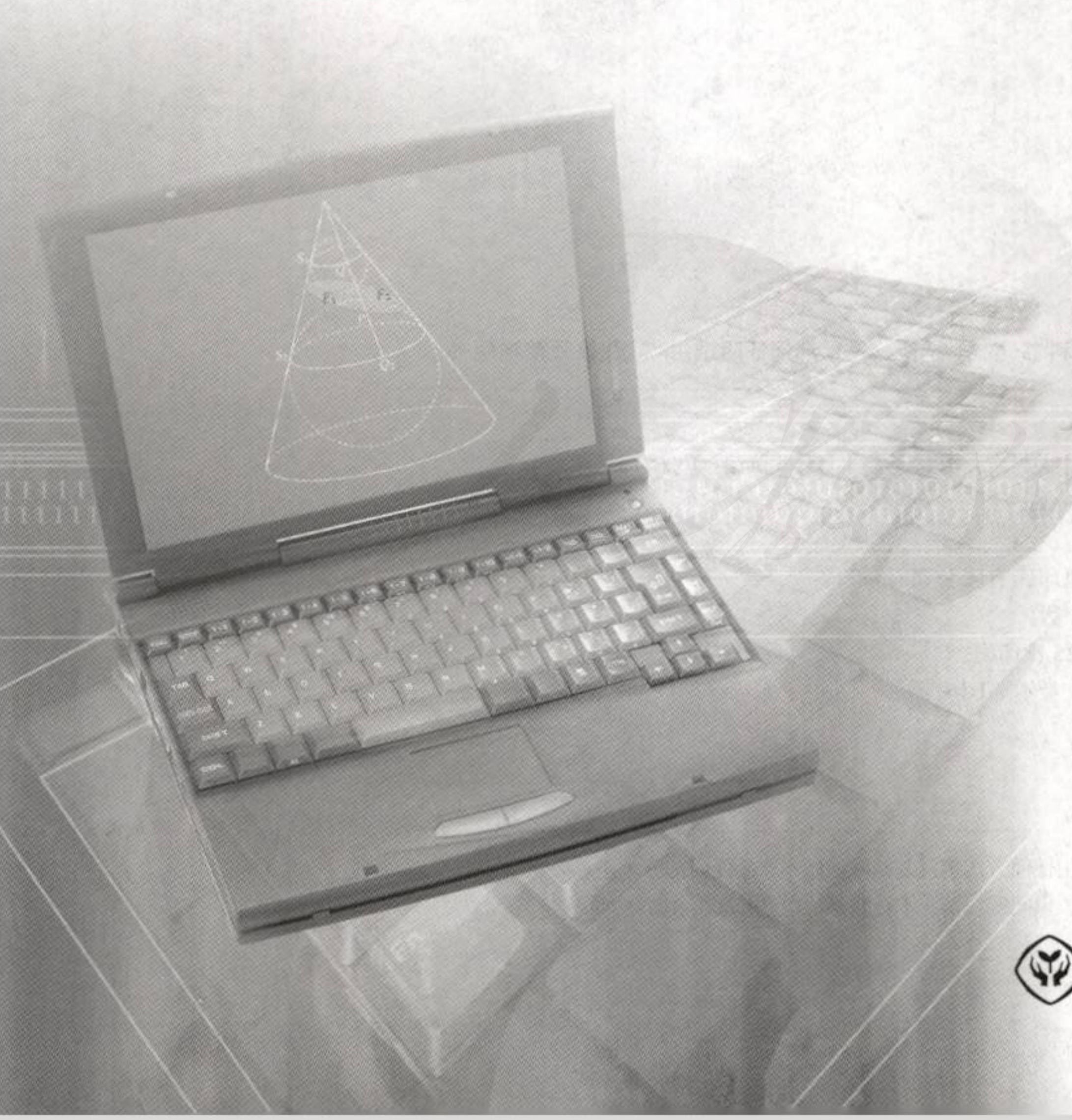
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-1

几何证明选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4—1几何证明选讲（A版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —2版. —北京：人民教育出版社，2007.4（2020.1 重印）

ISBN 978-7-107-19027-8

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①人… ②课… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033726 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-1 几何证明选讲 A版 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）

网 址 http://www.pep.com.cn

经 销 全国新华书店

印 刷 保定市中画美凯印刷有限公司

版 次 2007年4月第2版

印 次 2020年1月第25次印刷

开 本 890毫米×1240毫米 1/16

印 张 3.25

字 数 84千字

定 价 8.10元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

编　　者：喻　平　章建跃
责任编辑：章建跃　刘长明
美术编辑：王俊宏　王　艾

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容. 本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1. “亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情.

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习.

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情.

2. “问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

提问是创新的开始. “看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神.

3. “思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括.

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”。

4. "联系性"：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{array}{ccc} & \text{推广} & \\ & \uparrow & \\ \text{类比} \leftarrow & \text{当前内容} & \rightarrow \text{类比} \\ & \downarrow & \\ & \text{特殊化} & \end{array}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的"数""形"属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想．包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

(1) 课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图．主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）．说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用"知识框图"或"表格"的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方

面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(3) 重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是选修系列 4-1《几何证明选讲》的教师教学用书，包含相似三角形的判定及有关性质、直线与圆的位置关系和圆锥曲线性质的探讨等三讲内容. 全书共 18 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲	相似三角形的判定及有关性质	约 6 课时
第二讲	直线与圆的位置关系	约 8 课时
第三讲	圆锥曲线性质的探讨	约 3 课时

机动 1 课时.

参加本书编写的有喻平、章建跃，责任编辑章建跃.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

本专题主要包括三方面内容：相似三角形的判定及有关性质；直线与圆的位置关系；圆锥曲线的性质.

通过本专题的学习，应当使学生达到如下目标：

(1) 获得必要的数学基础知识和基本技能. 理解基本的数学概念，理解定理的证明过程，理解定理的本质；掌握数学证明的基本方法，能够应用定理去证明一些基本的几何问题；能够解决一些基本的、与几何有关的现实问题.

(2) 发展数学思维能力和空间想像能力. 知道数学证明的必要性，经历数学定理的产生过程；形成逻辑思维的习惯，能用逻辑思维方式去认识问题和解决问题；掌握基本的探究数学问题的方法，如类比、特殊化、推广等，初步形成提出问题的意识和能力；通过平面与圆柱面的截线、平面与圆锥面的截线等内容的学习，进一步发展空间想像能力.

(3) 发展数学应用意识和创新意识，能对现实世界中蕴涵的几何模型进行思考和作出判断.

(4) 提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度.

2. 学习目标

第一讲　相似三角形的判定及有关性质

(1) 平行线分线段定理

① 了解平行线等分线段定理产生的背景，体验定理的产生过程；

② 探索并理解平行线等分线段定理的证明过程；

③ 理解平行线等分线段定理的本质；

④ 能独立证明平行线等分线段定理的推论 1、推论 2；

⑤ 能应用定理和推论解决相关的几何计算问题和证明问题；

⑥ 体会数学证明的必要性；

⑦ 初步体会由特殊到一般发现数学结论的思想方法.

(2) 平行线分线段成比例定理

① 了解平行线分线段成比例定理产生的背景，体验定理的产生过程.

② 能独立证明比例的两条性质：

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

③ 探索和理解定理的证明过程；

④ 理解定理的本质，正确表述平行线分线段成比例定理与平行线等分线段定理的联系和区别；

⑤ 理解定理的推论；

⑥ 能应用定理及推论解决相关的几何计算问题和证明问题；

⑦ 理解例 3 的内容和证明；

⑧ 感知平行线分线段成比例定理向空间的推广，探索并证明空间形式的“平行面分线段成比例定理”；

⑨ 进一步体会由特殊到一般发现数学定理的思想方法.

(3) 相似三角形的判定及性质

① 理解相似三角形的定义；

② 探索预备定理的证明，理解预备定理的本质；

③ 探究判定定理 1 的证明，理解定理内容，能应用定理证明相关几何问题；

④ 探究判定定理 2 的证明，初步体会引理在解决问题中的作用，初步学会使用同一法证明简单的几何问题. 理解判定定理 2 的内容，能应用定理证明相关几何问题；

⑤ 探究判定定理 3 的证明，理解定理内容，能应用定理证明相关几何问题；

⑥ 探究直角三角形相似的判定定理，理解定理内容，能应用定理证明相关几何问题；

⑦ 探究相似三角形的性质，理解证明过程；

⑧ 探究第 19 页的问题 2，能抽象本质并准确表述命题，独立完成命题的证明；

⑨ 借助直观，感知射影的概念，认识正射影的特征；

⑩ 理解射影定理，能应用定理解决相关的几何问题.

第二讲　直线与圆的位置关系

(1) 圆周角定理

① 探究（可以借助于计算机）圆周角定理；

② 通过圆周角定理的证明，体会分类思想，并能对一些简单的数学问题进行分类讨论；

③ 理解圆心角定理及圆周角定理的两条推论，能应用两条定理及两条推论解决相关的几何问题.

(2) 圆内接四边形的性质与判定定理

① 通过对圆内接四边形性质的探究，体会观察、归纳方法在发现数学命题中的作用；

② 理解圆内接四边形的两条性质定理，能应用定理解决相关的几何问题；

③ 通过对圆内接四边形判定定理的探究，进一步体会分类思想，掌握反证法；

④ 理解圆内接四边形判定定理及推论，能应用定理及推论解决相关的几何问题.

(3) 圆的切线的性质及判定定理

① 理解切线的性质定理、判定定理及两个推论，能应用定理及推论解决相关的几何问题；

② 能归纳并正确表述由圆的切线性质定理和两个推论整合而成的定理.

(4) 弦切角的性质

① 通过对弦切角定理的探究，体会分类思想、特殊化思想和化归思想在数学猜想中的作用；

② 理解弦切角定理，能应用定理证明相关的几何问题.

(5) 与圆有关的比例线段

① 经历相交弦定理、割线定理、切割线定理、切线长定理的探究过程，体会运动变化思想，认识四条定理的内在联系；

② 理解相交弦定理、割线定理、切割线定理、切线长定理，能应用四条定理解决相关的几何问题；

③ 通过对第 40 页例 5 的探究，进一步体会运动变化思想，体验数学探究的过程.

第三讲　圆锥曲线性质的探讨

(1) 了解平行射影概念，知道正射影与平行射影的关系；

(2) 通过从平面图形向空间图形的过渡，探究定理 1 的证明，提高空间想像能力；

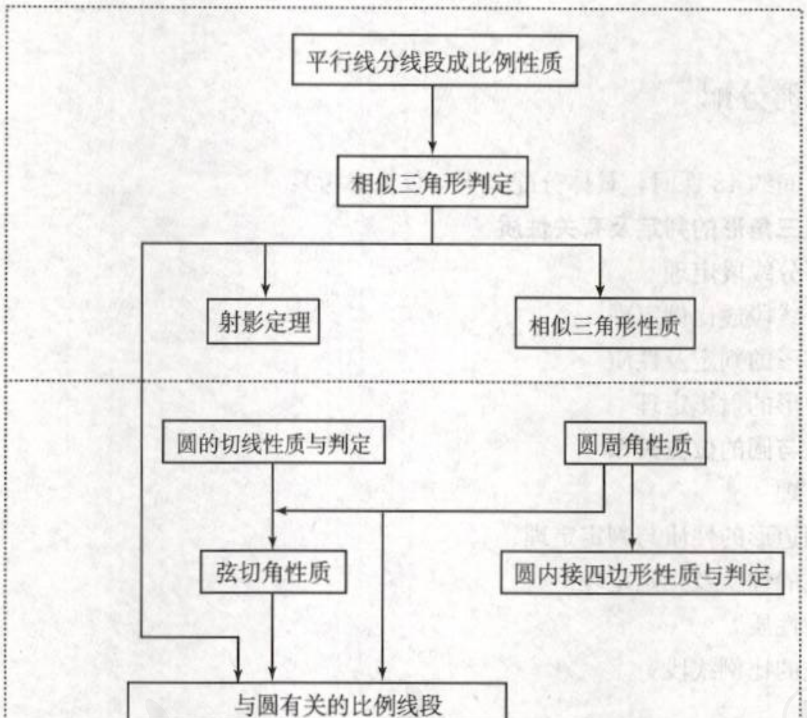
(3) 通过探究定理 2 的证明，感知 Dandelin 双球的作用，进一步体会特殊化思想方法；

(4) 经历发现椭圆准线的过程，理解圆锥曲线的结构特点.

二、内容安排

1. 本专题知识结构框图

本专题分为三个部分，每部分（每讲）的内容有相对的独立性，同时又有内在的联系. 知识结构框图如下：



2. 对内容安排的说明

几何证明是培养学生逻辑思维能力的一条重要途径. 围绕训练学生逻辑思维、发展空间想像能力的目标，本专题在内容的安排上体现了如下特点：

(1) 注重知识系统性与逻辑性. 第一、二、三讲的内容相对独立，每一讲的内容自成体系，同时，三者之间又有一定的逻辑关系，例如，在讨论“与圆有关的比例线段”（相交弦定理、割线定理、切割线定理）时，用到了相似三角形的判定定理；证明第三讲中的定理 1、定理 2 时，用到了切线长定理. 每一讲的内容，依托于自身的逻辑起点而展开：第一讲以“平行线分线段成比例定理”为起点；第二

讲以“圆周角定理”和“圆的切线概念”为起点；第三讲以“平行射影”为起点．这样就形成了一个系统的知识体系．这个系统中的知识点，由逻辑关系相互关联而形成紧密的联系．

(2) 强调从特殊到一般地引入知识．例如，圆内接四边形的性质、弦切角的性质、相交弦定理、第三讲中的定理1和定理2．这种由特殊到一般的知识引入方式，符合知识产生的历程，也符合学生的认知规律，对于培养学生提出问题的意识和能力都是有益的．

(3) 突出知识的探究与发现．在定理的引入方面，通过知识形成的方式展开，力图使学生在经历知识的产生过程中去认识对象和建构知识．本专题一方面在对定理的呈现上突出探究性，另一方面也在一些例题和习题中去渗透探究思想，以使学生既掌握“概念性”知识，又掌握“方法性”知识，同时发展探究能力．

(4) 在知识中渗透数学思想方法．本专题中的主要数学思想方法包括：特殊化思想方法、化归思想方法、分类思想方法、运动变化思想方法，涉及到观察、实验、猜想等合情推理的方法，也涉及到演绎推理、反证法、同一法等逻辑推理的方法．这些思想和方法以知识为载体，是在知识的学习中形成和发展的．

