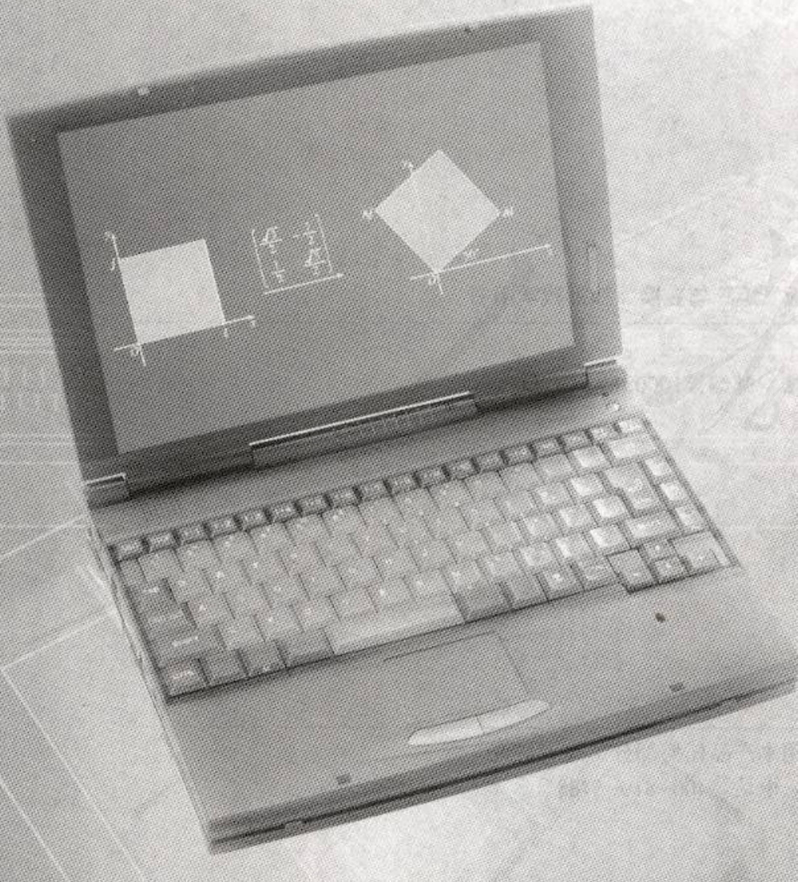
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-2

矩阵与变换

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 4-2（A 版）矩阵与变换教师教学用书/人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —2 版. —北京：人民教育出版社，2009.1(2019.11 重印)

ISBN 978-7-107-20466-1

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①人… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 021108 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-2 A 版 矩阵与变换 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

网 址 http://www.pep.com.cn

经 销 全国新华书店

印 刷 唐山市润丰印务有限公司

版 次 2009 年 1 月第 2 版

印 次 2019 年 11 月第 11 次印刷

开 本 890 毫米×1 240 毫米 1/16

印 张 3.75

字 数 80 千字

定 价 9.10 元

如发现内容质量问题、印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱佩玲　章建跃

编　　者：李龙才
责任编辑：俞求是

版式设计：王　艾
封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容内．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的认识是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学分为一些知识点，并选择“数量关系”、“空间形式”、“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

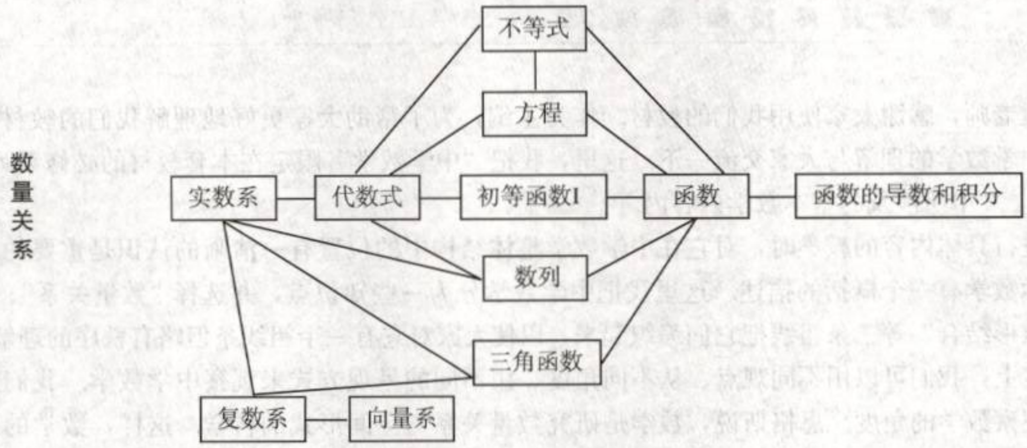
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对（x，y），而空间中向量的坐标是三实数组（x，y，z）. 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数（$a+bi$）曾被推广到四元数（$a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$），而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“=”换成实数系所特有的“>”（或“<”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解集可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “>”的性质比“=”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数Ⅰ 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

数列 数列及数列的运算. 在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列. 我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比. 不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型. 为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石. 三角函数是数形结合的产物.

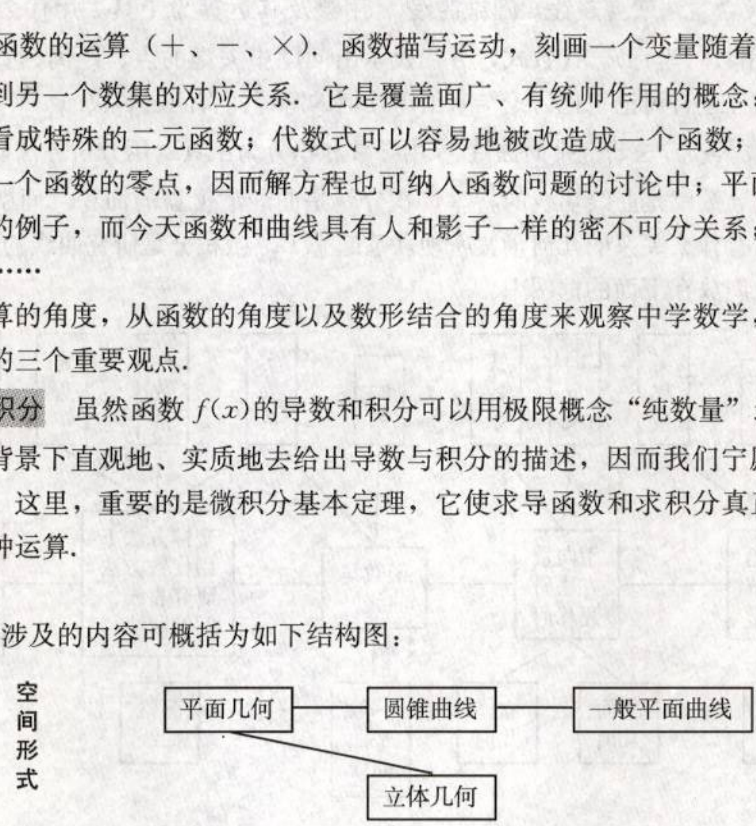
函数 函数及函数的运算（+、−、×）. 函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系. 它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点.

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物. 这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算.

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等. 这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础.

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们. 这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础.

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系. 特别重要的是垂直和平行关系. 对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉.

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方. 想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的.

“数形结合”

用三角函数解三角形 参看 三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

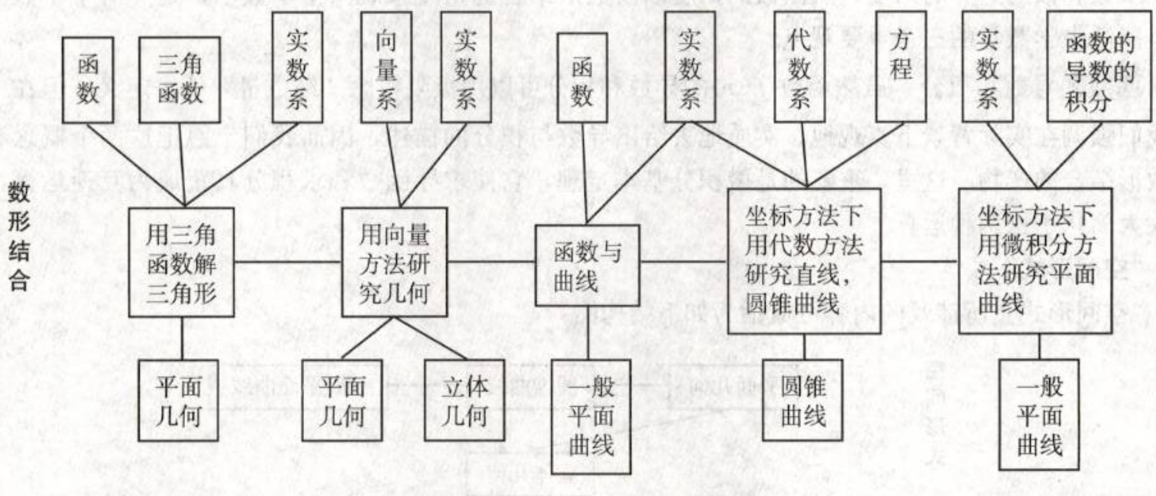
用向量来研究几何 用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线 用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

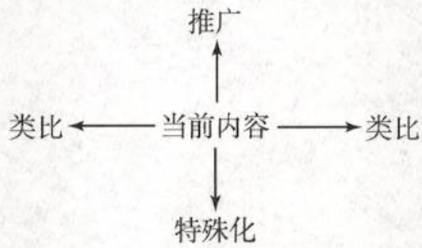
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

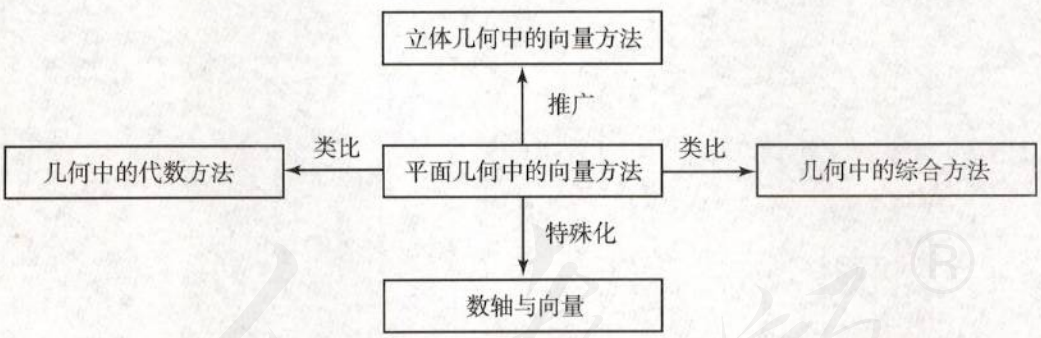
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制定的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容. 本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1. “亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情.

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习.

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情.

2. “问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

提问是创新的开始. “看过问题三百个，不会解题也会问”. 通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神.

3. “思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括.

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”.

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想. 包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

（1）课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

（1）本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(3) 重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是选修课程数学 4-2 的教师教学用书，包含线性变换与二阶矩阵、变换的复合与二阶矩阵的乘法、逆变换与逆矩阵、变换的不变量与矩阵的特征向量等四讲内容. 全书共 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲	线性变换与二阶矩阵	约 5 课时
第二讲	变换的复合与二阶矩阵的乘法	约 4 课时
第三讲	逆变换与逆矩阵	约 5 课时
第四讲	变换的不变量与矩阵的特征向量	约 4 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师服务.

