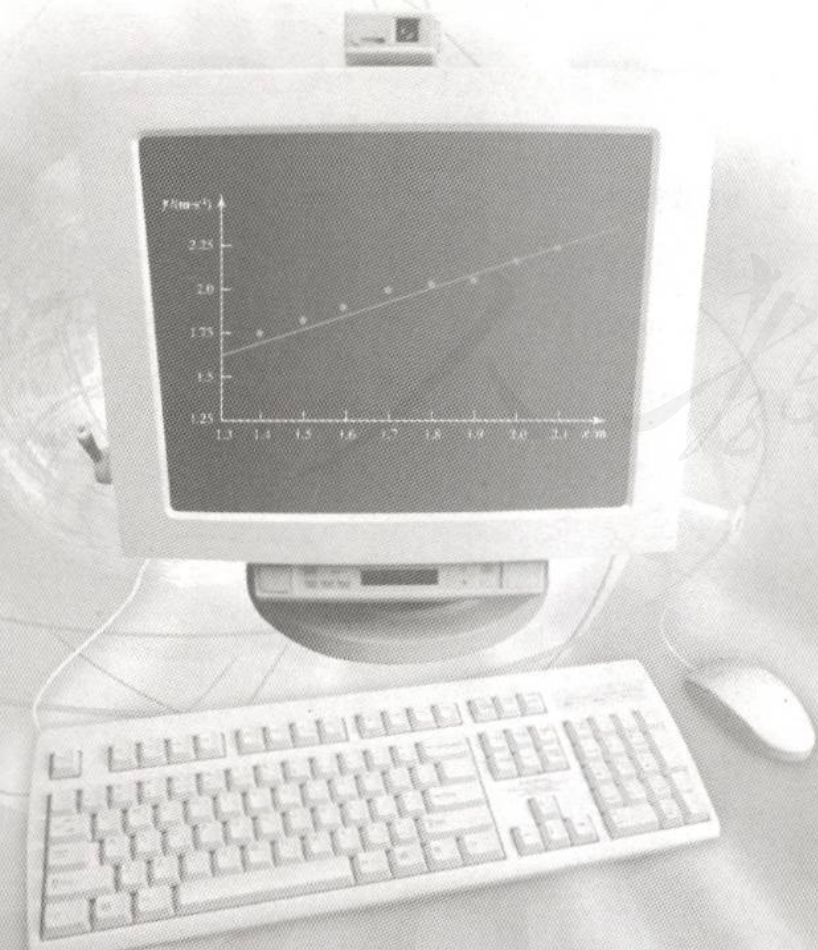
普通高中课程标准实验教科书

# 数学

选修 2-3

# 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 2-3（B 版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著．—2 版．—北京：人民教育出版社，2007.5（2019.7 重印）

ISBN 978-7-107-19092-6

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… ②课… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 031304 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 2-3 B 版 教师教学用书

---

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司
版 次 2007 年 5 月第 2 版
印 次 2019 年 7 月第 16 次印刷
开 本 890 毫米×1240 毫米 1/16
印 张 5.75
字 数 129 千字
定 价 22.90 元

---

主　　编　高存明　韩际清

本册主编　高尚华　尚凡青
审　　定　丁尔陞
编　　者　高尚华　尚凡青　赵军霞　杨长智　韩良瑞
　　　　　王　强　谷运英　刘　坦　韩际清
责任编辑　王旭刚
版式设计　王　喆
封面设计　李宏庆

# 说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书（数学选修2-3)》(B版）的使用编写的教师教学用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“课程标准”中规定的教学任务．

3. 指出相关内容的教学难点、重点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4. 努力吸收教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务．

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价．

教材课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求．考虑到教学要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整．教材编写时，把练习和习题分为A、B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求，以满足条件较好学校的教学需要．

在教材分析中，首先分析内容结构、作用与地位，指出本节知识的重点和难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议．

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考．

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，以检查学生学习本章内容的效果．

在教科书中，我们已经对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修2-3中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材．

一、计数原理

重点学习加法原理和乘法原理及其应用．通过计数原理让学生理解排列与组合的概念，并能推导排列数公式和组合数公式．会归纳证明二项式定理，让学生考察杨辉三角，发现二项式定理中系数的规律和一些性质．

二、概率

本章是必学内容概率的继续，进一步学习概率的一些基本概念．本章编写从实例出发，引入随机变量及其分布的概念，通过实际例子的计算引入超几何分布，了解它的实际应用．在讲条件概率与独立事件的基础上，介绍二项分布及其应用．通过实例让学生理解随机变量的两个数字特征：期望与方差．通过实例简单地介绍正态分布．

三、统计案例

全章分为2节，每节讨论一种统计方法，分别把一个个案例直接呈现在同学面前，通过探究案例，解决问题，使同学们了解这两种统计方法的基本思想、解决步骤及其初步应用. 在这一章的编写中，注意引导学生使用计算机技术来处理数据. 还适当地融入算法思想，个别的算法给出了程序，供有兴趣的同学学习. 理科学生，在学习本章之前，已经有了较好的概率基础，在编写时进行了必要说理和计算，以加深学生对统计原理的理解.

本册的教师教学用书，得到了山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室等单位的大力协助，在此表示谢意.

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正.

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

2005 年 7 月

# 目录

## 第一章　计数原理

## 第二章　概率

## 第三章 统计案例

# 第一章

# 计数原理

## Ⅰ 课程目标

### 一、知识与技能目标

1. 掌握分类加法计数原理，分步乘法计数原理；能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.

2. 理解排列、组合的概念，能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式，并解决简单的实际问题.

3. 能用计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

### 二、过程与方法目标

1. 在本章的教学中，多从实例入手让学生体会思想与方法，培养学生分析问题、解决问题的能力，激发学生的学习兴趣.

2. 在分析问题时学会利用树状图、图表等形象直观地解决问题，培养数形结合能力.

3. 通过实例培养学生分类讨论、转化的能力，学会从不同的切入点处理问题.

### 三、情感、态度与价值观目标

1. 计数原理、排列、组合的应用题与我们的生活息息相关，通过学习能正确地解决有关的实际问题.

2. 结合杨辉三角等内容的学习，了解我国古代数学家在数学发展上做出的杰出贡献，渗透爱国主义教育，激发学生热爱科学，培养科学精神和态度，提高学习数学的兴趣.

3. 在教学中，激发学生的好奇心和求知欲，启发学生发现和提出问题，善于独立思考和钻研问题，

鼓励学生创造性地利用分类转化等思想和方法解决问题.

# Ⅱ　教材分析

## 一、编写特色

1. 突出计数原理，排列组合作为计数原理的应用. 教学重点是让学生理解这两个原理，并能使用这两个原理进行简单的计数，推导排列组合的公式.

2. 通过排列组合公式的推导和具体实例，让学生掌握基本原理进行计数的基本方法和技巧.

## 二、内容结构

***1. 内容编排***

本章分为基本计数原理、排列与组合、二项式定理三大节.

本章一开始提出了两个基本原理，并将这两个基本原理的运用贯穿于全章学习的始终. 这两个基本原理体现了解决问题时常用的两种方法：将问题分类还是分步解决. 教材接着以两个基本原理为基础介绍了排列、组合的概念，排列数公式、组合数公式及其在计算问题上的应用. 然后运用组合数的两个性质推导了二项式定理，同时通过研究二项式系数的性质深化对组合数的认识.

排列与组合是当今发展很快的组合数学的最初步最基本的知识. 这种以计数为特征的内容在中学数学中是非常独特的.

对于求解本章的应用题介绍了两种思路：正向思考与逆向思考.

二项式定理，既是初中代数有关乘法公式的推广，又是学习后面统计与概率知识的必要基础.

***2. 地位与作用***

计数问题是数学中的重要研究对象之一，分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具.

计数原理是学习下一章统计与概率以及进一步学习高等数学有关分支的基础.

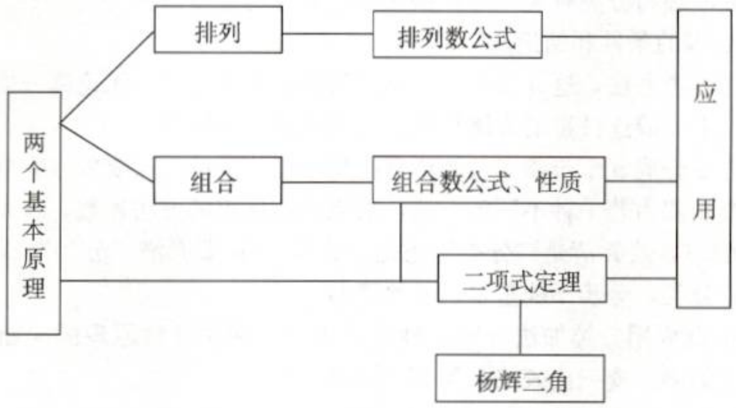
计数原理的思想方法独特灵活，有利于培养和发展学生的抽象能力和逻辑思维能力.

***3. 重点和难点***

本章的重点是分类加法计数原理、分步乘法计数原理，排列与组合的意义，排列数、组合数计算公式，二项式定理.

本章的难点是如何运用原理和有关公式解决应用问题. 在解决问题时，由于对问题本身和有关公式的理解不够准确，常常发生重复或遗漏计算、用错公式的情况. 为了突破这一难点，教学中应强调一些容易混淆的概念之间的联系与区别，并对学生计算中出现的一些典型错误进行认真剖析. 处理本章内容的思路、方法独特灵活，数形结合、分类讨论、转化思想应用频繁. 在教学时应循序渐进，允许学生有一个适应过程.

***4. 本章知识结构***




## 三、课时分配

本章教学约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

| | |
|---|---|
| 1.1　基本计数原理 | 约 2 课时 |
| 1.2　排列与组合 | 约 8 课时 |
| 1.3　二项式定理 | 约 3 课时 |
| 小结与复习 | 约 1 课时 |

## 四、教法与学法建议

1. 对于易混淆的知识，如排列与排列数、组合与组合数、排列与组合、二项式系数与二项展开式中项的系数，应着眼于搞清它们之间的区别和联系.

2. 本章内容概念性强、抽象性强、灵活性强、思维方法独特，因此要立足于基础知识、基本方法、基本问题的学习. 认真研究典型例题，搞透，形成典型问题的思维模式，奠定解其他相关问题的思维依托，着眼于分析问题、解决问题能力的提高.

3. 注意数形结合、分类讨论、等价转化、整体思想、正难则反等数学思想的运用.

4. 在教学中，应引导学生根据原理分析、处理问题，而不应机械地套用公式. 同时，应避免繁琐的、技巧性过高的计数问题.

5. 在二项式定理中可以介绍我国古代数学成就“杨辉三角”等，以丰富学生对数学文化价值的认识.

6. 从开章的贺卡问题、通电话问题开始就要激发学生的学习兴趣，让学生投入进去.

# 1.1　基本计数原理

1. 本节的教学重点和难点. 教学重点是从实例入手理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理. 教学难点是在练习中熟练应用这两个原理.

2. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理的共同点是把一个原始事件分解成若干个事件来完成；不同点是分类加法计数原理与分类有关，分步乘法计数原理与分步有关.

3. 必须搞清两个原理的条件和结论.

如果完成一件事有 $n$ 类办法，这 $n$ 类办法彼此之间是相互独立的，无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事，求完成这件事的方法种数，就用分类计数原理.

如果完成一件事需要分成 $n$ 个步骤，各个步骤都是不可缺少的，需要依次完成所有步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤由若干种不同的方法，求完成这件事的方法种数，就用分步计数原理.

4. 在解决具体问题时，要弄清是“分类”还是“分步”，还要弄清“分类”或者“分步”的具体标准是什么，同时要注意分类、分步不能重复、不能遗漏.

5. 对于较为复杂的既要用分类加法计数原理又要用分步乘法计数原理的问题，应根据题意恰当合理地画出树形图（如引例中）或列出表格，使问题形象直观.

6. 例题步骤条理清楚，使学生思路明了，便于模仿，便于理解.

## 1.2 排列与组合

### 1.2.1 排 列

1. 本节教学重点和难点. 教学重点是排列的定义，排列数公式及其应用. 教学难点是应用排列的定义、排列数公式来解决一些简单的实际问题.

2. 教材引例和例 1 用树形图列出了每一种可能，直观明确，是非常重要的方法.

3. 排列定义及其理解

（1）排列定义：一般地，从 $n$ 个不同元素中任意取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个排列.

（2）理解排列定义必须注意的几个问题：

①排列的定义包括两个基本内容：一是“取出元素”，二是“按一定顺序排列”.

②从定义知，只有当元素完全相同，并且元素排列的顺序也完全相同时，才是同一个排列. 元素完全不同，或元素部分相同，或元素完全相同而顺序不同的排列都不是同一排列.

③判断一个具体问题是不是排列问题，就看从 $n$ 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素时是有序还是无序，有序就是排列，无序就不是排列. 例如，从 1，2，3，4，5，6 六个数中任取两个作加减，可得到多少个不同的和与差. 求和与加数顺序无关，就不是排列问题；作差与相减数顺序有关，就属于排列问题.

4. 排列数公式的推导可借助表格，利用填格式的方法来处理. 直接列出所有排列是解决排列元素较少的复杂问题的有效方法.

5. 解决排列问题的方法有直接法或间接法（正难则反）两种. 直接法可从元素或位置入手；间接法主要是解决有约束条件的排列问题.

### 1.2.2 组　合

1. 本节教学重点和难点. 教学重点是组合的定义，组合数公式，组合数性质及它们的应用. 教学难点是应用组合的定义、组合数公式来解决一些简单的实际问题.

2. 组合定义及其理解

(1) 组合定义：一般地，从 $n$ 个不同元素中任意取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，并成一组，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个组合.

(2) 理解组合定义必须注意的几个问题：

①如果两个组合中的元素完全相同，不管它们的顺序如何都是相同的组合.

②当两个组合中的元素不完全相同，就是不同的组合.

③排列与组合问题共同点是“从 $n$ 个不同元素中任意取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素”，不同点是前者要“按照一定的顺序排成一列”，而后者是“不管顺序并成一组”.

④区分某一问题是排列问题还是组合问题，关键看选出的元素与顺序是否有关. 若交换两个元素的位置对结果产生影响，则是排列问题，否则，是组合问题. 也就是说排列问题与选取元素的顺序有关，组合问题与选取元素的顺序无关.

3. 排列数与组合数的计算方法

①解计算（或化简）题时，主要依据排列数与组合数公式及其变形，在计算过程中要注意阶乘的运算、组合数性质的使用和提取公因式等方法.

②含有排列数或组合数的方程都是在某个正整数范围内求解，利用这点可以根据题目的条件将方程及时化简.

③证明时可利用排列数公式与组合数公式的阶乘表示形式和组合数性质，要注意阶乘的运算和技巧，如拆项.

4. 解排列、组合的应用题，要注意以下几点：

①仔细审题，看元素有无顺序，从而判断是组合问题还是排列问题；要按元素的性质分类，按事件发生的过程进行分步；

②对于附有条件的比较复杂的排列组合应用题，要注意从不同的角度来分析问题，从元素还是位置入手，正难则反；

③对于附有条件的比较复杂的排列组合应用题，要周密分析，合理分类，不重不漏，先选后排还是边选边排必须思路清晰；

④掌握重点题型的解题策略.

## 1.3　二项式定理

### 1.3.1　二项式定理

1. 本节教学重点和难点. 教学重点是二项式定理的理解及展开式应用. 教学难点是二项式定理的理解及展开式的灵活应用.

2. 理解用组合的知识推导二项式定理，弄清其适用范围.

3. 理解通项的意义并会灵活应用.

4. 区分项的系数与二项式系数.

5. 会正用、逆用定理来解决一些简单的问题.

### 1.3.2 杨辉三角

1. 本节教学重点和难点. 教学重点是理解杨辉三角的意义，掌握二项式系数的性质并会应用. 教学难点是二项式系数性质的应用.

2. 了解我国古代科学家对数学的贡献，激发学生学习数学的兴趣.

3. 注意二项式系数的性质与组合数的两个性质的综合应用.

# Ⅲ 拓展资源

## 一、世界杯中的数学问题

当韩日世界杯进行得如火如荼的时候，大家有没有发现世界杯中有许多数学问题. 不信，你往下看.

在世界杯小组赛上，每四个队进行单循环比赛，每场比赛胜队得 3 分，负队得 0 分，平局两队各得 1 分. 小组赛结束后，总积分高的两队出线，进入下一轮比赛. 如果总积分相同，还要按进一步的规则排序.

问题一：一个队为了晋级下一轮，至少要积几分才能保证出线？

4 个队单循环赛要赛 6 场，每场比赛最多产生 3 分，6 场比赛最多产生 18 分.

若某队积 6 分，则剩下 12 分，可能有另两个队也各得 6 分，这样就要按进一步规则排序，因此该队有可能出不了线.

若一个队积 7 分，则剩下 11 分，这样另外三个队中不可能再有两个队积分等于或者超过 7 分，这样该队必然出线. 因此一个队为了晋级下一轮，至少要积 7 分才能保证必然出线.

问题二：一个队只积 3 分，这个队有可能出线吗？

有可能. 6 场比赛都是平局，4 个队都只得了 3 分，按进一步规则排序，该队如果处于前两位，就有可能出线.

还有一种情况，大家能想出来吗？

想一想：(1) 一个球队积 5 分，该队能出线吗？为什么？

(2) 一个球队积 2 分，该队能出线吗？为什么？

一届世界杯总共有 32 个队参加，首先分成 8 个小组，每组四个队，进行单循环比赛；然后每组前两名出线，出线的 16 个队按事先规定进行单场淘汰赛，获胜的队再进行单场淘汰赛，输掉的队不再比赛；剩下 4 个队后进行单场淘汰赛，获胜的两队争夺冠亚军，输掉的两队争夺季军.

问题三：一届世界杯共进行多少场比赛？一支队伍夺冠要进行多少场比赛？获得第四名呢？获得第五名呢？

一届世界杯共进行 64 场比赛，一支队伍夺冠要进行 7 场比赛，获得第四名要进行 7 场比赛，获得第五名要进行 5 场比赛.

你在观看世界杯比赛的过程中，有没有想过这些问题呢？其实，生活中数学无处不在，只要留心观察，就会有不小的收获.

## 二、四色猜想

四色猜想是世界近代三大数学难题之一. 1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯·格思里来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象："看来，每幅地图只需要用四种颜色着色，便可以使得所有有共同边界的国家着上不同的颜色."这个结论能不能从数学上加以严格证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试. 兄弟二人为证明这一问题而使用的稿纸已经堆了一大叠，可是研究工作没有进展. 1852 年 10 月 23 日，他的弟弟就这个问题的证明请教他的老师、著名数学家德·摩尔根，摩尔根也没有能找到解决这个问题的途径，于是写信向自己的好友、著名数学家哈密尔顿爵士请教. 哈密尔顿接到摩尔根的信后，对四色问题进行论证. 但直到 1865 年哈密尔顿逝世为止，问题也没有能够解决. 1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题. 世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战. 1878～1880 年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了. 11 年后，即 1890 年，数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的. 不久，泰勒的证明也被人们否定了. 后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获. 于是，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，其实是一个可与费马猜想相媲美的难题. 先辈数学大师们的努力，为后世的数学家揭示四色猜想之谜铺平了道路. 1913 年，伯克霍夫在肯普的基础上引进了一些新技巧，美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色. 1950 年，有人从 22 国推进到 35 国. 1960 年，有人又证明了 39 国以下的地图可以只用四种颜色着色；随后又推进到了 50 国. 看来这种推进仍然十分缓慢. 电子计算机问世以后，由于演算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了对四色猜想证明的进程. 1976 年 6 月，美国数学家阿佩尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1 200 个小时，作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明. 1977 年阿阑尔又大大地简化了证明. 四色猜想的计算机证明，轰动了世界. 它不仅解决了一个历时一百多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点. 不过也有不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们提出了哲学上的疑问：怎样才算构成一个数学命题的证明？他们还在寻找一种简洁明快的书面证明方法.

## 三、杨辉——宋代著名数学教育家

杨辉，字谦光，中国南宋（1127—1279）末年钱塘（今杭州市）人。其生卒年月及生平事迹均无从详考。据有关著述中的字句推测，杨辉大约于 13 世纪中叶至末叶生活在现今浙江杭州一带，曾当过地方官，到过苏州、台州等地。是当时有名的数学家和数学教育家，他每到一处都会有人慕名前来请教数

学问题.

杨辉一生编写的数学书很多，但散失也很严重. 据史料记载，他至少有以下书，曾在国内或国外刊行：《详解九章算法》12 卷（1261），《日用算法》（1262），《乘除通变算宝》3 卷（1274），《续古摘奇算法》2 卷（1275），《田亩比类乘除捷法》2 卷（1275）. 其中《详解九章算法》残缺不全，《日用算法》迄今未见传本. 而后 3 种共 7 卷合刊在一起，被称为《杨辉算法》.

杨辉继承中国古代数学传统，他广征博引数学典籍，引用了现已失传的宋代的许多算书，才使我们得知其部分内容. 其中，刘益的“正负开方术”，贾宪的“增乘开方法”与“开方作法本源”图（即误传为“杨辉三角”），就是极其宝贵的数学史料.

杨辉继沈括研究“隙积术”之后，研究了“垛积术”，即关于高阶等差数列的研究. 他首次将所谓“幻方”问题作为数学问题研究，并创“纵横图”之名. 他给出了三阶至十阶幻方的实例，对某些构成原理也有所研究. 杨辉之前中国尚无这方面的研究成果，杨辉之后，明、清两代中国数学家关于纵横图的研究相继不绝，因此杨辉的著述也是研究关于幻方乃至组合数学历史的珍贵资料. 杨辉还非常关心日常计算技巧，改进算法程序.

杨辉不仅著述甚丰，而且是一位杰出的数学教育家. 他特别注重数学的普及教育，其许多著作都是为此而编写的教科书. 杨辉主张在数学教育中贯彻理论联系实际的原则，在《日用算法》中，他说：“以乘除加减为法，称斗尺田为问；用法必载源流，命题须责实用.”他还主张贯彻循序渐进的原则，在《算法通变本末》（即《乘除通变算宝》上卷）中，专门为初学者制作了一份“司算纲目”，要求学习者抓住要领，反复练习，这是我国历史上第一部数学教学大纲. 他又告诫初学者：“夫学算者，题从法取，法将题验，凡欲明一法，必设一题.”又说：“题繁难见法理，定摆小题验法理，义既通虽用繁题了然可见也.”可见，他十分强调习题应有典型性. 杨辉一生治学严谨，教学一丝不苟，他的这些教育思想和方法，至今也有很重要的参考价值.

## 四、排列组合问题的求解策略

解答排列组合问题，首先必须认真审题，明确是属于排列问题还是组合问题，或者属于排列与组合的混合问题；其次要抓住问题的本质特征，灵活运用基本原理和公式进行分析解答. 同时还要注意讲究一些策略和方法技巧，使一些看似复杂的问题迎刃而解. 下面介绍几种常用的解题方法.

（一）合理分类与准确分步法

解含有约束条件的排列组合问题，应按元素性质进行分类，按事情发生的连续过程分步，做到分类标准明确，分步层次清楚，不重不漏.

**例 1** 五个人排成一排，其中甲不在排头，乙不在排尾，不同的排法有（　　）.

(A) 120 种　　(B) 96 种　　(C) 78 种　　(D) 72 种

**分析**：由题意可先安排甲，并按其分类讨论：(1) 若甲在末尾，剩下四人可自由排，有 $A_4^4$ 种排法；(2) 若甲在第二、三、四位上，则有 $A_3^3A_3^1A_3^1$ 种排法. 由分类计数原理，排法共有 $A_4^4+A_3^3A_3^1A_3^1=78$ 种，选 C.

（二）正难反易转化法

对于一些生疏问题或直接求解较为复杂、困难的问题，从正面入手情况复杂，不易解决，这时可从反面入手，将其转化为一个简单问题来处理.

**例 2** 马路上有八盏路灯，为节约用电又不影响正常的照明，可把其中的三盏灯关掉，但不能同时关掉相邻的两盏或三盏，也不能关掉两端的灯，那么满足条件的关灯方法共有多少种？

**分析**：关掉第一盏灯的方法有 6 种，关第二盏、第三盏时需分类讨论，十分复杂. 若从反面入手考虑，每一种关灯的方法对应着一种满足题设条件的亮灯与关灯的排列，于是问题转化为“在 5 盏亮灯的 4 个空中插入 3 盏暗灯”的问题. 故关灯方法种数为 $C_4^3$.

