何写出含有一个存在量词的命题的否定，它们分别安排在两个“探究”完成之后. 目的是让学生了解如何运用前面通过探究得到的结论，正确地对含有一个量词的命题进行否定. 同时，加深学生对全称命题的否定是特称命题和特称命题的否定是全称命题这个事实的认识.

教科书第 26 页练习的第 1 题和第 2 题分别选取数学中的一些较简单的全称命题和特称命题，让学生写出它们的否定，目的是为了巩固学生在本小节所学的基本知识. 教师可以让学生在课堂上完成. 习题 1.4A 组第 3 题与习题 1.4B 组中的(1)(2)(3)(4)可供课后作业选用.

4. 需要注意的问题

在探究含有一个量词的命题的否定时，学生常常会出现一些逻辑错误，如认为第一个“探究”中的命题(1)的否定为“所有的矩形都不是平行四边形”. 为此，我们在教科书第 26 页的旁白中也指明了它和命题“并非所有的矩形是平行四边形”的差别. 其实，这两个命题之间差别还可以由它们的真假性看出，前者是假命题，而后者是真命题.

学生在写出第二个“探究”中命题的否定时，也会犯类似的错误. 如认为第二个“探究”中命题(2)的否定为“某些平行四边形不是菱形”，这是不对的. 我们知道，命题(2)为真命题，而它的否定应为假命题，而命题“某些平行四边形不是菱形”是真命题.

总之，要正确地对含有一个量词的全称命题或特称命题进行否定，我们一方面要充分理解量词的含义，另一方面应充分利用原先的命题与它的否定在形式上的联系.

四、教学设计案例

1.4.3 含有一个量词的命题的否定（第 2 课时）

1. 教学任务分析

(1) 通过探究数学中的一些实例，使学生归纳总结出含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

在探究的过程中，教师应引导学生根据全称量词和存在量词的含义，用简洁、自然的语言表述含有一个量词的命题的否定，而不是机械地在原先的命题前加“非”“并非”“不”等得到它的否定. 这样便于学生通过观察，归纳总结出含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

(2) 通过例题和习题的教学，使学生能够根据含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化

规律，正确地对含有一个量词的命题进行否定.

教科书中选用的例子都是数学中的具体例子.《普通高中数学课程标准（实验）》中提出“通过生活和数学中的丰富实例，理解全程量词和存在量词的意义”，具体教学时，教师尽可能不用生活中的例子，避免一些不必要的麻烦. 生活中的例子如果把握不好，容易出现问题，如“所有的数学家都聪明”是全称命题吗？又如“有些女孩子胆小”是特称命题吗？

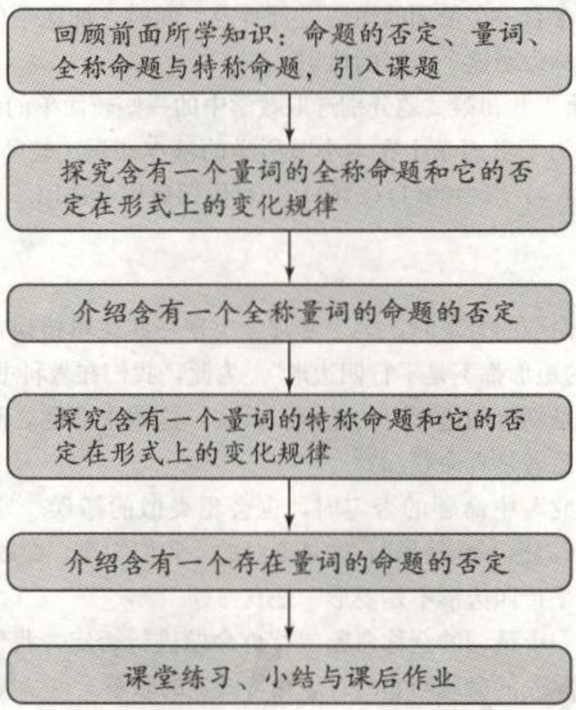
（3）使学生体会从具体到一般的认识过程，培养学生抽象、概括的能力.

2. 教学重点与难点

教学重点：通过探究，了解含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律，会正确地对含有一个量词的命题进行否定.

教学难点：正确地对含有一个量词的命题进行否定.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题 1：我们在上一节中学习过逻辑联结词“非”. 对给定的命题 p，如何得到命题 p 的否定（或 $\neg p$），它们的真假性之间有何联系？

设计意图：回顾旧知，为问题的引入做准备. 对逻辑联结词“非”的含义和用法的回顾，有助于本节课所研究问题的顺利解决.

师：让学生回顾逻辑联结词“非”的含义和用法.

生：回顾并叙述自己的看法.

问题 2：你能写出含有一个量词的命题的否定吗？

设计意图：引入本节课要讨论的内容，激发学生探究新知的兴趣.

师：教师提出问题，引导学生分析具体的数学实例. 从具体到一般，通过观察、分析，抽象概括出一般规律.

生：学生思考，分组交流，讨论老师提出的问题.

问题3：你能写出教科书第24页“探究”中三个全称命题的否定吗？

设计意图：通过分析数学实例，使学生能根据全称量词的含义，写出这三个全称命题的否定，并把它们用简洁、自然的语言表述出来.

师：引导学生分析教科书第24页“探究”中的三个全称命题，注意提示学生语言表述要简洁、自然，不能机械地根据逻辑联结词“非”的含义和用法，对它们进行否定.

生：学生思考，小组讨论，推举代表叙述结论，其他同学可以补充.

问题4：你能发现含有一个全称量词的命题与它的否定在形式上有什么变化吗？

设计意图：通过观察，让学生归纳总结出含有一个全称量词的命题与它的否定在形式上的变化规律.

师：让学生观察上述三个全称命题和它们的否定在形式上的变化，尤其注意观察量词的变化，引导学生归纳、总结.

生：学生观察、归纳、概括，发表自己的看法.

问题5：给出含有一个量词的全称命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定为特称命题“$\exists x_0\in M$，$\neg p(x_0)$”.

问题6：对于教科书上例3中的每个全称命题，你能写出它们的否定吗？

设计意图：根据前面探究得到的含有一个量词的全称命题与它们的否定在形式上的变化规律，学习对含有一个量词的全称命题进行否定.

师：引导学生阅读教科书上例3中的每个全称命题，让学生尝试写出这些全称命题的否定，纠正出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例3，尝试写出每个全称命题的否定.

问题7：你能写出教科书第25页“探究”中三个特称命题的否定吗？

设计意图：通过分析数学实例，使学生能根据存在量词的含义，写出这三个特称命题的否定，并把它们用简洁、自然的语言表述出来.

师：引导学生分析教科书第24页“探究”中的三个全称命题，注意提示学生的语言表述要简洁、自然.

生：学生思考，小组讨论，推举代表叙述结论，其他同学可以补充.

问题8：你能发现含有一个存在量词的命题与它们的否定在形式上有什么变化吗？

设计意图：通过观察，使学生归纳总结出含有一个存在量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

师：让学生观察上述三个特称命题和它们的否定在形式上的变化，尤其注意观察量词的变化，引导学生进行归纳、总结.

生：学生观察、归纳、概括，发表自己的看法.

问题9：给出含有一个量词的特称命题“$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$”的否定为全称命题“$\forall x\in M$，$\neg p(x)$”.

问题10：对于教科书上例4中的每个特称命题，你能写出它们的否定吗？

设计意图：根据前面探究得到的含有一个量词的特称命题与它们的否定在形式上的变化规律，学习对含有一个量词的特称命题进行否定.

师：引导学生阅读教科书上例4中的每个特称命题，让学生尝试写出这些特称命题的否定，纠正出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例4，尝试写出每个特称命题的否定.

师：阅读教科书例 5，写出例 5 中全称命题和特称命题的否定，并判断它们的真假.

生：独立思考，先判断例 5 中的命题是全称命题还是特称命题，然后分别写出它们的否定，最后再判断它们的真假.

生：独立思考，解决教科书第 26 页练习第 1 题和第 2 题.

师：先让学生讲述解答情况，再作出评判，给出正确解答.

问题 11：小结：如何写出含有一个量词的命题的否定，原先的命题与它的否定在形式上有什么变化?

设计意图：归纳整理本节课所学知识.

师：引导学生思考、概括.

生：思考、整理、表述概括的结果.

问题 13：课后作业：习题 1.4A 组第 3 题；习题 1.4B 组(1)(2)(3)(4).

5. 几点说明

(1) 虽然《普通高中数学课程标准（实验）》中提出用数学和生活中的丰富实例，但在具体的教学过程中，教师尽量不要选用生活中的例子，因为许多生活例子的讨论超出本教科书的范围，如“所有的学生考得很好”“有一个学生的年龄很大”等.

(2) 在探究的过程中，教师应注意引导学生用简洁、自然的语言表述含有一个量词的命题的否定，避免对逻辑联结词“非”的含义和用法的机械记忆，降低探究的难度.

(3) 全称命题“所有的矩形都是平行四边形”的否定是命题“并非所有的矩形都是平行四边形”，而不是命题“所有的矩形都不是平行四边形”，要注意它们的区别. 类似地，还有特称命题“某些平行四边形是菱形”的否定是“没有一个平行四边形是菱形”，而不是命题“某些平行四边形不是菱形”.

(4) 例 3 和例 4 的教学过程中，在已经完成这些全称命题和特称命题的否定后，可进一步判断它们的真假，巩固学生前一节所学的知识.

五、习题解答

练习（第 23 页）

1. (1) 真命题；(2) 假命题；(3) 假命题.
2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题.

练习（第 26 页）

1. (1) $\exists n_0 \in \mathbf{Z}$，$n_0 \notin \mathbf{Q}$；

   (2) 存在一个素数，它不是奇数；

   (3) 存在一个指数函数，它不是单调函数.

2. (1) 所有三角形都不是直角三角形；

   (2) 每个梯形都不是等腰梯形；

   (3) 所有实数的绝对值都是正数.

习题 1.4　A 组

1. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题；(4) 假命题.
2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题.
3. (1) $\exists x_0 \in \mathbf{N}$，$x_0^3 \leqslant x_0^2$；

   (2) 存在一个可以被 5 整除的整数，末位数字不是 0；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$；

(4) 所有四边形的对角线不互相垂直.

B组

(1) 假命题. 存在一条直线，它在 y 轴上没有截距；

(2) 假命题. 存在一个二次函数，它的图象与 x 轴不相交；

(3) 假命题. 每个三角形的内角和不小于 $180°$；

(4) 真命题. 每个四边形都有外接圆.

复习参考题　A组

1. 原命题可以写为：若一个三角形是等边三角形，则此三角形的三个内角相等.

逆命题：若一个三角形的三个内角相等，则此三角形是等边三角形. 是真命题；

否命题：若一个三角形不是等边三角形，则此三角形的三个内角不全相等. 是真命题；

逆否命题：若一个三角形的三个内角不全相等，则此三角形不是等边三角形. 是真命题.

2. 略.

3. (1) 假；(2) 假；(3) 假；(4) 假.

4. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真；(5) 真.

5. (1) $\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>0$；

(2) $\forall P\in\{P\mid P$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上$\}$，$|OP|=r$(O 为圆心)；

(3) $\exists(x,\ y)\in\{(x,\ y)\mid x,\ y$ 是整数$\}$，$2x+4y=3$；

(4) $\exists x_0\in\{x\mid x$ 是无理数$\}$，$x_0^3\in\{q\mid q$ 是有理数$\}$.

6. (1) $3\neq2$，真命题；

(2) $5\leqslant4$，假命题；

(3) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0\leqslant0$，真命题；

(4) 存在一个正方形，它不是平行四边形，假命题.

B组

1. (1) $p\wedge q$；

(2) $(\neg p)\wedge(\neg q)$，或 $\neg(p\vee q)$.

2. (1) $\forall\,\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c，则 $c^2=a^2+b^2$；

(2) $\forall\triangle ABC$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c，则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

III 自我检测题

一、选择题.

1. 命题"如果 $x\geqslant a^2+b^2$，那么 $x\geqslant2ab$"的逆否命题是（　　）

(A) 如果 $x<a^2+b^2$，那么 $x<2ab$

(B) 如果 $x\geqslant2ab$，那么 $x\geqslant a^2+b^2$

(C) 如果 $x<2ab$，那么 $x<a^2+b^2$

(D) 如果 $x\geqslant a^2+b^2$，那么 $x<2ab$

2. 三角形全等是三角形面积相等的（　　）

(A) 充分但不必要的条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分又不必要条件

3. 下列四个命题中，真命题是（　　）

(A) $\sqrt{2}$是偶数且是无理数

(B) $8\geqslant 10$

(C) 有些梯形内接于圆

(D) $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^3-x+1\neq 0$

4. 命题“所有奇数的立方是奇数”的否定是（　　）

(A) 所有奇数的立方不是奇数

(B) 不存在一个奇数，它的立方是偶数

(C) 存在一个奇数，它的立方是偶数

(D) 不存在一个奇数，它的立方是奇数

二、填空题.

1. 命题“若 $a=-1$，则 $a^2=1$”的逆否命题是________________________.

2. $b=0$ 是函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为偶函数的________________________条件.

3. 全称命题“$\forall a\in \mathbf{Z}$，a 有一个正因数”的否定是________________________.

4. 特称命题“有些三角形的三条中线相等”的否定是________________________.

三、解答题.

求证：$a+2b=0$ 是直线 $ax+2y+3=0$ 和直线 $x+by+2=0$ 互相垂直的充要条件.

参考答案

一、选择题.

1. C.　2. A.　3. C.　4. C.

二、填空题.

1. 如果 $a^2\neq 1$，那么 $a\neq -1$.

2. 充分必要条件.

3. $\exists a_0\in \mathbf{Z}$，$a_0$ 没有正因数.

4. 每一个三角形的三条中线不相等.

三、解答题.

证明：充分性

当 $b=0$ 时，如果 $a+2b=0$，那么 $a=0$，此时直线 $ax+2y+3=0$ 平行于 x 轴，直线 $x+by+2=0$ 平行于 y 轴，它们互相垂直；当 $b\neq 0$ 时，直线 $ax+2y+3=0$ 的斜率 $k_1=-\dfrac{a}{2}$，直线 $x+by+2=0$ 的斜率 $k_2=-\dfrac{1}{b}$，如果 $a+2b=0$，那么 $k_1k_2=\left(-\dfrac{a}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{b}\right)=-1$，两直线互相垂直.

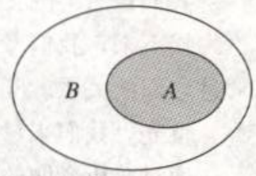
必要性

如果两条直线互相垂直且斜率都存在，那么 $k_1k_2=\left(-\frac{a}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{b}\right)=-1$，所以 $a+2b=0$；若两直线中有直线的斜率不存在，且互相垂直，则 $b=0$，且 $a=0$. 所以，$a+2b=0$.

Ⅳ 拓展资源

一、知识内容的拓广延伸

1. 充分条件、必要条件、充要条件与集合之间的关系

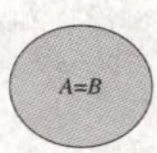


设 A，B 为两个集合. 集合 $A\subseteq B$ 是指

$$x\in A\Rightarrow x\in B. \qquad (*)$$

这就是说，“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要条件.

反过来，如果“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，那么(*)式成立，从而有集合 $A\subseteq B$.



设 A，B 为两个集合，集合 $A=B$ 是指

$$x\in A\Leftrightarrow x\in B. \qquad (**)$$

这就是说，“$x\in A$”与“$x\in B$”互为充要条件.

反过来，如果“$x\in A$”与“$x\in B$”互为充要条件，那么(**)式成立，从而集合 $A=B$.

设 p，q 为含有变量 x 的语句，我们引入如下两个集合：

$$A=\{x\,|\,p\ 成立\},$$
$$B=\{x\,|\,q\ 成立\}.$$

如果集合 $A\subseteq B$，那么每个使 p 成立的变量 x 也使得 q 成立. 也就是说，若 p 成立，则 q 也成立，即 $p\Rightarrow q$，从而 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

反过来，如果 p 是 q 的充分条件，那么由 p 成立可以推出 q 成立. 也就是说，若 $x\in A$，则一定有 $x\in B$，从而集合 $A\subseteq B$.

这样一来，判断 p 是否为 q 的充分条件，或等价地，判断 q 是否为 p 的必要条件，我们只需判断集合 $A\subseteq B$ 是否成立即可.

类似地，我们还可以得到：判断 p 与 q 是否互为充要条件，我们只需判断集合 $A=B$ 是否成立即可.

接下来，我们用前面的分析处理一些具体的问题.

看下面的例子：

例1　在“若 p，则 q”形式的命题中，p 是 q 的什么条件?

(1) 若 $x^2=y^2$，则 $x=y$；

(2) 若 $x=1$，则 $x^2-4x+3=0$；

(3) 若 a 是无理数，则 $a+1$ 也是无理数.

在命题 (1) 中，p 与 q 均为含有变量 x，y 的语句，其中集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2=y^2\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=y\}$. 容易发现，集合 A，B 表示直角坐标平面上的两个点集，其中 A 表示位于第一、三象限的角平分线上的点和第二、四象限的角平分线上的点的集合，而 B 表示位于第一、三象限的角平分线上的点的集合，所以集合 $B\subseteq A$. 这表明，命题(1)中，q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

在命题(2)中，p 与 q 均为含有变量 x 的语句，其中集合 $A=\{x\,|\,x=1\}=\{1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$. 容易发现，集合 $A\subseteq B$. 这表明，命题(2)中，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

在命题(3)中，p 与 q 均为含有变量 a 的语句，其中集合 $A=\{a \mid a$ 为无理数$\}$，$B=\{a \mid a+1$ 为无理数$\}$. 容易发现，集合 $A=B$. 这表明，命题(3)中，p 是 q 的充要条件.

2. 命题的逻辑等价

在本章“阅读与思考”中，我们指出，逻辑联结词“且”“或”“非”如同集合的基本运算“交”“并”“补”一样，也可以看作是对命题的一种“运算”. 两个命题经过这种“运算”后，仍然是一个命题.

我们知道，集合的“交”“并”“补”运算满足如下运算性质：

(1) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；

(2) $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$；

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

我们自然会问：对于命题的运算“且”“或”“非”，是否也有类似的运算性质呢？

接下来，我们考察命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$，命题 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 以及命题 $\neg(\neg p)$ 与 p 的真假性之间的关系.

首先，我们来考察命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 的真假性之间的关系.

通过分析命题的真假性，我们发现：

(1) 如果 p 和 q 都是真命题，那么命题 $p\wedge q$ 是真命题，$\neg(p\wedge q)$ 是假命题，$\neg p$ 和 $\neg q$ 是假命题，所以 $\neg p\vee\neg q$ 也是假命题；

(2) 如果 p 和 q 都是假命题，那么命题 $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$\neg(p\wedge q)$ 是真命题，$\neg p\vee\neg q$ 是真命题；

(3) 如果 p 和 q 为一真一假，那么命题 $\neg p$ 和 $\neg q$ 也是一真一假. 所以，$p\wedge q$ 是假命题，$\neg(p\wedge q)$ 是真命题，$\neg p\vee\neg q$ 也是真命题.

于是可以得到下表：

表 1

	命题 $\neg(p\wedge q)$	命题 $\neg p\vee\neg q$
p，q 都是真命题	假	假
p，q 都是假命题	真	真
p，q 为一真一假	真	真

从表 1 可以看出，无论命题 p，q 的真假如何，命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 的真假性完全一致，我们称这样的两个命题为逻辑等价，记作

$$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q \tag{$*$}$$

我们再来考察命题 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 的真假性之间的关系.

仿照前面的讨论，我们发现，命题 $\neg(p\vee q)$ 与命题 $\neg p\wedge\neg q$ 的真假性如下表所示：

表 2

	命题 $\neg(p\vee q)$	命题 $\neg p\wedge\neg q$
p，q 都是真命题	假	假
p，q 都是假命题	真	真
p，q 为一真一假	假	假

从表 2 可以看出，无论命题 p，q 的真假如何，命题 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 的真假性完全一致. 所以，命题 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 是逻辑等价的，即

$$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q. \qquad (**)$$

最后，我们考察命题 $\neg(\neg p)$ 与 p 的真假性之间的关系.

根据命题 p 的真假性，我们分如下两种情形讨论：

(1) 如果 p 为真命题，那么命题 $\neg p$ 为假命题，而命题 $\neg(\neg p)$ 为真命题；

(2) 如果 p 为假命题，那么命题 $\neg p$ 为真命题，而命题 $\neg(\neg p)$ 为假命题.

于是得到下表：

表 3

	命题 $\neg(\neg p)$
p 是真命题	真
p 是假命题	假

从表 3 可以看出，无论命题 p 的真假如何，命题 $\neg(\neg p)$ 与 p 的真假性完全一致. 所以，命题 $\neg(\neg p)$ 与 p 是逻辑等价的，即

$$\neg(\neg p)\equiv p \qquad (***)$$

与集合的“交”“并”“补”的运算性质(1)(2)和(3)相对应，上面的式子(*)(**)和(***)可以看作命题的“且”“或”“非”的运算性质.

二、相关知识简介

数理逻辑

数理逻辑又称符号逻辑，是用数学的方法研究推理过程的一门学问. 它是把数学上的形式化的方法应用到逻辑领域的结果.

数理逻辑的创始人，一般认为是德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz）. 他曾经提出创建一种“普遍的符号语言”，可以把推理过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论. 由于当时的社会条件，他的想法并没有实现，但是这种思想是现代数理逻辑部分内容的萌芽.

英国数学家布尔（G. Boole）建立了“布尔代数”，并创造一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念. 他还建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础. 19 世纪末 20 世纪初，数理逻辑有了较大的发展.

1884 年，德国数学家弗雷格（G. Frege）出版了《算术基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备. 此外，美国人皮尔斯在他的著作中引入了新的逻辑符号，把关系逻辑组成为一个关系演算.

至此，现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，并成为一门独立的学科.

“命题演算”和“谓词演算”是数理逻辑的两个最基本的，也是最重要的组成部分.

命题演算是研究关于命题如何通过一些逻辑联结词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法. 如果我们把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑联结词看作运算符号，就象代数中的“加、减、乘、除”那样，那么由一些简单的命题组成复杂的命题的过程，就可以当作逻辑运算的过程，也就是命题的演算.

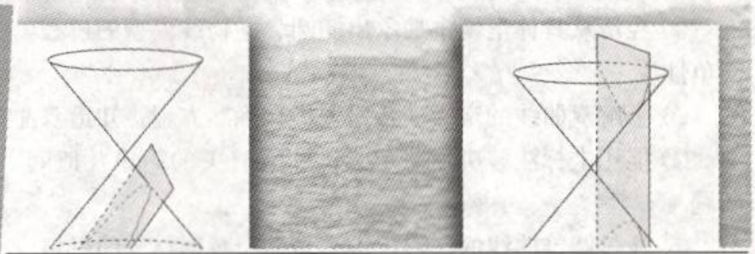
谓词演算是把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式，由含有变项的逻辑公式、逻辑联结词和量词构成命题，然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系.

数理逻辑这门学科建立以后，发展比较迅速，促进它发展的因素也是多方面的. 主要原因是这门学科对于数学其他分支如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大的影响，特别是对新近形成的计算机科学的发展起了推动作用. 反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展.

数理逻辑新近还发展了许多新的分支，如递归论、模型论等. 递归论主要研究可计算性的理论，它和计算机的发展与应用有密切的关系. 模型论主要是研究形式系统和数学模型之间的关系.

由于数理逻辑是一门新近兴起而又发展很快的学科，所以它本身仍存在许多问题有待于深入研究.

第二章 圆锥曲线与方程



I 总体设计

解析几何是17世纪数学发展的重大成果之一，其本质是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想.

我们知道，用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是一个圆. 用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当截面与圆锥轴的夹角不同时，可以得到不同的截口曲线，它们分别是椭圆、抛物线、双曲线. 因此，我们通常把圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为圆锥曲线. 本章开头展现了用平面截圆锥形成圆锥曲线的图片.

圆锥曲线与科研、生产以及人类生活有密切的关系. 早在16、17世纪之交，开普勒就发现行星绕太阳运行的轨道是一个椭圆；探照灯反射镜就是由抛物线绕其对称轴旋转形成的抛物面；发电厂冷却塔的外形线是双曲线……为什么圆锥曲线有如此巨大的作用呢？我们可以从它们的几何特征以及性质中找到答案. 圆锥曲线的诸多应用可以引发学生学习圆锥曲线的兴趣.

圆锥曲线的发现与研究始于古希腊. 当时人们从纯粹几何学的观点研究了这种与圆密切相关的曲线，它们的几何性质是圆的几何性质的推广. 17世纪初期，笛卡尔发明了坐标系，人们开始在坐标系的基础上，用代数方法研究圆锥曲线.

本章我们继续采用必修课程《数学2》中研究直线与圆所用的坐标法，在探究圆锥曲线几何特征的基础上，建立它们的方程，通过方程研究它们的简单性质；通过方程组研究直线与圆锥曲线的位置关系；在感性认识的基础上，进一步认识曲线与方程的对应关系. 在这个过程中，进一步用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题和实际问题，进一步感受“数形结合”的基本思想.

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在必修阶段学习平面解析几何初步的基础上，在本模块中，学生将学习圆锥曲线与方程，了解圆锥曲线与二次方程的关系，掌握圆锥曲线的基本几何性质，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用. 结合已学过的曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，进一步体会数形结合的思想.

2. 学习目标

（1）圆锥曲线

① 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

② 经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程，掌握它们的定义、标准方程、几何图形及简单性质.

③ 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道双曲线的有关性质.

④ 能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题（直线与圆锥曲线的位置关系）和实际问题.

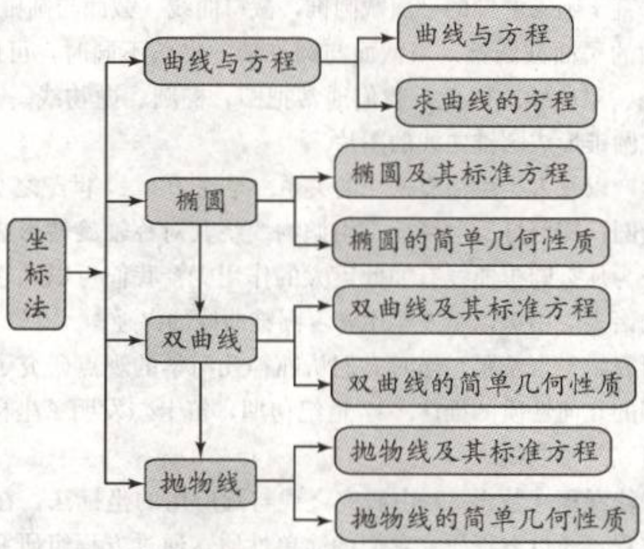
⑤ 通过圆锥曲线的学习，进一步体会数形结合的思想.