三、课时分配

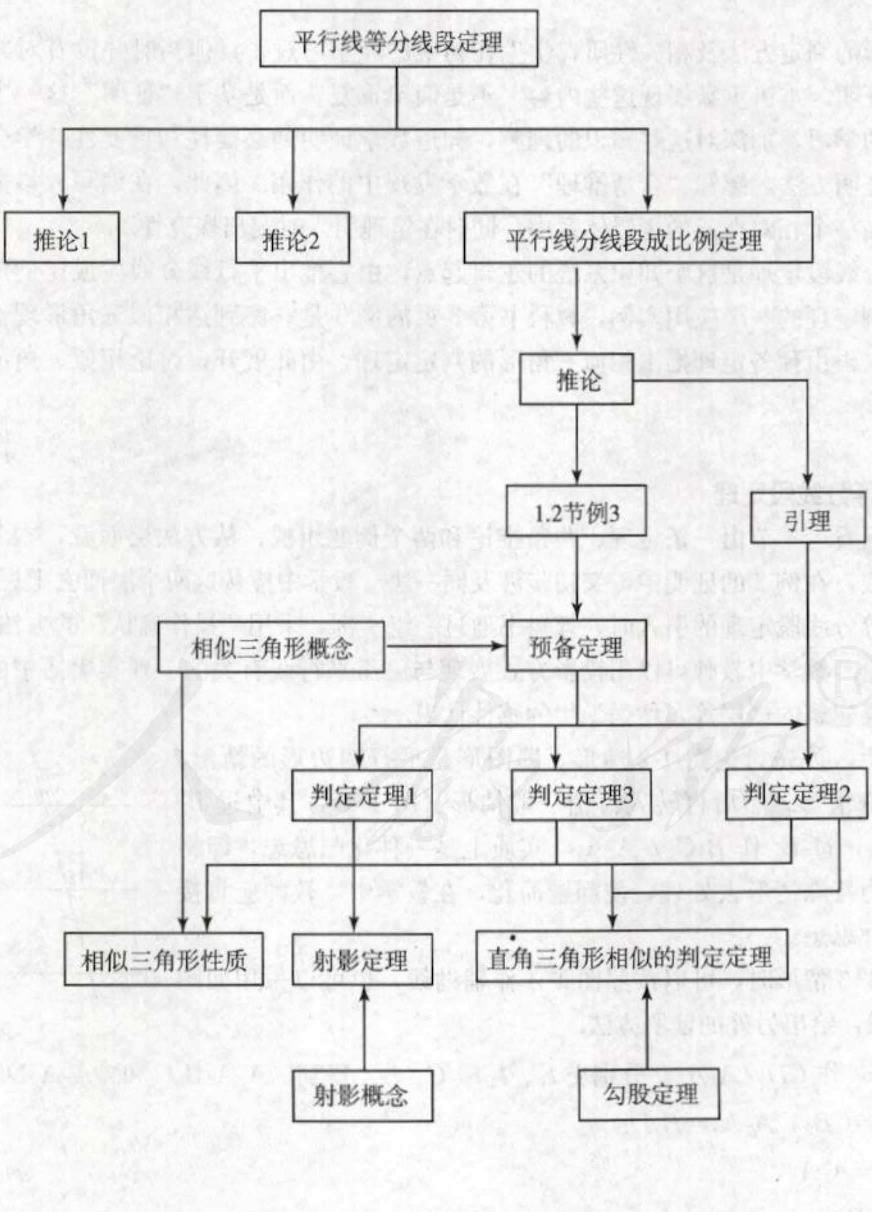
本专题教学时间约18课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　相似三角形的判定及有关性质	约6课时
一、平行线等分线段定理	约1课时
二、平行线分线段成比例定理	约1课时
三、相似三角形的判定及性质	约3课时
四、直角三角形的射影定理	约1课时
第二讲　直线与圆的位置关系	约8课时
一、圆周角定理	约1课时
二、圆内接四边形的性质与判定定理	约1课时
三、圆的切线的性质及判定定理	约1课时
四、弦切角的性质	约1课时
五、与圆有关的比例线段	约3课时
小结	约1课时
第三讲　圆锥曲线性质的探讨	约3课时
一、平行射影	约1课时
二、平面与圆柱面的截线	约1课时
三、平面与圆锥面的截线	约1课时
学习总结报告	约1课时

II 教科书分析

第一讲 相似三角形的判定及有关性质

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 理解相似三角形的判定定理，能应用判定定理解决相关的几何问题.
2. 理解相似三角形的性质，能应用这些性质解决相关的几何问题.
3. 体验相似三角形判定及性质的探究，感受和体会蕴涵在知识与探究过程中的数学思想方法.

难点：

1. 判定定理 2 的证明.
2. 相似三角形拓广性质的探究.
3. 利用同一法证明几何问题.

三、编写意图与教学建议

相似三角形的判定方法及相关性质，学生在初中已经学习过了，但当时并没有对判定定理及相关性质进行严格证明. 本讲重新展现这些内容，不是简单重复，而是基于“证明”这一主导思想，使学生通过本专题的学习，加深对这些知识的理解，知道数学证明的必要性和重要性，学会数学推理，掌握必需的数学证明方法，感知“合情推理”在数学发现中的作用. 因此，在编写教科书时，我们将知识的呈现建立在一个相对严谨的逻辑体系中，同时在定理引入时突出探究性.

平行线等分线段定理是这个知识系统的逻辑起点，由它推出平行线分线段成比例定理. 作为平行线分线段成比例定理的一个应用实例，教科书第 8 页的例 3 是一座到达相似三角形理论的桥梁，由它推出预备定理，再由预备定理推出相似三角形的判定定理，由此展开，讨论相似三角形的性质及射影定理.

1. 平行线等分线段定理

从知识层面看，本节由一条定理、两条推论和两个例题组成；从方法层面看，本节涉及观察、化归和特殊化方法，在例 2 的证明中，又初步涉及同一法. 教学中应从这两个层面去把握.

在平行线等分线段定理的引入时，教科书通过一组实例，采用“操作确认”的方法，让学生观察、测量后发现结论. 教学中教师可以用投影方式展现与一组平行线有关的、现实生活中的例子，譬如楼梯、窗框、高层建筑的楼层等，增强学生的感性认识.

定理的证明，首先讨论图 1-2 情形，即图形是平行四边形的情形，这是定理的特殊情形. 然后再转入讨论一般情形（图 1-3），其中过 B_1 作 $B_1C_2 /\!/ A_1A_2$，过 B_2 作 $B_2C_3 /\!/ A_2A_3$，实质上是一种化归思想，即将一般情形化归为特殊情形去处理，使问题简化，在教学中，教师应直接向学生阐明这种思想.

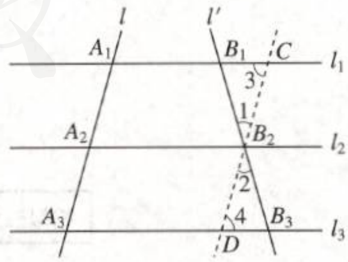


图 1

在证明图 1-3 情形时，可以按照图 1-4 作辅助线，也可以采用如图 1 方式作辅助线，给出另外的证明方法.

证明：过 B_2 作 $CD /\!/ A_1A_3$，分别交 l_1、l_3 于 C、D. 得到$\square A_1A_2B_2C$ 和$\square A_2A_3DB_2$.

$\therefore\ A_1A_2=CB_2，A_2A_3=B_2D.$

$\because\ A_1A_2=A_2A_3，$

$\therefore\ CB_2=B_2D.$

又∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴ $\triangle B_1B_2C\cong\triangle B_3B_2D$.

∴ $B_1B_2=B_2B_3$.

由三条平行线被两条直线所截得出的结论，推广为一般情形，即得平行线等分线段定理. 教师应强调“用同样方法可以证明……”，否则容易使学生形成“由特殊可以替代一般”的错误观念.

2. 平行线分线段成比例定理

本节的知识点包括平行线分线段成比例定理、推论以及例 3.

在对定理的探究中，仍然采用从特殊到一般的思路，由两条直线被三条平行线所截的情形展开，过渡到两条直线被一组平行线所截的一般情形. 同时，将一组平行线问题化归为一组等距平行线问题，从而利用平行线等分线段定理去解决问题.

在证明定理时，用到了比例的有关性质. 除了教科书中提到的“反比”与“合比”性质外，教师还可以补充“等比”性质，即

如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，且 $b+d\neq 0$，则 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$.

教科书第 7 页指出，“更一般地，当 $l_1\parallel l_2\parallel l_3$，且$\dfrac{AB}{BC}$是任何实数时，可以证明 (1) 式也成立”. 由于$\dfrac{AB}{BC}$是无理数时，证明较复杂，也不要求学生理解，所以没有给出证明的过程. 下面给出一个实例，该例实际上阐明了当$\dfrac{AB}{BC}$是无理数时，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$的证明方法. 给出这个例子的目的是使教师对这一证明方法有所了解.

例 如图 2，在$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，且$\dfrac{DB}{AD}=\sqrt{2}$. 试证明 $\dfrac{EC}{AE}=\sqrt{2}$.

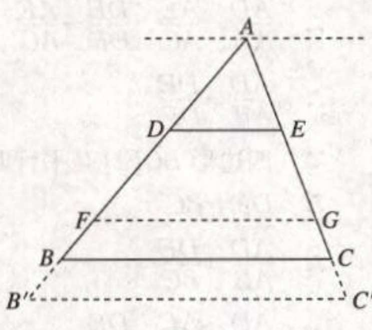


图 2

证明 无理数$\sqrt{2}$的精确度可表述为 1，$\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{1}{100}$，$\dfrac{1}{1\,000}$，…

$\dfrac{DB}{AD}=\sqrt{2}$的不足近似值：

1，1.4，1.41，1.414，1.4142，…

$\dfrac{DB}{AD}=\sqrt{2}$的过剩近似值：

2，1.5，1.42，1.415，1.4143，…

现证明对应各级相同的精确度，$\dfrac{EC}{AE}$和$\dfrac{DB}{AD}$有相等的不足近似值和相等的过剩近似值，从而断定$\dfrac{EC}{AE}=\sqrt{2}$. 于是有$\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}$.

在 DB 上截取等于 AD 的线段. 由于 $1<\dfrac{DB}{AD}<2$，因此在 DB 上截了一次（截点为 F）而有余，截两次又不足（第二次的截点 B' 在 DB 的延长线上）. 经过分点 F、B' 作 DE 的平行线，这组平行线在线段 AC 上截得 $AE=EG=GC'$，C'在 AC 的延长线上. 这时显然有 $AE<EC<2AE$，即 $1<\dfrac{EC}{AE}<2$. 所以当精确度为 1 时，$\dfrac{DB}{AD}$和$\dfrac{EC}{AE}$有相等的不足近似值和相等的过剩近似值.

再以$\frac{1}{10}AD$作长度单位，在AD和DB上截取等于$\frac{1}{10}AD$的线段．显然在AD上正好截10次．由于$1.4<\frac{DB}{AD}<1.5$，因此在DB上截了14次而有余，截15次又不足．过这些分点作DE的平行线，这一组平行线把AE分成10等分，在EC上截了14个$\frac{1}{10}AE$而有余，截15个$\frac{1}{10}AE$又不足，这时显然有$14\times\frac{1}{10}AE<EC<15\times\frac{1}{10}AE$，即$1.4<\frac{EC}{AE}<1.5$．所以当精确度为$\frac{1}{10}$时，$\frac{DB}{AD}$和$\frac{EC}{AE}$有相等的不足近似值和相等的过剩近似值．

依次用$\frac{1}{100}AD$，$\frac{1}{1\,000}AD$，…作为长度单位，同理可以证明精确度分别为$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1\,000}$，…时，$\frac{DB}{AD}$和$\frac{EC}{AE}$都有相等的不足近似值和相等的过剩近似值．从而就证明了$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}=\sqrt{2}$，即$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$．

本节的例3是推导下一节“预备定理”的基础，因而应作为教学中的一个重点．本例的证明，作辅助线$EF/\!/AB$是关键，辅助线EF沟通了线段AE、AC、DE、BC之间的联系．在教学中，教师应对证明的思路作透彻的分析，也可以启发学生去发现辅助线的作法．除了教科书中（第8页图1-14）作辅助线的方法外，还可采用过C作$CF/\!/AB$，交DE的延长线于F（如图3）的方法而获得证明．

证明 过点C作$CF/\!/AB$，与DE的延长线交于点F．

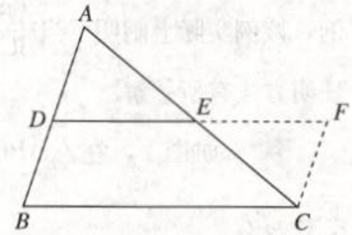


图3

∵ $DE/\!/BC$，$CF/\!/AB$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{DE}{DF}=\frac{AE}{AC}$．

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{DF}$．

∵ 四边形$BCFD$是平行四边形，

∴ $DF=BC$．

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$．

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$．

教科书第9页的“探究”是平行线分线段成比例定理的空间推广．由平面向空间的拓展，蕴涵着类比思想，教师在教学中应强调这一思想方法．

将平行线改为平行平面后，要引导学生考虑两种情形，即l_1与l_2相交（此时l_1与l_2在同一平面内）和l_1与l_2异面，在两种情形中均有$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$成立，命题才能成立．

证明 如果l_1与l_2相交于点G(图4)，那么l_1与l_2确定一个平面π．连结AD、BE、CF，则AD、BE、CF均在平面π上，且$AD/\!/BE/\!/CF$．由平行线分线段成比例定理可知，$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$．

如果l_1与l_2是异面直线，那么可在直线l_2上取一点G，过点G作$l_3/\!/l_2$，设l_3与平面α、β、γ分别相交于P、Q、R（如图5），则l_1与l_3确定一个平面π_1，l_3与l_2确定一个平面π_2．在π_1中，连结AP、BQ、CR，则$AP/\!/BQ/\!/CR$．所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}.$$

在平面 π_2 中，连结 PD、QE、RF，则 $PD /\!/ QE /\!/ RF$. 所以

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{DE}{EF}.$$

所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

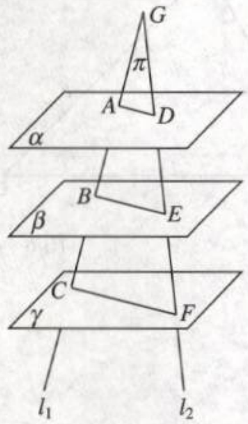


图 4

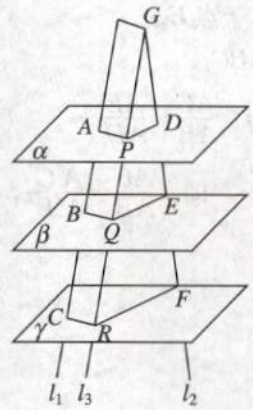


图 5

3. **相似三角形的判定及性质**

本节涉及的知识点较多，包括相似三角形的定义、预备定理、相似三角形的四个判定定理、引理、相似三角形的三条性质等．在引理的证明中采用了同一法．本节渗透了更多的探究问题．例如在证明判定定理 2 时，探究出需要引入一条引理作为支撑；在教科书第 18 页设计了两个问题，要求学生在教师的引导下探究两个相似三角形外接圆的直径比、周长比、面积比与相似比的关系，两个相似三角形内切圆的直径比、周长比、面积比与相似比之间的关系．通过这种训练，使学生经历数学问题的探究过程，感知数学的美，形成探索问题的意识和习惯，发展数学能力．

由于相似三角形的判定方法是学生熟悉的，因此，定理的引入可以直接从复习相似三角形的概念展开．由上一节的例 3，直接推出预备定理后，应当对预备定理的结构进行分析：其一，无论 D、E 在 AB、AC 边上的什么位置（教科书第 11 页图 1-18），只要 $DE /\!/ BC$，就有$\angle A$、$\angle ADE$、$\angle AED$ 保持不变（$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$），由此自然地引入判定定理 1．其二，无论 D、E 在 AB、AC 边上的什么位置，只要 $DE /\!/ BC$，就有$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，由此引入判定定理 2．

在证明判定定理 2 的过程中，教师应注意三个问题．

（1）为什么要采用给出引理的方式来证明定理．教科书作这样的处理是想让学生了解数学家在研究数学问题时的思维过程，同时也让学生体验这种“研究问题”的过程．因而在教学中，教师要向学生明示这种思想，以激发学生的学习动机，促使学生体会、领悟其中的思维方式．

（2）引理的证明采用的是同一法，教师应当对这种方法有深入的理解．

我们知道，一个定理的逆命题未必成立，但对一些命题而言，其逆命题是与原命题同真伪的．如：“中国是世界上人口最多的国家”，这句话无疑是正确的，反过来说，“世界上人口最多的国家是中国”也是正确的．为什么这两句互逆的话（命题）都是正确的呢？因为世界上只有一个国家叫中国，同时世界上也只有一个国家人口最多，因此“中国”和“世界上人口最多的国家”实际上是合二为一的．换言之，如果一个定理的条件和结论所指的概念的外延具有全同关系时，它的逆命题也成立．

在这种情况下，证明时往往先构造论题的逆命题，并且证明这个逆命题的真实性，然后指出逆命

题中题设所指的对象与原命题结论所指的对象是同一对象，从而肯定原命题的真实性，这种证明方法称为同一法.

(3) 可以引导学生采用判定定理1的证明思路，从而绕开引理.

证明 如图6，在 AB 上截取 $AD=A'B'$，过 D 作 $DE\parallel BC$，交 AC 于点 E.

$\therefore$ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，即 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE}{AD}$.