（三）混合问题“先选后排”

对于排列组合混合问题，可先选出元素，再排列.

**例 3** 4 个不同小球放入编号为 1，2，3，4 的四个盒中，恰有一空盒的方法有多少种？

**分析**：因有一空盒，故必有一盒子放两球. （1）选：从四个球中选 2 个有 $C_4^2$ 种，从 4 个盒中选 3 个盒有 $C_4^3$ 种；（2）排：把选出的 2 个球看作一个元素与其余 2 球共 3 个元素，对选出的 3 盒作全排列有 $A_3^3$ 种，故所求放法有 $C_4^2C_4^3A_3^3=144$ 种.

（四）特殊元素“优先安排法”

对于带有特殊元素的排列组合问题，一般应先考虑特殊元素，再考虑其他元素.

**例 4** 用 0，2，3，4，5 五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有（　　）.

（A）24 个　　（B）30 个　　（C）40 个　　（D）60 个

**分析**：由于该三位数为偶数，故末尾数字必为偶数，又因为 0 不能排首位，故 0 就是其中的“特殊”元素，应该优先安排，按 0 排在末尾和 0 不排在末尾分两类：（1）0 排末尾时，有 $A_4^2$ 个，（2）0 不排在末尾时，则有 $A_2^1A_3^1A_3^1$ 个. 由分类计数原理，共有偶数 $A_4^2+A_2^1A_3^1A_3^1=30$ 个，选 B.

（五）总体淘汰法

对于含有否定字眼的问题，可以从总体中把不符合要求的除去，此时需注意不能多减，也不能少减.

在例 4 中，也可用此法解答：五个数字组成三位数的全排列有 $A_5^3$ 个，排好后发现 0 不能排首位，而且数字 3，5 也不能排末位，这两种排法要除去，故有 $A_5^3-A_4^2-A_2^1A_3^1A_3^1=30$ 个偶数.

（六）局部问题“整体优先法”

对于局部排列问题，可先将局部看作一个元与其余元素一同排列，然后再进行局部排列.

**例 5** 7 人站成一排照相，要求甲、乙两人之间恰好隔三人的站法有多少种？

**分析**：甲、乙及间隔的 3 人组成一个“小整体”，这 3 人可从其余 5 人中选，有 $C_5^3$ 种；这个“小整体”与其余 2 人共 3 个元素全排列有 $A_3^3$ 种方法，它的内部甲、乙两人有 $A_2^2$ 种站法，中间选的 3 人也有 $A_3^3$ 种排法，故符合要求的站法共有 $C_5^3A_3^3A_2^2A_3^3=720$ 种.

（七）相邻问题—“元”法

对于某几个元素要求相邻的排列问题，可将相邻的元素看作一个“元”与其他元素排列，然后再对“元”内部元素排列.

**例 6** 7 人站成一排照相，甲、乙、丙三人相邻，有多少种不同排法？

**分析**：把甲、乙、丙三人看作一个“元”，与其余 4 人共 5 个元作全排列，有 $A_5^5$ 种排法，而甲、乙、丙之间又有 $A_3^3$ 种排法，故共有 $A_5^5A_3^3=720$ 种排法.

（八）不相邻问题“插空法”

对于某几个元素不相邻的排列问题，可先将其他元素排好，再将不相邻元素在已排好的元素之间及两端空隙中插入即可.

**例 7** 在例 6 中，若要求甲、乙、丙不相邻，则有多少种不同的排法？

**分析**：先将其余四人排好，有 $A_4^4$ 种排法，再在这些人之间及两端的 5 个“空”中选三个位置让甲、乙、丙插入，则有 $A_5^3$ 种方法，这样共有 $A_4^4A_5^3=1\,440$ 种不同排法.

（九）顺序固定问题用“除法”

对于某几个元素顺序一定的排列问题，可先把这几个元素与其他元素一同排列，然后用总排列数除以这几个元素的全排列数.

**例 8** 6 个人排队，甲、乙、丙三人按“甲—乙—丙”顺序排的排队方法有多少种？

**分析**：不考虑附加条件，排队方法有 $A_6^6$ 种，而其中甲、乙、丙的 $A_3^3$ 种排法中只有一种符合条件.故符合条件的排法有 $A_6^6\div A_3^3=120$ 种.

（十）构造模型“隔板法”

对于较复杂的排列问题，可通过设计另一情景，构造一个隔板模型来解决问题.

**例 9** 方程 $a+b+c+d=12$ 有多少组正整数解？

**分析**：建立隔板模型：将 12 个完全相同的球排成一列，在它们之间形成的 11 个间隙中任意插入 3 块隔板，把球分成 4 堆，而每一种方法所得 4 堆球的各堆球的数目，即为 $a$，$b$，$c$，$d$ 的一组正整数解，故原方程的正整数解的组数共有 $C_{11}^3=165$.

再如，方程 $a+b+c+d=12$ 非负整数解的个数；三项式 $(a+b+c)^{10}$，四项式 $(a+b+c+d)^{10}$ 等展开式的项数，经过转化后都可用此法解.

（十一）分排问题“直排法”

把几个元素排成前后若干排的排列问题，若没有其他的特殊要求，可采取统一排成一排的方法来处理.

**例 10** 7 个人坐两排座位，第一排坐 3 个人，第二排坐 4 个人，则不同的坐法有多少种？

**分析**：7 个人可以在前两排随意就坐，再无其他条件，故两排可看作一排来处理，不同的坐法共有 $A_7^7$ 种.

（十二）表格法

有些较复杂的问题可以通过列表使其直观化.

**例 11** 9 人组成篮球队，其中 7 人善打前锋，3 人善打后卫，现从中选 5 人（两卫三锋，且锋分左、中、右，卫分左、右）组队出场，有多少种不同的组队方法？

**分析**：由题设知，其中有 1 人既可打锋，又可打卫，则只会锋的有 6 人，只会卫的有 2 人. 列表如下：

| 人数 | 6 人只会锋 | 2 人只会卫 | 1 人既锋又卫 | 结果 |
|---|---|---|---|---|
| 不同选法 | 3 | 2 | | $A_6^3A_2^2$ |
| | 3 | 1 | 1（卫） | $A_6^3C_2^1A_2^2$ |
| | 2 | 2 | 1（锋） | $C_6^2A_3^3A_2^2$ |

由表知，共有 $A_6^3A_2^2+A_6^3C_2^1A_2^2+C_6^2A_3^3A_2^2=900$ 种方法.

除了上述方法外，有时可以通过设未知数，借助方程来解答；简单一些的问题可采用列举法，还可以利用对称性或整体思想来解题等. 排列组合是高中数学的重点和难点之一，也是进一步学习概率的基础. 事实上，许多概率问题也可归结为排列组合问题. 这一类问题不仅内容抽象，解法灵活，而且解题过程极易出现“重复”和“遗漏”的错误. 这些错误甚至不容易检查出来，所以解题时要注意不断积累经验，总结解题规律，掌握若干技巧.

# Ⅳ　教学案例

## 案例 1　1.2.1　排列的应用

### （一）教学目标

1. 知识与技能

（1）正确运用两个基本原理分析、解决一些简单问题.

（2）使学生掌握利用排列解决应用问题，培养学生分析问题、解决问题的能力.

2. 过程与方法

（1）了解基本原理、排列在实际生产、生活中的应用.

（2）在解题过程中，体会处理排列问题的思路.

（3）在解题过程中，学会用分类讨论、数形结合、转化等思想去分析解决问题.

3. 情感、态度与价值观

在解决实际问题中，培养学生积极参与、大胆探索的精神，体会各种数学思想的应用，增强学习兴趣.

### （二）教学重点和难点

重点：利用排列解决应用问题.

难点：在排列中使用分类加法计数原理和分步乘法计数原理.

### （三）教学方法

讲练结合.

### （四）教学过程

一、引入新课

复习：

1. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理的含义.

2. 排列的含义：

（1）排列；

（2）排列数；

（3）全排列.

3. 排列数公式：

（1）展开式；

（2）阶乘式.

每种形式应用的范围.

二、新课

1. 六个人按下列要求站成一横排，按以下方式站，分别有多少种不同的站法？

(1) 甲不在左端，也不在右端

方法一：从特殊元素出发先给甲找个位置 $A_4^1$，然后其他元素全排列 $A_5^5$.

方法二：从特殊位置出发先给特殊位置选好人 $A_5^2$，然后其他元素全排列 $A_4^4$.

小结：从特殊元素和特殊位置入手.

学生练习：0，1，2，3，4 可以组成多少没有重复数字的三位数？

分析：从特殊位置出发. 特殊元素出发比较麻烦，分有 0 和无 0 两类.

(2) 甲、乙不相邻

分析：特殊元素是甲、乙，可以先排好其他元素 $A_4^4$，然后甲、乙插 5 空 $A_5^2$.

小结：插空法，解决不相邻问题.

学生练习：四名男同学，三名女同学排队，三名女同学不能排在一起共有多少种排法？

(3) 甲、乙必须排在一起

分析：把甲、乙看成一个人，先全排列 $A_5^5$，然后甲、乙再排 $A_2^2$.

捆绑法：解决相邻问题.

学生练习：四名男同学，三名女同学排队，四名男同学必须排在一起共有多少种排法？

(4) 甲不在左端，乙不在右端

分析：所有排列的总数 $A_6^6$，减去甲在左端以及乙在右端的情况 $2A_5^5$，再加上甲左乙右的情况 $A_4^4$，共为 504.

间接法：先求无条件限制的排法总数，再求不满足限制条件的排法数，然后作差.

2. 4 位学生与 2 位教师并坐合影留念，按以下方式坐，分别有多少种不同的坐法？

(1) 教师必须坐在中间

固定法：从元素着眼，把受限制的元素先固定下来.

①教师先坐中间，有 $A_2^2$ 种方法；

②学生再坐其余位置，有 $A_4^4$ 种方法.

所以共有 $A_2^2\times A_4^4=48$ 种坐法.

等机率法：如果每一个元素被排入，被选入的机会是均等的，就可以利用等机率法来解.

将教师看作 1 人（捆绑法），问题变成 5 人并坐照相，共有 $A_5^5$ 种坐法，而每个人坐中间位置的机会是均等的，应占所有坐法的 $\frac{1}{5}$，因此教师 1 人坐中间的坐法有 $\frac{1}{5}A_5^5\cdot A_2^2$，即 $\frac{2}{5}A_5^5$ 种.

(2) 教师不能坐在两端，但要坐在一起

将教师看作 1 人，问题变为 5 人并坐照相.

方法一：从位置着眼，排斥元素——教师.

先从 4 位学生中选 2 人坐两端位置 $A_4^2$；其他人再坐余下的 3 个位置 $A_3^3$；教师内部又有 $A_2^2$ 种坐法. 所以共有 $A_4^2\times A_3^3\times A_2^2=144$ 种坐法.

方法二：从元素着眼，固定位置.

先将教师定位 $A_3^1\times A_2^2$；再排学生 $A_4^4$. 因此共有 $A_2^2\times A_4^4\times A_3^1$ 种坐法.

(3) 教师不能坐在两端，且不能相邻

插空法：先排学生 $A_4^4$，教师插空 $A_3^2$.

3. 用0，1，2，3，4，5六个数字，分别可以组成多少个没有重复数字且满足下列条件的五位数？

(1) 首数是奇数的五位偶数

用○×××□表示五个位数.

按题意，○位上只能排1，3，5三个数字，□位上能排0，2，4三个数字. 用分步骤法，且可不考虑满足这两个限制条件的顺序. 如：先排○位 $A_3^1$；次排□位 $A_3^1$；最后排×位 $A_4^3$. 因此共有 $A_3^1 \times A_3^1 \times A_4^3 = 216$ 个.

(2) 五位奇数

○位上要求排1～5五个数字；□位上要求排1，3，5三个数字. 用分步骤法，顺序是先考虑被含条件：先排□位 $A_3^1$；次排○位 $A_4^1$；最后排×位 $A_4^3$（包括零在内）. 因此共有 $A_3^1 \times A_4^1 \times A_4^3 = 288$ 个.

(3) 五位偶数

分为以下两类：

①即□位上以2，4结尾，有 $A_2^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^3$ 个；

②□位以0结尾一种情况，有 $A_5^4$ 个.

所以符合题意的解为 $A_2^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^3 + A_5^4 = 312$ 个.

在解决排列问题中先分类然后分步.

三、课堂小结

解决排列问题的常用方法：

(1) 特殊位置法，特殊元素法：解决在与不在问题；

(2) 捆绑法，插空法：解决邻与不邻问题；

(3) 间接法：正难则反.

解决两个以上限制条件的排列问题，关键在于分类.

四、作业：（略）.

## 案例2　1.3.1　二项式定理

### (一) 教学目标

1. 知识与技能

(1) 理解杨辉三角形

①能用不完全归纳法写出杨辉三角形；

②能根据杨辉三角形对 $(a+b)^n (n \leqslant 6)$ 的二项式进行展开.

(2) 掌握二项式定理

①能根据组合思想及不完全归纳法猜出二项展开式的系数 $C_n^r (r=0, 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbf{N}^*)$ 以及二项展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$；

②能正确区分二项式系数和某一项的系数；

③能应用定理对任意给定的一个二项式进行展开，并求出它特定的项或系数.

2. 过程与方法

通过定理的发现推导提高学生的观察、比较、分析、概括等能力.

3. 情感、态度与价值观

通过介绍“杨辉三角”，对学生进行爱国主义教育.

### (二) 教学重点和难点

重点：二项式定理的发现、理解和初步应用.

难点：二项式定理的发现.

### (三) 教学方法

启发诱导，师生互动（教具：多媒体课件）.

### (四) 教学过程

1. 情景设置

问题 1：若今天是星期一，再过 30 天后是星期几？怎么算？

预期回答：星期三. 这是将问题转化为求“30 被 7 除后的余数”是多少.

问题 2：若今天是星期一，再过 $8^n(n\in \mathbf{N}^*)$ 天后是星期几？怎么算？

预期回答：将问题转化为求“$8^n=(7+1)^n$ 被 7 除后的余数”是多少，也就是研究 $(a+b)^n(n\in \mathbf{N}^*)$ 的展开式是什么. 这就是本节课要学的内容，学完本课后，此题就不难求解了.

（设计意图：使学生明确学习目的，用悬念来激发他们的学习动机. 奥苏贝尔认为动机是学习的先决条件，而认知驱力，即学生渴望认知、理解和掌握知识，并能正确陈述问题、顺利解决问题的倾向是学生学习的重要动力.）

2. 新授

第一步：让学生展开

$(a+b)^1=a+b$；

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$；

$(a+b)^5=(a+b)^5(a+b)=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$；

教师将以上各展开式的系数整理成如下模型

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

问题 1：请你找出以上数据上下行之间的规律.

预期回答：下一行中间的各个数分别等于上一行对应位置的相邻两数之和.

问题 2：以 $(a+b)^5$ 的展开式为例，说出各项字母排列的规律；项数与乘方指数的关系；展开式第二项的系数与乘方指数的关系.

预期回答：①展开式按某一字母降幂排列、另一字母升幂排列，且每一项两个字母指数的和等于乘方指数；②展开式的项数比乘方指数多1项；③展开式中第二项的系数等于乘方指数.

初步归纳出下式：

$$(a+b)^n=(\quad)a^n+(\quad)a^{n-1}b+(\quad)a^{n-2}b^2+(\quad)a^{n-3}b^3+\cdots+(\quad)b^n.$$

（设计意图：以上呈现给学生的由系数排成的“三角形”，起到了“先行组织者”的作用，虽然教师将此“三角形”模型以定论的形式呈现给学生，但是它毕竟不是最后的结果，而是一种寻找系数规律的有效工具，便于学生将新的学习材料同自己原有的认知结构联系起来，并纳入到原有认知结构中而出现意义. 这样的学习是有意义的而不是机械的，是主动建构的而不是被动死记的心理过程.）

练习：展开 $(a+b)^7$.

教师作阶段性评价，告诉学生以上的系数表是我国宋代数学家杨辉的杰作，称为杨辉三角，这项发明比欧洲人帕斯卡三角早400多年. 同学们今天做了与杨辉同样的探索，以鼓励学生探究的热情，并激发作为一名文明古国的后代的民族自豪感和爱国热情.

第二步：继续设疑

如何展开 $(a+b)^{100}$ 以及 $(a+b)^n$ （$n\in\mathbf{N}^*$）呢？

（设计意图：让学生感到仅掌握杨辉三角是不够的，激发学生继续学习新的更简捷的方法的欲望.）

师：为了寻找规律，我们将 $(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ 中第一个括号中的字母分别记成 $a_1$，$b_1$；第二个括号中的字母分别记成 $a_2$，$b_2$；依次类推. 请再次用多项式乘法运算法则计算：

$$\begin{aligned}(a+b)^4&=(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)(a_4+b_4)\\&=a_1a_2a_3a_4+ &&\cdots\cdots a^4\\&\quad a_1a_2a_3b_4+a_1a_2a_4b_3+a_1a_3a_4b_2+a_2a_3a_4b_1+ &&\cdots\cdots a^3b\\&\quad a_1a_2b_3b_4+a_1a_3b_2b_4+a_1a_4b_2b_3+a_2a_3b_1b_4+a_2a_4b_1b_3+a_3a_4b_1b_2+ &&\cdots\cdots a^2b^2\\&\quad a_1b_2b_3b_4+a_2b_1b_3b_4+a_3b_1b_2b_4+a_4b_1b_2b_3+ &&\cdots\cdots ab^3\\&\quad b_1b_2b_3b_4. &&\cdots\cdots b^4.\end{aligned}$$

（设计意图：上述呈现内容是为了搭建“认知桥梁”，用以激活学生认知结构中已有的知识与经验，便于学生进行类比学习，用已有的知识与经验同化当前学习的新知识，并迁移到陌生的情境之中.）

问题1：以 $a^2b^2$ 项为例，有几种情况相乘均可得到 $a^2b^2$ 项？这里的字母 $a$，$b$ 各来自哪个括号？

问题2：既然以上的字母 $a$，$b$ 分别来自4个不同的括号，$a^2b^2$ 项的系数你能用组合数来表示吗？

问题3：你能将问题2所述的意思改编成一个排列组合的命题吗？

预期回答：有4个括号，每个括号中有两个字母，一个是 $a$，一个是 $b$. 每个括号只能取一个字母，任取两个 $a$，两个 $b$，然后相乘，问不同的取法有几种？

问题4：请用类比的方法，求出二项展开式中的其他各项系数，并将式子：

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)=(\quad)a^4+(\quad)a^3b+(\quad)a^2b^2+(\quad)ab^3+(\quad)b^4$$

括号中的系数全部用组合数的形式进行填写.

呈现二项式定理——板书课题：

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*).$$

3. 深化认识

请学生总结：

①二项式定理展开式的系数、指数、项数的特点是什么？

②二项式定理展开式的结构特征是什么？哪一项最具有代表性？

由此，学生得出二项式定理、二项展开式、二项式系数、项的系数、二项展开式的通项等概念，这是本课的重点.

（设计意图：教师用边讲边问的形式，通过让学生自己总结、发现规律，挖掘学习材料潜在的意义，从而使学习成为有意义的学习.）

4. 巩固应用

**例 1** 展开① $\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$， ② $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

**例 2** ①求 $(1+2x)^7$ 的展开式的第 4 项的系数及第 4 项的二项式系数.

②求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中含 $x^3$ 项的系数.

变式：在二项式定理中，令 $a=1$，$b=x$，得到怎样的公式？

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n.$$

思考：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=$？为什么？

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n.$$

**例 3** 解决起始问题：$8^n=(7+1)^n=C_n^0 7^n+C_n^1 7^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}7+C_n^n$，

前 $n$ 项都是 7 的倍数，因此余数为 $C_n^n=1$，故应该为星期二.

说明：解决某些整除性问题是二项式定理又一方面的应用.

5. 课堂小结

①本节课我们主要学习了二项式的展开，有两种方法，一是杨辉三角形，二是二项式定理，两种方法各有千秋.

②二项式定理的表达式以及展开式的通项.

③要正确区别“项的系数”和“二项式系数”.

④将二项式定理中的字母赋上适当的值，就可以求一些特殊的组合多项式的值.

6. 布置作业（略）.

## V　习题参考答案与提示

### 练习 A（第 6 页）

1. （1）$5+4=9$；　（2）$3+5=8$，$3\times5=15$.
2. $20\times10=200$(个).
3. （1）$6\times5=30$(种)；　（2）$6\times6=36$(种).

### 练习 B（第 6 页）

1. $2\times3+4\times2=14$(种).
2. （1）18(个)；（2）48(个)；（3）10(个).

### 习题 1-1 A（第 7 页）

1. (1) 15(种)；(2) 56(种).
2. (1) 10(种)；(2) $3\times5\times2=30$(种)；(3) $3\times5\times1=15$(种).
3. 10 000(个).
4. (1) $2\times3=6$(种)；(2) $2\times3+2=8$(种).

### 习题 1-1 B（第 7 页）

1. (1) 3(种)；(2) $3\times4=12$(个)；(3) 10(个).
2. (1) 6(种)；(2) $4^3=64$(种).
3. (1) $9\times10\times10=900$(个)；(2) $9\times9\times8=648$(个)；
   (3) $4\times9\times8=288$(个)；　(4) $4\times2\times8=64$(个)；
   (5) $10+9\times9=91$(个)（或 $100-9=91$）.

### 练习 A（第 14 页）

1. (1) 北京→上海，上海→北京，广州→北京，
   北京→广州，上海→广州，广州→上海；
   (2) 1234，1243，1324，1342，1423，1432，
   2134，2143，2314，2341，2413，2431，
   3124，3142，3214，3241，3412，3421，
   4123，4132，4213，4231，4312，4321.
2. (1) 120；(2) 32 760；(3) 9 900；(4) 5 040；(5) 1 568；(6) 5；(7) 64.
3. 2，6，24，120，720，5 040，40 320.
4. 略.
5. $n=15$.
6. 24(种).
7. 60(种).
8. (1) $6^3=216$(个)；(2) $A_6^3=120$(个)；(3) $A_5^2=20$(个).

### 练习 B（第 14 页）

1. (1) $A_5^4-A_4^3$ 共有 96 个；(2) $A_5^4-A_4^3-A_4^3+A_3^2$ 共有 78 个.
2. (1) $5A_5^3=300$(个)；(2) $A_5^3+4A_4^2=108$(个)；(3) $A_4^1A_5^3+A_5^1A_5^4+A_5^1A_5^5=1\,440$(个).
3. (1) $A_4^2=12$(种)；(2) $4^2=16$(种).
4. (1) $A_2^2A_4^4=48$(种)；　(2) $A_4^2A_4^4=288$(种)；
   (3) $A_6^6-A_2^2A_5^5=A_5^2A_4^4=480$(种)；　(4) $A_3^3A_4^4=144$(种)；
   (5) $A_6^6-A_2^2A_5^5-A_2^2A_5^5+A_2^2A_4^4=A_3^3A_4^2A_2^2+A_3^3A_4^3=288$(种).
5. (1) $A_4^4A_2^2A_2^2A_2^2A_2^2=384$(种)；(2) $2A_4^4=48$(种).

**练习 A（第 22 页）**

1. (1) (北京，上海)，(北京，天津)，(北京，广东)，(上海，天津)，(上海，广东)，(天津，广东)；

   (2) (北京，上海)，(北京，天津)，(北京，广东)，(上海，北京)，(上海，天津)，(上海，广东)，(天津，北京)，(天津，上海)，(天津，广东)，(广东，北京)，(广东，天津)，(广东，上海).

2. (1) $ab$，$ac$，$ad$，$ae$，$bc$，$bd$，$be$，$cd$，$ce$，$de$.

   (2) $abc$，$abd$，$abe$，$acd$，$ace$，$ade$，$bcd$，$bce$，$bde$，$cde$.

3. (1) 71；(2) 224；(3) $\dfrac{275}{2}$；(4) 1 716；

   (5) 32；(6) 330.

4. $C_4^2=6$(个).

5. $C_8^2=28$(场).

6. (1) $C_{13}^6=1\ 716$(种)；(2) $C_5^3C_8^3=560$(种)；

   (3) $C_8^6+C_8^5C_5^1+C_8^4C_5^2+C_8^3C_5^3=1\ 568$(种)；

   (4) $C_5^2C_8^4A_6^6=504\ 000$(种).

**练习 B（第 22 页）**

1. $x=3$ 或 $x=6$.