目录

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

（一）课程目标

矩阵是研究图形（向量）变换的基本工具，有着广泛的应用，许多数学模型都可以用矩阵来表示.本专题通过平面图形的变换讨论二阶方阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量等概念，并以变换的观点理解解线性方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性.

（二）学习目标

1. 通过实例，了解二阶矩阵的概念

2. 二阶矩阵与平面向量（列向量）的乘法、平面图形的变换

（1）以变换的观点认识矩阵与向量乘法的意义.

（2）证明矩阵变换把平面上的直线变成直线，即证明

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\beta}.$$

（3）通过大量具体的矩阵对平面上给定图形（如正方形）的变换，认识到矩阵可表示如下的线性变换：恒等、反射、伸压、旋转、切变、投影.

3. 变换的复合——二阶方阵的乘法

（1）通过变换的实例，了解矩阵与矩阵的乘法的意义.

（2）验证二阶方阵乘法满足结合律.

（3）通过具体的几何图形变换，说明矩阵乘法不满足交换律和消去律.

4. 逆矩阵与二阶行列式

（1）通过具体图形变换，理解逆矩阵的意义；通过具体的投影变换，说明逆矩阵可能不存在.

（2）会证明逆矩阵的唯一性和$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$等简单性质，并了解其在变换中的意义.

（3）了解二阶行列式的定义，会用二阶行列式求逆矩阵.

5. 二阶矩阵与二元一次方程组

（1）能用变换的观点认识解二元一次方程组的意义.

（2）会用系数矩阵的逆矩阵解系数矩阵可逆的二元一次方程组.

（3）会通过具体的可逆的系数矩阵，从几何上说明线性方程组解的存在性、唯一性.

6. 变换的不变量

（1）掌握矩阵特征值与特征向量的定义，能从几何变换的角度说明特征向量的意义.

（2）会求二阶方阵的特征值与特征向量（只要求特征值是两个不同实数的情形）.

7. 矩阵的应用

（1）利用矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值、特征向量给出$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$简单的表示，并能用它来解决问题.

（2）初步了解三阶或高阶矩阵.

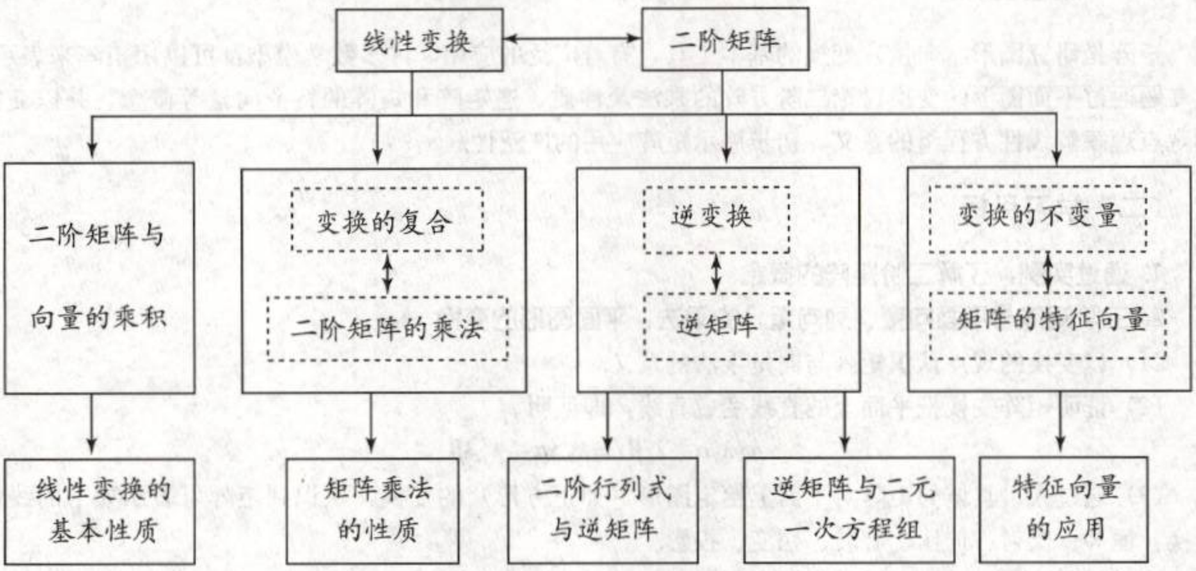
（3）了解矩阵的应用.

8. 完成一个学习总结报告

报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结，理解本专题的整体思路、结构和内容，进一步认识变换的思想；(2) 拓展，通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对矩阵变换及其应用做进一步探讨；(3) 学习本专题的感受、体会.

二、内容安排

1. 本专题知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本专题分为四讲：第一讲，线性变换与二阶矩阵，内容包括：线性变换与二阶矩阵、二阶矩阵与平面向量的乘法、线性变换的基本性质；第二讲，变换的复合与二阶矩阵的乘法，内容包括：复合变换与二阶矩阵的乘法、矩阵乘法的性质；第三讲，逆变换与逆矩阵，内容包括：逆变换与逆矩阵、二阶行列式与逆矩阵、逆矩阵与二元一次方程组；第四讲，变换的不变量与矩阵的特征向量，内容包括：变换的不变量——矩阵的特征向量、特征向量的应用.

(1) 在本书引言中，首先回顾学生熟悉的平面图形的轴对称变换，然后用映射的语言重新叙述，接着在平面直角坐标系中进一步进行研究，得到这个变换的坐标变换公式，从而明确形如 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$（其中 a，b，c，d 均为常数）的变换可以由一个二阶矩阵完全确定，并给出本专题中研究问题的基本思想——类比解析几何中对曲线与方程的讨论，对二阶矩阵与某些几何变换进行类似的研究，最后明确本专题的主要内容.

(2) 在平面直角坐标系中，线性变换与二阶矩阵是一一对应的，因此既可以通过二阶矩阵来研究对应的线性变换，也可以通过线性变换来研究对应的二阶矩阵. 本专题中，总是先通过具体的线性变换从几何直观上获得感知，进而抽象出矩阵中的概念或结论. 线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系是本专题研究线性变换与二阶矩阵的基本出发点.

（3）本专题注重在呈现知识时渗透数学思想方法，除了（2）中提及的充分利用几何直观（数形结合）外，还特别强调以下两种思想方法：第一，从特殊到一般的思想方法．本讲中几乎所有的知识都是通过这种方式引入的．第二，类比的方法．例如，类比实数乘法的运算律研究二阶矩阵乘法的运算律；类比实数的乘法运算中的一条重要性质“如果 $a\neq 0$，则 $\frac{1}{a}\cdot a=a\cdot\frac{1}{a}=1$”，通过线性变换引入逆矩阵；等等．

三、课时分配

本专题教学时间约为 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　线性变换与二阶矩阵

一	线性变换与二阶矩阵	约 2 课时
二	二阶矩阵与平面向量的乘法	约 1 课时
三	线性变换的基本性质	约 2 课时

第二讲　变换的复合与二阶矩阵的乘法

一	复合变换与二阶矩阵的乘法	约 2 课时
二	矩阵乘法的性质	约 2 课时

第三讲　逆变换与逆矩阵

一	逆变换与逆矩阵	约 2 课时
二	二阶行列式与逆矩阵	约 1 课时
三	逆矩阵与二元一次方程组	约 2 课时

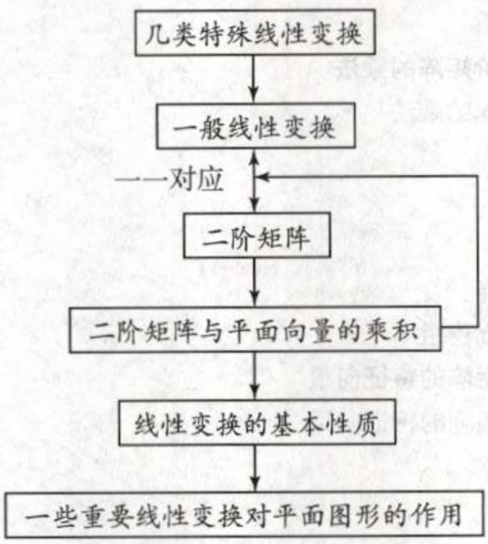
第四讲　变换的不变量与矩阵的特征向量

一	变换的不变量——矩阵的特征向量	约 2 课时
二	特征向量的应用	约 2 课时

II 教科书分析

第一讲 线性变换与二阶矩阵

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 二阶矩阵的概念；
2. 二阶矩阵与平面向量的乘积；
3. 线性变换的基本性质.

难点：线性变换的基本性质.

三、编写意图与教学建议

在直角坐标系中，平面上的点和有序实数对是一一对应的，所以就可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换. 在本讲中，首先通过两个特殊的旋转变换引入线性变换的概念，并通过线性变换引入二阶矩阵；接着介绍一般的旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换和切变变换等几类重要的线性变换，熟悉它们对应的二阶矩阵，并通过这些具体的线性变换及其二阶矩阵，体会在直角坐标系中线性变换和二阶矩阵之间的一一对应关系，并进一步建立线性变换与二阶矩阵

联系，用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换；以二阶矩阵为工具研究线性变换的基本性质——二阶矩阵对应的线性变换把平面上的直线变成直线（或一点）；利用线性变换的基本性质研究一些重要线性变换对单位正方形区域的作用，进一步加深对线性变换及其基本性质的理解.

（一）线性变换与二阶矩阵

1. 几类特殊线性变换及其二阶矩阵

（1）线性变换、二阶矩阵的引入

教科书首先讨论旋转角为180°的旋转变换，这是学生比较熟悉的旋转变换，该变换把平面内的点对应到该点关于原点 O 的对称点，其坐标变换公式非常简单. 但是，由于其坐标变换公式过于简洁，因而很难抽象出一般的线性变换的形式. 于是，教科书继续讨论旋转角为30°的旋转变换，其坐标变换公式中 x，y 项的系数均不为0，与一般的线性变换的形式类似，由此抽象出线性变换的概念，并给出二阶矩阵的定义.

在引入线性变换、二阶矩阵概念的过程中，应特别强调线性变换与二阶矩阵是相互唯一确定的，即它们之间是一一对应的.

需要指出的是，平面变换（或称为几何变换）是平面内所有的点所成的集合到其自身的映射. 本专题讨论的线性变换 $\begin{cases}x'=ax+by,\\ y'=cx+dy\end{cases}$ 是一类特殊的平面变换，它把平面内任意一点（x，y）对应到（或称变为）（x'，y'）.

（2）几类重要的线性变换

引入线性变换、二阶矩阵的概念后，教科书介绍了旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换和切变变换等几类重要的线性变换，推导它们的坐标变换公式，给出它们对应的二阶矩阵，并通过这些具体的线性变换及其二阶矩阵，引导学生体会在直角坐标系中线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系. 应该说，学生掌握这些内容并不困难，但需要指出的是，本专题中呈现矩阵内容的主要指导思想是通过直观的线性变换引入矩阵的有关概念、研究矩阵的一些性质，因此，这些重要的线性变换是我们学习本专题后续内容的重要基础，教学中应予以充分重视.

2. 变换、矩阵的相等

引入线性变换、二阶矩阵的概念后，首先需要界定两个线性变换、两个二阶矩阵何时相等. 教科书通过对一个具体旋转变换的讨论，引入线性变换相等和二阶矩阵相等的概念. 在平面直角坐标系内，线性变换与二阶矩阵是一一对应的. 利用这一关系容易得到：两个线性变换相等当且仅当对应的二阶矩阵相等.