（2）曲线与方程

结合已学过的曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，进一步感受数形结合的基本思想.

二、内容安排

本章知识结构如下图所示.



这里主要分成两部分，曲线与方程；圆锥曲线的方程及其简单几何性质.

1. 建立曲线的方程是解析几何的主要内容之一. 要建立椭圆、双曲线、抛物线的方程，一方面，要建立适当的坐标系，了解曲线上的点所满足的几何条件，写出这条曲线上的点的集合，然后把动点坐标代入，化简后得到方程；另一方面，还要注意检查以这个方程的解为坐标的点是否在曲线上，即是否满足这个几何条件.

通过方程研究曲线的性质是解析几何的主要内容. 圆锥曲线的几何性质的研究是通过它们的方程展开的，这体现了解析几何通过代数方法研究几何图形性质的特点，也就是坐标法. 这一思想应该贯穿于整个解析几何的教学当中.

直线与圆锥曲线位置关系的问题，反映在代数上，就是它们的方程组成的方程组有无实数解的问题. 方程组有几组解，直线与圆锥曲线就有几个公共点；方程组没有实数解，直线与圆锥曲线就没有公共点.

2. 坐标法是研究几何问题的重要方法. 教学过程中，要始终贯穿坐标法这一重要思想，不怕重复. 通过坐标系，把点和坐标、曲线和方程联系起来，实现了形和数的统一.

用坐标法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何对象，然后对坐标和方程进行代数讨

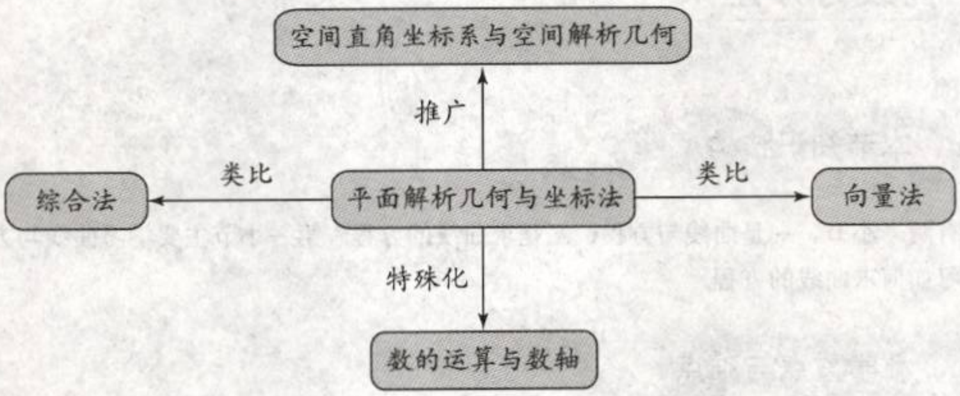
论；最后再把代数运算结果“翻译”成相应的几何结论．这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论．

3. 坐标法还可以与平面几何中的综合法、向量法建立联系，也可以推广到空间，解决立体几何问题．这种联系可以用下列框图表示．



三、课时分配

全章教学时间约 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 曲线与方程	约 2 课时
2.2 椭圆	约 5 课时
2.3 双曲线	约 3 课时
2.4 抛物线	约 4 课时
小结	约 2 课时

II 教科书分析

章引言主要分成三部分．

第一部分，是从用一个平面截圆锥面谈起．当这个平面垂直于圆锥的轴线时，截口曲线是圆．改变平面与圆锥轴线的夹角，截口曲线是什么呢？教科书提出了一个新的问题．教科书展示的三幅图片说明，当截面与圆锥轴线夹角不同时，可以得到不同的曲线，它们分别是椭圆、抛物线、双曲线．由于这些曲线是平面截圆锥而来，所以，称它们是圆锥曲线．

有些书上把圆作为椭圆的特例，是圆锥曲线的一种，统一放在圆锥曲线中．在《数学 2》中，对圆已经进行了讨论，本章讲的圆锥曲线不包括圆．

第二部分说明圆锥曲线与科研、生产以及日常生活有着密切的关系．比如，人造卫星和彗星运行的轨道、探照灯、手电筒、卫星接收天线、电影放映机的灯泡以及 GPS（全球定位系统）等等，它们

的工作原理都与圆锥曲线的性质有关．通过简单介绍圆锥曲线与生产、生活的关系，可以提高学生学习圆锥曲线的兴趣．

第三部分，教科书简单说明人类研究圆锥曲线的历史，并提出本章的学习目标．开始，人们是从纯几何的方法研究它们．用坐标的方法研究圆锥曲线，是17世纪笛卡儿发明了坐标系以后的事．由于笛卡儿发明坐标系，产生了一门新的学科，这就是解析几何——用代数的方法来研究几何．这是笛卡儿的伟大贡献．本章就是运用坐标法来研究圆锥曲线的几何性质．

2.1 曲线与方程

一、本节知识结构

本大节有两个小节，一是曲线与方程；二是求曲线的方程．第一小节主要学习曲线与方程的概念，第二小节学习如何求曲线的方程．

二、教学重点与难点

重点：曲线的方程、方程的曲线的概念；

难点：理解曲线的方程、方程的曲线的概念；求曲线的方程．

三、教科书编写意图与教学建议

2.1.1 曲线与方程

在必修课程《数学2》的直线与方程、圆与方程中，讨论了曲线与方程的关系，学生有了一定的感性认识．这一节主要目的是使得学生对曲线与方程的关系有一个更加系统、完整的认识．

一般地，在直角坐标系中，如果某曲线 C（看作适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的实数解有如下关系：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点．

那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线．

由曲线的方程的定义可知，如果曲线 C 的方程是 $f(x, y)=0$，那么点 $P_0(x_0, y_0)$ 在曲线 C 上的充分必要条件是 $f(x_0, y_0)=0$．

为了帮助学生理解曲线与方程的关系，首先要明确曲线指什么，方程指什么．本节练习的第1题是：

已知等腰三角形三个顶点的坐标分别是 $A(0, 3)$，$B(-2, 0)$，$C(2, 0)$．中线 AO（O 为原点）所在直线的方程是 $x=0$ 吗？为什么？

这里的“曲线”指 $\triangle ABC$ 中 BC 边的中线所在的直线，它的方程是 $x=0$，$x=0$ 是这条曲线的方程．

在理解什么是“曲线”时，要注意曲线是满足条件的图形；在理解“方程”时，要注意方程包含

对其中未知数的限制．比如，△ABC 中，BC 边的中线的方程是 $x=0$（$0\leqslant y\leqslant 3$）．

2.1.2　求曲线的方程

1. 解析几何研究问题的特点

教科书再一次说明解析几何研究问题的特点：

借助坐标系，用坐标表示点，把曲线看成满足某种条件的点的集合或轨迹，用曲线上的点的坐标 (x, y) 所满足的方程 $f(x, y)=0$ 表示曲线，通过研究方程的性质间接地来研究曲线的性质．这就是我们反复提到的坐标法．这样做的目的是使学生更加明确坐标法这一重要的数学思想，重要的数学思想方法不怕重复．

2. 关于例题

例 2、例 3 的目的都是要求学生逐步掌握求曲线的方程的一般步骤．

教学中，要注意引导学生通过概括例 2、例 3 的共同特征，让他们自己获得求曲线的方程的五个步骤．在这五个步骤中，第(2)步要求明确集合 $P=\{M|p(M)\}$，也就是明确"曲线"是什么，以便明确"说明以化简后的方程的解为坐标的点都在曲线上"的意义．第(4)步的化简强调同解变形．如果不能做到同解变形，那么要就特殊情况作出适当说明，以保证方程所表示的点集与集合 $P=\{M|p(M)\}$ 一致．

另外，通过对方程的检验，也可以确定其中变量的范围．比如，在例 3 中，求出方程 $y=\frac{1}{8}x^2$ 后，根据点在 x 轴的上方，指出 y 的取值范围是 $y>0$．

四、习题解答

练习（第 37 页）

1. 是．容易求出等腰三角形 ABC 的边 BC 上的中线 AO 所在直线的方程是

$$x=0.$$

2. $a=\frac{32}{25}$，$b=\frac{18}{25}$．

3. 解：设点 A，M 的坐标分别为 $(t, 0)$，(x, y)．

(1) 当 $t\neq 2$ 时，直线 CA 斜率

$$k_{CA}=\frac{2-0}{2-t}=\frac{2}{2-t},$$

所以

$$k_{CB}=-\frac{1}{k_{CA}}=\frac{t-2}{2}.$$

由直线的点斜式方程，得直线 CB 的方程为

$$y-2=\frac{t-2}{2}(x-2).$$

令 $x=0$，得 $y=4-t$，即点 B 的坐标为 $(0, 4-t)$．

由于点 M 是线段 AB 的中点，由中点坐标公式得

$$x=\frac{t}{2},\ y=\frac{4-t}{2}.$$

由 $x=\frac{t}{2}$ 得 $t=2x$，代入 $y=\frac{4-t}{2}$，得

$$y=\frac{4-2x}{2},$$

即

$$x+y-2=0. \quad ①$$

(2) 当 $t=2$ 时，可得点 A，B 的坐标分别为(2，0)，(0，2)，此时点 M 的坐标为(1，1)，它仍然适合方程①.

由(1)(2)可知，方程①是点 M 的轨迹方程，它表示一条直线.

习题 2.1 A 组

1. 点 $A(1,\ -2)$，$C(3,\ 10)$ 在方程 $x^2-xy+2y+1=0$ 表示的曲线上；点 $B(2,\ -3)$ 不在此曲线上.

2. 当 $c\neq 0$ 时，轨迹方程为 $x=\dfrac{c+1}{2}$；当 $c=0$ 时，轨迹为整个坐标平面.

3. 以两定点所在直线为 x 轴，线段 AB 垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，得点 M 的轨迹方程为

$$x^2+y^2=4.$$

4. 解法一：设圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 的圆心为 C，则点 C 的坐标是(3，0).

由题意，得 $CM\perp AB$，则有 $k_{CM}k_{AB}=-1$.

所以，$\dfrac{y}{x-3}\times\dfrac{y}{x}=-1$ $(x\neq 3,\ x\neq 0)$.

化简得 $x^2+y^2-3x=0$ $(x\neq 3,\ x\neq 0)$.

当 $x=3$ 时，$y=0$，点(3，0)适合题意；

当 $x=0$ 时，$y=0$，点(0，0)不合题意.

解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-3x=0,\\ x^2+y^2-6x+5=0\end{cases}$$

得 $x=\dfrac{5}{3}$，$y=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$.

所以，点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2-3x=0$，$\dfrac{5}{3}\leqslant x\leqslant 3$.

解法二：注意到 $\triangle OCM$ 是直角三角形，利用勾股定理，得

$$x^2+y^2+(x-3)^2+y^2=9,$$

即 $x^2+y^2-3x=0$.

其他同解法一.

B 组

1. 解：由题意，设经过点 P 的直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

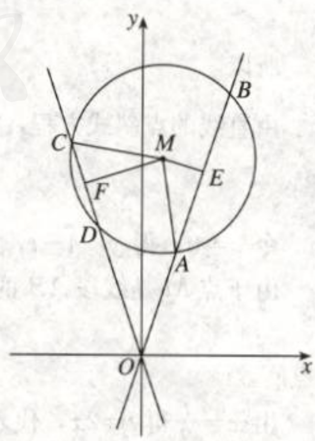
因为直线 l 经过点 P (3，4)，所以 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1$.

因此，$ab-4a-3b=0$

由已知点 M 的坐标为 $(a,\ b)$，所以点 M 的轨迹方程为 $xy-4x-3y=0$.

2. 解：如图，设动圆圆心 M 的坐标为 $(x,\ y)$. 由于动圆截直线 $3x-y=0$ 和 $3x+y=0$ 所得弦分别为 AB，CD，所以，$|AB|=8$，$|CD|=4$.

过点 M 分别作直线 $3x-y=0$ 和 $3x+y=0$ 的垂线，垂足分别为 E，F，则 $|AE|=4$，$|CF|=2$.



(第 2 题)

$$|ME|=\frac{|3x-y|}{\sqrt{10}},\ |MF|=\frac{|3x+y|}{\sqrt{10}}.$$

连接 MA，MC，因为 $|MA|=|MC|$，则有

$$|AE|^2+|ME|^2=|CF|^2+|MF|^2,$$

所以

$$16+\frac{(3x-y)^2}{10}=4+\frac{(3x+y)^2}{10}.$$

化简，得

$$xy=10.$$

因此，动圆圆心的轨迹方程是 $xy=10$.

2.2　椭圆

一、本节知识结构

本节分为两个小节，由两个部分组成：椭圆及其标准方程、椭圆的简单几何性质. 其结构如下图所示.

二、教学重点与难点

重点：掌握椭圆的标准方程，理解坐标法的基本思想.

难点：椭圆标准方程的推导与化简，坐标法的应用.

三、教科书编写意图与教学建议

2.2.1　椭圆的标准方程

1. 椭圆的定义

椭圆是常见的曲线，通过引言以及日常生活的体验，学生对椭圆已有一定的认识. 为了使学生掌握椭圆的本质特征，得到椭圆的定义，教科书介绍了一种画椭圆的方法，通过画图过程揭示椭圆上的点所要满足的条件.

在定义椭圆时，对“常数”加上了一个条件，即常数要大于 $|F_1F_2|$.

这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即轨迹为一条线段或无轨迹. 对于这两种情况，教学中可以及时加以说明，学生是不难理解的；而且，可以加深对“常数要大于 $|F_1F_2|$”的理解. 另一方

面，还可以通过在$\triangle MF_1F_2$中，两边之和大于第三边来理解．当然这样做的弊端是忽略特殊情形，即点M位于椭圆长轴端点的情形．

在椭圆定义的教学中，一定要充分展示椭圆的产生过程，引导学生分析椭圆上的点所满足的几何条件，从而为坐标系的选择和椭圆方程的建立奠定基础．

2. 椭圆标准方程的建立

首先要建立坐标系．曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不同．为了使方程简单，坐标系的选择要恰当．怎样选择恰当的坐标系，需要根据具体情况来确定．一般情况下，应注意使已知点的坐标和直线（曲线）的方程尽可能简单．在求椭圆的标准方程时，注意到图形的对称性，不难想到使x轴经过两个定点F_1，F_2，并且使坐标原点与线段F_1F_2的中点重合，这样，两个定点的坐标比较简单，便于推导方程．

在求方程时，设椭圆的焦距为$2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为$2a(a>0)$，当然$a>c$．这是为了使焦点及长轴的两个端点的坐标不出现分式，以便导出的椭圆方程形式简单．

教科书在推导出方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$以后，设置了一个思考题：

观察图 2-1，你能从中找出表示a，c，$\sqrt{a^2-c^2}$的线段吗？

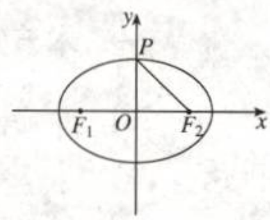


图 2-1

目的在于说明为什么令$b^2=a^2-c^2$，让学生感受这一做法的合理性．这样不仅使方程具有对称性，而且b有明确的几何意义．

带根式的方程的化简是学生感到困难的，是教学的难点．特别是由点M适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数的形式，化简时要进行两次平方，方程中字母超过 3 个，且次数高、项数多，初中代数中没有做过这样的题目．教学时，要注意说明这类方程化简的方法，一般来说，

(1) 方程中只有一个根式时，需将它单独留在方程的一边，把其他各项移到另一边；

(2) 方程中有两个根式时，需将它们分散，放在方程的两边，使其中一边只有一个根式．

求得椭圆的方程②（指$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$）以后，教科书指出："从上述过程可以看到，椭圆上任意一点的坐标都满足方程②；以方程②的解为坐标的点到椭圆的两个焦点$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$的距离之和为$2a$，即以方程②的解为坐标的点都在椭圆上．由曲线与方程的关系可知，方程②是椭圆的方程，我们把它叫做椭圆的标准方程．"目的是进一步加深对"曲线与方程"关系的认识．

后面在求出双曲线、抛物线方程之后也有类似的说明，都是同样的目的．

在求出椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$后，教科书提出一个思考题："如果焦点$F_1$，$F_2$在$y$轴上，且点$F_1$，$F_2$的坐标分别为$(0,\ -c)$，$(0,\ c)$，$a$，$b$的意义同上，那么椭圆的方程是什么？"

稍加思索，学生不难发现，应该把方程中$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中$x$，$y$的顺序对换，得到椭圆的另一个标准方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$．这样一来，椭圆的标准方程有两个．

3. 对椭圆标准方程的认识

在给出椭圆的两个标准方程以后，应向学生指出以下几点：

(1) 在椭圆的两种标准方程中，都有

$$a>b>0.$$

(2) 椭圆的焦点总是在长轴上．如果焦点在 x 轴上，那么焦点坐标为$(c, 0)$，$(-c, 0)$；如果焦点在 y 轴上，那么焦点坐标为$(0, c)$，$(0, -c)$．

(3) a，b，c 始终满足关系式 $c^2=a^2-b^2$．

4. 三个例题的处理

例 1 的边空提出："你还能用其他方法求它的方程吗？"这里的"其他方法"指待定系数法．

由题意，椭圆的两个焦点在 x 轴上，因此，可以设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由已知，$c=2$，所以，$a^2-b^2=4$．　　①

又由已知，得$\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1$．　　②

联立①②，解方程组，得 $a^2=10$，$b^2=6$．

因此，所求椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$．

这也是为了教学生学会利用椭圆的标准方程解决问题．

在例 2 之后教科书提出一个思考题："从例 2 你能发现椭圆与圆之间的关系吗？"例 2 有三个作用：第一，再次教给学生利用中间变量求点的轨迹方程的方法；第二，向学生说明，如果求得的点的轨迹的方程形式与椭圆的标准方程相同，那么这个轨迹是椭圆；第三，让学生知道，圆按某一个方向作伸缩变换可以得到椭圆．

例 3 给出了生成椭圆的另一种方法：一个动点到两个定点连线的斜率之积是一个负常数．可以使学生体会椭圆的几何特征可以有不同的表现形式．

5. 注意信息技术的运用

给出动点满足的几何条件之后，信息技术在探究曲线的形状方面有着特殊的作用．有条件的学校，应该注意发挥它的作用．比如演示平面截圆锥面的过程，演示椭圆的形成过程，等等．

2.2.2　椭圆的简单几何性质

1. 如何研究曲线的几何性质

根据曲线的方程研究曲线的几何性质，并正确地画出它的图形，是解析几何的基本问题之一．

根据曲线的条件求出方程，如果说是解析几何的手段，那么根据曲线的方程研究它的几何性质、画图可以说是解析几何的一个目的．

本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面使学生掌握椭圆的简单几何性质，掌握标准方程中 a，b 以及 c，e 的几何意义，a，b，c，e 之间相互关系．同时，通过对椭圆标准方程的讨论，使学生了解在解析几何中如何用代数方法研究曲线的性质．正如引言中提出的，圆锥曲线的性质可以从纯几何的角度讨论，但是需要较多的知识准备，而且要有较强的逻辑推理能力．用坐标法研究圆锥曲线的性质，将复杂的几何关系的研究转化为对曲线方程特点的考察．代数方法可以程序化地进行运算，用坐标法研究曲线的性质有较强的规律性．

在利用方程研究椭圆的简单几何性质之前，可以引导学生观察椭圆——几何直观，想一想我们应该关注椭圆的哪些方面的性质，研究哪些问题，如何研究．引导学生首先从整体上把握几何图形，这就是范围、对称性；其次是研究它的顶点（与对称轴的交点）、扁平程度（离心率），等等．然后考虑

方程的各种特征对应着椭圆的哪些特征，逐渐让学生掌握研究曲线的几何性质的方法.

2. 椭圆的简单几何性质

为了有序地讨论性质，可以先引导学生分析得出以下结论：

变量 x，y 的取值范围	$\Leftrightarrow$	曲线的范围
方程的对称性	$\Leftrightarrow$	曲线的对称性
$x=0$ 或 $y=0$ 时方程的解	$\Leftrightarrow$	曲线与对称轴的交点（顶点）
a，b，c	$\Leftrightarrow$	曲线的几何形状

教科书以标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$为例讨论椭圆的几何性质．把方程写成$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$，利用$\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$得到关于 x 的不等式，解出 x 的范围．这种方法具有普遍性.

在解析几何中讨论曲线的范围，就是确定方程中两个变量 x，y 的取值范围.

不等式组$\begin{cases}|x|\leqslant a\\|y|\leqslant b\end{cases}$的解集表示的区域，就是平面内四个不等式 $x\geqslant -a$，$x\leqslant a$，$y\geqslant -b$，$y\leqslant b$ 所表示的区域的交集，即直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围成的矩形区域.

确定曲线范围的另一个目的，是用描点法画曲线时就可以不取曲线范围以外的点了.

在讨论椭圆的对称性之前，可以先复习已经学习过的对称的概念和关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系．然后说明“以 $-x$ 代 x，方程不变，则曲线关于 y 轴对称；以 $-y$ 代 y，方程不变，则曲线关于 x 轴对称；同时以 $-x$ 代 x、以 $-y$ 代 y，方程也不变，则曲线关于原点对称”.

容易证明，如果曲线具有上述三种对称性中的任意两种，那么它一定还具有另一种对称性．例如，如果曲线关于 x 轴和原点对称，那么它一定关于 y 轴对称．事实上，设点 $P(x, y)$ 在曲线上，因为曲线关于 x 轴对称，所以点 $P_1(x, -y)$ 必在曲线上．又因为曲线关于原点对称，所以点 P_1 关于原点的对称点 $P_2(-x, y)$ 必在曲线上．综上，点 $P(x, y)$，$P_2(-x, y)$ 都在曲线上，所以曲线关于 y 轴对称.

要让学生明白：图形对称性的本质是构成图形的点的对称性．抓住了点的对称性就抓住了图形的对称性.

教科书中侧重于讲标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的椭圆的性质．由此，容易理解另一个标准方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$表示的椭圆的性质．复习时，教师可列出图表，由学生解答和小结.

用解析法研究曲线的几何性质是通过对方程的讨论进行的，方程建立在坐标系的基础上．由于坐标系选取不同，同一曲线的方程的形式也不同，但是，最后得出曲线的几何性质是一致的，即与坐标系的选取无关．教学时，可以向学生讲清图形本身的性质，把曲线不同位置的特殊性质与曲线本身的几何性质区别开来.

3. 关于椭圆的离心率

离心率的作用是什么？离心率刻画椭圆的什么性质？教科书设置了一个“思考”：“观察不同的椭圆，我们发现，椭圆的扁平程度不一．那么，用什么量可以刻画椭圆的扁平程度呢？”当然，回答可以是$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$等.

离心率的概念比较抽象．为了形象地加以说明，教科书在边空增加了“椭圆的离心率可以形象地理解为，在椭圆的长轴长不变的前提下，两个焦点离开中心的程度.”这个说明.

有条件的学校，可以借助信息技术动态改变 c 的大小，演示在 a 不变的情况下椭圆扁平程度的变化，加深对离心率的认识.

4. 圆与椭圆的关系问题

实际上，分类方法的不同可能形成不同的答案.

教科书中，“当且仅当 $a=b$ 时，$c=0$，这时两个焦点重合，图形变成圆，它的方程为 $x^2+y^2=a^2$.”并不意味着圆是特殊的椭圆. 在椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，有 $a>b>0$ 的限制.

为了教学方便，本教科书中规定椭圆与圆是两种不同的曲线，因此椭圆的离心率满足不等式

$$0<e<1.$$

5. 关于“探究”栏目

教科书中的“探究”栏目：“你能运用三角函数的知识解释，为什么 $e=\frac{c}{a}$越大，椭圆越扁？$e=\frac{c}{a}$越小，椭圆越圆吗?”事实上，如图 2-2，在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_2O$ 中，$\cos\angle BF_2O=\frac{c}{a}$，$\frac{c}{a}$越大，$\angle BF_2O$ 越小，椭圆越扁；$\frac{c}{a}$越小，$\angle BF_2O$ 越大，椭圆越圆.

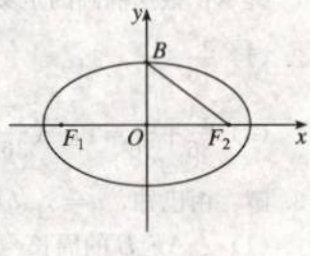


图 2-2

6. 关于例题与习题

例 4 是为巩固椭圆的简单几何性质设置的.

例 5 介绍了椭圆应用的一个例子.

例 6 是通过一个具体的例子使学生感受椭圆的另外一种定义方式，教学时要注意控制难度，不要对学生提出椭圆的“第二定义”的概念，更不要提出建立圆锥曲线统一方程的要求.

例 7 是一道关于直线与椭圆位置关系的例题，问在椭圆上是否存在一点，它到直线 l 的距离最小，并求这个最小距离. 教学时，一定要讲清楚教科书中的“分析”，先直观，然后用坐标法加以解决，把几何问题代数化，用代数运算结果解释几何问题.

习题 2.2A 组第 9 题涉及“近日点”“远日点”两个概念，可以对学生稍加说明.

要说明近日点、远日点、太阳中心（椭圆轨道的焦点）在同一条直线上. 这个问题可以用坐标法来证明，即证明椭圆上到焦点的距离最大和最小的点，恰是椭圆长轴的两个端点.

我们用椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

来证明.

如图 2-3，设点 $P(x_0,\ y_0)$是椭圆上任意一点，r 为点 P 与椭圆左焦点 $F_1(-c,\ 0)$的距离，则

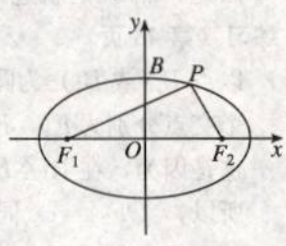


图 2-3

$$\begin{aligned}r^2&=(x_0+c)^2+y_0^2\\&=x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2\\&=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2+2cx_0+c^2+b^2\\&=\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2.$$

因为 $r>0$，所以 $r=\frac{c}{a}x_0+a$.