又$\because$ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}$，即 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'}$，

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{A'C'}{A'B'}$.

又$\because$ $AD=A'B'$，

$\therefore$ $AE=A'C'$.

$\because$ $\angle A=\angle A'$，

$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim A'B'C'$.

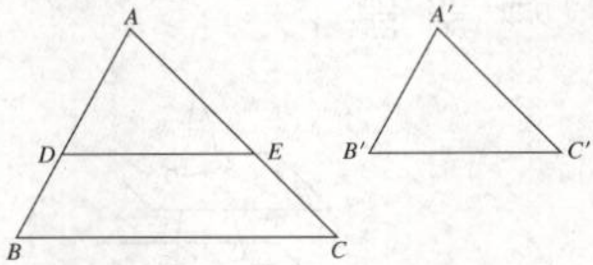


图 6

在关于相似三角形的性质教学中，教师可以使用计算机技术引入问题，通过观察、测量的方法发现两个相似三角形的对应高之比、周长之比和面积之比与相似比之间的关系.

第19页问题2的探究，可以采用小组合作学习的方式进行，也可以留给学生课后独立完成，还可以结合本节习题1.3的第11题，由教师指导学生去完成一篇小论文.

问题2的探究如下：

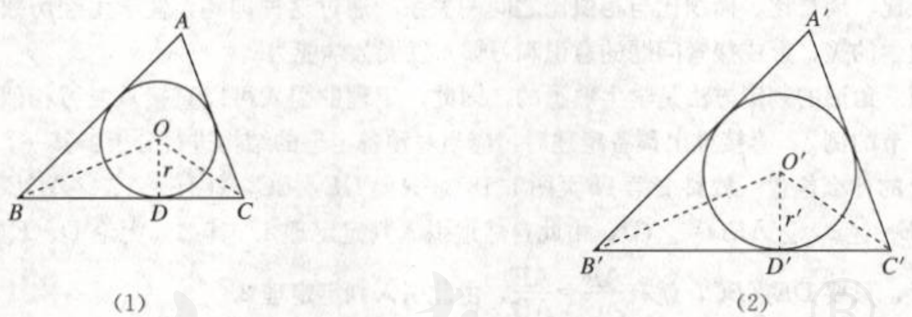


图 7

(1) 如图7，连结 OB、OC、OD、$O'B'$、$O'C'$、$O'D'$.

$\because$ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

$\therefore$ $\angle ACD=\angle A'C'D'$.

$\therefore$ $\angle OCD=\angle O'C'D'$.

又$\because$ $\angle ODC=\angle O'D'C'=90°$，

$\therefore$ $\triangle OCD\backsim\triangle O'C'D'$.

$\therefore$ $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{CD}{C'D'}$.

同理可证 $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{BD}{B'D'}$.

$\therefore$ $\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{BD}{B'D'}$，即$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{C'D'}{B'D'}$.

$\therefore\ \dfrac{CD+BD}{BD}=\dfrac{C'D'+B'D'}{B'D'}$，即$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{B'C'}{B'D'}$.

$\therefore\ \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{r}{r'}=k.$

$\therefore\ \dfrac{2r}{2r'}=k$，即两个相似三角形内切圆的直径比等于相似比.

(2) $\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 内切圆的周长分别为 $C=2\pi r$，$C'=2\pi r'$.

$\therefore\ \dfrac{C}{C'}=\dfrac{2\pi r}{2\pi r'}=\dfrac{r}{r'}=k.$

∴ 两个相似三角形内切圆的周长比等于相似比.

(3) 设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 内切圆的面积分别为 S、S'，则 $S=\pi r^2$，$S'=\pi r'^2$.

$\therefore \dfrac{S}{S'}=\dfrac{\pi r^2}{\pi r'^2}=\left(\dfrac{r}{r'}\right)^2=k^2.$

∴ 两个相似三角形内切圆的面积比等于相似比.

4. 直角三角形的射影定理

本节从学生的生活经验出发，先介绍了射影的概念，然后用一个“探究”引导学生探索直角三角形中的一些线段的关系，经过逻辑推理而得出直角三角形的射影定理. 本节可以看成是相似（直角）三角形的判定定理、性质定理的一个应用.

射影定理有比较重要的价值，它建立了直角三角形中边与射影之间的关系，揭示了直角三角形内在的美，在解决与直角三角形相关的几何问题中是一个强有力的工具.

在教学中应当注意几点：

1. 通过现实生活中的问题引入射影的概念，使学生理解点在直线上的正射影，线段在直线上的正射影概念. 另外，还应给出一些图形的变式（如图 8），消除学生把正射影理解为只是由一点向水平面引垂直的特殊情形.

(1) (2) (3)

图 8

2. 教学中，教师可以利用教科书第 20 页“探究”中的问题，先对如何探索“线段的关系”进行引导，例如：等量关系、大小关系、比例关系等等，使学生明确探索的方向，然后再让学生自己进行探索. 由于问题的开放性，因此学生可能得出较多的不同结果. 但由于这个问题是在相似三角形的内容中讨论，因此学生容易想到，应当通过寻找图形中的相似三角形来探索这些线段之间的关系：图形中的线段有 AB、BC、CA、AD、DB、DC，由这些线段组成的三角形有$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle BCD$，它们两两相似，由此就容易得出射影定理. 射影定理的证明是容易的，教学中主要应当把注意力放在引导学生思考在给定的图形中，“可以研究哪些问题”和“如何研究这些问题”上.

3. 定理的证明要注重分析，既然要寻求线段之间的关系，可以引导学生考虑利用相似三角形去解决问题. 除了用直角三角形相似的判定定理证明射影定理之外，还可以引导学生采用勾股定理去证明. 证明如下：

如图 9，在 Rt$\triangle ABC$ 中，

∵ $AB^2=AC^2+BC^2$,

∴ $(AD+BD)^2=AC^2+BC^2$.

∴ $AD^2+2AD\cdot BD+BD^2=AC^2+BC^2$.

∴ $2AD\cdot BD=AC^2-AD^2+BC^2-BD^2$.

∵ $AC^2-AD^2=CD^2$,

$BC^2-BD^2=CD^2$,

∴ $2AD\cdot BD=2CD^2$.

∴ $CD^2=AD\cdot BD$. (1)

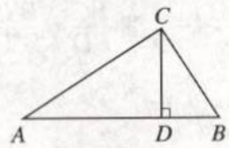


图 9

在 Rt△ACD 中,

$$\begin{aligned}AC^2&=AD^2+CD^2\\&=AD^2+AD\cdot BD\\&=AD(AD+BD)\\&=AD\cdot AB.\end{aligned}\tag{2}$$

同理可证 $BC^2=BD\cdot AB$. (3)

4. 本节的例题 2 表明，射影定理的逆定理也是成立的. 学生在这个命题的证明中，可能对如何建立条件与结论之间的关系有些困难. 教学中可以从如下两个方面来引导：(1)“射影”总是与“垂直”相伴，由此可以与“直角三角形”相联系；(2) 我们往往将等式 $CD^2=AD\cdot DB$ 变形为$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$，这个比例式启发我们应当通过“相似三角形”来推出“直角三角形”. 学生明确了上述思路就容易得出本例的证明了.

四、教学设计案例

相似三角形的性质(1课时)

1. 教学任务分析

(1) 通过观察、测量，猜想并证明相似三角形的三条性质；

(2) 能应用相似三角形的性质解决相关的几何问题；

(3) 通过对问题 1 的探究，使学生经历探索数学问题的过程；

(4) 通过对问题 2 的探究，并结合习题 1.3 第 11 题，使学生进一步体验数学问题的探究过程，逐步形成探究问题的意识，发展探究问题的能力.

2. 教学重点与难点

重点：

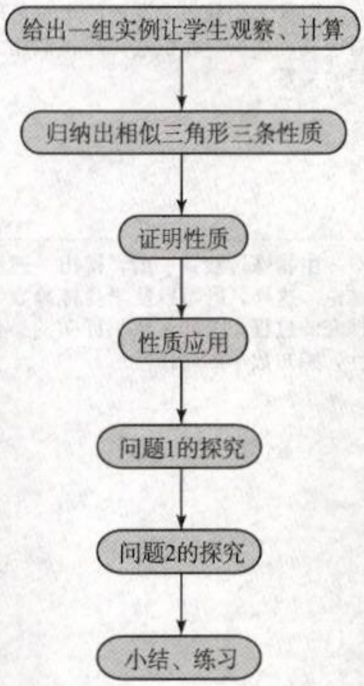
(1) 概括相似三角形的三条性质；

(2) 相似三角形三条性质的证明；

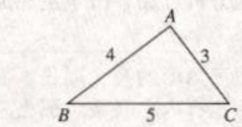
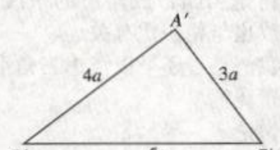
(3) 问题 1 的探究过程.

难点：建立三角形以外的、和三角形有关的元素与三角形相似比之间的关系.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题	设计意图	师生活动
1. 如图 10，已知$\triangle ABC$的边长依次为 3、4、5，$\triangle A'B'C'$的边长依次为 $3a$、$4a$、$5a$.（$a>0$）  (1)  (2) 图 10 (1) $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$之间有什么关系? (2) 求出$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$对应的高. (3) 求出两个三角形的周长、面积.	从特例入手，由学生通过计算、观察，归纳出相似三角形对应高之比、周长比及面积比与相似比之间的关系.	教师提出问题，学生解决问题. 师：这是两个什么类型的三角形? 生：是两个直角三角形. 师：它们之间有什么关系? 生：相似三角形. 师：相似比是多少? 生：a. 师：请同学们计算两个三角形对应的高、面积和周长.

续表

<table>
<tr><th>问题</th><th>设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>2. 给出下表：
<table>
<tr><td></td><td>$\triangle ABC$</td><td>$\triangle A'B'C'$</td></tr>
<tr><td>对应高</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>周长</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>面积</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比a.</td></tr>
</table></td><td>引导学生从表中发现两个三角形对应高、周长、面积之比与相似比之间的关系.</td><td>教师给出表格.
师：请同学们将刚才计算的结果填入表中. 从中你能发现什么规律？
学生讨论，教师引导、小结.</td></tr>
<tr><td>3. 如图11，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是两个相似三角形，设相似比为k. 如果设$\triangle ABC$三条边的长度分别为a，b，c.
(1) $\triangle A'B'C'$的对应边$B'C'$，$A'C'$，$A'B'$的长度是多少？
(2) 求两个三角形对应高之比、周长比和面积比.

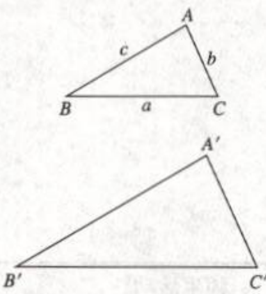



图 11</td><td>由特殊过渡到一般，得出一般性结论. 这样，既可以使学生体验数学探究的过程，又知道数学证明的必要性，感知数学的严谨性.</td><td>教师展示第二个问题.
师：问题1中的两个三角形均为直角三角形，我们得到了结论：相似三角形对应高之比、周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方. 那么对于一般情形的两个相似三角形，会有同样的结论吗？请同学们对问题2进行探究.
学生探究问题，讨论.</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. 师生共同完成相似三角形的三条性质的证明.</td></tr>
<tr><td>5. 教科书第17页例6.</td><td>知识的应用.</td><td>师生一起分析思路，由学生完成求解.</td></tr>
<tr><td>6. 教科书第18页问题1.</td><td>对相似三角形更多性质的探讨，一方面可以丰富学生知识，形成更完善的认知结构；另一方面训练学生的探究问题意识，发展探究问题能力.</td><td>师：相似三角形的高、周长、面积之比与相似比有内在联系. 那么三角形还有哪些元素与相似比有关呢？
学生讨论得出：三角形的中线、内角平分线也与相似比有关.
师：我们是否还可以考虑三角形以外的元素呢？
学生讨论.
生：外接圆的半径、周长和面积.
师：对. 还有其他元素吗？
生：三角形内切圆的半径、周长和面积.
师：非常好. 我们现在研究三角形外接圆的元素与相似比之间的关系.
教师展示问题1，启发学生分析证明思路并完成证明.</td></tr>
<tr><td>7. 教科书第19页的问题2.</td><td>使学生巩固探究问题的思想方法.</td><td>学生自己探究. 教师辅导.</td></tr>
<tr><td>8. 展示本节课的知识点.</td><td>使知识系统化.</td><td>教师引导学生就知识和方法两个维度进行小结，同时提出进一步思考的问题（教科书第20页11题）.</td></tr>
</table>

五、习题解答

习题 1.1（第 5 页）

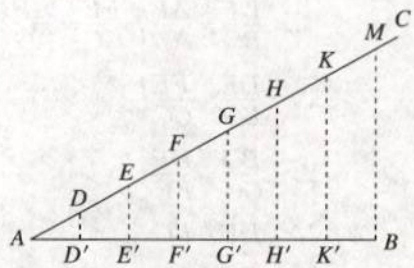
1. 设 AB 的长为 6 厘米.

（1）过点 A 作射线 AC；

（2）在射线 AC 上以适当的长度顺次截取 $AD=DE=EF=FG=GH=HK=KM$；

（3）连结 BM；

（4）过 D、E、F、G、H、K 作 BM 的平行线，分别交 AB 于点 D'、E'、F'、G'、H'、K'. 则 D'、E'、F'、G'、H'、K' 即为线段 AB 的 7 等分点.



（第 1 题）

2. 猜想：$BE=EF=FD$.

证明：如图，∵ M 是 AB 的中点，N 是 DC 的中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AM /\!/ CN$，且 $AM=CN$.

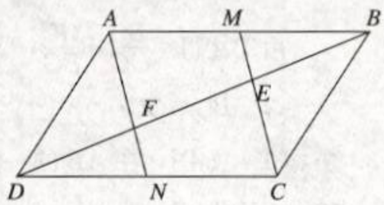
∴ 四边形 $ANCM$ 是平行四边形.

∴ $MC /\!/ AN$.

∴ ME 平分 BF，即 $BE=EF$.

同理可证 $FD=EF$.

∴ $BE=EF=FD$.



（第 2 题）

3. 如图，∵ E、F 分别是梯形 $ABCD$ 中 AB、DC 边上的中点，

∴ $EF /\!/ AD$，$EF /\!/ BC$.

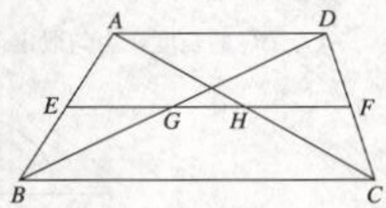
∴ G、H 分别是梯形对角线 BD、AC 的中点.

∴ $EG=\frac{1}{2}AD$，$FH=\frac{1}{2}AD$，$EH=\frac{1}{2}BC$，$FG=\frac{1}{2}BC$.

又∵ $GH=EH-EG$，$GH=FG-FH$，

$$\begin{aligned}\therefore\ 2GH &= EH+FG-(EG+FH)\\ &=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BC-\left(\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}AD\right)\\ &=BC-AD.\end{aligned}$$

∴ $GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.



（第 3 题）

习题 1.2（第 9 页）

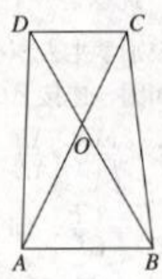
1. 如图，由本节例 3 知，$\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 的三边对应成比例.

∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OD}$.

∵ $CD=6$，$AB=8$，$BD=15$，

∴ $\frac{8}{6}=\frac{OB}{15-OB}$.

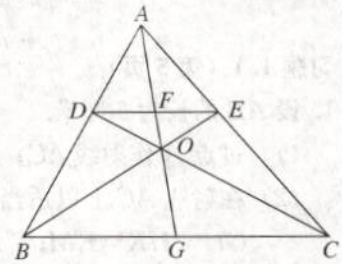
解得 $OB=\frac{60}{7}$.



（第 1 题）

$\therefore OD=15-\dfrac{60}{7}=\dfrac{45}{7}$.