（二）二阶矩阵与平面向量的乘法

我们在上一节建立了线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，本节在此基础上进一步建立线性变换与二阶矩阵的联系，用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换.

1. 三种一一对应关系

教科书首先复习平面直角坐标系内的向量、点以及有序实数对之间的一一对应关系，这些内容都是学生熟悉的. 正是由于这三种一一对应关系，我们有时可以把这三者不加区分. 在上一节中，我们把线性变换看成是平面上所有的点所成的集合到其自身的映射，在本专题后面的内容中，总把线性变换看成是平面上所有以原点为起点的向量所成的集合到其自身的映射，其中向量都用列向量表示.

2. 二阶矩阵与平面向量的乘法

教科书先讨论旋转角是 30° 的旋转变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y, \end{cases}$$

它把直角坐标系内的向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新向量 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$，并设想 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ 是二阶矩阵 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ “相乘”的结果. 教学中应揭示出这种“相乘”的特点：$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ 的第一个分量为 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 的第一行的元素与 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的对应位置元素乘积的和，第二个分量为 $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 的第二行的元素与 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的对应位置元素乘积的和. 以此引入二阶矩阵与平面向量的乘法.

在二阶矩阵与平面向量乘法的教学中，应特别强调以下两点：

(1) 二阶矩阵与平面向量的乘法与以前遇到过的乘法——数的乘法、数与向量的乘法都不相同，学生特别容易出错，应提示学生弄清二阶矩阵与平面向量的乘法法则中蕴涵的规律，切不可死记硬背.

(2) 熟练使用二阶矩阵与平面向量的乘积表示线性变换. 一方面，任何一个线性变换

$$\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ 均为常数})$$

都可以表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

另一方面，任何一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都唯一确定了一个线性变换，这个变换把在直角坐标系 xOy 内的每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新向量 $\boldsymbol{A\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

3. 对例 1、例 2 的说明

安排例 1、例 2 的目的都是巩固、掌握二阶矩阵与平面向量的乘法，其中例 2 还帮助学生进一步掌握平面直角坐标系内的点与向量的一一对应关系.

（三）线性变换的基本性质

1. 线性变换的基本性质

教科书首先定义“数乘平面向量”和“平面向量的加法”，接着设置一个“探究”栏目，让学生通过作图探究数乘平面向量和平面向量加法的几何意义. 这部分内容是以矩阵为工具研究线性变换的基本性质的基础.

(1) 线性变换的基本性质

在数学中引进一种新运算后一般都要考察相应的运算律问题. 对于二阶矩阵与平面向量的乘法，教科书也遵循此一般性原则，通过研究运算律得到线性变换的基本性质.

教科书首先设置了一个“探究”栏目，学生通过几何直观可以得到：把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 先伸长到原来的 2 倍再按逆时针方向旋转 90°，以及把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 先按逆时针方向旋转 90°再伸长到原来的 2 倍，这两个过程的结果相同，用数学式子表示为 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$. 当然，也可以通过计算“数乘平面向量”“二阶矩阵与平面向量的乘积”，验证其正确性. 在此基础上，从特殊到一般，从具体到抽象，提出问题：“设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是平面上的任意一个向量，λ 是任意一个实数，是否也有 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 成立呢?”最后证明结论 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 成立. 教科书通过类似的过程，得到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$. 这就得到了线性变换的基本性质. 需要指出的是，线性变换的基本性质有两种表述形式，也就是教科书中的性质 1 与定理 1，它们是等价的（即它们能够互相推出）.

(2) 线性变换基本性质的几何解释

点、线是构成平面图形的基本元素. 根据线性变换的定义，线性变换把平面上的基本元素——点（或向量）变成点（或向量），自然需要讨论线性变换把平面上的基本图形——直线（或线段）变成什么图形. 教科书先考察两个特殊线性变换对平面上直线的作用结果，从几何图形上容易发现：在平面直角坐标系 Oxy 内，关于 x 轴的（正）投影变换把直线变为直线（或一点）；伸缩变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成直线 $y=2kx+2b$. 这两个线性变换或把直线变成了直线，或把直线变成了一点. 进一步，通过“思考”栏目引导学生考察旋转变换 R_{30°：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 和切变变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成什么图形. 类似于前面的讨论，学生容易发现它们都把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成了直线. 通过上述实例，学生对线性变换的几何性质有了感性认识，在此基础上，教科书给出线性变换的基本性质：二阶矩阵对应的变换（线性变换）把平面上的直线变成直线（或一点）. 上述过程是一个典型的从特殊到一般、运用归纳推理得出一般结论的过程.

为了证明这个性质，最关键的是确定直线的向量形式. 最常用的直线的向量形式是点向式，已知直线上的一点（即表示此点的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$）和平行于该直线的一个非零向量 $\boldsymbol{\beta}$（称为直线的方向向量），确定直线的向量形式. 容易得到，任意一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点在直线上的充分必要条件是：$(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})\parallel\boldsymbol{\beta}$，即存在实数 t，使得 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}=t\boldsymbol{\beta}$. 从而该直线的点向式为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}\text{，其中 } t \text{ 是实参数.} \qquad ①$$

教科书采用的是由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的终点所确定的直线的向量形式：

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\text{，其中 } \lambda_1\text{，}\lambda_2 \text{ 是实参数，且 } \lambda_1+\lambda_2=1. \qquad ②$$

这种形式实际上是对点向式变形得到的，这里的方向向量取为 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$. 形式①的优点是与选修 2-1 中的形式一致. 教学中，可选用直线的这两种向量形式中的任意一种，但都应围绕任意一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点在直线上的充分必要条件展开. 如果选用形式①，那么性质 2 的证明过程如下：

根据定理 1，直线 l：$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$（其中 t 是实参数）在线性变换 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 的作用下变成

$$\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+t\boldsymbol{A\beta}\text{，其中 } t \text{ 是实参数.} \quad ③$$

如果 $\boldsymbol{A\beta}\neq 0$，那么③表示由经过向量 $\boldsymbol{A\alpha}$ 的终点且平行于向量 $\boldsymbol{A\beta}$ 的直线．此时，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换把平面上的直线 l 变成直线；

如果 $\boldsymbol{A\beta}=0$，那么 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}$，由于向量 $\boldsymbol{A\alpha}$ 的终点是平面上一个确定的点，因而，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换把平面上的直线 l 变成一个点 $\boldsymbol{A\alpha}$.

教科书中习题 1.3 的第 2 题安排了这方面的练习.

2. 一些重要线性变换对单位正方形区域的作用

根据“课程标准”中“通过平面图形的变换讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量等概念”的要求，教科书在此安排了利用线性变换的基本性质，研究一些重要线性变换对单位正方形区域的作用的内容，以进一步加深对这些重要的线性变换以及线性变换基本性质的直观认识，为学习本专题后面的内容奠定基础.

得出线性变换对单位正方形区域的作用结果的理论依据是：(1) 线性变换的基本性质，即 $\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\beta}$；(2) 平面向量基本定理，即设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是同一平面内不共线的两个向量，那么对于这个平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使得 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$. 由平面向量基本定理可以得到，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的终点在以 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形区域内，当且仅当 $\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$，其中 $0\leqslant\lambda_1$，$\lambda_2\leqslant 1$.

教科书依据线性变换的基本性质和平面向量基本定理，考察恒等变换、旋转变换、切变变换、反射变换、投影变换等一些重要线性变换对单位正方形区域的作用结果．教学中需要注意两点：

(1) 应复习巩固这些重要线性变换与二阶矩阵的一一对应关系．给出这些重要线性变换，能熟练地写出它们对应的二阶矩阵；反之，给出一些特殊的二阶矩阵，能熟练地写出它们对应的重要线性变换.

(2) 教科书中这部分内容的篇幅较大，应把握好教学重点，使学生弄清如何得到线性变换对单位正方形区域的作用结果及其理论依据．对于这 5 类重要的线性变换，教学中应有选择地讲授，其中的大部分内容可通过学生自学与教师点拨相结合的方式进行教学.

对第 27 页“思考”的两点说明：

(1) 由于关于 x 轴的正投影变换把平行于 y 轴的直线变成其与 x 轴的交点，而关于 y 轴的正投影变换把平行于 x 轴的直线变成其与 y 轴的交点，因此，从几何直观上就能看出，它们分别把单位正方形区域变为 x 轴上的一条线段和 y 轴上的一条线段.

(2)“思考”中的第二个问题与本小节的开篇语相呼应．为了方便起见，可以只考虑有一个顶点为原点的三角形，设过原点 O 的两条边对应的向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，用 $\boldsymbol{A}$ 表示关于 x 轴的对称变换的矩阵（或旋转变换的矩阵），则该三角形区域变为以 $\boldsymbol{A\alpha}$，$\boldsymbol{A\beta}$ 为邻边的三角形区域.

四、教学设计案例

线性变换的基本性质

1. 教学任务分析

在初中阶段，学生已经学习了轴对称变换、旋转变换把平面中的基本元素——直线变为直线，本

课时的任务就是通过对一些特殊线性变换的探究，抽象概括出一般线性变换的基本性质——线性变换把直线变为直线（或一点），并给出严格的证明，并使学生进一步体会从特殊到一般的思想方法.

2. 教学重点、难点

重点：

（1）线性变换的基本性质；

（2）直线的向量形式.

难点：线性变换的基本性质.

3. 教学基本流程

“数乘平面向量”“平面向量加法”的定义与几何意义

↓

通过特殊的线性变换探究 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，并加以证明

↓

通过特殊的线性变换探究 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$，并加以证明

↓

线性变换的基本性质（矩阵形式）性质 1、定理 1

↓

通过特殊的线性变换探究并归纳出线性变换的基本性质（几何形式）

↓

直线的向量形式

↓

证明线性变换的基本性质（几何形式）

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 在初中阶段，我们学过轴对称变换、旋转变换把平面上的直线变为直线，三角形变为三角形……一般地，在线性变换下，是否仍然有平面上的直线变为直线，三角形变为三角形……呢?	温故知新，引入本节课的主题.	教师引导，学生思考、回答.
2. “数乘平面向量”“平面向量加法”的定义与几何意义.	“数乘平面向量”“平面向量加法”的定义与几何意义是研究线性变换基本性质的基础之一.	学生复习回顾，教师进行总结.