又 $-a\leqslant x_0\leqslant a$，

所以，当 $x_0=a$ 时，r 最大；$x_0=-a$ 时，r 最小.

四、习题解答

练习（第 42 页）

1. 14.

提示：根据椭圆的定义，$|PF_1|+|PF_2|=20$，因为$|PF_1|=6$，所以$|PF_2|=14$.

2. (1) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$； (2) $\frac{y^2}{16}+x^2=1$；

(3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$，或$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{16}=1$.

3. 解：由已知，$a=5$，$b=4$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

(1) $\triangle AF_1B$ 的周长$=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|$. ①

由椭圆的定义，得

$$|AF_1|+|AF_2|=2a，|BF_1|+|BF_2|=2a， \quad ②$$

所以，$\triangle AF_1B$ 的周长$=4a=20$.

(2) 如果 AB 不垂直于 x 轴，$\triangle AF_1B$ 的周长不变化.

这是因为①②两式仍然成立，$\triangle AF_1B$ 的周长$=20$，这是定值.

4. 解：设点 M 的坐标为(x, y)，由已知，得

直线 AM 的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+1}(x\neq-1);$$

直线 BM 的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-1}(x\neq1).$$

由题意，得$\frac{k_{AM}}{k_{BM}}=2$，所以，$\frac{y}{x+1}=2\times\frac{y}{x-1}(x\neq\pm1，y\neq0)$.

化简，得 $x=-3(y\neq0)$.

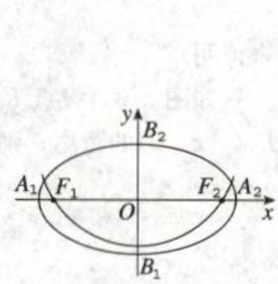
因此，点 M 的轨迹是直线 $x=-3$，并去掉点$(-3, 0)$.

练习（第 48 页）

1. 以点 B_2（或 B_1）为圆心，以线段 OA_2（或 OA_1）为半径画圆，圆与 x 轴的两个交点分别为 F_1，F_2. 点 F_1，F_2 就是椭圆的两个焦点.

这是因为，在 $\mathrm{Rt}\triangle B_2OF_2$ 中，$|OB_2|=b$，$|B_2F_2|=|OA_2|=a$，

所以，$|OF_2|=c$. 同样有$|OF_1|=c$.



（第 1 题）

2. (1) 焦点坐标为$(-8, 0)$，$(8, 0)$；

(2) 焦点坐标为$(0, 2)$，$(0, -2)$.

3. (1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$； (2) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.

4. (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　(2) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$，或$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$.

5. (1) 椭圆 $9x^2+y^2=36$ 的离心率是$\frac{2}{3}\sqrt{2}$，椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的离心率是$\frac{1}{2}$，

因为$\frac{2}{3}\sqrt{2}>\frac{1}{2}$，所以，椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 更圆，椭圆 $9x^2+y^2=36$ 更扁；

(2) 椭圆 $x^2+9y^2=36$ 的离心率是$\frac{2}{3}\sqrt{2}$，椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$ 的离心率是$\frac{1}{5}\sqrt{10}$，

因为$\frac{2}{3}\sqrt{2}>\frac{1}{5}\sqrt{10}$，所以，椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$ 更圆，椭圆 $x^2+9y^2=36$ 更扁.

6. (1) $\left(3,\ \frac{8}{5}\right)$；(2) $(0,\ 2)$，$\left(-\frac{48}{37},\ -\frac{70}{37}\right)$.

7. $\frac{8\sqrt{2}}{7}$.

习题 2.2　A 组

1. 解：由点 $M(x,\ y)$满足的关系式$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$ 以及椭圆的定义得，点 M 的轨迹是以 $F_1(0,\ -3)$，$F_2(0,\ 3)$ 为焦点，长轴长为 10 的椭圆. 它的方程是

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1.$$

2. (1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$；　(2) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$；

(3) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$，或$\frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{40}=1$.

3. (1) 不等式$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-4\leqslant y\leqslant 4$ 表示的区域的公共部分；

(2) 不等式$-2\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{5}$，$-\frac{10}{3}\leqslant y\leqslant\frac{10}{3}$表示的区域的公共部分.

图略.

4. (1) 长轴长 $2a=8$，短轴长 $2b=4$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标分别是$(-2\sqrt{3},\ 0)$，$(2\sqrt{3},\ 0)$，顶点坐标分别是$(-4,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ -2)$，$(0,\ 2)$；

(2) 长轴长 $2a=18$，短轴长 $2b=6$，离心率 $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，焦点坐标分别是$(0,\ -6\sqrt{2})$，$(0,\ 6\sqrt{2})$，顶点坐标分别是$(0,\ -9)$，$(0,\ 9)$，$(-3,\ 0)$，$(3,\ 0)$.

5. (1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$；　(2) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，或$\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$；

(3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，或$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

6. 解：由已知，椭圆的焦距$|F_1F_2|=2$.

因为$\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 1，所以，$\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_P|=1$，

解得　$|y_P|=1$.

代入椭圆的方程，得$\frac{x^2}{5}+\frac{1}{4}=1$，

解得　$x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

所以，点 P 的坐标是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \pm1\right)$，共有 4 个.

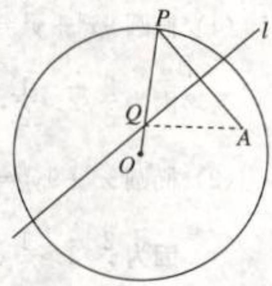
7. 解：如图，连接 QA.

由已知，得 $|QA|=|QP|$.

所以，$|QO|+|QA|=|QO|+|QP|=|OP|=r$.

又因为点 A 在圆内，所以 $|OA|<|OP|$.

根据椭圆的定义，点 Q 的轨迹是以 O，A 为焦点，r 为长轴长的椭圆.



（第 7 题）

8. 解：设这组平行线的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x+m$.

把 $y=\dfrac{3}{2}x+m$ 代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，得

$$9x^2+6mx+2m^2-18=0.$$

这个方程根的判别式

$$\Delta=36m^2-36(2m^2-18).$$

(1) 由 $\Delta>0$，得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$.

当这组直线在 y 轴上的截距的取值范围是 $(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$ 时，直线与椭圆相交.

(2) 设直线与椭圆相交得到线段 AB，并设线段 AB 的中点为 $M(x,\ y)$.

则 $\quad x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{m}{3}$.

因为点 M 在直线 $y=\dfrac{3}{2}x+m$ 上，

与 $x=-\dfrac{m}{3}$ 联立，消去 m，得 $3x+2y=0$.

这说明点 M 的轨迹是这条直线被椭圆截下的弦（不包括端点），这些弦的中点在一条直线上.

9. $\dfrac{x^2}{3.525^2}+\dfrac{y^2}{2.875^2}=1$.

10. 地球到太阳的最大距离为 $1.528\,8\times10^8$ km，最小距离为 $1.471\,2\times10^8$ km.

B 组

1. 解：设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，点 P 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则

$$x=x_0,\ y=\frac{3y_0}{2}.$$

所以，$x_0=x$，$y_0=\dfrac{2}{3}y$. ①

因为点 $P(x_0,\ y_0)$ 在圆上，所以

$$x_0^2+y_0^2=4. \quad ②$$

将①代入②，得点 M 的轨迹方程为

$$x^2+\frac{4}{9}y^2=4，即$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

所以点 M 的轨迹是一个椭圆. 与例 2 相比可见，椭圆也可以看作是由圆沿某个方向压缩或拉伸得到.

2. 解法一：设动圆圆心为 $P(x,\ y)$，半径为 R，两已知圆的圆心分别为 O_1，O_2.

分别将两已知圆的方程

$$x^2+y^2+6x+5=0,$$
$$x^2+y^2-6x-91=0,$$

配方，得

$$(x+3)^2+y^2=4,$$
$$(x-3)^2+y^2=100.$$

当⊙P与⊙O_1：$(x+3)^2+y^2=4$外切时，有

$$|O_1P|=R+2, \quad ①$$

当⊙P与⊙O_2：$(x-3)^2+y^2=100$内切时，有

$$|O_2P|=10-R. \quad ②$$

①②两式的两边分别相加，得$|O_1P|+|O_2P|=12$，

即

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \quad ③$$

化简方程③.

先移项，再两边分别平方，并整理，得

$$2\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12+x. \quad ④$$

将④两边分别平方，并整理，得

$$3x^2+4y^2-108=0. \quad ⑤$$

将常数项移至方程的右边，两边分别除以 108，得

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1. \quad ⑥$$

由方程⑥可知，动圆圆心的轨迹是椭圆，它的长轴和短轴长分别为 12，$6\sqrt{3}$.

解法二：同解法一，得方程

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \quad ①$$

由方程①可知，动圆圆心 $P(x, y)$ 到点 $O_1(-3, 0)$ 和点 $O_2(3, 0)$ 距离的和是常数 12，所以点 P 的轨迹是焦点为$(-3, 0)$，$(3, 0)$，长轴长等于 12 的椭圆. 并且这个椭圆的中心与坐标原点重合，焦点在 x 轴上，于是可求出它的标准方程.

因为 $2c=6$，$2a=12$，

所以 $c=3$，$a=6$.

所以 $b^2=36-9=27$.

于是，动圆圆心的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

3. 解：设 d 是点 M 到直线 $x=8$ 的距离，根据题意，所求轨迹就是集合

$$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{d}=\frac{1}{2}\right.\right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|8-x|}=\frac{1}{2}.$$

将上式两边平方，并化简，得

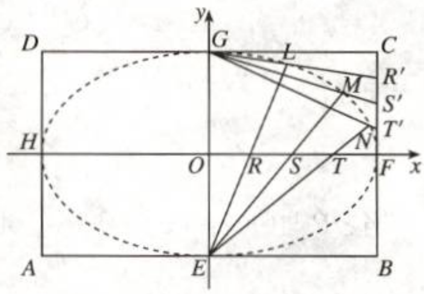
$$3x^2+4y^2=48,$$

即

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

所以，点 M 的轨迹是长轴、短轴长分别为 8，$4\sqrt{3}$的椭圆.

4. 解：如图，由已知，得 $E(0,\ -3)$，$F(4,\ 0)$，$G(0,\ 3)$，$H(-4,\ 0)$.



（第 4 题）

因为 R，S，T 是线段 OF 的四等分点，R'，S'，T' 是线段 CF 的四等分点，

所以，$R(1,\ 0)$，$S(2,\ 0)$，$T(3,\ 0)$；

$$R'\left(4,\ \frac{9}{4}\right),\ S'\left(4,\ \frac{3}{2}\right),\ T'\left(4,\ \frac{3}{4}\right).$$

直线 ER 的方程是 $y=3x-3$；

直线 GR' 的方程是

$$y=-\frac{3}{16}x+3.$$

联立这两个方程，解得

$$x=\frac{32}{17},\ y=\frac{45}{17}.$$

所以，点 L 的坐标是$\left(\frac{32}{17},\ \frac{45}{17}\right)$.

同样，点 M 的坐标为$\left(\frac{16}{5},\ \frac{9}{5}\right)$，点 N 的坐标为$\left(\frac{96}{25},\ \frac{21}{25}\right)$.

由作图可见，可以设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,\ n>0)$. ①

把点 L，M 的坐标代入方程①，并解方程组，得

$$\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4^2},\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{3^2}.$$

所以经过点 L，M 的椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

把点 N 的坐标代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$，得

$$\frac{1}{16}\times\left(\frac{96}{25}\right)^2+\frac{1}{9}\times\left(\frac{21}{25}\right)^2=1,$$

所以点 N 在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上.

因此点 L，M，N 都在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上.

2.3 双曲线

一、本节知识结构

本节分为两个小节，由两个部分组成：双曲线及其标准方程、双曲线的简单几何性质. 其结构如下图所示.

双曲线的定义

↓

双曲线的标准方程

↓

双曲线的简单几何性质

二、教学重点与难点

重点：了解双曲线的标准方程及其几何性质，进一步理解坐标法.

难点：双曲线标准方程的推导与化简，双曲线的渐近线.

三、教科书编写意图与教学建议

2.3.1 双曲线的标准方程

1. 双曲线的定义

双曲线的定义的教学可以类比椭圆的定义的教学.

教学时从教科书提出的“思考”说起. 椭圆是平面上到两个定点距离之和为一个常数（大于两定点间的距离）的点的轨迹，很自然提出问题，平面上到两个定点距离之差为一个非零常数的点的轨迹是什么呢?

在讲解双曲线的定义前，要先画出曲线，通过画图加深对曲线上的点所满足的几何条件的认识，概括出双曲线的定义.

在定义双曲线时，要注意条件中对“非零常数”的约束：常数要小于$|F_1F_2|$. 这可以通过在$\triangle MF_1F_2$中，两边之差小于第三边来理解，当然这一说法忽略特殊点M位于双曲线实轴端点的情形. 对于$\|MF_1|-|MF_2\|$等于一个常数时，点M的轨迹是什么，可以让学生想一想，学生不难发现是两条射线. 在条件中学生容易忽视的还有“绝对值”这个关键词. 同样可以让学生探究$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$时，此时曲线是什么样，不难发现曲线是双曲线的一支.

如果条件许可，以上这些关于双曲线特征的认识，可以在信息技术的帮助下进行，效果可能会更好些.

2. 双曲线的标准方程

双曲线标准方程的教学可以类比椭圆标准方程的教学，教科书的处理方法也是如此. 因此，这一小节的教学可以参照第 2. 2. 1 节进行. 教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，尤其是它们的不同点.

从“平面内与两个定点的距离差的绝对值等于常数（与椭圆不同，这个常数要大于 0 且小于$|F_1F_2|$)的点M的轨迹”这个双曲线的定义出发，推导出它的标准方程. 推导过程说明，双曲线上任意一点的坐标都适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，坐标适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的点都在双曲线上. 进一步加深对“曲线与方程”关系的认识.

讲述双曲线的标准方程时，可与椭圆比较如下：

(1) 如教科书中图 2.3-2，设点 $M(x, y)$为双曲线上任意一点，若点 M 在双曲线的右支上，则 $|MF_1|>|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$；若点 M 在双曲线的左支上，则$|MF_1|<|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=-2a$. 综上得到$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$，这与椭圆不同.

(2) 当得到$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$后，可以类比椭圆进行处理. 因为 $a<c$，所以$c^2-a^2>0$，令 $c^2-a^2=b^2$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，这与椭圆不同.

教科书在边空提出“你能在 y 轴上找一点 B，使得$|OB|=b$ 吗?”因为有了处理椭圆的经验，联想勾股定理，点 B 是不难找到的.

(3) 通过比较两种不同形式的双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{与} \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0).$$

向学生说明，如果 x^2项的系数是正的，那么焦点在 x 轴上；如果 y^2的系数是正的，那么焦点在 y 轴上. 对于双曲线，要强调 a 不一定大于b，因此不能像椭圆那样通过比较分母的大小来判断焦点在哪一个坐标轴上.

(4) 在教学过程中，可抓住与椭圆标准方程的异同，在教师指导下由学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系：

椭　圆	双　曲　线
$\lvert MF_1\rvert+\lvert MF_2\rvert=2a$	$\lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert=\pm 2a$
$a>c>0$, $a^2-c^2=b^2(b>0)$	$c>a>0$, $c^2-a^2=b^2(b>0)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0$，a 不一定大于 $b)$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

3. 关于例题与“探究”

本小节共设置了两个例题与一个“探究”.

例 1 是为熟悉双曲线的标准方程而设置的，也是用待定系数法求曲线的方程，当然这里的系数比较容易确定.

例 2 说明双曲线的应用，也是为了进一步熟悉双曲线的定义. 教科书在这道例题之后指出，如果再增设一个观察点 C，利用 B，C（或 A，C）两处测得的点 P 发出的信号的时间差，就可以求出另一个双曲线的方程，解这两个方程组成的方程组，就能确定点 P 的准确位置，这是双曲线的一个重要应用. GPS（Global Positioning System，全球定位系统）就是根据这个原理. 有条件的学校可以让学生利用互联网查找这方面的资料，增长知识.

与椭圆 2.2.1 节的例 3 照应，在本小节例 2 之后给出了一个探究题：

一个动点 M 到两个定点 F_1，F_2 连线的斜率之积是一个正常数，探究点 M 的轨迹.

这是双曲线的另一种产生方法. 因为有 2.2.1 节例 3 的经验，这个“探究”并不困难.

2.3.2 双曲线的简单几何性质

1. 双曲线的简单几何性质

双曲线的简单几何性质的要求与椭圆不同，要求较低.

双曲线几何性质的教学，可以与椭圆的几何性质进行类比，让学生讨论、归纳. 在这个过程中，培养学生学会观察问题、研究问题的能力. 教师侧重指导与椭圆几何性质的不同之处，以及椭圆没有

的几何性质的研究，比如渐近线.

(1) 范围

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $x^2\geqslant a^2$，当$|x|\geqslant a$ 时，y 才有实数值；对于 y 的任何值，x 都有实数值. 要讲清在直线 $x=-a$，$x=a$ 之间没有图象. 当 x 的绝对值无限增大时，y 的绝对值也无限增大，所以曲线是无限伸展的，不像椭圆那样是封闭的曲线.

(2) 对称性

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可以让学生回答双曲线具有的对称性，并说明理由.

(3) 顶点

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两个顶点$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，且只有两个顶点. 而椭圆有四个顶点，这与椭圆不同.

令 $x=0$，方程 $y^2=-b^2$无实数根，所以它与 y 轴无交点.

线段 A_1A_2 是双曲线的实轴，$2a$ 是双曲线的实轴长；线段 B_1B_2 是双曲线的虚轴，$2b$ 是双曲线的虚轴长.

因为学生没有学过共轭双曲线，所以对虚轴不好理解，往往把虚轴与椭圆的短轴混淆，教学中要提醒他们注意.

(4) 渐近线

对圆锥曲线来说，这是双曲线特有的性质. 利用双曲线的渐近线来画双曲线特别方便，而且较为精确. 只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线，就能画出它的近似图形.

在学习双曲线的渐近线前，教科书设置了一个“信息技术应用”栏目：“用《几何画板》画出双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，在双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$位于第一象限的曲线上画一点 M，测量点 M 的横坐标 x_M 以及它到直线$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$的距离 d，沿曲线向右上角拖动点 M，观察 x_M 与 d 的大小关系，你发现了什么?”

这个栏目的目的在于让学生通过操作，直观感受，在向右上角拖动点 M 时，x_M(无限)增大，d 逐渐减小，(无限) 趋向于零. 教科书指出，利用信息技术，可以看到，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的各支向外延伸时，与两条直线逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线. 也就是说，双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

这里没有给出双曲线的渐近线严格定义，只是一种描述. 对于“无限接近”也只能是直观感受、操作确认.

教科书在本节末的“探究与发现”栏目中，解释了“为什么 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线”供学生阅读参考，以便完善对双曲线渐近线的正确认识.

(5) 离心率

与椭圆一样，我们把比值 $e=\frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率. 我们知道，椭圆的离心率是描述椭圆扁平程度的一个重要数据，双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数据. 因为 $c>a$，所以双曲线的离心率 $e>1$. 又由于$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，当 e 的值逐渐增大时，$\frac{b}{a}$的值就逐渐增大. 这时，双曲线的形状就由扁狭逐渐变得开阔，也就是说，双曲线的“张口”逐渐增大.

借助信息技术的演示，会增强学生对“双曲线的离心率是如何影响双曲线‘张口’大小的”的认识.

2. 关于例题

本小节设置了四个例题（例 3—例 6）：例 3 是为了巩固双曲线的几何性质；例 4 既说明了双曲线的应用，同时学习如何根据条件确定双曲线标准方程中的 a，b，从而得到双曲线的标准方程；与 2.2.2 节例 6 对应，例 5 是通过一个具体的例题说明双曲线的另一种定义，这道例题的教学可以与椭圆的例 6 类比；例 6 是一道有关直线与双曲线的位置关系的题目，通过解方程组确定交点的坐标，由交点的坐标确定线段的长度．这是一种普适的方法．双曲线的弦有两种情形：一是弦的两个端点都在双曲线的同一支上，另一种是弦两端分别在双曲线的两支上．

教科书在例 6 之后设置了“思考”栏目：“你能求出$\triangle AF_1B$ 的周长吗?”

由于例题中已经求出点 A，B 的坐标分别是$(-3,\ -2\sqrt{3})$，$\left(\frac{9}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$，因此，再求出 AF_1，BF_1 并不困难．

因为点 F_1 的坐标是$(-3,\ 0)$，所以

$$|AF_1|=\sqrt{(-3+3)^2+(-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3};$$

$$|BF_1|=\sqrt{(\frac{9}{5}+3)^2+(-\frac{2}{5}\sqrt{3})^2}=\frac{14}{5}\sqrt{3}.$$

又$|AB|=\frac{16}{5}\sqrt{3}$，所以

$$\triangle AF_1B \text{ 的周长是 } |AB|+|AF_1|+|BF_1|=\frac{16}{5}\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\frac{14}{5}\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

四、教学设计案例

双曲线及其标准方程

1. 教学任务分析

（1）学生已有的主要知识结构

学生已经学习过椭圆，了解椭圆的定义．经历了根据椭圆的几何特征，建立适当的直角坐标系，求椭圆标准方程的过程．也了解椭圆的简单几何性质．

（2）建立新的知识结构

建立曲线方程的依据是：弄清曲线上的动点运动时所满足的几何条件．与椭圆类比，弄清双曲线上的点所满足的几何条件．

类比建立椭圆标准方程的过程，建立双曲线的标准方程．

（3）在这个过程中，注意与建立椭圆的标准方程进行比较．

2. 教学重点与难点

重点：了解双曲线的定义．

难点：双曲线标准方程推导过程中的化简．

3. 教学的基本流程

回忆椭圆的定义，与已有的知识联系

↓

提出类似的问题，引入双曲线的定义

↓

根据条件，建立双曲线的标准方程

↓

小结与布置作业

4. 教学情境设计

问 题	设 计 意 图	师 生 活 动
(1) 我们已经学习过椭圆．椭圆是平面上一个动点到两个定点距离之和等于定长的点的轨迹，当然这个定长要大于这两个定点之间的距离．那么，平面上到两个定点距离的差是一个定长的点的轨迹是什么呢？	数学教学应当从问题开始．首先设疑，提出新的问题，打破知识结构的平衡，引发学习兴趣．	可以由学生动手实验．如图 2.3-1，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上，F_1 到 F_2 的长为 $2a(a>0)$．把笔尖放在点 M 处，随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖所经过的点就画出一条曲线（图 2.3-1 中右边的曲线）．
(2) 在运动中，这条曲线上的点所满足的几何条件是什么？	弄清曲线上的点所满足的几何条件是建立曲线方程的关键之一．	分析实验中的“变”与“不变”的条件．在拉链未拉开时，$\|MF_1\|=\|MF\|$；拉开后，$\|FF_2\|$ 是定长，$\|MF_1\|$，$\|MF_2\|$ 都在变化，但是它们的差 $\|MF_2\|-\|MF_2\|$ 不变．
(3) 能否说，这条曲线是平面上一个动点到两个定点距离之差等于定长的点的轨迹呢？	如果是这样，还应该把固定在 F_1，F_2 处图钉调换一下．	调换固定在 F_1，F_2 处图钉再进行实验，出现双曲线的另一支．
(4) 应该如何描述动点 M 所满足的几何条件呢？	整理实验，归纳抽象成数学问题．	双曲线是平面上一个动点到两个定点距离之差的绝对值等于定长的点的轨迹．
(5) 还有其他约束条件吗？	这个“差”要小于这两定点之间的距离 $\|F_1F_2\|<2a$．加深对概念的理解．	师生共同讨论，平面上一个动点到两个定点距离之差等于这两个定点间的距离的点的轨迹是什么？
写出动点 M 所满足的几何条件的点的集合：$P=\{M\|\|MF_1\|-\|MF_2\|=2a\}$． 明确双曲线的定义：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于 $\|F_1F_2\|$)的点的轨迹叫做双曲线．这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做双曲线的焦距．		

续表

<table>
<tr><th>问 题</th><th>设 计 意 图</th><th>师 生 活 动</th></tr>
<tr><td>(6) 我们是怎样建立坐标系求椭圆标准方程的？怎样建立适当的坐标系，求双曲线的方程呢？</td><td>求曲线方程时，建立坐标系要适当.</td><td>所谓适当，应该分析曲线的某些特征（如对称性等），使方程比较简单：以线段 F_1F_2 的中点为原点，以 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系.</td></tr>
<tr><td colspan="3">完成了“建系”. 设点 $M(x, y)$是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，那么，焦点 F_1，F_2 的坐标分别是$(-c, 0)$，$(c, 0)$. 又设点 M 与 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$.
由定义可知，双曲线就是集合 $P=\{M\mid ||MF_1|-|MF_2||=2a\}$.
因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，
所以，$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$.</td></tr>
<tr><td>(7) 怎样化简方程 $|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$?</td><td>与化简椭圆方程联系，运用化简椭圆方程的经验.</td><td>请 3～4 名学生板演化简方程. 教师在教室中走动，观察一些同学（尤其是学习有困难的学生）的化简过程.</td></tr>
<tr><td colspan="3">让相邻座位的两位同学相互检查方程化简的过程，是否能得到正确结果？出现过什么问题？</td></tr>
<tr><td colspan="3">教师引导学生评价板演情况. 肯定好的，如表达规范、运算简洁；如有问题，找出问题的原因.</td></tr>
<tr><td colspan="3">因为已有化简椭圆方程的经验，由$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$，设 $c^2-a^2=b^2$，得到$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 学生并不会感到困难. 只是对 b 的意义的认识不如椭圆那么容易，可以暂时放一放.</td></tr>
<tr><td>(8) 教科书边空问题：“你能在 y 轴上找一点B，使得$|OB|=b$吗?”</td><td>学生对椭圆标准方程中 b 的认识已经很清楚. 这里对 a 的意义认识也很容易，借助 $c^2-a^2=b^2$（形似勾股定理，找一条直角边，又指定要在 y 轴上找），找点B，应该不困难.</td><td>以双曲线与 x 轴的交点 A 为圆心，以线段 OF_2(或 OF_1)为半径画圆交 y 轴于点 B，B'.</td></tr>
<tr><td>(9) 椭圆有两个标准方程，双曲线也有两个吗？另一个是如何得到的？</td><td>反复与椭圆类比，既加强与已有知识联系，又找出与旧知识的不同之处（“同化”与“顺应”）.</td><td>有. 另一个是 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$). 把方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中的 x，y 对调.</td></tr>
<tr><td>教科书例 1.</td><td>双曲线标准方程的应用.</td><td>请 3～4 名学生板演.</td></tr>
<tr><td colspan="3">小结：
1. 提问：我们已经学习了双曲线，双曲线是怎样的点的轨迹？
2. 双曲线标准方程是怎样的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">布置作业：教科书习题 2.3A 组第 1、2 题.</td></tr>
</table>

5. 几点说明

(1) 在学习双曲线之前，学生已经学习过椭圆，对椭圆的定义、如何建立椭圆的标准方程都有所了解. 因此，教学中要注意运用类比的方法，在与椭圆的联系与区别中建立有关双曲线的知识结构.

