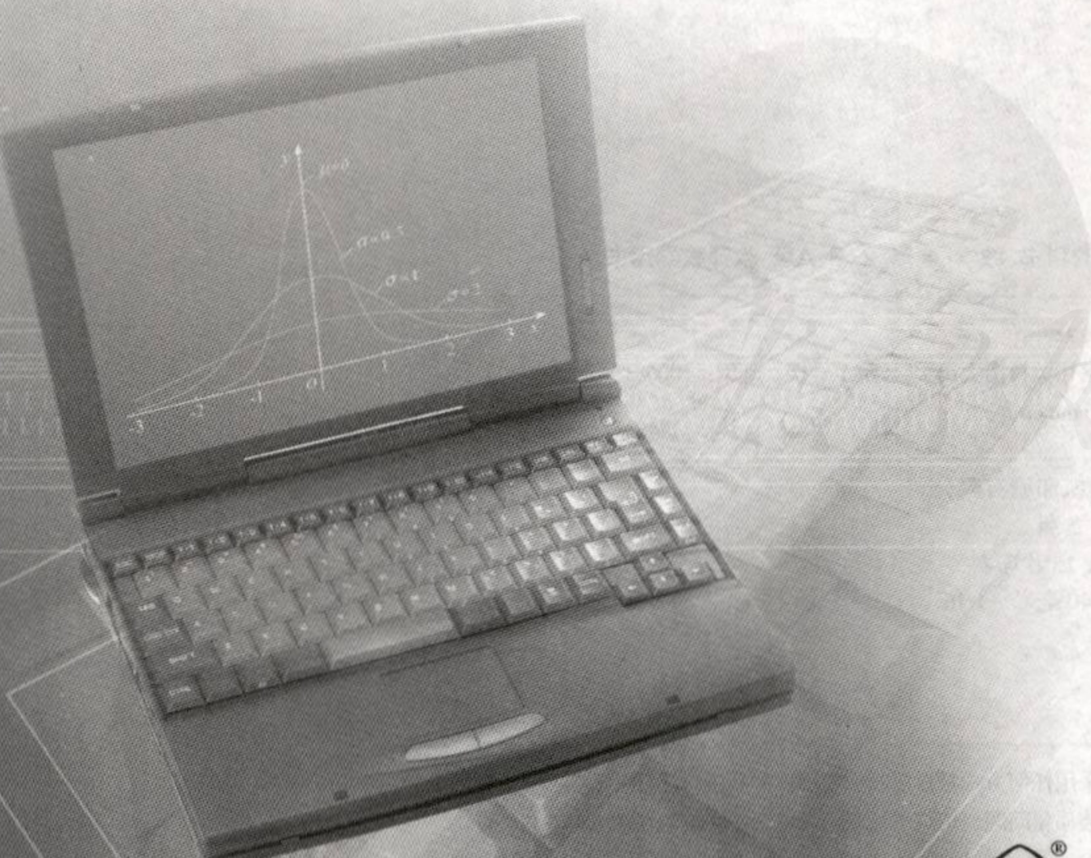
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–3

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 2—3（A 版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—2版．—北京：人民教育出版社，2007.4（2019.7 重印）

ISBN 978-7-107-19130-5

Ⅰ．①普…　Ⅱ．①人…②课…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033873 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修　2-3　A版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　保定市中画美凯印刷有限公司
版　　次　2007 年 6 月第 2 版
印　　次　2019 年 7 月第 25 次印刷
开　　本　890 毫米 × 1240 毫米　1/16
印　　张　8.5
字　　数　216 千字
定　　价　18.10元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：李　勇
主要编者：章建跃　李　勇　张淑梅　白　涛
责任编辑：章建跃　张唯一
美术编辑：王　艾
封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、独立性检验思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

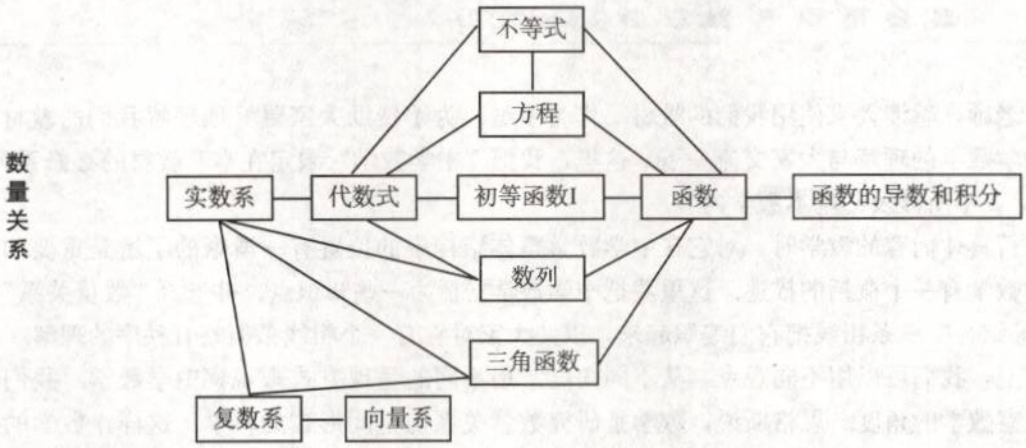
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数).

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})$，而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”(即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等).

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“=”换成实数系所特有的“>”(或“<”) 便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”.“>”的性质比“=”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数I 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

数列　数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数　描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

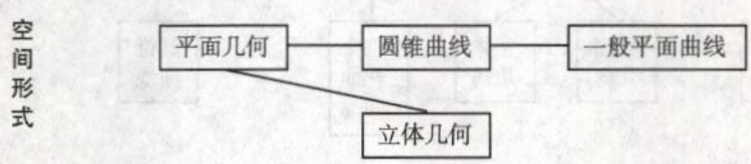
函数　函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分　虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何　讨论点、直线、直线的平行和垂直、三角形、圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线　在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何　讨论线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线　虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

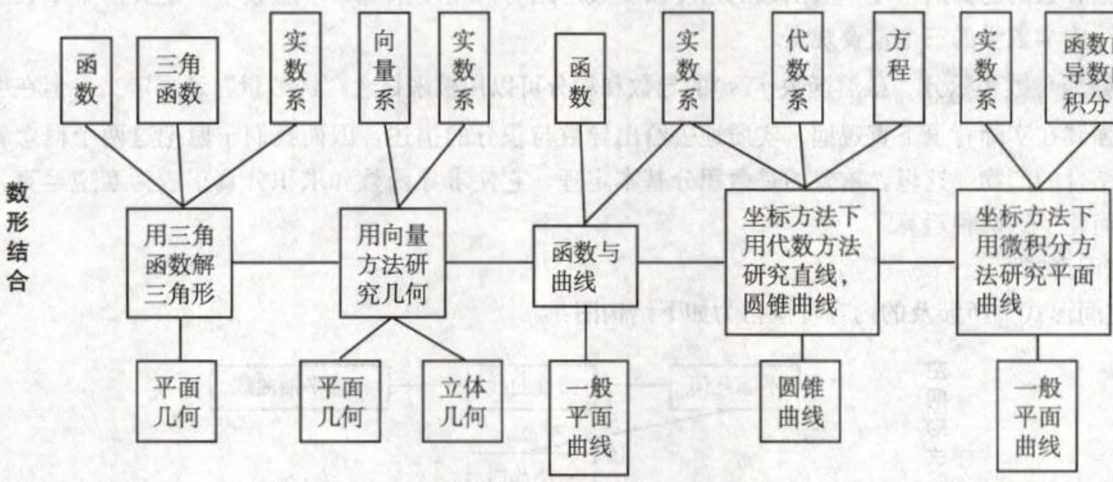
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标）、代数式、方程表示出问题中关键的点、距离、直线、圆锥曲线；对这些数、代数式、方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

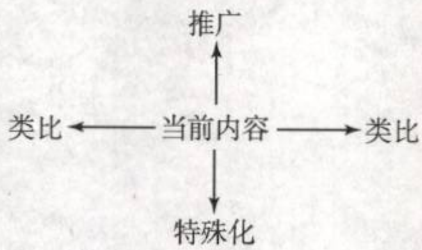
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来，等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法，等等.

6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：

这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

说明

人教版《普通高中课程标准实验教材·数学（A版）》，是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容. 本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1. “亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情.

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习.

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情.

2. “问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

提问是创新的开始. “看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神.

3. “思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括.

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的

理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”.

4.“联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. **总体设计**是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 对内容安排的说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

(4) 课时安排根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. **教科书分析**按照教材内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写意图与教学建议等.

（1）本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

（2）重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

（3）难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（4）编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. **教学设计案例**选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点与难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. **习题解答**不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. **拓展资源**为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网上下载.

本书是选修课程数学 2-3 的教师教学用书，包含计数原理，随机变量及其分布，统计案例等三章内容. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一章 计数原理 约 14 课时

第二章 随机变量及其分布 约 12 课时

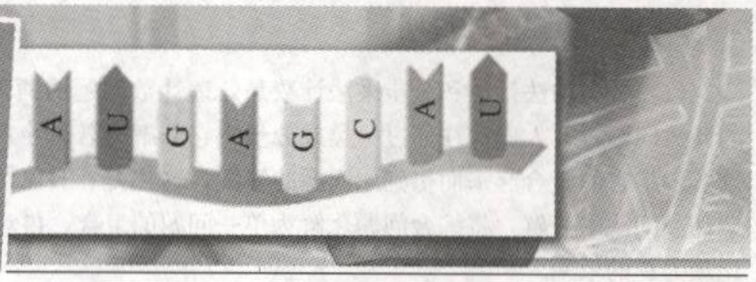
第三章 统计案例 约 10 课时

参加本书编写的有章建跃、李勇、张淑梅、白涛等，责任编辑章建跃、张唯一.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

第一章 计数原理



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

计数问题是数学的重要研究对象之一，分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称为基本计数原理，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具. 在本章中，学生将学习计数基本原理、排列、组合、二项式定理及其应用，了解计数与现实生活的联系，会解决简单的计数问题.

2. 学习目标

（1）分类加法计数原理、分步乘法计数原理

通过实例，总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理；能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.

（2）排列与组合

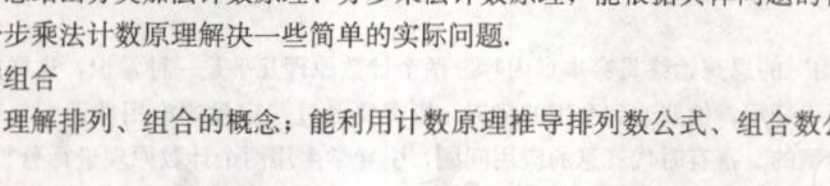
通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式，并能解决简单的实际问题.

（3）二项式定理

能用计数原理证明二项式定理；会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

二、内容安排

1. 本章知识结构



2. 对内容安排的说明

(1) 分类加法计数和分步乘法计数是处理计数问题的两种基本思想方法. 一般地，面对一个复杂的计数问题时，人们往往通过分类或分步将它分解为若干个简单计数问题，在解决这些简单问题的基础上，将它们整合起来而得到原问题的答案，这也是在日常生活中被经常使用的思想方法. 通过对复杂计数问题的分解，将综合问题化解为单一问题的组合，再对单一问题各个击破，可以达到以简驭繁、化难为易的效果.

(2) 返璞归真地看两个计数原理，它们实际上是学生从小学就开始学习的加法运算与乘法运算的推广，它们是解决计数问题的理论基础. 本章开篇在列举一些典型事例的基础上，用明确的语言指出了两个计数原理与加法、乘法运算之间的这种关系，并提出"不通过一个一个地数而确定这个数"的问题，从而使学生体会学习计数原理的必要性. 由于两个计数原理的这种基础地位，并且在应用它们解决问题时具有很大的灵活性，是训练学生推理技能的好素材，另外，学生还不习惯用它们来分析和解决问题，所以教科书通过实例概括出两个计数原理后，给出了难度逐步增大的 9 个例题，使学生有较多的机会来熟悉原理及其基本应用. 实际上，两个计数原理的地位需要加强，因此本教科书安排了较多课时，这是与以往的教科书有显著区别的地方.

(3) 排列、组合是两类特殊而重要的计数问题，而解决它们的基本思想和工具就是两个计数原理. 教科书从简化运算的角度提出排列与组合的学习任务，通过具体实例的概括而得出排列、组合的概念；应用分步乘法计数原理得出排列数公式；应用分步计数原理和排列数公式推出组合数公式. 对于排列与组合，有两个基本想法贯穿始终，一是根据一类问题的特点和规律寻找简便的计数方法，就像乘法作为加法的简便运算一样；二是注意应用两个计数原理思考和解决问题.

(4) 二项式定理的学习过程是应用两个计数原理解决问题的典型过程，其基本思路是"先猜后证". 与以往教科书比较，猜想不是通过对 $(a+b)^n$ 中 n 取 1，2，3，4 的展开式的形式特征的分析而归纳得出，而是直接应用两个计数原理对 $(a+b)^2$ 展开式的项的特征进行分析. 这个分析过程不仅使学生对二项式的展开式与两个计数原理之间的内在联系获得认识的基础，而且也为证明猜想提供了基本思路.

(5)"学以致用"的思想始终贯穿本章内容. 两个计数原理几乎是一种常识，这样简单朴素的原理易学、好懂、能懂、好用，但要达到会用的境界，则需要经过一定量的应用性训练. 所以，教科书特别注意选择一些典型的、富有时代气息的应用问题，引导学生用两个计数原理进行分析、推理和论证，使学生有较多的机会在应用过程中加深对原理的理解，提高学生的分析问题和解决问题的能力.

(6) 本章的重点是两个计数原理，排列、组合的意义及排列数、组合数计算公式，二项式定理. 两个计数原理是最基本而重要的.

本章的主要难点是正确运用两个计数原理以及排列、组合概念分析和解决问题. 由于计数问题与学生熟悉的代数问题有些不同，常常涉及一些复杂的关系，很容易造成分析过程中的逻辑混乱，而且在解决问题时还常常发生分不清排列还是组合、重复或遗漏计算等情况. 为了突破难点，教科书始终把两个计数原理的理解放在突出位置，并给学生提供辨别容易混淆的概念、用不同思路分析和解决问题的机会.

三、课时安排

全章共安排了 3 个小节，教学约需 14 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 约 4 课时

1.2 排列与组合 约 6 课时

1.3 二项式定理 约 3 课时

小结 约 1 课时

II 教科书分析

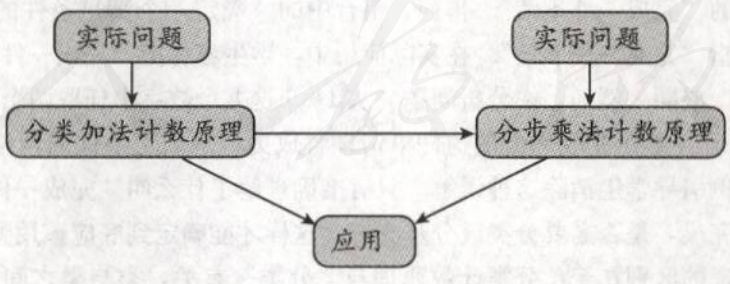
教科书在章头图中提供了两幅画面，一幅是计算机与二进制符号，另一幅是核糖核酸分子图，并以《九章算术》中关于二项式定理的篇章为背景衬底. 在这样一个古今结合、时代气息浓厚的画面中，反映出计数原理的实际应用，从而引发学生学习本章知识的兴趣.

章引言有这样几个意图：首先，引导学生认识现实中的计数问题普遍存在，学习一些计数知识是非常必要的，同时通过引言中这几个有趣的、对学生的智力有一定挑战性的问题，激发他们学习本章的兴趣；其次，概述了研究计数问题的总体思路，即“如何能不通过一个一个地数而确定出这个数”，即要探究计数的技巧；再次，明确了本章要学习的主要内容.

对引言的教学中，要注意贯彻教科书的上述三个意图. 另外，教学中还要注意引导学生通过类比加法与乘法的关系，体会引进乘法运算是为了实现“简便、快捷地运算”这一最原始的想法，从而使学生明确研究计数原理的最基本的指导思想. 当然，只有通过本章的学习和训练才能使学生理解这个思想并运用自如，所以对它应点到为止，不一定详细展开.

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：归纳地得出分类加法计数原理和分步乘法计数原理，能应用它们解决简单的实际问题.

难点：正确地理解“完成一件事情”的含义；根据实际问题的特征，正确地区分“分类”或“分步”.

三、编写意图与教学建议

两个计数原理是人们在大量实践经验的基础上归纳出来的基本规律. 它们不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据，而且其基本思想方法贯穿本章内容的始终. 事实上，从思想方法的角度看，运用分类加法计数原理解决问题就是将一个复杂问题分解为若干“类别”，然后分类解决，各个击破；运用分步乘法计数原理则是将一个复杂问题的解决过程分解为若干“步骤”，先对每一个步骤进行细致分析，再整合为一个完整的过程. 这样做的目的都是为了分解问题、简化问题. 由于排列、组合及二项式定理的研究都是作为两个计数原理的典型应用而设置的，因此，理解和掌握两个计数原理，是学好本章内容的关键.

1. 两个计数原理及其教学

(1) 由于两个计数原理的理解并不困难，关键是根据具体问题的特征选择对应的原理，特别是综合应用两个计数原理是学生感到困难的，因此本节采取先通过典型的、学生熟悉的实例（座位编号问题），经过抽象概括而得出两个计数原理，然后按照从单一到综合的方式，安排比较多的例题，引导学生逐步体会两个计数原理的基本思想及其应用方法.

值得注意的是，教科书对两个计数原理的定义中，分别只涉及“两类方案”和“两个步骤”，而把含有“n类方案”和“n个步骤”的问题作为计数原理的推广，用“探究”的方式，让学生自己去思考研究. 这样做不但使得定义简洁又不失一般性，容易与学生熟悉的数的加法、乘法建立联系，从而更有利于认识两个计数原理之间的内在联系，而且也给学生留出了一定的独立思考、自主学习的空间.

教学中，应注意结合实例阐述两个计数原理的基本内容，分析原理的条件和结论，特别是要注意使用对比的方法，引导学生认识它们的异同.

(2) 分类加法计数原理与分步乘法计数原理，都是讨论“完成一件事情”的所有不同方法种数的问题. 这里，“完成一件事情”是一个比较抽象的概念，它比学生熟悉的解应用题中遇到的“完成一件工作”“完成一项工程”……的含义要广泛得多，教学中应当结合实例让学生进行辨析. 例如：

① 从甲地到乙地；从甲地经丙地再到乙地.

② 从中任取一本书；从中任取数学书、语文书各一本.

③ 从 1～9 这九个数字中任取两个组成没有重复数字的两位数.

这些都是原理中所说的“完成一件事情”. 排列、组合中的“确定一个满足条件的排列”“确定一个满足条件的组合”也是指“完成一件事情”. 在实际应用中，学生容易把“完成一件事情”与“计算完成这件事情的方法总数”混同. 例如，在分析问题“从 1～9 这九个数字中任取两个，共可组成多少没有重复数字的两位数?”学生容易把要完成的这件事情理解成为“求满足条件的两位数的个数”. 教学时应当注意利用简单实例引导学生消除这种误解. 只有准确理解了什么叫“完成一件事情”，才能进一步分析可以用什么方法完成，是否需要分类或分步完成，这样才能确定到底应该用哪个计数原理.

(3) 两个计数原理的区别在于：分类计数原理与“分类”有关，类与类之间互不相容，用任何一类中的任何一种方法都可以完成这件事；分步计数原理与“步骤”有关，只有依次完成每一个步骤，才能完成这件事情.

为了帮助大家更清楚地认识两个计数原理的内涵及其区别，我们从集合运算的角度来分析一下.

设完成一件事的方法的集合是 U，且 $\mathrm{card}(U)=N$.

如果完成这件事的方法可以区分为互不相同的 A，B 两类，即

$$A\cup B=U，A\cap B=\varnothing。$$

记 $\mathrm{card}(A)=m$，$\mathrm{card}(B)=n$，那么，

$$N=\mathrm{card}(U)=\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=m+n;$$

如果完成这件事需要分成 A，B 两个步骤，即

$$U=A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

记 $\mathrm{card}(A)=m$，$\mathrm{card}(B)=n$，那么，

$$N=\mathrm{card}(U)=\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}(A)\times\mathrm{card}(B)=m\times n.$$

(4) 在引导学生理解和应用两个计数原理时，应使学生认识到：

分类加法计数原理中的“完成一件事有两类不同方案”，是指完成这件事的所有方法可以分为两类，即任何一类中的任何一种方法都可以完成任务，两类中没有相同的方法，且完成这件事的任何一种方法都在某一类中. 分步乘法计数原理中的“完成一件事需要两个步骤”，是指完成这件事的任何一种方法，都要分成两个步骤. 在每一个步骤中任取一种方法，然后相继完成这两个步骤就能完成这件事，即各个步骤是相互依存的，每个步骤都要做完才能完成这件事情.

分类时，首先要根据问题的特点确定一个分类标准，然后在这个标准下进行分类. 一般地，标准不同，分类的结果也不同；其次，分类时要注意满足一个基本要求：完成这件事的任何一种方法必须属于且只能属于某一类方案. 简单地说，就是应用分类加法计数原理时要做到“不重不漏”.

分步时，要根据问题的特点确定分步标准，标准不同，分成的步骤数也会不同. 一个合理的分步应当满足：第一，完成这件事情必需且只需连续做完所分步骤，即分别从各个步骤中选一种完成该步骤的方法，将各步骤方法依次串联在一起就得到完成这件事情的一种方法；第二，做完成任何一个步骤可选用的方法数与其他步骤所选用的方法无关. 简而言之，就是应用分步乘法计数原理时要做到“步骤完整”.

(5) 教科书在讲解两个计数原理时采用了如下过程：首先给出一个简单的、学生熟悉的计数问题，得出解答后，利用“探究”引导学生分析问题的本质特征；然后再概括出原理，接着再配以简单应用以使学生初步熟悉原理；最后通过“探究”引导学生将原理推广到更加一般的情形. 为了突出两个原理的区别，两个例子研究的都是“座位编号”的方法数.

教学中，应当注意使学生充分经历从具体实例中概括出计数原理的过程，特别是要在分析问题的本质特征上多给学生一些时间和空间. 为了使学生更好地概括出计数原理，教师还可以再举一些简单的例子，例如从 A 地到 B 地的不同路线问题、参加活动的人员组合问题等，还可以让学生自己举一些例子. 另外，两个计数原理的教学可以在同一课时中进行，以便进行适当的对比讲解.

为了帮助学生理解，教学中应当注意使用“树形图”，而且应当要求学生学会使用“树形图”分析问题.

2. 例题及其教学

本小节安排了 9 个例题.

(1) 例 1 和例 2 都是用于巩固两个计数原理的简单题，可以引导学生自己分析完成. 教学时应当把重点放在引导学生分析其中的“一件事情”是什么. 例 1 中的“一件事情”是“选择一个专业”；例 2 中的“一件事情”是“选出男、女生各一名”.

(2) 例 3 中，第 (1) 小题是单独运用分类计数原理解决的问题，第 (2) 小题是单独运用分步计数原理解决的问题. 它们都属于从书架上取书的问题，背景条件一样，有助于学生了解两个原理的意义及其区别. 教学时仍然要把注意力集中在分析要完成的“一件事情”是什么上. 第 (1) 小题是“从书架上任取一本书”，由于取到的书可能是计算机书或文艺书或体育书，因此可以用分类加法计数原理；第 (2) 小题是“从 1，2，3 层各取一本书”，由于取到的书必须分属三层，因此采用分步完成的

方法可以保证满足要求.