续表

问题	设计意图	师生活动
3. (1) 教科书第15页的“探究”问题； (2) 对于一般的线性变换和任意一个平面向量，结论仍然成立吗？	从特殊到一般，探究并证明 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$.	分两个阶段进行，教师先提出问题 (1)，学生思考、讨论、回答；教师提出问题 (2)，学生思考、讨论，提出猜想，并给出证明. 教师应特别注意从思想方法的高度进行引导：在特殊的情形下得出结论，再利用类比的方法猜想一般结论，最后给出证明，这是解决数学问题的一般方法.
4. (1) 教科书第16页的“探究”问题； (2) 对于一般的线性变换和任意一个平面向量，结论仍然成立吗？	从特殊到一般，探究并证明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$.	分两个阶段进行，教师先提出问题 (1)，学生思考、讨论、回答；教师提出问题 (2)，学生思考、讨论，提出猜想，证明过程可由学生课后完成. 教师应特别注意从思想方法的高度进行引导：在特殊的情形下得出结论，再利用类比的方法猜想一般结论，最后给出证明.
5. 线性变换的基本性质（矩阵形式）性质1、定理1.	得到线性变换的基本性质（矩阵形式）的两种等价形式.	教师引导学生对“探究”得出的结论进行梳理，给出线性变换的基本性质（矩阵形式）的两种等价形式.
6. (1) 教科书第17、18页的“思考”； (2) 对于一般的线性变换和平面上任意一条直线，结论仍然成立吗？	从特殊到一般，探究出线性变换的基本性质（几何形式）：二阶矩阵对应的变换（线性变换）把平面上的直线变成直线（或一点）.	教学活动进程与3，4类似. 教师应特别注意从思想方法的高度进行引导：在特殊的情形下得出结论，再利用类比的方法猜想一般结论.
7. 平面上直线的向量形式是什么？	利用向量共线的充分必要条件得出直线的向量形式.	教师首先使学生认识到为了证明线性变换的基本性质（几何形式）必须用向量表示直线；接着引导学生利用向量共线的充分必要条件解决问题. 学生在教师的引导下，思考、讨论并解决问题. 最后，教师进行归纳.
8. 证明线性变换的基本性质（几何形式）.		教师引导学生利用线性变换的基本性质（矩阵形式）和直线的向量形式进行证明.
9. 小结：我们是怎样得到线性变换的基本性质的？有什么特别值得注意的地方？	概括思想方法.	先由学生独立思考、回答、补充，教师再归纳：从特殊到一般的方法，并且一般结论的正确性还需要通过逻辑证明进行确认.
10. 作业：第27页习题1.3中第1，2，3 (1) (2)，5题.		

五、习题解答

习题 1.1

1. (1) 坐标变换公式为$\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y,\\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y.\end{cases}$对应的矩阵为$\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$；

(2) 坐标变换公式为$\begin{cases}x'=-y,\\y'=x.\end{cases}$对应的矩阵为$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$；

(3) 坐标变换公式为$\begin{cases}x'=x,\\y'=y.\end{cases}$对应的矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

2. 设 $P(x,\ y)$ 是平面直角坐标系 Oxy 内的任意一点，则它关于坐标原点 O 的对称点的为 $P'(-x,\ -y)$. 因此，相应的坐标变换公式是$\begin{cases}x'=-x,\\y'=-y.\end{cases}$对应的二阶矩阵为$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$.

3. (1) 点 $A(2,\ 1)$在这个投影变换下的像为 $A'(3,\ 0)$；

(2) 设 $P(x,\ y)$是平面直角坐标系 Oxy 内的任意一点，则它在这个投影变换下的像为 $P'(x+y,\ 0)$. 因此，相应的坐标变换公式是$\begin{cases}x'=x+y,\\y'=0.\end{cases}$对应的二阶矩阵为$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$.

4. $R_{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}=R_{\frac{3\pi}{2}}$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

5. 由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，得 $x=3$，$y=-9$，$z=0$.

6. (1) 设 $P(x_0,\ y_0)$是平面直角坐标系 Oxy 内的任意一点，它在关于直线 l：$y=2x$ 的反射变换下的像为$P'(x',\ y')$. 过点 $P(x_0,\ y_0)$垂直于直线 l 的直线的斜率为$k=-\frac{1}{2}$. 于是，该直线的方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0).$$

解方程组

$$\begin{cases}y=2x,\\y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0),\end{cases}$$

得直线 l：$y=2x$ 与直线 $y-y_0=-\frac{1}{2}(x-x_0)$的交点 M 的坐标$\left(\frac{x_0+2y_0}{5},\ \frac{2x_0+4y_0}{5}\right)$. 因为 M 是线段 PP'的中点，所以

$$\begin{cases}x'=2\times\dfrac{x_0+2y_0}{5}-x_0,\\y'=2\times\dfrac{2x_0+4y_0}{5}-y_0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x'=\dfrac{-3x_0+4y_0}{5},\\y'=\dfrac{4x_0+3y_0}{5}.\end{cases}$$

所以，该反射变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=\dfrac{-3x+4y}{5},\\y'=\dfrac{4x+3y}{5},\end{cases}$$

$$即\begin{cases}x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y,\\y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$；

(2) 设 $P(x_0, y_0)$是平面直角坐标系 Oxy 内的任意一点，它在关于直线 l：$Ax+By=0$ 的反射变换下的像为 $P'(x', y')$.

当 $A\neq 0$ 时，过点 $P(x_0, y_0)$且垂直于直线 l 的直线的斜率为 $k=\frac{B}{A}$. 于是，该直线的方程为

$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$，即

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

当 $A=0$ 时，则直线 l 的方程为 $y=0$. 从而过点 $P(x_0, y_0)$且垂直于 l 的直线的方程为 $x=x_0$，它也可以写成 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$的形式. 所以，过点 $P(x_0, y_0)$且垂直于 l 的直线的方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

解方程组

$$\begin{cases} Ax+By=0, \\ B(x-x_0)-A(y-y_0)=0, \end{cases}$$

得直线 l：$Ax+By=0$ 与直线 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$的交点 M 的坐标$\left(\frac{B^2x_0-ABy_0}{A^2+B^2}, \frac{-ABx_0+A^2y_0}{A^2+B^2}\right)$. 因为 M 是线段 PP'的中点，所以

$$\begin{cases} x'=2\times\frac{B^2x_0-ABy_0}{A^2+B^2}-x_0, \\ y'=2\times\frac{-ABx_0+A^2y_0}{A^2+B^2}-y_0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\frac{(B^2-A^2)x_0-2ABy_0}{A^2+B^2}, \\ y'=\frac{-2ABx_0+(A^2-B^2)y_0}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

所以，该反射变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=\frac{(B^2-A^2)x-2ABy}{A^2+B^2}, \\ y'=\frac{-2ABx+(A^2-B^2)y}{A^2+B^2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\frac{2AB}{A^2+B^2}y, \\ y'=-\frac{2AB}{A^2+B^2}x-\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为$\begin{bmatrix} \frac{B^2-A^2}{A^2+B^2} & -\frac{2AB}{A^2+B^2} \\ -\frac{2AB}{A^2+B^2} & \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} \end{bmatrix}$.

习题 1.2

1. 不能.

2. $\boldsymbol{A\alpha}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{A\alpha}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x+y\end{pmatrix}$.

3. 因为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

所以 $x'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$y'=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. $\boldsymbol{A0}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{Ai}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{Aj}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}a & b\\b & d\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b\\c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3b\\-c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{cases}a+2b=2,\\c+2d=3,\\-a+3b=2,\\-c+3d=1.\end{cases}$$

解得 $a=\frac{2}{5}$，$b=\frac{4}{5}$，$c=\frac{7}{5}$，$d=\frac{4}{5}$. 故

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

从而

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 所对应的线性变换把点 C 变成点 $\left(\frac{8}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$.

习题 1.3

1. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$对应的线性变换为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

其坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x+2y,\\y'=y.\end{cases}$$

将 $x'=x+2y$，$y'=y$ 代入直线方程 $y=x-2$，得

$$x'-3y'-2=0.$$

分别用 x，y 代替 x'，y'，得

$$x-3y-2=0.$$

所以，矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$对应的线性变换把直线 $y=x-2$ 变成直线 $x-3y-2=0$.

2. (1) 因为 l 就是经过点 $A(1, 0)$，且平行于向量$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$的直线，所以直线 l 的向量方程为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$对应的切变变换的作用下，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

所以直线 l 变成了经过点$(1, 1)$，且平行于向量$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$的直线；

(2) 直线 l 的向量方程为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$对应的投影变换的作用下，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

即

$$M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$

所以直线 l 变成了一点(2，0).

3. 因为

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},$$

所以，在矩阵 $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ 所对应的线性变换的作用下，点 $A(1,1)$，$B(1,2)$，$C(2,1)$ 分别变成点 $A'(2,0)$，$B'(3,0)$，$C'(3,0)$.

(1) 在矩阵 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 所对应的线性变换的作用下，直线 AB 变成了直线 $y=0$；

(2) 在矩阵 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 所对应的线性变换的作用下，直线 BC 变成了一点 $B'(3,0)$；

(3) 在矩阵 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 所对应的线性变换的作用下，$\triangle ABC$ 变成了线段 $A'B'$.

图形略.

4. 因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},$$

所以，在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&1\end{bmatrix}$ 所对应的线性变换的作用下，平面上单位正方形区域 $x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}$（其中 $0\leqslant x_1$，$x_2\leqslant 1$）变成了以向量 $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$（始点均为原点 O）为邻边的平行四边形.

图形略.

5. 矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 对应的线性变换为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

其坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,\\y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y.\end{cases}$$

将 $x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y$，$y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$ 代入双曲线方程 $xy=1$，得

$$y'^2-x'^2=2.$$

分别用 x，y 代替 x'，y'，得

$$y^2-x^2=2.$$

所以，矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 对应的线性变换把双曲线 $xy=1$ 变成双曲线 $y^2-x^2=2$.

图形略.

6.（1）矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 对应的线性变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=y,\\ y'=x.\end{cases}$$

将 $x'=y$，$y'=x$ 代入圆的方程 $x^2+y^2=1$，得 $y'^2+x'^2=1$.
分别用 x，y 代替 x'，y'，得 $x^2+y^2=1$.

所以，矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 对应的线性变换把圆 $x^2+y^2=1$ 变成圆 $x^2+y^2=1$；

（2）矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的线性变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y.\end{cases}$$

将 $x'=2x$，$y'=y$ 代入圆的方程 $x^2+y^2=1$，得

$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1.$$

分别用 x，y 代替 x'，y'，得

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

所以，矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的线性变换把圆 $x^2+y^2=1$ 变成椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（3）矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ 对应的线性变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-2y.\end{cases}$$

将 $x'=x$，$y'=-2y$ 代入圆的方程 $x^2+y^2=1$，得

$$x'^2+\frac{y'^2}{4}=1.$$

分别用 x，y 代替 x'，y'，得

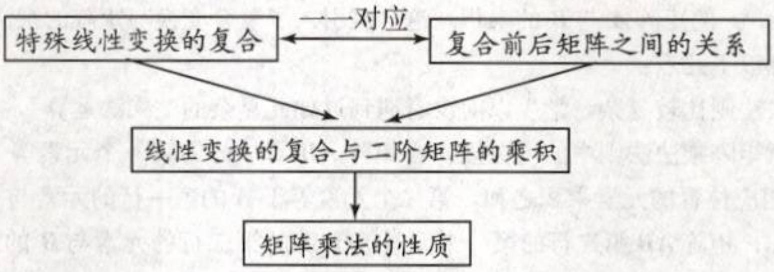
$$x^2+\frac{y^2}{4}=1.$$

所以，矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的线性变换把圆 $x^2+y^2=1$ 变成椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

图形略.

第二讲　变换的复合与二阶矩阵的乘法

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 矩阵乘积的概念；
2. 矩阵乘法的运算律.

难点：

1. 矩阵乘积的概念；
2. 矩阵乘法的运算律.

三、编写意图与教学建议

本讲借助几何直观——线性变换对平面图形的作用，以及线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，通过考察线性变换的复合，引入二阶矩阵的乘法，讨论矩阵乘法的运算律.

（一）复合变换与二阶矩阵的乘法

1. 矩阵乘法的引入

教科书一开始设置了一个“探究”栏目，通过探究要得出两个结论：（1）两个线性变换的复合变换仍然是线性变换；（2）两个线性变换的复合变换的二阶矩阵，是原来两个线性变换的二阶矩阵的“乘积”. 教科书从具体到抽象，从特殊到一般，先从两个具体例子入手进行考察.