(2) 教学中，把教学内容编制成一系列问题，通过问题链、问题解决，形成新的知识结构.

(3) 学生能干的事让学生去干．在教学中，可以运用板演、相互交流、相互检查等方式，让学生开展合作学习．延迟判断，不要把结论抛给学生，注意学习过程中学生的主动研究．

五、习题解答

练习(第 55 页)

1. (1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.　　　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(3) 解法一：因为双曲线的焦点在 y 轴上，所以，可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

将点 $(2,\ -5)$ 代入方程，得 $\dfrac{25}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$，

即
$$a^2b^2+4a^2-25b^2=0.$$
又
$$a^2+b^2=36,$$
解方程组

$$\begin{cases}a^2b^2+4a^2-25b^2=0,\\ a^2+b^2=36.\end{cases}$$

令 $m=a^2$，$n=b^2$，代入方程组，得

$$\begin{cases}mn+4m-25n=0,\\ m+n=36.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}m=20,\\ n=16;\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=45,\\ n=-9.\end{cases}$$

第二组不合题意，舍去，得 $a^2=20$，$b^2=16$.

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1.$$

解法二：根据双曲线的定义，有

$$\begin{aligned}2a&=\left|\sqrt{4+(-5+6)^2}-\sqrt{4+(-5-6)^2}\right|\\ &=|\sqrt{5}-5\sqrt{5}|=4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

所以　$a=2\sqrt{5}$.

又 $c=6$，所以 $b^2=36-20=16$.

由已知，双曲线的焦点在 y 轴上，所以，所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1.$$

2. 提示：根据椭圆中 $a^2-b^2=c^2$ 和双曲线中 $a^2+b^2=c^2$ 的关系式分别求出椭圆、双曲线的焦点坐标.

3. 由 $(2+m)(m+1)>0$，解得 $m<-2$，或 $m>-1$.

练习(第 61 页)

1. (1) 实轴长 $2a=8\sqrt{2}$，虚轴长 $2b=4$；顶点坐标为 $(4\sqrt{2},\ 0)$，$(-4\sqrt{2},\ 0)$；焦点坐标为 $(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$；离心率 $e=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$.

(2) 实轴长 $2a=6$，虚轴长 $2b=18$；顶点坐标为 $(3, 0)$，$(-3, 0)$；焦点坐标为 $(3\sqrt{10}, 0)$，$(-3\sqrt{10}, 0)$；离心率 $e=\sqrt{10}$.

(3) 实轴长 $2a=4$，虚轴长 $2b=4$；顶点坐标为 $(0, 2)$，$(0, -2)$；焦点坐标为 $(0, 2\sqrt{2})$，$(0, -2\sqrt{2})$；离心率 $e=\sqrt{2}$.

(4) 实轴长 $2a=10$，虚轴长 $2b=14$；顶点坐标为 $(0, 5)$，$(0, -5)$；焦点坐标为 $(0, \sqrt{74})$，$(0, -\sqrt{74})$；离心率 $e=\dfrac{\sqrt{74}}{5}$.

2. (1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$； (2) $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{28}=1$.

3. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

4. $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{18}=1$，渐近线方程为 $y=\pm x$.

5. (1) $(6, 2)$，$\left(\dfrac{14}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$；(2) $\left(\dfrac{25}{4}, 3\right)$.

习题 2.3 A组

1. 把方程化为标准方程，得 $\dfrac{y^2}{64}-\dfrac{x^2}{16}=1$. 因为 $a=8$，由双曲线定义可知，点 P 到两焦点距离的差的绝对值等于 16. 因此点 P 到另一个焦点的距离是 17.

2. (1) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$； (2) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{75}=1$.

3. (1) 焦点坐标为 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，离心率 $e=\dfrac{5}{3}$；

(2) 焦点坐标为 $F_1(0, -5)$，$F_2(0, 5)$，离心率 $e=\dfrac{5}{4}$.

4. (1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$. (2) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$.

(3) 解：因为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，所以 $c^2=2a^2$，因此 $b^2=c^2-a^2=2a^2-a^2=a^2$.

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1\text{，或}\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

将 $(-5, 3)$ 代入上面的两个方程，得

$$\frac{25}{a^2}-\frac{9}{a^2}=1\text{，}\frac{9}{a^2}-\frac{25}{a^2}=1.$$

解得 $a^2=16$（后一个方程无解）.

所以所求的双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

5. 解：连接 QA.

由已知，得 $|QA|=|QP|$.

所以，$\|QA|-|QO\|=\|QP|-|QO\|=|OP|=r$.

又因为点 A 在圆外，所以 $|OA|>|OP|$.

根据双曲线的定义，点 Q 的轨迹是以 O，A 为焦点，r 为实轴长的双曲线.

6. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

B组

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2. 解：由声速及 A，B 两处听到爆炸声的时间差，可知 A，B 两处与爆炸点的距离的差，因此爆炸点应位于以 A，B 为焦点的双曲线上.

使 A，B 两点在 x 轴上，并且原点 O 与线段 AB 的中点重合，建立直角坐标系 xOy.

设爆炸点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$\|PA|-|PB\|=340\times3=1020,$$

即 $2a=1020$，$a=510$.

又 $|AB|=1400$，所以 $2c=1400$，$c=700$，$b^2=c^2-a^2=229\,900$.

因此所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{260\,100}-\frac{y^2}{229\,900}=1$.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

4. 解：设点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 在双曲线上，且线段 AB 的中点为 $M(x, y)$.

设经过点 P 的直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1)$，即 $y=kx+1-k$.

把 $y=kx+1-k$ 代入双曲线的方程 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，得

$$(2-k^2)x^2-2k(1-k)x-(1-k)^2-2=0\ (2-k^2\neq0). \qquad ①$$

所以，$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k(1-k)}{2-k^2}$.

由题意，得 $\frac{k(1-k)}{2-k^2}=1$.

解得 $k=2$.

当 $k=2$ 时，方程①成为

$$2x^2-4x+3=0.$$

根的判别式 $\Delta=16-24=-8<0$，方程①没有实数解.

所以，不能作一条直线 l 与双曲线交于 A，B 两点，且点 P 是线段 AB 的中点.

2.4 抛物线

一、本节知识结构

本节分为两个小节，由两个部分组成：抛物线及其标准方程、抛物线的简单几何性质. 其结构如下图所示.

二、教学重点与难点

掌握抛物线的标准方程及其几何性质.

三、教科书编写意图与教学建议

2.4.1 抛物线及其标准方程

1. 抛物线的定义

教科书从学生在初中已经学习过的二次函数的图象是一条抛物线谈起. 学生已经了解抛物线有顶点、对称轴，那么抛物线还有哪些几何性质，有怎样的几何特征呢？引起学生的兴趣.

紧接着，教科书设置“信息技术应用”栏目，给出了抛物线生成的过程. 如果条件允许，通过《几何画板》的制作，学生可以从作法中了解曲线上的点所满足的几何条件，明确抛物线的定义：

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过定点 F）的距离相等的点的轨迹叫做抛物线.

2. 建立抛物线的标准方程

观察轨迹的形状，学生通过思考容易发现这样选择坐标系是适当的：由于直线 KF 是曲线的对称轴，取线段 KF 的中点为原点建立坐标系，得到的方程形式会比较简单.

在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离 $|KF|=p(p>0)$，这是抛物线方程中参数 p 的几何意义. 因为抛物线的顶点是 KF 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 都可以用 p 表示.

与求椭圆、双曲线的标准方程类似，如果所选取的坐标系不同，或者说抛物线在坐标平面内的位置不同，同一条抛物线的标准方程还有其他几种形式：

$$y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py,$$

其中 $p>0$.

教科书设置了“探究”栏目，可以让学生试着写出抛物线标准方程的其他形式，填写教科书上的表格，掌握抛物线的标准方程.

为了加强与所学知识的联系，教科书在“思考”栏目提出一个思考题：“你能说明二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ 的图象为什么是抛物线吗？指出它的焦点坐标、准线方程.”

要求学生把 $y=ax^2$ 写成标准形式 $x^2=\frac{1}{a}y$，指出这个方程表示抛物线，它的焦点坐标是 $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$，准线方程是 $y=-\frac{1}{4a}$.

3. p 的意义的认识

必须向学生指出，p 是抛物线的焦点到准线的距离，所以 p 的值永远大于 0.

4. 关于例题

例 1 是为学生熟悉抛物线标准方程设置的. 例 2 是说明抛物线的应用. 利用抛物线的形成过程可以说明为什么“卫星波束近似平行状态射入轴截面为抛物线的接收天线，经反射聚集到焦点处.”

如图 2-4，因为直线 m 是线段 FH 的垂直平分线，所以$\angle FME=\angle PMQ$. 于是，由焦点 F 发出的光线（电磁波）射到点 M 处，经抛物线（切线）反射后，沿 MP 射出；反过来，沿 PM 射入的光线（电磁波）经反射后经过焦点 F.

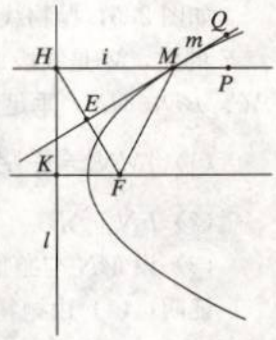


图 2-4

2.4.2 抛物线的简单几何性质

1. 抛物线的简单几何性质

抛物线的性质和椭圆、双曲线比较起来，差别比较大. 它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴、一条准线；它没有中心. 通常抛物线称为无心圆锥曲线，而椭圆和双曲线称为有心圆锥曲线.

已知抛物线的标准方程，求它的焦点坐标和准线方程时，首先要判断抛物线的对称轴和开口方向，一次项的变量如果为 x(或 y)，则 x 轴（或 y 轴）是抛物线的对称轴，一次项系数的符号决定开口方向. 例如抛物线的方程为 $x^2=-3y$，则 y 轴为对称轴，开口方向和 y 轴的正方向相反.

由已知条件求抛物线的标准方程时，首先要根据已知条件确定抛物线标准方程的类型，再求出方程中的参数 p.

2. 关于例题

例 4 是一个求抛物线焦点弦的长的题目. 其中的分析过程，体现：

(1) 要充分利用抛物线的定义，把求斜线段的长转化为求与坐标轴平行的线段的长；

(2) 要求线段 AB 的长只要求出 x_1+x_2 就可以了，其中 x_1，x_2 分别是 A，B 的横坐标. 因此，并不需要解方程求出 x_1，x_2. 解答中仍然解出 x_1，x_2，是因为在初中没有明确指出一元二次方程根与系数的关系.

教师的教学重心应放在问题的分析上，让学生完成求解的过程.

例 5 是直线与抛物线位置关系的研究. 直线与抛物线位置关系的研究比较简单，但是，它的研究过程体现了用坐标法研究直线与圆锥曲线位置关系的特点.

要使学生明白，直线与圆锥曲线有无公共点的问题就是由它们的方程组成的方程组有无实数解的问题. 方程组有几个实数解，它们就有几个公共点；方程组没有实数解，它们就没有公共点.

对于例 5，除了进行解析的研究之外，需要学生明确：直线与抛物线有一个公共点的情况有两种情形，一种是直线平行于抛物线的对称轴，另一种是直线与抛物线相切. 后一种反映在代数上是一元二次方程的两根相等（根的判别式 $\Delta=0$).

抛物线有许多有趣的性质，例 5 所说的是其中的一个. 例 5 的另一个目的是坐标法的运用. 要证明几何结论：直线 DB 平行于抛物线 $y^2=2px(p>0)$的对称轴，只要证明点 D，B 的纵坐标相等即可，而点 D，B 的纵坐标可以经计算得到.

例 6 也是研究直线与抛物线的位置关系，用的是代数方法. 即直线与抛物线有无公共点的问题就是由它们的方程组成的方程组有无实数解的问题. 方程组有几组实数解，它们就有几个公共点；方程

组没有实数解，它们就没有公共点．例 6 的教学，要注意的是要合理进行分类，特别是 $k=0$，以及 $k\neq0$ 两种情况．

下面的习题可以作为教学参考：

如图 2-5，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，AB 是经过抛物线焦点 F 的弦，M 是线段 AB 的中点，过点 A，B，M 作抛物线准线 l 的垂线 AC，BD，MN，垂足分别是 C，D，N．连接 AN，BN．求证：

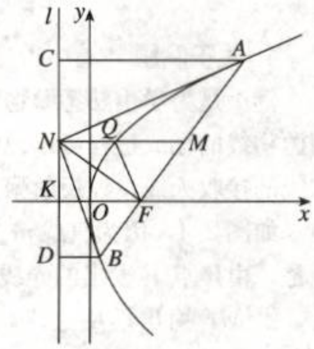


图 2-5

(1) $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$；

(2) $FN\perp AB$；

(3) 设 MN 与抛物线交于 Q，则 Q 是 MN 的中点．

证明：(1) 由抛物线的定义，得

$$|AC|=|AF|,|BD|=|BF|.$$

又 $|MN|=\frac{1}{2}(|AC|+|BD|)$，所以，

$$|MN|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|.$$

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ANC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ANF$ 中，$|AN|=|AN|$，$|AC|=|AF|$，

由(1)知，$\triangle ANB$ 是直角三角形，MN 是斜边上的中线，

所以，$\angle MAN=\angle MNA$．

而 $\angle MNA=\angle CAN$，所以，$\angle MAN=\angle CAN$．

所以，$\mathrm{Rt}\triangle ANC\cong\triangle ANF$，$\angle AFN=\angle ACN=90^\circ$．

所以，$FN\perp AB$．

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle MNF$ 中，由抛物线的定义，得 $|QN|=|QF|$，

所以，$\angle QNF=\angle QFN$．

于是，$\angle QFM=\angle QMF$，$|QF|=|QM|$．

所以，$|NQ|=|QM|$，Q 是 MN 的中点．

如果条件许可，教学中可以先借助几何画板的演示，度量、比较发现抛物线的一些有趣性质，然后再加以证明．

四、习题解答

练习（第 67 页）

1. (1) $y^2=12x$；　(2) $y^2=x$；

   (3) $y^2=4x$，$y^2=-4x$，$x^2=4y$，$x^2=-4y$．

2. (1) 焦点坐标 $F(5,0)$，准线方程 $x=-5$；

   (2) 焦点坐标 $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，准线方程 $y=-\frac{1}{8}$；

   (3) 焦点坐标 $F\left(-\frac{5}{8},0\right)$，准线方程 $x=\frac{5}{8}$；

   (4) 焦点坐标 $F(0,-2)$，准线方程 $y=2$．

3. (1) a，$a-\frac{p}{2}$．

   (2) $(6,6\sqrt{2})$，$(6,-6\sqrt{2})$．

提示：由抛物线的标准方程求出准线方程．由抛物线的定义，点 M 到准线的距离等于 9，所以

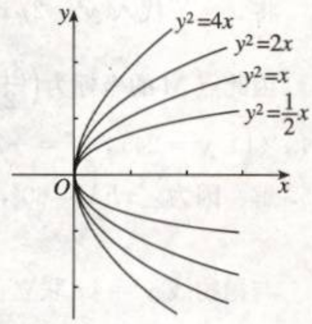
$$x+3=9,\ x=6,\ y=\pm 6\sqrt{2}.$$

练习（第 72 页）

1. (1) $y^2=\frac{16}{5}x$；　(2) $x^2=20y$；

(3) $y^2=-16x$；　(4) $x^2=-32y$.

2. 图形见右．x 的系数越大，抛物线的开口越大．



（第 2 题）

3. 解：过点 $M(2,0)$ 且斜率为 1 的直线 l 的方程为

$$y=x-2,$$

与抛物线的方程 $y^2=4x$ 联立

$$\begin{cases} y=x-2, \\ y^2=4x. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1=4+2\sqrt{3}, \\ y_1=2+2\sqrt{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4-2\sqrt{3}, \\ y_2=2-2\sqrt{3}. \end{cases}$

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-4\sqrt{3})^2} \\ &= 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4. 解：设直线 AB 的方程为 $x=a\ (a>0)$.

将 $x=a$ 代入抛物线方程 $y^2=4x$，得

$$y^2=4a,$$

即　$y=\pm 2\sqrt{a}$.

因为　$|AB|=2|y|=2\times 2\sqrt{a}=4\sqrt{a}=4\sqrt{3}$，

所以　$a=3$.

因此，直线 AB 的方程为 $x=3$.

习题 2.4　A 组

1. (1) 焦点坐标 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，准线方程 $y=-\frac{1}{2}$；

(2) 焦点坐标 $F\left(0,-\frac{3}{16}\right)$，准线方程 $y=\frac{3}{16}$；

(3) 焦点坐标 $F\left(-\frac{1}{8},0\right)$，准线方程 $x=\frac{1}{8}$；

(4) 焦点坐标 $F\left(\frac{3}{2},0\right)$，准线方程 $x=-\frac{3}{2}$.

2. (1) $y^2=-8x$；

(2) $(4,4\sqrt{2})$，或 $(4,-4\sqrt{2})$.

3. 解：由抛物线的方程 $y^2=2px(p>0)$，得它的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

根据抛物线的定义，由 $|MF|=2p$，可知，点 M 到准线的距离为 $2p$.

设点 M 的坐标为 (x, y)，则

$$x+\frac{p}{2}=2p,$$

解得 $$x=\frac{3p}{2}.$$

将 $x=\frac{3p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 中，得 $y=\pm\sqrt{3}p$.

因此点 M 的坐标为 $\left(\frac{3p}{2},\ \sqrt{3}p\right)$，$\left(\frac{3p}{2},\ -\sqrt{3}p\right)$.

4. (1) $y^2=24x$，$y^2=-24x$；　　(2) $x^2=-12y$. (图略)

5. 解：因为 $\angle xFM=60^\circ$，所以线段 FM 所在直线的斜率为 $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，因此，直线 FM 的方程为
$$y=\sqrt{3}(x-1).$$
与抛物线 $y^2=4x$ 联立，得
$$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1), & ①\\ y^2=4x. & ②\end{cases}$$
把①代入②得
$$3x^2-10x+3=0,$$
解得 $$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=3.$$
把 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=3$ 分别代入①得
$$y_1=-\frac{2}{3}\sqrt{3},\ y_2=2\sqrt{3}.$$
由第5题图知 $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ 不合题意，所以点 M 的坐标为 $(3,\ 2\sqrt{3})$.

因此，$|FM|=\sqrt{(3-1)^2+(2\sqrt{3}-0)^2}$
$=4.$

6. 证明：将 $y=x-2$ 代入 $y^2=2x$ 中，得
$$(x-2)^2=2x.$$
化简得　$x^2-6x+4=0$，

解得　$x=3\pm\sqrt{5}$，

则　$y=3\pm\sqrt{5}-2=1\pm\sqrt{5}$.

因为　$k_{OB}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$，$k_{OA}=\frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$，

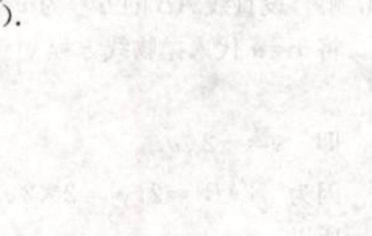
所以　$k_{OB}\cdot k_{OA}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\times\frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{1-5}{9-5}=-1.$

所以　$OA\perp OB$.

7. 这条抛物线的方程是 $x^2=17.5y$.

8. 解：建立如图所示的直角坐标系，设拱桥抛物线的方程为 $x^2=-2py$，因为拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m，所以
$$2^2=-2p(-2),\ p=1,$$
因此抛物线方程为 $x^2=-2y$.　①

水面下降 1 m，则 $y=-3$，代入①式，得
$$x^2=-2(-3),\ x=\pm\sqrt{6}.$$
这时水面宽为 $2\sqrt{6}$ m.



(第8题)

B 组

1. 解：设垂线段的中点坐标为(x, y)，抛物线上相应点的坐标为(x_1, y_1).

根据题意，$x_1=x$，$y_1=2y$，代入 $y_1^2=2px_1$，得轨迹方程为 $y^2=\frac{1}{2}px$.

由方程可知，轨迹为顶点在原点、焦点坐标为$\left(\frac{p}{8}, 0\right)$的抛物线.

2. 解：设这个等边三角形 OAB 的顶点 A，B 在抛物线上，且坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则

$$y_1^2=2px_1，y_2^2=2px_2.$$

又$|OA|=|OB|$，所以 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，

即 $x_1^2-x_2^2+2px_1-2px_2=0$，$(x_1^2-x_2^2)+2p(x_1-x_2)=0$，

因此，$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0$.

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，$2p>0$，所以 $x_1=x_2$.

由此可得$|y_1|=|y_2|$，即线段 AB 关于 x 轴对称.

因为 x 轴垂直于 AB，且$\angle AOx=30°$，所以$\frac{y_1}{x_1}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$，所以 $y_1=2\sqrt{3}p$，因此$|AB|=2y_1=4\sqrt{3}p$.

3. 解：设点 M 的坐标为(x, y). 由已知，得

直线 AM 的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+1}(x\neq -1);$$

直线 BM 的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-1}(x\neq 1).$$

由题意，得 $k_{AM}-k_{BM}=2$，所以，$\frac{y}{x+1}-\frac{y}{x-1}=2(x\neq \pm 1)$.

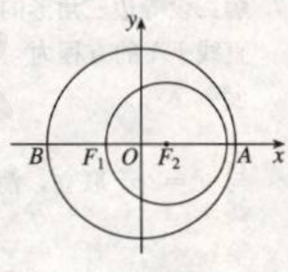
化简，得 $x^2=-(y-1)(x\neq \pm 1)$.

复习参考题 A 组

1. 解：如图，建立直角坐标系，使点 A，B，F_2 在 x 轴上，F_2 为椭圆的右焦点（记 F_1 为左焦点）.

因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$



（第 1 题）

则 $a-c=|OA|-|OF_2|=|F_2A|$

$=6\ 371+439=6\ 810$,

$a+c=|OB|+|OF_2|=|F_2B|$

$=6\ 371+2\ 384=8\ 755$,

解得

$$a=7\ 782.5，c=8\ 755.$$

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{8\ 755\times 6\ 810}$.

用计算器算得 $b\approx 7\ 722$.

因此，卫星的轨道方程是$\frac{x^2}{7\ 783^2}+\frac{y^2}{7\ 722^2}=1$.

2. 解：由题意，得

$$\begin{cases}a-c=R+r_1,\\a+c=R+r_2.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases}a=\dfrac{2R+r_1+r_2}{2},\\c=\dfrac{r_2-r_1}{2}.\end{cases}$

因此卫星轨道的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{r_2-r_1}{2R+r_1+r_2}$.

3. (1) D；(2) B.

4. (1) 当 $\alpha=0°$时，方程表示圆.

(2) 当 $0°<\alpha<90°$时，方程化成 $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1$.

方程表示焦点在 y 轴上的椭圆.

(3) 当 $\alpha=90°$时，$x^2=1$，即 $x=\pm1$，方程表示平行于 y 轴的两条直线.

(4) 当 $90°<\alpha\leqslant180°$时，因为 $\cos\alpha<0$，所以方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示双曲线，其焦点在 x 轴上. 而当 $\alpha=180°$时，方程表示等轴双曲线.

5. 解：将 $y=kx-1$ 代入方程 $x^2-y^2=4$，得

$$x^2-k^2x^2+2kx-1-4=0.$$

即

$$(1-k^2)x^2+2kx-5=0, \qquad ①$$

$$\Delta=4k^2+20(1-k^2)=20-16k^2.$$

令 $\Delta<0$，解得 $k>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，或 $k<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

因为 $\Delta<0$，方程①无解，即直线与双曲线没有公共点，所以 k 的取值范围为 $k>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，或 $k<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

6. 提示：设抛物线方程为 $y^2=2px$，则点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$，点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},\ -p\right)$，设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则点 Q 的坐标为 $(x,\ 0)$.

因为 $|PQ|=|y|=\sqrt{2px}$，$|BC|=2p$，$|OQ|=x$，所以 $|PQ|^2=|BC|\,|OQ|$，即 $|PQ|$ 是 $|BC|$ 和 $|OQ|$ 的比例中项.

7. 解：设等边三角形的另外两个顶点分别是 A，B，其中点 A 在 x 轴上方.

直线 FA 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

与 $y^2=2px$ 联立，消去 x，得

$$y^2-2\sqrt{3}py-p^2=0.$$

解方程，得 $y_1=(\sqrt{3}+2)p$，$y_2=(\sqrt{3}-2)p$.

把 $y_1=(\sqrt{3}+2)p$ 代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，得

$$x_1=\left(\frac{7}{2}+2\sqrt{3}\right)p.$$

把 $y_2=(\sqrt{3}-2)p$ 代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，得

$$x_2=\left(\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\right)p.$$

所以，满足条件的点 A 有两个 $A_1((\frac{7}{2}+2\sqrt{3})p,\ (\sqrt{3}+2)p)$，$A_2((\frac{7}{2}-2\sqrt{3})p,\ (\sqrt{3}-2)p)$.

根据图形的对称性，可得满足条件的点 B 也有两个

$$B_1((\frac{7}{2}+2\sqrt{3})p,\ -(\sqrt{3}+2)p),\ B_2((\frac{7}{2}-2\sqrt{3})p,\ -(\sqrt{3}-2)p).$$

所以，等边三角形的边长是 $|A_1B_1|=2(\sqrt{3}+2)p$，或者 $|A_2B_2|=2(2-\sqrt{3})p$.

8. 解：设直线 l 的方程为 $y=2x+m$.

把 $y=2x+m$ 代入双曲线的方程 $2x^2-3y^2-6=0$，得

$$10x^2+12mx+3m^2+6=0.$$

$$x_1+x_2=-\frac{6}{5}m,\ x_1x_2=\frac{3m^2+6}{10}. \qquad ①$$

由已知，得

$$(1+4)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=16. \qquad ②$$

把①代入②，解得

$$m=\pm\frac{\sqrt{210}}{3}.$$

所以，直线 l 的方程为 $y=2x\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$.