2. (1) $C_3^2C_7^3=105$(种)；　(2) $C_7^5+C_7^4C_3^1+C_7^3C_3^2=231$(种)；

   (3) $C_{10}^5-C_7^5=231$(种)；　(4) $C_3^2\cdot C_7^3+C_3^3\cdot C_7^2=126$(种).

3. (1) $C_5^3C_4^2A_5^5=7\ 200$(个)；　(2) $C_5^3C_4^2A_3^3A_2^2=720$(个)；

   (3) $C_5^3C_4^2C_3^2A_2^2A_3^3=2\ 160$(个)；　(4) 11(个).

4. $C_3^1C_3^1A_3^3=54$(种).

5. (1) $C_4^2A_3^3=36$(种)；(2) $3^4=81$(种).

   (3) 分类：1，2，3 号球各占一个盒子时满足条件的方法共有 $2\times3=6$(种)；
   1，2，3 号中有两个占一个盒子时，满足条件的方法共有 $2\times3=6$(种)；
   所以共计有 $6+6=12$(种).

6. (1) $C_6^3C_3^2C_1^1=60$(种)；(2) $C_6^3C_3^2C_1^1A_3^3=360$(种).

**习题 1-2 A（第 23 页）**

1. (1) 348；(2) 188；(3) 31；(4) $\dfrac{5}{16}$.

2. (1) $n=8$；(2) $n=5$.

3. (1) $m=6$；(2) $n=8$；(3) $n=7$.

4. $A_8^4=1\ 680$(种).

5. $A_4^4=24$(种).

6. (1) $A_6^5=720$(个)；

(2) $A_5^1A_5^4=600$(个)，$A_5^4+A_2^1A_4^1A_4^3=312$(个)，

$A_6^1+A_5^1A_5^1+A_5^1A_5^2+A_5^1A_5^3+A_5^1A_5^4+A_5^1A_5^5=1\ 631$(个)．

7．(1) 455；(2) 1 313 400；(3) 294；(4) 266；(5) $\dfrac{2}{7}$；(6) $n^2+n$．

8．(1) $C_{10}^2=45$(条)；(2) $C_{10}^3=120$(条)．

9．(1) $C_8^3=56$(个)；(2) $C_{10}^4=210$(个)．

10．$C_7^2+C_7^2+C_6^2+A_3^2=63$(场)．

11．(1) $C_2^2C_{50}^3=19\ 600$(种)；

(2) $C_2^1C_{50}^4=460\ 600$(种)；

(3) $C_{50}^5=2\ 118\ 760$(种)；

(4) $C_{52}^5-C_{50}^5=C_2^2C_{50}^3+C_2^1C_{50}^4=480\ 200$(种)．

12．(1) $C_6^3C_4^2=120$(种)；

(2) $C_6^3C_4^2A_5^5=14\ 400$(种)；

(3) $C_6^3C_4^2A_3^3A_2^2=1\ 440$(种)．

13．(1) $C_m^2\cdot C_n^2$；(2) $C_m^2\cdot C_n^2\cdot C_l^2$．

## 习题 1-2 B（第 24 页）

1．166 650．

2．略．

3．$C_2^1C_4^1A_4^4+C_2^1C_3^1A_4^4=336$(个)．

4．$A_4^1A_8^2+A_3^1A_8^2=392$(个)．

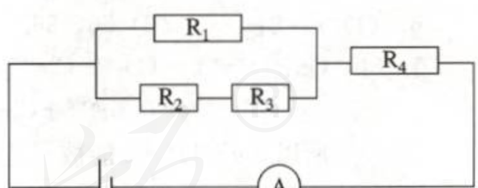
5．(1) $A_6^6=720$(种)；(2) $C_4^2A_3^3A_3^3=216$(种)；

(3) $2C_4^3A_3^3A_2^2A_2^2=192$(种)；

(4) $2C_4^3\times A_3^3\times A_2^2=96$(种)．

6．$C_{10}^2C_8^1C_7^1=2\ 520$(种)．

7．如图，分类：$R_4$ 断路有 8 种可能；$R_4$ 不断路有 3 种可能，所以共有 $8+3=11$ 种可能．



(第 7 题)

8．$2A_3^3=12$．

9．(1) $A_4^1\cdot A_4^4=96$(种)；(2) $A_3^2\cdot A_3^3=36$(种)．

10．$C_n^6$．

11．(1) $C_4^2A_3^3=36$(种)；(2) $3^4=81$(种)．

12．$A_3^3A_4^2=72$(种)．

## 练习 A（第 28 页）

1．$(p+q)^7=C_7^0p^7+C_7^1p^6q+C_7^2p^5q^2+C_7^3p^4q^3+C_7^4p^3q^4+C_7^5p^2q^5+C_7^6pq^6+C_7^7q^7$．

2．$T_3=C_6^2(2a)^4(3b)^2=15\times2^4\times3^2a^4b^2=2\ 160a^4b^2$．

3．$T_{r+1}=(-1)^rC_n^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^rx^{\frac{n-2r}{3}}$．

4. $280x^{15}$，35，280.

## 练习 B（第 28 页）

1. 6 435.　　2. $-30x^4$.　　3. 70.

## 练习 A（第 30 页）

1. (1) $a+b$；　(2) $\frac{n}{2}+1$；$\frac{n+1}{2}$和$\frac{n+1}{2}+1$；　(3) $4\,032x^2$，$-2\,016x^{\frac{5}{2}}$.

2. $-2^{12}$.

3. 略.

4. 252.

## 练习 B（第 31 页）

填空　(1) 255；(2) 65 536；(3) 32 896.

## 习题 1-3 A（第 31 页）

1. $(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^4+7ab^6+b^7$.

2. (1) $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^6=27+54\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}+135\times2^{\frac{2}{3}}+120\times3^{\frac{1}{2}}+90\times2^{\frac{1}{3}}+12\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{3}}+4$；

(2) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7=\frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}-\frac{7}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{21}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{35}{2}x^{\frac{1}{2}}+70x^{-\frac{1}{2}}-168x^{-\frac{3}{2}}+224x^{-\frac{5}{2}}-128x^{-\frac{7}{2}}$.

3. (1) $2+20x+10x^2$；(2) $48(4x+9x^{-1})$.

4. (1) $T_1=1$，$T_2=-30x$，$T_3=420x^2$，$T_4=-3\,640x^3$；

(2) $T_8=-2\,099\,520a^9b^{14}$；(3) $-\frac{63}{8}$；(4) $\frac{105}{2}$.

5. (1) 126，$-126$；　(2) 70，1 120.

6. (1) $n=8$；　(2) 56，56.

7. (1) $(n+1)^n-1=C_n^0n^n+C_n^1n^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}n^2+C_n^{n-1}n+C_n^n-1$

$=(C_n^0n^{n-2}+C_n^1n^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2})n^2+n^2$，

所以 $(n+1)^n-1$ 能被 $n^2$ 整除；

(2) $99^{10}-1=(100-1)^{10}-1$

$=C_{10}^0100^{10}-C_{10}^1100^9+C_{10}^2100^8-\cdots-C_{10}^9100+C_{10}^{10}-1$

$=(C_{10}^0100^9-C_{10}^1100^8+C_{10}^2100^7-\cdots-C_{10}^9)\times100$，

所以 $99^{10}-1$ 能被 100 整除.

8. 1 024.

9. $T_6=-462x^{-4}$，$T_7=462x^{-\frac{61}{15}}$.

10. 64.

**习题 1-3 B（第 32 页）**

1. (1) $n=9$，含 $x^5$ 的项为 $T_4=84x^5$；

(2) $n=10$，含 $a^3$ 的项为 $T_7=210a^3$.

2. (1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$的展开式中通项 $T_{r+1}=C_{2n}^{r}x^{2n-r}(-1)^{r}x^{-r}=(-1)^{r}C_{2n}^{r}x^{2n-2r}$.

令 $2n-2r=0$ 得 $n=r$，

所以常数项为
$$\begin{aligned}T_{n+1}&=(-1)^nC_{2n}^{n}=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}\\&=(-1)^n\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{n!\cdot n!}\\&=(-1)^n\frac{2^nn!\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!\cdot n!}\\&=(-2)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}.\end{aligned}$$

(2) $(1+2x)^{2n}$的展开式中共有 $2n+1$ 项，中间一项为

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=C_{2n}^{n}(2x)^n=\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}(2x)^n=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdot\cdots\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{n!\cdot n!}(2x)^n\\&=\frac{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}(2x)^n.\end{aligned}$$

3. $x^3$ 项的系数为 $C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{20}^3=5\ 985$.

4. 因为 $T_{r+1}=C_{50}^{r}2^{25-\frac{r}{2}}3^{\frac{r}{4}}$，且 $0\leqslant r\leqslant50$，所以 $r=4k(k\in\mathbf{Z})$，

即 $0\leqslant4k\leqslant50$，$0\leqslant k\leqslant\dfrac{25}{2}$，所以 $k=0$，1，2，3，…，12，即 $r$ 共有 13 个值，

因此共有 13 个有理项.

5. (1) 16；(2) 262 144.

6. (1) 因为 $C_n^1=nC_{n-1}^0$，$2C_n^2=nC_{n-1}^1$，$3C_n^3=nC_{n-1}^2$，…，$nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}$，

所以 $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n\times2^{n-1}$.

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}&C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n\\&=n(C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1})\\&=n(1-1)^{n-1}=0.\end{aligned}$$

**Ⅲ. 巩固与提高（第 33 页）**

1. (1) $mn$； (2) $a$； (3) $x=3$ 或 $x=7$；

(4) 480； (5) $C_5^3\cdot C_4^1=40$.

2. (1) 略.

(2) 因为 $n\cdot n!=(n+1)!-n!$，

所以 $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!$

$=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\cdots+(n+1)!-n!$

$=(n+1)!-1.$

所以等式成立.

3. (1) $n=2$，$C_8^2=28$；

(2) $m=14$，$n=34$.

4. (1) $C_8^3=56$（个）；

(2) $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3=2^5-C_5^5-C_5^4=26$（个）.

5. (1) $A_6^1+A_6^2+A_6^3+A_6^4+A_6^5+A_6^6=1\,956$（个）；

(2) $A_6^6+2A_5^4=960$（个）；

(3) $C_3^1A_5^4=360$（个）.

6. (1) $A_5^1A_5^5=A_6^6-A_5^5=600$（种）；

(2) $A_4^3\cdot A_3^3=144$（种）；

(3) $2A_4^2A_3^3+4A_3^2A_3^3=288$（种）；

(4) $A_2^2A_2^2A_4^4=96$（种）.

7. (1) $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$（个）；

(2) $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$（个）.

8. (1) $C_{97}^5=64\,446\,024$（种）；

(2) $C_{97}^3C_5^2=1\,474\,400$（种）；

(3) $C_{97}^3C_5^2+C_{97}^2C_5^3=1\,520\,960$（种）.

9. (1) $A_4^4A_5^5A_3^3A_3^3=103\,680$（种）；

(2) $A_8^5A_7^7=33\,868\,800$（种）.

10. (1) $C_6^2+C_6^3+C_6^4=50$（种）；

(2) $A_3^3=6$（种）.

11. 7（种）.

12. (1) $495a^4b^4$；(2) 1，$2x$，$-26x^2$；(3) $T_{13}=C_{18}^6=18\,564$；(4) 135；(5) $-20$.

13. $n=14$，$C_{14}^4x^2=1\,001x^2$.

14. (1) 略；(2) 1.

15. 略.

16. $n=4$，(1) $T_3=6x^{\frac{1}{3}}$；(2) $T_5=70a^4b^4$.

17. 略.

18. $T_7=462a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

## Ⅳ 自测与评估（第 35 页）

1. (1) D；(2) C；(3) A；(4) A；(5) A.

2. (1) $C_6^2C_4^2C_2^2C_3^1C_2^1C_1^1=540$；(2) 9；(3) $1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

3. $C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1=C_7^3-C_3^3-C_4^3=30$（种）.

4. 分类：没有 0 时，若无 9（6），$A_4^3=24$；

没有 0 时，若有 9(6)，$2C_4^2A_3^3=72$；

有 0 时，若无 9(6)，$C_4^2C_2^1A_2^2=24$；

有 0 时，若有 9(6)，$2C_4^1C_2^1A_2^2=32$；

所以共有 24+72+24+32=152（种）.

5. $C_4^2C_6^3+C_4^3C_6^2+C_4^4C_6^1=186$（种）.

6. $n=15$，$T_8=6\ 435x^{-3}$，$T_9=6\ 435x^{-\frac{9}{2}}$.

# Ⅵ 反馈与评价

## 一、知识与方法测试

### 排列、组合、二项式定理小测试

**一、选择题**

1. 有去甲、乙、丙三地的支边任务，甲地需 2 人，乙、丙两地各需 1 人，从 10 人中选派 4 人承担这三项任务，不同的选法有（　　）种.

(A) 2 520　　(B) 2 025　　(C) 1 260　　(D) 5 040

2. 若 $x$（小于 55）为正整数，则 $(55-x)(56-x)\cdots(69-x)$ 等于（　　）.

(A) $A_{69-x}^{55-x}$　　(B) $A_{69-x}^{15}$　　(C) $A_{55-x}^{15}$　　(D) $A_{69-x}^{14}$

3. 8 名学生排成前后两排，计算其排法种数，在下列答案中错误的是（　　）.

(A) 前后各 4 人，共有 $A_8^4A_4^4$ 种排法

(B) 前 3 人，后 5 人，有 $A_8^8$ 种排法

(C) 前 3 人，后 5 人，甲必站前排有 $A_3^1A_3^2A_4^4$ 种排法

(D) 前 3 人，后 5 人，甲不站前、后两排的正中，有 $6A_7^7$ 种排法

4. 四面体的顶点和各棱中点共有 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，不同的取法共有（　　）种.

(A) 150　　(B) 147　　(C) 144　　(D) 141

5. 8 个色彩不同的球已平均分装在 4 个箱子中，现从不同的箱子中取出 2 个彩球，则不同的取法共有（　　）种.

(A) 6　　(B) 12　　(C) 24　　(D) 28

6. 一条铁路原有 $m$ 个车站，为适应客运需要新增加 $n$ 个车站（$n>1$），则客运车票增加了 58 种（注：从甲站到乙站和从乙站到甲站需要两种不同车票），那么原有车站（　　）.

(A) 12 个　　(B) 13 个　　(C) 14 个　　(D) 15 个

7. 有 12 个队参加亚运会足球赛，比赛时先分为 3 个组（每个组 4 个队），各组都实行主客场制（即每队都要与本组的其他各队交锋两次），然后由各组的前两名共 6 个队进行单循环赛（即每两个队交锋一次）决定冠亚军，则共需要比赛（　　）.

(A) 51 场　　(B) 66 场　　(C) 48 场　　(D) 33 场

8. 每天上午有 4 节课，下午有 2 节课，安排 5 门不同的课程，其中安排一门课两节连在一起上，则一天安排不同课程的种数为（　　）.

(A) 96　　(B) 120　　(C) 480　　(D) 600

9. 从 1，2，3，4，7，9 这六个数，任取两个分别作为一个对数的底数和真数，则可以组成的不同的对数值的个数为（　　）.

(A) 17　　(B) 19　　(C) 21　　(D) 23

10. 已知 $(2x^2+4x+3)^6=a_0+a_1(x+1)^2+a_2(x+1)^4+\cdots+a_6(x+1)^{12}$，则 $a_0+a_2+a_4+a_6$ 的值为（　　）.

(A) $\dfrac{3^6-1}{2}$　　(B) $\dfrac{3^6+1}{2}$　　(C) $\dfrac{3^6+2}{2}$　　(D) $\dfrac{3^6-2}{2}$

11. 离心率 $e=\log_p q$（其中 $1\leqslant p\leqslant 9$，$1\leqslant q\leqslant 9$，且 $p\in\mathbf{N}$，$q\in\mathbf{N}$）的不同形状的椭圆的个数为（　　）.

(A) 25　　(B) 26　　(C) 27　　(D) 28

12. 如果 $ab<0$，$a+b=1$，且二项式 $(a+b)^3$ 按 $a$ 的降幂展开后，第二项不大于第三项，则 $a$ 的取值范围是（　　）.

(A) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{6}{5}, +\infty\right)$　　(C) $\left(-\infty, \dfrac{4}{5}\right]$　　(D) $(1, +\infty)$

## 二、填空题

13. 由 1，2，3，4，5，6，7 这七个数字构成的七位正整数中，有且仅有两个偶数相邻的个数是________.

14. 已知$\left(x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$展开式的第 5 项等于$\dfrac{15}{2}$，那么 $x=$________.

15. 在 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4(2x-1)^3$ 的展开式中，$x^2$ 项的系数为________.

16. 若 $n\in\mathbf{N}$，且 $n$ 为奇数，则 $6^n+C_n^1 6^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}6-1$ 被 8 除，所得的余数是________.

## 三、解答题

17. 已知$\left(2\mathrm{i}\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$，i 是虚数单位，$x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}$.

(1) 如果展开式的倒数第三项的系数是 $-180$，求 $n$；

(2) 对 (1) 中的 $n$，求展开式中系数为正实数的项.

18. 从 6 名师范大学毕业生中选取 4 人到编号为 1，2，3，4 的四所中学任教，每校 1 人，若甲、乙两人必须入选，且甲、乙所在学校编号必须相邻，那么不同的选取方法有多少种？

19. 从 1，2，…，10 这十个数字中选出四个不同的数，使它们的和为奇数，共有多少种不同取法？

20. 已知 $f(x)=(1+x)^m+(1+x)^n$（$m$，$n\in\mathbf{N}$）的展开式中的 $x$ 一次项系数为 19.

（1）求 $f(x)$ 展开式中 $x^2$ 项系数的最小值；

（2）当 $x^2$ 项系数最小时，求 $f(x)$展开式中 $x^7$ 项的系数.

21. 设 $a_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}(n\in\mathbf{N}，q\neq\pm1)$，$\mathrm{A}_n=\mathrm{C}_n^1a_1+\mathrm{C}_n^2a_2+\cdots+\mathrm{C}_n^na_n$. 求 $\mathrm{A}_n$(用 $n$ 和 $q$ 表示).

22. 有 6 本不同的书，按下列分配方式，分别有多少种不同分配方式？

（1）分成一本、两本、三本的 3 组；

（2）分给甲、乙、丙三人，其中一人一本，一人二本，一人三本；

（3）分成每组都是二本的 3 组；

（4）分给甲、乙、丙三人，每人二本.

**知识与方法测试参考答案**

1. A. 2. B. 3. C. 4. D. 5. C. 6. C. 7. A. 8. C. 9. A. 10. B.

11. B. 12. D. 13. 2 880. 14. 2. 15. −68. 16. 5.

17. （1）由已知 $C_n^{n-2}(2i)^2=-180$ 得 $n=10$（$n=-9$ 舍去）.

（2）通项 $C_{10}^r(2i)^{10-r}\cdot x^{\frac{10-5r}{2}}$.

因为系数为正实数，所以 $r=10$，6，2.

所以 $T_{11}=x^{-20}$，$T_7=3\,360x^{-10}$，$T_3=11\,520$ 为所求.

18. $C_4^2\cdot A_3^3\cdot A_2^2=72$.

19. 四个数中，三奇一偶的取法有 $C_5^3\cdot C_5^1=50$ 种，三偶一奇的取法有 $C_5^3\cdot C_5^1=50$ 种，所以满足条件的取法有 $2C_5^3\cdot C_5^1=100$ 种.

20. 由已知 $C_m^1+C_n^1=19$，即 $m+n=19$.

（1）$x^2$ 的系数为 $C_m^2+C_n^2=n^2-19n+171=\left(n-\dfrac{19}{2}\right)^2+171-\dfrac{19^2}{4}$，

所以当 $n=9$，$m=10$ 或 $n=10$，$m=9$ 时，$x^2$ 项的系数是最小，最小值为 81.

（2）$x^7$ 项的系数为 $C_{10}^7+C_9^7=156$.

21. 因为 $a_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}$，

$$\begin{aligned}
\text{所以 } A_n&=\frac{1}{1-q}\left[C_n^1(1-q)+C_n^2(1-q^2)+\cdots+C_n^n(1-q^n)\right]\\
&=\frac{1}{1-q}\left[C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n-(C_n^1q+C_n^2q^2+\cdots+C_n^nq^n)\right]\\
&=\frac{1}{1-q}\left[(2^n-1)-(1+q)^n+1\right]=\frac{1}{1-q}\left[2^n-(1+q)^n\right].
\end{aligned}$$

22. （1）分三步，先选 1 本有 $C_6^1$ 种方法；再从余下 5 本中选 2 本有 $C_5^2$ 种方法；最后余下的 3 本中选 3 本有 $C_3^3$ 种，三步做完，又不重复又无遗漏，由乘法原理得，分配方式有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3=60$ 种.

（2）本题还应在问题（1）基础上，考虑再分配，共有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot A_3^3=360$ 种.

（3）可分三步，分别有 $C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2$ 种方法，但最后结果是 $C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2$ 吗？记 6 本书为 A、B、 C、D、E、F，看如下分组方法：

(AB，CD，EF)，(AB，EF，CD)，(CD，AB，EF)，(CD，EF，AB)，(EF，AB，CD)，(EF，CD，AB)，….

在总数为 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ 的上面这些 $A_3^3$ 种里，仅是 AB，CD，EF 的顺序不同，因此，只能作为一种分法.

因此，分配方法总数为$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3}=15$ 种.

(4) 在问题 (3) 的基础上，再分配即可，

所以$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3=90$ 种.

## 二、评价建议

1.“双基”的书面评价. 针对本章基础知识和基本技能，除在学完本章知识后进行综合试卷评价测试外，在学习过程中还可以进行两次阶段诊断性评价测试：第一次在学完排列组合后，主要内容为排列数、组合数、排列组合综合应用题，若考完后掌握不理想应再查缺补漏；第二次在学完本章后，测试全部内容.

2. 通过本章学习必须让学生对处理排列组合综合应用题有明确的思路和方法；若没有形成，必须与学生共同总结，再进行训练.

3. 在本章学习中必须渗透各种数学思想，让学生通过大量的实例去体会数学思想的应用.

# 第二章 概 率

## Ⅰ 课程目标

### 一、知识与技能目标

1. 了解随机变量、离散型随机变量的意义，会求出某些简单的离散型随机变量的分布列，特别是理解和掌握两种特殊的概率分布——二点分布与超几何分布，掌握它们的分布列与简单的概率计算.

2. 正确理解条件概率与相互独立事件的概念，初步掌握用定义判断、解决简单的概率问题；理解独立重复试验的意义，能求简单的服从二项分布的随机变量的分布列.

3. 了解离散型随机变量的期望与方差的含义与作用，会根据离散型随机变量的分布列求出期望与方差，并体会它们各自的作用.

4. 了解正态分布的概率密度曲线的函数式及其图象和性质，初步了解标准正态分布的三倍标准差原则及其在日常生活、生产和学习中的运用.

### 二、过程与方法目标

1. 随机现象是人们日常生产、生活和学习中遇到的最基本的现象，教师应通过日常生活中的大量实例，引导学生正确认识和理解随机现象，直至揭示其本质特点；掌握随机变量的分布列、期望与方差，并运用这些知识解决实际问题，在解决问题的过程中进一步加深对所学知识的理解，体会学习本章知识的重要性.

2. 学习时要注意条件概率与事件的互相独立性两个概念之间的联系，二点分布与二项分布式两种不同的概率分布，学习时要注意比较它们的异同点，要注意观察、类比、归纳等数学思想和方法的运用.

3. 大量的实例来源于生活，大量的数据就在我们身边，要认真体会数学来源于生活，数学又服务于生活，要努力培养学习数学的兴趣，坚定学好数学的信心.

## 三、情感、态度与价值观目标

1. 通过具体实例，让学生了解随机现象与概率的定义，加强与现实生活的联系，培养辩证唯物主义的世界观和认识观，以科学的态度评价身边的一些随机现象.

2. 让学生积极地参加数据的收集、整理、分析与总结评价活动，在解决问题的过程中加深理解知识，体会数学知识的重要性，体会解决问题的愉悦情绪，感受与他人合作交流的重要性.

3. 使学生养成善于分析总结的习惯，善于观察生活，培养实事求是的科学态度，培养学生的实践能力，努力提高学生分析问题、解决问题的能力.

# Ⅱ 教材分析

## 一、编写特色

1. 在数学 3 学习概率的基础上，教学的重点放在，学生理解随机变量的概念，研究如何用数学方法研究随机现象. 用函数的观点理解离散型随机变量的概率分布. 通过实例理解分布列的性质.

2. 通过实例让学生理解超几何分布概念和计算方法.

3. 通过实例让学生理解事件的独立性及条件概率概念.