例 1 考察两个旋转变换的复合. 本例从几何直观上直接得到：两个旋转变换的复合变换仍然是一个旋转变换. 复合变换的二阶矩阵也是通过几何直观得到的，教科书没有说明所得矩阵与原来两个旋转变换的矩阵之间的关系，其原因有两方面：一是直观上很容易理解；二是避免复杂的三角变换和运算.

例 2 首先考察一个具体向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 经过旋转变换 R_{30° 作用，再经过切变变换 ρ 作用的结果；进而

考察任意一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 先经过旋转变换 R_{30° 作用，再经过切变变换 ρ 作用的结果，得到连续施行两次线性变换的结果仍然是一个线性变换，并且推导出该变换的二阶矩阵．例 2 的计算过程看似烦琐，实际上是为了展示出新矩阵与原来的两个线性变换的矩阵之间的关系——矩阵的乘积，教学中应充分关注这个过程．

通过例 1、例 2 两个实例的讨论，学生已获得较为丰富的感性认识．在此基础上，教科书很自然地研究一般性结论，讨论任意两个二阶矩阵对应的线性变换依次作用在任意一个向量上的结果．类似于例 2 的解答过程，两个线性变换 g，f 依次作用在任意一个向量上等同于另外一个线性变换（记为 $f\cdot g$）作用在这个向量上，称线性变换 $f\cdot g$ 为线性变换 g，f 的复合变换，进而定义线性变换 $f\cdot g$ 的矩阵为线性变换 f，g 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积．这样就引入了复合变换与矩阵的乘法．

教学中需要注意以下几点：

（1）矩阵的乘法法则比较复杂，学生以前没有遇到过如此复杂的“乘法运算”，教学中应利用具体例子，引导学生注意矩阵乘法法则中的内在规律：矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 第一行的第一个元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的相应位置的元素乘积之和，第二个元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第二列的相应位置的元素乘积之和；矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 第二行的第一个元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第二行的元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的相应位置的元素乘积之和，第二个元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第二行的元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第二列的相应位置的元素乘积之和．并通过例题示范和课堂练习加以巩固，使学生尽快熟悉矩阵的乘法运算．

（2）引入复合变换与矩阵的乘法后，应强调线性变换的复合次序．教科书中规定，线性变换 $f\cdot g$ 是先做线性变换 g 再做线性变换 f 得到的复合变换．按这种次序复合符合数学的习惯，并且与两个矩阵作乘积的次序协调一致．

（3）应结合本小节的具体内容——复合变换与矩阵的乘法，突出本专题的基本指导思想，即要强调线性变换与矩阵的一一对应关系：从线性变换上看，$\boldsymbol{AB}$ 是线性变换

$$f:\ \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

与线性变换

$$g:\ \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

的复合变换 $g\cdot f$ 的矩阵；反之亦然．

2. 对例 3～5 的说明

学生不易掌握矩阵的乘法，在计算时特别容易出错．安排例 3 的目的是帮助学生巩固、掌握矩阵的乘法．例 4 除了使学生进一步熟悉矩阵的乘法外，还强调矩阵的乘积与对应的线性变换的复合之间的关系．例 5 是对已学知识的综合，既训练矩阵的乘法，又涉及到矩阵的乘积与对应的线性变换的复合之间的关系，还从几何直观上研究复合变换对平面图形的作用．

（二）矩阵乘法的性质

本节类比实数乘法的运算律——结合律、交换律、消去律，探究二阶矩阵的乘法是否也满足这些运算律，仍然采用从具体到抽象、从特殊到一般的方法进行探究，得出结论．

1. 结合律

教科书首先对三个具体的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，分别计算 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，得到 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$．再对一般的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，探索是否也有同样的规律，从而推导出矩阵的乘法满足结合律．

教科书按照自然的方式定义二阶矩阵的方幂．由于矩阵的乘法满足结合律，因此可以得到方幂的

两条性质：$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k，l 是任意自然数. 对于这两条性质，教学中不必给出严格证明，以免陷入烦琐的证明过程.

教科书例题利用两种方法计算一个矩阵的 6 次方幂，第一种方法只用方幂的定义进行计算，第二种方法把方幂的定义和性质结合使用. 这样安排的目的是为了使学生通过比较，初步感受运算律的威力，体会研究运算律的必要性. 例题也提供了说明矩阵幂运算性质的一个实例.

2. 交换律、消去律

教科书通过举反例说明交换律、消去律都不成立.

选取具体的线性变换：伸缩变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 和旋转变换 R_{90°：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，分别考察变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 和 $\sigma\cdot R_{90^\circ}$ 对单位正方形区域的作用结果，从几何直观上直接得出 $R_{90^\circ}\cdot\sigma\neq\sigma\cdot R_{90^\circ}$，因而矩阵的乘法不满足交换律.

选取具体的线性变换：伸缩变换 ρ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，投影变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 和恒等变换 I，分别考察复合变换 $\sigma\cdot\rho$ 和 $\sigma\cdot I$ 对单位正方形区域的作用结果，得到直观感觉：$\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho$. 但由此不能直接得出 $\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho$，还需要证明对任意一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，$(\sigma\cdot I)\boldsymbol{\alpha}=(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}$ 成立. 因此，教科书在“小帖士”中提出“你能证明这个等式吗？”

事实上，因为

$$(\sigma\cdot I)\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},$$

$$(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},$$

所以 $(\sigma\cdot I)\boldsymbol{\alpha}=(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}$. 从而 $\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho$. 由此容易得到，矩阵的乘法不满足消去律.

矩阵的乘法既不满足交换律，也不满足消去律，而学生在实数内容的学习中，已经习惯了乘法满足交换律和消去律，这是学生第一次遇到满足结合律但不满足交换律、消去律的运算. 因此，在这部分内容的教学中，应突出矩阵乘法的运算律与实数乘法的运算律的不同之处，使学生逐步加深理解.

从数学思想方法上来说，通过举反例说明一个命题不成立，是数学中常用的一种证明方法. 使用这种方法的关键是选择合适的反例，这也常常是困难所在，通常需要知识的积累和灵活应用相关的概念、性质.

四、教学设计案例

复合变换与二阶矩阵的乘法

1. 教学任务分析

上一讲已经学习了二阶矩阵和向量的乘法运算，并用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换. 本课时在此基础上，通过考察两个线性变换的复合引入矩阵之间的一种重要运算——矩阵的乘法.

2. 教学重点、难点

重点：矩阵的乘法运算.

难点：矩阵的乘法运算.

3. 教学基本流程

通过实例探究连续施行两次线性变换的作用效果

↓ 抽象 概括

复合变换、二阶矩阵的乘法

↓

二阶矩阵的乘法举例

↓

小结

4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
1. 教科书第 29 页的“探究”.	点明主题.	教师引导学生从具体实例入手进行考察.
2. 例 1.	通过几何直观，考察连续施行两个旋转变换的作用效果及其对应的矩阵.	教师引导，学生借助几何图形进行思考、回答.
3. 例 2.	通过代数运算，考察依次施行一个旋转变换和一个切变变换的作用效果，及其对应的矩阵与原来的两个线性变换的矩阵之间的关系.	教师引导，学生通过代数运算进行思考、回答. 教师再进行总结.
4. 一般地，在直角坐标系 Oxy 内，依次施行矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}$对应的线性变换，情况如何呢?	通过代数运算，得出一般规律.	学生模仿例 2 的过程，通过代数运算进行思考、回答. 教师进行归纳、总结.
5. 复合变换、二阶矩阵乘法的概念.	归纳、总结出数学概念.	教师叙述，进行规范化书写，并对矩阵乘法法则进行说明，以便学生尽快掌握.
6. 二阶矩阵的乘积在线性变换中的意义.	使学生充分认识线性变换的复合与二阶矩阵乘积的相互关系.	教师引导，学生思考、回答. 教师再进行总结.
7. 用二阶矩阵的乘积重新解决例 1、例 2 中的问题.	巩固矩阵乘法运算.	学生思考、讨论、回答，教师进行总结.
8. 小结：我们是怎样引入矩阵的乘法的? 线性变换的复合与二阶矩阵的乘积之间的关系是什么?	概括思想方法.	先由学生独立思考、回答、补充，教师再归纳：数形结合的思想，利用线性变换研究二阶矩阵；线性变换的复合与二阶矩阵的乘积之间也是一一对应的.
9. 作业：第 36 页第 2，3 题.		

五、习题解答

习题 2.1

1. (1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 7 & 29\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，它所对应的线性变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=3x+2y,\\ y'=x+y.\end{cases}$$

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，它所对应的线性变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x+2y,\\ y'=x+3y.\end{cases}$$

3. (1) $(\rho\cdot R_{30^\circ})\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$(\rho\cdot R_{30^\circ})\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$；

(2) $\rho\cdot R_{30^\circ}$把直角坐标系 Oxy 内单位正方形区域变成了以向量 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$（始点均为原点 O）为邻边的平行四边形. 图形略.

4. 略.

5. (1) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka & b\\ kc & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka & kb\\ c & d\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & kb\\ c & kd\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ kc & kd\end{pmatrix}$；

(4) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & ka+b\\ c & kc+d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+kc & b+kd\\ c & d\end{pmatrix}$.

习题 2.2

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是平面上的任意一个向量，则

$$(\rho\cdot(\sigma\cdot\tau))\boldsymbol{\alpha}=\rho((\sigma\cdot\tau)\boldsymbol{\alpha})=\rho(\sigma(\tau\boldsymbol{\alpha})),$$

$$((\rho\cdot\sigma)\cdot\tau)\boldsymbol{\alpha}=(\rho\cdot\sigma)(\tau\boldsymbol{\alpha})=\rho(\sigma(\tau\boldsymbol{\alpha})).$$

所以$(\rho\cdot(\sigma\cdot\tau))\boldsymbol{\alpha}=((\rho\cdot\sigma)\cdot\tau)\boldsymbol{\alpha}$. 从而$\rho\cdot(\sigma\cdot\tau)=(\rho\cdot\sigma)\cdot\tau$.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$是平面上的任意一个向量，则

$$(\sigma\cdot I)\boldsymbol{\alpha}=\sigma(I\boldsymbol{\alpha})=\sigma\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},$$

$$(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}=\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}.$$

所以$(\sigma\cdot I)\boldsymbol{\alpha}=(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}$. 从而$\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho$.

3. 略.

4. 略.

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{AA}^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$,

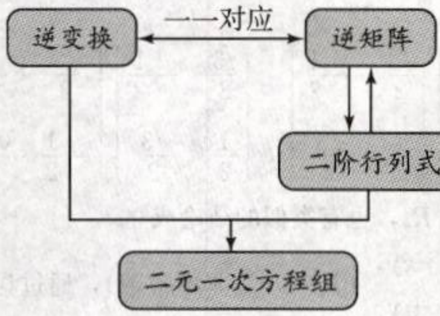
……

假设$\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{bmatrix}1&0\\n-1&1\end{bmatrix}$，则

$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{AA}^{n-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\n-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$.

第三讲　逆变换与逆矩阵

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 逆矩阵的概念与简单性质；

2. 用行列式求逆矩阵；

3. 能用变换的观点认识解二元一次方程组的意义，并会用系数矩阵的逆矩阵解系数矩阵可逆的二元一次方程组.

难点：逆矩阵的概念与简单性质.