9. 解：设点 A 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，点 B 的坐标为 $(x_2,\ y_2)$，点 M 的坐标为 $(x,\ y)$.

并设经过点 M 的直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $y=kx+1-2k$.

把 $y=kx+1-2k$ 代入双曲线的方程 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，得

$$(2-k^2)x^2-2k(1-2k)x-(1-2k)^2-2=0\ (2-k^2\neq 0). \qquad ①$$

所以，$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k(1-2k)}{2-k^2}$.

由题意，得 $\frac{k(1-2k)}{2-k^2}=2$.

解得 $k=4$.

当 $k=4$ 时，方程①成为

$$14x^2-56x+51=0.$$

根的判别式 $\Delta=56^2-56\times 51=280>0$，方程①有实数解.

所以，直线 l 的方程为 $y=4x-7$.

10. 解：设点 C 的坐标为 $(x,\ y)$. 由已知，得

直线 AC 的斜率

$$k_{AC}=\frac{y}{x+5}\ (x\neq -5);$$

直线 BC 的斜率

$$k_{BC}=\frac{y}{x-5}\ (x\neq 5);$$

由题意，得 $k_{AC}k_{BC}=2$. 所以，$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=m\ (x\neq\pm 5)$.

写成
$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25m}=1\ (x\neq\pm5).$$

当 $m<0$ 时，点 C 的轨迹是椭圆($m\neq-1$)，或者圆($m=-1$)，并除去两点$(-5,0)$，$(5,0)$；

当 $m>0$ 时，点 C 的轨迹是双曲线，并除去两点$(-5,0)$，$(5,0)$.

11. 解：设抛物线 $y^2=4x$ 上的点 P 的坐标为(x, y)，

则 $y^2=4x$.

点 P 到直线 $y=x+3$ 的距离
$$d=\frac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}=\frac{|y^2-4y+12|}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{|(y-2)^2+8|}{4\sqrt{2}}.$$

当 $y=2$ 时，d 的最小值是$\sqrt{2}$. 此时 $x=1$，点 P 的坐标是$(1, 2)$.

12. 解：如图，在隧道的横断面上，以拱顶为原点、拱高所在直线为 y 轴（向上），建立直角坐标系. 设隧道顶部所在抛物线的方程为 $x^2=-2py$.

因为点 $C(4, -4)$在抛物线上，所以有 $4^2=-2p(-4)$，

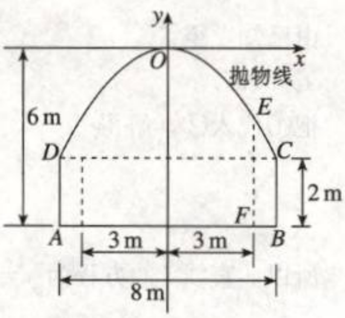
解得，$2p=-4$.

所以，隧道顶部所在抛物线的方程为 $x^2=-4y$.

设$|EF|=h+0.5$. 则 $F(3, h-5.5)$.

把点 F 的坐标代入方程 $x^2=-4y$，解得 $h=3.25$.

因此车辆通过隧道的限制高度为 3.2 m.



（第 12 题）

B 组

1. $S_{\triangle PF_1F_2}=24\sqrt{3}$.

2. 解：由题意，$PF_1\perp x$ 轴.

把 $x=-c$ 代入椭圆方程，解得
$$y=\pm\frac{b^2}{a}.$$

所以，点 P 的坐标是$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$.

直线 OP 的斜率 $k_1=-\frac{b^2}{ac}$.

直线 AB 的斜率 $k_2=-\frac{b}{a}$.

由题意，得
$$\frac{b^2}{ac}=\frac{b}{a}.$$

所以，$b=c$，$a=\sqrt{2}c$.

由已知及 $|F_1A|=a+c$，得
$$a+c=\sqrt{10}+\sqrt{5},$$

所以$(1+\sqrt{2})c=\sqrt{10}+\sqrt{5}$，

解得 $c=\sqrt{5}$.

所以，$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{5}$.

因此，椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1.$$

3. 解：设点 A 的坐标 $(x_1,\ y_1)$，点 B 的坐标 $(x_2,\ y_2)$.

由 $OA\perp OB$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

由已知，得直线 AB 的方程为 $y=-2x+5$.

则有

$$y_1y_2-5(y_1+y_2)+25=0. \quad ①$$

由 $y=-2x+5$ 与 $y^2=2px$ 消去 x，得

$$y^2+py-5p=0. \quad ②$$

$$y_1+y_2=-p,\ y_1y_2=-5p. \quad ③$$

把③代入①，解得 $p=\frac{5}{4}$.

当 $p=\frac{5}{4}$ 时，方程②成为 $4y^2+5y-25=0$.

显然此方程有实数根.

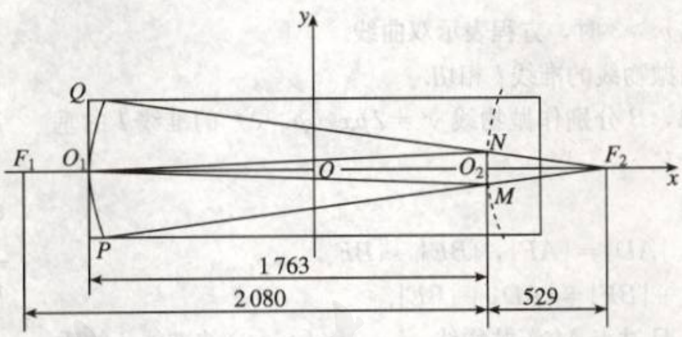
所以，$p=\frac{5}{4}$.

4. 解：如图，以连接 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的中点为原点，建立直角坐标系.

对于抛物线，有

$$\frac{p}{2}=1\ 763+529=2\ 292,$$

所以，$p=4\ 584$，$2p=9\ 168$.



(第 4 题)

对于双曲线，有

$$\begin{cases}c+a=2\ 080,\\ c-a=529.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=775.5,\ c=1\ 304.5\ .$$

因此，$b^2=c^2-a^2=1\ 100\ 320$.

所以，所求双曲线的方程是

$$\frac{x^2}{601\ 400.3}-\frac{y^2}{1\ 100\ 320}=1\ (x\geqslant 775.5).$$

因为抛物线的顶点横坐标是

$$-(1\ 763-a)=-(1\ 763-775.5)=-987.5.$$

所以，所求抛物线的方程为

$$y^2=9\ 168(x+987.5).$$

5. 解：设点 M 的坐标为$(x，y)$．由已知，得

直线 AM 的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+1}\ (x\neq-1);$$

直线 BM 的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-1}\ (x\neq1);$$

由题意，得 $k_{AM}+k_{BM}=2$，所以，$\frac{y}{x+1}+\frac{y}{x-1}=2\ (x\neq\pm1)$.

化简，得 $xy=x^2-1\ (x\neq\pm1)$.

点 M 的轨迹方程是 $xy=x^2-1\ (x\neq\pm1)$.

6. 解：(1) 当 $m=1$ 时，方程表示 x 轴；

(2) 当 $m=3$ 时，方程表示 y 轴；

(3) 当 $m\neq1$，$m\neq3$ 时，把方程写成

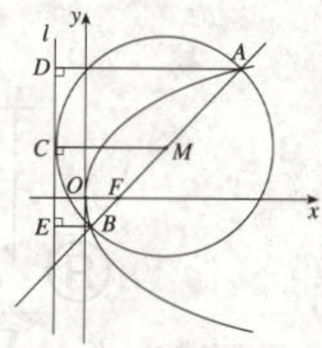
$$\frac{x^2}{3-m}+\frac{y^2}{m-1}=1.$$

①当 $1<m<3$，$m\neq2$ 时，方程表示椭圆；

②当 $m=2$ 时，方程表示圆；

③当 $m<1$，或 $m>3$ 时，方程表示双曲线.

7. 以 AB 为直径的圆与抛物线的准线 l 相切.



(第 7 题)

证明：如图，过点 A，B 分别作抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线 l 的垂线，垂足分别为 D，E.

由抛物线的定义，得

$$|AD|=|AF|，|BE|=|BF|.$$

所以，$|AB|=|AF|+|BF|=|AD|+|BE|$.

设 AB 的中点为M，且过点 M 作抛物线 $y^2=2px(p>0)$的准线 l 的垂线，垂足为C. 显然 $MC/\!/x$ 轴，所以 MC 是直角梯形 $ADEB$ 的中位线.

于是

$$|MC|=\frac{1}{2}(|AD|+|BE|)=\frac{1}{2}|AB|.$$

因此，点 C 在以 AB 为直径的圆上．又 $MC\perp l$，所以以 AB 为直径的圆与抛物线的准线 l 相切.

类似地，可以证明：

对于椭圆，以经过焦点的弦为直径的圆与相应的准线相离；

对于双曲线，以经过焦点的弦为直径的圆与相应的准线相交.

III 自我检测题

一、选择题.

1. 若椭圆经过原点，且焦点分别为 $F_1(1, 0)$，$F_2(3, 0)$，则其离心率为（　　）

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{4}$

2. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线 l，交抛物线于 A，B 两点．若线段 AB 中点的横坐标为 3，则 $|AB|$ 等于（　　）

(A) 10　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 4

3. 若双曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$ 的离心率 $e\in(1, 2)$，则 k 的取值范围是（　　）

(A) $(-\infty, 0)$　　(B) $(-3, 0)$　　(C) $(-12, 0)$　　(D) $(-60, -12)$

4. 与 y 轴相切且和半圆 $x^2+y^2=4$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 内切的动圆圆心的轨迹方程是（　　）

(A) $y^2=-4(x-1)$ $(0<x\leqslant 1)$　　(B) $y^2=4(x-1)$ $(0<x\leqslant 1)$

(C) $y^2=4(x+1)$ $(0<x\leqslant 1)$　　(D) $y^2=-2(x-1)$ $(0<x\leqslant 1)$

5. 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 与椭圆 $x^2+2y^2=2$ 交于 P_1，P_2 两点，设线段 P_1P_2 的中点为 P．若直线 l 的斜率为 $k_1(k_1\neq 0)$，直线 OP 的斜率为 k_2，则 k_1k_2 等于（　　）

(A) -2　　(B) 2　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

6. 如果方程 $\frac{x^2}{-p}+\frac{y^2}{q}=1$ 表示双曲线，那么下列椭圆中，与这个双曲线共焦点的是（　　）

(A) $\frac{x^2}{2q+p}+\frac{y^2}{q}=1$　　(B) $\frac{x^2}{2q+p}+\frac{y^2}{p}=-1$

(C) $\frac{x^2}{2p+q}+\frac{y^2}{q}=1$　　(D) $\frac{x^2}{2p+q}+\frac{y^2}{p}=-1$

二、填空题.

7. 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点分别为 F_1 和 F_2，点 P 在椭圆上．如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上，那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的________倍.

8. 椭圆 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ 的焦点分别是 F_1 和 F_2，过原点 O 作直线与椭圆相交于 A，B 两点．若 $\triangle ABF_2$ 的面积是 20，则直线 AB 的方程是________.

9. 与双曲线 $x^2-4y^2=4$ 有共同的渐近线，并且经过点 $(2, \sqrt{5})$ 的双曲线方程是________.

10. 已知直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支相交于不同的两点，则 k 的取值范围是________.

三、解答题.

11. 抛物线 $y=-\frac{x^2}{2}$ 与过点 $M(0, -1)$ 的直线 l 相交于 A，B 两点，O 为原点．若 OA 和 OB 的斜

率之和为 1，求直线 l 的方程.

12. 已知中心在原点，一焦点为 $F(0,\ \sqrt{50})$ 的椭圆被直线 l：$y=3x-2$ 截得的弦的中点横坐标为 $\frac{1}{2}$，求此椭圆的方程.

自我检测题解答及说明

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	B	C	A	D	D

1. 本题考查椭圆的离心率的意义.

解：原点到 F_1，F_2 的距离之和是长轴长 $2a=4$，又 $2c=2$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 选择 C.

2. 本题考查抛物线的定义，抛物线上任意一点到焦点的距离与这个点横坐标的关系.

解：设点 A 的坐标为$(x_1,\ y_1)$，点 B 的坐标为$(x_2,\ y_2)$，焦点为 F. 由抛物线的定义得，

$$|AF|=x_1+1,\ |BF|=x_2+1,$$

所以$|AB|=x_1+x_2+2$，又 $x_1+x_2=6$，因此$|AB|=8$. 选择 B.

3. 本题考查双曲线的离心率的意义，解不等式.

解：由题意得 $1<\frac{\sqrt{4+(-k)}}{2}<2\ (k<0)$，解得$-12<k<0$. 选择 C.

4. 本题考查寻找动点变动时满足的几何条件，曲线方程的范围.

解：设动圆圆心为 $M(x,\ y)$，动圆与已知半圆的切点为 A，点 M 到 y 轴的距离为 d.

因为$|OA|=|OM|+d$，

而 $d=x$，所以 $2=\sqrt{x^2+y^2}+x$.

化简，得 $y^2=-4(x-1)\ (0<x\leqslant 1)$. 选择 A.

5. 本题考查椭圆的弦的中点的重要性质.

解：设直线 l 的方程是 $y=k_1(x+2)$，

代入 $x^2+2y^2=2$，得

$$(1+2k_1^2)x^2+8k_1^2x+8k_1^2-2=0,$$

$x_1+x_2=-\frac{8{k_1}^2}{1+2{k_1}^2}$，而 $y_1+y_2=k_1(x_1+x_2+4)=\frac{4k_1}{1+2{k_1}^2}$，

所以，OP 斜率 $k_2=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=-\frac{1}{2k_1}$，$k_1k_2=-\frac{1}{2}$.

选择 D.

6. 本题考查辨析椭圆、双曲线标准方程中的基本量.

解：由双曲线标准方程知，p，q 同号.

若 p，q 同为正数，则半焦距平方 $c^2=p+q$，双曲线的焦点在 y 轴上. 而在选择支 A，C 中，椭圆的焦点都在 x 轴上.

若 p，q 同为负数，则半焦距平方 $c^2=-p-q$，双曲线焦点在 x 轴上. 选择支 D 的方程即$\frac{x^2}{2p+q}+\frac{y^2}{p}=-1$.

它的半焦距平方是$(-2p-q)-(-p)=-p-q$，且焦点在x轴上．选择D.

二、填空题.

7. 本题考查椭圆的定义及几何性质.

解：由已知椭圆的标准方程，得$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，$c=3$，$F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$.

由于焦点F_1和F_2关于y轴对称，由已知可见，PF_2垂直于x轴.

所以，$P\left(3,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$|PF_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|PF_1|=\sqrt{(3+3)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$，$|PF_2|=7|PF_1|$.

8. 本题考查椭圆的几何性质.

解：设点A的坐标为$(x_0,\ y_0)$，因为$S_{\triangle ABF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_A|=20$，

所以$|y_A|=\frac{40}{2c}=4$.

因为点A在椭圆上，所以$\frac{x_0^2}{45}+\frac{16}{20}=1$，

解得，$x_0=\pm3$. 所以直线AB的斜率$k=\pm\frac{4}{3}$.

于是，直线AB的方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$.

9. 本题考查共渐近线的双曲线系.

解：设双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda$. 把点$(2,\ \sqrt{5})$代入方程，得

$$\lambda=1-5=-4.$$

所以，所求双曲线的方程是$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$.

10. 本题考查直线与双曲线的位置关系.

解：由$y=kx+2$，$x^2-y^2=6$消去y，得

$$(1-k^2)x^2-4kx-10=0.$$

由题意，得

$$1-k^2\neq0,$$
$$\Delta=16k^2+40(1-k^2)>0,$$
$$x_1+x_2=\frac{4k}{1-k^2}>0,$$
$$x_1x_2=\frac{-10}{1-k^2}>0.$$

联立以上，解得$-\frac{\sqrt{15}}{3}<k<-1$.

三、解答题.

11. 本题考查直线与抛物线的位置关系，一元二次方程根与系数关系的应用.

解：显然直线l垂直于x轴不合题意，故设所求的直线方程为$y=kx-1$.

代入抛物线方程化简，得

$$x^2+2kx-2=0.$$

由根的判别式$\Delta=4k^2+8=4(k^2+2)>0$，于是有$k\in\mathbf{R}$.

设点A的坐标为$(x_1,\ y_1)$，点B的坐标为$(x_2,\ y_2)$，则$\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=1$.　①

因为 $y_1=kx_1-1$，$y_2=kx_2-1$，

代入①，得 $2k-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=1$. ②

又因为 $x_1+x_2=-2k$，$x_1x_2=-2$，代入②得 $k=1$.

所以直线 l 的方程为 $y=x-1$.

12. 本题考查直线与椭圆的位置关系.

解：设所求椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

因为 $c^2=a^2-b^2=50$， ①

由$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$及 $y=3x-2$，得

$$(a^2+9b^2)x^2-12b^2x+b^2(4-a^2)=0.$$

所以 $x_1+x_2=\frac{12b^2}{a^2+9b^2}$.

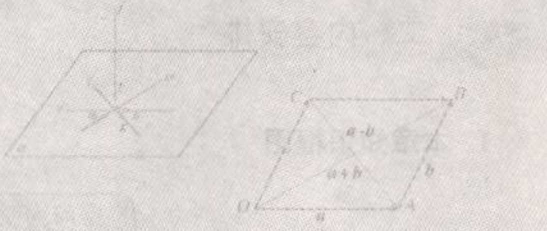
由已知，得$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$，即$\frac{12b^2}{a^2+9b^2}=1$，

所以 $a^2=3b^2$. ②

由①②得 $a^2=75$，$b^2=25$.

所以，所求椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75}=1$.

第三章
空间向量与立体几何



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

空间向量为处理立体几何问题提供了新的视角. 空间向量的引入，为解决三维空间中图形的位置关系与度量问题提供了一个十分有效的工具. 在本章，学生将在学习平面向量的基础上，把平面向量及其运算推广到空间，运用空间向量解决有关直线、平面位置关系的问题，体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想象能力和几何直观能力.

2. 学习目标

(1) 经历向量及其运算由平面向空间推广的过程.

(2) 了解空间向量的概念，了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.

(3) 掌握空间向量的线性运算及其表示.

(4) 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量共线与垂直.

(5) 理解直线的方向向量与平面的法向量.

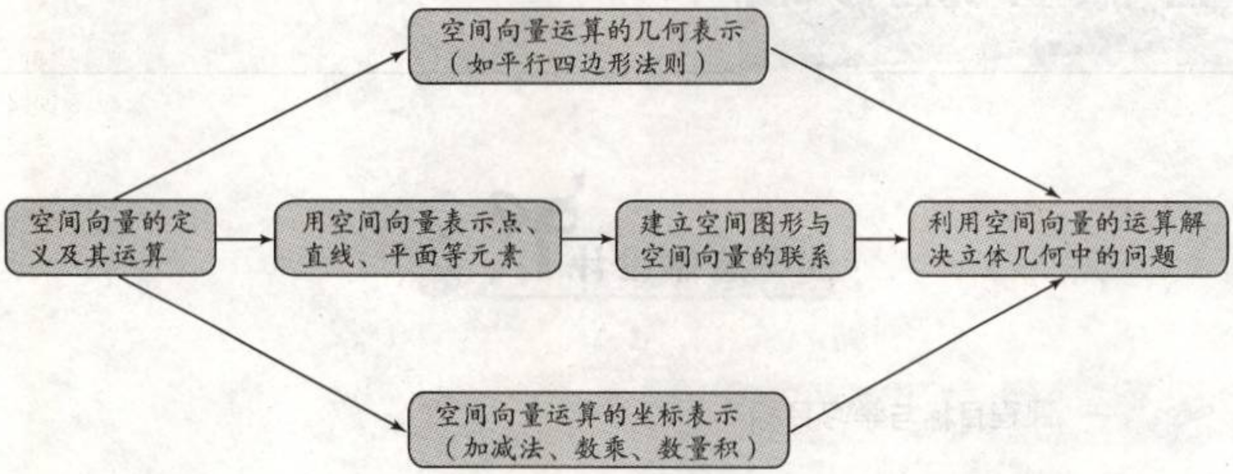
(6) 能用向量语言描述直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直与平行关系.

(7) 能用向量方法证明有关直线、平面位置关系的一些定理（包括三垂线定理).

(8) 能用向量方法解决直线与直线、直线与平面、平面与平面夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

二、内容安排

1. 本章知识框图



2. 对知识框图的说明

本章是学生在《数学 2》中学习立体几何初步以及在《数学 4》中学习了平面向量的基础上学习空间向量及其运算，并利用空间向量解决立体几何中直线、平面位置关系的问题．整个内容安排都是围绕利用空间向量及其运算解决立体几何问题展开的．

本章安排了两节内容：空间向量及其运算、立体几何中的向量方法．

“3.1 空间向量及其运算”包括空间向量的定义、空间向量的加减运算、空间向量的数乘运算、空间向量的数量积运算、空间向量的正交分解及其坐标表示、空间向量运算的坐标表示等内容．

空间向量的基本概念及其性质是这部分内容的基础知识，是后续学习的前提．由于空间向量是平面向量的推广，空间向量及其运算所涉及的内容与平面向量及其运算类似，因此，本节的框架结构与《数学 4》中平面向量及其运算基本一致．本节的教学方法，宜多引导学生与平面向量及其运算作类比、与实数及其运算作类比，引导学生思考向量运算与通常的实数运算有什么差异性，与平面向量的运算有什么联系与区别，从“数、量与运算”发展的角度理解向量．注意让学生经历向量由平面向空间推广的过程，使学生体会其中的数学思想方法：类比与归纳，体验数学在结构上的和谐性与在推广过程中的问题，并如何解决这些问题．同时，在这个过程中，让学生感受一个数学概念的推广可能带来很多更好的性质．教学过程中还应注意维数增加所带来的影响．

在学习了空间向量及其运算，并利用空间向量解决一些简单几何问题的基础上，教科书“3.2 立体几何中的向量方法”研究了用空间向量解决立体几何中的问题．教科书首先介绍了如何利用空间向量表示点、直线、平面的位置，进而利用空间向量表示空间直线、平面的平行、垂直、夹角等，并通过解决几个立体几何中的问题，给出了利用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”．

利用向量解决立体几何问题是这章学习的重点．引入空间向量，为解决立体几何中某些用综合法解决时技巧性较大、随机性较强的问题提供了一些通法．在教学时，要让学生体会向量的思想方法在解决立体几何问题中的作用，掌握用向量方法解决立体几何问题的“三步曲”．同时，在教学中，还应鼓励学生灵活选择运用向量方法、综合方法与坐标方法，从不同角度解决立体几何问题．

为了拓展学生的知识面，本章教科书还安排了一个“阅读与思考　向量概念的推广与应用”，把二

维、三维向量推广为高维向量，并通过例子说明高维向量的应用．有条件的地区，可以引导学有余力的学生学习这个阅读材料，将空间向量的有关性质向多维进行推广，并试图解决一些简单的几何问题．

三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 空间向量及其运算	5 课时
3.2 立体几何中的向量方法	5 课时
小结	2 课时

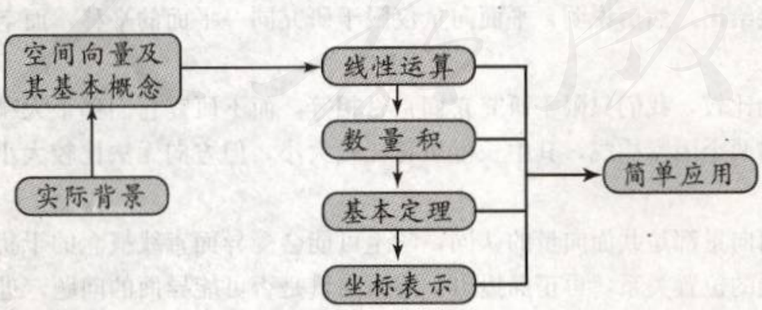
II 教科书分析

章引言及章头图介绍

章头图中，不管是设计卢浮宫前的玻璃幕墙的钢架，还是塔吊、过山车、桥梁的钢架，都会遇到立体几何的问题，而这些立体几何的问题又都与空间向量有着密切的联系．章引言说明了向量在数学和其他科学中的重要作用，阐述了本章主要学习的内容，类比利用平面向量解决平面几何问题，对利用空间向量解决立体几何问题的方法作了简要介绍．

3.1 空间向量及其运算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：空间向量的概念及其运算、空间向量基本定理．
2. 难点：空间向量基本定理．

三、教科书编写意图与教学建议

本节内容包括空间向量的定义、空间向量的加减运算、空间向量的数乘运算、空间向量的数量积运算、空间向量的正交分解及其坐标表示、空间向量运算的坐标表示等内容. 有了平面向量和立体几何初步知识的基础，我们很容易把平面向量及其运算推广到空间向量，学习空间向量及其运算并解决简单的立体几何问题.

本节首先把平面向量及其加减和数乘运算推广到空间，并把平面向量基本定理推广到空间，由此推出空间直线和平面的向量表达式，进而利用它们解决空间的共线和共面的问题. 接下来，教科书把平面向量的数量积运算推广到空间，并利用空间向量的数量积度量空间两条直线的夹角和空间线段的长度，进而利用它们证明了空间直线、平面位置关系的一些定理(三垂线定理和直线与平面垂直的定理). 在 3.1.4 节，我们从空间向量的正交分解出发，学习空间最重要的基础定理——空间向量分解定理，这个定理是立体几何研究数量化的基础. 有了这个定理，空间结构变得简单明了，整个空间被三个不共面的基向量所确定，空间一个点或一个向量和实数组(x, y, z)建立起一一对应关系. 在本节最后，我们研究了空间向量运算的坐标表示，以及空间平行、垂直、夹角、距离等的坐标表示. 将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来，不仅可以解决一些夹角和距离的计算问题，还可以使一些问题的解决变得简单.

由于学生已有了直线和平面平行以及平面和平面平行概念，将向量的运算从平面推广到空间对学生学习已无困难，但仍要一步步地进行. 由于现在研究的范围已由平面扩大到空间，两个不平行向量确定的平面已不是一个平面，而是互相平行的平行平面的集合. 要让学生在空间中一步步地验证运算法则和运算律. 这样做，一方面通过复习平面向量学习了空间向量，另一方面进一步培养学生的空间观念.