2. 如图.



(第2题)

(1) $\because$ $DE/\!/BC$,

$\therefore$ $\dfrac{DF}{BG}=\dfrac{AF}{AG}$, $\dfrac{FE}{GC}=\dfrac{AF}{AG}$.

$\therefore$ $\dfrac{DF}{BG}=\dfrac{FE}{GC}$.

$\therefore$ $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DF}{FE}$. ①

(2) $\because$ $DE/\!/BC$,

$\therefore$ $\dfrac{FE}{BG}=\dfrac{OF}{OG}$, $\dfrac{DF}{GC}=\dfrac{OF}{OG}$.

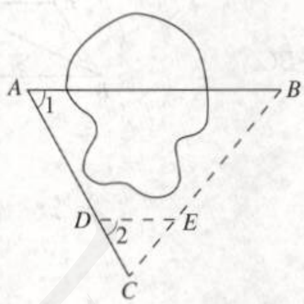
$\therefore$ $\dfrac{FE}{BG}=\dfrac{DF}{GC}$, 即 $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{FE}{DF}$. ②

由①②得 $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{GC}{BG}$, 即 $BG^2=GC^2$.

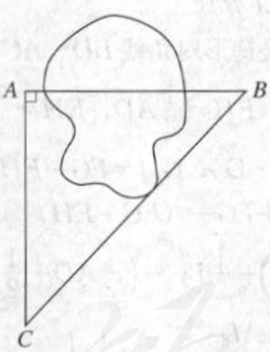
$\therefore$ $BG=GC$.

3. 方案1 如图，在 AB 的一侧选择一个点 C，连结 AC，测量出 AC 的长. 在 AC 上选一点 D，过点 D 作 $DE/\!/AB$（即$\angle 1=\angle 2$），再测量出 CD、DE 的长. 此时，$\triangle CDE$ 与$\triangle CAB$ 的三边对应成比例，所以由 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{DE}{AB}$，就可以计算出 AB 的距离.

方案2 如图，在 AB 的一侧选择一个点 C，使 $AC\perp AB$. 同时保证 BC 的距离能够测量. 测出 AC、BC 的长度，由勾股定理即可算出 AB 的长.



方案1

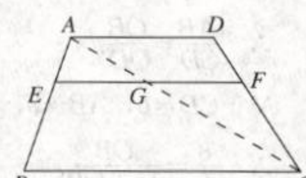


方案2

(第3题)

说明 此题是一个开放性问题，测量 AB 长度的方案还有许多（如取$\angle ACB$ 为特殊角等），因此，可以鼓励学生去积极探索不同方案.

4. (1) 如图，连接 AC，$\because$ $EF/\!/AD/\!/BC$，



(第4题)

$\therefore$ $\dfrac{EG}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$，即 $EG=\dfrac{AE}{AB}\cdot BC$；

$\dfrac{GF}{AD}=\dfrac{CF}{CD}$，即 $GF=\dfrac{CF}{CD}\cdot AD$.

$\because$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\ \frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$. 而$\frac{AE}{AB}=\frac{DF}{CD}$,

$\therefore\ \frac{DF}{CD}=\frac{1}{3}$.

$\therefore\ \frac{CF}{CD}=\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ EF&=EG+GF\\&=\frac{AE}{AB}\cdot BC+\frac{CF}{CD}\cdot AD\\&=\frac{1}{3}BC+\frac{2}{3}AD.\end{aligned}$$

$\therefore\ 3EF=BC+2AD$.

(2) 如果$\frac{AE}{EB}=\frac{2}{3}$，那么$\frac{AE}{AB}=\frac{2}{5}$.

同理可推得 $\frac{CF}{CD}=\frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ EF&=EG+GF\\&=\frac{AE}{AB}\cdot BC+\frac{CF}{CD}\cdot AD\\&=\frac{2}{5}BC+\frac{3}{5}AD.\end{aligned}$$

$\therefore\ 5EF=2BC+3AD$.

(3) 如果$\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$，那么$\frac{AE}{AB}=\frac{m}{m+n}$.

同理可推得 $\frac{CF}{CD}=\frac{n}{m+n}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ EF&=EG+GF\\&=\frac{m}{m+n}BC+\frac{n}{m+n}AD.\end{aligned}$$

$\therefore\ (m+n)EF=mBC+nAD$.

习题 1.3（第 19 页）

1. 如图，连接 BE、CD.

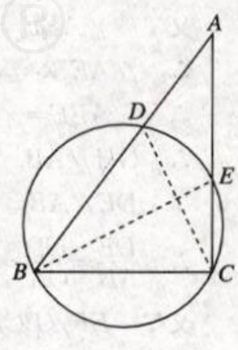
$\because\ \angle ABE$ 和$\angle ACD$ 是同弧上的圆周角，

$\therefore\ \angle ABE=\angle ACD$.

又$\because\ \angle A=\angle A$,

$\therefore\ \triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

$\therefore\ \frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$.



（第 1 题）

2. 如图，(1) 在$\triangle ABE$ 和$\triangle ACD$ 中，

$\because\ \angle BAE=\angle CAD$, $\angle ABE=\angle ACD$,

$\therefore\ \triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

$\therefore\ \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$.

$\therefore\ AB\cdot CD=AC\cdot BE$.

(2) 在$\triangle ABC$ 和$\triangle AED$ 中，

$\because$ $\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC$（或$\angle BAC=\angle BAE-\angle EAC$），

$\angle EAD=\angle CAD+\angle EAC$（或$\angle EAD=\angle CAD-\angle EAC$），

又$\because$ $\angle BAE=\angle CAD$，

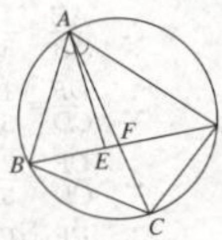
$\therefore$ $\angle BAC=\angle EAD$.

又$\because$ $\angle BCA=\angle EDA$，

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$.

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{ED}$.

$\therefore$ $AC\cdot ED=AD\cdot BC$.

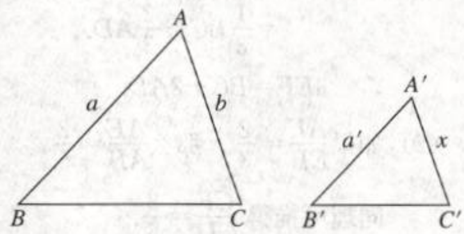


（第 2 题）

3. 如图，设$A'C'=x$. 要使$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，只需$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{x}$即可.

$\because$ $\angle A=\angle A'$，

$\therefore$ 当$x=\dfrac{a'b}{a}$时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.



（第 3 题）

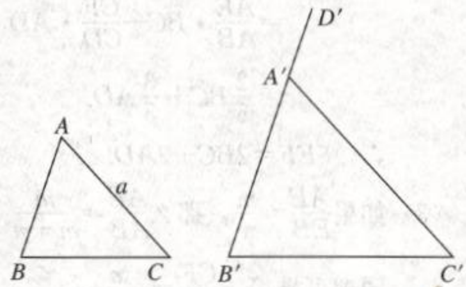
4. 作法：

（1）作线段$B'C'$，使$B'C'=\dfrac{3}{2}BC$；

（2）以B'为顶点，$B'C'$为始边作$\angle D'B'C'=\angle B$；

（3）在$B'D'$上截取线段$B'A'$，使$B'A'=\dfrac{3}{2}AB$；

（4）连接$A'C'$，则$\triangle A'B'C'$为所作三角形.



（第 4 题）

5. 如图，$\because$ $EF/\!/AD/\!/BC$，

$\therefore$ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{EF}{BC}$，$\dfrac{HE}{HA}=\dfrac{EF}{AD}$.

$\because$ $AD=BC$，

$\therefore$ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{HE}{HA}$.

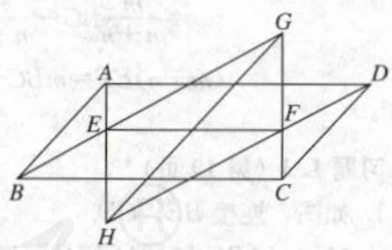
$\therefore$ $\dfrac{GE}{BE}=\dfrac{HE}{AE}$.

又$\because$ $\angle AEB=\angle HEG$，

$\therefore$ $\triangle AEB\backsim\triangle HEG$.

$\therefore$ $\angle ABE=\angle HGE$.

$\therefore$ $GH/\!/AB$.



（第 5 题）

6. $\because$ $DE/\!/AB$，

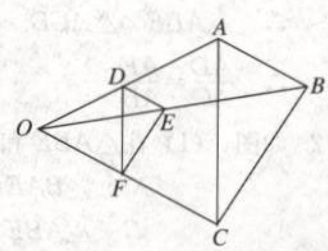
$\therefore$ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OE}{OB}$. ①

又$\because$ $EF/\!/BC$，

$\therefore$ $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OC}$. ②

$\therefore$ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$.

由①②知 $\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OF}{OC}$，而$\angle FOD=\angle COA$，



（第 6 题）

∴ $\triangle FOD \backsim \triangle COA$.

∴ $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{OD}{OA}$.

∴ 在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，有$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}$.

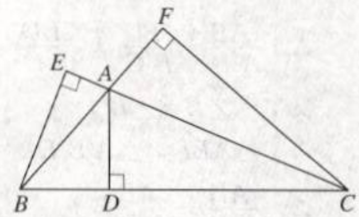
∴ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

7. 在$\triangle ACD$和$\triangle BCE$中，

∵ $\angle ADC=\angle BEC=90^\circ$，$\angle ACD=\angle BCE$，

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$.

∴ $\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{AC}{BC}$，即$AD \cdot BC=BE \cdot AC$.



（第 7 题）

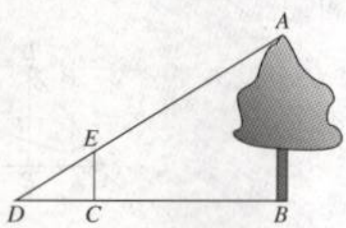
8. **方案 1** （1）在地面适当位置选取一点 C，连结 BC，测量出 BC 的距离；

（2）在点 B 竖立一根垂直于地面的标尺杆；

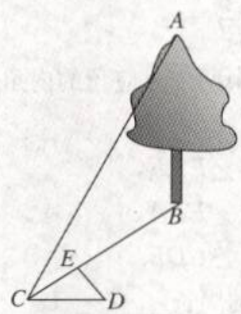
（3）在 BC 的延长线上取一点 D，使点 D、标尺杆的顶点 E 和树尖在一条直线上；

（4）测量 CD 的距离.

在这个方案中，由于$\triangle DCE \backsim \triangle DBA$，而 BC、CD、CE 的长可以由测量而得，所以可以求出树高 AB 的长.（没有考虑测量仪的脚架高.）



（第 8 题方案 1）



（第 8 题方案 2）

方案 2 （1）在地面上选取一点 C，连结 BC；

（2）测出$\angle BCA$；

（3）在地面上选取一点 D，使$\angle DCB=\angle BCA$；

（4）过 D 作 BC 的垂线，交 BC 于 E；

（5）测量 DE、CE、BC 的长，由这三个量可以求得 AB 的长.

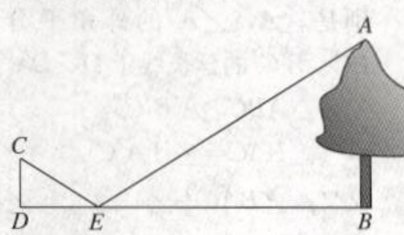
因为按方案 2 的实施，易知 $\text{Rt}\triangle ABC \backsim \text{Rt}\triangle DEC$.（没有考虑测量仪的脚架高.）

方案 3 （1）把一面镜子放在离树 a 米的点 E；

（2）一个人望着镜子后退到点 D，这时恰好在镜子里望到树梢点 A；

（3）量得 ED 为 b 米，人的眼睛距地面的高度为 c 米，即可求 AB 的长.

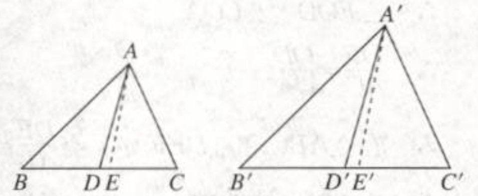
因为根据光学中的反射定律，知$\angle AEB=\angle CED$，所以$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$.



（第 8 题方案 3）

9. 如图，设$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k.

(1) 设 AD 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线，$A'D'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的中线.



（第 9 题）

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

又∵ D、D' 分别为 BC、$B'C'$ 的中点，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2BD}{2B'D'}=\dfrac{BD}{B'D'}$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

其余两组对应中线之比同理可证.

(2) 设 AE、$A'E'$ 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 的内角平分线.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

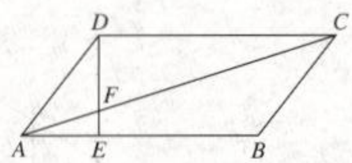
∴ $\angle BAE=\angle B'A'E$.

∴ $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$.

∴ $\dfrac{AE}{A'E'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

同理可证，其余两个对应角的内角平分线之比也等于相似比.

10. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中，



（第 10 题）

∵ $\angle DCF=\angle EAF$，

$\angle DFC=\angle EFA$，

∴ $\triangle AEF \backsim \triangle CDF$.

∴ $\dfrac{\triangle AEF\text{ 的周长}}{\triangle CDF\text{ 的周长}}=\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{1}{3}$.

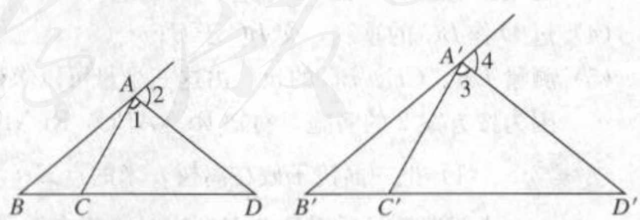
∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CDF}}=k^2=\dfrac{1}{9}$.

而 $S_{\triangle AEF}=6$，

∴ $S_{\triangle CDF}=9S_{\triangle AEF}=9\times 6=54(\text{cm}^2)$.

11. 问题 1：相似三角形对应角的外角平分线之比等于相似比.

证明：设 $\triangle ABC \backsim A'B'C'$. AD、$A'D'$ 分别是 $\angle A$，$\angle A'$ 的外角平分线，分别交 BC、$B'C'$ 的延长线于 D、D'.



（第 11 题图 1）

∵ $\triangle ABC \backsim A'B'C'$，

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

又∵ $\angle BAC+\angle 1+\angle 2=\angle B'A'C'+\angle 3+\angle 4$，

而 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴ $\angle 1=\angle 3$.

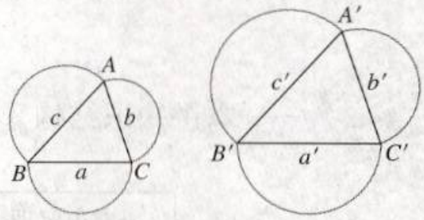
∴ $\angle BAD=B'A'D'$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

问题 2　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，以$\triangle ABC$的三条边为直径，分别向$\triangle ABC$外作半圆（如图），同样，以$\triangle A'B'C'$的三条边为直径，分别向$\triangle A'B'C'$外作半圆．则两个三角形中三个对应半圆的面积之比等于相似比的平方．

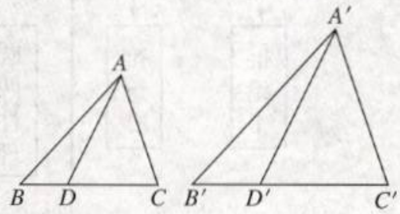


说明：将三个半圆改为三个等边三角形、正方形、正多边形等，可以得到更多的命题．

问题 3

如图，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{B'D'}{C'D'}$．则 $\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

说明：该题是一个开放型问题，可以由联想、类比等方法得到许多新问题．在教学中应引导、启发和鼓励学生去探究、猜想．



（第 11 题图 3）

习题 1.4（第 22 页）

1. ∵　$\triangle ABC$是直角三角形，CD是AB边上的高，

∴　$CD^2=AD\cdot BD$.