三、编写意图与教学建议

实数的乘法运算中有一条重要性质：如果 $a\neq 0$，则 $\frac{1}{a}\cdot a=a\cdot\frac{1}{a}=1$. 本讲类比实数乘法的这个性质研究变换和矩阵，通过线性变换的逆变换引进逆矩阵，理解逆矩阵的性质；并引进二阶行列式，利用它研究逆矩阵，解决如何判断二阶矩阵是否可逆以及如何求可逆矩阵的逆矩阵的问题；本讲还从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义，并利用逆矩阵求解系数矩阵可逆的二元一次方程组. 教科书利用线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，把线性变换与二阶矩阵结合在一起进行研究.

（一）逆变换与逆矩阵

1. 逆变换与逆矩阵的引入

教科书通过一个探究栏目，分别把恒等变换 I 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}_2$ 作为数 1 的类比对象，研究“对于一个线性变换 ρ，是否存在一个线性变换 σ，使得 $\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$？对于一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，是否存在一个二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$？”

例 1 对特殊的旋转变换 R_{30° 进行讨论. 从几何直观上容易得到：可以找到一个线性变换 R_{-30°，使得 $R_{-30^\circ}\cdot R_{30^\circ}=R_{30^\circ}\cdot R_{-30^\circ}=I$. 当然，这个结论也可以通过逻辑推理进行验证. 在此基础上再根据矩

阵与线性变换的对应关系，把变换语言转换为矩阵的语言表示：对于二阶矩阵$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$，存在二阶矩阵$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_2.$$

进一步地，对一般的旋转变换 R_φ，也有类似的结论成立.

例 2 研究切变变换 ρ：$\begin{cases}x'=x+ky,\\ y'=0x+y\end{cases}$（其中 k 是非零常数），通过讨论它对任意一个平面向量的作用，得到：存在切变变换 σ：$\begin{cases}x'=x-ky,\\ y'=0x+y,\end{cases}$ 使得 $\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$. 与例 1 的过程类似，再转换为矩阵语言进行表述：对于二阶矩阵$\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，存在二阶矩阵$\begin{pmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_2.$$

进一步地，教科书设置一个“思考”栏目，让学生类比例 1、例 2 的研究方式，探讨对于另一类切变变换、伸缩变换和反射变换，是否也有类似的结论成立. 容易得到，答案是肯定的.

在探究这几个具体线性变换的基础上，教科书抽象概括出逆变换和逆矩阵的概念.

2. 对定义的说明

（1）可逆矩阵的定义方式比较抽象，定义中只是抽象地说“对于一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2$”，没有说明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是什么，以及如何得到矩阵 $\boldsymbol{B}$. 这是典型的存在性定义，学生不易理解. 教学中应充分借助几何直观，通过研究可逆的线性变换来理解它. 需要注意的是，本专题研究可逆线性变换的主要目的就是为了引入可逆矩阵，从而为解线性方程组准备工具. 这部分的教学重心应落实在可逆矩阵的定义上.

教科书为了引出可逆矩阵的定义，所选用的几个引例中的线性变换都是可逆的. 为了避免学生产生错觉，给出定义后，还应说明有些矩阵是不可逆的. 教科书通过研究投影变换 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\ y'=0\end{cases}$ 来说明这一点. 这也为讨论矩阵可逆的条件埋下伏笔.

（2）可逆的线性变换有几种等价的定义方式，通常按下面的方式来定义：

如果线性变换 ρ 是一一对应，即线性变换 ρ 满足：

① 若 P_1，P_2 是直角坐标系 Oxy 内的任意两点，且 $P_1\neq P_2$，则 $\rho(P_1)\neq\rho(P_2)$；

② 对平面 Oxy 上的任意一点 Q，可以找到此平面上的一点 P，使得 $\rho(P)=Q$.

则称 ρ 是可逆的.

教科书没有采用这种定义方式，而采用了一种等价的定义：设 ρ 是一个线性变换，如果存在线性变换 σ，使得 $\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$，则称线性变换 ρ 是可逆的. 这种定义方式的优点是：① 能充分利用几何

直观进行把握，简洁、易懂；② 便于引出可逆矩阵的定义.

(3) 对例题呈现方式的说明

例 1、例 2 是为了回应“探究”中提出的问题，它们都没有独立地呈现题干与解答过程，其呈现方式不同于例题的传统呈现方式，这样做更能体现出探究的特点，并能减少重复，使过程更为简洁.

3. 逆矩阵的性质

引入可逆变换、可逆矩阵后，一个自然的问题是：如果一个线性变换是可逆的，那么它的逆变换是否唯一？相应地，如果一个矩阵是可逆的，那么它的逆矩阵是否唯一？教科书从特殊到一般，先研究一个具体的可逆变换，从几何直观上说明其逆变换是唯一的，从而对应矩阵的逆矩阵是唯一的；进而用逻辑推理证明任意可逆矩阵的逆矩阵是唯一的. 由于线性变换与矩阵是一一对应的，因此，任意可逆线性变换的逆变换也是唯一的.

接着，教科书讨论逆矩阵的另一个重要性质，采用的方法也是从特殊到一般，先研究两个具体的可逆变换乘积的逆变换与这两个可逆变换之间的关系，再推广到一般情形——性质 2，并给出证明. 教科书还借助学生熟悉的一些生活现象，帮助他们理解这个性质. 即把它与穿衣服和脱衣服的过程相类比，把穿衣服和脱衣服的过程用数学符号表示，就是性质 2.

（二）二阶行列式与逆矩阵

本小节讨论判别二阶矩阵是否可逆的准则，以及如何求可逆矩阵的逆矩阵.

教科书从两个具体实例入手，利用矩阵可逆的定义进行讨论. 解决例 1、例 2 这两个问题的思路和方法是相同的，即先假设矩阵可逆，则问题归结为判断四元一次方程组是否有解，事实上就是研究两个二元一次方程组是否都有解. 例如，例 1 中的四元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4y=1,\\x+2y=0,\\3u+4v=0,\\u+2v=1,\end{cases}$$

就是下面两个二元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4y=1,\\x+2y=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}3u+4v=0,\\u+2v=1.\end{cases}$$

由于这两个二元一次方程组都有解，因此例 1 中的矩阵是可逆的，并且得到其逆矩阵. 而例 2 中的两个二元一次方程组无解，因此矩阵是不可逆的. 教科书进一步分析这两个例题中二元一次方程组有解、无解的原因. 在例 1 的二元一次方程组里，两个方程中 x 项的系数与 y 项的系数不对应成比例(u 项的系数与 v 项的系数也不对应成比例)，因此二元一次方程组有解；在例 2 的二元一次方程组里，两个方程中 x 项的系数与 y 项的系数对应成比例(u 项的系数与 v 项的系数也对应成比例)，因此二元一次方程组无解. 也就是说矩阵的第一列与第二列是否成比例决定了该矩阵是否可逆. 进而猜测对任意一个矩阵也有类似的结论成立，并给出证明，得到矩阵可逆的充分必要条件，以及可逆矩阵的逆矩阵的表达式. 在此过程中，非常自然地引入行列式的概念.

值得注意的是，在例 1、例 2 的解答过程中，保留了中间过程 $(3\times2-4\times1)y=-1$ 和 $(2\times2-4\times1)y=-1$，其用意是为推广到一般情形作铺垫. 教学中应充分予以关注.

在推导矩阵可逆的必要条件时，即由两个二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+cy=1,\\bx+dy=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}au+cv=0,\\bu+dv=1\end{cases}$$

得到 $ad-bc\neq0$ 时，教科书中的推导过程非常简洁，但技巧性较强，学生不易想到，教学中可采用直接解方程组的方法得出结论．下面的证明方法供教学时参考：

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 是可逆的，其逆矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x & y\\u & v\end{bmatrix}$，那么应该有

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}. \quad ①$$

显然，a，b，c，d 不全为 0(否则，对任意一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，都有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$)，不妨假设 $a\neq0$. ①式等价于两个二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+cy=1,\\bx+dy=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}au+cv=0, & ②\\bu+dv=1 & ③\end{cases}$$

都有解．③×a－②×b 得

$$(ad-bc)v=a,$$

所以 $ad-bc\neq0$.

在二阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$ 中，左上角元素与右下角元素的连线称为主对角线，右上角元素与左下角元素的连线称为副(次)对角线．这样，二阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$ 的展开式等于主对角线上两个元素的乘积与副对角线上两个元素的乘积之差．学生初次接触二阶行列式时，容易把它与二阶矩阵相混淆．教学中应提醒学生：二阶矩阵仅仅是一张数表，而二阶行列式表示一个数或代数式.

例 3 帮助学生巩固二阶行列式的概念；例 4 使学生进一步熟悉矩阵可逆的充分必要条件，以及可逆矩阵的逆矩阵的求法.

（三）逆矩阵与二元一次方程组

本小节从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义，并利用逆矩阵解一类特殊的二元一次方程组.

1. 二元一次方程组的矩阵形式

利用平面向量相等的定义、矩阵与向量乘法的定义，容易得到二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f\end{cases}$$

的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}.$$

再由线性变换的形式

$$\rho:\ \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

容易从线性变换的角度认识解二元一次方程组的意义．这就赋予解线性方程组以明显的几何意义.

教科书的“旁白”说明，尽管从线性变换的角度可以清晰地认识到解二元一次方程组的意义，但是，在实际操作中，如果线性变换 ρ 的意义不明显或不为我们熟知，那么很难找出向量 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，使得 $\rho\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$. 因此，需要从代数的角度找出解二元一次方程组的方法.

2. 逆矩阵与二元一次方程组

从前面讨论逆矩阵和二阶行列式的过程中可以看到，解二元一次方程组与求矩阵的逆矩阵这两类问题有内在联系. 教科书通过“探究”栏目提出问题：“如果二元一次方程组的系数矩阵可逆，能利用逆矩阵来解方程组吗?”教学中可引导学生回顾前面讨论逆矩阵的过程，并让学生思考这个“探究”.

先讨论一个具体的二元一次方程组

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},$$

其系数矩阵对应的线性变换是旋转变换 R_{30°，我们非常熟悉这个变换，因此，从几何直观上容易得到该方程组有唯一解，且解为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

进而猜想出一般结论（即教科书中的定理）：

如果关于变量 x，y 的二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f\end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 可逆，那么该方程组有唯一解

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}.$$

并给出代数证明.

推论给出了齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，这也是讨论矩阵的特征值、特征向量的基础.

如果二元一次方程组 $\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f\end{cases}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 不可逆，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行对应成比例，为方便起见记为 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 容易得到，此时方程组解的情况为：

(1) 当 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$ 时，方程组有无穷多组解；

(2) 当 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e}{f}$ 时，方程组无解.

需要提醒学生注意的是，利用逆矩阵只能解决系数矩阵可逆的二元一次方程组的求解问题，这种方法可以推广到解系数矩阵可逆的三元一次、四元一次等方程组，但对于一般的线性方程组，一般不采用或不能采用本节介绍的方法，需要采用对增广矩阵进行初等变换的方法加以解决.

解二元一次方程组是学生在初中就已熟悉的. 这里用一种新的工具对它再次进行讨论，体现了线性变换的观点，教学中应让学生作适当比较，以培养学生用新的观点认识旧的问题的意识.