(3) 例 4 的背景虽然简单，但学生认识这个问题中要完成的“一件事情”可能会有困难. 实际上，这里的“一件事情”不仅要从 3 幅画中选出 2 幅，而且还要“挂在左、右两边墙上的指定位置”，所以要分两步完成. 教学中还可以引导学生思考用不同于教科书中的方法解答本题. 例如，第一步，从 3 幅画中选出 2 幅，有 3 种选法（“甲乙”“甲丙”“乙丙”）；第二步，将选出的 2 幅画挂好，有 2 种挂法，所以共有 3×2 种挂法. 这样做可以为后续的排列、组合的学习作些准备.

(4) 例 5、例 6、例 7 和例 8 的背景都有时代性，是学生在日常阅读或在其他学科的学习中会碰到的问题. 这些题目都有一定的综合性，在以往的教科书中还没有出现过.

例 5 是简单的两个计数原理综合题. 这里的“一件事情”是“选 3 个字符给一个程序模块命名”. 值得注意的是一个模块名中的数字符可以重复，因此第二步与第三步都有 9 种方法.

例 6 实际上是一个“可重复排列”问题（不必向学生介绍名词）. 这里的“一件事情”是“将 100 个位置中的任意一个，从 A，C，G，U 中任选一个填入，得到一个 RNA 分子”.

如果学生有一定的计算机编码、存储知识，那么理解例 7 是容易的. 事实上，本例开头对此也作了简明易懂的解释. 这里关键是要知道“一个字符可以用一个或多个字节表示”和“一个字节由 8 个二进制位构成”. 为了达到“最多”，每个字符用一个字节来表示，例如 00000000，10000000，11111111，…都分别表示一个字符. 这样，对于第（1）问，就是一个与例 6 一样的“可重复排列”问题；对于第（2）问，由于 GB 码有 6 763 个汉字，至少需要 6 763 个不同字符，而用一个字节最多只能表示 256 个字符，因此不够，这样就考虑 2 个字节能够表示多少个不同的字符，而这是一个分步计数问题. 由于 2 个字节可以表示 $256\times256=65\ 536$（个）不同字符，所以用 2 个字节就可以表示常用汉字. 当然，也可以用 2 个以上的字节来表示，这可以表示更多的汉字. 另外，还可以让学生考虑为什么英文字母、阿拉伯数字都是用 1 个字节表示的. 实际上，由于 26 个英文字母与 10 个阿拉伯数字加起来只有 36 个不同字符，因此用一个字节就足够表示它们了.

例 8 是两个计数原理的综合应用题. 这里的“一件事情”是“从‘开始’经 A 点到‘结束’去”. 在本例的分析中已经明确指出，整个模块的任意一条执行路径都分两步完成，而在每一步中又可以选择不同的子模块而得到不同的子路径. 这样，求整个模块的执行路径条数时，应当先用分类加法计数原理分别求出第 1，2 步中的子路径，然后再用分步乘法计数原理得出总的路径数. 本例的另一个问题是：怎样做可以减少测试次数？通过这个问题的解决，可以使学生了解两个计数原理的实际意义，即通过比较不同测试方法所需要的测试次数的差异，使学生感受改进测试方法的重要性.

(5) 例 9 的目的一方面是为了理解两个计数原理，另一方面是为了引出下一节的排列. 这里，要完成的“一件事情”是“从 26 个字母中选出 3 个合成一组，从 10 个数字中选出 3 个组成一组，再将 2 组左右分置组成一个汽车牌照号码”，简单地说，就是“按照规则得到一个汽车牌照号码”. 本例的求解并不困难，教科书之所以不厌其烦地把步骤一一列出，主要是为了给下一节的学习做准备，因为学生可以从中感受到这样做太麻烦，产生“能否简化”的想法，而且也可以从中发现各步骤在结构上的一致性.

在讲完上述例题后，教科书提出“思考”，要求学生归纳用两个计数原理解决问题的一般思路，教学时应注意引导学生自己先进行总结. 一般来说，解决计数问题时，可以“先分类，再对每一类分步计算”. 分类或分步时都要注意按照统一标准进行.

第 10 页的“思考”，目的是让学生用联系的观点，类比数的加法与乘法的关系，进一步认识两个计数原理之间的关系. 实际上，分步乘法计数原理也可以看成是特定条件下的分类加法计数原理的简化. 例如，我们可以这样来考虑例 4：先分为“甲在左”“乙在左”“丙在左”三类，然后再计算每一类中的挂法，即“甲乙、甲丙”“乙甲、乙丙”“丙甲、丙乙”. 由于每一类的挂法都是 2 种，因此可以

简化为“分步”：第一步，选左边的画（选法 3 种）；第二步，选右边的画（选法 2 种）.

3. 探究与发现栏目“子集的个数有多少”的教学

这个选学内容的内涵比较丰富，除了获得“n 元集合的不同子集有 2^n 个”这一结论，主要是从中可以使学生学到研究问题的方法：从具体事例的分析中得到规律性的猜想，再通过严格的数学推理获得一般结论．因此，对于 3 元集的子集问题，应当引导学生认真分析，在此基础上，可以让学生仿照分析 4 元集、5 元集的情形，以形成更加明确的关于子集个数的猜想.

分析中应使学生明确：之所以说列举法是计数的基本方法，是因为我们可以从列举的过程中得到如何简便地进行计数的启发，这就要求在列举时做到“有序”．在此基础上，我们可以引导学生从“子集”的定义出发考虑问题，即 $S=\{a_1, a_2, a_3\}$ 中的元素与 S 的子集的关系，这就容易使学生想到：对于 S 的一个子集 S_1，$a_i \in S_1$ 或 $a_i \notin S_1(i=1, 2, 3)$ 二者必居其一且只居其一．这样就可以使学生理解教科书上的做法了.

我们还可以这样来思考解决这个问题的过程：这里要完成的“一件事情”是“确定集合 $S=\{a_1, a_2, a_3\}$的一个子集”，为此，我们可以通过考察 S 中的每一个元素是否在某个子集中的方式来产生一个子集．我们用“1”表示“是”，用“0”表示“否”，那么二进制数“100”就表示子集 $\{a_1\}$．用表格表示如下：

元素 a_1	元素 a_2	元素 a_3	对应的子集
0	0	0	$\varnothing$
0	0	1	$\{a_3\}$
0	1	0	$\{a_2\}$
0	1	1	$\{a_2, a_3\}$
1	0	0	$\{a_1\}$
1	1	0	$\{a_1, a_2\}$
1	0	1	$\{a_1, a_3\}$
1	1	1	$\{a_1, a_2, a_3\}$

上述过程实际上就是按照数字顺序列举 8 个三位的二进制数，即从表示 0 的二进制数 000 到表示 7 的二进制数 111. 通过这样有序的列举，我们不仅得到了 8 种不同的排法，而且可以做到“不重不漏”，更重要的是从中发现了一般规律：

n 元集合 A 的每一个子集对应于一个 n 位的二进制数，第 i 个位置上是“0”表示集合 A 的第 i 个元素不在相应的子集中，第 i 个位置上是“1”表示集合 A 的第 i 个元素在相应的子集中．这样，按照分步乘法计数原理可以得到，n 位的二进制数 $00\cdots0$（表示 0）到 $11\cdots1$（表示 2^n-1）共有 2^n 个．于是 n 元集合 A 的子集共有 2^n 个.

上述思想方法涉及了二进制、一一映射等较多的知识，而且学生对于用“1”和“0”分别表示“是”和“否”的方法也不熟悉，是否向学生介绍这种方法应视学生的能力而定.

四、教学设计案例

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理（第一课时）

1. 教学任务分析

两个计数原理是人们在大量实践经验的基础上归纳出来的基本规律．它们不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据，而且其基本思想方法贯穿本章内容的始终．从思想方法看，两个计数原理的运用实际上就是将一个复杂问题分解为若干“类别”或“步骤”，以达到简化问题的目的．由于排列、组合及二项式定理的研究都是作为两个计数原理的典型应用而设置的，因此，理解和掌握两个计数原理，是学好本章内容的关键．

本节课的教学任务是引导学生归纳地得出两个计数原理，初步学会区分“分类”和“分步”，能够用两个计数原理解决简单的计数问题．

2. 教学重点与难点

重点：归纳地得出分类加法计数原理和分步乘法计数原理．

难点：正确地理解“完成一件事情”的含义；根据实际问题的特征，正确地区分“分类”或“分步”．

3. 教学基本流程

创设情境，引出分类计数问题

↓

归纳得出分类加法计数原理

↓

分类加法计数原理的推广

↓

类比地引出分步计数问题

↓

归纳得出分步乘法计数原理

↓

分步乘法计数原理的推广

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 阅读教科书第 2 页“思考”，你能得出答案吗？	设置问题情境，引出分类计数问题，激发学生的求知欲．	教师提出问题，学生阅读、思考、回答． 补充例题：从甲地到乙地，可以乘火车或乘汽车．一天中，火车 4 班，汽车 8 班．乘这些交通工具从甲地到乙地，有多少种不同方法？
(2) 你能概括一下上述问题的共同特征吗？	概括获得分类计数问题的特征，得出分类加法计数原理．	学生回答，教师注意引导学生概括到“分类”和“加法”上．可以先由学生叙述分类加法计数原理，教师适当补充．教师对原理进行解释，特别注意强调明确要完成的“一件事”的重要性．

续表

问　题	设计意图	师生活动
(3) 你能举出生活中的一些分类计数问题吗?	使学生辨析和理解原理.	学生举例，教师适当评价. 特别注意让学生思考回答“一件事”是什么.
(4) 例 1 中要完成的“一件事”是什么?	巩固概念，学会用原理解答简单问题.	教师引导学生自己分析问题获得解答. “一件事”是“选择一个专业”.
(5) 你能回答第 3 页的“探究”吗?	推广原理，加深对原理的理解.	教师引导学生类比两类不同方案的情形，让学生给出答案.
(6) 阅读教科书第 3 页“思考”，这个问题与前一问题有什么不同?	比较分类计数问题，提出分步计数问题.	教师引导学生分析、比较，得出完成前一问题的方法可以分类，这里要分步才能完成.
(7) 你能列出所有号码吗?	学会用树形图分析问题.	学生列号码，教师注意在“有规律”“有序”列举上进行引导，可介绍“树形图”.
(8) 从列号码过程中发现了什么规律?	领会“分步”与“乘法”的关系.	教师引导学生概括出“任意一个英文字母都能与 9 个数字中的任何一个组成一个号码”. 补充例题：从甲地到乙地，需要经过丙地. 从甲地到丙地有 4 条路，从丙地到乙地有 8 条路. 从甲地到乙地，有多少条不同的路线?
(9) 你能概括一下上述问题的共同特征吗?	概括获得分步计数问题的特征，得出分步乘法计数原理.	学生回答，教师注意引导学生概括到“分步”和“乘法”上. 可以先由学生叙述分步乘法计数原理，教师适当补充. 教师对原理进行解释，特别注意强调明确要完成的“一件事”的重要性.
(10) 你能举出生活中的一些分步计数问题吗?	使学生辨析和理解原理.	学生举例，教师适当评价. 特别注意让学生思考回答“一件事”是什么.
(11) 例 2 中要完成的“一件事”是什么?	巩固概念，学会用原理解答简单问题.	教师引导学生自己分析问题获得解答. “一件事”是“选出男、女生各一名”.
(12) 你能回答第 5 页的“探究”吗?	推广原理，加深对原理的理解.	教师引导学生类比分两步完成任务的情形，让学生给出答案.
(13) 第 6 页练习 1，3.	用原理解决简单问题，辨析概念.	学生独立完成. 教师提问：要完成的“一件事”是什么? 对于第 3 题，教师要引导学生分析算法出错的原因（从“一件事”是什么进行分析）.
(14) 小结：你能从自己的生活经历中举出用两个计数原理的例子吗?	通过举例检查学生对概念的理解情况.	学生举例. 教师针对学生举出的例子，要求学生回答“一件事”是什么，为什么可以用相应的原理来计数等.
(15) 布置作业：根据自己的生活经验，举出一些可以用两个计数原理计数的实际例子.		

5. 两点说明

(1) 概念教学要注意采用“归纳式”，一定要让学生经历概念的形成过程，切忌采用由老师自己叙述概念条文、解释概念，然后讲解例题，最后让学生模仿练习的教学模式. 因此，在本节课的教学中，从问题情境中引出计数的课题后，通过列举等方式写出所有可能情况后，要引导学生分析问题的特点，提出计数的方法，并概括到一般原理上. 其中，让学生自己举一些例子，说明计数的方法，概括不同事例的共同特征，都是需要经历的过程.

(2) 对要完成的“一件事”的分析是理解两个计数原理的关键，为此，要多举一些典型的例子，引导学生反复分析、体会.

五、习题解答

练习（第6页）

1. (1) 要完成的“一件事情”是“选出1人完成工作”，不同的选法种数是 $5+4=9$；

   (2) 要完成的“一件事情”是“从A村经B村到C村去”，不同路线条数是 $3\times2=6$.

2. (1) 要完成的“一件事情”是“选出1人参加活动”，不同的选法种数是 $3+5+4=12$；

   (2) 要完成的“一件事情”是“从3个年级的学生中各选1人参加活动”，不同的选法种数是 $3\times5\times4=60$.

3. 因为要确定的是这名同学的专业选择，并不要考虑学校的差异，所以应当是 $6+4-1=9$（种）可能的专业选择.

练习（第10页）

1. 要完成的“一件事情”是“得到展开式的一项”. 由于每一项都是 $a_ib_jc_k$ 的形式，所以可以分三步完成：第一步，取 a_i，有3种方法；第二步，取 b_j，有3种方法；第三步，取 c_k，有5种方法. 根据分步乘法计数原理，展开式共有 $3\times3\times5=45$（项）.
2. 要完成的“一件事情”是“确定一个电话号码的后四位”. 分四步完成，每一步都是从0～9这10个数字中取一个，共有 $10\times10\times10\times10=10\ 000$（个）.
3. 要完成的“一件事情”是“从5名同学中选出正、副组长各1名”. 分两步完成：第一步选正组长，有5种方法；第二步选副组长，有4种方法. 共有选法 $5\times4=20$（种）.
4. 要完成的“一件事情”是“从6个门中的一个进入并从另一个门出去”. 分两步完成：先从6个门中选一个进入，再从其余5个门中选一个出去. 共有进出方法 $6\times5=30$（种）.

习题1.1（第12页）

A组

1. “一件事情”是“买一台某型号的电视机”. 不同的选法有 $4+7=11$（种）.
2. “一件事情”是“从甲地经乙地或经丙地到丁地去”. 所以是“先分类，后分步”，不同的路线共有 $2\times3+4\times2=14$（条）.
3. 对于第一问，“一件事情”是“构成一个分数”. 由于1，5，9，13是奇数，4，8，12，16是偶数，所以以1，5，9，13中任意一个为分子，都可以与4，8，12，16中的任意一个构成分数. 因此可以分两步来构成分数：第一步，选分子，有4种选法；第二步，选分母，也有4种选法. 共有不同的分数 $4\times4=16$（个）.

   对于第二问，“一件事情”是“构成一个真分数”. 分四类：分子为1时，分母可以从4，8，12，16中任选一个，有4个；分子为5时，分母从8，12，16中选一个，有3个；分子为9时，分母从12，16中选一个，有2个；分子为13时，分母只能选16，有1个. 所以共有真分数 $4+3+2+1=10$（个）.
4. “一件事情”是“接通电路”. 根据电路的有关知识，容易得到不同的路径有 $3+1+2\times2=8$（条）.
5. (1) “一件事情”是“用坐标确定一个点”. 由于横、纵坐标可以相同，因此可以分两步完成：第一步，从 A 中选横坐标，有6个选择；第二步从 A 中选纵坐标，也有6个选择. 所以共有坐标 $6\times6=36$（个）.

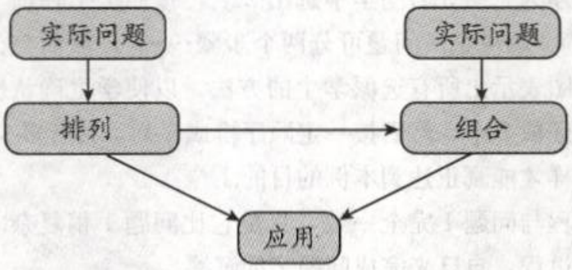
(2) “一件事情”是“确定一条直线的方程”. 由于斜率不同截距不同、斜率不同截距相同、斜率相同截距不同的直线都是互不相同的，因此可分两步完成：第一步，取斜率，有 4 种取法；第二步，取截距，有 4 种取法. 所以共有直线 $4\times4=16$（条）.

B组

1. “一件事情”是“组成一个四位数字号码”. 由于数字可以重复，最后一个只能在 0～5 这六个数字中拨，所以有号码 $10\times10\times10\times6=6\ 000$（个）.
2. (1) “一件事情”是“4 名学生分别参加 3 个运动队中的一个，每人限报一个，可以报同一个运动队”. 应该是人选运动队，所以不同报法种数是 3^4.
   (2) “一件事情”是“3 个班分别从 5 个风景点中选择一处游览”. 应该是人选风景点，故不同的选法种数是 5^3.

1.2 排列与组合

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：
1. 归纳地、对比地得出排列与组合概念；
2. 根据两个计数原理推导出排列数、组合数公式；
3. 应用排列与组合知识解决简单的实际问题.

难点：
1. 建立组合与排列的联系，结合两个计数原理推导组合数公式；
2. 根据实际问题的特征，正确地区分“排列”或“组合”.

三、编写意图与教学建议

排列与组合是两类特殊的计数问题，是典型的两个计数原理的应用. 排列与组合在计数中的地位，可以与数列中的等差数列、等比数列类比.

1.2.1 排列

1. 本小节具有承上启下的地位. 排列数公式的推导过程是分步乘法原理的一个重要应用，同时，排列数公式又是推导组合数公式的主要依据.

2. 本小节利用“探究”，从对上一节例 9 的解答过程的反思开始. 简单机械地用分步乘法计数原理使得解题过程有些繁琐，能否改进呢？“探究”的目的就是为了引导学生对这类问题的结构进行分析，从而找到“简捷的方法”.

3. 教科书对两个求排列数的具体问题进行了详细的分析，其目的在于：

(1) 提供排列概念的具体例证，为学生概括排列概念提供背景支持；

(2) 以具体问题为载体，给出求排列数的方法，使学生经历求排列数的主要过程，建立求一般的排列数公式的经验；

(3) 给出了直观的、能帮助学生分析问题、理清思路的树形图，使学生体会树形图在解决计数问题中的作用；

(4) 使学生体会在列举时如何做到“既不重复也不遗漏”，培养学生有序、全面地思考问题的习惯.

问题 1 中，要完成的“一件事情”是“从 3 人中选出 2 人，并按上午在前下午在后的顺序排列”，其分析、解答过程就是一个将问题不断化归到能够直接应用分步乘法计数原理的过程，这是一个“数学化”的过程：先将问题叙述为“从 3 名同学中选出 2 名，按照上午在前下午在后的顺序排列，共有多少种排法”，再进一步明确“解决这一问题可分两个步骤……”，从而与分步乘法计数原理的条件一致；获得答案后，再以树形图表示出所有选派学生的方法，以使学生确认所得结果的正确性；最后再抽象为“从 3 个不同元素中任取 2 个，然后按一定顺序排成一列，共有多少种不同排法”. 教学中应使学生充分经历上述过程，这样才能真正达到本例的目的.

问题 2 的分析、解决过程与问题 1 完全一致，只是它比问题 1 稍复杂. 因此，教学中可以放手让学生通过模仿问题 1 的解决过程，自己来完成问题 2 的解答.

4. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 这里，给出的 n 个元素互不相同，且抽取的 m 个元素是从 n 个元素中不重复地抽取的，因而这 m 个元素也是互不相同的. 教学中可向学生指出，在研究排列问题时，是从一些不同元素中任取部分不同元素，这里既没有重复的元素，又没有重复抽取同一元素的情况.

排列的定义中包含两个基本内容：一是“取出元素”；二是“按一定的顺序排列”. 因此，排列要完成的“一件事情”是“取出 m 个元素，再按顺序排列”. 例如选出 3 个人，按“从前到后”“从左到右”“从上到下”顺序排列. “一定的顺序”就是与位置有关，不考虑顺序就不是排列. 学生在理解“一定的顺序”时可能会有困难，可以这样向学生解释：由于“甲上午乙下午”与“乙上午甲下午”是两种不同的选法，因此一种选法与两名学生的顺序有关，这样，“上午在前下午在后”就是“一定的顺序”，按照这个顺序排列，就有 6 种不同的选法. 同样的，由于三位数与三个数字的顺序有关，这样，“百十个”就是“一定的顺序”. 尽管 123 与 132，213，231，312，321 有相同的数字，但却是互不相同的，因为它们的顺序不同. 这实际上就是教科书第 16 页第二个“思考”的答案：若干个元素按照一定的顺序排成一列，元素不同或元素相同但顺序不同的排列都是不同的排列，即当且仅当两个排列的元素和顺序都相同时才是同一个排列.

教学中，要注意引导学生在解例题、习题时细心观察是否与顺序有关，并可以通过比较的方法使学生加深认识. 例如：从 1，2，3 这 3 个数字中每次取出 2 个数相乘，有多少不同的积？如果改为相除，则有多少不同的商？前者与顺序无关，而后者就与顺序有关，这是因为乘法有交换律而除法没有.

5. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数. 在理解排列的概念后，接着的任务就是导出从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数的公式，并运用公式解决有关排列数的应用问题.

在排列数概念的教学中，要注意引导学生区分“排列数”与“一个排列”两个概念. “一个排列”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素，按照一定的顺序排成一列”，它不是一个数；“排列数”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数”，这是一个自然数. 例如，从 a，b，c 中任取 2 个的排列有 ab，ba，ac，ca，bc，cb 等，其中每一个都叫做一个排列，共有 6 个，6 就是从 a，b，c 中任取 2 个的排列数.

6. 在推导排列数公式之前，教科书先将问题 1，2 的答案列出，目的是为了引导学生观察答案，对排列数公式产生一定的感性认识，教学时可引导学生对排列数公式进行猜想. 在此基础上，教科书通过“探究”提出求 A_n^2，A_n^3，A_n^m 的任务. 由于已经有了较多的求解具体问题的排列数的经验，按照教科书所述的方式，从具体到一般，学生不会有太大的困难.

在推导 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 时，可以从 n 到 $n-1$，到 $n-2$，…，到 $n-(m-1)$ 来说明，为什么第 m 个位置共有 $n-m+1$ 种填法. 这是学生容易忽视的地方. 得到公式后要提醒学生注意，公式中的 n，m 都是自然数，而且 $m\leqslant n$.

推导排列数公式的方法是不完全归纳法，不是严格的证明. 排列数公式的严格证明需要采用数学归纳法. 当然，我们不必要求学生去证明.