∴　$60^2=25\times BD$.

∴　$BD=144$.

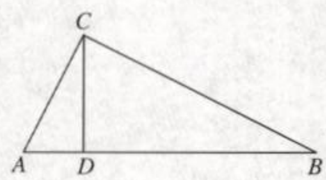
∴　$AB=AD+BD=25+144=169$.

又∵　$AC^2=AD\cdot AB$,

∴　$AC=\sqrt{25\times 169}=65$.

又∵　$BC^2=BD\cdot AB$,

∴　$BC=\sqrt{144\times 169}=156$.



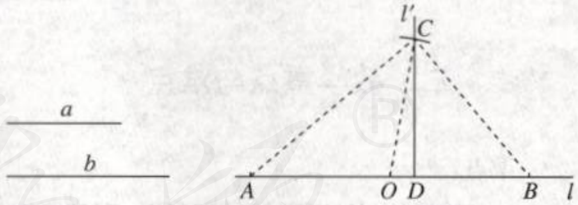
（第 1 题）

2. 作法：

(1) 作一直线 l，在 l 上截取线段 $AD=b$，$BD=a$；

(2) 过 D 作 AB 的垂线 l'；

(3) 以 AB 的中点 O 为圆心，OB 的长为半径作弧，与 l'交于点 C，则 CD 即为所求．



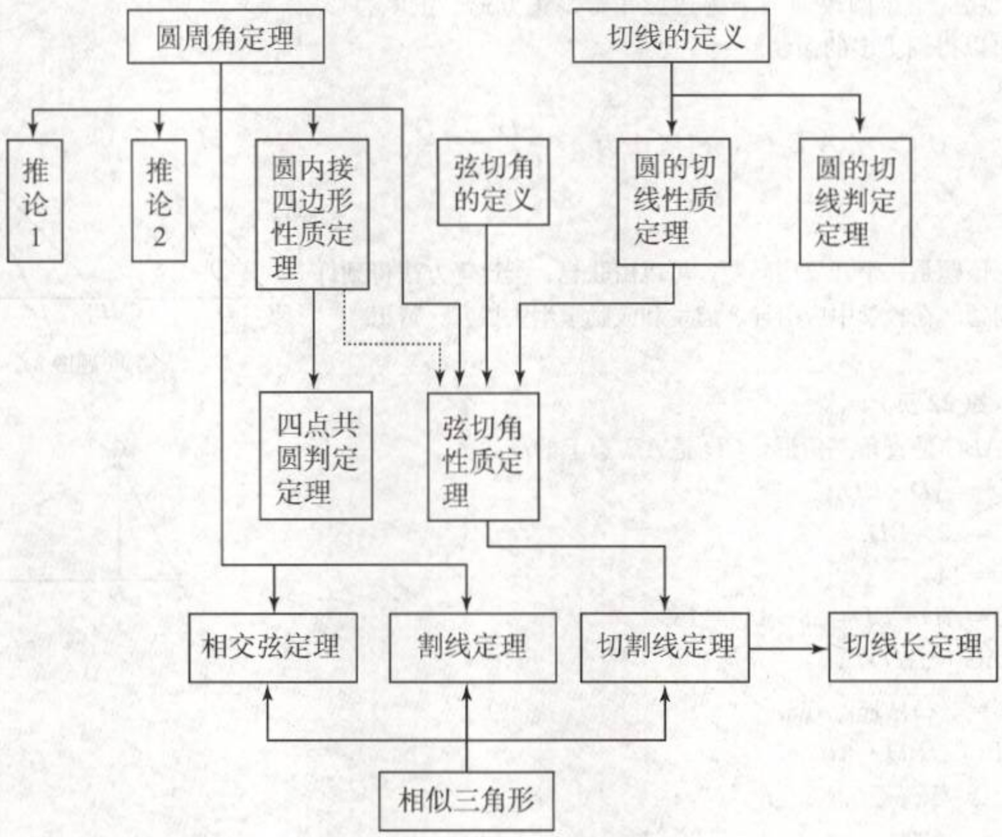
（第 2 题）

证明：连结 AC、BC、OC．∵　$OC=OB=\dfrac{1}{2}AB$,

∴　$\triangle ABC$为直角三角形．∵　$CD\perp AB$，∴　$CD^2=AD\cdot BD=ab$．∴　CD为线段 a 和 b 的比例中项．

第二讲 直线与圆的位置关系

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 理解圆周角定理的证明过程，理解圆周角定理及推论，能应用圆周角定理及推论解决相关的几何问题.

2. 经历圆内接四边形性质定理的探究过程，理解圆内接四边形的性质与判定定理，能应用定理解决相关的几何问题.

3. 理解圆的切线的性质及判定定理，能应用定理解决相关的几何问题.

4. 理解弦切角定理，能应用定理解决相关的几何问题.

5. 经历圆幂定理（相交弦定理、割线定理、切割线定理、切线长定理）的探究过程，理解圆幂定理，能应用定理解决相关的几何问题.

难点：

1. 用分类讨论方法证明圆周角定理和弦切角定理等.

2. 运用运动变化思想方法探究几何问题.

三、编写意图与教学建议

本讲有两个逻辑起点，一个是圆周角定理，另一个是圆的切线定义.

从圆周角定理出发，推出圆内接四边形的性质和判定定理，同时，又推出弦切角的性质定理. 另一方面，在推导相交弦定理和割线定理时，也用到了圆周角定理，因此，圆周角定理是本讲的重点内容，它不仅自身在解决问题中起着重要作用，而且还是推导其他定理的基础.

从切线的定义出发，推出圆的切线性质定理和判定定理，再由圆的切线性质定理，结合圆周角定理推出弦切角的性质定理. 弦切角定理又作为切割线定理的基础，起着承上启下的作用.

1. 圆周角定理

本节的知识点包括圆周角定理、圆心角定理和两个推论. 本节涉及的方法主要是分类讨论思想方法.

圆周角定理的引入可以采用两种方式. 一种是直接给学生展示定理. 因为在初中阶段学生已经学过圆周角定理，他们对定理的内容是熟悉的，所以可以直接引入，教学的重点放在定理的证明和定理的应用方面.

第二种是通过探究引入定理. 可以让学生自己作出有关圆周角的图，然后通过实际测量去发现和猜想结论. 也可以利用计算机来完成这种探究.

在圆周角定理的证明中，教师要认真分析推理思路，指出为什么要进行分类讨论，后两种情形怎样化归为第一种情形.

圆心角定理是直接用“一个周角是 360°，把圆周等分成 360 份，每一份叫做 1°的弧”这一发生式定义直接推出的. 在教学中教师要强调：1°的弧是指对任何一个圆来说的，不管圆的半径的大小，总是把整个圆周的$\frac{1}{360}$叫做 1°的弧. 例如图 12 中是两个圆心相同而半径不等的圆（同心圆），$\angle AOB=90°$，所以$\overset{\frown}{AB}$是 90°的弧，$\overset{\frown}{A'B'}$也是 90°的弧，它们都是自己圆周的四分之一. 但是$\overset{\frown}{AB}$并不等于$\overset{\frown}{A'B'}$，因为它们所在圆的半径不等. 因此，相等的弧和相同度数的弧的意义是不同的.

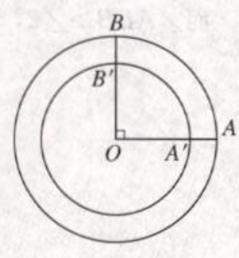


图 12

推论 1 和推论 2 是两个非常重要的结论，它们在解决问题中的作用远远胜过圆周角定理的功能. 因此，教师应强调它们的重要性，引起学生的重视.

例 2 实质是“圆内角定理”，在教学中，教师可以采用运动变化思想，启发学生思考：当圆内两条弦相交于圆内时，有例 2 的结论，那么如果点 P 由圆内移动到圆外时，即两弦的延长线相交于圆外时，又有什么结论呢？于是可以补充下面的例题.

例 如图 13，图 O 的两条弦的延长线相交于点 P. 求证：弧$\overset{\frown}{BC}$的度数与弧$\overset{\frown}{AD}$的度数差的一半等于$\angle APD$ 的度数.

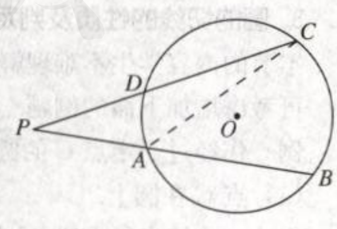


图 13

证明：连接 AC，则$\angle BAC$ 的度数等于弧$\overset{\frown}{BC}$度数的一半，$\angle ACD$ 的度数等于弧$\overset{\frown}{AD}$度数的一半.

∵ $\angle BAC=\angle P+\angle ACP$，

∴ $\angle P=\angle BAC-\angle ACP$.

即$\angle APD$ 的度数等于弧$\overset{\frown}{BC}$的度数与弧$\overset{\frown}{AD}$度数差的一半.

2. 圆内接四边形的性质与判定定理

圆内接四边形的性质可以采用从特殊到一般的方法，先引导学生通过观察或测量圆内接四边形是正方形、矩形的情形，发现圆内接四边形的对角互补，然后再测量一般情形的圆内接四边形，从而得出两个性质定理.

在得到两个性质定理后，请学生思考它的逆命题是否成立，由此引入判定定理.

判定定理的证明要突出分类讨论思想和反证法. 因为过不共线的三点必然可以作一个圆，不妨设过 A、B、C 三点的圆为$\odot O$，让学习思考四边形的另一点 D 与$\odot O$ 的位置关系，然后分别采用反证法证明点 D 既不能在圆内也不可能在圆外，所以点 D 只能在圆上.

为了强化这种思想方法，可以补充下面的问题作为例题，该问题的证明方法同圆内接四边形判定定理的证明.

例 如果四边形一边上的两个顶点的视角相等，那么四边形的四个顶点共圆.

已知：如图 14，四边形 $ABCD$ 中，$\angle 1=\angle 2$.

求证：A、B、C、D 四点共圆.

证明：由 A、B、D 三点可以确定一个圆，设该圆为$\odot O$.

(1) 如果点 C 在$\odot O$ 的外部（如图 15）. 连接 BC，与圆相交于点 E.

$\because$ $\angle 1=\angle AEB$,

$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ $\angle 2=\angle AEB$.

而$\angle AEB>\angle 2$，矛盾. 故点 C 不可能在圆外.

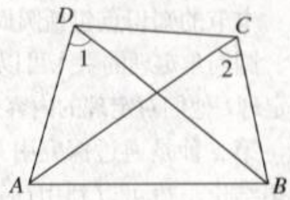


图 14

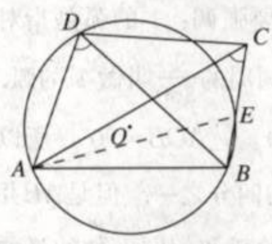


图 15

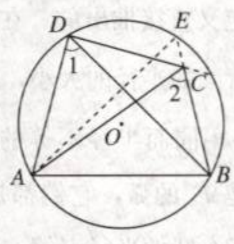


图 16

(2) 如果点 C 在$\odot O$ 的内部（如图 16）. 延长 BC 与圆相交于点 E，连接 AE. 则$\angle 1=\angle AEB$，而$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle AEB$，与$\angle 2>\angle AEB$ 矛盾. 所以点 C 不可能在圆内.

$\therefore$ 点 C 只能在圆上.

3. 圆的切线的性质及判定定理

本节的内容学生不难理解，在讲述定理之前要复习直线与圆的三种位置关系.

可考虑增加下面的例题.

例 作经过一定点 C 的圆的切线.

(1) 点 C 在圆上.

作法：连接半径 OC，过点 C 作 $AB\perp OC$. 则直线 AB 就是所要作的切线.

证明：直线 AB 经过点 C，并且 $AB\perp OC$. 由切线的判定定理可知 AB 是$\odot O$ 的切线，切点是点 C.

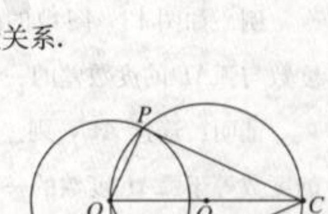


图 17

(2) 点 C 在圆外.

作法：如图 17，连接线段 OC，以 OC 为直径的圆为$\odot O_1$，与$\odot O$ 相交于两点 P 和 P'. 连接 CP

和CP'，则CP和CP'都是过已知点C所引$\odot O$的切线.

证明：$\because$ $\angle OPC$是$\odot O_1$内半圆上的圆周角，

$\therefore$ $\angle OPC=90^\circ$.

$\therefore$ $PC\perp OP$.

又$\because$ OP是$\odot O$的半径，PC经过点C，

$\therefore$ PC就是所要作的切线.

同理，CP'也是所要作的切线.

4. 弦切角的性质

弦切角定理的引入，教科书中采用了图形变化的方法，将内接四边形变成它的极端情形，即三角形，由“圆内接四边形的外角等于它的内角的对角”去猜想“弦切角等于它所夹的弧对的圆周角”. 在教学中，教师可借助于几何画板引导学生完成这种探索.

弦切角定理的证明，要突出分类讨论思想、特殊化思想和化归思想.

该节可以补充下面例题.

例 AB是$\odot O$的一条弦，过弦$\overset{\frown}{AB}$的中点M任意作两条弦MR和MS，分别与弦AB相交于E、F.

求证：E、R、S、F四点共圆.

证明：如图18，连接OM、RS，过M作$\odot O$的切线MC. 则OM垂直平分AB，且$OM\perp MC$，由此得$MC\parallel AB$. 所以$\angle CMS=\angle MRS$. 而$\angle CMS=\angle BFS$，所以$\angle BFS=\angle MRS$. 故E、R、S、F四点共圆.

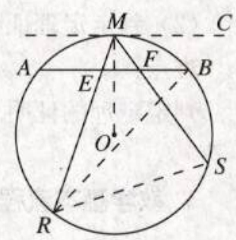


图18

5. 与圆有关的比例线段

教科书中比较详细地给出了几个定理的发现过程，同时揭示了几个定理之间的关系. 在教学中，宜在一节课中完成对几个定理的探索，一气呵成，使学生形成这一知识体系的完整的认知结构. 沿教科书中给出的线索，教师可利用几何画板去变化图形，使图形的变化过程更加直观.

几个定理的证明比较简单，可以在教师的引导下由学生完成.

在本节的教学中，要突出图形的运动变化思想. 在许多情形中，只要图形的结构没有发生本质变化，其结论也不会发生变化. 在运动变化中找“不变性”或“不变量”，是数学研究的重要方法，也为几何教学中组织“变式教学”提供了极好的载体.

例5由三个问题组成，三个问题之间的关系是紧密联系的，是同一图形的三种变化形态. 另一方面，由于经过变化后的图形，可能会产生比原来图形更多的线段，这就拓展了讨论的对象范围，因而可能会产生更多的结论. 通过例5的教学，可以使学生知道运动变化思想，感知这种变化的奇妙，体验探究数学问题的过程，欣赏数学内在的美.

推导出什么样的结果算是一个“结论”？一般说来没有统一的标准，但可以根据结论的简单性和抽象性来判断. 简单性是指结果简洁、明了，表现出对称美、奇异美的特征. 抽象性表现为结论能建立图形中各要素之间的内在联系，这种联系可以是“相等”关系，也可以是“不等”关系.

在例5的教学中，教师要鼓励学生尽量去探究，对学生探究的“结论”要作恰当评价. 也许学生探究出来的结论远比教科书中给出的结论丰富，图形的变式也比教科书中的三种情形多，此时教师应组织学生相互评价，最后由教师对各种有代表性的结果给予综合评述.

四、教学设计案例

圆内接四边形的性质与判定定理(1课时)

1. 教学任务分析

(1) 通过观察、测量、猜想获得圆内接四边形的性质定理，然后进行严格的推理论证. 理解圆内接四边形的两个性质定理，并能应用两个定理去解决相关的几何问题.

(2) 探究圆内接四边形的判定定理的证明过程，感知蕴涵在证明过程中的数学思想方法.

(3) 理解圆内接四边形判定定理及推论，能用定理和推论解决相关的几何问题.