四、习题解答

习题 3.1

1. (1) 设 $P(x, y)$ 直角坐标系 Oxy 内的任意一点，在伸缩变换 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=ky\end{cases}$ 的作用下，点 $P(x, y)$ 的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 k 倍，即 $\rho\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ky\end{bmatrix}$. 从而伸缩变换 ρ 把点 $P(x, y)$ 变为点 $P'(x, ky)$. 如果再进行一次伸缩变换 σ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=\dfrac{1}{k}y,\end{cases}$ 则点 $P'(x, ky)$ 又变回到点 $P(x, y)$. 因此，对直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，均有

$$(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\rho\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}.$$

即复合变换 $\sigma\cdot\rho$ 使得每个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 保持不动，从而 $\sigma\cdot\rho=I$.

类似地，可以得到 $\rho\cdot\sigma=I$.

综上所述，$\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$.

所以，伸缩变换 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=ky\end{cases}$ 可逆，其逆变换为 σ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=\dfrac{1}{k}y.\end{cases}$

(2) 关于 x 轴的反射变换 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=-y\end{cases}$ 可逆，其逆变换为 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\y'=-y.\end{cases}$

2. (1) $\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ 可逆，其逆矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ 可逆，其逆矩阵为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 不可逆；

(4) $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 可逆，其逆矩阵为 $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$.

3. 设线性变换 ρ 是可逆的，σ_1，σ_2 都是它的逆变换，则

$$\rho\cdot\sigma_1=\sigma_1\cdot\rho=I,\ \rho\cdot\sigma_2=\sigma_2\cdot\rho=I.$$

从而

$$\sigma_1=\sigma_1\cdot I=\sigma_1\cdot(\rho\cdot\sigma_2)=(\sigma_1\cdot\rho)\cdot\sigma_2=I\cdot\sigma_2=\sigma_2.$$

所以，逆变换是唯一的.

4. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

所以，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

5. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

从而

$$A^2(A^{-1})^2=A(AA^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$
$$(A^{-1})^2A^2=A^{-1}(A^{-1}A)A=A^{-1}EA=A^{-1}A=E.$$

所以，A^2 也可逆且$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$.

习题 3.2

1. (1) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$；

(2) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\times0-0\times1=0$；

(3) $\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5\times(-1)-(-3)\times2=1$；

(4) $\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-1)-(-2)\times0=(\lambda-1)^2$.

2. (1) 因为

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq0,$$

所以$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{-1} & \frac{0}{-1}\\ \frac{0}{-1} & \frac{1}{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

(2) 因为

$$\begin{vmatrix}6 & -3\\ -4 & 2\end{vmatrix}=6\times2-(-3)\times(-4)=0,$$

所以$\begin{pmatrix}6 & -3\\ -4 & 2\end{pmatrix}$不可逆；

(3) 因为

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\neq0,$$

所以$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{-5} & \frac{-2}{-5}\\ \frac{-1}{-5} & \frac{3}{-5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix};$$

(4) 因为

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq0,$$

所以$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

3.（1）当

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & k\end{vmatrix}=2k-15\neq 0,$$

即 $k\neq\dfrac{15}{2}$时，矩阵$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & k\end{bmatrix}$可逆；

（2）当 $k\neq\dfrac{15}{2}$时，

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & k\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{k}{2k-15} & \dfrac{-3}{2k-15}\\ \dfrac{-5}{2k-15} & \dfrac{2}{2k-15}\end{bmatrix}.$$

要使其所有元素都是整数必须 $2k-15=\pm 1$，所以 $k=7$，或 8.

4. 矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$可逆当且仅当

$$\begin{vmatrix}a & -b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2+b^2\neq 0.$$

即当 a，b 不全为 0 时，矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$可逆．此时，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2}\\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2}\end{bmatrix}.$$

5.（1）因为

$$\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以$\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$可逆，且

$$\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

在原式的两边同时左乘矩阵$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，得

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52 & 20\\ 32 & 13\end{bmatrix};$$

（2）因为

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$可逆，且

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

在原式的两边同时右乘矩阵$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 18\\ 9 & -14\end{pmatrix}.$$

习题 3.3

1. (1) $\begin{cases}x=-1,\\ y=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}$

2. (1) 原方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以$\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ -12\end{pmatrix}.$$

即方程组的解为

$$\begin{cases}x=-7,\\ y=-12;\end{cases}$$

(2) 原方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -6\end{pmatrix}.$$

即方程组的解为

$$\begin{cases}x=4,\\ y=-6;\end{cases}$$

(3) 原方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix}=2\neq0,$$

所以$\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}\\-2&\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}\\-2&\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

即方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

3. 原方程组变形为

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-3\\-2&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

它有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-3\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

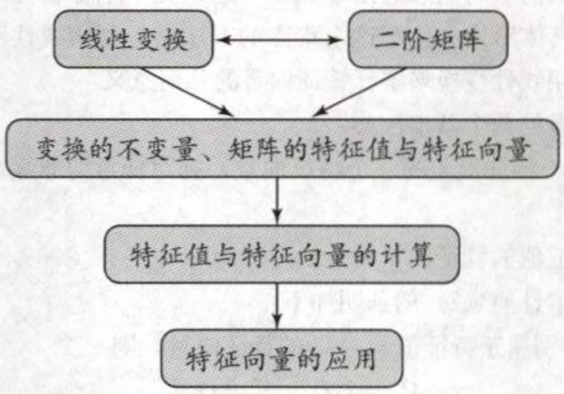
即

$$\lambda^2-3\lambda-4=0.$$

解得 $\lambda=-1$，或 $\lambda=4$. 所以，当 $\lambda=-1$，或 $\lambda=4$ 时，二元一次方程组有非零解.

第四讲 变换的不变量与矩阵的特征向量

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念；
2. 矩阵的特征值与特征向量的计算；
3. 特征向量的简单应用.

难点：

1. 矩阵的特征值与特征向量的概念；
2. 矩阵的特征值与特征向量的计算.

三、编写意图与教学建议

本讲利用线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系，通过研究线性变换的一种重要的不变量——“不变直线”，引入矩阵的特征向量；并从线性变换出发，讨论特征向量的性质；进而应用特征向量的性质解决一类实际问题（人口迁移问题）.

（一）变换的不变量——矩阵的特征向量

1. 特征值与特征向量

教科书以问题为先导，设置一个“探究”栏目，提出：“对于线性变换，是否存在平面上的直线，使得该直线在这个线性变换的作用下保持不变呢？是否存在向量，使得该向量在这个线性变换的作用下具有某种‘不变性’呢?”接着考察两个线性变换：关于 x 轴的反射变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，伸缩变换 ρ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，从几何直观上可以直接给出肯定的回答. 即：对于这两个线性变换，

在线性变换的作用下，平面上的确有一些向量具有“不变性”——变成了与自身共线的向量，即变成了原来向量的某个倍数；并用矩阵的形式表示出来. 进而再将其一般化，引入矩阵的特征值、特征向量的概念.

研究一类对象的“不变量”，是数学中很重要的问题. 事实上，学生在以往的代数、几何学习中，也研究过类似的问题(例如圆锥曲线的离心率 e)，教学中应引导学生回顾、思考，以提高他们对“不变量”研究的认识.

理解矩阵的特征值、特征向量的概念的困难在于，这也是一个存在性的定义，即定义中没有给出特征值 λ 以及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的具体形式. 化解这个难点的方法是，利用线性变换，从几何直观上引入特征值、特征向量的概念，并用线性变换来解释特征向量的几何意义.

教科书还给出了特征向量的两个基本性质：

(1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量，则对任意的非零常数 k，$k\boldsymbol{\xi}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量；

(2) 属于矩阵的不同特征值的特征向量不共线.

并证明了基本性质 (1). 基本性质 (2) 的证明如下：

设 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{A\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2.$$

假设特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 共线，则存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{\xi}_1+\lambda\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\lambda\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}. \qquad ②$$

②$-\lambda_2\times$①，得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}.$$

与特征向量是非零向量(定义)矛盾.

所以 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 不共线.

例 3 通过几何直观说明，如果我们限制在实数集中研究矩阵的特征值、特征向量，那么有些矩阵没有特征值和特征向量.

2. 特征值与特征向量的计算

在引入矩阵的特征值和特征向量的概念时，我们通过考察矩阵所对应的线性变换，从几何直观上“看出了”一些特殊矩阵的特征值和特征向量. 但是，对一般的二阶矩阵，由于我们不太了解与之对应的线性变换的几何特征，所以很难通过几何直观的方法“看出”这些矩阵的特征值和特征向量. 自然地，需要探究求任意一个矩阵的特征值和特征向量的方法.

教科书借助实例 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 探究求矩阵特征值和特征向量的一般方法，从特征值和特征向量的定义出发，把定义中的等式写成一个等价的齐次二元一次方程组，由于特征向量是该方程组的一个非零解，根据齐次二元一次方程组有非零解的充分必要条件，其系数矩阵的行列式等于 0，于是得到一个关于特征值 λ 的一元二次方程，由此求出矩阵的特征值，再把所得的 λ 的值代入齐次二元一次方程组，

求该方程组的一个非零解 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{\xi}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量.

类似地，教科书给出了求一般二阶矩阵的特征值和特征向量的过程与方法，由此容易总结出求二阶矩阵特征值和特征向量的步骤. 教学中应注意：

(1) 这里的方程组含有参数 λ，应先确定 λ 的值，再求解相应的二元一次方程组；

(2) 这里仅要求学生掌握特征值为两个不同实数的矩阵的特征值与特征向量的求法，对求其他类型矩阵的特征值与特征向量不作要求；

(3) 对确定的 λ 值，相应的二元一次方程组的任意一个非零解都是特征向量，即矩阵的特征向量不唯一.

（二）特征向量的应用

特征向量在数学和实际问题中有着广泛应用，本小节利用矩阵的特征向量给出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$（$n\in\mathbf{N}^*$）简单的表示，并利用特征向量以及这种简单的表示解决一类实际问题——马尔可夫过程.

1. $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的简单表示

教科书首先研究一个实例，从中获得感知：如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$（$n\in\mathbf{N}^*$）（用数学归纳法容易证明这个结论）；接着继续讨论这个实例，对一般平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，可以用矩阵的两个特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 和相应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 简洁地表示出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$（$n\in\mathbf{N}^*$）；进一步地，对一般的矩阵 $\boldsymbol{A}$，用 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值 λ_1，λ_2 和相应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 简洁地表示出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$（$n\in\mathbf{N}^*$），并用数学归纳法给出证明.

需要指出的是，这里研究的矩阵都有两个不同的特征值，因而相应的两个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 不共线，根据平面向量基本定理得，任意平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2$（其中 t_1，t_2 为实数）的形式.

2. 特征向量在实际问题中的应用

教科书首先研究人口迁移问题，用 t_0，c_0 分别表示现在城镇居民与农村居民占总人口的比重，t_n，c_n 分别表示 n($n=1$，2，3，…)年后城镇居民与农村居民占总人口的比重. 先分析 $n=1$ 的情形，t_1，c_1 可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}t_1\\c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix};$$

当 $n=2$ 时，

$$\begin{cases}t_2=0.99t_1+0.05c_1,\\c_2=0.01t_1+0.95c_1,\end{cases}$$

所以

$$\begin{bmatrix}t_2\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^2\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix};$$

一般地，可以得到

$$\begin{bmatrix}t_n\\c_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_{n-1}\\c_{n-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^2\begin{bmatrix}t_{n-2}\\c_{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{P}^n\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \qquad ①$$

严格地说，应该用数学归纳法写出①式的证明过程，教科书虽然没有写出这个过程，但①式的推导过程实际上已蕴涵了数学归纳法的思想，证明过程可由学生自己完成.