7. 导出公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 后，要引导学生对公式的特点进行分析，以帮助学生正确地记忆公式. 这个公式的特点是：右边第一个因数是 n，后面每个因数都比它前面一个因数少 1，最后一个因数是 $n-m+1$，共 m 个连续的正整数相乘. 当 n，m 较小时，只要根据这些特点就能很快写出算式. 如果 n，m 是较复杂的文字式子（如 A_{n+1}^{n-2}，A_{k+5}^{k-3}）时，容易把最后一个因式写错，教学时应当注意.

公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$主要有两个作用：一是当 n，m 较大时，由于科学计算器上可直接按出相应的阶乘数，因此用上面的公式计算排列数较为方便；二是当对含有字母的排列数的式子进行变形和论证时，写成这种形式有利于发现相互之间的关系.

8. 对于阶乘的概念，可以从两个阶乘之间的关系的角度来引导学生认识. 实际上，较大数的阶乘数一定是较小数的阶乘数的倍数，例如 $n!=n(n-1)!=n(n-1)(n-2)!$等.

与 $a\neq0$ 时，$a^0=1$ 等规定一样，我们规定 $0!=1$. 教学时可以向学生说明，这是数学研究中为了方便而作的一种约定，这样规定后，诸如公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$等在 $n=m$ 时就都有意义了.

9. 由于排列的应用题的解法没有明显的规律，一个问题往往可以从多种途径考虑，因此具有较大的灵活性，是学生学习的一个难点. 通过这一部分的教学，在使学生获得一些解决排列问题的解题经验，初步学会一些分析排列问题的方法外，还要注意提高学生解决应用题的能力.

例 1 的目的有两个：一是让学生熟悉使用计算器计算排列数的方法；二是在计算的基础上，引导学生发现结论 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$. 这样的安排有些牵强，但在教材、教学中不断地渗透归纳猜想的思想，有助于学生形成演绎与归纳并重的思维习惯.

例 2 要抓住对“每队要与其余各队在主、客场分别比赛一次”含义的分析，由于有主客场之分，所以与顺序有关，是一个排列问题.

例 3 设计了 2 个小题，目的是通过比较，引导学生认真细致地分析题意，发现题意的细小差别，

正确地进行解题. 实际上，计数中有大量类似的问题，学生往往在理解题意时出现偏差，从而导致错误. 第（1）小题是从 5 本不同的书中选 3 本，分送给 3 人，由于 3 本书是不同的，因此 3 人得到的书也不相同，是一个典型的排列问题；第（2）小题只是要从 5 种不同的书中买 3 本书，这 3 本书可以相同也可以不同，所以不是排列问题，求解时要用分步计数原理解决. 教学中，可先让学生自己分析和比较一下两个问题，发现其中的差别后再让学生计算.

例 4 是一个带有限制条件的排列问题，教科书给出了 3 种解法. 教学中应引导学生体会从不同的角度分析一个问题的好处，这样不但可以获得不同的解题方法，而且可以加深对问题的认识，检验不同思路的正确性，培养思维的灵活性，提高自己分析和解决问题的能力.

对于有限制条件的计数问题，由于对限制条件的处理不同，通常有两种计数方法：一种是直接计数法，即根据限制条件分解问题，把符合限制条件的种数直接计算出来；另一种是先不考虑限制条件而计算出所有种数，再从中减去全部不符合条件的种数，从而得出符合条件的种数.

例 4 的解法 1 是根据“0 不能在百位上”而先排百位上的数字，从而对排列分步完成，依据的是分步乘法计数原理；解法 2 是以 0 这个“特殊的数”为标准，将符合条件的三位数分成三类，依据的是分类加法计数原理；解法 3 是先不考虑“0 不能在百位上”这个限制条件，求出从 10 个数字中任意取 3 个的排列数，再从中减去 0 在百位时的排列数，从而得到所求的三位数个数. 实际上，解法 1 也可以分三步完成，即先排百位，再排十位，最后排个位，得排列数 $9\times9\times8=648$，这是不用排列概念时的做法. 解法 2 中，由于第二、三两类本质一致，因此可以“是否含 0”为标准，将三位数分为两类：一类为不含 0 的，有 A_9^3 个；另一类含 0 的，可分两步排，第一步排 0，有 A_2^1 种方法，第二步是从 9 个数字中选 2 个排在其余两个位置，有 A_9^2 种方法，所以这一类有 $A_2^1\cdot A_9^2$ 个. 由此得所求三位数个数是 $A_9^3+A_2^1\cdot A_9^2=648$. 实际上，本题还有其他的思考方法. 从这个简单的例子可以让学生看到，排列问题可以从不同角度思考，具有很大的灵活性，因此学习排列知识时，应当学会多角度分析与思考问题，这对提高思维能力很有帮助. 组合问题的解答也有类似的情况.

例 4 的解法 3 是一种间接解法. 到底什么时候用间接解法，应当看具体情况. 例如，“9 个人站成一排，要求甲在中间，乙在排头，丙在排尾，有多少种站法?”由于甲乙丙 3 人位置已定，其余 6 人可任意排列，因此直接计算很方便，有 A_6^6 种站法. 如果将问题改为“9 个人站成一排，不能同时甲在中间、乙在排头、丙在排尾，有多少种站法?”直接计算就很不方便，而间接计算则很容易，有 $A_9^9-A_6^6$ 种站法.

在分析应用题时，应充分利用树形图或框图进行分析，这样比较直观，便于理解. 在讲完例题后，还应对思考方法进行小结. 另外，在开始做排列应用题时，应要求学生写出解法的简要说明，而不能只列出算式和答数，这样有利于培养学生严密思考的习惯.

10. 从 n 个不同元素里取出 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，如果元素可以重复选取，则称为从 n 个不同元素中选 m 个元素的一个重复排列. 由于在一个重复排列的每个位置上都有 n 种选取元素的方法，根据分步乘法计数原理，重复排列有 n^m 个. 对于重复排列，可以不受 $m\leqslant n$ 的限制. 虽然重复排列问题在本章有所涉及（如上一节例 5，6，7 等），但教学时不要专门补充这方面的知识.

1.2.2 组合

本小节开篇以“探究”引入，目的是引导学生通过与排列一节中相应问题的比较，在引出组合概念的同时，使学生体会组合概念与排列概念的联系与区别. 用比较的方法引出新知识，对学生领悟数学概念的本质很有好处.

组合与排列所研究的问题是平行的，组合数公式的推导要借助于排列数公式；二项式系数其实是一组有规律的组合数；在本书后面章节的学习中，常常涉及组合数的计算.

1. 排列概念与组合概念的共同点是，都要“从 n 个不同元素中，任取 m 个元素”，不同点是排列要“按照一定的顺序排成一列”，而组合却是“不管顺序地并成一组”．因此，在分析具体问题时，应当启发学生抓住“顺序”这个关键来区分排列问题与组合问题．

2. 教学中，应充分利用第 21 页的“探究”，引导学生进行认真分析．在比较这两个问题时，应强调在上一小节的“问题 1”里，“甲上午乙下午”与“乙上午甲下午”是两种不同的选法，与甲乙 2 人的排列顺序有关，是排列问题；而在本小节的问题里，只要从 3 人中选出 2 人，选出的 2 人地位平等，不存在前后顺序，是组合问题．为了使学生更加明确排列与组合的关系，教师还可再举一些区别排列与组合问题的例子，也可让学生自己举例．

3. 在组合数概念的教学中，要注意引导学生区分“组合数”与“一个组合”两个概念．“一个组合”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素合成一组”，它不是一个数；“组合数”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合的个数”，这是一个自然数．例如，从 a，b，c 中任取 2 个的组合有 ab，ac，bc 等，其中每一个都叫做一个组合，共有 3 个，3 就是从 a，b，c 中任取 2 个的组合数．

4. 组合数公式的推导过程体现了众多数学思想方法的应用．教学的关键是引导学生研究组合与排列的关系，发现排列可以分为“先取元素，再作全排列”两个步骤．

为了使学生充分经历“发现”的过程，教科书以问题“从集合 $\{a, b, c, d\}$ 中取出 3 个元素组成三元子集，共有多少不同的子集？”为载体，为学生设置了如下认知台阶：

(1) 借助树形图用列举法得出答案；

(2) 以“探究”为引导，细致分析从 a，b，c，d 中取出 3 个元素的排列与组合之间的关系，得出 $A_4^3=C_4^3\times A_3^3$；

(3) 以“等式的两边是对同一个问题作出的两个等价解释”为指导，分析等式 $A_4^3=C_4^3\times A_3^3$ 的实际意义，得出“从 4 个不同元素中任取 3 个的排列可以分两步完成：第一步，从 4 个不同元素中任取 3 个合成一个组合（不考虑顺序），第二步，将取出的 3 个元素作全排列”；

(4) 将上述结果推广到一般情形，得出组合数公式．

显然，教学的难点是第 (2) 步．为了突破这个难点，教科书引导学生以“元素相同”为标准，对“从 4 个不同元素中任取 3 个的排列”进行分类，并以框图的形式进行直观表示，从而得出“可以把这 24 个排列分成 4 个组，每组有 6 个不同的排列”．另外，教科书指出，“把上述结果用一种能够使人看出其来历的方式表述是非常有好处的”，实际上，这一步是非常关键的，它使我们看清了问题的本质．数学研究中类似的情况是很多的．例如，各种代数变形的目的就是为了能够看清知识之间的联系及问题的本质．

在获得等式 $A_4^3=C_4^3\times A_3^3$ 后，教科书在“边空”中指出，“等式”的两边是对同一个问题作出的两个等价解释，当我们用这样的观点理解“等式”时，就可以在“等式”的引导下，“从另一个角度解释问题”，从而形成对问题的更加深刻的认识，获得思想方法的启发．排列与组合之间关系的认识、排列数公式的得出，正是在这样的思想指导下完成的．所以，教学中应当特别注意渗透这样的思想方法，并引导学生认真体会．

5. 与排列数公式一样，教科书中也给出了求组合数的另一公式 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$．当 n，m 较大时，借助于科学计算器，利用这个公式计算组合数较为方便，且对含有字母的组合数的式子进行变形和论证时，写成这种形式有利于相互沟通．

对于 $C_n^0=1$，应向学生强调指出，它与 $0!=1$ 一样，是一种规定，而且这种规定是合理的．

6. 本小节共安排 4 个例题．

例 5 是用公式的简单计算，而且要求使用计算器．

例 6 中包含两问，其中第 (1) 问，只要学生理解“上场学员没有角色差异”就很容易得出答案；

第（2）问，要求学生理解在选出的 11 人中确定守门员，不同人担任就是不同的方案．对于（2），除了教科书的方法外，还可以这样来分步：第一步，从 17 人中选 1 人担任守门员，有 C_{17}^1 种选法；第二步，从剩下的 16 人中选 10 人，有 C_{16}^{10} 种选法．所以共有选法 $C_{17}^1\cdot C_{16}^{10}=136\ 136$（种）．

例 7 是与向量概念结合的一个题，利用“线段的端点是无序的”和“向量的端点是有序的”来解决．将它们编排在一起，目的是使学生进一步认识排列（有顺序）与组合（无顺序）的区别，提高分辨能力．

例 8 是一个产品抽样检查的组合计算问题，这类问题在概率的学习中也经常碰到．第（1）小题是一个没有限制条件的组合问题，第（2）（3）小题是有限制条件的组合问题．解答第（2）（3）小题的关键是正确理解“恰好”“至少”等词的含义．第（2）小题也可以用间接计算法，即从所有不同抽法（C_{100}^3 种）中减去全部合格的（C_{98}^3 种）和有 2 件不合格的（$C_2^2C_{98}^1$ 种）．第（3）小题教科书给出两种解法，教学中对“解法 1”应当给予充分重视，因为这是综合应用两个计数原理以及组合知识解题的一种方法，其解题思路是“先分类，后分步”．

7. 由于“标准”对“组合数的两个性质”不作要求，因此教科书以选学内容的方式对它们进行介绍．组合数的性质 1，是从具体的计算开始，通过计算让学生形成猜想，再通过具体事例解释 $C_{12}^4=C_{12}^8$，最后将结果推广到对 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 进行类似的解释．对等式的解释应用了“一一对应”的思想，突出了从 n 个不同元素中取 m 个元素与从 n 个不同元素中取 $n-m$ 个元素的一一对应关系，实际上就是“取出的”和“留下的”成一一对应关系．教学中还可以引导学生用组合数公式对性质 1 进行证明．

为了给学生留下探索空间，教科书通过“探究”，要求学生仿照“性质 1”的探索思路，自己证明性质 2，教学中可以引导学生利用组合的定义和两个计数原理进行证明，然后再用组合数公式证明．下面给出性质 2 意义的解释．

等式 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$ 左边是“从 $n+1$ 个不同元素中取 m 个不同元素的组合数”，右边是“从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的组合数”＋“从 n 个不同元素中取 $m-1$ 个不同元素的组合数”，由“＋”可以联系到“分类加法计数原理”，另外，注意到左边是“从 $n+1$ 个不同元素中取”，右边是“从 n 个不同元素中取”，于是有：

从 a_1，a_2，…，a_{n+1} 中取出 m 个元素的组合（共 C_{n+1}^m 个）可以分为两类：第一类含有元素 a_1（共 C_n^{m-1} 个），第二类不含元素 a_1（共 C_n^m 个）．根据分类加法计数原理，有等式成立．

四、教学设计案例

排列的概念

1. 教学任务分析

本小节具有承上启下的地位．理解排列的概念是应用计数原理推导排列数公式的前提，同时，对具体的排列问题的分析又为得出排列数公式提供了基础．

本课时要通过实例让学生理解排列的概念，能用列举法、树形图列出排列，并从列举过程中体会排列数与计数原理的关系，体会将实际问题化归为计数问题的方法．

2. 教学重点与难点

重点：理解排列的概念，能用列举法、树形图列出排列，从简单排列问题的计数过程中体会排列数公式．

难点：对排列要完成的“一件事”的理解；对“一定顺序”的理解．

3. 教学基本流程

创设情境，引出排列问题
↓
对问题1的探究
↓
对问题2的探究
↓
归纳得出排列的定义
↓
辨析排列的概念

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 上一节的例 9 的解答过程能否简化？	引起寻找新的方法，简化计数过程的需要.	教师引导学生分析例 9 的计数过程，希望得出如下感知：过程重复，比较繁琐，可以简化.
(2) 第 14 页的问题 1 中要完成的“一件事”是什么？	为理解排列概念奠定基础.	教师引导学生分析，得出“一件事”是“从 3 人中选出 2 人，分上下午参加活动”.
(3) 怎样用计数原理解决它？	启发学生联系计数原理.	教师提问，学生讨论、回答，得出分步完成选人参加活动.
(4) “甲上午乙下午”与“乙上午甲下午”一样吗？在计数过程中考虑到了吗？	辨析问题，为引出排列概念做准备.	教师引导学生理解“甲乙”和“乙甲”是两种不同选法；在计数过程中，“先选甲后选乙”与“先选乙后选甲”被看成两种不同选法.
(5) 你能列出所有选法，以说明用分步计数原理得出的答案是正确的吗？	使学生相信答案的正确性，为理解排列概念奠定基础.	教师引导学生使用树形图列举结果，并进一步说明用分步乘法计数原理解题的可靠性.
(6) 舍弃具体背景，如何叙述问题 1 及其解答？	将具体问题抽象到一般问题，为引出排列概念做准备.	教师：一般地，可以把被取对象称为元素. 教师引导学生用“元素”“排列”等词叙述问题.
(7) 第 15 页的问题 2 中要完成的“一件事”是什么？	为理解排列概念奠定基础.	教师引导学生分析，得出“一件事”是“从 4 个数字中选 3 个排成一个三位数”.
(8) 你能仿照问题 1 的解决过程，给出详细解答吗？	让学生完整经历问题 1 的解答过程，建立理解排列概念的经验.	学生独立完成解题过程后，再让学生发言、讨论，特别注意在“分步”“顺序”等进行引导.
(9) 上述问题 1，2 的共同特点是什么？你能从中概括出一般情形吗？	引导学生概括获得排列概念.	教师提出问题，由学生叙述特点. 特别注意引导学生用“元素”代替“同学”“数字”等，用“顺序”代替“上午下午”“百十个”等.
(10) 给出排列概念.		
(11) 满足什么条件的两个排列才相同？你能举例说明吗？	辨析排列概念.	教师引导学生举例说明，只有元素及顺序都相同的两个排列才相同. 元素相同但顺序不同的两个排列是不同的两个排列.
(12) 小结：概括一下得到排列概念过程中的思想方法.	归纳思想方法.	可以让学生先议论后发言. 特别注意“排列”要完成的“一件事”是什么，强调“顺序”的重要性.

5. 两点说明

(1) 要让学生明确“排列”是一类特殊的计数问题，因此要利用“探究”，从对上一节例 9 的解答过程的反思开始教学.

(2) 一定要舍得在两个求排列数的具体问题上花时间，以使学生建立排列概念的具体背景，使学生经历求排列数的主要过程，建立求一般的排列数公式的经验，学习用树形图分析和解决问题，培养有序、全面地思考问题的习惯.

五、习题解答

练习（第 20 页）

1. (1) ab，ac，ad，ba，bc，bd，ca，cb，cd，da，db，dc；

(2) ab，ac，ad，ae，ba，bc，bd，be，ca，cb，cd，ce，da，db，dc，de，ea，eb，ec，ed.

2. (1) $A_{15}^4=15\times14\times13\times12=32\ 760$；

(2) $A_7^7=7!=5\ 040$；

(3) $A_8^4-2A_8^2=8\times7\times6\times5-2\times8\times7=1\ 568$；

(4) $\dfrac{A_{12}^8}{A_{12}^7}=\dfrac{5A_{12}^7}{A_{12}^7}=5$.

3.

N	2	3	4	5	6	7	8
$N!$	2	6	24	120	720	5 040	40 320

4. (1) 略；

(2) $A_8^8-8A_7^7+7A_6^6=8A_7^7-8A_7^7+A_7^7=A_7^7$.

5. $A_5^3=60$（种）.

6. $A_4^3=24$（种）.

练习（第 25 页）

1. (1) 甲、乙，甲、丙，甲、丁，乙、丙，乙、丁，丙、丁；

(2).

冠军	甲	乙	甲	丙	甲	丁	乙	丙	乙	丁	丙	丁
亚军	乙	甲	丙	甲	丁	甲	丙	乙	丁	乙	丁	丙

2. $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$.

3. $C_6^3=20$（种）.

4. $C_4^2=6$（个）.

5. (1) $C_6^2=\dfrac{6\times5}{1\times2}=15$；　　(2) $C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56$；

(3) $C_7^3-C_6^2=35-15=20$；　　(4) $3C_8^3-2C_5^2=3\times56-2\times10=148$.

6. $\dfrac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}=\dfrac{m+1}{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)!}{(m+1)![(n+1)-(m+1)]!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^m$.

习题 1.2（第 27 页）

A 组

1. (1) $5A_5^3+4A_4^2=5\times60+4\times12=348$；

(2) $A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4=4+12+24+24=64$.

2. (1) $C_{15}^3=455$；　　(2) $C_{200}^{197}=C_{200}^3=1\ 313\ 400$；

(3) $C_6^3\div C_8^4=\frac{2}{7}$；

(4) $C_{n+1}^n\cdot C_n^{n-2}=C_{n+1}^n\cdot C_n^2=(n+1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n^2-1)}{2}$.

3. (1) $A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=(n+1)A_n^n-A_n^n=nA_n^n=n^2A_{n-1}^{n-1}$；

(2) $\frac{(n+1)!}{k!}-\frac{n!}{(k-1)!}=\frac{(n+1)!-k\cdot n!}{k!}=\frac{(n-k+1)n!}{k!}$.

4. 由于 4 列火车各不相同，所以停放的方法与顺序有关，有 $A_8^4=1\ 680$（种）不同的停法.

5. $A_4^4=24$.

6. 由于书架是单层的，所以问题相当于 20 个元素的全排列，有 A_{20}^{20} 种不同的排法.

7. 可以分三步完成：第一步，安排 4 个音乐节目，共有 A_4^4 种排法；第二步，安排舞蹈节目，共有 A_3^3 种排法；第三步，安排曲艺节目，共有 A_2^2 种排法. 所以不同的排法有 $A_4^4\cdot A_3^3\cdot A_2^2=288$（种）.

8. 由于 n 个不同元素的全排列共有 $n!$ 个，而 $n!\geqslant n$，所以由 n 个不同的数值可以以不同的顺序形成其余的每一行，并且任意两行的顺序都不同.

为使每一行都不重复，m 可以取的最大值是 $n!$.

9. (1) 由于圆上的任意 3 点不共线，圆的弦的端点没有顺序，所以共可以画 $C_{10}^2=45$（条）不同的弦；

(2) 由于三角形的顶点没有顺序，所以可以画的圆内接三角形有 $C_{10}^3=120$（个）.

10. (1) 凸五边形有 5 个顶点，任意 2 个顶点的连线段中，除凸五边形的边外都是对角线，所以共有对角线 $C_5^2-5=5$（条）；

(2) 同 (1) 的理由，可得对角线为 $C_n^2-n=\frac{n(n-3)}{2}$（条）.

说明 本题采用间接法更方便.

11. 由于四张人民币的面值都不相同，组成的面值与顺序无关，所以可以分为四类面值，分别由 1 张、2 张、3 张、4 张人民币组成，共有不同的面值 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$（种）.

12. (1) 由“三个不共线的点确定一个平面”，所确定的平面与点的顺序无关，所以共可确定的平面数是 $C_8^3=56$；

(2) 由于四面体由四个顶点唯一确定，而与四个点的顺序无关，所以共可确定的四面体个数是 $C_{10}^4=210$.

13. (1) 由于选出的人没有地位差异，所以是组合问题，不同方法数是 $C_5^3=10$；

(2) 由于礼物互不相同，与分送的顺序有关系，所以是排列问题，不同方法数是 $A_5^3=60$；

(3) 由于 5 个人中每个人都有 3 种选择，而且选择的时间对别人没有影响，所以是一个“可重复排列”问题，不同方法数是 $3^5=243$；

(4) 由于只要取出元素，而不必考虑顺序，所以可以分两步取元素：第一步，从集合 A 中取，有 m 种取法；第二步，从集合 B 中取，有 n 取法. 所以共有取法 mn 种.

说明 第 (3) 题是“可重复排列”问题，但可以用分步乘法计数原理解决.

14. 由于只要选出要做的题目即可，所以是组合问题，另外，可以分三步分别从第 1，2，3 题中选题，不同的选法种数有 $C_4^3\cdot C_3^2\cdot C_2^1=24$.

15. 由于选出的人的地位没有差异，所以是组合问题.

(1) $C_5^2 \cdot C_4^2=60$；

(2) 其余 2 人可以从剩下的 7 人中任意选择，所以共有 $C_7^2=21$（种）选法；

(3) 用间接法，在 9 人选 4 人的选法中，把男甲和女乙都不在内的去掉，就得到符合条件的选法数为 $C_9^4-C_7^4=91$；

如果采用直接法，则可分为 3 类：只含男甲；只含女乙；同时含男甲女乙，得到符合条件的方法数为 $C_7^3+C_7^3+C_7^2=91$；

(4) 用间接法，在 9 人选 4 人的选法中，把只有男生和只有女生的情况排除掉，得到选法总数为 $C_9^4-C_5^4-C_4^4=120$.

也可以用直接法，分别按照含男生 1，2，3 人分类，得到符合条件的选法数为 $C_5^1C_4^3+C_5^2C_4^2+C_5^3C_4^1=120$.