4. 通过实例让学生理解独立重复试验概念，以及如何用数学方法计算它的概率分布. 通过高尔顿板的试验提高研究二项分布的兴趣.

5. 数学期望和方差的重点是理解它们的意义.

6. 正态分布的重点是让学生理解 $3\sigma$ 原则.

## 二、内容结构

***1. 内容编排***

本章知识是在学生已学习了“统计”与“概率”(数学 3)两章知识的基础上的进一步深入和扩展，在学习过程中学生对离散型随机变量与概率、期望(均值)与方差等概念会有更进一步的理解. 本章共分四大节. 第一大节主要介绍离散型随机变量及其分布列，了解二点分布与超几何分布，并会求解简单的分布列. 学习本节前应先回顾随机事件的基本事件空间的概念，再进一步理解随机变量与离散型随机变量的意义. 第二大节学习条件概率与事件的独立性，首先要区分哪一个是条件，并正确地利用概率公式；在正确理解互斥事件、对立事件的基础上理解相互独立事件的概念，理解独立重复试验与二项分布之间的关系并能正确运算. 第三大节是离散型随机变量的数字特征，通过期望与方差(或标准差)反映随机变量概率分布的性质特征. 第四大节介绍自然界最常见并且在理论研究与实际应用中都有重要地位的一种分布——正态分布，本节目的是使学生体会统计知识的实用价值，并使其应用能力和动手能力得到锻炼.

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，就把这样的变量叫做随机变量. 随机变量的引入，使

我们可以用变量来刻画随机试验的结果以及随机事件，以便更好地借助于数学工具对随机现象进行研究. 对于离散型随机变量，我们关心的是它会取什么值，取这些值的概率大小，取值的平均水平、稳定性等，为此本章介绍了离散型随机变量的分布列、概率密度曲线，而期望与方差则分别反映了随机变量取值的平均水平及其稳定性.

条件概率与相互独立事件的概率是在等可能性事件与互斥事件的概率的基础上又一类型的概率问题，学习这些知识也是为了更好地解决某些离散型随机变量的概率分布问题.

教材中对于期望与方差的概念都是通过一个简单的实例引入，而后安排了适当的例题与练习帮助学生比较准确地理解这两个概念，计算简单，不涉及太复杂的计算，又突出了本节的另一个重点——服从二项分布的随机变量的期望与方差的计算，这种安排有利于学生正确理解和把握概念，同时又注重了概念的应用.

***2. 地位与作用***

本章内容是在以前所学知识的基础上的深入和扩展，是高中数学中非常重要的基础知识，学习本章知识，对于提高学生的基本素质，培养学生辩证的唯物主义科学观有着非常重要的作用.

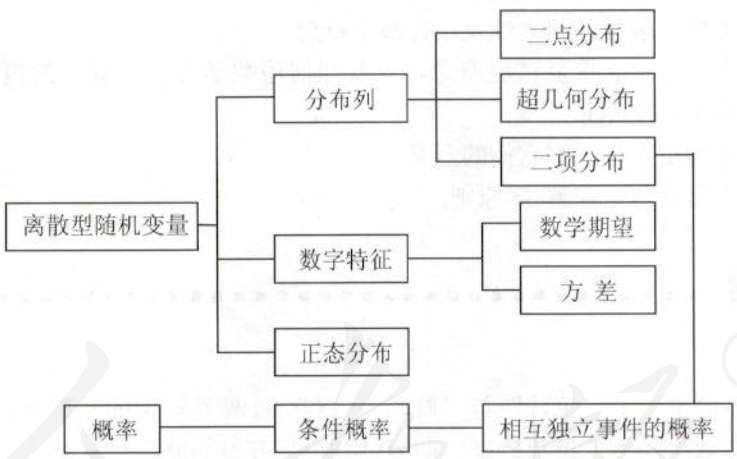
概率知识是人们的必备常识，通过本章的学习使学生能正确地分析某些现象，对某些事件做出正确的评估和合理的决策，增强学生的社会实践能力，增强学生学习数学的兴趣，提高学生分析问题、解决问题的能力.

***3. 重点和难点***

本章的重点是离散型随机变量及其分布列、期望和方差.

本章的难点是对期望和方差的理解和计算，体会它们在实际问题中的应用.

***4. 本章知识结构***




## 三、课时分配

本章教学时间约 14 课时，具体分配如下(仅供参考)：

2.1　离散型随机变量及其分布列

| | | |
|---|---|---|
| 2.1.1 | 离散型随机变量 | 1 课时 |
| 2.2.1 | 离散型随机变量的分布列 | 2 课时 |
| 2.1.3 | 超几何分布 | 1 课时 |

## 四、教法与学法建议

# 2.1 离散型随机变量及其分布列

### 2.1.1 离散型随机变量

1. 本小节的重点是理解什么是离散型随机变量.

2. 教材中以实际生活中的例子引出随机变量以及离散型随机变量的概念，教学时可通过对具体例子的分析让学生了解随机变量与离散型随机变量的区别与联系，并能够自己举出实例加以分析.

3. 本教材里提到的随机变量均为离散型随机变量，它的特点为随机变量的所有可能的取值均能一一列举出来.

### 2.1.2 离散型随机变量的分布列

1. 本小节的重点是离散型随机变量的分布列.

2. 了解离散型随机变量，不仅要知道它可能取哪些值，更重要的是它取这些值的概率有多大，即要知道一个离散型随机变量的取值规律，我们要从两方面来解决这个问题：

(1) 找到随机变量 $X$ 的所有可能取值 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$；

(2) 计算 $X$ 取每一个值 $x_i$ 的概率 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$，由此得到下表：

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_i$ | … | $p_n$ |

此表称作离散型随机变量 $X$ 的分布列(或称作概率分布).

3. 离散型随机变量的分布列有下面两条性质：

(1) $p_i \geqslant 0$，$i=1$，2，…，$n$；

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

在教学中可结合例题和练习说明它们的应用.

4. 二点分布是很常见的一种分布，它的特点是：$X$ 的取值只有两种可能，取每一个值的概率都在0～1之间，且两概率之和为1.

### 2.1.3 超几何分布

1. 本节的重点是对超几何分布的理解及应用.

2. 正确的应用超几何分布解决问题的关键是对此概念的理解. 根据公式可以求得随机变量 $X$ 取不同值时的概率，但要注意公式的正确使用及各个字母所表示的含义.

## 2.2 条件概率与事件的独立性

### 2.2.1 条件概率

1. 本小节的重点是对条件概率的理解，以及如何求条件概率.

2. 条件概率有着比较实际的应用，条件概率中的两个事件是互相影响的，因而其结果受两个条件概率的制约.

3. 正确求出条件概率必须首先弄清楚“事件 $A$ 发生”“事件 $A$ 发生并且事件 $B$ 也发生”及“事件 $B$ 在事件 $A$ 发生的条件下发生”的概率之间的关系.

4. 教材中的三个例题很有代表性，教师的讲解可以多加以分析，引导学生思考解决此类问题的思路与方向，并结合实例提高学生对此类问题的兴趣.

### 2.2.2 事件的独立性

1. 本小节的重点是对相互独立事件的问题的理解，以及如何求相互独立事件同时发生的概率.

2. 当事件 $A$ 的发生对事件 $B$ 的发生有影响时，条件概率 $P(B\mid A)$和概率 $P(B)$一般是不相等的，但是如果事件 $A$ 的发生对事件 $B$ 的发生没有影响时，$P(B\mid A)=P(B)$，这时称事件 $A$，$B$ 相互独立.

3. 判断两个事件是否相互独立，常常通过对事件本质的分析，而且要注意独立事件与对立事件的区别.

4. 若事件 $A$，$B$ 相互独立，则 $A$ 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $B$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立，且 $P(B\mid\overline{A})=P(B)=P(B\mid A)$.

5. 应该强调 $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times\cdots\times P(A_n)$成立的前提条件是 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 相互独立，也可以拿此公式与 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$进行比较说明.

### 2.2.3 独立重复试验与二项分布

1. 本小节的重点是独立重复试验，以及对伯努利概型和有关二项分布问题的理解.

2. 独立重复试验是在相同的条件下重复地、各次之间相互独立地进行的一种试验. 在独立重复试验中，如果每一次的试验只有两种结果 $A$ 和 $\overline{A}$，即某事要么发生，要么不发生，称之为伯努利试验. 这种试验在概率论中占有相当重要的地位，因为随机现象的统计规律性只有在大量独立重复试验中才能显示出来.

3. $n$ 重伯努利试验中，事件 $A$ 恰好发生 $k$ 次的概率记为 $P_n(k)$，则 $P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，如果令 $q=1-p$，利用二次展开式有 $\sum\limits_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\,p^kq^{n-k}=(q+p)^n=1$，这样 $P_n(k)$就是$(q+p)^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项，故 $P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 叫做二项分布公式.

## 2.3 随机变量的数字特征

1. 内容结构分析：本大节从一个具体的例子入手，引入了离散型随机变量的期望与方差的概念，并导出了服从二点分布、二项分布、超几何分布(只介绍了期望)的随机变量的期望和方差，而且教材还以简单的例子说明期望与方差的应用.

2. 重点和难点：难点是离散型随机变量的期望与方差的概念，重点是求离散型随机变量的期望与方差.

3. 教法建议：

(1) 使学生理解离散型随机变量的期望与方差的概念，尤其是第一小节的期望. 有了第一小节期望的基础，第二小节的方差理解会容易一些.

随机变量的期望表示了随机变量在随机试验中取值的平均水平，所以随机变量的期望又常称为随机变量的均值. 由于离散型随机变量的期望的计算是从它的概率分布出发，因而离散型随机变量的期望是随机变量的概率平均值.

教材中所涉及的离散型随机变量的所有可能的取值的个数都是有限的，因而期望的计算只要把相应的 $x_ip_i$ 作累加即可.

(2) 明确离散型随机变量的期望与方差的意义. 期望表示随机变量一切可能值的平均，方差表示随机变量一切可能值的平均集中与离散或稳定与波动的程度，并结合例题说明这两个特征在实际问题中的应用.

(3) 求离散型随机变量的期望与方差，一种是可以根据定义，先列随机变量的分布列，再求期望、方差，这也是考试的重点对象，另一种是可以判断一下随机变量是否服从二点分布、二项分布、超几何分布(只介绍了期望)，用公式求期望与方差.

4. 补充说明：

(1) 超几何分布的方差为 $n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$，相对来说比较复杂，教材没有提及. 此外，高中阶段还是把用定义法求期望与方差放在主要地位.

(2) 教材中离散型随机变量的期望与方差概念都不是严格定义. 在对 $x_ip_i$ 作累加时，当随机变量所可能取值是无限的时候，则要求级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛. 方差 $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$，即随机变量 $\xi$ 的方差就是与另一个与 $\xi$ 密切相关的随机变量 $(\xi-E\xi)^2$ 的均值，大多数概率论教程是这样定义的.

(3) 计算与 $\xi$ 是线性关系的随机变量 $a\xi+b$ 期望与方差时，可用公式 $E(a\xi+b)=aE\xi+b$ 与 $D(a\xi+b)=a^2D\xi$，根据定义很容易证明它们.

## 2.4 正态分布

1. 内容结构分析：教材首先以产品尺寸为例，借助于总体密度曲线的概念来介绍正态分布的意义，指出在实际中常见的服从正态分布随机变量的特征，并直接给出正态分布的主要性质以及在实际中的简单应用.

2. 重点与难点：正态分布的性质的理解.

3. 教法与学法建议：

(1) 使学生了解服从正态分布的随机变量的特征，进而举例说明，如测量的误差，炮弹落点的分布，人的生理特征的尺寸：身高、体重等，农作物的收获量，工厂产品的尺寸：直径、长度、宽度……都近似服从正态分布.

(2) 教材对正态分布的性质并未给出证明，教师可以借助正态变量概率密度曲线的函数表达式稍加说明，有复合函数知识的学生是可以理解的.

## Ⅲ 拓展资源

### 一、赌场里产生的数学

1651 年的夏天，法国数学家兼物理学家布莱瑟·帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)在前往浦挨托镇的旅行途中，偶然遇到了一位名叫梅雷的贵族公子哥，他是一位赌场的好手. 为了消磨旅途的寂寞，他同帕斯卡谈起了他曾经在赌博中遇到的问题，这是一个十分有趣的“分赌注”的问题.

梅雷说有一次他和赌友掷骰子时，各押了 32 个金币的赌注，双方约定如果梅雷先掷出三次 6 点，或者对方先掷出三次 4 点，就算赢了对方. 结果当梅雷两次掷出 6 点，赌友一次掷出 4 点时，梅雷因有事只好中断赌博. 剩下的问题是两人如何分这 64 个金币，他俩因这个问题产生了争执. 赌友说，他要再碰上两次 4 点，或梅雷要再碰上一次 6 点就算赢，所以他有权分得梅雷的一半，即梅雷分 64 个金币的$\frac{2}{3}$，自己分 64 个金币的$\frac{1}{3}$. 梅雷则认为即使下一次赌友掷出了 4 点，他还可以得$\frac{1}{2}$，即 32 个金币，再加上下一次他还有一半希望得到 16 个金币，所以他应该分得 64 个金币的$\frac{3}{4}$，赌友只能分得 64 个金币的$\frac{1}{4}$. 两人到底谁说得对呢?

梅雷提出的“分赌注”的问题，把帕斯卡这位神童数学家难住了. 他苦苦思考，不得要领. 直到过了两三年，到 1654 年才想出点眉目. 于是他写信给好友费尔马(Pierre Fermat，1601—1665)讨论这个问题，两人讨论取得了一致的意见：认为梅雷的分法是对的，他应得 64 个金币的$\frac{3}{4}$，赌友应得 64 个金币的$\frac{1}{4}$. 当时荷兰的数学家惠更斯在听到这件事后也参加了他们的讨论. 惠更斯把讨论结果写成一本书叫做《论赌博中的计算》(1657 年)，这本书引入了数学期望的概念，是有关概率论的一部最早的著作.

法国著名数学家拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace，1749—1827)是一位十分尊重事实的科学家. 拉普拉斯在 1814 年出版的《概率的哲学探讨》一书中调查研究了生男生女的概率问题. 一般人或许认为，生男生女的可能性是相等的，各占 50%. 事实并非如此. 拉普拉斯根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料，得出几乎完全一致的男婴出生数与女婴出生数的比值：在 10 年间总是摆动在 51.2∶48.8左右. 这就是说，男婴出生数一般比女婴出生数略高. 国内外大量的人口统计资料说明，男

婴与女婴出生数的比率是 51.2∶48.8，我国几次人口普查的资料中男婴与女婴出生数的比率也大致如此，1953 年是 51.2∶48.8；1964 年是 51.3∶48.7. 这一事实说明，在纷繁杂乱的大量偶然现象背后，隐藏着必然性规律. 这种由“频率稳定性”导出的“大数定律”，成为整个概率论的基础.

概率论问世不久，就在应用方面发挥了重要的作用. 牛痘在欧洲大规模接种以后，曾因副作用引起争议，这时雅格布·伯努利的侄子丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli，1700—1782)根据大量的统计资料，作出了种牛痘能延长人类平均寿命 3 年的结论，消除了一些人的恐惧和怀疑.

## 二、名人与概率

概率论肇始于 17 世纪，G. 卡尔达诺(Cardano)，P. 费尔马(Fermat)，B. 帕斯卡(Pascal)等人是概率论早期的研究者，他们所研究的主要是关于相互独立随机事件的概率——机会方面的问题，讨论如赌博、有奖抽彩过程中的“机会”. 逐渐地，人们要求解决与大量事件集合有关的概率或期望值问题，如奖券的总数很大，已知每一张奖券中奖的机会都相等，那么抽取 1 000 张、10 000 张奖券中奖的概率有多大呢？人们希望了解，如果要保证中奖的可能性达到 90%，那么至少应该购买多少张奖券.

考虑一系列随机事件(如随机地抛掷硬币)，某一事件出现(如抛掷硬币时出现正面)之概率为 $P$，$n$ 表示所有随机事件的总数，$m$ 是某一事件出现的数目，那么该事件出现的次数($m$)与全体事件的次数($n$)之比将会呈现什么规律呢？这是 17 世纪概率论中一个十分重要的问题.

1713 年，雅格布·伯努利(Jacob Bernoulli)的遗著《猜度术》(Arts Conjectandi)出版，书中表明他经过多次反复的试验，证明在一定范围内存在着预期的概率. 如某一事件出现的概率为$\frac{30}{50}$，结果计算出该事件出现次数与全部次数之比介于$\frac{29}{50}$与$\frac{31}{50}$之间，其试验结果如下：25 550 次试验中，上述次数之比位于$\frac{29}{50}$与$\frac{31}{50}$之间的概率为 0.999 9；再增加试验 5 708 次，即进行 31 258 试验，则上述概率为 0.999 9；再增加 5 708 次，即进行 36 966 次试验，则上述概率为 0.999 99，等等. 因此雅格布·伯努利指出：“无限地连续进行试验，我们终能正确地计算任何事物的概率，并从偶然现象之中看到事物的秩序.”但是，他并未表述出这种偶然现象中的秩序. 这一工作是由棣莫弗完成的.

棣莫弗在雅格布·伯努利的《猜度术》出版之前，就对概率论进行了广泛而深入的研究. 1711 年，他在英国皇家学会的《哲学学报》(Philosophical Transactions)上发表了《论抽签的原理》(De Mensure Sortis)，该文于 1718 年用英文出版时翻译成《机会的学说》(The Doctrine Of Chances)，并扩充成一本书. 他在书中并没讨论上述雅格布·伯努利讨论的问题，1738 年再版《机会的学说》时，棣莫弗才对上述问题给出了重要的解决方法.

棣莫弗在《机会的学说》(1738 年版)中称，在 1725 年左右，他就考虑过多次反复试验中的预期概率问题. 他曾在注明日期为 1733 年 11 月 13 日的一份拉丁文论文中指出：“坦率地说，这是在关于机会的学问中所能提出的最困难的问题.”他的解答是这样的：在 $n$ 次试验中，获得 $m$ 次成功(即某一特定事件出现)的概率，是通过$(a+b)^n$的表达式中含有 $m$ 次的那一项(即第 $m+1$ 项)表示出来的，也就是说，$n$ 次试验中某一事件出现 $m$ 次的概率为

$$C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot a^m\cdot b^{n-m}.$$

其中，$a$ 是某一事件出现的概率，而 $b=1-a$.

这样，棣莫弗就得到二项分布

| $\xi$ | 0 | 1 | … | $m$ | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\{\xi=k\}$ | $(1-a)^n$ | $C_n^1 a\cdot(1-a)^{n-1}$ | … | $C_n^m\cdot a^m\cdot(1-a)^{n-m}$ | … | $a^n$ |

其中 $\xi$ 为随机变量，而 $P(\xi=k)$ 为 $\xi$ 的分布列.

然后，他又考虑一般的二项式公式 $(a+b)^n$，发现二项式 $(1+1)^n$ 的中项与各项之和 $2^n$ 之间的比例关系为(当 $n$ 很大时)

$$\frac{2A\times(n-1)^{\frac{1}{n}}}{n^n\times\sqrt{n-1}}.$$

其中 $A$ 为双曲对数 $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1\ 260}-\frac{1}{1\ 860}+\cdots$ 级数之值. 棣莫弗在 1730 年的《分析杂论》(Miscellanea Analytica)中给出了对很大的 $n$，关于 $n!$ 的近似公式 $n!\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

这是棣莫弗首先给出的，但在数学史上却被称为斯特灵公式或斯特灵逼近. 历史事实是，棣莫弗首先得到 $n!\sim Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$，他知道常数 $C$ 仅仅是一个无穷级数之和的极限，但却没有求出 $C$ 的值. 后来，他的朋友 J. 斯特灵求出了 $C=\sqrt{2\pi}$. 毫无疑问，斯特灵公式的最重要的工作属于棣莫弗，斯特灵(Stirling)利用他的发现作了进一步的探讨.

利用 $n!\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ 这一逼近式，棣莫弗开始考虑二项式 $(a+b)^n$ 从任意一项至中心项的总和. 于是，他发现了二项分布 $C_n^m a^m(1-a)^{n-m}$ 的极限式将呈现一种新的形式. 他提出一个具有启发性的例子，并认为这是“机会”(概率论)最难解决的问题：事件的概率为 $\frac{1}{2}$，当进行 3 600 次试验时，发现该事件出现的次数既不多于 1 830 次，也不少于 1 770 次，也就是说，已经得到平均误差为 30.

在此基础上，他对于事件概率为 $\frac{1}{2}$ 的情形，得到了 $n$ 次试验中出现 $m$ 次事件的概率之期望值满足的关系式

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{x_1<\frac{m(n)-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}<x_2\right\}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

其中 $m(n)$ 是 $n$ 次试验中出现 $m$ 次事件的概率. 也就是说，棣莫弗首次发现二项分布的极限形式为一正态分布.

后来，P. S. 拉普拉斯(Laplace)对棣莫弗的结果进行推广，得到了今天的棣莫弗－拉普拉斯积分极限定理：

若随机变数 $\xi_n$ 服从二项分布，即 $P(\xi_n=m)=C_n^m a^m(1-a)^{n-m}$，其中 $0<a<1$，$m=0，1，2，\cdots，n$，则有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(x_1\leqslant\frac{\xi_n-na}{\sqrt{na(1-a)}}\leqslant x_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

棣莫弗最先引入的正态分布在概率、统计发展中占有重要地位. 后来，拉普拉斯，C.F. 高斯

(Gauss)等进行了推广．人们陆续发现，许多随机现象服从正态分布．

设 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$ 为相互独立的随机变数序列，有有限的数学期望 $E(\xi_k)=a_k$ 和方差 $D(\xi_k)=\delta_k^2(k=1,2,\cdots)$，令

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k),\eta_n=\sum_{B_n}^{\xi_k-a_k}\frac{\xi_k-a_k}{B_n}(n=1,2,\cdots).$$

若对于实数 $x$，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\eta_n<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{y^4}{2}}\mathrm{d}y,$$

则称随机序列 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理．

不难证明，若设 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$ 为相互独立且具有相同两点分布的随机变量序列，且 $P\{\xi_m=1\}=a$，$P\{\xi_m=0\}=1-a$，$(m=1,2,\cdots)$，$0<a<1$，则 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理．这一定理的雏形是棣莫弗最先提出的．

在对概率论的研究中，棣莫弗第一次引入了正态密度函数(正态曲线 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$)．可是，他的这一工作，尤其是关于二项分布的极限式为正态分布的发现，在相当长时间里被人遗忘了．直到1924年K. 皮尔逊(Pearson)著《正态曲线史》(A History Of The Normal Curve)一文，重新提到棣莫弗的工作，人们才认识到他的贡献．

利用棣莫弗的上述结论，可以解决在一定范围内存在的期望的概率的问题．如随机抛硬币100次，设出现正面的概率为$\frac{1}{2}$，问“正面出现次数小于60、大于50”的概率是多少？设 $n=100$，$a=\frac{1}{2}$，则 $na=50$，$\sqrt{n\cdot a(1-a)}=\sqrt{25}=5$，故

$$\begin{aligned}P(50<\xi_{100}<60)&=P\left(\frac{50-50}{5}<\frac{\xi_{100}-50}{5}<\frac{60-50}{5}\right)\\&=P\left(0<\frac{\xi_{100}-50}{5}<2\right)\\&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{-\frac{n^2}{2}}\mathrm{d}x=0.4772.\end{aligned}$$

棣莫弗将他的成果大量地应用于诸如此类的问题．上述棣莫弗一拉普拉斯积分极限定理及中心极限定理还可用来解决反过来的统计问题：已知在一定范围内存在的期望的概率，求某一事件出现的概率，或者求满足一定概率条件所需要的试验次数，等等．

棣莫弗的《机会的学说》在概率论发展中起着承前启后的作用，尤其是二项分布、正态分布函数、中心极限定理等方面的工作，开辟了概率论发展的新方向．对于他来说，重要的是解决了这样的哲学问题：在人们以为是纯粹偶然的事件中，可以寻找出其规律和必然．正如他在该书英文第三版中所指出的那样，尽管机会具有不规则性，由于机会无限多，随着时间的推移，不规则性与秩序相比将显得微不足道．他认为，这种秩序自然是从“固有设计中”产生出来的．

在《机会的学说》中，棣莫弗得到了泊松分布的一种特殊情形，并将母函数用于对正态分布的讨论；在研究差分方程时，他将循环级数方法应用于差分方程的求解；此外，他在这部著作中还对赌博中涉及的概率问题进行了深入的探讨．他的许多方法尤其是母函数方法在概率论发展中占有十分重要的地位．

棣莫弗是18世纪力主将概率论应用于人文、社会科学研究的重要人物之一，他在这方面的工作与哈雷密切相关. 哈雷在1693年就制定了确定保险年金的理论，在他的统计数据的基础上，棣莫弗于1725年出版了《年金论》(Anuities Upon Lives)一书.