2. 教学重点与难点

重点：

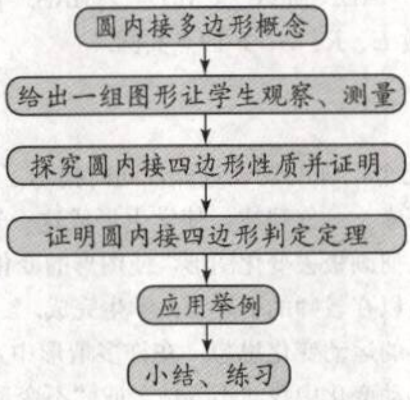
(1) 圆内接四边形的性质定理和判定定理.

(2) 判定定理证明中蕴涵的数学思想和方法.

难点：

判定定理的证明.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师　生　活　动
1. 复习圆内接多边形概念. 提出问题： ① 三角形有外接圆，正方形有外接圆吗？ ② 矩形有外接圆吗？一般的四边形有外接圆吗？	复习旧知识，唤起学生对旧知识的回忆，为获得性质定理提供“先行组织者”.	师：三角形的外接圆存在吗？ 生：存在. 师：该圆有什么特点呢？ 生：圆心在三角形三边垂直平分线的交点上. 教师给出圆内接多边形的概念. 师：正方形有外接圆吗？为什么？ 学生讨论，发现任何正方形都存在外接圆. 师：矩形有外接圆吗？为什么？ 师生讨论并小结：因为正方形和矩形对角线的交点到四个顶点的距离都相等，所以以交点为圆心，交点到顶点的距离为半径所作的圆就是四边形的外接圆. 师：一般的四边形存在外接圆吗？ 学生讨论.

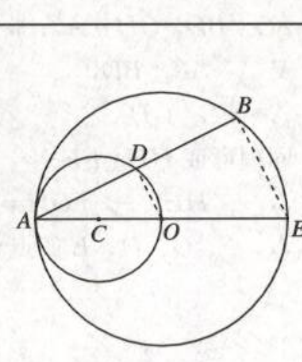
续表

问　题	设计意图	师　生　活　动
2. 你能发现第 27 页“探究”中这些四边形有什么共同的特征吗？	让学生通过观察、测量的方法去归纳图形中四边形的共同特征，从而猜想出圆内接四边形的性质定理，这样，既可以使学生体验探究数学问题的过程，又可以培养学生的观察力和概括能力.	师：我们发现并不是所有的四边形都存在外接圆．现在我们反过来思考问题：如果一个圆有内接四边形，那么这样的四边形有什么特征？ 教师展示一组图形. 师：同学们可以从四边形的边或角之间的关系去考虑. 学生讨论. 师：同学们可以用三角板、量角器对图形进行测量. 学生活动. 生：我们发现，圆内接四边形的对角是互补的.
3. 定理 1：圆内接四边形的对角互补. 定理 2：圆内接四边形的外角等于它的内角的对角.	从猜想转向证明，使学生体会数学的严谨性，同时发展学生的逻辑思维能力.	教师引导学生探索定理证明的思路. 师：我们可以看出，之所以$\angle A+\angle C=180°$，是因为$\angle A$所对的弧和$\angle B$所对的弧刚好组成圆周，是 360°的弧．因此，连结 OA、OC，利用圆心角 α、β 即可沟通$\angle A$和$\angle C$. 学生完成定理的证明.
4. 定理 1 的逆命题成立吗？即：四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$，则 A、B、C、D 四点共圆吗？	训练学生逆向思维的意识.	师：定理 1 的逆命题成立吗？请同学们写出定理 1 的逆命题，并思考应该如何证明.
5. 探究圆内接四边形判定定理的证明思路.	使学生体会分类讨论思想，掌握反证法.	师：我们知道，三点可以确定一个圆，不妨设过 A、B、C 三点的圆为$\odot O$，那么我们只需证明$\odot O$必然经过 D 点即可．点 D 与$\odot O$的位置关系有且只有三种情形：点 D 在圆外；点 D 在圆内；点 D 在圆上．如果能证明前面两种情况不可能成立，那么点 D 就只能在圆上．而要证明“不可能”性问题，常常采用反证法. 师生分析思路，学生证明过程.
6. 定理 2 的逆命题成立吗？		师：定理 2 的逆命题证明不需要按判定定理的证明方法去考虑，而可以直接利用判定定理将其推出，即定理 2 的逆命题可作为判定定理的推论．请同学们完成证明.
7. 例 1 和例 2.	培养学生解决问题的能力. 加深对定理的理解.	师生共同进行证明思路分析. 教师指出当两个圆相交时，一般可以考虑连结两圆的交点作辅助线.
8. 展示本节课的知识点.	使知识系统化.	教师从知识和方法两个维度进行小结.

注：如果本节课还有时间，可以补充“编写意图与教学建议”中的例题.

五、习题解答

习题 2.1（第 26 页）



（第 1 题）

1. 如图，设 AO 的延长线与$\odot O$相交于 E，则 AE 是$\odot O$的直径．连接 DO、BE.

$\because$ AO 是$\odot O$的直径，AE 是$\odot O$的直径，

$\therefore$ $\angle ADO=\angle ABE=90°$.

∴ $DO /\!/ BE$.

又∵ O是AE的中点，

∴ $AD=BD$，即点D是AB的中点.

2. 连接BC、AC.

∵ AB是圆的直径，

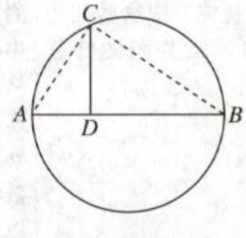
∴ $\angle ACB$是直角.

由射影定理得 $CD^2=AD\cdot BD$，

即 $CD^2=AD(AB-AD)$.

∴ $6^2=AD(13-AD)=13AD-AD^2$.

解得 $AD=4$或$AD=9$.



（第2题）

3. 如图，连接AB、AC.

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}$，

∴ $\angle ABE=\angle ACD$.

又∵ BC是$\odot O$的直径，

∴ $\angle BAC=90^\circ$.

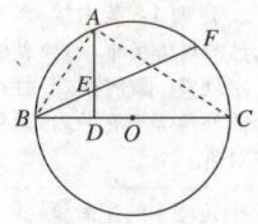
∴ $\angle BAE=90^\circ-\angle DAC$.

又∵ $AD\perp BC$，

∴ $\angle ACD=90^\circ-\angle DAC$.

∴ $\angle ABE=\angle BAE$.

即$\triangle ABE$是等腰三角形，故$AE=BE$.



（第3题）

习题 2.2（第30页）

1. ∵ $AD\perp BC$，$BE\perp AC$，

∴ $\triangle ABD$和$\triangle ABE$均为直角三角形.

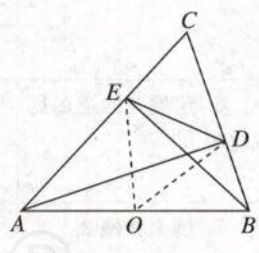
设O是AB的中点，连接OE、OD，则

$OE=\frac{1}{2}AB$，$OD=\frac{1}{2}AB$，

∴ $OE=OD=OA=OB$.

∴ A、B、D、E四点共圆.

∴ $\angle CED=\angle ABC$.



（第1题）

2. 如图，设四边形$ABCD$的对角互相垂直，点E、F、G、H分别是AB、BC、CD、DA的中点. 连接EF、FG、GH、HE，则

$FG /\!/ BD$，$GH /\!/ AC$.

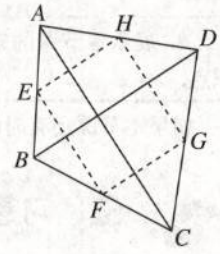
又∵ $AC\perp BD$，

∴ $FG\perp GH$.

同理可证$HE\perp EF$.

∴ $\angle HEF+\angle FGH=180^\circ$.

∴ F、G、H、E四点共圆.



（第2题）

3. 如图，∵ A、B、C、D 四点共圆，

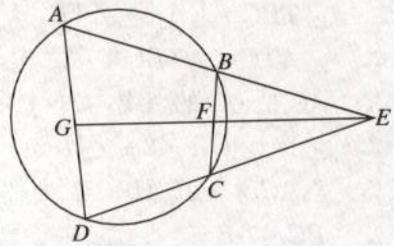
∴ $\angle FCE=\angle A$.

∵ $\angle CFG=\angle FCE+\angle CEF$,

$\angle DGF=\angle A+\angle AEG$,

而 $\angle AEG=\angle CEF$,

∴ $\angle CFG=\angle DGF$.



（第 3 题）

习题 2.3（第 32 页）

1. 如图，连接 OD、AO，过 O 作 AC 的垂线与 AC 相交于 E.

∵ AB 是⊙O 的切线，

∴ $OD\perp AB$.

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形，

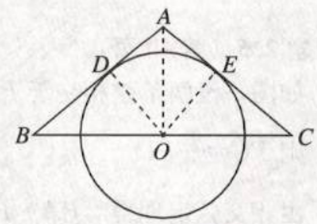
∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

∴ $\text{Rt}\triangle ADO\cong\text{Rt}\triangle AEO$.

∴ $OD=OE$.

∴ 点 E 在圆上.

∴ AC 与⊙O 相切.



（第 1 题）

2. 如图，连接 OQ，则 OQ 是⊙O 的半径，且 $OQ\perp RQ$.

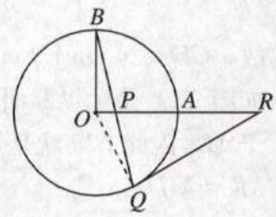
∴ $\angle B=\angle OQB$.

∵ $\angle QPR=\angle BPO=90^\circ-\angle B$,

$\angle PQR=90^\circ-\angle OQB$,

∴ $\angle QPR=\angle PQR$.

∴ $RP=RQ$.



（第 2 题）

3. 如图，连接 OD.

∵ $AD/\!/OC$,

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又∵ $OA=OD$,

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $\angle 2=\angle 4$.

又∵ $OC=OC$，$OB=OD$,

∴ $\triangle CDO\cong\triangle CBO$.

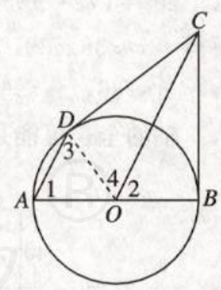
∴ $\angle CDO=\angle CBO$.

∵ BC 是⊙O 的切线，

∴ $\angle CBO=90^\circ$.

∴ $\angle CDO=90^\circ$.

∴ DC 是⊙O 的切线.



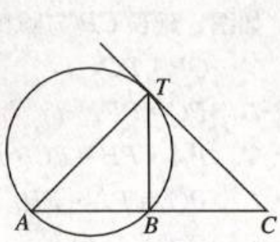
（第 3 题）

习题 2.4（第 34 页）

1. ∵ TC 是圆的切线，

∴ $\angle BTC=\angle A$.

∵ $\angle ATC=\angle ATB+\angle BTC$,



（第 1 题）

$\angle TBC=\angle A+\angle ATB$,

∴ $\angle ATC=\angle TBC$.

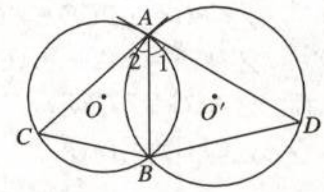
2. ∵ AC 是⊙O 的切线，AD 是⊙O' 的切线，

∴ $\angle 1=\angle C$，$\angle 2=\angle D$，

∴ $\triangle ACB \backsim \triangle DAB$.

∴ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$.

∴ $AB^2=BC\cdot BD$.



（第 2 题）

习题 2.5（第 40 页）

1. 如图，设两条弦相交于 P，$PA=12$，$PB=18$，$PD:PC=3:8$. 令 $PD=x$，

则 $PC=\dfrac{8}{3}PD$.

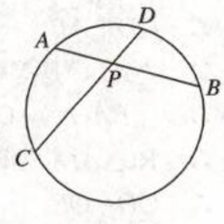
由相交弦定理得 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

∴ $12\times 18=\dfrac{8}{3}x^2$.

得 $x=9(\text{cm})$. 即 $PD=9$ cm.

∴ $PC=\dfrac{8}{3}\times 9=24$ cm.

故 $CD=24\text{ cm}+9\text{ cm}=33\text{ cm}$.



（第 1 题）

2. 如图（1）是轴纵断面图，图（2）是圆头部分的图形，其中弦 $CD=40$，直径 $AB=72$，且 $AB\perp CD$ 于 M，因此 BM 就是圆头部分的长. 设 $BM=x$，由相交弦定理得 $MC\cdot MD=MB\cdot MA$. 而 $MC=MD$，

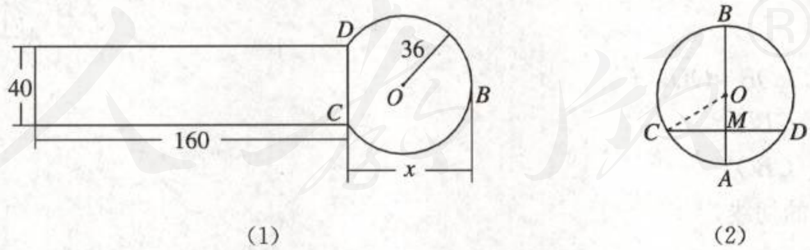
∴ $\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2=MB\cdot MA=(AB-MB)\cdot MB$.

∴ $20^2=(72-x)x$.

解得 $x\approx 36\pm 30$，

∴ $x_1\approx 66$，$x_2\approx 6$.

∴ 轴的全长可能是 $160+66=226$，或是 $160+6=166$.



（第 2 题）

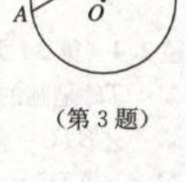
3. 如图，延长 CP 与圆相交于点 D.

∵ $OP\perp PC$，

∴ $PC=PD$.

∵ $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

∴ $PC^2=PA\cdot PB$.



（第 3 题）

4. 设⊙O 的半径为 x.

∵ $PO=PC+x$，

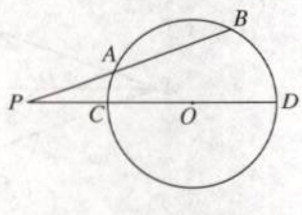
∴ $PC=PO-x=12-x$.

又 $PB=PA+AB=6+7\frac{1}{2}=\frac{27}{2}$.

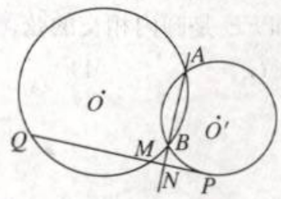
∵ $PA\cdot PB=PC\cdot PD$,

∴ $6\times\frac{27}{2}=(12-x)(12+x)$.

解得 $x=15$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. ∵ $NM\cdot NQ=NB\cdot NA$,

而 PQ 是⊙O'的切线，

∴ $NB\cdot NA=PN^2$.

∴ $PN^2=NM\cdot NQ$.

6. ∵ PA 是⊙O 的切线，

∴ $MA^2=MB\cdot MC$.

∵ M 是 PA 的中点，

∴ $MP=MA$.

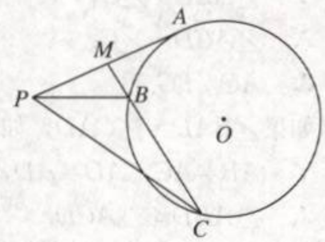
∴ $MP^2=MB\cdot MC$.

∴ $\frac{MB}{MP}=\frac{MP}{MC}$.

又∵ $\angle BMP=\angle PMC$,

∴ $\triangle BMP\backsim\triangle PMC$.

∴ $\angle MPB=\angle MCP$.



（第 6 题）

7. 如图，连接 GC.

∵ $\angle1$ 和$\angle2$ 是同弧上的圆周角，

∴ $\angle1=\angle2$.

∵ $AD\perp BC$，$CF\perp AB$，

∴ $\angle2=90°-\angle ABD$,

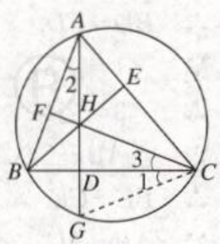
$\angle3=90°-\angle ABD$.