16. 按照去的人数分类，去的人数分别为 1，2，3，4，5，6，而去的人大家没有地位差异，所以不同的去法有 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=63$（种）.

17. (1) $C_{198}^3=1\ 274\ 196$； (2) $C_2^1 \cdot C_{198}^4=124\ 234\ 110$；

(3) $C_{198}^5=2\ 410\ 141\ 734$；

(4) 解法 1：$C_{198}^3+C_2^1 \cdot C_{198}^4=125\ 508\ 306$.

解法 2：$C_{200}^5-C_{198}^5=125\ 508\ 306$.

说明 解答本题时，要注意区分“恰有”“至少有”等词.

B组

1. 容易知道，在 C_{37}^7 注彩票中可以有一个一等奖.

在解决第 2 问时，可分别计算 37 选 6 及 37 选 8 中的一等奖的中奖机会，它们分别是 $\frac{1}{C_{37}^6}=\frac{1}{2\ 324\ 784}$ 和 $\frac{1}{C_{37}^8}=\frac{1}{38\ 608\ 020}$.

要将一等奖的机会提高到 $\frac{1}{6\ 000\ 000}$ 以上且不超过 $\frac{1}{500\ 000}$，即

$$500\ 000 \leqslant C_{37}^n < 6\ 000\ 000,$$

用计算器可得

$$n=6，或\ n=31.$$

所以可在 37 个数中取 6 个或 31 个.

2. 可以按照Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的顺序分别着色：分别有 5，4，3，3 种方法，所以着色种数有 $5\times4\times3\times3=180$（种）.

3. “先取元素后排列”，分三步完成：第一步，从 1，3，5，7，9 中取三个数，有 C_5^3 种取法；第二步，从 2，4，6，8 中取 2 个数，有 C_4^2 种取法；第三步，将取出的 5 个数全排列，有 A_5^5 种排法. 共有符合条件的五位数 $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot A_5^5=7\ 200$（个）.

4. 由于甲和乙都没有得冠军，所以冠军是其余 3 人中的一个，有 A_3^1 种可能；乙不是最差的，所以是第 2，3，4 名中的一种有 A_3^1 种可能；上述位置确定后，甲连同其他 2 人可任意排列，有 A_3^3 种排法. 所以名次排列的可能情况的种数是 $A_3^1 \cdot A_3^1 \cdot A_3^3=54$.

5. 等式两边都是两个数相乘，可以想到分步乘法计数原理，于是可得如下分步取组合的方法.

在 n 个人中选择 m 个人搞卫生工作，其中 k 个人擦窗，$m-k$ 个人拖地，共有多少种不同的选取人员的方法?

解法 1：利用分步计数原理，先从 n 个人中选 m 个人，然后从选出的 m 个人中再选出 k 个人擦窗，剩余的人拖地，这样有 $C_n^m \cdot C_m^k$ 种不同的选取人员的方法；

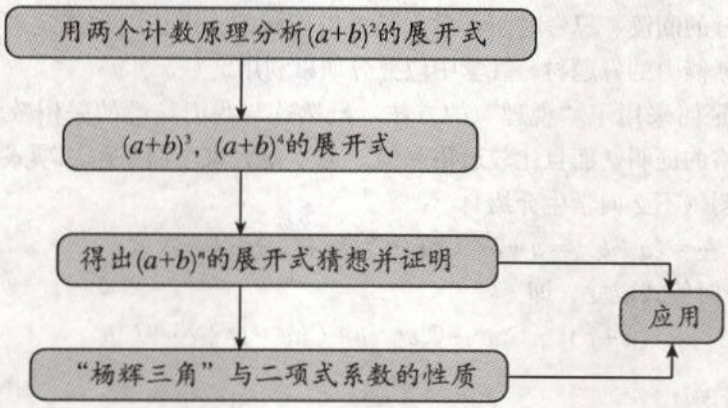
解法 2：直接从 n 个人中选 k 个人擦窗，然后在剩下的 $n-k$ 个人中选 $m-k$ 个人拖地，这样，由分步计数原理得，共有 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$ 种不同的人员选择方法.

所以 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$ 成立.

说明　经常引导学生从一个排列组合的运算结果或等式出发，构造一个实际问题加以解释，有助于学生对问题的深入理解，检查结果，纠正错误.

1.3　二项式定理

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 用两个计数原理分析 $(a+b)^2$ 的展开式，归纳地得出二项式定理，并能用计数原理证明；掌握二项展开式的通项公式；能应用它解决简单问题.

2. 学会讨论二项式系数性质的一些方法.

难点：

用两个计数原理分析 $(a+b)^2$ 的展开式；用两个计数原理证明二项式定理.

三、编写意图与教学建议

在多项式的运算中，把二项式展开成单项式之和的公式，即二项式定理有着非常重要的地位，它是带领我们进入微分学领域大门的一把金钥匙，只是在中学阶段还没有显示的机会. 将本小节内容安排在计数原理之后来学习，一方面是因为二项式定理的证明要用到计数原理，可以把它作为计数原理的一个应用，另一方面也为学习随机变量及其分布作准备. 另外，由于二项式系数是一些特殊的组合数，由二项式定理可导出一些组合数的恒等式，这对深化组合数的认识有好处. 总之，二项式定理是

综合性较强的、具有联系不同内容作用的知识.

1.3.1 二项式定理

1. 在推导二项式定理的过程中，关键是利用计数原理分析二项式的展开过程，从而发现二项式展开成单项式之和时各项系数的规律. 教科书为二项式定理的猜想设计了如下过程：

(1) 将二项式的展开式与“计数问题”联系在一起是不容易的，因此教科书首先采用合情推理的方法，在“探究”中提出如何利用两个计数原理得出 $(a+b)^2$，$(a+b)^3$，$(a+b)^4$ 的展开式问题；

(2) 详细写出用多项式乘法法则得到 $(a+b)^2$ 展开式的过程，并从两个计数原理的角度对展开过程进行分析，概括出项数以及项的形式；

(3) 用组合知识分析展开式中具有同一形式的项的个数，从而得出用组合数表示的 $(a+b)^2$ 的展开式；

(4) 让学生模仿上述过程推导 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$ 的展开式；

(5) 得出关于 $(a+b)^n$ 的展开式的猜想，给出证明.

上述过程中，(2) (3) 两步是关键，并且也是难点. 教科书中对这两步已经有非常详细的讲解，只要教学中给学生充分的阅读、思考时间，学生是可以理解的. 上述二项式定理的发现过程，是培养学生观察、分析、概括能力的好题材，教学中应充分加以利用.

2. 二项式定理的证明采用了“说理”的方法，虽然这与我们熟悉的采用数学归纳法的证明不一样，但这也是一个严格的证明，而且比较通俗易懂. 为了使大家全面了解二项式定理的证明，下面给出它的数学归纳法证明（不必向学生介绍）：

(1) 当 $n=1$ 时，左 $=(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b=$ 右，所以等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k,$$

那么，

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)(a+b)^k\\&=(a+b)(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)\\&=a(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)+b(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)\\&=C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb+(C_k^2+C_k^1)a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^kb^{k+1}\\&=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\cdots+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1},\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时也成立.

由数学归纳法知，等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

在上述证明中，使用了组合数的性质 $C_k^0=C_{k+1}^0$，$C_k^{r+1}+C_k^r=C_{k+1}^{r+1}$.

3. 在获得二项式定理后，应当引导学生对二项展开式进行细致分析，使学生认识以下几点：

(1) 它有 $n+1$ 项.

(2) 各项的次数都等于二项式的次数 n.

(3) 字母 a 按降幂排列，次数由 n 递减到 0；字母 b 按升幂排列，次数由 0 递增到 n.

(4) 二项展开式中，系数 $C_n^k(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 叫做（第 $k+1$ 项的）二项式系数，它们依次为

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n,$$

这是一组仅与二项式的次数 n 有关的 $n+1$ 个组合数，而与 a，b 无关. 教科书做这样的规定，是为了使它们与展开式中关于某一个（或两个）字母的系数相区别. 教学中，可以结合具体例子加以说明.

4. 通项公式 $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$ 是本节内容的重点之一，它实际上就是一个有 $n+1$ 项的数列的通项公式，当 k 依次取 0，1，2，…，n 时，得到这个数列的第 1，2，3，…，$n+1$ 项. 教学中应当引导学

生认识如下几点：

(1) 它是 $(a+b)^n$ 的展开式的第 $k+1$ 项，这里 $k=0, 1, 2, \cdots, n$；

(2) 字母 a，b 是一种“符号”，实际上它们可以是数、式及其他什么的，只要具备二项式的形式，就可以用定理写出展开式；

(3) 展开式是对 $(a+b)^n$ 这个标准形式而言的，还可以对等式进行变形，例如，对于 $(a-b)^n$，我们有

$$T_{k+1}=(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

5. 对二项展开式及其通项进行一些变换，有利于学生加深对定理的理解．例如，教科书中给出了二项展开式的特例

$$(1+x)^n=1+C_n^1 x+C_n^2 x^2+\cdots+C_n^r x^r+\cdots+x^n,$$

这是令 $a=1$，$b=x$ 而得到的．从函数的观点看这个展开式，它就是一个一元 n 次多项式函数．这个函数是经常被用到的，解题时可以直接使用．

6. 本小节的两个例题目的在于熟悉二项展开式及其通项，培养学生的运算能力．教学时可以让学生自己独立完成，只要在符号、系数等问题上适当强调就可以了．

1.3.2“杨辉三角”与二项式系数的性质

教科书将二项式系数性质的讨论与“杨辉三角”结合起来，主要是因为“杨辉三角”蕴含了丰富的内容，由它可以直观看出二项式系数的性质，当二项式的次数不大时，可借助它直接写出各项的二项式系数．“杨辉三角”是我国古代数学的研究成果之一，它的发现远早于法国数学家帕斯卡．它和勾股定理、圆周率的计算等其他中国古代数学成就一起，显示了我国古代劳动人民的卓越智慧和才能．应注意抓住这一题材，对学生进行爱国主义教育，激励学生的民族自豪感．

研究二项式系数的性质，既能使学生认识二项展开式的性质，又能建立相关知识之间的联系．例如，当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，二项展开式的各项依次是 $\frac{1}{2^n}C_n^k (k=0, 1, 2, \cdots, n)$，而它正是概率中研究的随机变量的分布之一——二项分布的一个特例；又如，研究二项式系数这组特定的组合数，对进一步认识组合数、进行组合数的计算和变形都有作用．

1. 为了使学生建立“杨辉三角”与二项式系数的性质之间关系的直觉，教科书在“探究”中要求学生计算并填表，然后观察表格，探索其中的规律．教科书在“边空”中指出，“表示形式的变化有时能帮助我们发现规律”，教学中可以结合“杨辉三角”让学生体会这一点．在列出“杨辉三角”后，可以先放手让学生观察表格，由学生自己说说其中的规律．

2. 由于二项式系数组成的数列就是一个离散函数，所以教科书引导学生从函数的角度研究二项式系数的性质．这样处理便于建立知识的前后联系，使学生体会用函数知识研究问题的方法．从函数角度研究问题时，可以画出它的图象，利用几何直观，数形结合地进行思考，这对发现规律，形成证明思路等都有好处．

教科书中提出了二项式系数的 3 条性质：

(1) 对称性，这条性质可从图象上直接看出，对称轴是 $k=\frac{n}{2}$，还可以结合等式 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 来理解．

(2) 增减性与最大值，这条性质也可以从图象上直观看出．在证明增减性时，要注意 n 是固定的，变量是 k．另外，由等式 $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}$ 及组合数都是正整数可知，我们可以通过比较 $\frac{n-k+1}{k}$ 与 1 的大小关系，来得出关于增减性的结论，教科书正是这样做的．在理解增减性和最大值时，难点是需要

根据 n 的奇偶性确定相应的分界点，教学时可以引导学生结合函数图象进行分析．由于对称轴是 $k=\frac{n}{2}$，因此，当 n 是偶数时，$k=\frac{n}{2}$时取得最大值 $C_n^{\frac{n}{2}}$；当 n 是奇数时，$\frac{n}{2}$不是整数，由对称性，k 应取与$\frac{n}{2}$最近的两个整数$\frac{n-1}{2}$，$\frac{n+1}{2}$，即最大值是 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$（或 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$）.

（3）各二项式系数的和，教科书从

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+x^n$$

出发，通过对 x“赋值”的方法来得到

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n,$$

这个方法体现了函数思想，即如教科书在第 35 页例 3 结束时叙述的．实际上，对于函数

$$f(x)=(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+x^n,$$

可以令自变量 x 为任意值，通过这样的“赋值”，可以得到许多有用的结果．本节的例 3 就可以通过这种方式给出证明.

3. 教科书第 34 页旁注中问题的回答：展开式左边是 n 个（$1+x$）相乘，按照取 x 的个数，可以将乘积中的项分为 $n+1$ 类：

第 1 类，n 个（$1+x$）都取 1，即取 0 个 x，共有 C_n^0 种取法；

第 2 类，n 个（$1+x$）中，1 个取 x，其余取 1，共有 C_n^1 种取法；

第 3 类，n 个（$1+x$）中，2 个取 x，其余取 1，共有 C_n^2 种取法；

……

一般地，第 k 类，n 个（$1+x$）中，k 个取 x，其余（$n-k$）取 1，共有 C_n^k 种取法；

……

第 n 类，n 个（$1+x$）中全部取 x，共有 C_n^n 种取法.

4. 关于“探究与发现‘杨辉三角’中的一些秘密”．从杨辉三角形中，能归纳出组合数的两条性质，还能找出等差数列，高阶等差数列等问题．例如，在图 1 虚线所示的一列数中，设 $a_1=1$，$a_2=3$，后继的各数依次为 a_3，a_4，…．若令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则有 $b_1=2$，$b_2=3$，$b_3=4$，…．可以证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

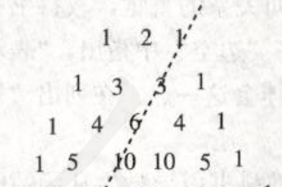


图 1

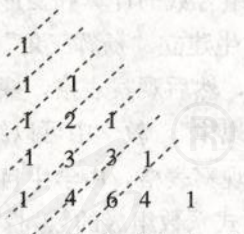


图 2

若将杨辉三角形改写成图 2 的形式，同时再将图 2 中的各条虚线上的数分别相加，并依次将这些数排成一列，它们是 1，1，2，3，5，8，…．这个数列恰好是一个菲波纳契数列.

四、教学设计案例

1.3.1　二项式定理（第一课时）

1. 教学任务分析

在计数原理之后学习二项式定理，一方面是因为它的证明要用到计数原理，可以把它作为计数原理的一个应用，另一方面也为学习随机变量及其分布作准备．另外，由于二项式系数是一些特殊的组合数，由二项式定理可导出一些组合数的恒等式，这对深化组合数的认识有好处．总之，二项式定理是综合性较强的、具有联系不同内容作用的知识．

本节课要在用计数原理分析 $(a+b)^2$ 展开式的基础上，得出二项式定理的猜想，并用计数原理给出证明．

2. 教学重点与难点

重点：用计数原理分析 $(a+b)^2$ 的展开式，得到二项式定理．

难点：用计数原理分析二项式的展开过程，发现二项式展开成单项式之和时各项系数的规律．

3. 教学基本流程

提问：$(a+b)^n$ 展开式是什么？

↓

探究 $(a+b)^2$ 的展开式

↓

让学生探究 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$ 的展开式

↓

得出二项式定理的猜想

↓

证明二项式定理

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 提出课题，简述讨论的思想方法．$(a+b)^2$ 的展开过程是怎样的？	提出课题，回顾相关知识．	教师提出课题：二项式定理是研究 $(a+b)^n$ 的展开式问题．先从简单的 $(a+b)^2$ 的展开式开始．并引导学生关注展开的两个步骤：用乘法法则展开；合并同类项．
(2) 用乘法法则展开 $(a+b)^2$，合并同类项之前展开式有多少项？用两个计数原理分析．	引导学生将 $(a+b)^2$ 的展开式与两个计数原理联系起来．	教师提醒学生：用计数原理分析展开式的项数，应当分析项中的字母是如何取的．为了方便分析，可以引进适当的记号如 $(a+b)_1$，$(a+b)_2$，以表示字母是从哪一个中选出的．
(3) 展开式中同类项的形式是怎样的？每一类型的项的个数怎样计算？	引导学生用计数原理分析同类项的个数，得到 $(a+b)^2$ 展开式的系数．	教师引导学生分析展开式中同类项的形式和每一种类型的项的个数．教师要提醒学生注意将项的形式归结为 $a^{2-k}b^k$ 对分析展开式的意义． 这是教学的难点．

续表

问　题	设计意图	师生活动
(4) 你能仿照上述过程，推导一下 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$ 的展开式吗？	巩固已有思想方法，建立猜想二项式定理的认知基础.	学生独立完成，并由学生自己讲解过程.
(5) 你能猜想一下 $(a+b)^n$ 的展开式并给出证明吗？	得出二项式定理.	先由学生独立完成，然后组织全班讨论. 在讨论过程中要明确每一项的形式及相应的个数.
(6) 例 1 和练习 1.	熟悉二项展开式.	教师引导学生独立完成，可以让学生对“直接展开”和“化简后展开”进行对比.
(7) 小结：怎样用计数原理分析展开式？你认为其中的关键是什么？	概括思想方法.	先让学生自己总结、表述，教师再补充. 特别注意，用计数原理分析展开式，实际上是对“如何得到展开式的项 $a^{n-k}b^n$”进行分析，也就是计数原理中的“一件事”.

5. 两点说明

(1) 得到二项式定理的猜想完全依赖于对 $(a+b)^2$ 的展开式分析，因此要舍得在这个问题上多花些时间让学生多开展思维活动.

(2) 实际上，用计数原理对展开式的分析，关键是考察“一件事”是什么和如何完成这件事. 这里，要完成的“一件事”就是得到 $(a+b)^n$ 展开式的项 $a^{n-k}b^k$，可以分两步完成：第一步，从 $(n-k)$ 个 $(a+b)$ 中取字母 a；第二步，从剩下的 k 个 $(a+b)$ 中取字母 b.

五、习题解答

练习（第 31 页）

1. $p^7+7p^6q+21p^5q^2+35p^4q^3+35p^3q^4+21p^2q^5+7pq^6+q^7$.

2. $T_3=C_6^2(2a)^4\cdot(3b)^2=2\,160a^4b^2$.

3. $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt[3]{x})^{n-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r=\dfrac{(-1)^r}{2^r}C_n^r x^{\frac{n-2r}{3}}$.

4. D. 理由是 $T_{5+1}=C_{10}^5x^{10-5}(-1)^5=-C_{10}^5x^5$.

练习（第 35 页）

1. (1) 当 n 是偶数时，最大值 $C_n^{\frac{n}{2}}$；当 n 是奇数时，最大值是 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$.

(2) $C_{11}^1+C_{11}^3+\cdots+C_{11}^{11}=\dfrac{1}{2}\cdot2^{11}=1\,024$.

(3) $\dfrac{1}{2}$.

2. $\because C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$,

$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$,

$\therefore C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$

$=(C_n^0+C_n^2+\cdots)+(C_n^1+C_n^3+\cdots)$

$=2(C_n^0+C_n^2+\cdots)=2^n$.

$\therefore\ C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^n=\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}$.

3. 略.

习题 1.3（第 36 页）

1. (1) $C_n^0p^n+C_n^1p^{n-1}(1-p)+C_n^2p^{n-2}(1-p)^2+\cdots+C_n^rp^{n-r}(1-p)^r+\cdots+C_n^n(1-p)^n$；

(2) $\dfrac{C_n^0}{2^n}+\dfrac{C_n^1}{2^n}+\dfrac{C_n^2}{2^n}+\cdots+\dfrac{C_n^n}{2^n}$.

2. (1) $(a+\sqrt[3]{b})^9=a^9+9a^8\sqrt[3]{b}+36a^7\sqrt[3]{b^2}+84a^6b+126a^5b\sqrt[3]{b}+126a^4b\sqrt[3]{b^2}+84a^3b^2+36a^2b^2\sqrt[3]{b}+9ab^2\sqrt[3]{b^2}+b^3$；

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^7=\dfrac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}-\dfrac{7}{32}x^{\frac{2}{5}}+\dfrac{21}{8}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{35}{2}x^{\frac{1}{2}}+70x^{-\frac{1}{2}}-168x^{-\frac{3}{2}}+224x^{-\frac{5}{2}}-128x^{-\frac{7}{2}}$.

3. (1) $(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5=2+20x+10x^2$；

(2) $(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})^4-(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})^4=192x+432x^{-1}$.

4. (1) 前 4 项分别是 1，$-30x$，$420x^2$，$-3\ 640x^3$；

(2) $T_8=-2\ 099\ 520a^9b^{14}$；

(3) $T_7=924$；

(4) 展开式的中间两项分别为 T_8，T_9，其中

$$T_8=C_{15}^7(x\sqrt{y})^8(-y\sqrt{x})^7=-6\ 435x^{11}y^{11}\sqrt{x},$$

$$T_9=C_{15}^8(x\sqrt{y})^7(-y\sqrt{x})^8=6\ 435x^{11}y^{11}\sqrt{y}.$$

5. (1) 含$\dfrac{1}{x^5}$的项是第 6 项，它的系数是 $C_{10}^5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=-\dfrac{63}{8}$；

(2) 常数项是第 6 项，$T_6=C_{10}^5\cdot 2^{10-5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=-252$.

6. (1) $T_{r+1}=C_{2n}^rx^{2n-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C_{2n}^r(-1)^rx^{2n-2r}$.

由 $2n-2r=0$ 得 $r=n$，即$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$的展开式中常数项是

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=(-1)^nC_{2n}^r\\&=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=(-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ \cdots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{n!n!}\\&=(-1)^n\frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\cdot(2n-1)][2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\cdot 2n]}{n!n!}\\&=(-1)^n\frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\cdot(2n-1)]\cdot 2^n\cdot n!}{n!n!}\\&=(-2)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\cdot(2n-1)}{n!}.\end{aligned}$$

(2) $(1+x)^{2n}$的展开式共有 $2n+1$ 项，所以中间一项是

$$T_{n+1}=C_{2n}^{n}x^{n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}(2x)^{n}.$$

7. 略.

8. 展开式的第 4 项与第 8 项的二项式系数分别是 C_n^3 与 C_n^7，由 $C_n^3=C_n^{n-7}$，得 $3=n-7$，即 $n=10$. 所以，这两个二项式系数分别是 C_{10}^3与 C_{10}^7，即 120.

B 组

1. (1) $\because (n+1)^n-1=n^n+C_n^1n^{n-1}+C_n^2n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}n^2+C_n^{n-1}n+1-1$

$$=n^n+C_n^1n^{n-1}+C_n^2n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}n^2+n^2$$

$$=n^2(n^{n-2}+C_n^1n^{n-3}+C_n^2n^{n-4}+\cdots+C_n^{n-2}+1),$$

$\therefore (n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除；

(2) $\because 99^{10}-1=(100-1)^{10}-1$

$$=100^{10}-C_{10}^1\cdot 100^9+C_{10}^2\cdot 100^8+\cdots+C_{10}^8\cdot 100^2-C_{10}^9\cdot 100+1-1$$

$$=100^{10}-C_{10}^1\cdot 100^9+C_{10}^2\cdot 100^8+\cdots+C_{10}^8\cdot 100^2-10\times 100$$

$$=1\,000(10^{17}-C_{10}^1\cdot 10^{15}+C_{10}^2\cdot 10^{13}+\cdots+C_{10}^8\cdot 10-1),$$

$\therefore 99^{10}-1$ 能被 1 000 整除.