《年金论》不仅改进了以往众所周知的关于人口统计的方法，而且在假定死亡率所遵循的规律以及银行利息不变的情况下，推导出了计算年金的公式，从而为保险业提供了合理处理有关问题的依据，这些内容被后人奉为经典. 在这部书中，棣莫弗提出了一个死亡假说，即在每86个婴儿出生后，每年将死掉一个. 他的《年金论》在欧洲产生了广泛影响，先后出版了7次之多，1725年、1743年、1750年、1752年、1756年分别用英文出版，1776年出版了意大利文本，1906年出版了德文译本.

(本文原作者系中国科学院自然科学史研究所 张祖贵，有删节)

# Ⅳ 教学案例

## 案例1 2.1.2 离散型随机变量的分布列

### (一) 教学目标

1. 知识与技能

(1) 理解离散型随机变量的分布列的意义，会求某些简单的离散型随机变量的分布列.

(2) 掌握离散型随机变量的分布列的两个基本性质，并会用它们来解决一些简单的问题.

2. 过程与方法

(1) 通过具体实例分析，总结归纳出离散型随机变量的分布列的定义，进而结合实例与前面所学知识分析讨论分布列的性质.

(2) 进行辩证唯物主义思想教育，加强数学应用知识和数学审美能力的培养，激发学生学习数学的热情.

3. 情感、态度与价值观

(1) 结合教学内容培养学生学习数学的兴趣以及“用数学”的意识，激励学生勇于自我创新，培养学生的科学探索精神.

(2) 强化新旧知识的联系，树立学生求真务实的勇气和信心，进一步阐明唯物辩证法关于世界普遍联系和永恒发展的原理.

### (二) 教学重点和难点

重点：离散型随机变量的分布列及其性质.

难点：求简单的离散型随机变量的分布列.

### (三) 教学方法

从学生的认知规律出发进行启发、诱导、探索，运用讲授法、分组讨论法、阅读指导法等充分调动

学生的积极性，充分发挥学生的主体作用，引导学生在自主学习与分组讨论交流过程中体会知识的价值，感受知识的无穷魅力.

## （四）教学过程

复习引入⇒提出问题⇒概念形成⇒概念深化⇒应用举例⇒反馈练习⇒归纳总结⇒布置作业

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>复习引入</td><td>问题 1：什么是随机变量？举例说明.<br>问题 2：什么是离散型随机变量？它的特点是什么？</td><td>用多媒体展示随机变量和离散型随机变量的定义.<br>教师提出问题，铺垫复习，学生积极思考，回答问题. 教师根据学生的回答给予补充总结，导入新课.</td><td>因为学生的学习是建立在已有认知结构上的，所以从学生已有旧知识出发，既可加深对学过知识的理解，又可为学习新知识埋下伏笔.</td></tr>
<tr><td>提出问题</td><td>对于一个离散型变量，我们不仅要知道它可能取哪些值，最重要的是要知道它每个取值的概率有多大.<br>实例：某射击选手每次射击所得环数是 $X$，$X$ 的取值范围是 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，我们只有知道每一个命中的环数的概率分别是多少，才能了解选手的射击水平有多高.</td><td>教师在多媒体屏幕上给出某个选手在一段时间里的成绩概率表. 通过表格分析，教师提出问题：要掌握一个离散型随机变量的取值规律，必须掌握哪些内容. 教师组织学生分组讨论，引导学生自己总结归纳出离散型变量 $X$ 的分布列的概念，然后教师给予补充总结.</td><td>通过让学生分组讨论，既可加深对概念的理解，又能加强学生间的交流与合作，充分发挥学生学习的主动性.</td></tr>
<tr><td>概念形成</td><td>什么是离散型随机变量 $X$ 的分布列？
<table>
<tr><td>$X$</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>$\cdots$</td><td>$x_i$</td><td>$\cdots$</td><td>$x_n$</td></tr>
<tr><td>$P$</td><td>$p_1$</td><td>$p_2$</td><td>$\cdots$</td><td>$p_i$</td><td>$\cdots$</td><td>$p_n$</td></tr>
</table>
我们称这个表为离散型随机变量 $X$ 的概率分布，或称为离散型随机变量 $X$ 的分布列.</td><td>教师提出问题，激发学生思考、讨论交流，允许相互讨论.</td><td>1. 通过相互讨论，让学生对知识进行类比、迁移及联想，树立他们勇于探索的信心和勇气.<br>2. 让学生分组讨论，理解深刻，加强学生间的交流与合作，充分发挥学生学习的主动性.</td></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>离散型随机变量 $X$ 的分布列的两个性质：<br>(1) $p_i \geqslant 0$，$i=1,2,3,\cdots,n$；<br>(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.</td><td>根据学生的认知基础，为学生做好学习新知识的准备，对于性质 (1) (2) 让学生思考，根据互斥事件的概率加法公式分析讨论，总结归纳. 老师及时给予肯定，激发学生的求知欲望和学习兴趣.</td><td>1. 让学生明确离散型随机变量 $X$ 的定义，深刻理解它的两个性质，为下面的所学知识应用做好铺垫.<br>2. 通过学生自己解决问题，大大提高学习的热情，在此基础上提炼知识，更有利于学生掌握知识.</td></tr>
</table>

续表

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
|---|---|---|---|
| 应用举例 | 呈现例题：<br>例 1　篮球运动员在比赛中每次罚球命中得一分，不中得零分．已知某运动员罚球命中的概率为 0.7，求他罚球一次的得分的分布列．<br>例 2　掷一颗骰子，所掷出的点数为随机变量 $X$：<br>（1）求 $X$ 的分布列；<br>（2）求“点数大于 4”的概率；<br>（3）求“点数不超过 5”的概率． | 请学生自己先行阅读例 1，理解题意，教师适时点拨、指导．待学生充分思考、酝酿，具有初步的思路之后，请学生说出他们的解题方法，然后教师板演，规范解题步骤．<br>根据分布列的定义与性质，请学生先分析讨论例 2，理出思路，然后实例演练，教师巡视，给予及时指导． | 让学生巩固离散型随机变量的分布列的定义，感受其定义在实际问题中的应用．<br>通过实例演练，让学生体会离散型随机变量的两个性质． |
| 反馈练习 | 1. 某厂生产电子元件，其产品的次品率为 5%，先从一批产品中任意的连续取出 2 件，写出其中次品数 $X$ 的概率分布．<br>2. 教材第 43 页，练习 A 第 1，4 题． | 学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对个别学生个别指导． | 进一步巩固所学知识，有助于保持学生学习的热情和信心．<br>教师及时了解学生的掌握情况以便进一步调整自己的教学． |
| 归纳总结 | 1. 知识：离散型变量的分布列的定义和两个性质．<br>2. 应用：会求简单的离散型随机变量的分布列． | 学生反思本小节内容，对知识进行回顾总结． | 让学生学会学习，学会反思总结，灵活应用所学知识，建立较为完整的认知结构，并体会数学知识在实际生活中的应用． |
| 布置作业 | 1. 必做题：教材第 43 页，练习 A，第 2，3 题．<br>2. 选做题：教材第 44 页，练习 B，第 2 题；第 46 页，习题 2-1A 第 4 题． | 必做题：基础性的题目，要求所有学生必须完成．<br>选做题：拔高性题目，要求中等以上水平学生完成． | 使学生进一步巩固和应用所学知识． |

## 案例 2　2.1.3　超几何分布

### （一）教学目标

1. 知识与技能

通过实例(如彩票抽奖)，理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用．

2. 过程与方法

（1）通过探索、研究、归纳、总结形成较为科学的知识网，并掌握知识之间的联系.

（2）进行辩证唯物主义思想教育，数学应用意识教育和数学审美教育、提高学习数学的积极性.

3. 情感、态度与价值观

（1）结合教学内容培养学生学习数学的兴趣以及“用数学”的意识，激励学生勇于创新.

（2）强化学生的注意力及新旧知识的联系，树立学生求真的勇气和自信心.

## （二）教学重点与难点

重点：超几何分布及其导出过程.

难点：超几何分布的简单应用.

## （三）教法与学法指导

从学生的认知规律出发进行启发、诱导、探索，运用讲授法、讨论法、阅读指导法等充分调动学生的积极性，发挥学生的主体作用. 在讲授过程中要善于解疑、设疑、激疑.

## （四）教学过程

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
|---|---|---|---|
| 提出问题 | 某校组织了一次认识大自然夏令营活动，有10名学生参加，其中有6名男生、4名女生，为了活动的需要，要从这10名同学中随机抽取3名同学去采集自然标本，那么其中恰有1名女生的概率有多大？ | 学生思考、讨论、看书研究. 教师根据学生的回答，恰当启发、引导. | 从现实生活中的例子引出问题，显得非常自然，符合学生的认知规律. 同时，也激发了学生用数学知识来解决生活中遇到的问题. |
| 概念形成 | 一般地，设有总数为 $N$ 件的两类物品，其中一类有 $M$ 件，从所有物品中任取 $n$ 件（$n\leqslant N$），这 $n$ 件中所含这类物品件数 $X$ 是一个离散型随机变量，它取值为 $m$ 时概率为 $$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$ （$0\leqslant m\leqslant l$，$l=\min(n, M)$）. | 教师提出问题，铺垫复习，让学生思考、积极回答，允许相互讨论. | 因为学生的学习是建立在认知结构上的，因此，新课前的复习即可加深对学过的知识的理解，又可对学习新的知识作好准备.<br>本课开始提出的是一个古典概型，通过对这一问题的思考，我们提炼出一类问题的解决方法，就是我们这一节课的主要内容——超几何分布. |

续表

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
| --- | --- | --- | --- |
| 概念深化 | 例1 在一个口袋中装有30个球，其中有10个红球，其余为白球，这些球除颜色外完全相同．游戏者一次从中摸出5个球，摸到且只要摸到4个红球就中一等奖，那么获得一等奖的概率有多大（结果保留两位有效数字）？ | 学生练习，教师点拨．<br>学生自行解决，教师引申．<br>放手让学生解答，通过微机显示标准解题格式．<br>教师讲授，让学生思考． | 通过这一例题，使学生建立起完整准确的知识结构，在运用知识解决问题的过程中，使学生领会客观世界处于运动变化的无限发展过程中，培养学生的逻辑思维能力和语言表达能力．<br>教师启发学生思考，一方面可以进一步掌握超几何分布，另一方面加深对超几何分布的认识． |
| 应用举例 | 例2 一批产品共100件，其中有5件次品．现在从中任取10件检查，求取到次品件数的分布列（精确到0.000 01）． | 学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，对个别学生个别指导． | 通过这一例题，使学生明白，超几何分布处理的是哪一类问题；进一步巩固超几何分布． |
| 反馈练习 | 1. 一批产品20个中有5个废品，任意抽取4个，求废品数不多于2个的概率．<br>2. 从一副扑克牌(没有大小王)中发出5张，求其中黑桃张数的分布列．<br>3. 从一批发芽率为0.8的种子中，任取10粒，求发芽粒数不小于8粒的概率． | 学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，对个别学生个别指导．<br>答案：<br>1. 0.968．<br>2. 0，1，…，5张的概率分别为0.221 5，0.411 4，0.274 3，0.081 5，0.010 7，0.000 5．<br>3. 0.677 8． | 进一步巩固所学知识，有助于保持学生学习的热情和信心．<br>教师及时了解学生的掌握情况，以便进一步调整自己的教学． |
| 归纳总结 | 1. 超几何分布的推导与定义．<br>2. 超几何分布的特点． | 学生归纳总结，教师点拨． | 巩固超几何分布的概念与方法，建立较完整的认知结构． |
| 布置作业 | 1. 教材第46页，练习A第1，2题和练习B．<br>2. 教材第47页，习题2-1 B第1题． | 学生独立完成． | 教学反馈与评价，学生内化所学知识． |

# V　习题参考答案与提示

## 练习 A（第 40 页）

1. (1) 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10；

   (2) 1，2，3，4，5，6；

   (3) 0，1，2，3；

   (4) 0，1，2，3，4，5.

2.

| 结果 | 两正 | 先正后反 | 先反后正 | 两反 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 5 | 0 | 0 | −3 |

## 练习 B（第 41 页）

| 结果 | 红 | 白 | 蓝 | 黑 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 2 | 0 | 1 | −2 |
| $P$ | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |

## 练习 A（第 43 页）

1. (1) 是. 因为给出的表格的概率值满足离散型随机变量应该具有的两条性质.

   (2) 不是. 概率的取值出现小于 0.

2.

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | 0.5 |

3.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.08 | 0.1 | 0.12 | 0.14 | 0.16 | 0.18 |

4.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/36 | 1/18 | 1/12 | 1/9 | 5/36 | 1/6 | 5/36 | 1/9 | 1/12 | 1/18 | 1/36 |

$$P(X>9)=P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$

$=\frac{1}{6}$,

$P(X\leqslant 7)=1-P(X>9)-P(X=8)-P(X=9)$

$=1-\frac{1}{6}-\frac{5}{36}-\frac{1}{9}$

$=\frac{7}{12}$.

**练习 B（第 44 页）**

1.

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{28}$ |

2.

| $X$ | $-500$ | 500 | 1 000 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.2 | 0.4 |

**练习 A（第 46 页）**

1. 设随机变量 $\xi$ 为抽得的次品数，$\xi$ 服从 $N=100$，$M=4$，$n=10$ 的超几何分布.

$P(\xi=0)=\frac{C_4^0\cdot C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1\cdot C_{96}^{9}}{C_{100}^{10}}$，$P(\xi=2)=\frac{C_4^2\cdot C_{96}^{8}}{C_{100}^{10}}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_4^3\cdot C_{96}^{7}}{C_{100}^{10}}$，$P(\xi=4)=\frac{C_4^4\cdot C_{96}^{6}}{C_{100}^{10}}$.

2. 设随机变量 $X$ 为取出的黑球的个数，$X$ 服从 $N=20$，$M=4$，$n=3$ 的超几何分布.

$P(X=0)=\frac{C_4^0\cdot C_{16}^{3}}{C_{20}^{3}}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_{16}^{2}}{C_{20}^{3}}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_{16}^{1}}{C_{20}^{3}}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_{16}^{0}}{C_{20}^{3}}$.

**练习 B（第 46 页）**

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{C_m^0\cdot C_{M-m}^3}{C_M^3}$ | $\frac{C_m^1\cdot C_{M-m}^2}{C_M^3}$ | $\frac{C_m^2\cdot C_{M-m}^1}{C_M^3}$ | $\frac{C_m^3\cdot C_{M-m}^0}{C_M^3}$ |

**习题 2-1 A（第 46 页）**

1. (1) 3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13；

(2) 0，1；

(3) 0, 1, 2, 3, 4;

(4) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

2.

| $X$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

3.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{C_4^0 \cdot C_{46}^5}{C_{50}^5}$ | $\frac{C_4^1 \cdot C_{46}^4}{C_{50}^5}$ | $\frac{C_4^2 \cdot C_{46}^3}{C_{50}^5}$ | $\frac{C_4^3 \cdot C_{46}^2}{C_{50}^5}$ | $\frac{C_4^4 \cdot C_{46}^1}{C_{50}^5}$ |

4.

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

## 习题 2-1 B（第 47 页）

1.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{C_{10}^0 \cdot C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^1 \cdot C_{40}^9}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^2 \cdot C_{40}^8}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^3 \cdot C_{40}^7}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^4 \cdot C_{40}^6}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^5 \cdot C_{40}^5}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^6 \cdot C_{40}^4}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^7 \cdot C_{40}^3}{C_{50}^{10}}$ |

| 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|
| $\frac{C_{10}^8 \cdot C_{40}^2}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^9 \cdot C_{40}^1}{C_{50}^{10}}$ | $\frac{C_{10}^{10} \cdot C_{40}^0}{C_{50}^{10}}$ |

(1) $P(X=0)=\frac{C_{10}^0 \cdot C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}}$;

(2) $P(X=2)=\frac{C_{10}^2 \cdot C_{40}^8}{C_{50}^{10}}$;

(3) $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{C_{10}^0 \cdot C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}}+\frac{C_{10}^1 \cdot C_{40}^9}{C_{50}^{10}}+\frac{C_{10}^2 \cdot C_{40}^8}{C_{50}^{10}}$.

2.

| $X$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.3 | 0.6 |

练习 A（第 50 页）

1. $\frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{6}$.

3. $\frac{1}{3}$.

4. 92.6%.

练习 B（第 50 页）

1. $\frac{6}{7}$.

2. $\frac{1}{3}$.

练习 A（第 53 页）

1. (1) 0.5;
   (2) 0.2.
2. 0.35.
3. 0.931 6.
4. (1) $\frac{1}{3}$;
   (2) $\frac{2}{3}$.

练习 B（第 54 页）

1. (1) 0.016 8;
   (2) 0.155 7;
   (3) 0.858 7.
2. (1) 0.612;
   (2) 0.056;
   (3) 0.388;
   (4) 0.059.

练习 A（第 56 页）

1. 0.136 0.
2. (1) 0.017 3;
   (2) $1.694\times10^{-5}$;
   (3) 0.136 6.

3. 0.375，0.375.

4. (1) 0.345 6；

(2) 0.682 56.

5. 0.387.

**练习 B（第 57 页）**

1. 用 $X$ 表示生于元旦的同学的人数，则所求的概率为

$$1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

$$=1-C_{50}^{0}\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^{0}\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)^{50}-C_{50}^{1}\cdot\frac{1}{365}\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{49}-C_{50}^{2}\left(\frac{1}{365}\right)^{2}\left(\frac{364}{365}\right)^{48}.$$

2. (1) $C_{5}^{1}\cdot(0.2)^{1}\cdot(0.8)^{4}$；

(2) $1-(0.8)^{5}$.

**习题 2-2 A（第 58 页）**

1. (1) $\frac{17}{45}$；

(2) $\frac{1}{17}$；

(3) $\frac{4}{11}$.

2. $\frac{1}{5}$.

3. 0.18.

4. (1) 不独立；

(2) $\frac{4}{5}$；

(3) $\frac{4}{15}$.

5. 0.204 8.

6. (1) 0.41；

(2) 0.74.

**习题 2-2 B（第 58 页）**

1. $\frac{4}{11}$.

2. (1) 0.306；

(2) 0.395；

(3) 0.089.

**习题 2-3 A（第 64 页）**

1. 2.3.

2. 乙车床次品的期望少.

3. 0.1.

4. 2.01.

5. $\frac{35}{12}$.

6. 由题目知抽到的女生的人数 $X$ 服从参数 $N=45$，$M=15$，$n=5$ 的超几何分布，

所以，$E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{5\times15}{45}=\frac{5}{3}$

7. 这是一个满足 $p=\frac{3}{5}$ 的几何分布，

所以，$E(X)=np=\frac{3}{5}\times5=3$，

$D(X)=npq=5\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

### 习题 2-3 B（第 64 页）

1. 猜一正一反得分的期望高.
2. 0.5 元.

### 习题 2-4 A（第 67 页）

1. (1) 477；

   (2) 499.

2. (1) 1 025；

   (2) 1 496.

### 习题 2-4 B（第 68 页）

95.4%的正常范围(131.764，154.436)，

99.7%的正常范围(126.096，160.104).



### 巩固与提高（第 69 页）

1. (1) ×；

   (2) ×；

   (3) ×；

   (4) ×.

2. (1) $\frac{7}{8}$；

   (2) 0.288；

   (3) 0.26；

   (4) 0.409 6.

3.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{5}{42}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{1}{21}$ |

4. 0.931 2.
5. (1) 0.63;
   (2) 0.34;
   (3) 0.97.
6. 0.345 6.
7. 6 830.

**自测与评估（第 70 页）**

1. (1) $\frac{12}{25}$;

   (2)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.48 | 0.24 | 0.16 | 0.12 |

   (3) $P(1<X<4)=P(X=2)+P(X=3)=0.4$.
2. 9.
3. 三局二胜制的情况下，甲胜的概率较大.
4. 0.377.
5. 甲比乙投篮稳定.
6. (1) 9 540;
   (2) 9 970.

# Ⅵ　反馈与评价

## 一、知识与方法测试

### 一、选择题（每题 5 分，共 30 分）

1. 设随机变量 $\xi$ 分布列为 $P(\xi=k)=C\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$, $k=1, 2, 3$，则 C 的值为（　　）.

(A) 1　　(B) $\frac{9}{13}$　　(C) $\frac{11}{13}$　　(D) $\frac{27}{13}$

2. 设离散型随机变量 $\xi$ 的概率分布如下：

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $p$ |

则 $p$ 的值为(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{4}$

3. 某产品 40 件，其中有次品数 3 件，现从中任取 2 件，则其中至少有一件次品的概率是(　　).

(A) 0.146 2　　(B) 0.153 8　　(C) 0.996 2　　(D) 0.853 8

4. 已知离散型随机变量 $\xi$ 的概率分布如下：

| $\xi$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | $m$ | 0.2 |

则其数学期望 $E\xi$ 等于(　　).

(A) 1　　(B) 0.6　　(C) $2+3m$　　(D) 2.4

5. 设随机变量 $\xi$ 等可能取值 1，2，3，…，$n$. 如果 $P(\xi<4)=0.3$，那么(　　).

(A) $n=3$　　(B) $n=4$　　(C) $n=10$　　(D) $n$ 不能确定

6. 一个家庭中有两个小孩，已知其中有一个是女孩，则这时另一个是女孩的概率是(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

## 二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

7. 设随机变量 $\xi$ 只能取 5，6，7，…，16 这 12 个值，且取每一个值的概率均相等，则 $P(\xi>8)=$ ________；$P(6<\xi\leqslant 14)=$________.

8. 离散型随机变量 $\xi$ 服从参数为 $n$ 和 $p$ 的二项分布，且 $E\xi=8$，$D\xi=1.6$，则 $n=$________，$p=$________.

9. 甲、乙同时炮击一架敌机，已知甲击中敌机的概率为 0.6，乙击中敌机的概率为 0.5，敌机被击中的概率为________.

10. 如果随机变量 $\xi$ 服从 $N(\mu,\sigma)$，且 $E\xi=3$，$D\xi=1$，则 $\mu=$________，$\sigma=$________.

## 三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）一个口袋中有 5 个同样大小的球，编号为 3，4，5，6，7，从中同时取出 3 个小球，以 $\xi$ 表示取出球的最小号码，求 $\xi$ 的分布列.

12.（12 分）假定每人生日在各个月份的机会是相等的，求 3 个人中生日在第一季度的平均人数.

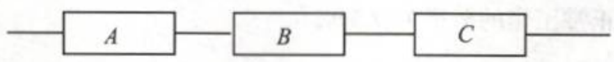
13.（12 分）设某运动员投篮投中的概率 $p=0.6$，

（1）求一次投篮时投中次数 $\xi$ 的期望与方差；

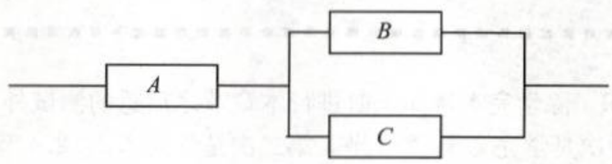
（2）求重复 5 次投篮时投中次数 $\xi$ 的期望与方差.

14.（14 分）如下图，用 $A$，$B$，$C$ 三类不同的元件连接两个系统 $N_1$，$N_2$. 当元件 $A$，$B$，$C$ 都正常工作时系统 $N_1$ 正常工作；当元件 $A$ 正常工作且元件 $B$，$C$ 至少有一个正常工作时系统 $N_2$ 正常工作. 已知元件 $A$，$B$，$C$ 正常工作的概率分别为 0.80，0.90，0.90. 分别求系统 $N_1$，$N_2$ 正常工作的概率 $P_1$，$P_2$.

（$N_1$）




（$N_2$）




**知识与方法测试参考答案**

1. D.　2. C.　3. A.　4. D.　5. C.　6. B.

7. $\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$.　8. 10，0.8.　9. 0.8.　10. 3，1.

11. $\xi$ 的取值分别为 3，4，5.

$P(\xi=5)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$ .