3.1.1 空间向量及其加减运算

在本节开始提出的提钢板和正方体中不共面向量的基础上，本小节类比平面向量引入了空间向量的概念、表示、相同或相等关系、加减运算及其运算律等内容. 通过本小节的教学，应使学生理解空间向量的概念，掌握空间向量的几何表示法和字母表示法，掌握空间向量的加减运算及其运算律等内容，并能借助图形理解空间向量加减运算及其运算律的意义.

空间向量的定义、表示方法及相等关系都与平面向量相同. 可在复习平面向量的定义、表示方法及其相等关系后直接给出. 然后说明，平面向量仅限于研究同一平面的平移，而空间向量研究的是空间的平移.

关于两个向量的比较，我们只限于研究它们是否相等，而不研究它们哪个大哪个小，原因是每个向量都由长度和方向两个因素构成，其中长度虽可比较大小，但方向无法比较大小. 所以，向量不能比较大小.

对于空间任意两向量都是共面向量的认同，学生可能会受异面直线概念的干扰. 为此，可先让学生回忆空间两条直线的位置关系，再正面提出空间两向量是否可能异面的问题，进而根据相同或相等向量概念用教科书图 3.1-4 解决疑问. 在此基础上可进一步强调：由于空间任意两个向量都可转化为共面向量，所以凡涉及空间两个向量的问题，平面向量中有关结论仍适用于它们(到空间向量的分解定理和坐标表示及坐标运算时才会显现它们的区别). 最后还应说明：教科书图 3.1-4 中，由于点 O 可以是空间任意一点，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 确定的平面不是一个，而是一组互相平行的平面的集合. 但在研究解决具体问题时，一般只要在其中一个平面内考虑即可.

空间向量加法、减法运算的意义及运算律与平面向量类似．教学时要结合图形加强直观说理．结合式与图之间的互相转换加深理解，切实掌握．

对于空间向量加法运算的交换律和结合律，可以结合图 3-1 来证明(这里我们仅证明结合律)．

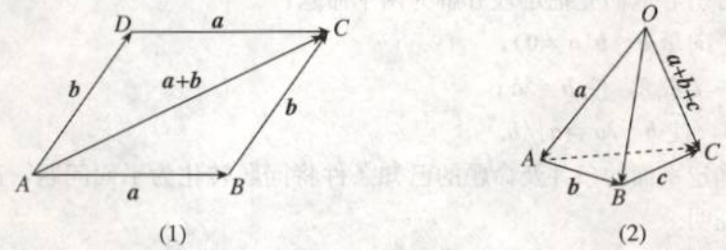


图 3-1

如图 3-1(2)，

因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

这就证明了空间向量的加法结合律．

关于图 3-1(2)，建议在用它引导学生验证理解加法结合律后，再运用此图说明：

(1) 首尾相接的若干向量(如图中的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$)之和，等于由起始向量的始点指向末尾向量的终点的向量(如图中的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$)．因此，求空间若干向量之和时，可通过平移将它们转化为首尾相接的向量．

(2) 若首尾相接的若干向量构成一个封闭图形，则这些向量的和为 $\mathbf{0}$．

(3) 两个向量相加的平行四边形法则在空间仍成立．因此求始点相同的两个向量之和时，可考虑用平行四边形法则．

教科书在本小节最后安排的“探究”栏目，目的是让学生进一步结合平行六面体，数形结合，理解空间向量运算的加法交换律和结合律．一般地，三个不共面的向量的和可以与分别以这三个向量为边的平行六面体的对角线建立起联系．

3.1.2　空间向量的数乘运算

1. 在学生掌握了空间向量加法运算的基础上，学习空间向量的数乘运算应无困难．教科书在本小节首先类比平面向量的数乘运算引出空间向量的数乘运算以及数乘运算的分配律和结合律，进而分别给出了空间向量共线和共面的定义，并进一步研究了空间向量共线和共面的问题．在本小节，要求学生掌握空间向量数乘运算的定义和运算律，了解共线(平行)向量、共面向量的意义，掌握它们的表示方法，并能理解共线向量定理和共面向量定理及其推论，并能运用它们证明空间向量的共线和共面的问题．

2. 对于空间向量的数乘运算的运算律的证明，方法与证明平面向量数乘运算的运算律类似，可以参考《数学 4 教师教学用书》．

3. 由于空间向量平行(共线)的定义、共线向量定理等与平面向量完全相同，都是平面向量的相关知识向空间的推广，所以这时的教学应继续紧扣推广这一重要环节．教学中应注意以下几点：

(1) 要继续明确：当我们说 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的两条有向线段所在直线既可能是同一直线，也可能是平行直线；当我们说 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，也具有同样的意义．

(2) 要引导学生运用确定平面的条件判定这类空间向量问题一定能转化为平面向量问题，因此才可以说空间的上述概念“与平面一样”，平面内的上述定理“在空间也成立”．从而确认把上述平面内的概念定理推广到空间的合理性与正确性．

(3) 为了学生后续学习的方便，宜将共线向量定理中的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互换，即将 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 换成 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 换成 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(4) 不必要求学生会证明共线向量定理，只要求他们理解此定理在空间仍成立. 对于有兴趣探索其证明方法的学生，可引导他们先把定理分解为两个命题：

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，

①$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow$存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

②存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Rightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

再引导他们分别根据确定平面的条件及命题的已知条件将问题转化为平面问题，进而仿照在平面内证明此定理的方法进行证明.

(5) 关于共线向量定理的应用，应引导学生明确两个方面：

①当已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行或共线，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，根据必要性可得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 是唯一确定的实数. 也就是说，必要性是共线向量的性质定理；

②当存在唯一的实数 λ，使空间两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，可据充分性判定 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$(平行或共线). 也就是说，充分性是空间向量共线的判定定理. 这里应要求学生注意：如果要用此结论判定 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在直线平行，还需 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$) 上有一点不在 $\boldsymbol{b}$(或 $\boldsymbol{a}$) 上.

(6) 在 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 中，对于确定的 λ 和 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示空间与 $\boldsymbol{a}$ 平行或共线且长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|$ 的所有向量.

4. 关于共线向量定理推论的教学，可按如下步骤导出这两个推论(空间直线的向量参数方程)：

因为 $l/\!/\boldsymbol{a}$，

所以对于 l 上任意一点 P，存在唯一的 t，满足

$$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}.$$

又因为对空间任意一点 O，有

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA},$$

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\boldsymbol{a}$，

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$. ①

若在 l 上取$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则有

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}. \quad ②$$

进一步，

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$. ③

此外，关于教科书图 3.1-8，既可看成平面图形，也可看成空间图形，二者都不违背教科书意图(因为点 O 是空间任意一点)，学生更易理解.

5. 关于共面向量的意义、共面向量定理及其推论的教学，需要注意以下问题.

(1) 共面向量与共线向量的定义对象不同，但定义形式相同，可用对比法教学.

(2) 共面向量定理中，条件的必要性实际上就是平面向量基本定理. 因此，教学共面向量定理，可在复习平面向量基本定理的基础上，引导学生明确：这个定理说的是三个向量共面的性质；它在空间也成立，进而指出研究空间向量时常需判定若干向量共面.

(3) 共线向量定理的证明中，证明必要性时，因为已知条件和求证结论与平面向量基本定理吻合，学生不难接受. 对于充分性，可证明如下：

如教科书图 3.1-9.

因为 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$ 分别与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，

所以 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$ 都在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 确定的平面内.

又因为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 是以 $|x\boldsymbol{a}|$，$|y\boldsymbol{b}|$ 为邻边的平行四边形的一条对角线所表示的向量，并且此平行四边形在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 确定的平面内，

所以 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 确定的平面内，即 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面.

向量问题的表述学生比较生疏，教学中应注意适当训练.

当 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，共面向量定理实际上也是 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的三条直线共面的充要条件. 但用于判定时，还需证明其中一直线上有一点在另两直线确定的平面内.

6. 共面向量定理的推论说的是空间一点 P 在已知平面 ABC 内的充要条件为

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}, \qquad ④$$

或

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}. \qquad ⑤$$

其中 x，y 是唯一的一对有序实数.

这里，等式④与共面向量定理中的

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$$

相同，只是向量的表示方法不同.

对于空间任意一点 O，因 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，代入④，整理即可得等式⑤. 又因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，代入⑤，可进一步整理得

$$\overrightarrow{OP}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}. \qquad ⑥$$

由于对于空间任意一点 P，只要满足等式④⑤⑥之一(它们只是形式不同的同一个等式)，点 P 就在平面 MAB 内；对于平面 MAB 内的任意一点 P，都满足等式④⑤⑥，所以，等式④⑤⑥都是由不共线的两个向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$(或不共线三点 M，A，B)确定的空间平面的向量参数方程，也是 M，A，B，P 四点共面的充要条件.

对于方程④⑤⑥，也应引导学生分析特点，加深记忆.

根据教科书图 3.1-9，方程④是根据平行四边形法则得到的，而方程⑤是在方程④的基础上，根据三角形法则得到的. 方程⑥可与方程③对比记忆.

7. 关于教科书 88 页的“思考”栏目.

(1) 略；

(2) 原式可以变形为

$$\overrightarrow{OP}=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+z(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}),$$
$$\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC},$$

所以，点 P 与点 A，B，C 共面.

8. 对于本小节的例 1，教学时要注意引导学生观察特点、联想已知、分析思路、明确方向. 例 1 显然应转化为证明四点共面的充要条件成立，关键是怎样建立这四点的向量方程. 由已知▱$ABCD$及向量等式(已知条件中应限定 $k\neq0$，且 $k\neq1$)，可猜想四边形 $EFGH$ 也是平行四边形. 从而想到从向量加法的平行四边形法则入手，设法证明它的一条对角线所表示的向量等于一对邻边所表示的向量之和. 有了这一目标，就不难理解教科书中的证明过程.

实际上，当四边形 $ABCD$ 不是平行四边形时，我们也可以得出类似的结论. 即对于一个任意的平面图形Ⅰ(相当于▱$ABCD$)，我们可以利用这种方法得到与它相似的平面图形Ⅱ(相当于▱$EFGH$)，相似比为 k.

3.1.3　空间向量的数量积运算

1. 本小节在平面向量的夹角和向量长度概念的基础上，引入了空间向量的夹角、长度的概念和表

示方法，介绍了空间两个向量的数量积(内积、点积)的概念和计算方法、运算律，并举例说明用向量解决立体几何中直线和平面垂直、直线和直线垂直、两点距离或线段长度等问题的基本方法步骤．本小节的重点是两个向量的数量积的计算方法及其应用，难点是如何将立体几何问题转化为向量的计算问题．

2．由于空间两个向量都可转化为共面向量，所以空间两个向量夹角的定义、取值范围、两个向量垂直的定义和表示符号及向量的模的概念和表示符号等，都与平面向量相同．

对于表示两个向量的夹角的符号$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的教学，除了要求学生理解$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$外，还应引导学生明确以下几点：

(1) 防止将$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$与表示点的符号$(a,\ b)$混淆．

(2) 防止混淆$\langle \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\rangle$与$\langle -\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，$\langle \overrightarrow{OA},\ -\overrightarrow{OB}\rangle$，

$$\langle -\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\rangle=\langle \overrightarrow{OA},\ -\overrightarrow{OB}\rangle=\pi-\langle \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\rangle.$$

这也是以后求立体几何中两个向量夹角时常会遇到的情况．

3．空间两个向量的数量积的意义与平面上两个向量的数量积的意义，实际上是一样的．学生只要理解任意两个向量共面，就可把空间两个向量的数量积转化为平面内两个向量的数量积．

类比平面向量，我们可以得到$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的几何意义：

数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$等于$\boldsymbol{a}$的长度$|\boldsymbol{a}|$与$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$的方向上的投影$|\boldsymbol{b}|$与$\cos\theta$的乘积．

4．对于数量积的运算律，以下提供一些证明，供教师参考．

(1) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$的证明．

当$\lambda=0$时，等式显然成立．当$\lambda\neq0$时，

因为$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}\rangle$

$$=|\lambda|(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}\rangle)$$

所以若$\lambda>0$，则$|\lambda|=\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\rangle$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}\rangle)$$
$$=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b});$$

若$\lambda<0$，则$|\lambda|=-\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\rangle$，

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\lambda[|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)]$$
$$=\lambda(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)$$
$$=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

综上所述，得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$的证明．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$
$$=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$$
$$=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$的证明．

分配律等价于各个向量和的投影等于各个向量投影的和．

如图 3-2，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$的单位向量为$\boldsymbol{a}_0$，作轴$l$与$\boldsymbol{a}$共线，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$．

又设$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}$确定平面α，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}$确定平面β，分别过点B，C作$BD\perp OA$于点D，$CE\perp OA$于点E，则

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE},$$

图 3-2

$$OE=OD+DE,$$

即

$$\boldsymbol{a}_0\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{c}.$$

上式两边同乘$|\boldsymbol{a}|$，得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

5. 关于教科书第 90 页的“思考”栏目.

（1）对三个不为 0 的数a，b，c，若$ab=ac$，则$b=c$. 对于向量，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，不能得到$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 例如，教科书图 3.1-2，向量$\overrightarrow{OC}$与向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$都垂直，因此$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$，显然$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不相等.

（2）对三个不为 0 的数a，b，c，若$ab=c$，则$a=\dfrac{c}{b}$（或$b=\dfrac{c}{a}$）. 对于向量，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，不能写成$\boldsymbol{a}=\dfrac{k}{\boldsymbol{b}}$（或$\boldsymbol{b}=\dfrac{k}{\boldsymbol{a}}$），也就是说，向量没有除法.

（3）对三个不为 0 的数a，b，c，有$(ab)c=a(bc)$. 对于向量，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不成立，也就是说，向量不可以连乘，向量的数量积不满足结合律. 例如，任意取三个不共面的向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$是一个数与向量$\boldsymbol{c}$作数乘，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$是一个数与向量$\boldsymbol{a}$作数乘，而$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$不在同一个方向上，所以$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$不相等.

6. 本小节安排了用向量证明三垂线定理和直线与平面垂直的判定定理两个例题. 在接下来的练习中，安排了一些计算向量长度和夹角的问题，解决这些问题，都要用到向量的数量积运算. 安排这样一些问题，目的在于让学生体会用向量解决立体几何中一些简单问题的基本思考方法. 教学时要注重引导学生分析题意，寻求解题思路. 可按如下过程引导学生思考：

（1）如何把已知的几何条件转化为向量表示？

（2）考虑未知的向量能否用基向量或其他已知向量表示.

（3）如何对已经表示出来的向量进行运算，获得需要的结论？

3.1.4　空间向量的正交分解及其坐标表示

1. 本小节首先介绍了空间向量的正交分解，接下来，类比平面向量基本定理，给出了空间向量基本定理. 在此基础上，通过空间向量的单位正交分解，完成了从单位正交分解到空间直角坐标系的转换，最后，举例说明用空间三个不共面向量表示给定向量的方法. 教科书处理是按照先特殊到一般，即先由正交分解到一般分解. 教学时也可以采取从一般到特殊，即先讲一般分解，再到正交分解.

通过本小节的教学，要使学生了解空间向量基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示，并会在简单问题中选用空间三个不共面向量作为基底表示其他向量.

2. 空间向量的正交分解与平面向量的正交分解类似，区别仅在于基底中多了一个向量，从而分解结果中也多了一“项”. 证明时，要两次用到平面向量基本定理. 结合教科书图 3.1-15，学生应该不难理解.

3. 对于空间向量基本定理，应对比平面向量基本定理进行教学，引导学生比较空间向量基本定理与平面向量基本定理的相似之处与不同之点，思考空间向量基本定理的证明是否可仿照平面向量基本定理的证明思路进行.

空间向量基本定理可以证明如下：

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共面（图 3-3），过点O作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$；过点$P$作直线$PP'$平行于$OC$，交平面$OAB$于点$P'$；在平面$OAB$内，过点$P'$作直线$P'A'\parallel OB$，$P'B'\parallel OA$，分别与直线$OA$，$OB$相交于点$A'$，$B'$. 于是存在三个实数$x$，$y$，$z$，使

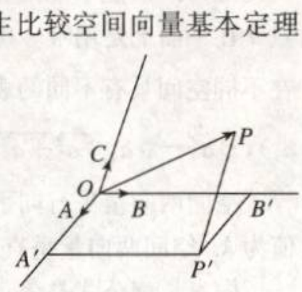


图 3-3

$$\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{P'P}=z\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{P'P}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}.$$

所以

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

可以证明此表达是唯一的.

空间向量基本定理说明，用空间三个不共面已知向量组$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$可以线性表示出空间任意一个向量，而且表示的结果是唯一的.

对于基底$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$，除了应知道$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共面，还应明确：

(1) 空间任意三个不共面向量都可以作为空间向量的一个基底.

(2) 由于$\mathbf{0}$可视为与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面，所以，三个向量不共面，就隐含着它们都不是$\mathbf{0}$.

(3) 一个基底是指一个向量组，一个基向量是指基底中的某一个向量，二者是相关联的不同概念.

4. 选定空间不共面的三个向量作基向量，并用它们表示指定的向量，是用空间向量解决立体几何问题的基本内容. 教学时，应引导学生结合已知所求，观察图形，联想相关的运算法则和公式等，表示所需向量.

如对于教科书例 4，最终要求用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OP}$. 据此，观察图形可见$\overrightarrow{OP}$在$\triangle OMP$中，联想到向量加法的三角形法则，可得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}. \qquad (*)$$

与最终目标比较，可知$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{MP}$都不是目标要求的向量，故应分别将它们作为新的需表示的向量，结合已知观察图形，考虑它们分别可用什么向量表示.

由于点M是OA中点，故可得$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，这已经符合目标要求. 依题意$\overrightarrow{MP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$，又$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$，因此$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

这样，就将所涉及的向量都转化为符合最终目标要求的向量了.

3.1.5 空间向量运算的坐标表示

1. 本小节主要内容：空间向量加减、数乘、数量积运算的坐标表示，平行向量、垂直向量坐标之间的关系，向量长度公式、两向量夹角公式、空间两点间距离公式.

通过本小节教学，应使学生掌握空间向量的坐标运算的规律；会根据向量的坐标，判断两个向量共线或垂直；掌握向量长度公式、两向量夹角公式、空间两点间距离公式；并会应用这些知识解决简单立体几何问题.

2. 空间向量的坐标运算，加法、减法和数量积同平面向量类似，具有类似的运算法则，教学中可类比推广. 但能不能推广是学生疑难点所在，教师应抓住空间向量的坐标表示这一根本去突破. 即向量$\boldsymbol{a}$在平面上是用唯一确定的有序实数对表示，$\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，在空间也是这样定义的. 不同点仅是向量在不同空间具有不同的表达形式，如在平面上，$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$；在空间$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}$. 不论在平面还是在空间都有$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

空间两向量平行同平面两向量平行的表达式不一样，但实质是一致的，即对应坐标成比例，且比值为λ. 空间两向量垂直同平面两向量垂直公式类似.

向量长度公式是表示向量的长度，其形式与平面向量长度公式一致，教学时可用类比的方法进行. 它的几何意义是表示长方体对角线的长度.

夹角公式可根据数据量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，结合空间向量数量积、空间向量长度的坐标表示推出，其范围 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$．应向学生指明 $\theta=0°$，$90°$，$180°$时，两向量的位置关系．

两点间的距离公式是长度公式的推广．首先根据向量的减法推出向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示，然后再用长度公式推出．

最后还应当说明，上述公式都与坐标原点的选取无关．

3. 将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来，不仅可以解决一些夹角和距离的计算问题，而且还可以使一些问题的解决变得简单．教科书安排的例 5 和例 6 分别是利用空间向量的坐标运算求夹角和证明垂直的问题，它们的关键在于选择直角坐标系，这也是在长方体中建立空间直角坐标系的常用方法．

四、补充例题

1. 已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，确定在下列各条件下，点 M 是否与 A，B，C 三点共面：

(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$；

(2) $\overrightarrow{OM}=2\,\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

解：(1) 由已知得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OM},$$

所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$，

即　$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$，$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

所以点 M 与 A，B，C 三点共面．

(2) 如果点 M 与 A，B，C 三点共面，

那么，存在数对$(x，y)$，使$\overrightarrow{MB}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$.　（＊）

对平面 ABC 外任一点 O，

$$\overrightarrow{OM}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}.$$

比较原式，由基本定理得

$$\begin{cases}1-x-y=2,\\x=-1,\\y=-1.\end{cases}$$

此方程组无解，所以不存在 x，y 使（＊）成立，

所以点 M 与 A，B，C 三点不共面．

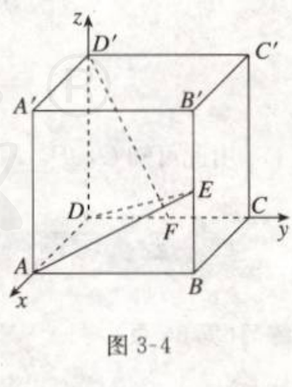


图 3-4

2. 如图 3-4，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，点 E，F 分别是 BB_1，CD 的中点，求证 $D_1F\perp$平面 ADE.

证明：不妨设已知正方体的棱长为 1 个单位长度，且设

$$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{i}，\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{j}，\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{k}.$$

以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为坐标向量建立空间直角坐标系 D-xyz，则

$$\overrightarrow{AD}=(-1，0，0)，\overrightarrow{D_1F}=\left(0，\frac{1}{2}，-1\right),$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{D_1F}=(-1，0，0)\cdot\left(0，\frac{1}{2}，-1\right)=0,$$

所以 $D_1F\perp AD$.

又 $\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，

所以$\overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{AE}$，

所以 $D_1F\perp AE$.

又 $AD\cap AE=A$，

所以 $D_1F\perp$平面 ADE.

3. 如图 3-5，已知两条异面直线所成的角为 θ，在直线 a，b 上分别取 E，F，已知 $A'E=m$，$AF=n$，$EF=l$，求公垂线 AA'的长 d.

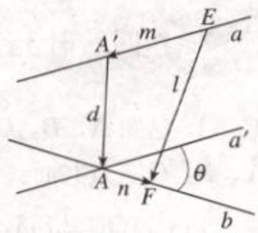


图 3-5

解：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF}$，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{EF}|^2&=(\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF})\cdot(\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF})\\&=\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{AF}\\&\quad+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{AF}\\&\quad+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AF}.\end{aligned}$$

因为$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{EA'}$，$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{AF}$，

$\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle=\theta$（或 $\pi-\theta$），

所以$l^2=\overrightarrow{EA'}^2+\overrightarrow{A'A}^2+\overrightarrow{AF}^2+2\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=m^2+d^2+n^2\pm2mn\cos\theta$，

所以 $d=\sqrt{l^2-m^2-n^2\mp2mn\cos\theta}$

4. 如图 3-6，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

求证：对角线 AC'，BD'，CA'，DB'相交于一点 O，且在点 O 处互相平分.

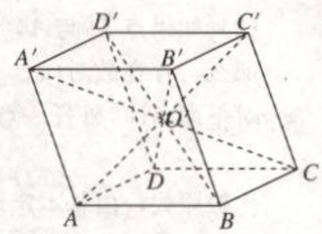


图 3-6

证明：设点 O 是 AC'的中点，则$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

设点 P，M，N 分别是 BD'，CA'，DB'的中点，同理可证

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}),$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}),$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}).$$

由此可知 O，P，M，N 四点重合，命题得证.

五、习题解答

练习(第 86 页)

1. 略.

2. 略.

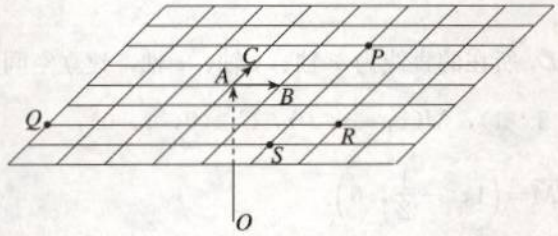
3. $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

练习(第 89 页)

1. (1)$\overrightarrow{AD}$；(2)$\overrightarrow{AF}$；(3)$\overrightarrow{EF}$.

2. (1)$x=1$；(2)$x=y=\frac{1}{2}$；(3)$x=y=\frac{1}{2}$.

3. 如图.



（第 3 题）

练习（第 92 页）

1. B.

2. 解：因为$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，

所以$|\overrightarrow{AC'}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$$
$$=4^2+3^2+5^2+2\times(0+10+7.5)$$
$$=85.$$

所以 $AC'=\sqrt{85}$.

3. 解：因为 $AC\perp\alpha$，

所以 $AC\perp BD$，$AC\perp AB$，又知 $BD\perp AB$.

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$|\overrightarrow{CD}|^2=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$$
$$=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2$$
$$=a^2+b^2+c^2.$$

所以 $CD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

练习（第 94 页）

1. 向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 一定构成空间的一个基底. 否则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，于是 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，这与已知矛盾.

2. 共面.

3. (1) 解：$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB'}$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};$$

$$\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}$$
$$=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}$$
$$=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b};$$

$$\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}$$
$$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}$$
$$=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

(2) $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

练习（第 97 页）

1. (1) $(-2,7,4)$；　　(2) $(-10,1,16)$；

(3) $(-18, 12, 30)$； (4) 2.

2. 略.

3. 解：分别以 DA，DC，DD_1 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系. 则

$D(0, 0, 0)$，$B_1(1, 1, 1)$，$M\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$，$C$，$(0, 1, 0)$，

$\overrightarrow{DB_1}=(1, 1, 1)$，$\overrightarrow{CM}=\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{CM}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\dfrac{1-\frac{1}{2}+0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

习题 3.1 A 组

1. 解：如图，

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$；

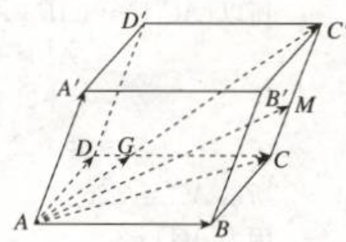
(3) 设点 M 是线段 CC' 的中点，则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}；$$

(4) 设点 G 是线段 AC' 的三等分点，则

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AG}.$$

向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ 如图所示.



(第 1 题)

2. A.

3. 解：$|\overrightarrow{AC'}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=5^2+3^2+7^2+2\left(5\times3\times\frac{1}{2}+5\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=98+56\sqrt{2}$.

所以 $|AC'|\approx13.3$.