2. 由 $(2-1)^n=C_n^0\cdot 2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^nC_n^n$，

得 $2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1$.

复习参考题（第 40 页）

A 组

1. (1) n^2；

说明 这里的“一件事情”是“得到展开式中的一项”. 由于项的形式是 a_ib_j，而 i，j 都有 n 种取法.

(2) $C_7^3\cdot C_6^2=525$；

(3) $A_4^1\cdot A_5^5=480$，或 $A_5^2\cdot A_4^4=480$；

说明 第一种方法是先考虑有限制的这名歌手的出场位置，第二种方法是先考虑有限制的两个位置.

(4) $C_5^4=5$；

说明 因为足球票无座，所以与顺序无关，是组合问题.

(5) $3^5=243$；

说明 对于每一名同学来说，有 3 种讲座选择，而且允许 5 名同学听同一个讲座，因此是一个“有重复排列”问题，可以用分步乘法原理解答.

(6) 54；

说明 对角线的条数等于连接正十二边形中任意两个顶点的线段的条数 C_{12}^2，减去其中的正十二边

形的边 12 条：

$$C_{12}^2-12=\frac{12\times 11}{2}-12=54.$$

(7) 第 $n+1$ 项.

说明 展开式共有 $2n+1$ 项，且各系数与相应的二项式系数相同.

2. (1) $A_6^1+A_6^2+A_6^3+A_6^4+A_6^5+A_6^6=1\ 956$；

说明 只要数字是 1，2，3，4，5，6 中的，而且数字是不重复的一位数、二位数、三位数、四位数、五位数和六位数都符合要求.

(2) $2A_5^5=240$.

说明 只有首位数是 6 和 5 的六位数才符合要求.

3. (1) $C_8^3=56$；

(2) $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=30$.

4. $C_8^4+C_8^6=98$.

说明 所请的人的地位没有差异，所以是组合问题. 按照“其中两位同学是否都请”为标准分为两类.

5. (1) $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$；

说明 任意两条直线都有交点，而且交点各不相同.

(2) $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$.

说明 任意两个平面都有一条交线，而且交线互不相同.

6. (1) $C_{97}^5=64\ 446\ 024$；

(2) $C_3^2\cdot C_{97}^3=442\ 320$；

(3) $C_3^2\cdot C_{97}^3+C_3^3\cdot C_{97}^2=446\ 976$.

7. $A_3^3\cdot A_4^4\cdot A_5^5\cdot A_3^3=103\ 680$.

说明 由于不同类型的书不能分开，所以可以将它们看成一个整体，相当于是 3 个元素的全排列. 但同类书之间可以交换顺序，所以可以分步对它们进行全排列.

8. (1) $-26x^2$；

说明 第三项是含 x^2 的项，其系数是 $C_4^2\cdot 3^2+C_4^1\cdot C_5^1(-2\times 3)+C_5^2(-2)^2=-26$.

(2) $T_{r+1}=C_{18}^r(9x)^{18-r}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^r$，由题意有

$$18-r-\frac{r}{2}=0,$$

解得 $r=12$，$T_{13}=18\ 564$；

(3) 由题意得 $2C_n^9=C_n^8+C_n^{10}$，即

$$\frac{2\cdot n!}{9!(n-9)!}=\frac{n!}{8!(n-8)!}+\frac{n!}{10!(n-10)!},$$

化简得 $n^2-37n+322=0$，解得 $n=14$，$n=23$；

(4) 解法 1：设 T'_{r+1} 是 $(1-x)^{10}$ 展开式的第 $r+1$ 项，由题意知，所求展开式中 x^4 的系数为 T'_{4+1}，T'_{3+1} 与 T'_{2+1} 的系数之和.

$$T'_{4+1}=\mathrm{C}_{10}^4(-x)^4,\ T'_{3+1}=\mathrm{C}_{10}^3(-x)^3,\ T'_{2+1}=\mathrm{C}_{10}^2(-x)^2,$$

因此，x^4 的系数 $=\mathrm{C}_{10}^4-\mathrm{C}_{10}^3+\mathrm{C}_{10}^2=135$.

解法 2：原式 $=(1-x^3)(1-x)^9$

$$=(1-x^3)(1-9x+\mathrm{C}_9^2x^2-\mathrm{C}_9^3x^3+\mathrm{C}_9^4x^4+\cdots),$$

因此，x^4 的系数 $=\mathrm{C}_9^4+9=135$.

9. $55^{55}+9=(56-1)^{55}+9$

$=56^{55}-\mathrm{C}_{55}^1\cdot 56^{54}+\cdots+\mathrm{C}_{55}^{54}\cdot 56-1+9$

$=56^{55}-\mathrm{C}_{55}^1\cdot 56^{54}+\cdots+\mathrm{C}_{55}^{54}\cdot 56+8$,

$56^{55}-\mathrm{C}_{55}^1\cdot 56^{54}+\cdots+\mathrm{C}_{55}^{54}\cdot 56+8$ 中各项都能被 8 整除，因此 $55^{55}+9$ 也能被 8 整除.

B 组

1. (1) $\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=\mathrm{C}_{n+1}^2=21$，即 $\frac{1}{2}(n+1)\cdot n=21$，解得 $n=6$；

(2) $\mathrm{A}_4^1\cdot\mathrm{A}_2^1\cdot\mathrm{A}_4^4=4\times 2\times 24=192$；

说明 先排有特殊要求的，再排其他的.

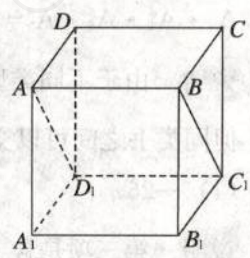
(3) $3\times3\times3\times3=3^4$，$4\times4\times4=4^3$；

说明 根据映射定义，只要集合 A 中任意一个元素在集合 B 中能够找到唯一对应的元素，就能确定一个映射，对应的元素可以相同，所以是“有重复排列”问题.

(4) $\mathrm{A}_{26}^2\times 10^4=6\ 500\ 000$；

(5) $\mathrm{C}_8^4-12=58$；

说明 在从正方体的 8 个顶点中任取 4 个的所有种数 C_8^4 中，排除四点共面的 12 种情况，即正方体表面上的 6 种四点共面的情况，以及如右图中 ABC_1D_1 这样的四点共面的其他 6 种情况，因此三棱锥的个数为 $\mathrm{C}_8^4-12=58$.



(第 1(5) 题)

(6) 1 或 −1.

说明 令 $x=1$，这时 $(1-2x)^n$ 的值就是展开式中各项系数的和，其值是

$$(1-2)^n=(-1)^n=\begin{cases}-1,\ n\text{ 是奇数},\\ 1,\ n\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

2. (1) 先从 1，3，5 中选 1 个数放在末位，有 A_3^1 种情况；再从除 0 以外的 4 个数中选 1 个数放在首

位，有 A_4^1 种情况；然后将剩余的数进行全排列，有 A_4^4 种情况. 所以能组成的六位奇数个数为

$$A_3^1\cdot A_4^1\cdot A_4^4=288.$$

(2) 解法 1：由 0，1，2，3，4，5 组成的所有没有重复数字的正整数的个数是 $A_5^1\cdot A_5^5$，其中不大于 201 345 的正整数的个数，当首位数字是 2 时，只有 201 345 这 1 个；当首位数字是 1 时，有 A_5^5 个. 因此，所求的正整数的个数是

$$A_5^1\cdot A_5^5-(1+A_5^5)=479.$$

解法 2：由 0，1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的正整数中，大于 201 345 的数分为以下几种情况：

前 4 位数字为 2 013，只有 201 354，个数为 1；

同理，前 3 位数字为 201，个数为 $A_2^1\cdot A_2^2$；

前 2 位数字为 20，个数为 $A_3^1\cdot A_3^3$；

首位数字为 2，个数为 $A_4^1\cdot A_4^4$；

首位数字为 3，4，5 中的一个，个数为 $A_3^1\cdot A_5^5$.

根据分类计数原理，所求的正整数的个数是

$$1+A_2^1\cdot A_2^2+A_3^1\cdot A_3^3+A_4^1\cdot A_4^4+A_3^1\cdot A_5^5=479.$$

3. (1) 分别从两组平行线中各取两条平行线，便可构成一个平行四边形，所以可以构成的平行四边形个数为

$$C_m^2\cdot C_n^2=\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1);$$

(2) 分别从三组平行平面中各取两个平行平面，便可构成一个平行六面体，所以可以构成的平行六面体个数为

$$C_m^2\cdot C_n^2\cdot C_l^2=\frac{1}{8}mnl(m-1)(n-1)(l-1).$$

4. (1) 先排不能放在最后的那道工序，有 A_4^1 种排法；再排其余的 4 道工序，有 A_4^4 种排法. 根据分步乘法计数原理，排列加工顺序的方法共有

$$A_4^1\cdot A_4^4=96\ (\text{种});$$

(2) 先排不能放在最前和最后的那两道工序，有 A_3^2 种排法；再排其余的 3 道工序，有 A_3^3 种排法. 根据分步乘法计数原理，排列加工顺序的方法共有

$$A_3^2\cdot A_3^3=36\ (\text{种}).$$

5. 解法 1：由等比数列求和公式得

$$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}=\frac{(1+x)^{n+3}-(1+x)^3}{x},$$

上述等式右边分子的两个二项式中含 x^3 项的系数分别是 C_{n+3}^3，C_3^3，因此它们的差

$$C_{n+3}^3-C_3^3=\frac{n(n^2+6n+11)}{6},$$

就是所求展开式中含 x^2 项的系数.

解法 2：原式中含 x^2 项的系数分别是 C_3^2，C_4^2，…，C_{n+2}^2，因此它们的和就是所求展开式中含 x^2 项

的系数. 与复习参考题 B 组第 2 题同理，可得

$$C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+2}^2=C_{n+3}^3-C_2^2=\frac{n(n^2+6n+11)}{6}.$$

III 自我检测题

一、选择题

1. 由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中偶数共有（　　）个.

(A) 60　　(B) 48　　(C) 36　　(D) 24

2. 在 A，B，C，D，E 五位候选人中，选出正副班长各一人的选法共有（　　）种；选出三人班委的选法共有（　　）种.

(A) 20，60　　(B) 10，10　　(C) 20，10　　(D) 10，60

3. A，B，C，D，E 五人并排站成一排，如果 A，B 必须相邻且 B 在 A 的左边，那么不同的排法共有（　　）种.

(A) 60　　(B) 48　　(C) 36　　(D) 24

4. 在 $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中，常数项是（　　）.

(A) -28　　(B) -7　　(C) 7　　(D) 28

5. 已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，那么，$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7$ 等于（　　）.

(A) -2　　(B) -1　　(C) 2　　(D) 1

6. 甲、乙、丙三家公司承包 6 项工程，甲承包 3 项，乙承包 2 项，丙承包 1 项. 不同的承包方案有（　　）种.

(A) 24　　(B) 127　　(C) 720　　(D) 60

二、填空题

1. "求 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)$ 展开式的项数"中，要完成的"一件事"是 ________.

2. 6 名同学站成一排，甲、乙不能站在一起，不同的排法共有______种.

3. 直线 a，b 为异面直线，直线 a 上有 4 个点，直线 b 上有 5 个点，以这些点为顶点的三角形共有______个.

4. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{50}$ 的二项展开式中，有理项共有______ 项.

三、解答题

1. 在平面直角坐标系内，点 $P(x, y)$ 的横坐标、纵坐标都在 $\{0, 1, 2, 3\}$ 内取值.

(1) 不同的 P 点共有多少个？

(2) 在上述点中，不在坐标轴上的点有多少个？

2. 现有 6 本书，如果

(1) 分成三组，一组 3 本，一组 2 本，一组 1 本；

(2) 分给三个人，一人 3 本，一人 2 本，一人 1 本；

(3) 平均分成三个组.

分别求分法种数.

3. 在 $(ax+1)^7$ 的展开式中，x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项. 如果实数 $a>1$，求 a 的值.

参考答案

一、选择题

1. B.　2. C.　3. D.　4. C.　5. B.　6. D.

说明　1. 先从 2，4 中选一个排在个位上，再将剩下的四个数全排列.

2. 选出正副班长各一人时，因为有分工，所以是排列问题，有 A_5^2 种选法；选出三人班委时，因为没有分工，所以是组合问题，有 C_5^3 种选法.

3. 将 A，B 两人作为一个整体，与 C，D，E 三人一起进行排列，得到不同的排法 A_4^4 种.

4. $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 展开式的通项是

$$T_{k+1}=C_8^k\left(\frac{x}{2}\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-1)^kC_8^k\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}x^{8-\frac{4}{3}k}.$$

令 $8-\dfrac{4}{3}k=0$，解得 $k=6$.

所以，常数项是 $T_{6+1}=7$.

5. 在 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$ 中，令 $x=1$，就有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=-1$.

6. 分三步：先由甲公司承包 6 项的 3 项，有 C_6^3 种方法；然后由乙从剩下的 3 项中承包 2 项，有 C_3^2 种方法；最后由丙承包剩下的 1 项. 所以，不同的承包方案有 $C_6^3C_3^2C_1^1$ 种.

二、填空题

1. 要完成的“一件事”是“得到 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)$ 的展开式的一项”.

说明　要注意防止把“一件事”说成是“求展开式的项数”.

2. 480.

间接法：在 6 名同学的全排列中，甲、乙站在一起的有 $A_5^5\cdot A_2^2$ 种. 所以，符合条件的有 $A_6^6-A_5^5\cdot A_2^2$ 种.

直接法：将可以任意站位的 4 位同学先排好，有 A_4^4 种排法；再在每两人之间及前、后任选 2 个位置让甲、乙排，有 A_5^2 种排法. 所以，共有 $A_4^4\cdot A_5^2$ 种排法.

3. 70.

直接法：所有三角形可以分为两类：第一类，由直线 a 上取 2 个点、直线 b 上取 1 个点所确定的三角形，共 $C_4^2 \cdot C_5^1$ 个；第二类，由直线 a 上取 1 个点、直线 b 上取 2 个点确定的三角形，共 $C_4^1 \cdot C_5^2$ 个. 所以共有三角形 $C_4^2 \cdot C_5^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 = 70$（个）.

间接法：9 个点中任取 3 个，共有 C_9^3 种取法. 三个点全在直线 a 上的有 C_4^3 种，全在直线 b 上的有 C_5^3 种，以它们为顶点的三角形不存在. 所以，以这些点为顶点的三角形共有 $C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 70$（个）.

4. 9.

$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{50}$ 的二项展开式的通项是

$$T_{k+1}=C_{50}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{50-k}\left(\sqrt{x}\right)^{-k}=C_{50}^{k}x^{\frac{100-5k}{6}},$$

当 $k=2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50$ 时，$\frac{100-5k}{6}$ 取整数，即有理项有 9 项.

三、解答题

1.（1）可以分两步确定点 P 的坐标，第一步，确定横坐标，有 4 种可能；第二步，确定纵坐标，有 4 种可能. 根据分步乘法计数原理，不同的 P 点共有 16 个.

（2）当 P 不在坐标轴上时，横、纵坐标都在 $\{1, 2, 3\}$ 内取值. 类似（1）的解法，共有 $3\times3=9$（个）.

2.（1）分三步完成：第一步，从 6 本书中取 3 本，有 C_6^3 种取法；第二步，从剩下的 3 本中取 2 本，有 C_3^2 种取法；第三步，剩下的 1 本为一组. 共有分法 $C_6^3 \cdot C_3^2 = 60$（种）.

（2）分给三个人，由于哪个人得多少本书没有限制，所以可先按（1）的方法将书分组，再分配到人的方法，共有分法 $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot A_3^3 = 360$（种）.

（3）$C_6^4 \times C_4^2 \times C_2^2 \div A_3^3 = 15$（种）.

3. x^2 的系数是 $C_7^2 a^2$；x^3 的系数是 $C_7^3 a^3$；x^4 的系数是 $C_7^4 a^4$.

根据题意，有

$$2\times C_7^3 a^3 = C_7^2 a^2 + C_7^4 a^4,$$

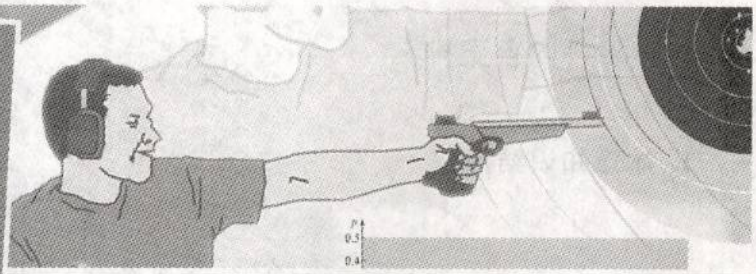
即

$$5a^2-10a+3=0.$$

解得 $a=1\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

由于 $a>1$，所以 a 的值为 $1+\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第二章 随机变量及其分布



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

通过具体实例，帮助学生理解取有限值的离散型随机变量及其分布列、均值、方差的概念，理解超几何分布和二项分布的模型并能解决简单的实际问题，使学生认识分布列对于刻画随机现象的重要性，认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义，了解条件概率和两个事件相互独立的概念.

2. 学习目标

(1) 在对具体问题的分析中，理解取有限值的离散型随机变量及其分布列的概念，认识分布列对于刻画随机现象的重要性.

(2) 通过实例，理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用.

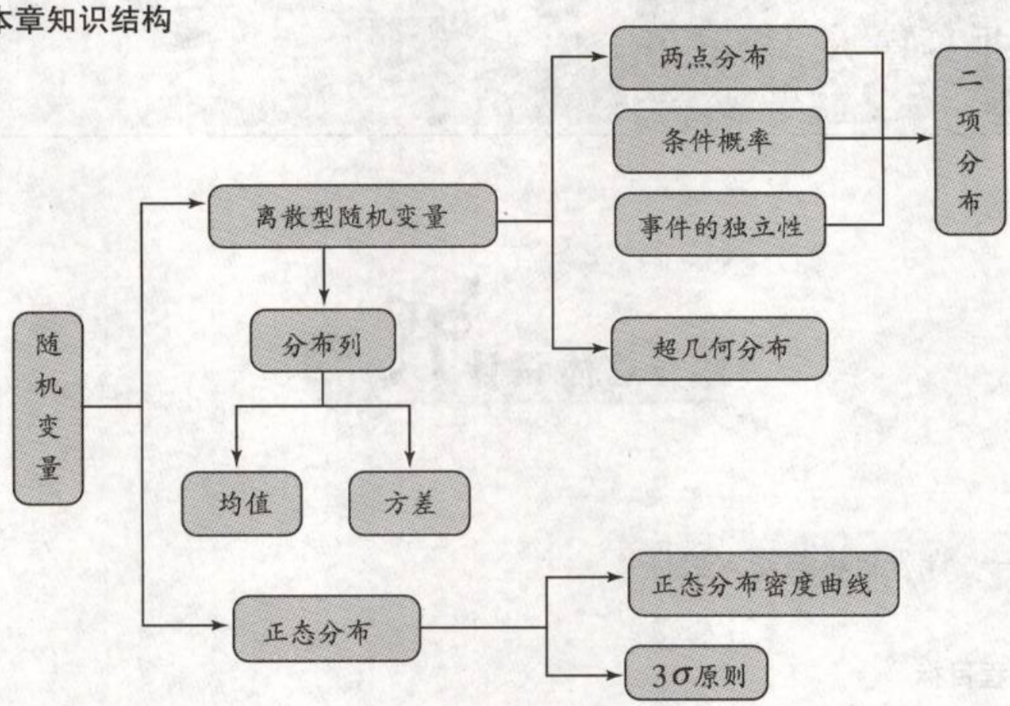
(3) 在具体情景中，了解条件概率和两个事件相互独立的概念，理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些简单的实际问题.

(4) 通过实例，理解取有限值的离散型随机变量均值、方差的概念，能计算简单离散型随机变量的均值、方差，并能解决一些实际问题.

(5) 通过实际问题，借助直观（如实际问题的直方图），认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

二、内容安排

1. 本章知识结构



2. 对内容安排的说明

研究一个随机现象，就是要了解它所有可能出现的结果和每一个结果出现的概率，分布列正是全面地描述了离散型随机变量的统计规律. 二项分布和超几何分布是两个应用广泛的概率模型. 为了使学生能够更好地理解它们，并能用来解决一些实际问题，教科书在内容安排上作了如下考虑：

(1) 通过简单的例子，介绍取有限值的离散型随机变量及其分布列的概念；

(2) 通过具体实例，介绍超几何分布模型及其应用；

(3) 通过具体实例，介绍条件概率和两个事件相互独立的概念，在此基础上介绍二项分布模型及其应用；

(4) 通过具体实例，介绍离散型随机变量的均值与方差的含义及其计算公式，这里仅限于取有限值的离散型随机变量，并解决一些实际问题；

(5) 通过高尔顿板试验，引入正态分布密度曲线，借助图象介绍正态分布曲线的特点及其所表示的意义.

三、课时安排

全章共安排了 4 个小节，教学约需 12 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

2.1　离散型随机变量及其分布列	约 3 课时
2.2　二项分布及其应用	约 4 课时
2.3　离散型随机变量的均值与方差	约 3 课时
2.4　正态分布	约 1 课时
小结	约 1 课时

II 教科书分析

章头图从实例和图形两个方面展示了本章要学习的内容，一个是离散型随机变量的产生背景和分布列的条形图，另一个是正态分布的背景和正态分布密度曲线.

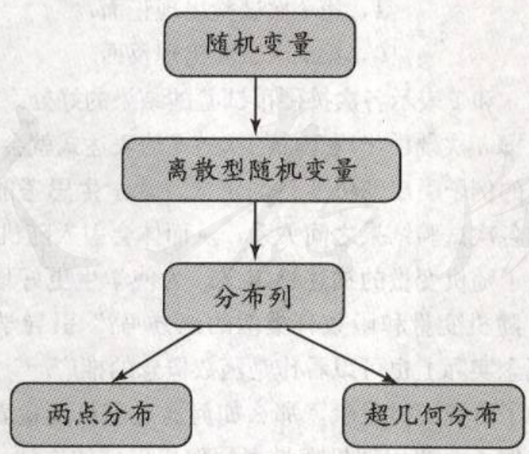
章头图选用了一个射击运动情景. 在射击运动中，每次射击的成绩是一个非常典型的随机事件. 如何刻画每个运动员射击的技术水平与特点？如何比较两个运动员的射击水平？如何选择优秀运动员代表国家参加奥运会才能使得获胜的概率大？这些问题的解决需要离散型随机变量的知识.

另一个情景是一个高尔顿板游戏. 在一块木板上钉着若干排相互平行并相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，前后挡有玻璃，然后让一个个小球从高尔顿板上方的通道口落下，小球落在哪个槽中的可能性更大？槽中的小球最后会堆积成什么形状？这些问题与我们要学习的正态分布有关.