所以，$\xi$ 的分布列为

| $\xi$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.6 | 0.3 | 0.1 |

12. 由题意知每人在第一季度的概率为$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$，又得 3 人中生日在第一季度的人数为 $\xi$，

则 $\xi$ 服从 $B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$，所以 $E\xi=3\times\frac{1}{4}=0.75$.

因此，第一季度的平均人数为 0.75.

13. (1) $\xi$ 服从两点分布，且 $p=0.6$

所以 $E\xi=p=0.6$，$D\xi=p(1-p)=0.6\times0.4=0.24$.

(2) $\xi$ 服从 $B(5,\ 0.6)$，

所以 $E\xi=np=5\times0.6=3$，$D\xi=np(1-p)=5\times0.6\times0.4=1.2$.

14. 分别记元件 $A$，$B$，$C$ 正常工作事件为 $A$，$B$，$C$，由已知条件

$$P(A)=0.80,\ P(B)=0.90,\ P(C)=0.90$$

(1) 因为事件 $A$，$B$，$C$ 是相互独立的，所以，系统 $N_1$ 正常工作的概率为

$$P_1=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.80\times0.90\times0.90=0.648$$

所以系统 $N_1$ 正常工作的概率为 0.648.

(2) 系统 $N_2$ 正常工作的概率为

$$P_2=P(A)P(1-P(\overline{BC}))=P(A)(1-P(\overline{B})P(\overline{C}))=0.80\times(1-0.10\times0.10)=0.792$$

所以系统 $N_2$ 正常工作的概率为 0.792.

## 二、评价建议

1. 针对本章所学的知识，除学完本章知识时进行本章节之后总的测试外，还可在学习过程中进行两次阶段性诊断测试，第一次是学完 2.1，2.2 节，第二次是学完 2.3，2.4 节之后.

2. 本章知识是对必修Ⅲ第三章知识的进一步加深，可让学生学完本章知识以后，留心一下生活中的一些现象，利用周末或假期时间，根据本地区、本学校的实际情况，由教师指定或学生自选课题，开展研究性学习，写一篇有关“生活中的概率问题”的小论文，并和自己原来写过的比较一下，看一下认识是否比原来加深了.

3. 超几何分布和二项分布是非常典型的分布，要让学生好好理解，并与实际生活联系起来，加深对这两类分布的理解.

4. 随机变量的数字特征是非常重要的内容. 学生必须会求随机变量的期望和方差，并能理解它们的实际意义.

5. 正态分布的内容非常丰富，也非常复杂，在这里让学生仅作简单的了解即可.

# 第三章

# 统计案例

## Ⅰ 课程目标

### 一、知识与技能目标

1. 通过典型案例，学习常见的统计方法，并能用这些方法解决一些实际问题.

2. 通过对典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 $2\times2$ 列联表）的基本思想、方法及初步应用.

3. 通过对典型案例的探究，进一步了解回归分析的基本思想、方法及初步应用.

4. 结合实际问题，了解非线性回归问题的解决思路.

5. 通过独立性检验的学习，加深对统计推断的认识.

6. 通过回归分析的学习，提高对现代计算技术与统计方法的应用认识.

### 二、过程与方法目标

1. 经历数据处理的过程，培养学生对数据的直观感觉，认识统计方法的直观特点，体会统计方法应用的广泛性.

2. 结合数学建模活动，给学生提供一定的实践活动，选择某个案例让学生亲自实践，使学生能够运用所学的方法进行初步的实际应用.

3. 初步经历案例学习的过程，学习一些重要的统计思想与方法，并通过反思体会案例教学的必要性.

### 三、情感、态度与价值观目标

现代社会是信息化的社会，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，作出合

理的决策．本章提供了处理数据的方法，通过对数据的收集、整理和分析，增强学生的社会实践能力，培养学生分析问题、解决问题的能力．

# Ⅱ　教材分析

## 一、编写特色

1．遵循课标理念，完全通过实例了解统计的基本思想和方法．教材中没有探讨统计方法的理论根据，但教师一定要从理论上了解统计思想方法，不然很难把握实例的讲解．

2．教材通过具体例子让学生了解事件独立的概念，为理解独立性检验打下基础．

3．通过探索与研究让学生理解卡方公式．

4．在回归分析的教学中，加强代数方法的分析和应用．

## 二、内容结构

***1．内容编排***

本章内容是统计案例中常见方法中的两种：独立性检验与回归分析．独立性检验是通过 5 个案例来介绍，只对 $2\times2$ 列联表进行了分析．回归分析是在数学 3 线性回归的基础上作进一步研究，通过相关性检验为我们处理相关性问题提供了基本步骤，同时介绍了如何借助现代信息技术处理这一部分的问题，最后介绍了非线性回归分析的初步知识．

***2．地位与作用***

统计是研究如何合理地收集、整理，分析数据的学科．它可以为人们制定决策提供依据．在日常生活中，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，作出合理的决策．为了体现统计学科的这一特点，实现《标准》中提出的目标，通过案例进行统计教学是十分必要的．

***3．重点和难点***

重点：独立性检验与回归分析的基本思想与方法．

难点：独立性检验与回归分析的初步应用．

***4．本章知识结构***


## 三、课时分配

本章教学时间约 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

| | |
|---|---|
| 3.1 独立性检验 | 3 课时 |
| 3.2 回归分析 | 3 课时 |

小结与复习　　1 课时
全章机动课时　　1 课时

## 四、教法与学法建议

### 3.1　独立性检验

1. 本节的重点及难点是独立性检验的思想、方法与初步应用.

2. 独立性检验的基本思想是如何选用一个标准，用它来衡量事件之间的独立性是否成立.

3. 在独立性检验中我们要特别关注方法的直观性及合理性. 至于最后选取的量及其大小的界定，我们可以只告诉学生结果，使其能够操作，这样并不会影响学生对问题实质的理解，对于其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算.

4. 统计教学通过案例进行是非常必要的. 这是因为，首先，具体的案例容易帮助学生理解问题和方法的实质，而统计方法的数学化超出了学生的理解水平；其次，高中阶段统计教学的主要目标是使学生在处理数据的过程中学习一些常用方法，运用所学知识、方法去解决简单的实际问题，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想. 而这些目标的实现需要学生亲自实践，参与解决具体的实际问题.

5. 对卡方统计量表达式的由来，只须让学生了解即可，不必作过多的阐述，作为探究性问题让学生在课下学习.

6. 统计的基本思维模式是归纳的，它的特征之一是通过部分数据来推测全体数据的性质，因此，统计推断是可能犯错误的，也就是说，我们从数据上体现的只是统计上的关系，而不是因果关系（如例 1 与例 5）.

7. 对于例题案例的处理，可由教师通过一个例题介绍独立性检验的基本思想和方法，其余的可由学生通过自主、合作学习来完成，教师作为组织者、参与者的身份来组织教学.

### 3.2　回归分析

1. 本节的重点与难点是回归分析的思想、方法与初步应用.

2. 本节是模块 3 中变量的相关性的延伸，故在教学中首先引导学生对两个变量的相关性加以复习、回顾. 因为像散点图、回归直线方程等学生已经遗忘，可通过例 1 进行.

3. 了解相关性检验的思想与步骤，因为科学函数计算器中设有回归计算的专用按键，故对回归直线方程的求解使用现代技术手段来处理.

4. 在现实生活中，相关性关系是大量存在的，而函数关系是一种理想的关系模型. 相关关系是一种更为一般的关系，除了线性相关的模型以外，还存在着大量不相关的例子，对这些类型的处理通过适当变量置换，把非线性回归方程化成线性的，然后对它们进行研究.

5. 几个案例设置的作用及处理办法：例 1 引出课题，对此可通过复习模块 3 中的有关内容加以完成；例 2 提出问题："如何知道所给数据符合线性关系呢?"提出了相关性检验的思想、方法，对此师生可共同合作完成；例 3 提出运算量的问题，因为这个问题的存在，计算器的使用成为必然，此问题完全可由学生在教师的指导下自主学习，按课本步骤合作完成；例 4 是非线性回归问题，对此教师可根据情

况，说明其解决的思想、方法，而其余的工作由学生自己完成.

# Ⅲ　拓展资源

## 一、假设检验

假设检验是统计推断的一个重要组成部分. 在统计中，我们常常把需要考察的一个命题称为假设，然后根据样本去推断假设是否成立. 这里通过例 1 介绍小概率事件与实际推断原理，其余 4 个例子讨论了一些简单的假设检验问题. 应该特别注意了解假设检验的基本思想和方法，能够初步应用于解决实际问题.

**例 1**　设鸡群中感染某种疾病的概率为 20%，并且每只鸡是否感染是相互独立的. 现任意抽取 25 只鸡，问其中最多只有一只鸡感染此病的概率是多少?

**解**：把检查每只鸡是否受感染看成一次试验，每次试验只有两个结果：受感染，未受感染. 这里就可以看成 25 次独立重复试验，根据其计算概率的公式，可得

$$P(\text{“25 只鸡未受感染”})=C_{25}^{0}(20\%)^{0}(1-20\%)^{25-0}=0.8^{25}\approx 0.003\,8,$$

$$P(\text{“只有一只鸡受感染”})=C_{25}^{1}(20\%)(1-20\%)^{25-1}=25\times 0.2\times 0.8^{24}\approx 0.023\,6.$$

根据概率的加法公式，有

$$P(\text{“25 只鸡中最多只有一只鸡受感染”})=P(\text{“25 只鸡未受感染”})+P(\text{“只有一只鸡受感染”})=0.003\,8+0.023\,6\approx 0.027.$$

例 1 要求的结果已经得到，现在作进一步的分析.

上述事件“25 只鸡中最多只有一只鸡感染”的概率很小，不到百分之三. 我们称这样的事件为小概率事件. 我们还把“小概率事件在一次试验中实际上不可能发生”称为实际推断原理，并在日常生活中经常自觉或不自觉地使用它. 例如，尽管报上偶有报道楼房坍塌的消息，但人们每天都在家中放心地睡大觉，就是因为“楼房坍塌”是一个小概率事件. 又例如，不少人喜欢买名牌商品，其中的主要原因是认为名牌商品中出现次品的概率很小，买一次一般碰不上次品.

小概率事件不是不可能事件，它是有可能发生的，只是它发生的概率很小，人们就认为它在一次试验中不会发生. 反过来，在一次试验中就能发生的事件很难让人相信是小概率事件. 去商场给电子表配电池，售货员告诉你，这种品牌的电池质量很好，有百分之九十九的把握能用上一年. 结果不到一个月表就不走了，你一定会想，难道百分之一的倒霉事一次就会遇到? 从而怀疑“99%的电池质量很好”这种说法. 这里就包含了实际推断原理和假设检验的初步思想，下面通过例子来进一步阐明它.

**例 2**　设鸡群中感染某种疾病的概率为 20%，并且每只鸡是否受感染是相互独立的. 新发现了一种

血清，可能对预防这种疾病有效，为此对 25 只健康的鸡注射了这种血清．过一段时间后发现，其中只有一只鸡感染此病，试问这种血清是否有效？

**解**：稍微想一下，可能觉得血清是有效的，毕竟有 24 只鸡未受感染，占了绝大部分．但仔细一想，鸡群中大部分鸡即使不注射血清也不至于受感染，假如所抽取的 25 只鸡正好都属于这部分鸡，岂不反映不出这种血清的效力了吗？这一问题是用下面的假设检验方法来解决的．

（1）首先作一统计假设：这种血清无效．

（2）然后在上述假设成立的条件下，用统计方法及概率方法进行推理，看看会出现什么结果．

参看例 1，我们可以得出：

$P$（“25 只鸡中最多只有 1 只鸡受感染”）$=0.027$．

（3）最后应用实际推断原理进行推断．（2）表明，“25 只鸡中最多只有 1 只鸡受感染”是小概率事件，它在一次试验中实际上不可能发生．但现在它竟然发生了，表明应该拒绝原先的假设：这种血清无效，从而认为血清对于预防该病是有效的．

需要注意的是，例 2 所问血清是否有效，是针对整个鸡群的．我们是在用一部分 25 只鸡对鸡群全体作推断，可能犯错误，犯错误的概率是 0.027．因为 $1-0.027=0.973$，所以也可以说，我们有超过 97％的把握认为血清是有效的．

**例 3**　据调查，某地市场上的假冒品牌香烟占 15％，某商家声称他商店里卖的香烟全是真货．一顾客决定在他的商店里随机挑选 20 包烟，若没有买到一包假烟，就相信商家的说法．试分析该顾客的做法是否合理？

**分析**：如何作统计假设，要看问题的具体要求是什么？或者说，我们非常希望哪一种陈述能实现．这时，通常应把这一陈述的否定作为统计假设，希望最后能推翻它，从而得到令人满意的结果．如果最后不能推翻统计假设，则可以说，“不能拒绝”原来的假设，一般就接受它了．

此外，确定统计假设有时要考虑数学上处理方便．

**解**：（1）作统计假设：商店里有假烟．

（2）在上述假设成立的条件下，计算该顾客买到全部真烟的概率．

把检查每包烟看成一次试验，每次试验只有两个结果：真烟，假烟．问题可看成顾客在做 20 次独立重复试验．于是

$$P(\text{“20 包全是真烟”})=C_{20}^{0}(15\%)^{0}(1-15\%)^{20-0}$$
$$=0.85^{20}\approx 0.039.$$

（3）顾客随机地买 20 包烟全是真烟的概率不到百分之四，是小概率事件，实际上不可能发生．现在居然小概率事件发生了，表明原先的假设“商店里有假烟”不成立，于是，因为 $1-0.039=0.961$，我们以概率 0.961 认为商店里没有假烟．

当然，如果顾客买的烟中发现有假烟，自然就认为假设成立，即商店里有假烟．

该顾客的做法是合理的．

进一步讨论例 3．在例 3 的情况下，另一顾客决定，在商店里随机购买 18 包烟进行检查，就可以做出推断：商店里有没有假烟．试分析他的做法是否合理？

**解**：类似于例 3 的解法，我们有

（1）作统计假设：商店里有假烟．

（2）把问题看成是该顾客在做 18 次独立重复试验，

$$P(\text{“18 包全是真烟”})=C_{18}^{0}(15\%)^{0}(1-15\%)^{18-0}$$
$$=0.85^{18}\approx 0.054.$$

(3) 如果他买的 18 包烟没有假烟，就是说小概率事件发生了，根据实际推断原理，应该推翻原来的假设，从而以概率 0.946（即 1－0.054）认为商店里没有假烟. 如果他买的 18 包烟里发现有假烟，那就可以立刻肯定原来的假设：商店里有假烟.

该顾客的做法是合理的.

我们进一步比较例 3 和这里的结果. 很多统计思想其实是很直观的，拿这两个例子来说，最好是把商店里的香烟全部检查，这样就能得到百分之百正确的结论，但检查完了，这些香烟就不能卖了，花费的成本实在太高，其实也无此必要.

假设检验是拿局部的情况来推断全体的情况，这就可能犯错误，同样推断商店里全部香烟是真货，但例 3 犯错误的概率为 0.039，这里犯错误的概率为 0.054，显然检查得越多，犯错误的概率就越小，若作全部检查，就不会犯错误.

实际推断原理关于小概率的值没有统一界定，因为这是一个实际问题. 通常可以把概率小于 0.05 的事件作为小概率事件，有时也把概率小于 0.01（甚至更小）的事件作为小概率事件.

举例来说，若对人类用的药作假设检验，“小概率”就应该定得严一点；而对家禽、家畜用的药作假设检验，“小概率”可以宽一点；对农药（农作物用的药）可以更宽一点. 但是，“小概率”一般不要超过 0.10.

**例 4** 某厂生产了 80 个轴承，规定：当次品率不超过 5%时可以出厂. 一采购员决定：从中随机抽取 6 个轴承进行检查，若次品超过 1 个，就拒收这批轴承；若次品数小于等于 1，就接受这批轴承. 试问采购员的决策是否合理?

**解**：我们用实际推断原理和假设检验方法来分析采购员的决策.

(1) 首先作统计假设：轴承的次品率为 5%.

(2) 在上述假设成立的条件下，这批轴承中的次品数等于

$$80\times 5\%=4.$$

于是，应用超几何分布计算概率的公式可得

$P(\text{“抽取 6 个轴承，没有次品”})=\dfrac{C_{76}^{6}}{C_{80}^{6}}\approx 0.728,$

$P(\text{“抽取 6 个轴承，有 1 个次品”})=\dfrac{C_{4}^{1}C_{76}^{5}}{C_{80}^{6}}\approx 0.246.$

因此利用对立事件计算概率的公式，得

$P$(“抽取 6 个轴承，次品超过 1 个”)$=1-P$(“抽取 6 个轴承，没有次品”)$-P$(“抽取 6 个轴承，有 1 个次品”)$=1-0.728-0.246=0.026.$

所以“抽取 6 个轴承，次品超过 1 个”是小概率事件.

(3) 采购员一次抽取 6 个轴承检查，发现次品数大于 1，这意味着小概率事件竟然在一次试验中发生了，根据实际推断原理，应该拒绝原来的假设：次品率为 5%.

那么次品率会不会小于 5%呢? 现在采购员至少发现了 2 个次品. 假定次品率为 5%，这批轴承中一共只有 4 个次品. 抽出的 6 个轴承只占 80 个轴承的一小部分，居然至少出现了次品轴承总数的一半，我们自然要怀疑次品率只可能比 5%大.

当然也可以算一下，取一个比 5%小的次品率 3.75%，于是 80 个轴承中的次品数为

$$80\times 3.75\%=3.$$

经过类似于(2)的计算（留给同学去完成），可得

$$P(\text{“抽取 6 个轴承，次品超过 1 个”})=0.014.$$

概率比 0.026 更小，表明事件“抽取 6 个轴承，次品超过 1 个”在次品率为 3.75%条件下更不可能发生. 最后可以得出结论：

这批轴承的次品率超过 5%，拒收是合理的.

若抽取 6 个轴承，经检查次品数小于等于 1，表明小概率事件没有发生. 采购员没有理由拒绝原来的假设：轴承的次品率为 5%，可以认为这批轴承的次品率为 5%，通常就应该接受它们了.

**例 5** 一台机器生产的零件长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu=5.74$ mm，$\sigma=0.08$ mm，为了检验机器是否处于正常工作状态，每隔一小时抽取一个零件，测量其长度，某天检查的头 5 个零件长度（单位：mm）如下：

5.91　5.83　5.71　5.75　5.45

利用质量控制图检验该机器是否处于正常工作状态.

**分析**：先结合本例介绍质量控制图的概念.

假设在某生产过程中，某一产品指标（长度、直径、质量等）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，均值 $\mu$ 和标准差 $\sigma$ 是预定的，它们反映了产品的质量标准. 如果 $\mu$ 和 $\sigma$ 不知道，可用样本均值和样本标准差来代替.

质量控制图的画法是：画一个直角坐标系，横轴 $x$ 表示抽取的零件序号，纵轴 $y$ 表示零件长度，画三条直线

$$y=\mu,\ y=\mu+3\sigma,\ y=\mu-3\sigma.$$

直线 $y=\mu$ 称为中心线，直线 $y=\mu+3\sigma$，$y=\mu-3\sigma$ 分别称为控制上限与控制下限，这就是质量控制图. 然后我们把检测到的数据依次用圆点标在直角坐标系上，相邻的圆点可以用线段连接起来，如图 3-1 所示，观察圆点是否落在控制范围内.

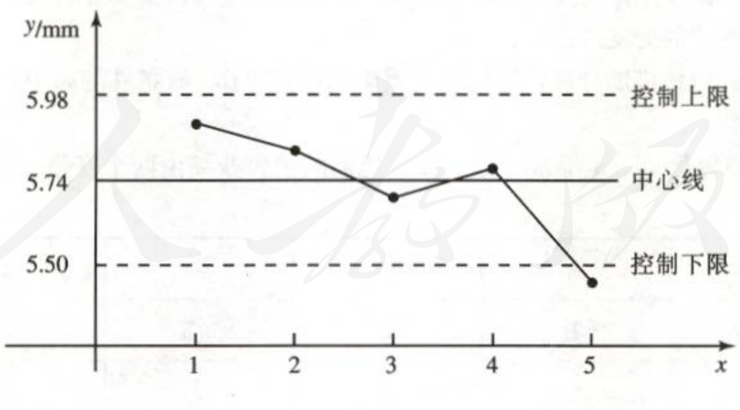



图 3-1

我们知道，在机器生产正常的情况下，生产的零件长度应服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，根据正态分布

的 $3\sigma$ 原则，零件长度的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 内取值的概率是 99.7%，或者说，零件长度的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 外取值的概率是 0.3%，0.3%（千分之三）的值很小，意味着“零件长度尺寸在 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 外取值”是小概率事件，这样就可以应用实际推断原理了.

**解**：$\mu=5.74$，$\mu+3\sigma=5.74+3\times0.08=5.98$，$\mu-3\sigma=5.74-3\times0.08=5.50$. 画好质量控制图，把已知数据标在质量控制图上，如图 3-1 所示. 前四个圆点都在控制范围内，表明机器工作正常. 第五个圆点(5，5.45)落在控制下限以下，表明小概率事件竟然发生了，根据实际推断原理，我们有理由怀疑此时机器工作状态有可能不正常. 比如，可能原料有问题，可能操作有误，可能机器出故障……此时可以停机检修和调整，以免产生大量不合格品.

假定五个圆点都落在控制下限与控制上限之间，则表明机器处于正常工作状态，可以继续生产下去.

**注**：在工厂的大批量生产过程中，常常对样本均值进行控制. 运用数学理论可以证明，当某一产品指标服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 时，如果每次抽取一个容量为 $n$ 的样本，其样本均值服从正态分布 $N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$. 此时质量控制图中控制上限是直线 $y=\mu+\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$，控制下限是直线 $y=\mu-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$，中心线不变，然后把抽取的样本顺序号作为横坐标，相应的样本均值作为纵坐标，将点标在质量控制图上（其做法与例 5 完全一样）.

## 二、聚类分析

聚类分析又称为群分析，它是研究个体（或对象）分类问题的一种统计方法. 所谓类，粗浅地讲，是指相似个体的集合，同一类中个体之间的相似性要比与其他类的个体的相似性大，而不同类之间具有较明显的差别.

在古老的分类学中，人们主要依靠经验和专业知识实现分类，很少用到数学. 随着生产技术和科学的发展，分类越来越细，常常光凭经验和专业知识很难进行分类，于是分类学引进了统计知识，形成了数值分类学. 近年来，随着计算机技术和多元分析方法的迅速发展，聚类分析又从数值分类学中逐渐分离出来形成一个相对独立的分支.

在作聚类分析时，应该借助计算器进行较为繁重的计算工作. 有条件的高中，应该使用计算机这一现代技术手段来处理数据.

**例 1** 设有 5 个销售员 $\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$，$\omega_4$，$\omega_5$，他们的销售业绩由两个变量 $x$，$y$ 描述，具体数据如下表所示：

| 销 售 员 | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 销售量 $x$/百件 | 1 | 2 | 3.5 | 7 | 9 |
| 回收款项 $y$/万元 | 5 | 4 | 2 | 3 | 3 |

现在只考虑一个指标销售量（单位：百件），试对该 5 个个体进行分类.

**分析**：为了便于理解聚类分析的思想方法和计算步骤，我们编选了这个很简单的案例：样本只有 5 个个体，只考虑一个变量 $x$，具体的数据也相对简单，题意是要对 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3.5$，$x_4=7$，

$x_5=9$进行分类.

同学们可能会想：这有何难？即使考虑两个变量，只要画出5个销售员的散点图（参看后面的图3-7），就可以观察这5个点的接近情况，再作分类，不是既直观又方便吗？

但如果实际问题涉及的变量较多，有三四个，或更多，那么画散点图的办法就行不通了. 所以我们必须考虑一个变量的最简单情况，从数学上找到一种切实可行的聚类方法，然后向两个变量的情况推广，同时找到一条可以向更多变量以及更多个体情况推广的思路.

首先要考虑的问题是，对这5个样本数据，如何来度量它们之间的相似程度. 我们知道，如果把这5个数标在数轴上，就得到了5个点. 这样问题便转化为设法度量5个点之间的接近程度，最自然的方法是考虑它们之间的距离.

例如设$x_1$和$x_2$的距离为$d_{12}$，则

$$d_{12}=|x_1-x_2|=|1-2|=1,$$

意思是销售员$\omega_1$和$\omega_2$的销售量的差别是1百件. 而$d_{15}=|x_1-x_5|=|1-9|=8$，意思是$\omega_1$和$\omega_5$的销售量的差别是8百件. 显然，比较起来，就销售量而言，$\omega_1$和$\omega_2$比$\omega_1$和$\omega_5$要“相似”得多.