4. 解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos 60°=\frac{1}{2}a^2$；

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{DB}|\cos 120°=-\frac{1}{2}a^2$；

(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{GF}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos 180°=-\frac{1}{2}a^2\left(|\overrightarrow{GF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}a\right)$；

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 60°=\frac{1}{4}a^2\left(|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}a\right)$；

(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{FG}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos 120°=-\frac{1}{4}a^2\left(|\overrightarrow{FG}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}a\right)$；

(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}=\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{DC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 120°+\frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 60°+\frac{1}{4}|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos 60°$

$=\frac{1}{4}a^2$.

5. (1) 60°；(2) 略.

6. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的横坐标不为 0，其余均为零；向量 $\boldsymbol{b}$ 的纵坐标不为 0，其余均为 0；向量 $\boldsymbol{c}$ 的竖坐标不为零，其余均为 0.

7. (1) 9；(2) (14，−3，3).

8. 解：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $-8-2+3x=0$，

解得 $x=\frac{10}{3}$.

9. 解：$\overrightarrow{AB}=(-5，-1，10)$，$\overrightarrow{BA}=(5，1，-10)$；

设 AB 的中点为 M，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{1}{2}，\frac{9}{2}，-2\right)$，

所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}，\frac{9}{2}，-2\right)$.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+10^2}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$.

10. 解：分别以 DA，DC，DD_1 作为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$. 则 C，M，D_1，N 的坐标分别为：

$C(0，1，0)$，$M\left(1，0，\frac{1}{2}\right)$，$D_1(0，0，1)$，$N\left(1，1，\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{CM}=\left(1，-1，\frac{1}{2}\right)$，$|\overrightarrow{CM}|=\frac{3}{2}$，$\overrightarrow{D_1N}=\left(1，1，-\frac{1}{2}\right)$，$|\overrightarrow{D_1N}|=\frac{3}{2}$.

$$\cos\langle\overrightarrow{CM}，\overrightarrow{D_1N}\rangle=\frac{1-1-\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=-\frac{1}{9}.$$

由于异面直线 CM 和 D_1N 所成的角的范围是 $\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$，因此 CM 和 D_1N 所成角的余弦值为 $\frac{1}{9}$.

11. $\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}，3\right)$.

B 组

1. 证明：由已知可知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$，

$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，

$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

所以 $OC\perp AB$.

2. 证明：因为点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，BC，CA 的中点，

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$，

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})$$

因为 $OA=OB$，$CA=CB$(已知)，$OC=OC$，

所以$\triangle BOC\cong\triangle AOC$，

所以$\angle BOC=\angle AOC$，

所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}=0$，

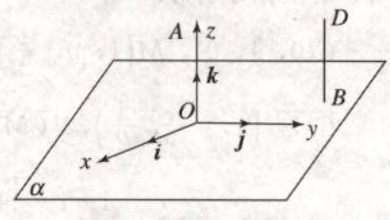
所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EH}$，

所以四边形 $EFGH$ 是矩形.

3. 已知：如图，直线 $OA\perp$平面 α，直线 $BD\perp$平面 α，O，B 为垂足.

求证：$OA\parallel BD$.

证明：以点 O 为原点，以射线 OA 方向为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 O-xyz，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x 轴、y 轴、z 轴的坐标向量，且设$\overrightarrow{BD}=(x，y，z)$.



(第 3 题)

因为 $BD\perp\alpha$，

所以$\overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{j}$，

所以$\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{i}=(x，y，z)\cdot(1，0，0)=x=0$，

$\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{j}=(x，y，z)\cdot(0，1，0)=y=0$.

所以$\overrightarrow{BD}=(0，0，z)$.

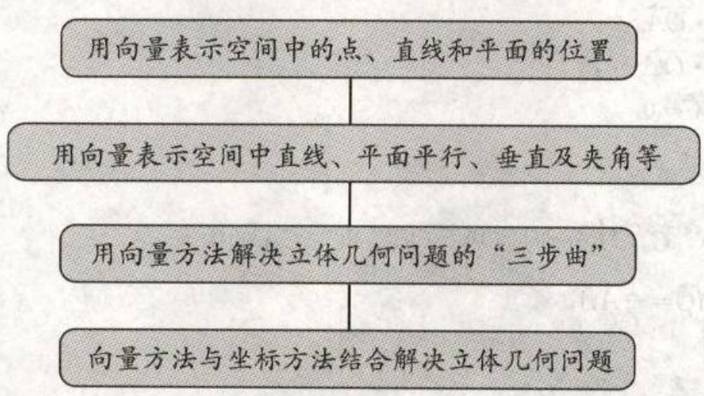
所以$\overrightarrow{BD}=z\boldsymbol{k}$.

所以$\overrightarrow{BD}\parallel\boldsymbol{k}$，又知 O，B 为两个不同的点，

所以 $BD\parallel OA$.

3.2 立体几何中的向量方法

一、本节知识结构



二、教学重点难点

重点：理解并掌握向量方法解决立体几何问题的一般方法（“三步曲”）.

难点：建立立体图形与空间向量之间的联系，把立体几何问题转化为向量问题.

三、教科书编写意图与教学建议

本节的核心内容为利用空间向量解决立体几何问题的一般方法：先利用空间向量表示空间点、直线、平面等元素，建立立体图形与空间向量的联系；进行空间向量运算；由向量运算结果回归几何结论.

在例 1 之前，教科书安排了“思考”“探究”等栏目，讨论用向量表示空间中的点、直线和平面的位置，以及用向量表示空间中直线、平面平行、垂直及夹角等，作为用向量方法解决立体几何问题的铺垫.

本节的主要部分是通过例题讨论本节的主题——立体几何中的向量方法，结合例题学习可以使学生对这一主题有更具体的感受．例 1—例 4 是逐步深入展开讨论的，其中例 1、例 2 直接利用向量运算，例 3、例 4 把向量方法与坐标方法相结合．本节最后以框图形式引导学生进行小结，使学生对上述主题的认识得到进一步深化，提高抽象概括能力.

1. 利用空间向量解决立体几何问题，是利用平面向量解决平面几何问题的发展

本节之前，学生已经学过利用平面向量解决平面几何问题．平面向量是二维向量$(x,\ y)$的形式，空间向量是三维向量$(x,\ y,\ z)$的形式．两者除维数不同外，在几何意义、坐标表示、运算等方面都有相似之处，平面向量基本定理与空间向量基本定理也有形式上基本一致的内容.

平面几何所讨论的对象是同一平面上的点、直线等元素，它们可以与平面向量建立联系，利用平面向量可以表示平面上直线之间的平行、垂直关系以及两条直线夹角的大小，因此许多平面几何问题可以转化为平面向量问题，通过进行平面向量的运算得出几何结论．与此完全相似，立体几何所讨论的对象是三维空间中的点、直线、平面等元素，它们可以与空间向量建立联系，例如直线有方向向量，平面有法向量，这些向量可以表示直线、平面的方向，再加上定点则可以确切地表示直线、平面的位置．利用这些向量可以表示空间直线、平面的平行、垂直、夹角等，因此许多立体几何问题可以转化为空间向量问题，通过进行空间向量的运算得出几何结论.

利用空间向量解决立体几何问题，是利用平面向量解决平面几何问题的发展．主要变化是维数增加了，讨论的对象由二维图形变为三维图形．学习本节内容时，要充分利用学生已有的利用平面向量解决平面几何问题的知识基础和学习经验，注意进行新旧内容之间的类比，达到温故知新的效果.

2. 利用空间向量决定点、直线和平面在空间的位置

讨论立体几何问题，首先要考虑空间中的基本几何元素——点、直线和平面．如何确定点、直线和平面在空间中的位置？这是必须考虑的问题.

在解析几何中，通过建立坐标系，利用坐标和方程可以解决上述问题．本节的第一个“思考”栏目引导学生考虑如何利用向量解决这一问题，栏目中的问题对寻求问题的答案作出了必要的提示.

要利用向量确定点、直线和平面在空间中的位置，必须保证这些位置是唯一确定的.

空间中的点 P，可以用其位置向量$\overrightarrow{OP}$来确定．注意这个向量的起点 O 是事先选定的一个定点.

空间中任意一条直线 l，可以通过 l 上的一个定点 A 和 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{a}$ 来确定．设点 P 是 l 上的任意一点，则 l 有向量表示形式$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$，其中 t 为实数，这种形式叫做直线的点向式表示．注意同一条直线的点向式表示并不唯一，例如直线 l 可以表示为$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$，或$\overrightarrow{AP}=s\boldsymbol{b}$，这里的 s，t 是不同的实数，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是不同的向量，但是一定有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

空间中任意一个平面 α，有两种向量表示形式：

(1) 通过 α 上的一个定点 O 和两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 来确定．设点 P 是 α 上的任意一点，则 α 有向量表示形式$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中 x，y 为实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是 α 上相交于点 O 的两条直线的方向向量．这种形式与平面向量基本定理一致．注意同一个平面的这种形式的表达式并不唯一，例如平面 α 可以表示为$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，或$\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{c}+v\boldsymbol{d}$，这里的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 不完全相同.

(2) 通过 α 上的一个定点 O 和一个向量 $\boldsymbol{a}$ 来确定．设点 P 是 α 上的任意一点，则 α 有向量表示形式$\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{a}=0$，其中 $\boldsymbol{a}$ 是 α 的法向量，这种形式叫做平面的点法式表示．注意同一个平面的这种形式的表达式并不唯一，例如平面 α 可以表示为$\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{a}=0$，或$\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{b}=0$，这里的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是不同的向量，但是一定有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

从以上可以看出，用空间向量确定点、直线、平面的位置时，都需要事先确定某个定点，作为表达式中向量的起点，例如上面的点 O，A 等．教学中应引导学生注意这一点.

所谓用空间向量确定点、直线、平面的位置，即用空间向量形式可以表达空间中确定的点、直线、平面．这样就能将立体几何问题转化为向量问题来讨论，教学中应使学生了解到这是学习用空间向量确定点、直线、平面的位置的目的.

3. 利用空间向量表示立体几何中的平行、垂直和夹角

因为利用空间向量可以确定空间中点、直线、平面的位置，所以会自然地联想到利用空间向量可以表示线线、线面和面面之间的平行、垂直和夹角．这样的表示方法中，主要利用直线的方向向量和平面的法向量．本节教科书正文中讨论了线面平行与线面垂直的问题，并设立“探究”栏目引导学生考虑其他问题．这些问题，都可以利用有关位置关系的定义和直线的方向向量、平面的法向量，很容易地解决．将它们归纳起来有如下结论.

设直线 l，m 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则

线线平行　$l/\!/m\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$；

线面平行　$l/\!/\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=0$；

面面平行　$\alpha/\!/\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}$.

线线垂直　$l\perp m\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

线面垂直　$l\perp\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{u}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u}$；

面面垂直　$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

线线夹角　l，m 的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

线面夹角　l，α 的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}|}$；

面面夹角　α，β 的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

注意：(1) 这里的线线平行包括线线重合，线面平行包括线在面内，面面平行包括面面重合.

(2) 这里的线线夹角、线面夹角、面面夹角都是按照相关定义给出的，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

二面角的大小是指其两个半平面的张开程度，这可以用其平面角 θ 的大小来定义，它的取值范围为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\theta$ 具体取 $\arccos\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$，还是 $\arccos\frac{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ 应结合具体问题而定.

教学中应结合几何图形讲授上述内容，引导学生借助图形理解它们，避免不联系几何意义的死记硬背.

如果平面是通过其上的一个定点 O 和两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 来表示的，即设点 P 是 α 上的任意一点，α 有向量表示形式 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，直线 l 的方向向量是 $\boldsymbol{c}$，那么有

线面垂直　$l\perp\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{c}\perp\overrightarrow{OP}\Leftrightarrow\boldsymbol{c}\cdot\overrightarrow{OP}=0$.

教学中应提醒学生注意平面的法向量与平面上任一向量的区别与联系.

4. 几个判定定理的证明

我们在教科书中给出了“平面与平面平行的判定定理”的证明，不难发现，在证明过程中突出了直线的方向向量和平面的法向量的作用. 以后我们用向量证明有关结论时，直线的方向向量和平面的法向量是重要的工具.

仿照“平面与平面平行的判定定理”的证明，我们给出其他两个判定定理的证明.

(1) 直线与平面平行的判定定理：**平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.**

已知：直线 l，m 和平面 α，其中 $l\not\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，且 $l/\!/m$，求证：$l/\!/\alpha$.

证明：设直线 l，m 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，平面 α 的法向量分别为 $\boldsymbol{u}$.

因为 $l/\!/m$，所以 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，$k\in\mathbf{R}$.

又因为 $\boldsymbol{u}\perp\alpha$，$m\subset\alpha$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{b}$，

因此 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}\cdot k\boldsymbol{b}=0$.

所以 $l/\!/\alpha$.

(2) 平面与平面垂直的判定定理：**一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.**

已知：直线 l 和平面 α，β，其中 $l\subset\beta$，且 $l\perp\alpha$，求证：$\alpha\perp\beta$.

证明：设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$.

因为 $l\perp\alpha$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{a}$，$k\in\mathbf{R}$.

因为 $l\subset\beta$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

于是 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

因此，$\alpha\perp\beta$.

5. 如何理解向量运算的作用

教科书在第 103 页边空提出问题：你同意“向量是躯体，运算是灵魂”“没有运算的向量只能起路标的作用”的说法吗？

这个问题是要引导学生关注向量的运算在解决几何问题中的作用. 向量不仅能表示空间中的点、直线和平面，而且向量的运算与空间几何元素的位置关系可以对应起来，例如线线垂直可以与其方向向量的数量积建立对应关系，即 $l\perp m\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 这样我们就可以通过向量运算来讨论空间几何元素的位置关系，而这正是立体几何要讨论的主要问题. 因此，我们说向量的主要作用要通过其运算来体现. 如果没有运算，那么向量仅能表示空间中的点、直线和平面的位置，即只是

"路标"而已.

对于这个问题的理解体会需要通过后面的学习来深化，所以在本节教学中应反复引导学生对其加深认识.

6. 立体几何中的向量方法 ——"三步曲"

教科书在讨论了利用空间向量表示空间几何元素的位置关系后，明确地写出了立体几何中的向量方法 ——"三步曲"：

(1) 建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

(2) 进行向量运算，研究点、直线、平面之间的关系(距离和夹角等)；

(3) 根据运算结果的几何意义来解释相关问题.

这是本节的重点，它很清楚地反映了向量在解决几何问题中的工具作用，同时说明了使用这个工具的基本方法——运算.

教科书在讨论具体例题之前给出这段话，是为使学生胸有大方向，明确应如何分析解决后面的例题. 实际上，在此处给出"三步曲"不是突然之举，因为在以前学习平面向量时，学生曾经历过类似这样的分析问题、解决问题的过程，以往的经验可以很自然地迁移至此. 教学中可以联系以前利用平面向量讨论平面几何问题的方法，以及刚刚学习的利用空间向量表示空间几何元素的位置关系等内容，引导学生自己进行归纳，得出"三步曲"，这样有利于提高学生主动学习的能力.

7. 对例 1 的说明

本例讨论平行六面体的对角线长与棱长之间的关系，这可以转化为关于向量模的问题. 向量的模长与数量积有关，即$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$，利用数量积的定义很容易推出它. 由于立体几何中的各种距离最终都可以归结为两点间的距离，于是可以转化为向量的模，所以这个式子在关于距离的问题中经常使用，本例中分析问题时的基本公式就是它.

为建立对角线与棱之间的关系，需要通过向量加法把对角线表示为三条棱的和，而平行六面体中相交于同一顶点的三条棱就是所有棱的代表.

本例中设棱长为 1 可以使解题过程简化，这是小技巧.

教学中，应引导学生从整体上认识：立体几何中的向量方法 ——"三步曲"在本例中是如何具体使用的. 这是从思想方法上使学生得到提高所不可少的.

本例后面的"思考"栏目安排了 3 个问题，其中问题 1 是与本例类似的问题，问题 2 是本例的逆向问题，问题 3 是比本例更复杂的问题. 这些问题可以使本例得到拓广延伸.

"思考"栏目的参考解答：

第 1 题 $\overrightarrow{BD_1}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1})^2=1+1+1+2(\cos 120^\circ+\cos 60^\circ+\cos 120^\circ)=2.$

$BD_1=\sqrt{2}=\sqrt{2}AB.$

第 2 题 可以. 设以这个顶点为端点的对角线长为 a，棱长为 x，则

$$a^2=3x^2+2\times 3x^2\cos\alpha,$$

解得

$$x=\sqrt{\frac{1}{3+6\cos\alpha}}a.$$

第 3 题 连接 AC，$\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2=1+1+2\cos 60^\circ=3$，$AC=\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\cos 60^\circ+\cos 60^\circ=1,$

$$\cos\angle A_1AC=\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{AA_1\cdot AC}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

两个平行平面间的距离为 $|\overrightarrow{AA_1}|\sin\angle A_1AC=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

8. 对例 2 的说明

本例讨论有关二面角的问题，这可以转化为关于向量数量积的问题．向量的数量积与向量的夹角有关，即 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$，其中 θ 是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的夹角，利用数量积的定义很容易推出它．于是，立体几何中有关夹角的问题，可以转化为有关向量数量积的问题，所以这个式子在这类问题中经常使用，本例中分析问题时的基本公式就是它．

考虑二面角时，常要考虑它的平面角，由于向量可以平移，本例中二面角的平面角即$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{DB}$的夹角问题转化为求 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DB}|}$.

本例中已知条件多是线段长，所以应利用这些条件先求出$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$，按照这种思路就容易想到教科书中的解法．教学中应提醒学生考虑为什么选择从$\overrightarrow{AB}$的模入手，使其认识到这样选择是合理地使用了向量间的垂直关系．

教学中当完成本例的求解后，应再次引导学生从整体上认识立体几何中的向量方法在本例中是如何具体使用的，以加深对一般解法的认识．

本例关系到二面角的大小，一个需要注意的细节是$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{DB}$的方向性，即它们的夹角应恰是二面角的平面角，而不是这个平面角的补角．

本例后面的"思考"栏目安排了 3 个问题，其中问题 1 与本例关系密切，问题 2、问题 3 结合平行六面体讨论夹角问题，这些问题可以使本例得到拓广延伸．

"思考"栏目的参考解答：

第 1 题　可以．$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\theta$.

第 2 题　可以．以教科书中图 3.2-3 为例，设以顶点 A 为端点的对角线长为 d，三条棱长分别为 a，b，c，则

$$d^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2=a^2+b^2+c^2+2\ (ab+bc+ac)\cos\theta,$$

解得

$$\cos\theta=\frac{d^2-a^2-b^2-c^2}{2(ab+bc+ac)},\quad \theta=\arccos\frac{d^2-a^2-b^2-c^2}{2(ab+bc+ac)}.$$

第 3 题　可以．以教科书中图 3.2-3 为例，在平面 AB_1 内作 $A_1E\perp AB$，垂足为 E，在平面 AC 内作 $CF\perp AB$，垂足为 F. $A_1E=CF=a\sin\theta$，$AE=BF=a\cos\theta$.

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{A_1E}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})}{a^2\sin^2\theta}\\&=\frac{a^2\cos\theta+a^2\cos\theta\cos(\pi-\theta)+a^2\cos\theta\cos(\pi-\theta)+a^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}\\&=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}.\end{aligned}$$

9. 对例 3 的说明

本例讨论本章最初提出的一个实际问题，这是一个求合力的问题．由于力可以表示为向量，所以本题可以转化为关于向量加法的问题．

建立坐标系，将向量坐标化，然后进行坐标形式下的向量运算，是本例的基本解题思路．这种方法对这类问题具有普适性．为简化计算，需要选择合适的坐标系．本例中选择以三角形的一个顶点为原点、一条边所在直线为一条坐标轴、三角形所在平面为坐标平面的坐标系，就能使后面的运算简化．为加深对此了解，可以试建立不同的坐标系，并比较它们对运算的影响．

解题中考虑单位向量也是为使运算简化．本例中对 $\boldsymbol{F}_1$ 进行了详细讨论，对于 $\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 的具体讨论，应让学生参照对 $\boldsymbol{F}_1$ 的做法自己完成．

根据本例中钢板的形状以及各分力的大小、方向，由计算结果可知合力的大小、方向、作用点，进而可知钢板的运动情况．教学中应引导学生体会向量运算和向量的坐标表示在解决问题中的作用．

本例不是纯几何问题，而是有实际背景的力学问题，解决它的过程可以体现数学建模的作用，即将实际问题数学化后运用数学方法分析解决它．

本例后面的“探究”栏目安排了 1 个问题，让学生考虑不建立坐标系如何解决例 2 的问题．这是换一种方法考虑同一问题，它有助于开拓分析问题、解决问题的思路．

“探究”栏目的参考解答：

由问题中钢板形状以及各分力的大小、方向的共同特征，可知合力的方向向上、作用点在钢板的重心，因此只要计算各分力的向上的分力然后求和即可．

如图 3-7，将 $\boldsymbol{F}_1$ 分解为一个向上的分力 $\boldsymbol{F}_{11}$ 和一个指向钢板重心的分力 $\boldsymbol{F}_{12}$，这两个分力互相垂直．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_{12}=\frac{\boldsymbol{F}}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_{11}=\sqrt{\boldsymbol{F}_1{}^2-\boldsymbol{F}_{12}{}^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{F}_1.$$

对 $\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 可以得到同样大的向上的分力，因此合力为 $3\times\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{F}_1=200\sqrt{6}(\mathrm{kg})$．

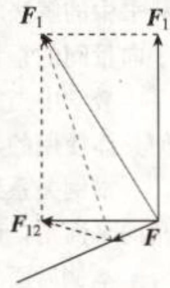


图 3-7

10. 对例 4 的说明

本例涉及证明与计算问题，其中既有判定直线与平面平行或垂直，又有计算二面角的大小．向量方法对于解决这些问题很有效．

教学中应引导学生根据已知条件(四棱锥的底面是正方形，一条侧棱垂直于底面，该侧棱长等于底面边长等)联想到建立适当的空间直角坐标系来表示向量，即将向量坐标化．为使解题过程表达简明，不妨设底面边长为 1．

本例的第(1)(2)两小题分别证明直线与平面平行、垂直，教科书的证法是由向量表示转到有关判定定理．本题中有的点位于关键位置(例如点 F)，确定它们的坐标对解题非常重要，这好似战斗中占据制高点非常重要一样．教学中应使学生领会这样的分析方法，学会抓关键点．

用综合法也可以解本例而且并不太难，教科书在本例后的“思考”栏目中提出请学生考虑如何用综合法解本例，并将其与向量方法进行比较．这有助于加强知识的横向联系．

11. 对本节小结的说明

本节最后的小结包括两部分内容：

(1) 利用框图形式，对立体几何中的向量方法——“三步曲”再加以体会．

教学中应注意引导学生结合例题来认识立体几何中的向量方法，使其认识能落到实处，而不是空洞地背记一些条文．

(2) 对前面学习过的解决立体几何问题的三种方法进行概括和比较．这些方法是：综合法、向量法和坐标法．

教学中应注意结合例子进行概括，可以通过一个问题的三种解法来认识各种方法的特征．对一个问题究竟使用何种方法更好，这要根据不同问题具体分析．正如教科书中有些例题那样，有时几种方法是结合起来使用的，应使学生对此有所了解．

四、教学设计案例

课题　3.2　立体几何中的向量方法　例 4

（一）教学任务分析

1. 通过利用向量方法解决例 4 这个综合性较强的问题，使学生进一步体会空间向量在解决立体几何问题中的广泛作用，再次熟悉立体几何中的向量方法“三步曲”．

2. 结合例 4 的解题过程，重点讨论如何利用已知条件适当建立空间直角坐标系，展示向量方法与坐标方法相结合的优越性．

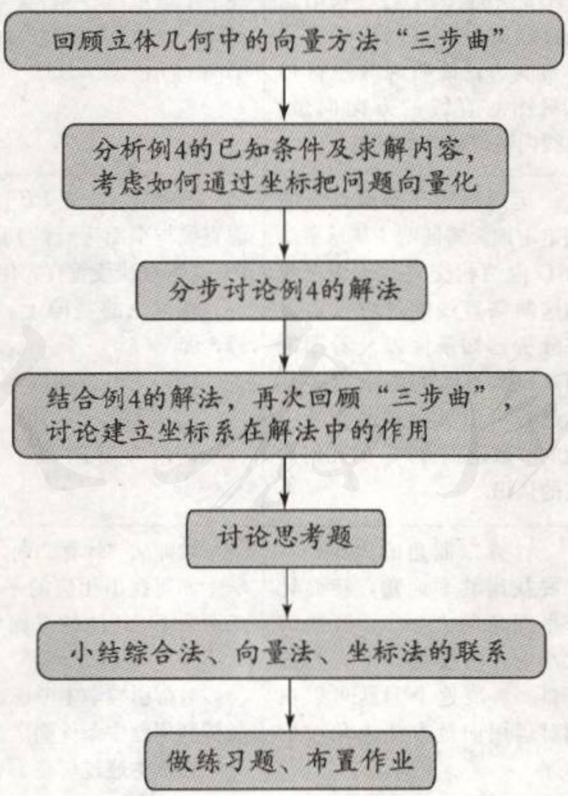
3. 结合例 4，对立体几何中的三种方法(综合法、向量法、坐标法)的联系进行分析与小结．

（二）教学重点、难点

重点：例 4 的解法(坐标法与向量法结合)．

难点：适当地建立空间直角坐标系及添加辅助线．

（三）教学基本流程



（四）教学情境设计

问　　题	设计意图	师 生 活 动
问题1：回顾前面讨论过的问题，请你概述用向量方法解决立体几何问题时一般经历怎样的过程.	立体几何中的向量方法可以归纳为三步：(1)把几何问题转化为向量问题；(2)进行向量运算；(3)由向量运算解释几何问题. 问题1有助于加强学生对解题通法的整体认识.	教师引导学生结合前面的例题从整体上归纳解题过程，留给学生一定时间，使其通过思考能明确认识“三步曲”各阶段的主要任务，并能简明地叙述出来，为对本节后续内容的整体把握作准备.
问题2：阅读例4，请你找出其中的已知条件和求解问题. 这些求解问题能用向量方法解决吗？	通过阅读题目，使学生明确题中所给出的条件和求解的问题，从需要完成的任务理出本题可以用向量解决的大体思路.	学生独立阅读并分析题意，教师引导学生认识到本题具有一定的综合性，需要证明直线与平面平行、垂直和计算二面角，而这些问题都可以利用向量解决.
问题3：从例4的已知条件和求解问题看，你认为应怎样把问题向量化？如果建立坐标系，应怎样建立？	初步建立已知条件与求解内容两者间的联系，使学生意识到通过把向量坐标化解决问题，培养他们结合题中条件建立适当坐标系的能力.	教师引导学生关注已知条件中有“三条线段两两垂直且彼此相等”这一条件，使学生由此联想到选择这些线段所在直线为坐标轴、以线段长(正方形边长)为单位长度建立空间直角坐标系，并意识到这是适合本题的坐标化方法. 教师要求学生写出点 P，A，B，C，D，E 的坐标，并进一步写出$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$等的坐标.
问题4：考虑例4 (1)，要证 $PA\parallel$平面 EDB，应如何入手？	运用直线与平面平行的判定定理，需证明 PA 与平面 EDB 内一直线平行. 找出这条直线的过程可以锻炼直觉观察能力；证明两线平行可以巩固对直线的方向向量、共线向量等概念的理解.	教师从“要证 $PA\parallel$平面 EDB”出发，启发学生考虑直线与平面平行的判定条件，引导学生通过讨论发现 PA 与 EG 有平行关系，从而自然地想到写出$\overrightarrow{EG}$的坐标，并由$\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{EG}$证出 $PA\parallel EG$，进而证出 $PA\parallel$平面 EDB.
问题5：考虑例4(2)，要证 $PB\perp$平面 EFD，应如何入手？	运用直线与平面垂直的判定定理，需证明 PB 与平面 EFD 内两相交直线垂直. 找出这两条直线的过程可以锻炼分析已知条件以及看图能力；证明直线间的垂直关系的过程可以巩固对两非零向量的“数量积为0”的几何意义的认识.	教师从“要证 $PB\perp$平面 EFD”出发，启发学生考虑直线与平面垂直的判定条件，让学生讨论：应证明 PB 与哪些线段垂直，用向量方法怎样证？ 在讨论的基础上，由学生自己写出主要证明过程，即 $PB\perp EF$(已知)， $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{DE}$，$PB\perp DE$， $PB\perp$平面 EFD.
问题6：考虑例4(3)，要计算二面角 C-PB-D 的大小，应如何入手？	计算二面角的大小，首先要找出其平面角，转而计算平面角的大小. 计算角的大小时，向量是非常有力的工具. 解决这个问题可以巩固对运用向量方法求角度的掌握.	教师从“计算二面角 C-PB-D 的大小”出发，启发学生如何找出相应的平面角，让学生讨论：哪个角是二面角 C-PB-D 的平面角，用向量方法怎样计算它的大小？ 教师引导学生考虑：点 F 的坐标对计算是否重要？怎样利用题中条件确定点 F 的坐标？ 让学生通过讨论写出确定点 F 坐标的过程，再进一步考虑并表达通过 $\cos\angle EFD=\dfrac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}}{\lvert\overrightarrow{FE}\rvert\lvert\overrightarrow{FD}\rvert}$ 计算 $\angle EFD$ 的过程.