章引言中，以提问的方式提出了本章要研究的问题及其基本思想：随机事件形形色色，随机现象表现各异，但如果舍弃具体背景，它们就会呈现出一些共性；如果把随机试验的结果数量化，用随机变量表示试验结果，就可以用数学工具来研究这些随机现象. 这样，不仅阐述了本章的主要内容，而且激发了学生的学习兴趣，使他们明确本章的学习目标以及研究本章内容的数学思想方法.

2.1 离散型随机变量及其分布列

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 认识离散型随机变量的分布列能完全描述由这个离散型随机变量所刻画的随机现象；

2. 理解超几何分布的概率模型及其应用.

难点：

1. 随机变量的含义；

2. 超几何分布的应用.

三、编写意图与教学建议

对于随机试验，只要了解了它可能出现的结果，以及每一个结果发生的概率，我们也就基本把握了它的统计规律. 为了使用数学工具研究随机现象，需要用数字描述随机现象，建立起连接数和随机现象的桥梁——随机变量. 随机变量能够反映随机现象的共性，有关随机变量的结论可以应用到具有不同背景的实际问题中. 本节将讨论与随机变量有关的一些基本概念.

2.1.1 离散型随机变量

教科书以学生熟悉的掷骰子试验和掷硬币试验为例引入随机变量的概念. 对于掷骰子试验的结果，学生很容易和数字 1～6 之间的整数对应起来，而掷硬币的结果则不容易联想到数字. 教科书通过“思考”提出问题：“掷一枚硬币的结果是否也可以用数字表示呢？”通过把正面向上与 1 对应，反面向上与 0 对应，使得掷硬币的试验结果同样也可以用数字表示，在此基础上给出随机变量的描述性定义.

这里，教科书边框中还有一个问题：“还可以用其他的数来表示这两个试验的结果吗？”目的是鼓励学生提出其他表示方法，比如将正面向上与 1 对应，反面向上与 -1 对应等，以使他们更深入地体会随机变量的本质. 事实上，对于同一个随机试验，可以用不同的随机变量来表示其所有可能出现的结果.

教学中，要通过实例引导学生体会构造随机变量应当注意的一些基本问题，如随机变量应该有实际意义，应该尽量简单，以便于研究. 例如，对于掷 n 次硬币出现正面的次数 ξ 可以表示为

$$\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n,$$

其中

$$\xi_i=\begin{cases}1，\text{第 } i \text{ 次试验出现正面，}\\0，\text{第 } i \text{ 次试验出现反面.}\end{cases}$$

从这个表达式可以体会用数字 0 和 1 表示各次掷硬币试验的结果的好处. 如果用数字 -1 和 1 分别表示试验结果的反面和正面，那么掷 n 次硬币出现正面的次数 ξ 的表达式就会变得很复杂.

教学中，也可以通过上面的例子引出随机变量的定义，让学生思考能不能用其他方法（不用随机变量）表示出现正面的次数和各次试验结果之间关系，从而体会引入随机变量的意义.

教科书只是通过实例给出了随机变量的描述性定义. 为使学生更好地理解随机变量的概念，教科书通过“思考”栏目，提出“随机变量和函数有类似的地方吗？”引导学生把随机变量和函数进行类比，使他们了解随机变量的概念实际上也可以看作是函数概念的推广.

引入随机变量的目的是为了研究随机现象，那么如何通过随机变量表示所关心的随机事件呢？为了便于理解，教科书通过具体例子介绍用随机变量表示随机事件的方法. 在第 45 页次品件数 X 的讨论中，事件 $\{X=0\}$，$\{X=4\}$ 和 $\{X<3\}$ 是一种简化的表示方式，事实上，

$$\{X=0\}=\{0\}，\{X=4\}=\{4\}，\{X<3\}=\{0，1，2，3，4\}.$$

更一般地，用 Ω 表示所有可能出现的试验结果，则对于任何实数 a 和 b，$\{X=a\}$ 相当于 $\{\omega\in\Omega：X(\omega)=a\}$，即一切满足条件 $X(\omega)=a$ 的试验结果 ω 所构成的随机事件；$\{X<a\}$ 相当于 $\{\omega\in\Omega：X(\omega)<a\}$，即一切满足条件 $X(\omega)<a$ 的试验结果 ω 所构成的随机事件；$\{a\leqslant X<b\}$ 相当于

$\{\omega\in\Omega: a\leqslant X(\omega)<b\}$，即一切满足条件 $a\leqslant X(\omega)<b$ 的试验结果 ω 所构成的随机事件……

在离散型随机变量的描述性定义中，"值可以一一列出"的描述性语言很容易理解，但并不严格. 离散型随机变量的严格定义为：若随机变量 X 的取值是有限的或可列的，就称随机变量 X 为离散型随机变量. 这里没有采用严格定义的原因是避免涉及"可列"的概念. 教科书列举了一些离散型随机变量的例子，其中包括能够取无穷多个不同值的离散型随机变量 Y（即某网页在 24 小时内被浏览的次数）.

为了使学生集中注意力理解概念，教科书以仅取有限个不同值的随机变量为载体介绍与离散型随机变量有关的概念，并在边框中说明后面所涉及的离散型随机变量的取值只有有限个不同的值，教学中不要作过多的扩展.

教科书通过"思考"栏目，提出"电灯泡的寿命 X 是离散型随机变量吗?"引导学生思考，除了离散型随机变量外还有其他类型的随机变量. 进一步地，教科书还通过这个问题的讨论，引导学生体会，在实际应用中如何根据实际问题恰当地定义随机变量，以达到事半功倍的效果. 这里，还可以引导学生思考 $\{X<1\ 000\}$ 和 $\{X\geqslant 1\ 000\}$ 的含义，进一步体会用随机变量表示随机事件的方法.

2.1.2 离散型随机变量的分布列

1. 分布列的概念

引入随机变量的目的是研究随机现象发生的统计规律，即所有随机事件发生的概率. 那么，如何通过随机变量来刻画这些规律？教科书通过掷骰子试验的例子来展示刻画的方法，并从中概括出离散型随机变量分布列的概念.

教科书第 46 页的边框中指出："离散型随机变量的分布列完全描述了由这个随机变量所刻画的随机现象."因此，分布列对于刻画随机现象是非常重要的. 这里，若随机变量记为 X，"由这个随机变量所刻画的随机现象"是指所有形如 $\{X\in A\}$ 的随机事件，即事件 $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in A\}$，其中 A 是一个实数集合. 在实际操作过程中，人们习惯上用 $P(X\in A)$ 表示随机事件 $\{X\in A\}$ 的概率. 例如，在掷骰子试验中，当 $A=\{2, 4, 6\}$ 时，$\{X\in A\}=\{X$ 为偶数$\}$，$P(X\in\{2, 4, 6\})$ 为事件 $\{X$ 为偶数$\}$ 的概率；当 $A=\{1, 2\}$ 时，$\{X\in A\}=\{X<3\}$，$P(X\in\{1, 2\})$ 或 $P(X<3)$ 为事件 $\{X<3\}$ 的概率.

若 X 的分布列为

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1, \cdots, n,$$

则随机事件 $\{X\in A\}$ 的概率为

$$P(X\in A)=\sum_{i: x_i\in A} p_i,$$

即由随机变量 X 所刻画的随机现象的概率分布规律可以完全由其分布列所决定. 例如，在掷骰子的试验中，当 $A=\{2, 4, 6\}$ 时，

$$P(X\in A)=\sum_{i=2,4,6} p_i=p_2+p_4+p_6=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2};$$

当 $A=\{1, 2\}$ 时，

$$P(X\in A)=\sum_{i=1,2} p_i=p_1+p_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

2. 分布列的表示法

教科书对比函数的几种表示方法给出了离散型随机变量的分布列的几种表示方法. 与函数的研究一样，教学中可以引导学生比较不同的分布列表示方法的优缺点，体会根据具体问题选择适当的表示方法.

(1) 表格法

用表格的形式可以把离散型随机变量 X 的分布列表示为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

在这种表示方法中，习惯上是按 X 的取值从小到大来列表，即 $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$，以便于和分布列的图象表示相对应，也便于计算分布函数（教科书中并没有涉及分布函数的概念，感兴趣的老师可以参考概率论方面的书籍）.

有的书上采用矩阵的形式把分布列表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

并称这个矩阵为随机变量 X 的密度矩阵. 教学中没有必要引入密度矩阵的概念，这里只是为老师查阅资料的方便而给出其定义.

用表格形式表示分布列的优点是能直观得到随机变量 X 取各个不同值的概率，缺点是当 n 比较大时，不容易制作表格，也不容易从表中查取需要的概率.

(2) 解析式法

用解析式可以把分布列表示为

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

教学中要强调下标 i 的变化范围，以引起学生的注意，否则容易产生误解. 例如，当随机变量 X 表示掷骰子试验所出现的点数时，如果把分布列表示为

$$P(X=i)=\frac{1}{6},$$

则可以认为

$$P(X=7)=\frac{1}{6}.$$

显然，这个表达式是错误的. 因为在这个试验中，$\{X=7\}=\varnothing$，为不可能事件.

用解析式表示离散型随机变量 X 的分布列的优点是能精确表达 X 取各个不同值的概率，便于应用数学工具对这些概率值进行分析，缺点是不直观.

(3) 图象法

用图象的形式可以把分布列表示为

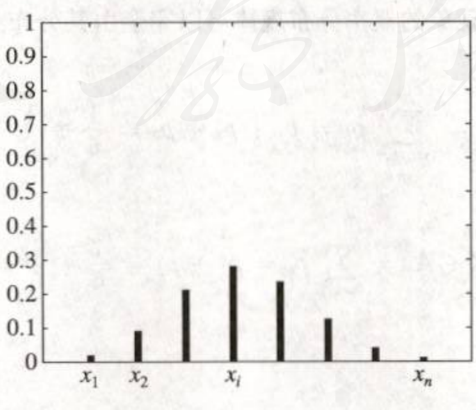


图 2.1-1

其中横坐标 x_i 上小柱体的高度为 $p_i=P(X=x_i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$

用图象表示离散型随机变量 X 的分布列的优点是直观表现 X 取各个不同值的概率，缺点是不能精确表示这些概率.

3. 分布列的性质

若离散型随机变量 X 的可能取值为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,$$

其分布列为

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则有如下两个性质：

(1) $p_i \geqslant 0$，$i=1$，2，$\cdots$，n；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

根据概率的性质不难给出上面两条性质的证明.

事实上，对任何事件 D，有 $0 \leqslant P(D) \leqslant 1$. 特别地，取 $D=\{X=x_i\}$，则有

$$p_i=P(X=x_i)=P(D)\geqslant 0,$$

即(1)成立.

因为 $\{X=x_1\}$，$\{X=x_2\}$，$\cdots$，$\{X=x_n\}$ 是两两互斥的事件，并且

$$\{X=x_1\}\cup\{X=x_2\}\cup\cdots\cup\{X=x_n\}=\Omega,$$

注意到必然事件的概率为 1，重复利用概率的加法公式可得

$$1=P(\Omega)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i,$$

即(2)成立.

在实际应用或解题过程中，如果求出的离散型随机变量的分布列不满足这两条性质，就说明计算过程中存在错误；反之，并不能证明所得到的分布列一定正确. 这可以从习题 2.1A 组第4 题得到验证. 教学中，要提醒学生注意利用这两条性质判断计算过程存在错误的方法.

4. 两点分布

教科书通过例子给出了两点分布的概念.

两点分布是最简单的离散型随机变量，它是二项分布的基础，也是二项分布的一个特例，因为 n 个独立的两点分布的和服从二项分布. 教学中，要多举一些例子，也可以让学生自己举例，以帮助学生理解两点分布模型的含义.

如果一个随机试验只有两个可能的结果，那么就可以用两点分布随机变量来研究它. 为此，只要定义一个随机变量，使其中一个结果对应于 1，称该结果为“成功”；另一个结果对应于 0，称该结果为“失败”. 这样就得到了描述该随机试验的服从两点分布的随机变量.

教学中要提醒学生注意，只取两个不同值的随机变量并不一定服从两点分布. 下面举例说明：

如果随机变量 X 的分布列由下表给出，它服从两点分布吗？

X	2	5
P	0.3	0.7

答案是不服从两点分布，因为 X 的取值不是 0 或 1.

不过，虽然随机变量 X 不服从两点分布，但可以通过适当的变换把它变成两点分布. 事实上，令

$$Y=\begin{cases}0, & X=2,\\ 1, & X=5,\end{cases}$$

则随机变量 Y 服从两点分布.

在有多个结果的随机试验中，如果我们只关心一个随机事件是否发生，就可以利用两点分布来研究它. 例如在掷骰子试验中，有 6 个可能的结果，如果我们只关心出现的点数是否小于 4，则可以通过随机变量

$$X=\begin{cases}0，\text{如果出现的点数小于 } 4，\\ 1，\text{如果出现的点数不小于 } 4，\end{cases}$$

来研究“出现的点数小于 4”与“出现的点数不小于 4”的概率分布规律. 事实上，事件 $\{X=0\}$ 和事件 $\{X=1\}$ 分别表示“出现的点数小于 4”和“出现的点数不小于 4”，而 X 服从两点分布，成功概率为 0.5.

总之，两点分布不仅可以用来研究只有两个结果的随机试验的概率分布规律，也可以用于研究某一随机事件是否发生的概率分布规律.

5. 超几何分布及其应用

与两点分布一样，教科书借助例题给出超几何分布的概念.

(1) 例 2 的教学分析

本例的教学可分如下三步：

第一步，提出问题，例如“X 是随机变量吗?”“它是离散型随机变量吗?”“它取哪些值?”以引导学生回顾离散型随机变量的知识.

第二步，利用古典概率的计算公式和计数原理计算 X 取每个值的概率，并用表格形式给出 X 的分布列. 这里要提醒学生注意，分布列中不计算出具体数值而用组合系数来表示相应的概率，可以使我们比较容易地发现分布列的规律，为下面引入超几何分布作铺垫. 这是数学研究中经常采用的“技术”，在数列、解析几何等许多内容的学习中都用过这种“技术”. 分布列的具体计算结果是

X	0	1	2	3
P	0.856 00	0.138 06	0.005 88	0.000 06

计算可以使用科学计算器，保留的小数不能太少，否则 $\{X=3\}$ 的概率将近似为 0. 另外，要注意在四舍五入时要保证概率的和为 1.

第三步，根据分布列计算具体随机事件的概率. 除了计算教科书中给出的随机事件“至少取到 1 件次品”外，还可以引导学生自己构建一些随机事件. 例如“至少取到 2 件次品”“取到奇数件次品”等，再根据分布列计算相应的概率.

(2) 一般超几何分布模型教学中要注意的问题

① 可以借助例 2 中的分布列表，引导学生观察其中的规律，再启发他们把这种规律推广到一般情形，即求出从含有 M 件次品的 $N(N\geqslant M)$ 件产品中任取 n 件，取到的次品数 X 的分布列.

② 要注意解释超几何分布的引入背景. 教科书中提到：“在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 4 件，其中恰有 X 件次品……”这里的“任取 4 件”等价于从所有的产品中依次不放回地任取 4 件.

③ 引导学生思考在一般情况下表示次品件数的随机变量 X 的取值范围是什么，以得到分布列的完整的解析表达式

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

其中 $m=\min\{M,\ n\}$. 这里要强调标明随机变量取值范围.

因为共取出 n 件产品，所以其中的次品数 X 不会超过 n；又因为 N 件产品中一共仅有 M 件次品，所以取出的产品中次品数 X 也不会超过 M. 因此，X 可能取的最大值为 $m=\min\{M, n\}$. 在具体数字中学生很容易理解这个问题，但用字母表示时可能会忽略这个问题.

另外，还要提醒学生注意，这里还假定了取出的产品数不超过合格品总数，即 $n\leqslant N-M$. 如果没有这个假定，随机变量 X 的取值范围应是 s，$s+1$，$s+2$，…，m，其中 $m=\min\{M, n\}$，$s=\max\{0, n-(N-M)\}$. 例如共有 10 件产品，其中次品数为 6，从中取出 5 件产品，则取出的产品中次品数 X 的取值范围是 1，2，3，4，5.

④在分布列的解析表达式中，各个字母含义在不同背景之下会有所不同，例 2 和例 3 说明了这一点.

⑤超几何分布有广泛应用. 例如它可以用来描述产品抽样中的次品数的分布规律，也可用来研究学生熟悉的不放回摸球游戏中的某些概率问题.

(3) 例 3 的教学建议

本例的教学中，关键是引导学生把这个问题与取产品的问题类比，从中发现两个问题在本质上的一致性，从而用超几何分布来描述这个取球问题.

实际上，球的总数 30 可与产品总数 N 对应，红球数 10 可与产品中总的次品数 M 对应，一次从中摸出 5 个球就是 $n=5$，这 5 个球中红球的个数 X 是一个离散型随机变量，它服从超几何分布. X 可能的取值是 0，1，2，3，4，5. 知道了这些对应关系后，用超几何分布模型就很容易解决这个问题了.

(4) 关于第 49 页的思考题

这是一个开放性问题，它要求根据中奖概率设计中奖规则，所以问题的答案不唯一. 比如用摸球的方法设计游戏，应包括每种颜色的球各是多少，从中取几个球，摸到几个红球才中奖等，也就是说 M，N，n，$\{X\geqslant k\}$ 中的 k 等都需要自己给出.

例如，可以先固定 $N=30$，$M=10$，$n=5$，通过调整 k 达到目的. 考虑 k 的取值，因为从中摸出 5 个球，其中有 2 个红球的概率为

$$\frac{C_{10}^{2}C_{30-10}^{5-2}}{C_{30}^{5}}\approx 0.360,$$

所以至少摸到 2 个红球的概率为

$$P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X\geqslant 3)\approx 0.360+0.191=0.551,$$

故游戏规则定为至少摸到 2 个红球就中奖，中奖的概率大约为 55.1%.

在准备联欢会时，组织者需要决策买多少奖品. 如果奖品买得太多会造成不必要的浪费，买得太少则获奖同学会领不到奖品. 为了使得购买的奖品数与实际中奖的数量基本吻合（实际中应该是略有多余），就需要计算中奖概率，并据此设计中奖的规则.

四、教学设计案例

2.1.1 离散型随机变量（第一课时）

1. 教学任务分析

随机变量在概率统计研究中起极其重要的作用，它通过实数空间来刻画随机现象，从而使得更多的数学工具有了用武之地. 随机变量是连接随机现象和实数空间的一座桥梁，它使得我们可以在实数空间上研究随机现象. 离散型随机变量是最简单的随机变量，本节通过离散型随机变量展示用实数空间刻画随机现象的方法.

本节课的教学任务是引导学生通过实例初步了解随机变量的作用，用它表达随机事件，初步学会恰当地定义随机变量以描述所感兴趣的实际问题.

2. 教学重点与难点

重点：随机变量、离散型随机变量的概念，以及在实际问题中如何恰当地定义随机变量.

难点：对引入随机变量目的的认识，了解什么样的随机变量便于研究.

3. 教学基本流程

创设情境，引出随机变量概念

↓

用随机变量表示随机事件

↓

随机变量在实际问题中的应用

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
（1）阅读第44页第一个“思考”，你能得出答案吗？	设置问题情境，引出如何用数字表示随机试验结果问题，为归纳出随机变量概念做准备.	教师提出问题，学生阅读、思考并回答. 师生共同总结：掷一枚硬币的试验结果可以用数字来表示，但是表达的方式不唯一. 补充：一位篮球运动员3次投罚球的得分结果可以用数字表示吗？
（2）任何随机试验的所有结果都可以用数字表示吗？	引导学生由前面的例子归纳出随机变量的概念.	教师提出问题，学生思考并回答. 教师注意引导学生归纳到肯定的答案上．然后归纳出这种表示的本质是建立了一个从试验结果到实数的对应关系，进而描述性地引出随机变量的概念.
（3）对于掷骰子试验，可以定义不同的随机变量来表示这个试验的结果吗？	使学生了解对于同一个随机试验，其结果可以用不同的随机变量来表示.	教师提出问题，学生思考并回答. 当学生们得到正确答案后，教师提出问题：“其他的随机试验的结果也可以用不同的随机变量表示吗？”引导学生得到一般性的结论.
（4）在掷骰子试验中，如果我们仅关心掷出的点数是否为偶数，应该如何定义随机变量？	使学生了解应用随机变量解决实际问题时应该注意的问题.	教师提出问题，学生思考并回答. 必要时，教师可提示学生这里仅关心“掷出的点数是否为偶数”，引导学生构造尽可能简单的随机变量．如果学生有困难，教师可给出结论，即用随机变量 $Y=\begin{cases}0, & \text{掷出奇数点},\\1, & \text{掷出偶数点},\end{cases}$ 来研究问题“掷出的点数是否为偶数”．与掷出的点数X相比较，随机变量Y的取值更少，构造更简单. 教师总结出一般的结论：在实际应用中应该选择有实际意义、尽量简单的随机变量来表示随机试验的结果.
（5）在掷骰子试验中，前面定义的随机变量Y能够表示“掷出1点”的试验结果吗？随机变量X能表示这个事件吗？	使学生了解：对于特定的随机变量，它并不一定能够刻画所有的试验结果.	教师提问题，学生思考并回答. 教师归纳出一般的结论：对于特定的随机变量，它并不一定能够刻画所有的试验结果.

续表

问　题	设计意图	师生活动
(6) 阅读第 44 页第二个“思考”，你能得到答案吗？	通过与函数类比，使学生辨析和理解随机变量概念.	教师提出问题，学生思考并回答. 必要时教师可提醒学生们回忆函数概念，和随机变量作比较，给出答案.
(7) 在介绍抽取 4 件产品的例子后，提出问题：“能够通过随机变量 X 来研究随机事件吗？”	强调引入随机变量的目的，引导学生学习用随机变量表示随机事件的方法.	教师提问，引导学生分析问题，必要时可提示回答这个问题的关键在于能否用 X 表示所要研究的随机事件，如“抽出 0 件次品”“抽出 4 件次品”等. 学生思考并回答.
(8) 从取值的角度来看，前面所涉及的随机变量有什么特点？	引导学生归纳离散型随机变量的概念.	教师提问，学生思考并回答. 教师归纳出离散型随机变量的概念.
(9) 你能举出一些离散型随机变量的例子吗？	使学生了解离散型随机变量与现实生活密切相关.	教师提问题，学生思考，多个学生举例. 补充例题：24 小时内到达某公共汽车站的人数；在本年级任意抽取 10 名同学中戴眼镜的人数.
(10) 阅读第 45 页“思考”，你能得到答案吗？	使学生了解除了离散型随机变量外，还有其他类型的随机变量.	教师提问题，学生思考并回答.
(11) 如果规定寿命在 1 500小时以上的灯泡为一等品；寿命在 1 000 到 1 500 之间的为二等品；寿命为 1 000 小时之下的为不合格品. 如果我们关心灯泡是否为合格品，应该如何定义随机变量？ 如果我们关心灯泡是否为一等品或二等品，应该如何定义随机变量？ 如果我们关心灯泡的使用寿命，应该如何定义随机变量？	训练学生根据实际问题需要恰当地定义随机变量的能力.	教师提问题，学生思考并回答. 教师引导到正确的答案. 当关心“灯泡是否为合格品”时，可定义随机变量 $$X=\begin{cases}0, & \text{灯泡为不合格品,}\\ 1, & \text{否则.}\end{cases}$$ 当关心“灯泡是否为一等品或二等品”时，可定义随机变量 $$Y=\begin{cases}1, & \text{灯泡为一等品,}\\ 2, & \text{灯泡为二等品,}\\ 3, & \text{否则.}\end{cases}$$ 当关心“灯泡的使用寿命”时，可定义随机变量 Z 为灯泡的使用寿命.
(12) 在上面的问题中，所定义随机变量的规律是什么？	引导学生体会根据实际问题定义随机变量的一般原则.	教师提问，学生思考并回答. 教师归纳答案：所定义的随机变量应该有实际意义，所定义的随机变量取值应该和所感兴趣的结果个数形成一对一的关系.
(13) 第 45 页练习 1.	巩固本节课学习的知识.	教师可以根据问题的背景提出问题，以帮助学生理解随机变量所能刻画的随机事件. 例如，“问题(2)中的随机变量能够表示随机事件‘第一次点球射进球门’吗？”
(14) 布置作业：教科书第 45 页练习 2.		