还有别的度量5个点接近程度的方法，这里就不涉及了.

其次，在分类过程中，一定会遇到处理类与类之间的距离问题，这里介绍两种度量类与类之间接近程度的方法：最短距离法、最长距离法，别的方法就不涉及了.

图3-2中，$G_1$，$G_2$表示两个类，1，2，3，4，5表示个体，从图上可以直观地看出，2与4的距离$d_{24}$最短. 最短距离法就是把属于不同类的最近的两个个体的距离作为这两个类的距离，于是类$G_1$与类$G_2$的距离就是$d_{24}$.

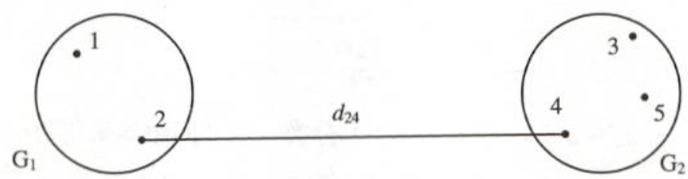



图 3-2

图3-3中，$G_1$，$G_2$，1，2，3，4，5意义同上，1与5的距离$d_{15}$最长. 最长距离法就是把属于不同类的最远的两个个体的距离作为这两个类的距离，于是，类$G_1$与类$G_2$的距离就是$d_{15}$.

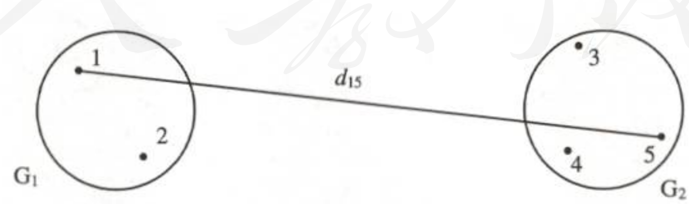
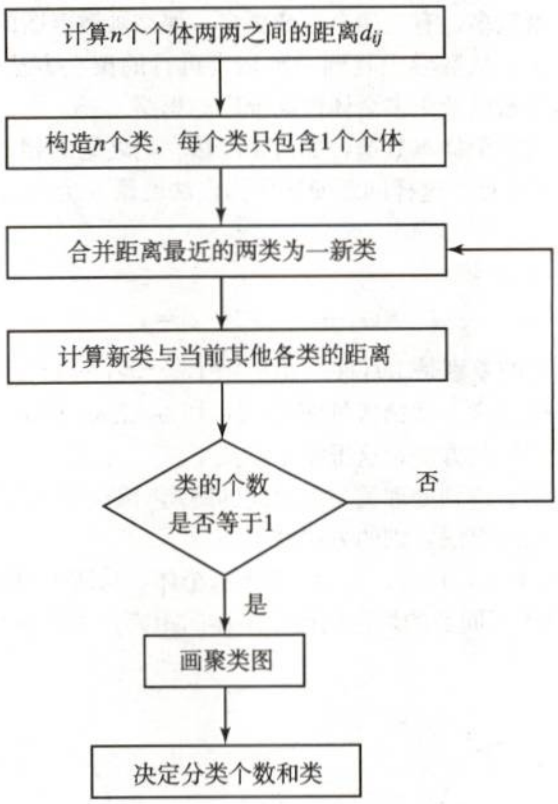



图 3-3

搞清楚了如何度量个体与个体、类与类之间的接近程度，整个聚类分析的过程可用下面的框图来表示.




（1）用最短距离法.

**解**：对 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3.5$，$x_4=7$，$x_5=9$ 分类，个体间距离采用数据之差的绝对值，首先把它们分成5类，即 $G_1=\{x_1\}$，$G_2=\{x_2\}$，$G_3=\{x_3\}$，$G_4=\{x_4\}$，$G_5=\{x_5\}$，两两之间距离 $d_{ij}$ 用表1表示.

**表1**

| | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_1=\{x_1\}$ | 0 | | | | |
| $G_2=\{x_2\}$ | 1 | 0 | | | |
| $G_3=\{x_3\}$ | 2.5 | 1.5 | 0 | | |
| $G_4=\{x_4\}$ | 6 | 5 | 3.5 | 0 | |
| $G_5=\{x_5\}$ | 8 | 7 | 5.5 | 2 | 0 |

在表1中，除对角线上的数0外，最小数是1，即

$$d_{12}=1,$$

表示个体 $x_1$ 和 $x_2$ 距离最短，所以把 $G_1$ 和 $G_2$ 并成一个新类 $G_6$，$G_6=\{x_1, x_2\}$.

按照分析中的框图，用最短距离法计算新类 $G_6$ 与此时其他类的距离，实际上是在表 1 中第 1，2 列的后三个数字中取数小的一列，即第 2 列，可得到表 2.

**表 2**

| | $G_6$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $G_6=\{x_1, x_2\}$ | 0 | | | |
| $G_3=\{x_3\}$ | 1.5 | 0 | | |
| $G_4=\{x_4\}$ | 5 | 3.5 | 0 | |
| $G_5=\{x_5\}$ | 7 | 5.5 | 2 | 0 |

按框图，现在类的个数是 4，由表 2 可见，$d_{36}=1.5$ 表示 $G_3$ 和 $G_6$ 距离最短，所以把它们并成新类 $G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$，用最短距离法计算新类 $G_7$ 与 $G_4$，$G_5$ 的距离，实际上就是在表 1 中第 1，2，3 列的后两个数字中取数小的一列，即第 3 列，于是可得当前 3 类之间的距离如表 3 所示.

**表 3**

| | $G_7$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|
| $G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$ | 0 | | |
| $G_4=\{x_4\}$ | 3.5 | 0 | |
| $G_5=\{x_5\}$ | 5.5 | 2 | 0 |

由表 3 可见，$d_{45}=2$ 表示这 3 类中，$G_4$ 和 $G_5$ 距离最短，所以把它们并成新集 $G_8=\{x_4, x_5\}$，按最短距离法算出 $G_7$ 与 $G_8$ 的距离 $d_{78}=3.5$，这 3.5 实际上是 $G_7$ 中的 $x_3$ 与 $G_8$ 中的 $x_4$ 的距离，由表 1 容易看出，$G_7$ 中别的个体与 $G_8$ 中别的个体的距离都比 3.5 长. 于是得到表示 $G_7$ 和 $G_8$ 距离的表 4.

**表 4**

| | $G_7$ | $G_8$ |
|---|---|---|
| $G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$ | 0 | |
| $G_8=\{x_4, x_5\}$ | 3.5 | 0 |

现在只剩下两类，只需把它们并成新类 $G_9$ 即可，然后照框图，可以画出聚类图如图 3-4 所示，图下方的标尺标明了并类的距离.

框图中最后一个框：决定分类个数和类通常是根据具体问题由图 3-4 确定，从图上看，分两类比较合适，即 $G_7$ 与 $G_8$ 两类，它们之间的差别较大，这相当于在标尺的 3 处切一刀，回到例 1 的实际问题，就是把 $\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$ 分成一类，这类的销售员销售量较低；把 $\omega_4$，$\omega_5$ 分成一类，这类的销售员销售量较高.

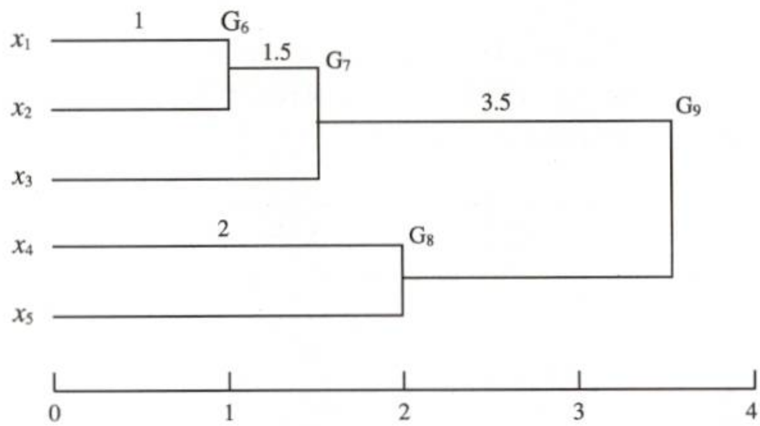



图 3-4

如果想分成三类，可在标尺 1.8 处切一刀，则得到 $G_7$，$G_4$，$G_5$ 三类．意味着把销售员 $\omega_4$，$\omega_5$ 再分成两类，因为 $\omega_4$ 与 $\omega_5$ 的销售量相差 2 百件，这样分也说得过去．

(2) 用最长距离法．

(2)与(1)的差别仅是计算新类与当前其他各类距离的方法不同，用的是不同类个体间的相距最远的距离，而并类步聚完全一样．所以对于表 1～4，相应地有表 5～8，反映出了用最长距离法的整个并类过程．

**表 5**

| | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_1=\{x_1\}$ | 0 | | | | |
| $G_2=\{x_2\}$ | 1 | 0 | | | |
| $G_3=\{x_3\}$ | 2.5 | 1.5 | 0 | | |
| $G_4=\{x_4\}$ | 6 | 5 | 3.5 | 0 | |
| $G_5=\{x_5\}$ | 8 | 7 | 5.5 | 2 | 0 |

**表 6**

| | $G_6$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $G_6=\{x_1, x_2\}$ | 0 | | | |
| $G_3=\{x_3\}$ | 2.5 | 0 | | |
| $G_4=\{x_4\}$ | 6 | 3.5 | 0 | |
| $G_5=\{x_5\}$ | 8 | 5.5 | 2 | 0 |

**表 7**

| | $G_6$ | $G_7$ | $G_3$ |
|---|---|---|---|
| $G_6=\{x_1, x_2\}$ | 0 | | |
| $G_7=\{x_4, x_5\}$ | 8 | 0 | |
| $G_3=\{x_3\}$ | 2.5 | 5.5 | 0 |

**表 8**

| | $G_7$ | $G_8$ |
|---|---|---|
| $G_7=\{x_4, x_5\}$ | 0 | |
| $G_8=\{x_1, x_2, x_3\}$ | 8 | 0 |

最后把 $G_7$，$G_8$ 并成类 $G_9$，分类过程结束，画出聚类图如图 3-5 所示.

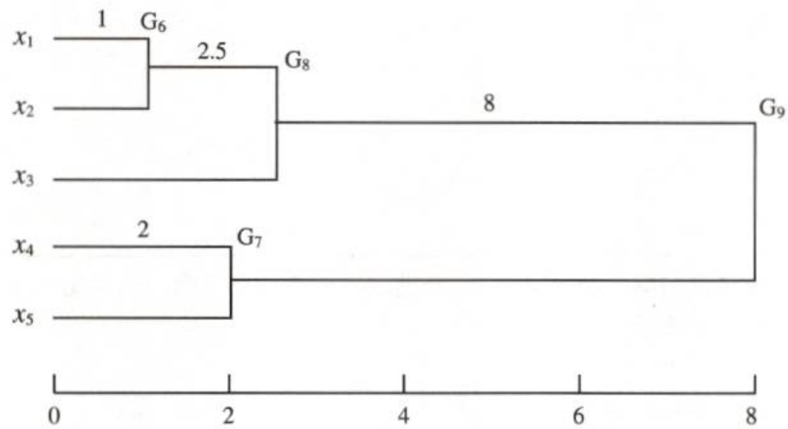



图 3-5

图 3-5 与图 3-4 这两个聚类图很相像，但并类的距离不一样. 从图 3-5 看，如分两类，可在标尺的 6 处切一刀，得到 $G_7$ 与 $G_8$ 两类，它们之间的差别较大，结果和用最短距离法一样.

但我们要注意分三类的情况，这时可在标尺的 2.2 处切一刀，得到 $G_6$，$G_3$，$G_7$ 三类，意味着把销售员 $\omega_1$，$\omega_2$ 分一类，$\omega_3$ 分一类，$\omega_4$，$\omega_5$ 分一类，可以解释为按照销售量的小、中、大对销售员分类，似乎也说得过去.

分析中提到过，度量点与点、类与类之间的接近程度，还有别的方法，这些方法同学们可以通过查阅资料得到. 聚类分析是一种探索性的分析，由于可以采用多种不同方法度量接近程度，得到的结果一般说来是不会完全一致的. 这时特别需要结合实际问题的背景，或者运用相关的专业知识，来作出决定：分几类，每一类包含哪些个体，实际上很多问题往往也都是用各种方法进行尝试，然后比较各种结果来决定取舍.

**例 2** （继续讨论例 1）设 5 个销售员 $\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$，$\omega_4$，$\omega_5$ 的销售业绩数据同例 1，现在考虑两个指标：销售量 $x$，回收款项 $y$. 试用最短距离法对该 5 个销售员进行分类.

**解**：把销售量作为横坐标，回收款项作为纵坐标，就可以把 $\omega_1$，…，$\omega_5$ 当成 5 个点标在平面直角坐标系上，自然可以用平面上两点之间的距离来度量它们的接近程度. 例如，设 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的距离为 $d_{12}$，有

$$d_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(2-1)^2+(4-5)^2}\approx 1.414;$$

设 $\omega_4$ 和 $\omega_5$ 的距离为 $d_{45}$，有

$$d_{45}=\sqrt{(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2}$$
$$=\sqrt{(9-7)^2+(3-3)^2}=2;$$

等. 类似例 1，先分 5 类，即

$$G_1=\{\omega_1\},\ G_2=\{\omega_2\},\ G_3=\{\omega_3\},\ G_4=\{\omega_4\},\ G_5=\{\omega_5\}.$$

各类之间的距离 $d_{ij}$ 可用表 9 表示.

**表 9**

| | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_1=\{\omega_1\}$ | 0 | | | | |
| $G_2=\{\omega_2\}$ | 1.414 | 0 | | | |
| $G_3=\{\omega_3\}$ | 3.905 | 2.5 | 0 | | |
| $G_4=\{\omega_4\}$ | 6.325 | 5.099 | 3.640 | 0 | |
| $G_5=\{\omega_5\}$ | 8.246 | 7.071 | 5.590 | 2 | 0 |

以下的并类方法及步聚与例 1 的解（1）完全类似，就是数据不同，这里略去不写，留作同学练习. 最后得到的聚类图如图 3-6 所示.

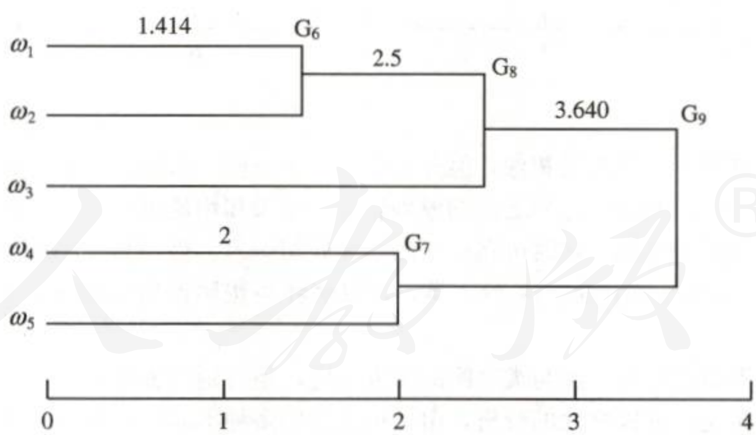


图 3-6

图 3-6 类似于图 3-5，如在标尺 3 处切一刀，就分成两类，这两类的差别较大，即 $\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$ 分成一类，$\omega_4$，$\omega_5$ 分成另一类. 在散点图上的示意图如图 3-7 所示. 这样的结果可以解释为：综合两个指标的情况，$G_8$ 中销售员的销售业绩差一些，$G_7$ 中销售员的销售业绩好一些.

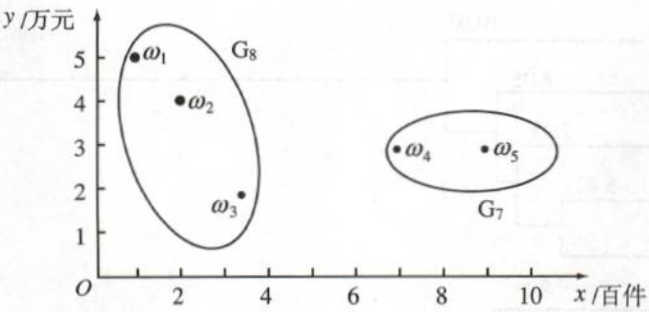



图 3-7

从散点图上看，例 2 的 5 个个体分成三类也比较合适，即 $G_6$，$G_3$，$G_7$，相当于在聚类图 3-6 的标尺 2.1 处切一刀. 这时销售员 $\omega_1$，$\omega_2$ 为一类（回收款项较多），$\omega_3$ 为另一类（销售量居中，回收款项较少），$\omega_4$，$\omega_5$ 为第三类（销售量较多）.

**例 3** 下面是 10 个国家关于人口吸烟情况的统计数据，其中第一行是国名，第二行是男性烟民占男性人口的百分数，第三行是女性烟民占女性人口的百分数：

| 韩国 | 拉脱维亚 | 土耳其 | 中国 | 日本 | 美国 | 巴基斯坦 | 芬兰 | 巴林 | 瑞典 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 68.2 | 67.0 | 63.0 | 61.0 | 59.0 | 28.1 | 27.4 | 27.0 | 24.0 | 20.0 |
| 6.3 | 12.0 | 24.0 | 7.0 | 14.8 | 23.5 | 4.4 | 19.0 | 6.0 | 24.0 |

试根据这些数据用最短距离法对上述 10 国作聚类分析.

**解**：把男性烟民百分数作为横坐标，女性烟民百分数作为纵坐标，就可以把 10 个国家当成 10 个点标在平面直角坐标系上，采用两点之间的距离度量这 10 个点的接近程度，以下的聚类分析步骤与例 2 是完全一样的. 但现在有 10 个个体，同学们可用一张大点的纸把这些距离用表格的形式表示出来，然后进行并类.

有条件的高中应当鼓励同学使用计算机来处理数据，附录中给出了一个程序可以供同学参考，此外，国内已相当流行的 SAS 和 SPSS，都能解决聚类分析的问题，如学校有这种软件包，也应鼓励同学在教师的指导下使用.

用最短距离法进行并类所得到的聚类图如图 3-8 所示. 从聚类图上看，分成两类很合适，可在标尺 20 处切一刀，就得到类（1）：土耳其，日本，中国，拉脱维亚，韩国；类（2）：瑞典，芬兰，美国，巴林，巴基斯坦.

若在标尺 9 处切一刀，可以分成四类，即类 1°：土耳其；类 2°：日本，中国，拉脱维亚，韩国；类 3°：瑞典，芬兰，美国；类 4°：巴林，巴基斯坦.

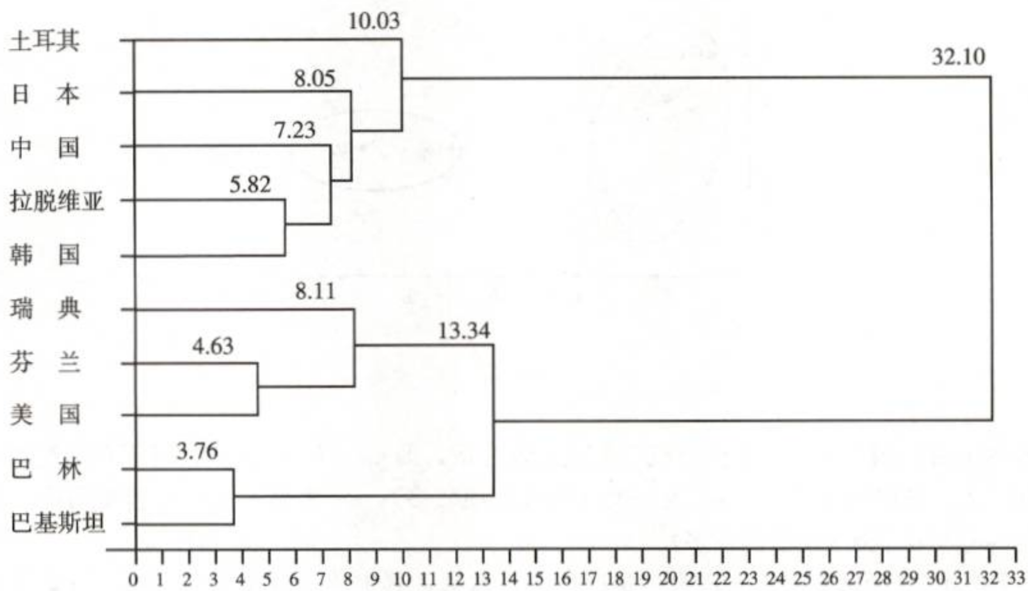



图 3-8

在散点图 3-9 上分别用虚线和实线画出这两种分类情况，不难看出，分两类实际上对应着男性烟民百分数大小；分四类可以解释为在上述两类基础上，又根据女性烟民百分数大小各分成两类. 从图上可以很直观地看出，各类中的国家“距离”相对接近，而类之间的国家“距离”相对较远，就吸烟情况而言，把这 10 个国家如此聚类应该说是很合适的.

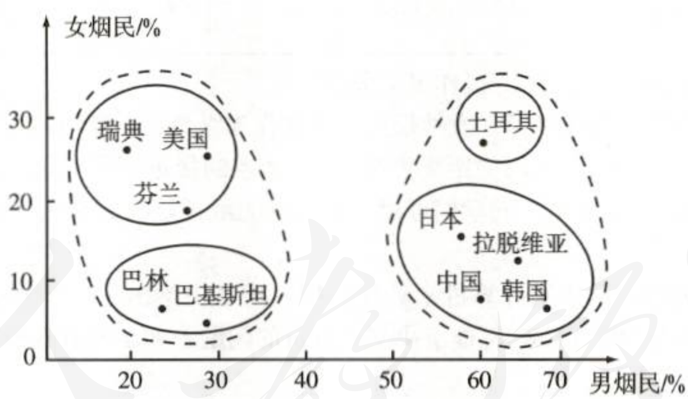



图 3-9

## 三、名人名言

“人人即是创造之才，时时即是创造之机，处处即是创造之地.”（叶圣陶）

“思维是从动作开始的，切断了动作和思维之间的联系，思维就不能得到发展.”（皮亚杰）

“没有丝毫兴趣的强制学习，将会扼杀学生探求真理的欲望.”（乌申斯基）

“最重要的是会提出来问题，否则，将来就做不了第一流的工作.”（李政道）

“学习最好的刺激乃是对所学教材的兴趣.”（布鲁纳）

“请记住，成功的乐趣是一种内在情绪力量，它可以促进时时学习的愿望，请你记住，无论如何不要使这种内在的力量消失，缺乏这种力量，教育上的任何巧妙措施都是无济于事的.”（苏霍姆林斯基）

## 四、卡方检验

卡方检验是用途很广的一种假设检验方法，它在分类资料统计推断中的应用包括：两个率或两个构成比比较的卡方检验；多个率或多个构成比比较的卡方检验以及分类资料的相关分析等.

### （一）卡方检验的基本思想

在分类资料统计分析中我们常会遇到这样的资料，如两组大白鼠在不同致癌剂作用下的发癌率如下表，问两组发癌率有无差别？

| 处理 | 发癌数 | 未发癌数 | 合计 | 发癌率/% |
|---|---|---|---|---|
| 甲组 | 52 | 19 | 71 | 73.24 |
| 乙组 | 39 | 3 | 42 | 92.86 |
| 合计 | 91 | 22 | 113 | 80.33 |

52，19，39，3 是表中最基本的四个数据，因此上表资料又被称为四格表资料. 卡方检验的统计量是卡方值，它是每个格子实际频数 $A$ 与理论频数 $T$ 差值平方与理论频数之比的累计和. 每个格子中的理论频数 $T$ 是在假定两组的发癌率相等（均等于两组合计的发癌率）的情况下计算出来的，如第一行第一列的理论频数为 $71\times91/113=57.18$，故卡方值越大，说明实际频数与理论频数的差别越明显，两组发癌率不同的可能性越大.

### （二）四格表资料的卡方检验

四格表资料的卡方检验用于进行两个率或两个构成比的比较.

1. 专用公式

若四格表资料中四个格子的频数分别为 $a$，$b$，$c$，$d$，则四格表资料卡方检验的卡方值$=n(ad-bc)^2/(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)$，自由度 $v=$(行数$-1$)$\times$(列数$-1$).

2. 应用条件

要求样本含量应大于 40 且每个格子中的理论频数不应小于 5. 当样本含量大于 40，但理论频数又小于 5 的情况时，卡方值需要校正，当样本含量小于 40 时只能用确切概率法计算概率.