续表

问　题	设计意图	师　生　活　动
问题7：考虑例4后的思考题.	思考题1可以使学生进一步体会向量方法中坐标化对简化计算所起的作用. 思考题2可以加强不同方法之间的联系.	学生结合刚讨论过的例题，对思考题进行思考和讨论，教师适当点拨引导. 注意不要就题论题，而要透过例题看到解题中的基本想法.
小结立体几何中的不同方法.	加深对不同方法（综合法、向量法、坐标法）的特点和联系的认识.	教师引导学生进行归纳，了解各种方法的特点及联系，认识到应根据问题的条件选择合适的方法，而不是生搬硬套.
练习，布置作业.	独立思考，巩固提高.	练习题3 作业：习题3.2 A组9～12题 B组2，3题

五、习题答案

练习(第104页)

1. (1) $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$，$l_1 /\!/ l_2$.

   (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$l_1\perp l_2$.

   (3) $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，$l_1 /\!/ l_2$.

2. (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，$\alpha\perp\beta$.

   (2) $\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{u}$，$\alpha /\!/ \beta$.

   (3) $\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=-\dfrac{29}{2\sqrt{247}}$，$\alpha$与$\beta$相交，交角的余弦等于$\dfrac{29\sqrt{247}}{494}$.

练习(第107页)

1. 证明：设正方体的棱长为1.

   $\overrightarrow{D_1F}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DD_1}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}$.

   因为$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DD_1})\cdot\overrightarrow{AD}=0-0=0$，所以$D_1F\perp AD$.

   因为$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DD_1})\cdot(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA})=0+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+0=0$，所以$D_1F\perp AE$.

   因此，$D_1F\perp$平面ADE.

2. 解：
$$\begin{aligned}|CD|^2&=\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2\\&=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\&=36+16+64+2\times6\times8\times\cos(180^\circ-60^\circ)\\&=68,\end{aligned}$$

   $|CD|=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$.

练习(第111页)

1. 证明：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}a^2+a^2\cos 120°+\frac{1}{2}a^2\cos 60°-\frac{1}{2}a^2\cos 60°=0,$$

所以 $MN\perp AB$.

同理可证 $MN\perp CD$.

2. 解：$l^2=\overrightarrow{EF}^2=(\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF})^2=m^2+d^2+n^2+2mn\cos\theta$（或 $2mn\cos(\pi-\theta)$），

$d^2=l^2-m^2-n^2\mp 2mn\cos\theta$,

所以 $|AA'|=d=\sqrt{l^2-m^2-n^2\mp 2mn\cos\theta}$.

3. 证明：以点 D 为原点，DA，DC，DD' 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立坐标系，得下列坐标：

$D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C'(0,1,1)$，$O(0.5,1,0.5)$.

因为 $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BC'}=(-0.5,-1,-0.5)\cdot(-1,0,1)=0$，所以 $DO\perp BC'$.

习题 3.2 A组

1. 解：设正方体的棱长为 1，

(1) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD'}=(\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{B'N})\cdot(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'})=\frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{CD'}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1$,

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$，$\theta=60°$.

(2) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{B'N})\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=45°$.

2. 证明：设正方体的棱长为 1，

因为 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1})\cdot\overrightarrow{AC}=0+0=0$，所以 $DB_1\perp AC$.

因为 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=(\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})\cdot\overrightarrow{AD_1}=0+0=0$，所以 $DB_1\perp AD_1$.

因此，$DB_1\perp$ 平面 ACD_1.

3. 证明：因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta-|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta=0$,

所以 $OA\perp BC$.

4. 证明：(1) 因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{LE}=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{LE}=0+0=0$，所以 $A_1C\perp LE$.

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{EF}=0+0=0$，所以 $A_1C\perp EF$.

因此，$A_1C\perp$ 平面 $EFGHLK$.

(2) 设正方体的棱长为 1，

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB_1}=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1})=-1$，$|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\overrightarrow{DB_1}|=(\sqrt{3})^2=3$,

所以 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$,

因此 DB_1 与平面 $EFGHLK$ 的所成角 α 的余弦 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5. 解：(1) $DE^2=\overrightarrow{DE}^2=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(1+1+1-1+1-1)=\frac{2}{4},\ DE=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AO}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，点 O 到平面 ABC 的距离 $OH=OA\sin\theta=1\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. 解：(1) 设 $AB=1$，作 $AO\perp BC$ 于点 O，连接 DO. 以点 O 为原点，OD，OC，OA 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立坐标系，得下列坐标：

$O(0,0,0)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{3}{2},0\right)$，$A\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{4}$，$|\overrightarrow{DO}|\cdot|\overrightarrow{DA}|=\frac{\sqrt{18}}{4}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 AD 与平面 BCD 所成角等于 $45°$.

(2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=(0,1,0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，

所以 AD 与 BC 所成角等于 $90°$.

(3) 设平面 ABD 的法向量为 $(x,y,1)$，则 $(x,y,1)\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y,1)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，

$(x,y,1)\cdot\overrightarrow{AD}=(x,y,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，解得 $x=1$，$y=\sqrt{3}$.

显然 $(0,0,1)$ 为平面 BCD 的法向量.

$$(0,0,1)\cdot(1,\sqrt{3},1)=1,\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+3+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因此，二面角 A-BD-C 的余弦 $\cos\alpha=\cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. 解：设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(x-1,y+2,z)$. 因为 $\overrightarrow{AB}/\!/\alpha$，所以 $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{12}$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|=2|\alpha|=26$，所以 $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+z^2}=26$.

解得 $x=-5$，$y=6$，$z=24$，或 $x=7$，$y=-10$，$z=-24$.

8. 解：以点 O 为原点建立坐标系，得下列坐标：$A(a,-a,0)$，$B(a,a,0)$，$C(-a,a,0)$，$D(-a,-a,0)$，$V(0,0,h)$，$E\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$.

(1) $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\dfrac{\left(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2},\frac{3a}{2},\frac{h}{2}\right)}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{h^2-6a^2}{h^2+10a^2}$.

(2) $\overrightarrow{VC}\cdot\overrightarrow{BE}=(-a,a,-h)\cdot\left(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)=a^2-\frac{h^2}{2}=0$，$h^2=2a^2$.

$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{h^2-6a^2}{h^2+10a^2}=\frac{-4a^2}{12a^2}=-\frac{1}{3}$.

9. 解：以点 A 为原点建立坐标系，得下列坐标：$A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$O\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$A_1(0,0,1)$，$D_1(-1,0,1)$，$M\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0$，所以 $OM\perp AA_1$，$OM\perp BD_1$.

$|OM|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 解：以点 A 为原点建立坐标系，得下列坐标：$A(0, 0, 0)$，$B(0, 7, 0)$，$C(0, 0, 24)$，$D(x, y, z)$.

因为$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=(x, y-7, z)\cdot(0, 7, 0)=0$，所以 $y=7$.

$|BD|=\sqrt{x^2+z^2}=24$，$|CD|=\sqrt{x^2+7^2+(z-24)^2}=25$，解得 $z=12$，$x=12\sqrt{3}$.

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，$\theta=60°$，因此线段 BD 与平面 α 所成的角等于 $90°-\theta=30°$.

11. 解：以点 O 为原点建立坐标系，得下列坐标：$O(0, 0, 0)$，$A(4, 0, 0)$，$B(0, 3, 0)$，$O'(0, 0, 4)$，$A'(4, 0, 4)$，$B'(0, 3, 4)$，$D\left(2, \frac{3}{2}, 4\right)$，$P(0, 3, z)$.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BD}=(0, 3, z)\cdot\left(2, -\frac{3}{2}, 4\right)=0$，解得 $z=\frac{9}{8}$.

$\tan\theta=\frac{PB}{OB}=\frac{\frac{9}{8}}{3}=\frac{3}{8}$.

12. 解：不妨设这条线段 MN 长为 2，则点 M 到二面角的棱的距离 $MP=1$，点 N 到二面角的棱的距离 $NQ=1$，$QM=PN=\sqrt{3}$，$PQ=\sqrt{2}$.

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN})}{2\sqrt{2}}=\frac{\overrightarrow{PQ}^2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=45°$.

B组

1. 解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BE}=2\sqrt{2}\cos 45°+0=2$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{AD}|\sqrt{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{20}}{10}|\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{20}$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{20-4}=4$.

$V_{四面体ABCD}=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$.

2. 解：（1）以点 B 为原点建立坐标系，得下列坐标：$B(0, 0, 0)$，$A(1, 0, 0)$，$C(0, 0, 1)$，$F(1, 1, 0)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，$N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$.

$|MN|^2=\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a-1\right)^2=a^2-\sqrt{2}a+1$，$|MN|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}$.

（2）$a^2-\sqrt{2}a+1=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，MN 的长最小.

（3）当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，MN 的中点为$G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$，

所求二面角的余弦值 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}|\cdot|\overrightarrow{GB}|}=-\frac{1}{3}$.

3. 证明：设 $AE=BF=b$.

以点 O 为原点建立坐标系，得下列坐标：$O(0, 0, 0)$，$A(0, a, 0)$，$B(-a, a, 0)$，$C(-a, 0, 0)$，$O'(0, 0, a)$，$A'(0, a, a)$，$B'(-a, a, a)$，$C'(-a, 0, a)$，$E(-b, a, 0)$，$F(-a, a-b, 0)$.

（1）$\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E}=(-a, -b, -a)\cdot(a-b, a, -a)=0$，$A'F\perp C'E$.

（2）$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}b(a-b)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}a^2-\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2\right]$，当 $a=2b$ 时，$S_{\triangle BEF}$ 最大，三棱锥体积最大.

此时，EF 的中点 G 与点 B 的连线 $BG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$\tan\theta=\frac{BB'}{BG}=2\sqrt{2}$.

复习参考题　A 组

1. B.

2. 解：（1）$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；

（2）$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；

（3）$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

（4）$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}+\frac{4}{5}\boldsymbol{c}$.

3. 证明：因为$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-3+\frac{6}{2}=0$，

所以 $AM\perp BA_1$.

4. 解：（1）以点 C 为原点建立坐标系，得下列坐标：$C(0,\ 0,\ 0)$，$A(a,\ 0,\ 0)$，$B\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)$，

$A_1(a,\ 0,\ \sqrt{2}a)$，$C_1(0,\ 0,\ \sqrt{2}a)$.

（2）点 C_1 在侧面 ABB_1A_1 内的射影为点 $C_2\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \sqrt{2}a\right)$，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_2}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=30°$.

5. 解：（1）$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，$\theta=60°$，$S=AB\cdot AC\sin\theta=7\sqrt{3}$.

（2）设 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，则$(x,\ y,\ z)\cdot(-2,\ -1,\ 3)=0$，
$(x,\ y,\ z)\cdot(1,\ -3,\ 2)=0$，$x^2+y^2+z^2=3$，解得
$\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 1)$，或 $\boldsymbol{a}=(-1,\ -1,\ -1)$.

6. 解：$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{m+n}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$m+n=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{n+p}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$n+p=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$m^2+n^2=n^2+p^2=1$，解得 $n=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$.

$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{n^2+p^2}}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$.

7. D.

8. C.

9. 解：以点 C 为原点建立坐标系，得下列坐标：$C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C_1(0,0,2)$，

$B_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$M\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$，$N(0,0,z)$.

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=0$,得 $z=\frac{1}{8}$. 点 N 坐标为$\left(0,0,\frac{1}{8}\right)$,即点 N 在 CC_1 上,$CN=\frac{1}{8}$.

10. (1)证明:因为$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CF}=0$, 所以 $EF\perp CF$.

(2)解:因为$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG})=\frac{1}{4}$,

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}}{EF\cdot CG}=\frac{\sqrt{15}}{15}$,所以 EF 与 CG 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(3)解:$CE=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

11. 解:以点 C 为原点建立坐标系,得下列坐标:$C(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$A_1(1,0,2)$,$B_1(0,1,2)$,$C_1(0,0,2)$,$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$,$N(1,0,1)$.

(1) $|BN|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$.

(2) $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{CB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

(3) 因为$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=(-1,\ 1,\ -2)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=0$,所以 $A_1B\perp C_1M$.

12. 解:以点 O 为原点建立坐标系,得下列坐标:$O(0,\ 0,\ 0)$,$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$,$B\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$,$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$,$E\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,$F\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)$.

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{OF}|}=\frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$,$\angle EOF=120°$.

13. 证明:(1) 因为$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,所以$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{HG}$.

因此 E,F,G,H 四点共面.

(2) 因为 BD 在平面 $EFGH$ 之外,$BD/\!/EH$,所以 $BD/\!/$平面 $EFGH$.

(3) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right]$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

B组

1. 解:(1) $AC'=\sqrt{\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AC'}}=\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})^2}=\sqrt{2a^2-2ab+b^2}$.

(2) 设$\overrightarrow{BD'}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD'}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-ab}{\sqrt{2a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}a}=-\frac{b}{\sqrt{4a^2+2b^2}}=-\frac{b\sqrt{4a^2+2b^2}}{4a^2+2b^2}$.

由于 BD' 与 AC 所成的角的范围是$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,因此直线 BD' 与 AC 所成角的余弦值为$\frac{b\sqrt{4a^2+2b^2}}{4a^2+2b^2}$.

2. (1) 证明:因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=0$,

所以 $A_1C\perp AE$;

因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=0$,

所以 $A_1C\perp AF$,

因此,$A_1C\perp$平面 AEF.

(2) 解：以点 A_1 为原点建立坐标系，得下列坐标：$A_1(0,\ 0,\ 0)$，$B_1(4,\ 0,\ 0)$，$C_1(4,\ 3,\ 0)$，$D_1(0,\ 3,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ -5)$，$B(4,\ 0,\ -5)$，$C(4,\ 3,\ -5)$，$D(0,\ 3,\ -5)$.

设平面 D_1B_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ 0)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=0$，得 $4x=3y$.

令 $x=3$，$y=4$，则 $\boldsymbol{a}=(3,\ 4,\ 0)$.

$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$.

3. 解：(1) $V=\dfrac{1}{4}$.

(2) 以点 A 为原点建立坐标系，得下列坐标：

$A(0,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(1,\ 1,\ 0)$，$D(0.5,\ 0,\ 0)$，$S(0,\ 0,\ 1)$.

设平面 SDC 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ 1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{SC}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{SD}=0$，得 $x=2$，$y=-1$.

因此，$\boldsymbol{a}=(2-1,\ 1)$.

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

III 自我检测题

（约 45 分钟）

一、选择题.

1. 直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，若 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{A_1B}=$（　　）

(A) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　(B) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

(C) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(D) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

2. 已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，下列条件中能确定点 M 与点 A，B，C 一定共面的是（　　）

(A) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　　(B) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

(C) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　　(D) $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

3. 若向量 $\boldsymbol{m}$ 同时垂直向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$（$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，$\lambda$，$\mu\neq0$），则（　　）

(A) $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$　　(B) $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$

(C) $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 既不平行也不垂直　　(D) 以上三种情况均有可能

4. 以下四个命题中，正确的是（　　）

(A) 若 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，则 P，A，B 三点共线

(B) 若 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，则 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$ 构成空间的另一个基底

(C) $|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$

(D) $\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件是 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(\lambda+1,\ 0,\ 2\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(6,\ 2\mu-1,\ 2)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 λ 与 μ 的值分别为（　　）

(A) $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{2}$　　(B) 5，2

(C) $-\frac{1}{5}$，$-\frac{1}{2}$　　　　(D) -5，-2

二、填空题.

6. 若 $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 0,\ 3)$，$\boldsymbol{c}=(0,\ 2,\ 2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$________.

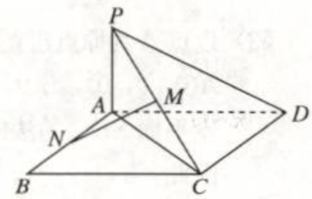
7. 已知点 G 是△ABC 的重心，O 是空间任一点. 若$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OG}$，则 λ 的值为________.

8. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=60°$，则$\left|\boldsymbol{a}-\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\right|=$________.

三、解答题.

9. 若向量$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

10. 如图，$ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD$，M，N 分别为 PC，AB 中点，求证：$MN\perp$ 平面 PCD.



(第 10 题)

参考解答及说明

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5
答案	D	D	B	B	A

说明：

1. 本题考查向量加减法的概念.
2. 本题考查共面向量定理以及判断四点共面的条件.
3. 本题考查空间向量数量积的概念以及利用数量积判断空间向量垂直的方法.
4. 本题考查空间三点共线的条件、空间向量分解定理、空间向量的数量积的概念与运算.
5. 本题考查利用空间向量的坐标运算判断向量平行.

二、填空题.

6. 3.　　7. 3.　　8. $\frac{6}{5}$.

说明：

6. 本题考查空间向量数量积运算的坐标表示.
7. 本题考查空间四点共面的条件.
8. 本题考查空间向量的数量积运算.

三、解答题.

9. 解：由$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，

得　$7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0$，$7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0$，

即　$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$.

所以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所夹角是 $60°$.

说明：本题考查空间向量数量积运算的概念与运算律.

10. 证明：

设$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，则$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$为空间的一个基底.

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$.

因为$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$PA\perp$矩形$ABCD$，

所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，且$AB\perp AD$.

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

故$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})=0$；

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)=-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AP}|^2)=0$.

所以$MN\perp DC$，$MN\perp PD$，又$DC\cap PD=D$，

所以$MN\perp$平面PCD.

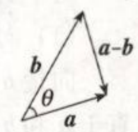
说明：本题考查综合运用空间向量的加、减、数乘、数量积等运算及运算律解决立体几何中的垂直问题.

Ⅳ 拓展资源

1. 空间向量夹角公式的推导

方法一（利用余弦定理和数量积的定义）：

我们可以用两种表示向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之差的平方，即$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$推导出空间向量的夹角公式.



一方面，利用三角形的余弦定理可得

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta;$$

另一方面，

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

由以上两式可得

$$-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

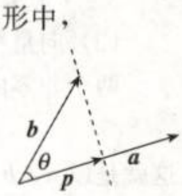
从而

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

方法二（利用勾股定理和投影的概念）：

向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角等价于$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{a}$的夹角. 即在如图所示的三角形中，

$$\cos\theta=\frac{|q\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{q|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}. \quad (*)$$



利用勾股定理以及数量积的分配律和交换律，可得

$$|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}|^2=|\boldsymbol{b}|^2,$$

$$|q\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}-q\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2,$$

$$q\boldsymbol{a}\cdot q\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-q\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-q\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},$$

$$q^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2q\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+q^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},$$

化简可得 $q=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}$.

代入(＊)式，即可得到 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

2. 空间向量的夹角与相关系数

通过两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 夹角的余弦 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，我们可以知道这两个向量是否很靠近（这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 接近于 1），或反向（这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 接近于 -1），或不相关，即接近于垂直（这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 接近于 0）.

假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是来自试验的数据向量. 例如 $\boldsymbol{x}$ 是 10 个学生数学考试，而 $\boldsymbol{y}$ 是同样这 10 个学生物理考试的得分向量. 设 0 是每次考试的平均得分，使得正得分是一个在平均分以上的成绩，负得分是一个在平均分以下的成绩. 这时，$\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 告诉我们两个向量如何密切相关，并且有助于我们预测未来数学和物理考试得分之间的关系. 假如 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 为 0.8，那么这两次考试的成绩密切相关，我们也能从这个学生在一次数学（物理）考试中的成绩，有效地预测他在物理（数学）考试中的成绩. 假如 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 为 -0.85，那么得分向量将指向几乎相反的方向，在一个考试中得高分，在另一个考试中很可能取得一个低于平均分的分数. 假如 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 接近于 0，那么这两个成绩几乎不相关，不能通过一个考试的成绩预测另一个考试的成绩.

实际上，我们知道 $\boldsymbol{x}$ 的平均值一般是不为 0 的，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$. 这时可以从每一个 $\boldsymbol{x}_i$ 减去 $\overline{x}$ 得到一个以 0 为平均值的修正向量，对于 $\boldsymbol{y}$ 值也可以进行同样的工作. 这时的夹角公式就变为

$$\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}.$$

这就是我们在数学 3 中学到的变量 x 与 y 之间的相关系数公式.

3. 空间向量的向量积

对于空间向量的运算，除了线性运算和数量积运算以外，还有向量积和混合积的运算.

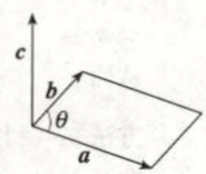
（1）向量积的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积为一个向量 $\boldsymbol{c}$，它的大小为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 构成右手系，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

向量积也成为矢量积、外积. 运算符号用“×”表示，所以又称为叉积.

（2）向量积运算的性质



1° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$；

2° $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；

3° $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

（3）向量积的几何意义

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，夹角为 θ，设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则

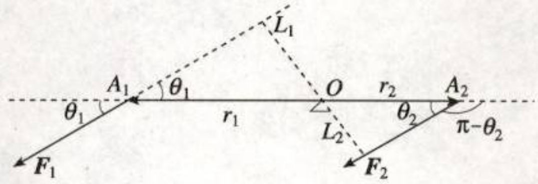
$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

这就是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

就是说 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一向量，它垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 成右手系. 它的模是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

（4）向量积的物理意义

如图，两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，其大小为 F_1，F_2，作用在杆上，杆的转动轴垂直于纸面. L_1 是 $\boldsymbol{F}_1$ 的力臂，L_2 是 $\boldsymbol{F}_2$ 的力臂.



$\boldsymbol{F}_1$ 对转动轴的力矩为 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{F}_1L_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 对转动轴的力矩为 $\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{F}_2L_2$. 但 $\boldsymbol{M}_l$ 使杆向逆时针方向转动，而 $\boldsymbol{M}_2$ 使杆向顺时针方向转动. 我们看到

① 对力矩来讲，除有大小 FL 外，还有方向，它实际上是向量；

② 计算力臂时，除与力的作用点 A_1，A_2 有关外，还与力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的方向有关.

如果转动轴 O 到作用点 A_1 的向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 用 $\boldsymbol{r}_1$ 表示，且 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 θ_1，同样 $\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_2$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 夹角为 $\pi-\theta_2$，那么从力矩的大小来讲，便有

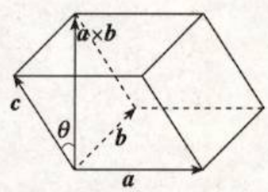
$$M_1=F_1|\boldsymbol{r}_1|\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_1|\sin\theta_1,$$
$$M_2=F_2|\boldsymbol{r}_2|\sin\theta_2=|\boldsymbol{F}_2|\cdot|\boldsymbol{r}_2|\sin\theta_2,$$

如果再给力矩一个方向，使它成为向量 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$，它的方向垂直于 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{F}_1$ 及 $\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{F}_2$，并使 $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{M}_1)$ 及 $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{M}_2)$ 都构成右手系. 此时 $\boldsymbol{M}_1$ 垂直纸面向外，$\boldsymbol{M}_2$ 垂直纸面向内. 这样，力矩就统一为向量，它的大小是 $Fr\sin\theta$，它的方向垂直于 $\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{r}$，且 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{M})$ 构成右手系.

在物理中，把力矩看作为向量有许多方便之处. 如果杆 A_1A_2 在 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的作用下处于平衡状态，那么就有

$$\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{0}.$$

4. 空间向量的混合积



两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可以有向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，这是一个向量，这个向量与另外的向量 $\boldsymbol{c}$ 仍可以进行运算. 例如 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这是一个数量. 我们称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为三个向量的混合积.

以三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱可以构成一个平行六面体.

由于 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角. 由于 $|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta$ 为平行六面体的高，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为平行六面体底面的面积，因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值就是以三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

我们把 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 记为 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$，则有

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

又由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，从而又有

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

在教科书 3.1.2 节，我们学过向量共面的条件，有了空间向量的混合积，可以证明空间三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$.