∴ $\angle2=\angle3$.

∴ $\angle1=\angle3$.

∴ $\mathrm{Rt}\triangle CHD\cong\mathrm{Rt}\triangle CGD$.

∴ $DH=DG$.



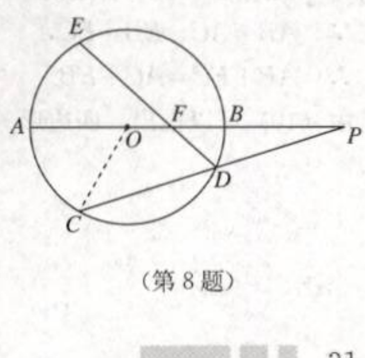
（第 7 题）

8. 如图，连接 OC，则$\angle AOC$ 等于弧$\overset{\frown}{AC}$的度数.

∵ $\angle CDE$ 等于弧$\overset{\frown}{EAC}$度数的一半，而$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AE}$,

∴ $\angle AOC=\angle CDE$.

∴ $\angle POC=\angle PDF$.



（第 8 题）

又∵ $\angle DPF=\angle OPC$，

∴ $\triangle POC\backsim\triangle PDF$.

∴ $\dfrac{PO}{PD}=\dfrac{PC}{PF}$.

∴ $PO\cdot PF=PC\cdot PD$.

又∵ $PC\cdot PD=PB\cdot PA$，

∴ $PO\cdot PF=PB\cdot PA$.

9. 如图（1），∵ DG 和 FE 是圆内相交的弦，

∴ $CF\cdot CE=CD\cdot CG$. (1)

∵ AB 是圆的切线，

∴ $AB^2=AD\cdot AE$.

∵ $AB=AC$，

∴ $AC^2=AD\cdot AE$， (2)

即 $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AC}$.

而 $\angle CAD=\angle EAC$，

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle AEC$.

∵ $\angle AEC=\angle G$，

∴ $\angle ACD=\angle G$.

∴ $AC/\!/FG$. (3)

如果$\angle BAD=\angle CAD$，如图（2），连接 BC，BD，BG，BE.

∵ $AB=AC$，$AD=AD$，

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

∴ $BD=CD$. (4)

∴ $\angle ABD=\angle ACD$.

∵ $\angle ACD=\angle 1$，$\angle ABD=\angle 2$，

∴ $\angle 1=\angle 2$. (5)

∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{FD}$. (6)

∵ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

∴ $\angle 3=\angle 4$.

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACE$.

∴ $BE=CE$. (7)

∵ $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，

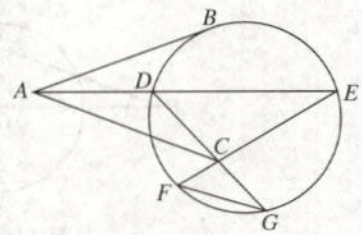
∴ $AE\perp BC$. (8)

∴ 四边形 $ABEC$ 各边的中点在同一个圆周上. (9)

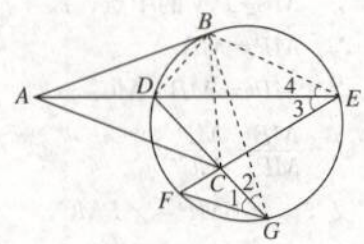
∵ $AB=AC$，$EB=EC$，

∴ $AB+EC=AC+EB$. (10)

由（10）可以推出，四边形 $ABEC$ 存在内切圆（证明略）. (11)



(1)

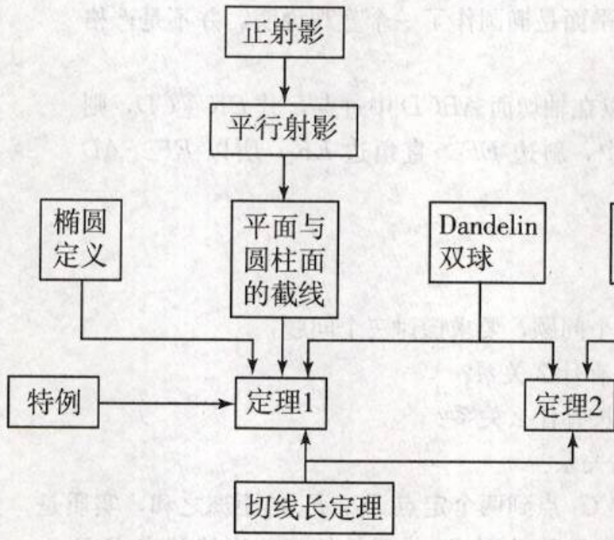


(2)

（第 9 题）

第三讲 圆锥曲线性质的探讨

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 经历定理 1 的探究过程，感知 Dandelin 双球在定理 1 证明中的作用.
2. 理解定理 1.
3. 经历定理 2 的探究过程，进一步体会 Dandelin 双球在证明定理中的作用.
4. 理解定理 2.

难点：

1. 求椭圆的准线和离心率.
2. 讨论双曲线的结构特点.

三、编写意图与教学建议

首先，引入平行射影的概念，并借助于玻璃杯中水面的形状，使学生感知椭圆的具体实例，这是本讲的逻辑起点.

然后，将平面截圆柱面的立体图形特殊化，即取这个立体图的轴切面进行研究，将问题转化为学生熟知的平面几何问题，通过对平面图形性质的探讨再转向对立体图形性质的探讨. 这样组织教学内容的目的是要使学生感受研究数学问题的思考过程，同时也合乎学生的认知规律.

在第三节中采用了同样的处理手段，由特殊到一般地呈现问题，使学生进一步体验这种数学思想方法.

本讲的主要目标是让学生体验探究过程.

1. 平行射影

首先，讨论平行射影的概念．平行射影是正射影的推广．正射影要求“作垂线”，即给定一个平面 α，从一点 A 作 α 的垂线，垂足为点 A'，称点 A' 为点 A 在平面 α 上面的正射影．平行射影取消了“垂直”的限定，只要点 A 沿一个规定方向投影到一个平面 α 上，则称投影点 A' 为 A 沿规定方向在平面 α 上的平行射影．显然，正射影是平行射影的特例．

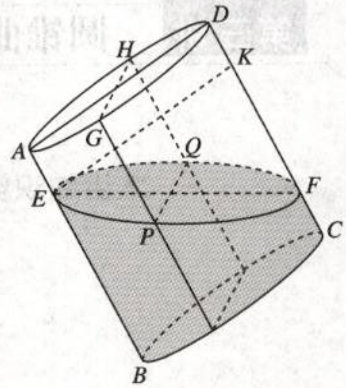


图 19

借助于杯中的水平面，让学生感知现实生活中的椭圆实例．教科书第 44 页对倾斜玻璃杯中水面平面是椭圆作了一个直观说明，并不是严格的证明．

为了说明 $EF>AD$，可以在轴切面 $ABCD$ 中过点 E 作 $EK\perp CD$，则 $EK=AD$．而在 $\text{Rt}\triangle EFK$ 中，斜边 $EF>$ 直角边 EK，所以 $EF>AD$（如图 19）．

2. 平面与圆柱面的截线

教科书第 45 页先提出一个问题，要求探讨三个问题：

(1) $G_2F_1+G_2F_2$ 与 AD 有什么关系？

(2) AD 的长与 G_1G_2 的长有什么关系？

(3) G_2F_1 与 G_2E 有什么关系？

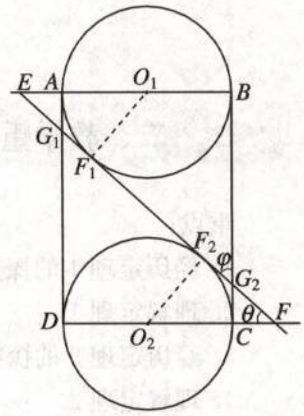


图 20

如图 20，$G_2F_1+G_2F_2$ 是 G_2 点到两个定点 F_1、F_2 的距离之和，实质是教科书第 46 页图 3-6 中动点 P 移动到 G_2 位置的情形，当然就有 $G_2F_1+G_2F_2$ 等于定值 AD．

G_1G_2 是立体图中椭圆长轴的两个端点，两点间的距离应当等于定值 AD，教科书的指导正是为了得到这一结论．

探讨 G_2F_1 与 G_2E 之间的关系，本质是讨论对应的立体图形中椭圆的离心率．G_2F_1 表示动点到定点的距离，G_2E 在对应的立体图形（教科书第 47 页图 3-8）中表示动点到定直线 l_1 的距离．两者的比值 $\dfrac{G_2F_1}{G_2E}$ 即为椭圆的离心率．

在教学中要突出由平面图向立体图的过渡，在讲完立体图的性质后又应当回到平面图，将两者对照，使学生理解两者的关系．

3. 平面与圆锥面的截线

本节的开始是讨论等腰三角形与一条直线 l 的位置关系（如图 21），其目的是为后面讨论平面与圆锥相截的图形打下基础．当直线 l 与等腰三角形两腰 AB、AC 都相交时，有 $\beta>\alpha$，这种情形对应平面与圆锥相截后的截线是椭圆；当直线 l 平行于一条腰 AB 时，l 只能与另一腰 AC 相交，此时 $\beta=\alpha$，这种情形对应平面与圆锥相截后的截线是抛物线；当直线 l 与 BA 的延长线及一腰 AC 相交时，有 $\beta<\alpha$，这种情形对应平面与圆锥相截后的截线是双曲线．

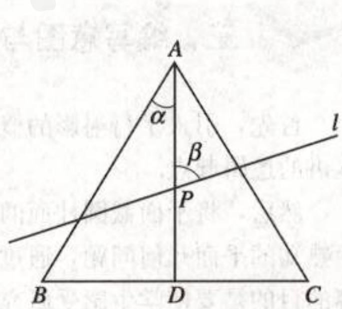


图 21

讨论这三种情形，主要是帮助学生对立体图形的理解．

在探讨椭圆的准线和离心率时，要复习解析几何中椭圆的准线和离心率概念．

四、教学设计案例

平面与圆柱面的截线(1课时)

1. 教学任务分析

(1) 通过一条直线与两个相离等圆内公切的情形，推广为两个半径相同的球在一个平面的两侧均与圆相切的情形，得到定理 1.

(2) 通过探究，得出椭圆的准线和离心率，加深对椭圆结构的理解.

2. 教学重点与难点

重点：

(1) 定理 1 的证明.

(2) 椭圆准线和离心率的探究.

难点：

椭圆准线和离心率的探究.

3. 教学基本流程

复习

↓

猜想并证明定理1

↓

探究椭圆的准线

↓

探究椭圆的离心率

↓

小结、练习

4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师　生　活　动
1. 复习教科书第 45 页所探究的问题.	回忆已学知识，激活学生头脑中的知识结构，为新知识的学习奠定基础.	师：请同学们阅读教科书第 45 页的问题，并思考这个问题能否向空间推广？此时，平面图形中的元素（圆、线段）应该作怎样的推广？ 生：将圆改为球. 师：很好！ 生：将直线 EB、DF、EF 拓广为平面. 师：非常好．请同学们参阅教科书第 46 页的图 3-6.

续表

问题	设计意图	师生活动
2. 猜想椭圆的焦点. 观察教科书图 3-6，当 P 与 G_2 重合时，可以得到什么结论?	鼓励学生猜想，通过猜想去发展学生的直觉思维能力. 考察当 P 与 G_2 重合的情形，是把问题特殊化，以便利用已复习的结论.	师：图 3-6 实质是把两个球放入圆柱中，球与圆柱面内相切，此时平面 γ 与圆柱面的截线是一个椭圆. 请同学们猜测该椭圆的两个焦点在什么位置? 生：凭感觉，似乎应该是平面 γ 与两个球的切点. 师：很好!
3. 对观察的结论“圆柱形物体的斜截口是椭圆”进行证明.	培养学生的逻辑思维能力.	师：要证明该截线是椭圆，应该从哪里入手? 生：只要能证明 $\|PF_1\|+\|PF_2\|$ 为定值即可. 师：请同学们思考两个球的作用. 学生讨论. 教师作图（过点 P 作母线），分析证明思路，板书证明过程.
4. 探讨椭圆的准线和离心率.	对椭圆的结构进行更深入地探究，使学生头脑中的知识结构系统和完善.	师：下面我们进一步研究椭圆的结构. 我们知道，椭圆存在准线和离心率，结合教科书第 49 页的图 3-8，同学们估计该椭圆的准线应该是哪两条直线? 学生讨论. 生：似乎应当是直线 l_1 和 l_2. 师：下面请大家选择一条（譬如 l_1）进行证明，即要证 $\dfrac{PF_1}{P\text{ 到 }l_1\text{ 的距离}}=$定值. 还要考察特殊情形，当 P 与 G_2 重合时，结论成立吗? 教师再引导学生讨论一般情形. 师：我们把这个定值 $\cos\varphi$ 记为 e，称 e 是椭圆的离心率.
5. 展示本节知识点，小结.	使知识系统化.	教师就知识和方法两个方面进行总结.
6. 在解析几何中，离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，能否将 $\dfrac{c}{a}$ 与 $\cos\varphi$ 联系起来呢?	培养学生反思问题的意识和能力.	教师提出问题，安排学生课后作为作业去探讨.

五、习题解答

习题 3.2（第 47 页）

如图（1），$\angle QPK_1=\varphi$，$\cos\varphi=\dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{PF_1}{PQ}$.

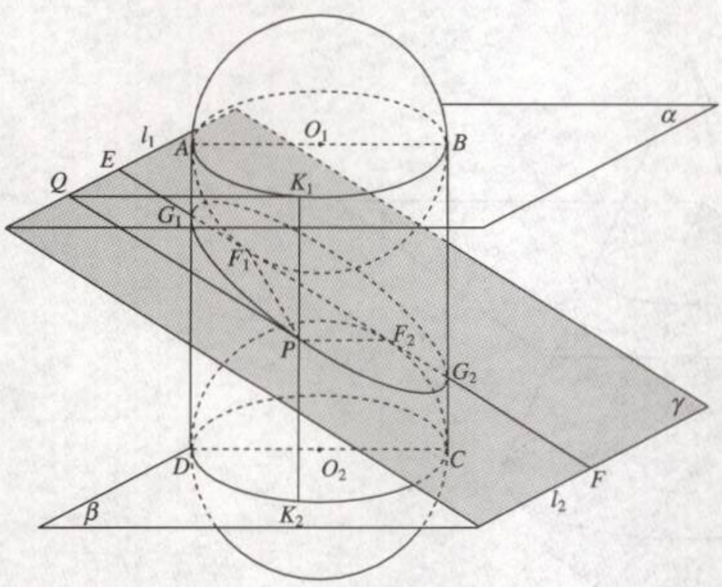
考察轴线面 $ABCD$，$\angle AG_2B=\varphi$，$\cos\varphi=\dfrac{G_2B}{G_2E}$，

$\therefore\ \dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{G_2B}{G_2E}$.

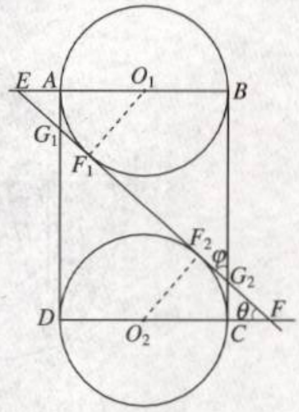
将图（1）的轴截面取出来得图（2）. 则 $F_1F_2=2c$，$G_1G_2=2a$，且

$G_2B=G_2F_1=a+c$，

$G_2E=G_1G_2+G_1E=2a+G_1E$.



图（1）



图（2）

$\because\ \triangle EAG_1 \backsim \triangle EBG_2$，

$\therefore\ \dfrac{EG_1}{EG_2}=\dfrac{G_1A}{G_2B}$.

$\therefore\ EG_1=\dfrac{G_1A\cdot EG_2}{G_2B}=\dfrac{G_1F_1(EG_1+G_1G_2)}{G_2F_1}$.