### （三）行 *X* 列表资料的卡方检验

行 $X$ 列表资料的卡方检验用于多个率或多个构成比的比较.

1. 专用公式

$r$ 行 $c$ 列表资料卡方检验的卡方值 $=n[(A_{11}/n_1n_1+A_{12}/n_1n_2+\cdots+A_{rc}/n_rn_c)-1]$.

2. 应用条件

要求每个格子中的理论频数 $T$ 均大于 5 或 $1<T<5$ 的格子数不超过总格子数的 1/5. 当有 $T<1$ 或 $1<T<5$ 的格子较多时，可采用并行并列、删行删列、增大样本含量的办法使其符合行 $X$ 列表资料卡方检验的应用条件. 而多个率的两两比较可采用行 $X$ 列表分割的办法.

### （四）列联表资料的卡方检验

同一组对象，观察每一个个体对两种分类方法的表现，结果构成双向交叉排列的统计表就是列联表.

1. $R\times C$ 列联表的卡方检验

$R\times C$ 列联表的卡方检验用于 $R\times C$ 列联表的相关分析，卡方值的计算和检验过程与行 $X$ 列表资料的卡方检验相同.

2. $2\times2$ 列联表的卡方检验

$2\times2$ 列联表的卡方检验又称配对记数资料或配对四格表资料的卡方检验. 根据卡方值计算公式的不同，可以达到不同的目的. 当用一般四格表的卡方检验计算时，卡方值 $=n(ad-bc)^2/(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)$，此时用于进行配对四格表的相关分析，如考察两种检验方法的结果有无关系；当卡方值 $=(|b-c|-1)^2/(b+c)$ 时，此时卡方检验用来进行四格表的差异检验，如考察两种检验方法的检出率有无差别.

列联表卡方检验应用中的注意事项同 $R\times C$ 表的卡方检验相同.

（本文选自 6$\sigma$ 品质网，有改动）

## 五、互联网使用与青少年的学习活动

互联网使用是否会影响青少年的学习活动？本研究考察了用户与非用户在学习成绩、学习压力、做作业时间长短、上特长班或家教时间长短等方面的差异，以分析互联网使用对学习活动的影响. 主要结果如下：

1. 互联网使用与学习成绩

图 3-10 显示了互联网使用与学习成绩的关系. 卡方分析说明，用户与非用户在学习成绩上没有显著差异（Sig. =.099），也就是说，是否使用互联网与学习成绩没有显著相关.

2. 互联网使用与学习压力

图 3-11 显示了互联网使用与学习压力的关系. 卡方分析说明，用户与非用户在学习压力方面有显著差异（Sig. =.002），如表 3.11 所示，用户比非用户有更大的学习压力.

3. 互联网使用与青少年是否担任社会工作

在学校里，青少年用户与非用户担任学生干部的比例大致相等. 卡方检验没有显著差异(Sig. =.615). 其频数分布请见下页表：

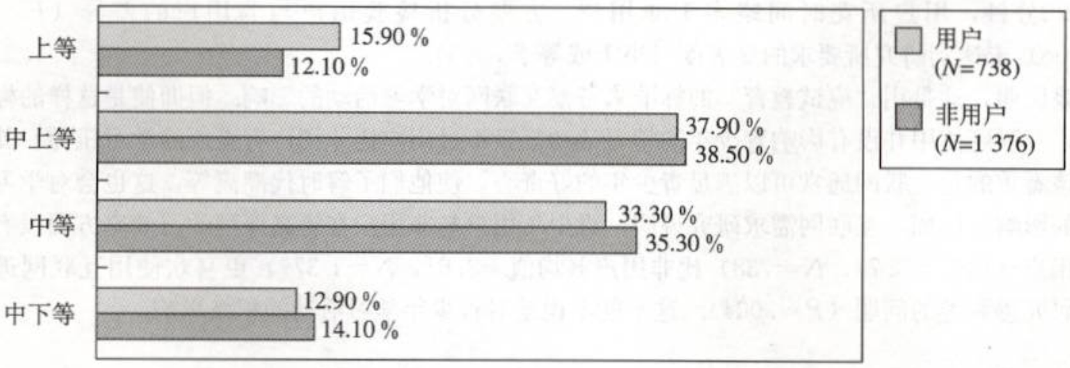



图 3-10

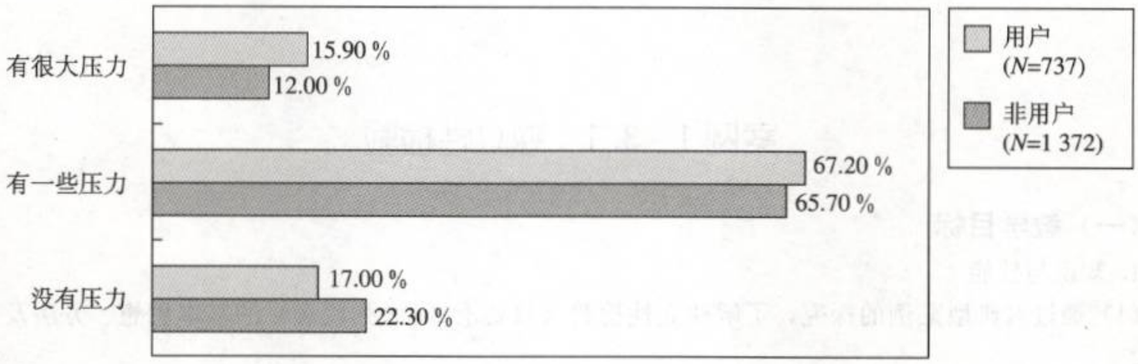



图 3-11

**互联网使用与青少年是否担任学生干部**

| | 不是干部 | 课代表（小组长或小队长） | 班一级干部（包括中队长等） | 年级或校一级干部（包括大队长或学生会干部等） | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 用户 | 45.9% | 29.9% | 19.7% | 4.5% | 735 |
| 非用户 | 48.5% | 29.45% | 18.1% | 3.9% | 1 374 |

4. 互联网使用与做作业时间

统计说明，青少年用户平均每天做作业 87.198 0 分钟（$N=742$），非用户每天平均做 99.443 4 分钟（$N=1$ 384）．方差分析检验用户与非用户在做作业时间多少上没有显著差异（$F=4.532$，Sig=.034）．

5. 互联网使用与上特长班或家教

统计还说明，青少年用户每周花在特长班或家教的时间平均为 247.523 2 分钟，非用户为

178.703 0分钟，用户所花时间略多于非用户．方差分析检验用户与非用户的差异（$F=7.630$，Sig=.006）未达到研究所要求的显著度（小于或等于.005）．

应该说明，这是用“应试教育”的标准来考察互联网对学习活动的影响．但即使是这样的标准，我们看到，互联网使用并没有影响青少年的学习活动，只不过用户比非用户有更大的学习压力．其实，我们更应该看重的是互联网通常可以满足青少年的好奇心，使他们了解时代潮流等，这也会对学习活动产生积极的影响．比如，互联网需求研究说明，青少年用户与非用户在提高课程学习效率方面没有显著差异，但用户（均值=3.77，$N=738$）比非用户（均值=3.61，$N=1\ 377$）更喜欢使用互联网进行课外学习或研究感兴趣的问题（$P=.004$）．这不能不说是对青少年学习活动的积极影响．

# Ⅳ　教学案例

## 案例1　3.1　独立性检验

### （一）教学目标

1．知识与技能

（1）通过对典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 $2\times2$ 列联表）的基本思想、方法及初步应用．

（2）通过本节知识的学习，进一步提高学生对统计的认识，提高学生对教材知识的了解，并能解决实际问题．

2．过程与方法

（1）通过探索、研究、归纳等形式，掌握知识之间的联系。

（2）进行辩证唯物主义思想教育，数学应用意识的教育，提高学习数学的积极性．

3．情感、态度与价值

（1）结合教学内容培养学生学习数学的兴趣，激励学生勇于创新．

（2）通过对 $2\times2$ 列联表的探索，体验认识事物的规律，体会解决问题后成功的喜悦．

### （二）教学重点与难点

重点：独立性检验的思想和方法．

难点：独立性检验的初步应用．

### （三）教学方法

从学生的认知规律出发，让学生自主学习，运用讲授法、讨论法等充分调动学生的积极性，通过教师的组织，让学生对独立性检验的思想与方法加以了解．

## （四）教学过程

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
| --- | --- | --- | --- |
| 情感激励 | 教师提供名人名言，哲理性文字或数学名人名句，数学史中的典型问题. | | “亲其师，信其道”，通过这一环节，一方面让学生了解数学知识及做人的道理，另一方面缩短师生间距离. |
| 课题引入 | 由章节图的画面，探索男性和女性对晕机情况的分析. | 学生积极回答教师提出的问题，教师总结. | 好的开始是成功的一半，通过章节图引起学生对本章（节）内容的兴趣，为下面的教学作好铺垫. |
| 新课讲解 | 由前面的问题（或用课本上的例1）引出 $2\times2$ 列联表，介绍卡方统计量，得出公式 $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$. 由例题的基本步骤掌握独立性检验的基本过程：1. 计算 $\chi^2$；2. 作判断. 由 $\chi^2$ 与两个临界值作比较，若比临界值大，则拒绝 $H_0$. 为了提高检验效果，$2\times2$ 列联表中的数据要大于5. | 特殊案例可由学生通过教师的设计得出，教师最后归纳出一般性的结论. 分组讨论交流，教师巡视，由学生发言、互相补充，教师总结. | 玻利亚曾指出：“学习任何东西最好的途径是自己去发现”. 为了有效地学习，应该在教师所创设的问题情境下尽可能的让学生自己去发现，去学习知识. |
| 例题讲解 | 解决课本上的例2，3，4（或例1），5. 在教学中始终注意统计思想的应用，例题中始终给出的只是部分数据，但其反映的问题不只是这些. | 教师带领学生共同审题，分析题目，理清解题思路，其余由学生自己独立完成. | 从实际问题中提炼出一般性的规律，再用此规律去解决具体的问题. |

续表

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
| --- | --- | --- | --- |
| 归纳总结 | 1. 独立性检验的思想方法.<br>2. 独立性检验的应用. | 学生回答，教师总结. | 学生对本节知识有一个清晰的认识，从宏观上把握所学内容. |
| 布置作业 | 1. 认真阅读本节教材所有内容.<br>2. 必做题：教材第 81 页，习题 3-1A 所有题.<br>3. 选作题：教材第 82 页，习题 3-1B. | | 通过作业，发现学生掌握新知识的程度；培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高学生综合运用数学知识的能力. |

# 案例 2　3.2　回归分析

## （一）教学目标

1. 知识与技能

(1) 能通过收集现实问题中两个有关联的变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系.

(2) 能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.

(3) 能通过相关性检验，了解回归分析的基本思想与方法.

(4) 了解非线性回归问题，并能找出解决问题的一般思路.

2. 过程与方法

(1) 通过复习线性回归方程，探究相关性检验的基本思想.

(2) 通过本节的学习，培养学生类比、迁移、化归的能力，解决问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

培养学生积极参与、大胆探索的精神.

## （二）教学重点与难点

重点：回归分析的思想与方法.

难点：回归分析的初步应用.

## （三）教学方法

以学生为主体，形成完整的知识结构，教师讲解为辅，师生共同将知识深入探究，为增强直观性，增大课容量，采用多媒体辅助教学，注重计算器的使用.

## （四）教学过程

| 教学环节 | 教学内容 | 师生互动 | 设计意图 |
| --- | --- | --- | --- |
| 复习提问 | 通过例 1 完成这些内容：<br>1. 散点图；<br>2. 最小二乘法；<br>3. 回归直线方程. | 教师提出问题，学生积极思考，回答问题. | 此内容的设计为下面相关性检验的步骤作好铺垫. |
| 提出问题 | 通过例 2 散点图寻求线性相关关系，由一组数据对能否求出回归直线方程？如果能求出，此方程是否反映此组数据对的变化规律呢？提出相关性检验. | 学生分析研究，讨论交流.<br>教师引导，得出结论. | 维果斯基的“最近发展区”理论指出：认知的发展真实水平与认知发展的潜在水平之间存在差异.<br>通过前面的复习与现在提出的问题可引发学生的积极思维，主动提取原认知结构. |
| 概念形成 | 1. 检验统计量.<br>2. 相关系数 $r$ 的性质.<br>3. 检验的步骤.<br>4. 借助例 2 掌握检验的步骤. | 学生独立思考并练习，教师巡视，最后教师总结. | 学生从自己知识方法等方面进行学习，提高学生的应用能力. |
| 应用举例 | 1. 通过例 3，了解计算器的使用.<br>2. 通过例 4，了解非线性回归问题及其处理方法. | 教师点拨，学生自行解决，并对例题的方法进行思考. | 让学生构建自己的解题思维模块，而且解后反思可促使学生对例题的掌握，起到举一反三的效果. |
| 归纳总结 | 1. 回归分析的思想方法.<br>2. 回归分析的应用. | 学生回答，教师对学生的回答进行评价. | 引导学生对所学数学知识、思想方法进行小结. |
| 布置作业 | 1. 必做题：教材第 93 页，习题3-2A.<br>2. 选做题：教材第 94 页，习题3-2B. | | 通过作业，发现学生掌握新知识的程度.<br>培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高学生综合运用数学知识的能力. |

# V　习题参考答案与提示

## 习题 3-1A（第 81 页）

1. 由公式 $\chi^2=\dfrac{1\,000\times(252\times276-248\times224)^2}{500\times500\times476\times524}=3.14$，

   因为 $3.14<3.841$，所以认为血清试验与否和预防感冒无关.

2. 由公式 $\chi^2=\dfrac{460\times(26\times200-184\times50)^2}{210\times250\times76\times384}=4.8$，

   因为 $4.8>3.841$，所以有 95%的把握说小麦种子灭菌与否跟发生黑穗病有关.

3. 由公式 $\chi^2=\dfrac{72\times(28\times20-16\times8)^2}{36\times36\times44\times28}=8.42$，

   因为 $8.42>6.635$，所以有 99%的把握说大学生的性别与是否看营养说明有关.

4. 由公式 $\chi^2=\dfrac{300\times(132\times36-114\times18)^2}{150\times150\times246\times54}=7.32$，

   因为 $7.32>6.635$，所以有 99%的把握说新措施对防治猪白痢有关.

## 习题 3-2A（第 93 页）

1. (1) 散点图略.

   (2)

| 序号 | $x$ | $Y$ | $x^2$ | $y^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.4 | 12 | 1.96 | 144 | 16.8 |
| 2 | 1.6 | 10 | 2.56 | 100 | 16 |
| 3 | 1.8 | 7 | 3.24 | 49 | 12.6 |
| 4 | 2 | 5 | 4 | 25 | 10 |
| 5 | 2.2 | 3 | 4.84 | 9 | 6.6 |
| $\Sigma$ | 9 | 37 | 16.6 | 327 | 62 |

于是 $\bar{x}=\dfrac{1}{5}\times9=1.8$，$\bar{y}=\dfrac{1}{5}\times37=7.4$，得

$$\hat{b}=\frac{62-5\times1.8\times7.4}{16.6-5\times1.8^2}=-11.5,$$

$$\hat{a}=7.4+11.5\times1.8=28.1.$$

$Y$ 对 $x$ 的回归直线方程为

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=28.1-11.5x.$$

图象略.

(3) 当 $x=1.9$ 时，

$$\hat{y}=28.1-11.5\times1.9=6.25.$$

2. (1) 散点图略.

(2) 作相关性检验:

①作统计假设: $x$ 与 $Y$ 不具有线性相关关系;

②由小概率 0.05 与 $n-2=4$ 在附表中查得

$r_{0.05}=0.811$;

③使用计算器进行计算:

按键

MODE　3　1　(进入线性回归计算状态)

SHIFT　CLR　1　=　(将计算器存储器设置成初始状态)

5　,　7.25　DT　10　,　8.12　DT　15　,　8.95　DT　20　,　9.90　DT

25　,　10.96　DT　30　,　11.80　DT

继续按下表按键

| 按键 | 显示结果 |
| --- | --- |
| SHIFT　S-VAR　▶　▶　3　= | 0.999 308 638 |
| SHIFT　S-VAR　▶　▶　1　= | 6.274 666 667 |
| SHIFT　S-VAR　▶　▶　2　= | 0.184 114 285 |

④ $|r|=0.999>0.811$,

即　$|r|>r_{0.05}$,

从而有 95% 的把握认为 $x$ 与 $Y$ 之间具有线性相关关系, 求 $Y$ 对 $x$ 的回归直线方程有意义.

(3) 由上表立即可得

$$\hat{y}=6.27+0.18x,$$

这就是题目要求的 $Y$ 对 $x$ 的回归直线方程.

(4) 当 $x=27$ 时,

$$\hat{y}=6.27+0.18\times27=11.13.$$

3. (1) 作相关性检验:

①作统计假设: $x$ 与 $Y$ 不具有线性相关关系;

②由小概率 0.05 与 $n-2=5$ 在附表中查得

$r_{0.05}=0.754$;

③使用计算器进行计算:

按键

MODE  3  1  （进入线性回归计算状态）

SHIFT  CLR  1  =  （将计算器存储器设置成初始状态）

15 , 330 DT 20 , 345 DT 25 , 365 DT 30 , 405 DT

35 , 445 DT 40 , 450 DT 45 , 455 DT

继续按下表按键

| 按键 | | | | | | 显示结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SHIFT | S-VAR | ▶ | ▶ | 3 | = | 0.971 864 996 |
| SHIFT | S-VAR | ▶ | ▶ | 1 | = | 256.785 714 3 |
| SHIFT | S-VAR | ▶ | ▶ | 2 | = | 4.75 |

④ $|r|=0.97>0.754$，

即　$|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 $x$ 与 $Y$ 之间具有线性相关关系，求 $Y$ 对 $x$ 的回归直线方程有意义.

由上表立即可得

$$\hat{y}=256.79+4.75x,$$

这就是题目要求的 $Y$ 对 $x$ 的回归直线方程.

当 $x=32$ 时，

$$\hat{y}=256.79+4.75\times32=408.79.$$

4. 首先作变量置换 $u=\dfrac{1}{x}$，题目所给数据变成如下表所示的 10 对数据

| $u_i$ | 1 | 0.5 | 0.33 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 10.15 | 5.52 | 4.08 | 2.85 | 2.11 | 1.62 | 1.41 | 1.30 | 1.21 | 1.15 |

然后作相关性检验：

①作统计假设：$u$ 与 $Y$ 不具有线性相关关系；

②由小概率 0.05 与 $n-2=8$ 在附表中查得

$r_{0.05}=0.632$；

③使用计算器进行计算：

按键

MODE  3  1  （进入线性回归计算状态）

SHIFT  CLR  1  =  （将计算器存储器设置成初始状态）

1 $\boxed{,}$ 10.15 $\boxed{DT}$ 0.5 $\boxed{,}$ 5.52 $\boxed{DT}$ 0.33 $\boxed{,}$ 4.08 $\boxed{DT}$ 0.2 $\boxed{,}$ 2.85 $\boxed{DT}$

0.1 $\boxed{,}$ 2.11 $\boxed{DT}$ 0.05 $\boxed{,}$ 1.62 $\boxed{DT}$ 0.03 $\boxed{,}$ 1.41 $\boxed{DT}$ 0.02 $\boxed{,}$ 1.30 $\boxed{DT}$

0.01 $\boxed{,}$ 1.21 $\boxed{DT}$ 0.005 $\boxed{,}$ 1.15 $\boxed{DT}$

继续按下表按键

| 按键 | 显示结果 |
|---|---|
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 3 = | 0.999 819 122 |
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 1 = | 1.125 466 221 |
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 2 = | 8.973 424 404 |

④ $|r|=0.998>0.632$，

即　$|r|>r_{0.05}$，

从而有 95% 的把握认为 $u$ 与 $Y$ 之间具有线性相关关系，求 $Y$ 对 $u$ 的回归直线方程有意义.

由上表立即可得

$$\hat{y}=1.125+8.973u.$$

最后回代 $u=\dfrac{1}{x}$，可得 $\hat{y}=1.125+\dfrac{8.973}{x}$，

这就是题目要求的 $Y$ 对 $x$ 的回归曲线方程.

5. 电压 $U$ 随时间 $t$ 的变化规律公式为 $u=Ae^{bt}$，两边取自然对数，得 $\ln u=\ln A+bt$

与线性回归直线方程相对照，只要取

$$v=\ln u,\ a=\ln A，就有\quad v=a+bt.$$

经变量置换得下表

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_i$ | 4.61 | 4.32 | 4.01 | 3.69 | 3.4 | 3.00 | 2.71 | 2.3 | 2.3 | 1.61 | 1.61 |

作相关性检验：

①作统计假设：$t$ 与 $v$ 不具有线性相关关系；

②由小概率 0.05 与 $n-2=9$ 在附表中查得

$r_{0.05}=0.602$；

③使用计算器进行计算：

按键

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ （进入线性回归计算状态）

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ （将计算器存储器设置成初始状态）

0 $\boxed{,}$ 4.61 $\boxed{DT}$ 1 $\boxed{,}$ 4.32 $\boxed{DT}$ 2 $\boxed{,}$ 4.01 $\boxed{DT}$ 3 $\boxed{,}$ 3.69 $\boxed{DT}$

4 $\boxed{,}$ 3.4 $\boxed{DT}$ 5 $\boxed{,}$ 3.00 $\boxed{DT}$ 6 $\boxed{,}$ 2.71 $\boxed{DT}$ 7 $\boxed{,}$ 2.30 $\boxed{DT}$

8 $\boxed{,}$ 2.30 $\boxed{DT}$ 9 $\boxed{,}$ 1.61 $\boxed{DT}$ 10 $\boxed{,}$ 1.61 $\boxed{DT}$

继续按下表按键

| 按键 | 显示结果 |
| --- | --- |
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 3 = | −0.995 045 802 |
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 1 = | 4.616 363 636 |
| SHIFT S-VAR ▶ ▶ 2 = | −0.313 090 909 |

④$|r|=0.995>0.632$，

即 $|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 $t$ 与 $v$ 之间具有线性相关关系，求 $v$ 对 $t$ 的回归直线方程有意义.

由上表立即可得

$$\hat{v}=4.616-0.313t,$$

所以 $\ln\hat{u}=4.616-0.313t$，

$$\hat{u}=e^{4.616-0.313t}=101.01e^{-0.313t}.$$

这就是题目要求的 $U$ 对 $t$ 的回归曲线方程.

## 自测与评估（第 95 页）

1. 由题写出 2×2 列联表

| | 患有色盲 | 未患色盲 | 合计 |
| --- | --- | --- | --- |
| 男人 | 38 | 442 | 480 |
| 女人 | 6 | 514 | 520 |
| 合计 | 44 | 956 | 1 000 |

2.（2）作相关性检验：

①作统计假设：$x$ 与 $Y$ 不具有线性相关关系；

②由小概率 0.05 与 $n-2=8$ 在附表中查得

$r_{0.05}=0.632$；

③使用计算器进行计算：

按键

$\boxed{MODE}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ （进入线性回归计算状态）

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ （将计算器存储器设置成初始状态）

10 $\boxed{,}$ 62 $\boxed{\text{DT}}$ 20 $\boxed{,}$ 68 $\boxed{\text{DT}}$ 30 $\boxed{,}$ 75 $\boxed{\text{DT}}$ 40 $\boxed{,}$ 81 $\boxed{\text{DT}}$

50 $\boxed{,}$ 89 $\boxed{\text{DT}}$ 60 $\boxed{,}$ 95 $\boxed{\text{DT}}$ 70 $\boxed{,}$ 102 $\boxed{\text{DT}}$ 80 $\boxed{,}$ 108 $\boxed{\text{DT}}$

90 $\boxed{,}$ 115 $\boxed{\text{DT}}$ 100 $\boxed{,}$ 122 $\boxed{\text{DT}}$

继续按下表按键

| 按键 | 显示结果 |
|---|---|
| $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ | 0.999 809 36 |
| $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ | 54.933 333 33 |
| $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ | 0.668 484 848 |

④ $|r|=0.9998>0.632$，

即 $|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 $x$ 与 $Y$ 之间具有线性相关关系，求 $Y$ 对 $x$ 的回归直线方程有意义.

(3) 由上表立即可得

$$\hat{y}=54.9+0.668x.$$

## Ⅵ 评价建议

(1) 本章课后作业情况、测验成绩作为评价的一个方面.

(2) 本章内容在现实生活中有很多应用，引导学生根据所学知识开展研究性学习，让学生学会分析、处理数据，写一篇有价值的小论文.