5. 两点说明

(1) 概念教学要注意采用“归纳式”，一定要让学生经历概念的形成过程，切忌采用由老师自己叙述概念条文、解释概念，然后讲解例题，最后让学生模仿练习的教学模式. 因此，在本节课的教学中，要以不同的实际问题为导向，引导学生分析问题的特点，归纳出这些问题的共性，提炼出随机变量的概念.

(2) 在教学的过程中要注意如何恰当地使用随机变量描述所关心的实际问题. 这里的“恰当”，指的是便于研究的随机变量，即尽可能简单的随机变量，亦即取值个数尽量少的随机变量.

五、习题解答

练习（第 45 页）

1. (1) 能用离散型随机变量表示. 可能的取值为 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12.

(2) 能用离散型随机变量表示. 可能的取值为 0，1，2，3，4，5.

(3) 不能用离散型随机变量表示.

说明　本题的目的是检验学生是否理解离散型随机变量的含义. 在(3)中，实际值与规定值之差可能的取值是在 0 附近的实数，既不是有限个值，也不是可数个值.

2. 可以举的例子很多，这里给出几个例子：

例 1　某公共汽车站一分钟内等车的人数；

例 2　某城市一年内下雨的天数；

例 3　一位跳水运动员在比赛时所得的分数；

例 4　某人的手机在 1 天内接收到电话的次数.

说明　本题希望学生能观察生活中的随机现象，知道哪些量是随机变量，哪些随机变量又是离散型随机变量.

练习（第 49 页）

1. 设该运动员一次罚球得分为 X，X 是一个离散型随机变量，其分布列为

X	0	1
P	0.3	0.7

说明　这是一个两点分布的例子，投中看作试验成功，没投中看作试验失败. 通过这样的例子可以使学生理解两点分布是一个很常用的概率模型，实际中大量存在. 虽然离散型随机变量的分布列可以用解析式的形式表示，但当分布列中的各个概率是以数值的形式给出时，通常用列表的方式表示分布列更为方便.

2. 抛掷一枚质地均匀的硬币两次，其全部可能的结果为 {正正，正反，反正，反反}. 正面向上次数 X 是一个离散型随机变量，

$$P(X=0)=P(\{\text{反反}\})=\frac{1}{4}=0.25,$$

$$P(X=1)=P(\{\text{正反}\}\cup\{\text{反正}\})=\frac{2}{4}=0.5,$$

$$P(X=2)=P(\{\text{正正}\})=\frac{1}{4}=0.25.$$

因此 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

说明　这个离散型随机变量虽然简单，但却是帮助学生理解随机变量含义的一个很好的例子. 试验的全部可能结果为 {正正，正反，反正，反反}，随变量 X 的取值范围为{0，1，2}，对应关系为

正正 → 2　　　正反 → 1　　　反正 → 1　　　反反 → 0

在这个例子中，对应于 1 的试验结果有两个，即"正反"和"反正"，因此用随机变量 X 不能表示随机事件{正反}．这说明对于一个具体的随机变量而言，有时它不能表示所有的随机事件．

可以通过让学生们分析下面的推理过程存在的问题，进一步巩固古典概型的知识．如果把 X 所有取值看成是全体基本事件，即 $\Omega=\{0,1,2\}$．根据古典概型计算概率的公式有

$$P(X=1)=P(\{1\})=\frac{1}{3}.$$

这与解答的结果相矛盾．原因是这里的概率模型不是古典概型，因此上面式中的最后一个等号不成立．详细解释如下：虽然 Ω 中只含有 3 个基本事件，但是出现这 3 个基本事件不是等可能的，因此不能用古典概型计算概率的公式来计算事件发生的概率．

3. 设抽出的 5 张牌中包含 A 牌的张数为 X，则 X 服从超几何分布，其分布列为

$$P(X=i)=\frac{C_4^iC_{48}^{5-i}}{C_{52}^5},\ i=0,1,2,3,4.$$

因此抽出的 5 张牌中至少有 3 张 A 的概率为

$$P(X\geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)\approx 0.002.$$

说明　从 52 张牌任意取出 5 张，这 5 张牌中包含 A 的个数 X 是一个离散型随机变量．把 52 张牌看成是 52 件产品，把牌 A 看成次品，则 X 就成为从含有 4 件次品的 52 件产品中任意抽取 5 件中的次品数，因此 X 服从超几何分布．

本题的目的是让学生熟悉超几何分布模型，体会超几何分布在不同问题背景下的表现形式．当然本题也可以用古典概型去解决，但不如直接用超几何分布简单．另外，在解题中分布列是用解析式表达的，优点是书写简单，一目了然．

4. 两点分布的例子：掷一枚质地均匀的硬币出现正面的次数 X 服从两点分布；射击一次命中目标的次数服从两点分布．

超几何分布的例子：假设某鱼池中仅有鲤鱼和鲑鱼两种鱼，其中鲤鱼 200 条，鲑鱼 40 条，从鱼池中任意取出 5 条鱼，这 5 条鱼中包含鲑鱼的条数 X 服从超几何分布．

说明　通过让学生举例子的方式，帮助学生理解这两个概率模型．

习题 2.1（第 49 页）

A 组

1. (1) 能用离散型随机变量表示．设能遇到的红灯个数为 X，它可能的取值为 0，1，2，3，4，5．

事件$\{X=0\}$表示 5 个路口遇到的都不是红灯；事件$\{X=1\}$表示路过的 5 个路口其中有 1 个路口遇到红灯，其他 4 个路口都不是红灯；事件$\{X=2\}$表示路过的 5 个路口其中有 2 个路口遇到红灯，其他 3 个路口都不是红灯；事件$\{X=3\}$表示路过的 5 个路口其中有 3 个路口遇到红灯，剩下 2 个路口都不是红灯；事件$\{X=4\}$表示路过的 5 个路口其中有 4 个路口遇到红灯，另外 1 个路口不是红灯；事件$\{X=5\}$表示路过的 5 个路口全部都遇到红灯．

(2) 能用离散型随机变量表示．定义

$$X=\begin{cases}1，成绩不及格，\\2，成绩及格，\\3，成绩中，\\4，成绩良，\\5，成绩优，\end{cases}$$

则 X 是一个离散型随机变量，可能的取值为 1，2，3，4，5.

事件 $\{X=1\}$ 表示该同学取得的成绩为不及格；事件 $\{X=2\}$ 表示该同学取得的成绩为及格；事件 $\{X=3\}$ 表示该同学取得的成绩为中；事件 $\{X=4\}$ 表示该同学取得的成绩为良；事件 $\{X=5\}$ 表示该同学取得的成绩为优.

说明 本题是考查学生是否理解离散型随机变量的含义. 在（2）中，需要学生建立一个对应关系，因为随机变量的取值一定是实数，但这个对应关系不是唯一的，只要是从五个等级到实数的一一映射即可.

2. 某同学跑 1 km 所用时间 X 不是一个离散型随机变量. 如果我们只关心该同学是否能够取得优秀成绩，可以定义如下的随机变量：

$$Y=\begin{cases}0，跑\ 1\ \text{km}\ 所用时间>4\text{min}，\\1，跑\ 1\ \text{km}\ 所用时间\leqslant 4\ \text{min}，\end{cases}$$

它是离散型随机变量，且仅取两个值：0 或 1.

事件 $\{Y=1\}$ 表示该同学跑 1 km 所用时间小于等于 4 min，能够取得优秀成绩；事件 $\{Y=0\}$ 表示该同学跑 1 km 所用时间大于 4 min，不能够取得优秀成绩.

说明 考查学生在一个随机现象中能否根据关心的问题不同定义不同的随机变量，以简化问题的解答. 可以与教科书中电灯泡的寿命的例子对比，基本思想是一致的.

3. 一般不能. 比如掷一枚质地均匀的硬币两次，用随机变量 X 表示出现正面的次数，则不能用随机变量 X 表示随机事件{第 1 次出现正面且第 2 次出现反面}和{第 1 次出现反面且第 2 次出现正面}. 因为 $\{X=1\}$ ={第 1 次出现正面且第 2 次出现反面}∪{第 1 次出现反面且第 2 次出现正面}，所以这两个事件不能分别用随机变量 X 表示.

说明 一个随机变量是与一个事件域相对应的，一个事件域一般是由部分事件组成，但要满足一定的条件. 对离散型随机变量，如果它取某个值是由几个随机事件组成，则这几个随机事件就不能用随机变量表示，比如从一批产品中依次取出几个产品，用 X 表示取出的产品中次品的个数，这时我们不能用 X 表示随机事件 {第 i 次取出次品，其他均为合格品}.

4. 不正确，因为取所有值的概率和不等于 1.

说明 考查学生对分布列的两个条件的理解，每个概率不小于 0，其和等于 1，即

（1）$p_i\geqslant 0$，$i=1，2，\cdots，n$；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

5. 射击成绩优秀可以用事件 $\{X\geqslant 8\}$ 表示，因此射击优秀的概率为

$$P(X\geqslant 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.28+0.29+0.22=0.79.$$

说明 本题知识点是用随机变量表示随机事件，并通过分布列计算随机事件的概率.

6. 用 X 表示该班被选中的人数，则 X 服从超几何分布，其分布列为

$$P(X=i)=\frac{C_4^iC_{26}^{10-i}}{C_{30}^{10}}，i=0，1，2，3，4.$$

该班恰有 2 名同学被选到的概率为

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_{26}^8}{C_{30}^{10}}=\frac{\dfrac{4!}{2!\times 2!}\times\dfrac{26!}{8!\times 18!}}{\dfrac{30!}{10!\times 20!}}=\frac{190}{609}\approx 0.312.$$

说明 本题与 49 页练习的第 3 题类似，希望学生在不同背景下能看出超几何分布模型.

B 组

1. (1) 设随机抽出的 3 篇课文中该同学能背诵的篇数为 X，则 X 是一个离散型随机变量，它可能的取值为 0，1，2，3，且 X 服从超几何分布，分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_6^0 C_4^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_6^3 C_4^0}{C_{10}^3}$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(2) 该同学能及格表示他能背出 2 或 3 篇，故他能及格的概率为

$$P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=0.667.$$

说明 本题是为了让学生熟悉超几何分布模型，并能用该模型解决实际问题.

2. 用 X 表示所购买彩票上与选出的 7 个基本号码相同的号码的个数，则 X 服从超几何分布，其分布列为

$$P(X=i)=\frac{C_7^i C_{29}^{7-i}}{C_{36}^7},\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

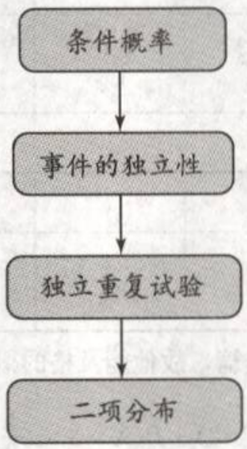
至少中三等奖的概率为

$$P(X\geqslant 5)=\frac{C_7^5 C_{29}^2}{C_{36}^7}+\frac{C_7^6 C_{29}^1}{C_{36}^7}+\frac{C_7^7 C_{29}^0}{C_{36}^7}=\frac{97}{92\ 752}\approx 0.001.$$

说明 与上题类似同样是用超几何分布解决实际问题，从此题的计算结果可以看出至少中三等奖的概率近似为 1/1 000.

2.2 二项分布及其应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 理解 n 次独立重复试验的模型；
2. 理解二项分布模型，并能用它解决一些简单的实际问题.

难点：

1. 理解条件概率的概念；
2. 理解独立性的概念；
3. 利用二项分布模型解决实际问题.

三、编写意图与教学建议

为导出二项分布，需要条件概率和事件独立性的概念，所以本节第一部分介绍条件概率的概念，第二部分介绍事件独立性的概念，第三部分介绍独立重复试验与二项分布.

条件概率是比较难理解的概念. 教科书利用“抽奖”这一典型实例，以无放回抽取奖券的方式，通过比较抽奖前和在第一名同学没有中奖的条件下，最后一名同学中奖的概率，从而引入条件概率的概念，给出两种计算条件概率的方法. 同时指出条件概率具有概率的性质，并给出了条件概率的两个性质.

利用抽奖实例，以有放回抽样的方式，通过计算在第一名同学没有中奖的条件下，最后一名同学中奖的概率，可以发现它与在抽奖前计算最后一名同学中奖的概率相等. 这就是事件独立性概念的直观背景，借助它就比较容易理解事件独立性概念.

利用 n 次重复掷硬币的试验给出 n 次重复试验的描述，说明在 n 次重复试验中，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

有了这个公式以后，就可以导出二项分布的公式.

教学中，要通过实际问题的直观含义和具体计算结果的对比，帮助学生了解条件概率、事件的独立性以及二项分布的概念.

2.2.1 条件概率

条件概率的概念在概率理论中占有十分重要的地位，本教科书中只是简单介绍条件概率的初等定义，更抽象的条件概率定义涉及测度论的知识，感兴趣的老师可参考有关概率与测度方面的书籍. 为了便于学生理解，教科书以简单事例为载体，通过逐步探究，引导学生体会条件概率的思想.

1. 关于“抽奖”问题

日常生活中经常遇到抽奖的问题. 教科书以抽奖为背景，提出“探究”：“三张奖券中只有一张能中奖，现分别由三名同学不放回地抽取，问最后一名同学抽到中奖奖券的概率是否比前两名同学小.”为引出条件概率作铺垫. 教学中，可以先让学生凭直观感觉回答问题，然后再利用古典概型分别计算三名同学的中奖概率，从而给出问题的正确答案，即最后一名同学抽到中奖奖券的概率与其他同学相同. 这里，“分别由三名同学不放回地抽取”是指每个同学都在抽剩下的奖券中等可能地抽取一张，教学中要让学生特别注意这一点. 解决“探究”需要用古典概型的知识，这也是复习古典概型知识的过程.

接着，教科书进一步提出“思考”：“如果已经知道第一名同学没有抽到中奖奖券，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率又是多少?”

在已知第一名同学没有抽到中奖奖券的条件下，所有可能的抽取结果局限于事件

$$A=\{X_1X_2Y,\ X_1YX_2,\ X_2X_1Y,\ X_2YX_1\}$$

的范围之内，即在此条件下，基本事件只有四个：X_1X_2Y，X_1YX_2，X_2X_1Y，X_2YX_1. 而根据问题的背景知道，这四个基本事件出现的概率相等，从而可以利用古典概型计算概率的公式来计算“在第一名同学没有抽到中奖奖券的条件下，最后一名同学中奖”的概率.

上面分析的关键在于正确理解“已知第一名同学没有抽到中奖奖券”的含义，该条件相当于缩小了基本事件的范围. 在没有这个条件的限制下，有六个基本事件：X_1X_2Y，X_1YX_1，X_2X_1Y，X_2YX_1，YX_1X_2，YX_2X_1. 在这个条件限制下，YX_1X_2 和 YX_2X_1 一定不会发生，从而只可能出现四个基本事件：X_1X_2Y，X_1YX_2，X_2X_1Y，X_2YX_1.

在 52 页问：“已知第一名同学的抽奖结果为什么会影响最后一名同学抽到中奖奖券的概率呢?”其答案就是知道了第一名同学的抽奖结果会缩小基本事件的范围，使基本事件数减少了. 例如，如果知道第一名同学抽到了中奖奖券，则基本事件只有 YX_1X_2 和 YX_2X_1，从而最后一名同学不可能抽到中奖奖券，在此条件下最后一名同学中奖的概率为 0. 这也就是导致 $P(B)\neq P(B|A)$ 的原因. 这一解释为介绍两个事件的独立性概念做了铺垫.

2. 条件概率的定义

为了从抽奖案例中提取出条件概率的概念，教科书通过“思考”栏目提出：“对于上面的事件 A 和 B，$P(B|A)$与它们的概率有什么关系呢?”

局限在古典概型上，前面计算 $P(B|A)$的一般公式为

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}.$$

教学中，应强调这一公式是以古典概型为前提的，不适用于其他的概率模型，但其思想方法可以推广. 可以让学生探讨：“如何把上面计算 $P(B|A)$的思想用于其他的概率模型中?”以得到更为一般的与计数

无关的公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

进而引入条件概率的定义.

3. 条件概率的计算

计算事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，有两种方法：

(1) 利用定义计算. 先分别计算概率 $P(AB)$ 和 $P(A)$，然后将它们相除得到条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

(2) 利用缩小基本事件范围的观点计算. 在这种观点下，原来的基本事件全体 Ω 缩小为已知的条件事件 A，原来的事件 B 缩小为 AB. 例如在抽奖案例中，在已知事件 $A=\{X_1X_2Y,\ X_1YX_2,\ X_2X_1Y,\ X_2YX_1\}$ 发生的情况下，相当于基本事件全体缩小成为 A，事件 B 缩小为 AB. 而 A 中仅包含有限个基本事件，每个基本事件发生的概率相等，从而可以在缩小的基本事件范围内利用古典概型计算概率的公式计算条件概率，即事件 B 的条件概率

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)},$$

这里 $n(A)$ 和 $n(AB)$ 的计数是基于缩小的基本事件范围.

第 (2) 种计算条件概率的方法具有一定的灵活性，应用于非古典概型时条件概率不一定涉及到计数问题.

例如，任意向 $(0,1)$ 区间上投掷一个点，用 x 表示该点的坐标，则

$$\Omega=\{x:0<x<1\}.$$

考虑事件 $A=\left\{x:0<x<\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{x:\frac{1}{4}<x<1\right\}$，则

$$P(B|A)=\frac{m(AB)}{m(A)}=\frac{0.25}{0.5}=0.5,$$

其中 $m(A)$ 和 $m(AB)$ 分别表示区间 A 和 AB 的长度. 这里使用的是第 (2) 种方法，但与古典概型不同的是：对于几何概型问题，限制在 A 的范围内，事件 B 变成 AB，并且各个事件的概率规律仍然满足几何概型的要求，因此还可以用几何概型计算概率的方法来计算在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

4. 条件概率教学中需要注意的问题

(1) 在条件概率的定义中，要强调 $P(A)>0$. 当 $P(A)=0$ 时，不能用现在的方法定义事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，而需要从极限的角度，或更一般地，从测度论的角度来定义.

(2) 对于初学者来说，由于没有理解条件概率的含义，在利用古典概型计算概率的公式

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$$

计算条件概率时，可能会出现的错误是分子用事件 B 包含的基本事件个数 $n(B)$ 代替 $n(AB)$，这时计算的概率会偏大，有时可能会大于 1.

利用条件概率的定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

计算条件概率时，同样要注意分子是事件 AB 发生的概率，而不是事件 B 发生的概率.

(3) 条件概率也是概率，其具体含义为：若事件 A 的概率大于 0，对于任何事件 B 定义

$$P_A(B)=P(B|A),$$

则 P_A 也是一个概率．因此条件概率具有概率的性质，如：

① 任何事件的条件概率取值在 0 和 1 之间；

② 必然事件的条件概率为 1，不可能事件的条件概率为 0；

③ 条件概率也有加法公式：

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A),$$

其中 B 和 C 是两个互斥事件．

事实上，由 B 和 C 互斥知事件 AB 与事件 AC 也互斥，从而

$$P(A(B\cup C))=P((AB)\cup(AC))=P(AB)+P(AC).$$

再由条件概率的定义得

$$P(B\cup C|A)=\frac{P(A(B\cup C))}{P(A)}=\frac{P(AB)+P(AC)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}+\frac{P(AC)}{P(A)}=P(B|A)+P(C|A).$$

5. 例 1 的解释与教学建议

本例的目的在于演示条件概率的两种计算方法，其三个问题的设计有利于引导学生利用条件概率的定义来求解问题(3)中的条件概率．在解答过程中，得到前两个问题的答案后，自然会想到利用条件概率的定义去计算条件概率 $P(B|A)$．问题(3)的解法 2，演示了利用缩小基本事件范围的观点来计算条件概率的方法．

本例的教学中，应注意以下几点：

(1) 把所涉及的事件用字母表示，可以更清楚地表达解题过程．

(2) 应让学生明确，这里的 Ω 表示所有可能的抽取结果，即所有的基本事件．

(3) 也可以用乘法原理计算 $n(\Omega)$，抽取试题的过程可以分两步：第一步，从 5 道题中任意抽取一道，共有 5 种不同的抽取方法；第二步，从剩下的 4 道题中任意抽取一道，共有 4 种不同的抽取方法．于是 $n(\Omega)=5\times4=20$．

(4) 在不增加难度的情况下，本题可以修改为“计算在第 1 次抽到理科题的条件下第 2 次抽到文科题的条件概率”或“在第 1 次抽到文科题的条件下第 2 次抽到理科题的条件概率”．

6. 例 2 的解释与教学建议

本例的背景是储蓄卡的密码问题，通过本例可以使学生进一步熟悉概率和条件概率的性质，并把这些性质用于简化概率和条件概率的计算．

教学中应注意如下问题：

(1) 本题中假定这个人在试密码的过程中，所按密码都不重复，即所输入的最后一位数字都不相同．在这种假设之下，才有 $P(\overline{A}_1A_2)=\frac{9\times1}{10\times9}$，否则 $P(\overline{A}_1A_2)=\frac{9\times1}{10\times10}$；

(2) 注意利用概率的性质（如概率的加法公式等）来简化概率的计算．如在问题 (1) 的解答过程中，把事件 A 用不相容事件 A_1 和 $\overline{A}_1A_2$ 表示，是为了利用概率的加法公式简化事件 A 的概率的计算．当然可以利用加法计数原理和乘法计数原理来计算事件 A 中所含的基本事件的个数，但难度更大．

(3) 在计算事件 A_1 和 $\overline{A}_1A_2$ 的概率时，用的是古典概型知识．实际上，事件 A_1 的概率可以用两

种计算方法：

① 将 0～9 中任意取出的两个数的排列看成是基本事件，其排列中第一个数看成是第一次试的密码的最后一位数字，第二个数看成是第二次试的密码的最后一位数字．这样，基本事件全体就是 $\Omega=\{(i,\ j):0\leqslant i,\ j\leqslant 9,\ i\neq j\}$，进而有 $n(\Omega)=\mathrm{A}_{10}^{2}=10\times 9$.

用乘法计数原理计算事件 A_1 中的基本事件数，可以分两步：第一步，从数字 0～9 中选择正确的密码数字作为第一次选择的数字，共有 1 种取数的方法；第二步，从剩下的 9 个数字中任意取一个数作为第二次选择的数字，共有 9 种取数的方法．因此 $n(A_1)=1\times 9$，进而 $P(A_1)=\frac{1\times 9}{10\times 9}=\frac{1}{10}$.