$\because\ G_1F_1=\dfrac{2a-2c}{2}=a-c$，$G_1G_2=2a$，$G_2F_1=a+c$，

$\therefore\ EG_1=\dfrac{(a-c)(EG_1+2a)}{a+c}$.

解得 $EG_1=\dfrac{a(a-c)}{c}$.

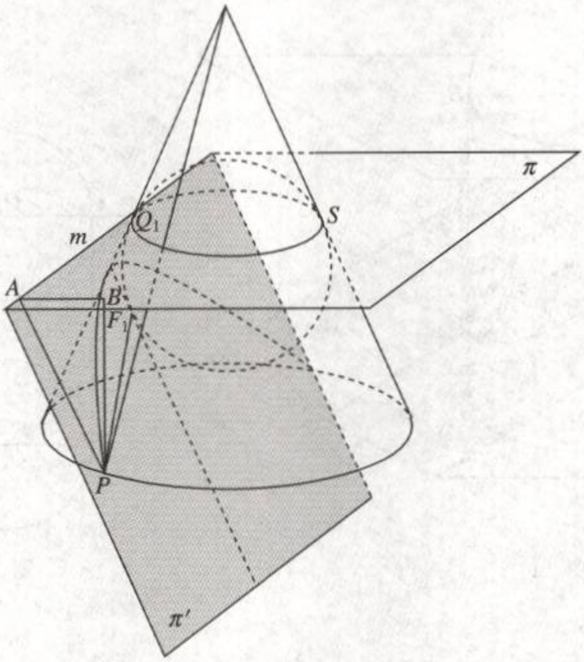
$\therefore\ \dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{G_2B}{G_2E}=\dfrac{G_2F_1}{G_2E}=\dfrac{a+c}{2a+\dfrac{a(a-c)}{c}}=\dfrac{c(a+c)}{a^2+ac}=\dfrac{c}{a}$.

$\therefore\ \dfrac{PF_1}{PQ}=\dfrac{c}{a}$.

习题 3.3（第 51 页）

1. 如图，设平面 π 与圆锥内切球相切于点 F_1，球与圆锥的交线为 S，过该交线的平面为 π'，π 与 π' 相交于直线 m.
在平面 π 与圆锥的截线上任取一点 P，连接 PF_1. 过点 P 作 $PA\perp m$，交 m 于点 A，过点 P 作 π' 的垂线，垂足为 B，连接 AB，则 $AB\perp m$，所以 $\angle PAB$ 是 π 与 π' 所成二面角的平面角. 连接点 P 与圆锥的顶点，与 S 相交于点 Q_1，连接 BQ_1. 则 $\angle BPQ_1=\alpha$，$\angle APB=\beta$.
在 Rt$\triangle APB$ 中，$PB=PA\cos\beta$.
在 Rt$\triangle PBQ_1$ 中，$PB=PQ_1\cos\alpha$.
$\therefore\ \dfrac{PQ_1}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.
又 $\because\ PQ_1=PF_1$，$\alpha=\beta$，
$\therefore\ \dfrac{PF_1}{PA}=1$，
即 $PF_1=PA$，动点 P 到定点 F_1 的距离等于它到定直线 m 的距离，故当 $\alpha=\beta$ 时，平面与圆锥的

交线为抛物线.



2. 我们就教科书第 50 页图 3-13 中下面的 Dandelin 球进行讨论，即讨论一条准线的情形，上面一支双曲线的准线同理可证.

在截口上任取一点 P，连接 PF_2. 过 P 和圆锥顶点 O 作母线，与球相切于 Q_2，球与圆锥的交线为圆 S，记圆 S 所在的平面为 π'. 截面 π 与平面 π' 相交于直线 m.

过点 P 在 π 中作 $PA\perp m$，交 m 于点 A. 过 P 作平面 π' 的垂线，垂足为 B. 连接 Q_2B、AB. 则 $\triangle PBQ_2$ 为直角三角形，且 $\angle Q_2PB=\alpha$. $\triangle PAB$ 也是直角三角形，且 $\angle APB=\beta$.

在 Rt$\triangle PBQ$ 中，$PB=PQ_2\cos\alpha$.

在 Rt$\triangle PAB$ 中，$PB=PA\cos\beta$.

$\therefore\ \dfrac{PQ_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

又$\because\ PF_2=PQ_2$，

$\therefore\ \dfrac{PF_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=$定值.

$\because\ 0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \cos\beta>\cos\alpha$.

$\therefore\ \dfrac{PF_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}>1$.

$\therefore$ m 是双曲线的一条准线，且 $e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}>1$.

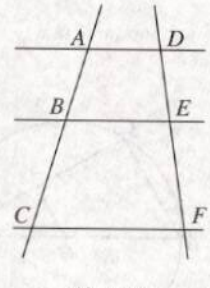
III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. 如图，已知 $AD/\!/BE/\!/CF$，下列比例式成立的是（　　）.

(A) $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AD}{BE}$　　(B) $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{DE}{BC}$

(C) $\dfrac{AC}{EF}=\dfrac{DF}{BC}$　　(D) $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$



(第 1 题)

2. 下列各组的两个图形一定相似的是（　　）.

(A) 对应边成比例的两个多边形

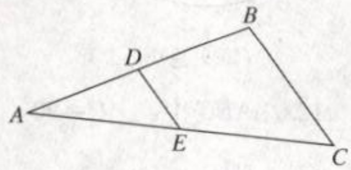
(B) 有一个角对应相等的两个菱形

(C) 等腰梯形的中位线分成的两个梯形

(D) 邻边之比都等于 2 的两个平行四边形

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点. 则 $\triangle ADE$ 与四边形 $DECB$ 的面积之比是（　　）.

(A) 1∶3　　(B) 1∶2　　(C) 1∶5　　(D) 1∶4



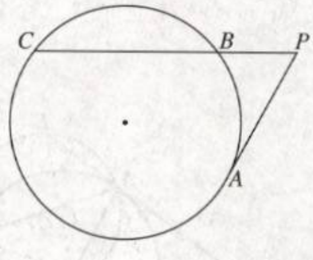
(第 3 题)

4. 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比为 2∶3∶6，$\angle D$ 的度数为（　　）.

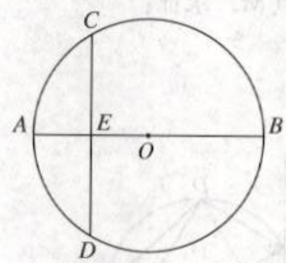
(A) 45°　　(B) 67.5°　　(C) 135°　　(D) 112.5°

5. 如图，PA 是圆的切线，A 为切点，PBC 是圆的割线，且 $PB=\dfrac{1}{2}BC$，则 $\dfrac{PA}{PB}$ 的值为（　　）.

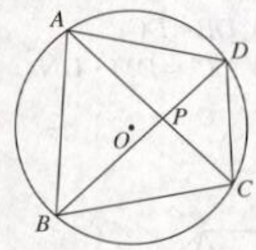
(A) 2　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 1



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

6. 如图，$\odot O$ 的直径是 AB，弦 CD 垂直平分 OA，垂足为 E 点，则弧 $\overset{\frown}{CAD}$ 的度数是（　　）.

(A) 150°　　(B) 120°　　(C) 90°　　(D) 60°

7. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，且 AC、BD 交于点 P. 则此图形中一定相似的三角形有（　　）对.

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

8. 半径为 5 cm 的圆内有两条平行弦，其长分别为 6 cm 和 8 cm，则两平行弦之间的距离为（　　）.

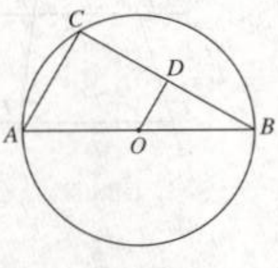
(A) 1 cm 或 7 cm　　(B) 1 cm 或 4 cm　　(C) 1 cm　　(D) 7 cm

二、填空题

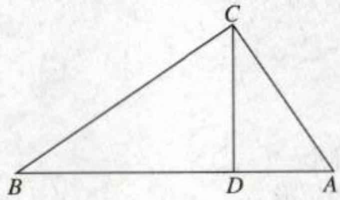
9. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，C 为圆周上一点，$\overset{\frown}{AC}=60°$，$OD\perp BC$，D 为垂足，且 $OD=10$，则 $AC=$______，$AB=$______.

10. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$CD=2$，$BD=3$，则 $BC=$______.

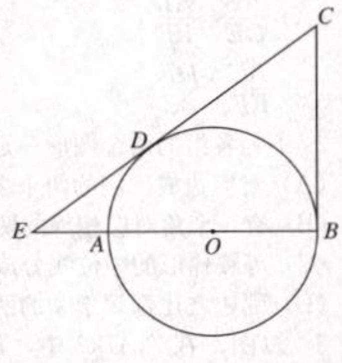
11. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CB 切 $\odot O$ 于 B，CD 切 $\odot O$ 于 D，交 BA 的延长线于 E. 若 $AB=3$，$ED=2$，则 BC 的长为______.



(第 9 题)



(第 10 题)



(第 11 题)

12. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AC=2\sqrt{3}$. 则$\triangle ABC$ 外接圆的半径等于______.

三、证明题

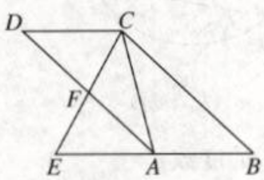
13. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在边 BA 的延长线上，CE 交 AD 于点 F，$\angle ECA=\angle D$.

求证：$AC\cdot BE=CE\cdot AD$.

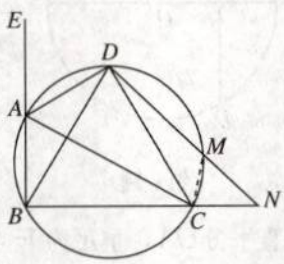
14. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 外角$\angle EAC$ 的平分线，AD 与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D，N 为 BC 延长线上一点，ND 交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 M. 求证：

(1) $DB=DC$;

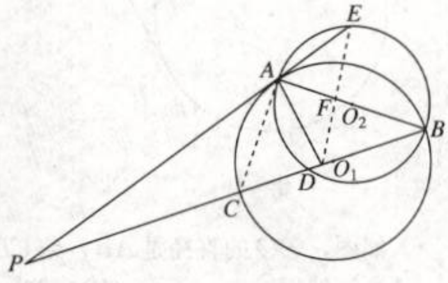
(2) $DC^2=DM\cdot DN$.



(第 13 题)



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，AB 是$\odot O_2$ 的直径，过 A 点作$\odot O_1$ 的切线交$\odot O_2$ 于点 E，并与 BO_1 的延长线交于点 P. PB 分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于 C、D 两点. 求证：

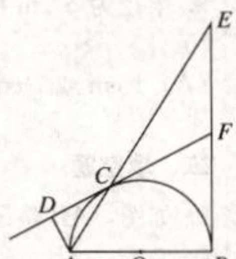
(1) $PA\cdot PD=PE\cdot PC$;

(2) $AD=AE$.

四、探究题

16. 如图，已知 AB 为半圆的直径，O 为圆心，BE、CD 分别为半圆的切线，切点分别为 B 和 C. DC 的延长线交 BE 于 F，AC 的延长线交于 BE 于 E. $AD\perp DC$，D 为垂足.

根据这些条件，你能推出哪些结论？请你给出尽量多的结论.



(第 16 题)

参考答案

1. D.　2. B.　3. A.　4. D.　5. C.　6. B.　7. C.　8. A.　9. 20，40.

10. $\sqrt{13}$.　11. 3.　12. 2.

13. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AF /\!/ BC$.

∴ $\dfrac{CE}{BE}=\dfrac{EF}{EA}$.

又∵ $AE /\!/ CD$，

∴ $\triangle AFE \backsim \triangle DFC$.

∴ $\dfrac{EA}{CD}=\dfrac{EF}{CF}$，即$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{EF}{EA}=\dfrac{CE}{BE}$.

又∵ $\angle ECA=\angle D$，$\angle CAF=\angle DAC$，

∴ $\triangle AFC \backsim \triangle ACD$.

∴ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{CF}{CD}$.

∴ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{CE}{BE}$.

∴ $AC \cdot BE=CE \cdot AD$.

14.（1）∵ $\angle EAD=\angle DAC$，而$\angle DAC$与$\angle DBC$是同弧上的圆周角，即$\angle DAC=\angle DBC$，

∴ $\angle EAD=\angle DBC$.

又∵ A、B、C、D四点共圆，

∴ $\angle EAD=\angle DCB$.

∴ $\angle DBC=\angle DCB$.

∴ $DB=DC$.

（2）连接CM. $\angle DCN=180^\circ-\angle DCB$.

∵ B、C、M、D四点共圆，

∴ $\angle DMC=180^\circ-\angle DBC$.

由（1）知 $\angle DBC=\angle DCB$，

∴ $\angle DMC=\angle DCN$.

又∵ $\angle CDN=\angle MDC$，

∴ $\triangle DMC \backsim \triangle DCN$.

∴ $\dfrac{DM}{DC}=\dfrac{DC}{DN}$.

∴ $DC^2=DM \cdot DN$.

15.（1）∵ PAE、PDB分别是$\odot O_2$的割线，

∴ $PA \cdot PE=PD \cdot PB$. ①

又∵ PA、PCB分别是$\odot O_1$的切线和割线，

∴ $PA^2=PC \cdot PB$. ②

由①②得 $PA \cdot PD=PE \cdot PC$.

（2）连接AD，连接AC、ED，ED与AB相交于F.

∵ BC是$\odot O_1$的直径，

∴ $\angle CAB=90^\circ$.

∴ AC是$\odot O_2$的切线.

又由（1）知 $\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{PC}{PD}$，

∴ $AC /\!/ ED$.

∴ $AB \perp ED$.

∴ $\angle PAC=\angle AED$.

又∵ AC是$\odot O_2$的切线，

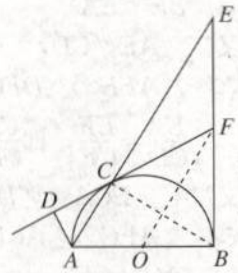
∴ $\angle CAD=\angle AED$.

又∵ $\angle CAD=\angle ADE$，

∴ $\angle ADE=\angle AED$.

∴ $AD=AE$.

16. 如图，∵ EB、ECA 分别是⊙O 的切线和割线，



(第 16 题)

∴ $EB^2=EC\cdot EA$. ①

又∵ FC 也是圆的切线，

∴ $FC=FE$. ②

连接 BC. 则$\angle ACB=90^\circ$.

∵ DF 是圆的切线，

∴ $\angle DCA=\angle CBA$.

又∵ $AD\perp DC$，

∴ $\triangle ADC\backsim\triangle ACB$.

∴ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{AB}$.

∴ $AC^2=AD\cdot AB$. ③

连接 OF. 由于 FC、FB 是半圆的切线，

∴ OF 垂直平分 BC.

∴ $OF/\!/AE$.

∴ $BF=EF$. ④

又∵ $\angle ABF=90^\circ$，$\angle ADF=90^\circ$，

∴ A、B、F、D 四点共圆. ⑤

∴ $\angle EFD=\angle DAB$. ⑥

∵ $\angle CBA=90^\circ-\angle CAB$，$\angle E=90^\circ-\angle CAB$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim\mathrm{Rt}\triangle AEB$.

∴ $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$.

∴ $AB^2=AE\cdot AC$. ⑦

说明 第 16 题是一个开放性问题，除了以上 7 个结论，还可以推出其他一些结论. 应鼓励学生去尽量努力探究.

所得到的结论应该是简单的，它能反映图中各已知线段（一般不考虑辅助线段之间的表达式）或角之间的关系.

计分方式可以采用：给出一个正确的、容易推导的结论计 2 分；给出一个正确的，但需借助于辅助线推导的结论计 3 分.

该题也可以留给学生在课外去探究. 在题目中增加一些条件，让学生完成一篇小论文. 譬如，在图 11 中，增加条件：$CE:CA=3:1$，则可推得：$CF:AC:AD=2\sqrt{3}:2:1$. 如果推广为 $CE:CA=n:m$，又能推出什么结论呢？让学生去合作或独立探究.