利用性质 1 能简捷地计算出 $\begin{bmatrix}t_n\\c_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^n\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}$，这就需要求出矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}$ 的特征值以及对

应的特征向量．教科书直接给出了更一般的矩阵

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{bmatrix}\ (0<p,\ q<1)$$

的特征值是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$，对应的一个特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}q\\ p\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$．其证明过程如下：

矩阵 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{bmatrix}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-(1-p) & -q\\ -p & \lambda-(1-q)\end{vmatrix}\\&=\lambda^2-(2-p-q)\lambda+1-(p+q)\\&=(\lambda-1)[\lambda-(1-p-q)],\end{aligned}$$

令 $f(\lambda)=0$，得矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$.

对于特征值 $\lambda_1=1$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}px-qy=0,\\ -px+qy=0,\end{cases}$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=q,\\ y=p.\end{cases}$ 因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}q\\ p\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量.

对于特征值 $\lambda_2=1-p-q$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-qx-qy=0,\\ -px-py=0,\end{cases}$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$ 因此，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 的属于特征值 $\lambda_2=1-p-q$ 的一个特征向量.

当人口的最初分布为 $\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.3\end{bmatrix}$ 时，在讨论人口最终分布的过程中，涉及到极限 $\lim\limits_{n\to\infty}0.94^n=0$，教师可以引导学生使用信息技术手段(如 excel 表等)，观察函数值的变化趋势.

教科书进一步指出，无论最初的 t_0，c_0 $(0\leqslant t_0,\ c_0\leqslant 1,\ t_0+c_0=1)$ 是什么，由式子 $\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 可以得到，k_1 的值始终为 $k_1=\dfrac{50}{3}$(但对于不同的 $\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix}$，$k_2$ 的取值不同)，因而仍然有 $t_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\dfrac{5}{6}$，$c_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{1}{6}$.

最后，教科书给出了特征向量在扩散现象中的应用．教学中，可引导学生类比人口迁移问题的讨论，给出解答过程.

在物理学、生物学与社会科学中有一大类问题，它们研究的是事件的一个序列，其中每一事件仅与紧挨着它前面的事件有关．这样一个事件序列称为马尔可夫过程．教科书中研究的人口迁移问题、扩散现象都是马尔可夫过程.

四、习题解答

习题 4.1

1. (1) 旋转变换 R_π 把平面上的每个向量都变成它的相反向量，因此旋转变换 R_π 的特征值为 -1，每

个非 0 向量都是旋转变换 R_π 的特征向量；

(2) 恒等变换保持平面上的每个向量不变，因此恒等变换的特征值为 1，每个非 0 向量都是恒等变换的特征向量；

(3) 零变换 0 把平面上的每个向量都变为 0 向量，因此零变换的特征值为 0，每个非 0 向量都是零变换的特征向量；

(4) 关于 x 轴的正投影变换分别把向量 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，因此，该线性变换的特征值分别为 1，0，相应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ （其中 k_1，$k_2\in\mathbf{R}$，且 k_1，$k_2\neq0$）；

(5) 关于 y 轴的反射变换分别把向量 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}-k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$，因此，该线性变换的特征值分别为 -1，1，相应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ （其中 k_1，$k_2\in\mathbf{R}$，且 k_1，$k_2\neq0$）；

(6) 平行于 y 轴的切变变换把向量 $\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$，因此，该线性变换的特征值为 1，特征向量为 $\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$ （其中 $k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$）.

2. 因为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的分别属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，所以

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1，\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2.$$

假设向量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 共线，又因为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2\neq\mathbf{0}$，所以存在非 0 实数 λ，使得 $\boldsymbol{\xi}_2=\lambda\boldsymbol{\xi}_1$.

于是

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{\xi}_1)=\lambda\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1=\lambda\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,$$
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\lambda\boldsymbol{\xi}_1=\lambda\lambda_2\boldsymbol{\xi}_1.$$

所以 $\lambda\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1=\lambda\lambda_2\boldsymbol{\xi}_1$. 从而

$$\lambda(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}.$$

因为 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\lambda(\lambda_1-\lambda_2)\neq0$. 所以 $\boldsymbol{\xi}_1=0$. 与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量矛盾！所以假设不成立. 所以，向量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 不共线.

3. (1) 该矩阵的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 0 & \lambda+\dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)(\lambda-2),$$

令 $f(\lambda)=0$，得矩阵的特征值 $\lambda_1=-\dfrac{1}{3}$，$\lambda_2=2$.

对于特征值 $\lambda_1=-\dfrac{1}{3}$，解相应的线性方程

$$-\frac{7}{3}x=0,$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$ 因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵的属于特征值 $\lambda_1=-\dfrac{1}{3}$ 的一个特征向量.

对于特征值 $\lambda_2=2$，解相应的线性方程

$$\frac{7}{3}y=0,$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=2$的一个特征向量；

(2) 该矩阵的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3).$$

令$f(\lambda)=0$，得矩阵的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

对于特征值$\lambda_1=1$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-2y=0,\\-2y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=1$的一个特征向量.

对于特征值$\lambda_2=3$，解相应的方程

$$2x-2y=0,$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=3$的一个特征向量；

(3) 该矩阵的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\-4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2-25=(\lambda+5)(\lambda-5).$$

令$f(\lambda)=0$，得矩阵的特征值为$\lambda_1=-5$，$\lambda_2=5$.

对于特征值$\lambda_1=-5$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-8x-4y=0,\\-4x-2y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=-5$的一个特征向量.

对于特征值$\lambda_2=5$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}2x-4y=0,\\-4x+8y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=5$的一个特征向量；

(4) 该矩阵的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -5\\-2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda+1)(\lambda-6).$$

令$f(\lambda)=0$，得矩阵的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=6$.

对于特征值$\lambda_1=-1$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-2x-5y=0,\\-2x-5y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=2,\\y=-5.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=-1$的一个特征向量.

对于特征值$\lambda_2=6$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}5x-5y=0,\\-2x+2y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$是矩阵的属于特征值$\lambda_1=6$的一个特征向量.

4. (1) 由$\begin{bmatrix}2&a\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，得

$$\begin{cases}2+2a=2,\\2b=4.\end{cases}$$

解得$a=0$，$b=2$.

所以，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$；

(2) 设矩阵$\mathbf{A}$的属于特征向量$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的特征值为$\lambda$，则

$$\begin{bmatrix}2&a\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}2+2a=\lambda,\\2b=2\lambda.\end{cases}$$

所以$a=\dfrac{\lambda}{2}-1$，$b=\lambda$.

所以，满足条件的所有二阶矩阵$\mathbf{A}$所成的集合为

$$\left\{\begin{bmatrix}2&\dfrac{\lambda}{2}-1\\0&\lambda\end{bmatrix}\middle|\lambda\in\mathbf{R}\right\}.$$

习题 4.2

1. 矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-8&5\\-6&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$$

令$f(\lambda)=0$，得矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$.

对于特征值$\lambda_1=2$，解相应的线性方程

$$-6x+5y=0,$$

得一个非零解$\begin{cases}x=5,\\y=6.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$是矩阵$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1=2$的一个特征向量.

对于特征值$\lambda_2=3$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-5x+5y=0,\\-6x+6y=0,\end{cases}$$

得一个非零解$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$是矩阵$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1=3$的一个特征向量.

设$\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\xi}_1+t\boldsymbol{\xi}_2$，则

$$\begin{cases}6=5s+t,\\7=6s+t.\end{cases}$$

解得$s=1$，$t=1$. 从而$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$. 所以

$$A^5\boldsymbol{\alpha}=A^5(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=2^5\times\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+3^5\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}403\\435\end{bmatrix},$$

$$A^{100}\boldsymbol{\alpha}=A^{100}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=2^{100}\times\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+3^{100}\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times2^{100}+3^{100}\\6\times2^{100}+3^{100}\end{bmatrix}.$$

2. 证明：(1) 该矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-(1-p) & -q\\ -p & \lambda-(1-q)\end{vmatrix}=\lambda^2-[2-(p+q)]\lambda+1-p-q.$$

令 $f(\lambda)=0$，得矩阵的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$；

(2) 对于特征值 $\lambda_1=1$，得相应的线性方程组

$$\begin{cases}px-qy=0,\\-px+qy=0.\end{cases}$$

令 $x=q$，则 $y=p$. 于是得该线性方程组的一个非零解 $\begin{cases}x=q,\\y=p.\end{cases}$ 因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}q\\p\end{bmatrix}$ 是矩阵的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量.

对于特征值 $\lambda_2=1-p-q$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}-qx-qy=0,\\-px-py=0,\end{cases}$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$ 因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 P 的属于特征值 $\lambda_2=1-p-q$ 的一个特征向量.

3. 略.

III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. 矩阵 $\begin{bmatrix}4 & 3\\-1 & 3\end{bmatrix}$ 的行列式的值为（　　）.

A. 9　　B. 15　　C. -9　　D. -15

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则（　　）.

A. $a=d$ 且 $b=0$　　B. $a=d$ 且 $c=0$

C. $a=d$ 且 $b=c$　　D. $a=d$ 且 $b=c=0$

3. 矩阵 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为（　　）.

A. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

4. 下面四种说法：

① 矩阵 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的是反射变换；

② 矩阵$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$对应的是伸缩变换；

③ 矩阵$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$对应的是旋转变换；

④ 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$对应的是切变变换.

其中正确的是（　　）.

A. ②③④　　B. ①③④　　C. ①③　　D. ①④

5. 若 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{P}$ 为矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为平面上的向量，以下有四种说法：

① 若 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{MP}$，且 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$；

② 若 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{0}$. 则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$；

③ $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$；

④ 若 $\boldsymbol{M}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{M\alpha}=\boldsymbol{M\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

其中正确的是（　　）.

A. ①②③　　B. ②③④　　C. ①②　　D. ③④

6. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$ 对应的变换把直线 $y=-x+1$ 变成（　　）.

A. 直线 $y=x+1$　　B. 直线 $y=-x-1$

C. 直线 $y=x-1$　　D. 直线 $y=-x+1$

二、填空题

7. $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=$____________.

8. $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}=$____________.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

10. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值为____________.

三、解答题

11. 利用逆矩阵解二元一次方程组：

$$\begin{cases}x-3y=11,\\2x-y=1.\end{cases}$$

12. 已知矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应的变换把点 $A(1,2)$ 变成点 $A'(2,3)$，把点 $B(-1,3)$ 变成点 $B'(2,1)$. 那么这个变换把点 $C(-2,3)$ 变成什么？

13. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-10\\5\end{bmatrix}$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1，λ_2（其中 $\lambda_1>\lambda_2$）；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$.

14. 若矩阵 **A** 对应的变换将平面上任一向量变成零向量，求证：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

参考答案

1. B.　2. B.　3. A.　4. B.　5. D.　6. A.　7. $\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$.　8. $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$.　10. $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

11. 略.

12. 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2b\\c+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+3b\\-c+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{cases}a+2b=2,\\c+2d=3,\\-a+3b=2,\\-c+3d=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=\dfrac{2}{5},\\b=\dfrac{4}{5},\\c=\dfrac{7}{5},\\d=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{7}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$.

因为

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{7}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix},$$

所以矩阵 **M** 对应的变换把点 C 变成点 $\left(\frac{8}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

13. (1) 矩阵 **A** 有两个特征值 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_2=-4$；

(2) $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}770\\-190\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2-3\times4^{101}\\2+3\times4^{100}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2-12\times(-4)^n\\2+3\times(-4)^n\end{bmatrix}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 考虑两基向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，依题意有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 所以 $a=b=c=d=0$.

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$.