在这种观点之下，一个基本事件是由两次选择最后一位密码组成，因此 A_1 中的基本事件也是由两次选择最后一位密码的结果，计数过程也分两步来完成．

在本题的解答中，学生可能出现的错误是：因为 A_1 表示“第一次按对密码”，而组成正确密码的最后一位数字仅有一个，因此 $n(A_1)=1$，从而 $P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n(\Omega)}=\frac{1}{10\times 9}$．教学时可以引导学生进行辨析．

② 将第一次可能按的密码的最后一位数字作为基本事件，即可以把基本事件的全体看成 $\Omega=\{i:0\leqslant i\leqslant 9\}$，进而有 $n(\Omega)=10$，并且可以用古典概型计算概率的公式计算事件 A_1 发生的概率．显然 $n(A_1)=1$，因此 $P(A_1)=\frac{1}{10}$.

比较上面两种方法，显然②的方法简单．当用加法公式把事件 A 的概率分解成 $P(A_1)$ 和 $P(\overline{A}_1A_2)$ 后，$P(A_1)$ 的计算既可以用方法①，也可以用方法②；而 $P(\overline{A}_1A_2)$ 的计算只能用①中基本事件．

(4) 引导学生利用条件概率的性质（如条件概率的加法公式等）来简化条件概率的计算．本例问题 (2) 的解答，演示了利用条件概率的加法公式简化计算的过程．

(5) 事件 B 的含义．用 B 表示最后一位按偶数的事件，其含义是如果按一次密码，这一次按偶数，即 $n(B)=5$；如果按两次密码，这两次都按偶数，而且是不重复的两个偶数，即 $n(B)=5\times 4=20$.

(6) 教科书上是利用缩小基本事件范围的方法计算条件概率 $P(A_1|B)$ 和 $P(\overline{A_1}A_2|B)$．比如在计算 $P(A_1|B)$ 时，仅考虑试一次密码的基本事件，$n(B)=5$，$n(A_1B)=1$，所以

$$P(A_1|B)=\frac{n\ (A_1B)}{n\ (B)}=\frac{1}{5};$$

在计算 $P(\overline{A_1}A_2|B)$ 时，要考虑试两次密码的基本事件，$n(B)=5\times 4=20$，$n(\overline{A}_1A_2B)=4\times 1=4$，其中 $\overline{A}_1A_2B$ 表示两次都按偶数，且第一次没有按对而第二次按对的事件，所以

$$P(\overline{A_1}A_2|B)=\frac{n(\overline{A}_1A_2B)}{n(B)}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

2.2.2 事件的相互独立性

1. 两个事件相互独立的概念

在概率论中，独立性也是极其重要的概念，它的主要作用是简化概率计算．本节中引入独立性的概念主要是为了介绍二项分布的产生背景．

教科书在“思考”中提出：“三张奖券中只有一张能中奖，现分别由三名同学有放回地抽取，事件 A 为‘第一名同学没有抽到中奖奖券’，事件 B 为‘最后一名同学抽到中奖奖券’．事件 A 的发生会影响事件 B 发生的概率吗？”即是否有 $P(B|A)=P(B)$？如果 $P(B|A)=P(B)$，则说明事件 A 的发生不会影响事件 B 发生的概率；否则，事件 A 的发生会影响事件 B 发生的概率．

教科书通过分析得出：事件 A 的发生不会影响事件 B 发生的概率，即

$$P(B|A)=P(B),$$

从而得到

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

将上面的结果一般化，就是两个事件相互独立的概念.

教科书上给出了独立性的一个性质：如果事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都相互独立. 其证明如下：

因为事件 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，进而有

$$\begin{aligned}
P(A\overline{B})&=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\
&=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}),\\
P(\overline{A}B)&=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)\\
&=(1-P(A))P(B)=P(\overline{A})P(B),\\
P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A})P(B)\\
&=P(\overline{A})(1-P(B))=P(\overline{A})P(\overline{B}),
\end{aligned}$$

即 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$都相互独立.

2. 教学中应注意的问题

(1) 独立性概念的直观解释：如果事件 A 的发生不会影响事件 B 发生的概率，或者事件 B 的发生不会影响事件 A 发生的概率，则事件 A 与 B 相互独立.

在实际应用中，如果事件 A 和 B 是来自于相同条件下进行的两个随机试验，则这两个事件是相互独立的. 例如，在两次投硬币的试验中，第一次试验的结果与第二次试验的结果相互独立；在有放回抽奖券的试验中，两次不同的抽取结果相互独立. 但是在不放回抽奖券的试验中，第一次抽取的结果和第二次抽取的结果就不是相互独立的，原因是在第二次抽取奖券时，只能抽到第一次抽取后剩下的奖券. 教科书中例 3 就用这种方法判断事件的独立性.

(2) 条件概率的定义与相互独立的定义的比较：在事件 A 与 B 相互独立的定义中，A 与 B 的地位是对称的；在条件概率 $P(B|A)$的定义中，事件 A 和 B 的地位不是对称的，这里要求 $P(A)>0$.

(3) 不能用 $P(B|A)=P(B)$作为事件 A 与事件 B 相互独立的定义，原因是这个等式的适用范围是 $P(A)>0$，否则 $P(B|A)$没有意义. 教科书中相互独立的定义适用任意两个事件 A，B，只要它们满足 $P(AB)=P(A)P(B)$. 事实上，若 $P(A)=0$，由定义可知：A 与任何一个事件都是相互独立的. 因为此时对任意事件 B，$P(AB)=0$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$总是成立的，即概率等于 0 的事件与任何一个事件都是独立的.

因为不可能事件$\varnothing$的概率为 0，所以不可能事件与任何一个事件独立. 而对于必然事件 Ω 与任意事件 B，$P(\Omega B)=P(B)$，$P(\Omega)=1$，因此 $P(\Omega B)=P(\Omega)P(B)$总是成立的，即必然事件与任何一个事件也是相互独立的.

(4) 两个事件相互独立与两个事件互斥这两个概念，初学者容易混淆，建议在教学中要让学生对这两个概念进行比较.

两个事件互斥：$A\cap B=\varnothing$，此时有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 但反过来不成立，即由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，不能推出 $A\cap B=\varnothing$，即不能推出两个事件互斥.

两个事件相互独立等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$.

两个事件互斥有加法公式，即两个事件并的概率等于两个事件概率的和. 两个事件相互独立，表示两个事件交的概率等于两个事件概率的积.

3. 例 3 的说明

此题的目的是让学生体会如何用事件的独立性计算随机事件的概率.

(1) 两个事件的独立性是根据实际抽奖的方式判断的. 第一次的抽奖结果不影响第二次的抽奖结果，所以第一次抽奖的结果和第二次抽奖的结果是相互独立的. 由此可以得到事件 A 和 B 相互独立，事件 A 和 $\overline{B}$ 相互独立.

(2) 因为抽到每个兑奖号码的概率为 0.05，所以每次抽到指定号码的概率均为 0.05.

(3) 注意利用事件的交、并、差等运算计算复杂事件的概率. 例如事件“两次抽奖恰好有一次抽到某一指定号码”可以表示为不相容的两个事件 $A\overline{B}$ 和 $\overline{A}B$ 之并，即表示为 $(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$，进而可以利用概率的加法公式和事件的独立性计算这个事件的概率.

当然也可以用 $A\cup B$ 表示事件“两次抽奖至少有一次抽到某一指定号码”. 而 $A\cup B$ 的对立事件为“两次都没有抽到某一指定号码”，即 $\overline{A}\overline{B}$，利用 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相互独立性得

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.95\times0.95=0.0975.$$

(4) 在最后一问中应用了三个事件两两互斥的加法公式.《数学 3（必修）》中仅给出了两个事件互斥的加法公式，因此在这里要给出解释，而且在后面二项分布的推导中也会用到三个事件两两互斥的加法公式.

设 A，B，C 为三个事件，如果 $A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，则称 A，B，C 三个事件两两互斥. 若 A，B，C 三个事件两两互斥，则有

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing,$$

从而 $A\cup B$ 和 C 互斥，由两个事件互斥的加法公式，得到

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

用数学归纳法可以证明，若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

4. 55 页思考题的说明

教学中可以直接利用例 3 的计算结果来说明“二次开奖抽到某一指定号码至少一次”的概率不一定是“一次开奖抽到某一指定号码”的概率的两倍.

对于基础好的同学可以进一步从理论上分析原因. 用 A 表示事件“第 1 次抽奖抽到某一指定号码”，B 表示事件“第 2 次抽奖抽到某一指定号码”，则

$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(AB),$$

且 $A-B$，$B-A$ 和 AB 是两两互斥的，从而

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(AB).$$

利用概率的加法公式得

$$P(A-B)+P(AB)=P(A),\ P(B-A)+P(AB)=P(B),$$

结合前面两个式子，注意到 $P(A)=P(B)$，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P(AB).$$

因此，“二次开奖抽到某一指定号码至少一次”的概率等于“一次开奖抽到某一指定号码”的概率两倍的充分必要条件是 $P(AB)=0$.

2.2.3 独立重复试验与二项分布

1. n 次独立重复试验的含义

独立重复试验是研究随机现象的重要途径之一，很多概率模型的建立都以独立重复试验为背景，二项分布就是来自于独立重复试验的一个概率模型.

一般地，称在相同条件下重复做的 n 次试验为 n 次独立重复试验，这个概念比较好理解，掷硬币试验和掷骰子试验就是非常好的实例. 这里关键要指出：在 n 次独立重复试验中，各次试验的结果不会受其他试验的影响，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

其中 A_i 表示第 i 次试验中出现的事件，$i=1, 2, \cdots, n$. 因为教科书仅定义了两个事件相互独立，而没有介绍 n 个事件相互独立的定义，所以这个等式的导出不是很好理解.

教学中，可以直观地解释为什么这个等式成立. 因为试验的条件相同，所以第 n 次试验中事件 A_n 是否发生不受前面 $n-1$ 次试验结果的影响，即 A_n 发生的概率与前 $n-1$ 次试验出现的事件 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 无关，亦即 A_n 与 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 相互独立，从而有

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n).$$

同样地，

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-2}A_{n-1})=P(A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),$$

因此，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

这个等式是推导二项分布的关键.

2. 二项分布教学中应注意的问题

(1) 第 56 页“探究”的推导.

①事件 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，$\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 和 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 彼此互斥，指的是这三个事件两两互斥. 这个结论显然成立，当然也可以按照两个事件互斥的定义来证明. 例如 $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 和 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是互斥事件可以由下式来证明：

$$(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cap(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\overline{A}_1(A_2\overline{A}_2)(\overline{A}_3A_3)=\varnothing.$$

②教科书 56 页上的公式 (1) 可知 $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=q^2p$，$P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=q^2p$ 和 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=q^2p$.

③在探讨 $P(B_0)$，$P(B_1)$，$P(B_2)$ 和 $P(B_3)$ 表达式的规律时，可以提醒学生寻找事件的概率和事件的下标之间的规律，即事件的概率和出现针尖向上的次数之间的规律.

(2) 教科书以 n 次独立重复试验为背景引入二项分布. 实际上，二项分布的数学定义可以完全脱离这个背景：若离散型随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0, 1, \cdots, n,$$

其中 $0\leqslant p\leqslant 1$，则称 X 服从二项分布.

(3) n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数 $X\sim B(n, p)$，这里的 A 是一个事件，可以包含多个基本事件或者无穷个试验的结果. 在实际应用中要根据需要确定 A，以把要解决的问题归结为二项分布模型. 例如，在掷一枚骰子的试验中，如果关心掷出的点数是否不小于 4，则可以让 A 表示“掷出的点数不小于 4”，从而可用二项分布来研究 n 次独立重复试验中出现“掷出的点数不小于 4”的次数 X 的概率分布规律. 这时 A 中包括了 3 个试验结果. 又如，人们关心灯泡的使用寿命 T 是否超过 500

小时，则可以让 A 表示“灯泡的使用寿命超过 500 小时”，从而可用二项分布来研究 n 次独立重复试验中出现“灯泡使用寿命超过 500 小时”的灯泡个数 X 的概率分布规律．这时 A 中包含了无穷多个试验结果，所有结果是超过 500 的所有实数．

(4) 第 57 页“思考”的目的是使学生了解二项分布与两点分布间的关系．事实上，两点分布是一种特殊的二项分布，即是 $n=1$ 的二项分布．

(5) 二项分布 $B(n, p)$ 中有两个参数，一个是独立重复试验的总次数 n，另一个是每次试验事件 A 出现的概率 p．二项分布的例子很多，例如某篮球明星的投篮命中率为 0.9，在某次训练中一共投篮 20 次，则命中的次数 X 服从二项分布，即 $X\sim B(20, 0.9)$．

(6) 教科书 57 页边框的思考题：“对比这个公式与表示二项式定理的公式，你能看出它们之间的联系吗?”目的是引导学生从二项式定理的角度来考察二项分布的分布列．如果把 p 看成 a，$1-p$ 看成 b，则 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 就是教科书 30 页上二项式定理中的求和通项，由此才称为二项分布．借助二项式定理，很容易证明分布列

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0, 1, \cdots, n,$$

满足性质

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1.$$

3. 例 4 的教学说明

例 4 演示了如何应用二项分布解决实际问题．教学中应注意以下几点：

(1) 解释为什么可以看成二项分布的概率模型．每次射击看成 1 次试验，10 次射击看成 10 次独立重复试验，每次射击命中的概率为 0.8，所以由二项分布概率模型的特点，10 次射击中击中目标的次数 X 服从二项分布，即 $X\sim B(10, 0.8)$．

(2) 计算问题．这里的计算量很大，可以用计算机或计算器帮助计算．

(3) 计算结果的解释．每次射击命中的概率为 0.8，共射击 10 次，有的学生可能认为命中 8 次的概率应该很大，但从计算结果可以看出，命中 8 次的概率只有 0.3 左右．

(4) 例题的变式．要保证击中目标的概率大于 0.99，至少应射击多少次？击中目标的含义是至少有一次射击击中目标．

由

$$P(\text{击中目标})=1-P(X=0)=1-(1-0.8)^n=1-0.2^n\geqslant 0.99,$$

解得 $n\geqslant 2.86$．因此，至少应射击 3 次，才能保证击中目标的概率大于 0.99．

四、习题解答

练习（第 54 页）

1. 设第 1 次抽到 A 的事件为 B，第 2 次抽到 A 的事件为 C，则第 1 次和第 2 次都抽到 A 的事件为 BC．

解法 1：在第 1 次抽到 A 的条件下，扑克牌中仅剩下 51 张牌，其中有 3 张 A，所以在第 1 次抽到 A 的条件下第 2 次也抽到 A 的概率为

$$P(C|B)=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}.$$

解法 2：在第 1 次抽到 A 的条件下第 2 次也抽到 A 的概率为

$$P(C|B)=\frac{n(BC)}{n(B)}=\frac{4\times 3}{4\times 51}=\frac{1}{17}.$$

解法 3：在第 1 次抽到 A 的条件下第 2 次也抽到 A 的概率为

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{4\times3}{52\times51}}{\frac{4\times51}{52\times51}}=\frac{1}{17}.$$

说明 解法 1 是利用缩小基本事件范围的方法计算条件概率，即分析在第 1 次抽到 A 的条件下第 2 次抽取一张牌的随机试验的所有可能结果，利用古典概型计算概率的公式直接得到结果. 解法 2 实际上是在原来的基本事件范围内通过事件的计数来计算条件概率. 第 3 种方法是利用条件概率的定义来计算. 这里可以让学生体会从不同角度求解条件概率的特点.

2. 设第 1 次抽出次品的事件为 B，第 2 次抽出正品的事件为 C，则第 1 次抽出次品且第 2 次抽出正品的事件为 BC.

解法 1：在第 1 次抽出次品的条件下，剩下的 99 件产品中有 4 件次品，所以在第 1 次抽出次品的条件下第 2 次抽出正品的概率为

$$P(C|B)=\frac{95}{99}.$$

解法 2：在第 1 次抽出次品的条件下第 2 次抽出正品的概率为

$$P(C|B)=\frac{n(BC)}{n(B)}=\frac{5\times95}{5\times99}=\frac{95}{99}.$$

解法 3：在第 1 次抽出次品的条件下第 2 次抽出正品的概率为

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{5\times95}{100\times99}}{\frac{5\times99}{100\times99}}=\frac{95}{99}.$$

说明 与上题类似，可以用不同方法计算条件概率.

3. 例 1 箱中 3 张奖券中只有 1 张能中奖，现分别由 3 人无放回地任意抽取，在已知第一个人抽到奖券的条件下，第二个人抽到奖券的概率或第三个人抽到奖券的概率，均为条件概率，它们都是 0.

例 2 某班有 45 名同学，其中 20 名男生，25 名女生，依次从全班同学中任选两名同学代表班级参加知识竞赛，在第 1 名同学是女生的条件下，第 2 名同学也是女生的概率.

说明 这样的例子很多，学生举例的过程可以帮助学生理解条件概率的含义.

练习（第 55 页）

1. 利用古典概型计算概率的公式，可以求得

$$P(A)=0.5,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.5,$$
$$P(AB)=0.25,\ P(BC)=0.25,\ P(AC)=0.25.$$

可以验证

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(BC)=P(B)P(C),\ P(AC)=P(A)P(C).$$

所以根据事件相互独立的定义，有事件 A 与 B 相互独立，事件 B 与 C 相互独立，事件 A 与 C 相互独立.

说明 本题中事件 A 与 B 相互独立比较显然，因为抛掷的两枚硬币之间是互不影响的. 但事件 B 与 C 相互独立，事件 A 与 C 相互独立不显然，需要利用定义验证. 从该习题可以看出，事件之间是否独立有时根据实际含义就可做出判断，但有时仅根据实际含义是不能判断的，需要用独立性的定义判断.

2. (1) 先摸出 1 个白球不放回的条件下，口袋中剩下 3 个球，其中仅有 1 个白球，所以在先摸出1 个白

球不放回的条件下，再摸出 1 个白球的概率是 1/3.

(2) 先摸出 1 个白球后放回的条件下，口袋中仍然有 4 个球，其中有 2 个白球，所以在先摸出 1 个白球后放回的条件下，再摸出 1 个白球的概率是 1/2.

说明 此题的目的是希望学生体会有放回摸球与无放回摸球的区别，在有放回摸球中第 2 次摸到白球的概率不受第 1 次摸球结果的影响，而在无放回摸球中第 2 次摸到白球的概率受第 1 次摸球结果的影响.

3. 设在元旦期间甲地降雨的事件为 A，乙地降雨的事件为 B.

(1) 甲、乙两地都降雨的事件为 AB，所以甲、乙两地都降雨的概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.2\times0.3=0.06.$$

(2) 甲、乙两地都不降雨的事件为$\overline{A}\,\overline{B}$，所以甲、乙两地都不降雨的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.8\times0.7=0.56.$$

(3) 其中至少一个地方降雨的事件为$(AB)\cup(\overline{A}B)\cup(A\overline{B})$，由于事件 AB，$A\overline{B}$和$\overline{A}B$ 两两互斥，根据概率加法公式和相互独立事件的定义，其中至少一个地方降雨的概率为

$$P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.06+0.2\times0.7+0.8\times0.3=0.44.$$

说明 与例 3 类似，利用事件独立性和概率的性质计算事件的概率，需要学生复习《数学 3（必修）》中学过的概率性质.

4. 因为 $A=(AB)\cup(A\overline{B})$，而事件 AB 与事件 $A\overline{B}$ 互斥，利用概率的性质得到 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$. 又因为事件 A 与 B 相互独立，故

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}).$$

由两个事件相互独立的定义知 A 与 $\overline{B}$ 相互独立. 类似可证明$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也都是相互独立的.

说明 证明此题要求学生掌握概率的性质. 此题的结论是十分有用的，也是比较好理解的，比如事件 A 与 B 发生没有关系，当然与 B 不发生也应该没有关系.

5. 例 1 同时掷甲、乙两枚骰子，事件 A 表示甲骰子出现的是 4 点，事件 B 表示乙骰子出现的是 4 点，则事件 A 与事件 B 相互独立.

例 2 从装有 5 个红球 3 个白球的袋子中有放回地依次任意摸出两个球，事件 A 表示第 1 次摸到红球，事件 B 表示第 2 次摸到白球，则事件 A 与事件 B 相互独立.

说明 要求学生不但能判断两个事件是否相互独立，而且能举例说明什么样的两个事件是相互独立的，特别掌握在有放回抽样中，两次抽样的结果是相互独立的，这是二项分布的基础.

练习（第58页）

1. 用 A 表示抽到的这件产品为合格品，A_i 表示这件产品在第 i 道工序中质量合格，$i=1, 2, 3, 4, 5$. 则 $A=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5$，

$$P(A_1)=0.96,\ P(A_2)=0.99,\ P(A_3)=0.98,\ P(A_4)=0.97,\ P(A_5)=0.96,$$

且 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 相互独立. 所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)\\&=0.96\times0.99\times0.98\times0.97\times0.96\approx0.867.\end{aligned}$$

说明 本题主要考查学生应用教科书 56 页的公式（1）解决实际问题的能力. 这里的难点是如何把这件产品合格用各道工序的合格表达出来. 实际上，各道工序都合格等价于产品合格，因此事件“各道工序合格之交”就是产品合格.

2. 将一枚硬币连续抛掷 5 次，正面向上的次数 X 服从二项分布，其分布列为

$$P(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^5,\ k=0,1,2,3,4,5.$$

用表格的形式表示如下：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{5}{2^5}$	$\frac{10}{2^5}$	$\frac{10}{2^5}$	$\frac{5}{2^5}$	$\frac{1}{2^5}$

说明 本题是最基本的二项分布的例子．在写分布列时，如果是用第一种方式表示，一定要标出 k 的取值范围．

3. 用事件 B 表示仅第 1 次未击中目标，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标，$i=1,2,3,4$，则 $B=\overline{A}_1A_2A_3A_4$．因为 4 次射击可以看成 4 次独立重复试验，所以可以利用 56 页的公式(1)计算 B 发生的概率：

$$P(B)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=(1-0.9)\times0.9\times0.9\times0.9=0.0729.$$

说明 本题的关键是把 4 次射击看成 4 次独立重复试验，然后利用 56 页的公式（1）计算概率．该题还可以修改成求 4 次射击都没有命中目标的概率，或者 4 次射击至少击中一次目标的概率．

4. 例 1　某同学投篮命中率为 0.6，他在 6 次投篮中命中的次数 X 是一个随机变量，$X\sim B(6,0.6)$．

例 2　在一次考试中有 10 道单选题，某同学一道题都不会，随机地选择答案，这 10 道单选题中答对的个数 X 是一个随机变量，$X\sim B(10,0.25)$．

说明 希望学生不但能判断一个随机变量是否服从二项分布，而且能举出二项分布的例子，以加深对二项分布的理解．

习题 2.2（第 59 页）

A 组

1. 因为 3 个灯泡是并联，各灯泡是否能正常照明是彼此独立的，不受其他灯泡的影响，所以可以看成 3 次独立重复试验．设这段时间内能正常照明的灯泡个数为 X，X 服从二项分布．这段时间内吊灯能照明表示 3 个灯泡至少有 1 个灯泡能正常照明，即 $X>0$，则吊灯能照明的概率为

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-(1-0.7)^3=0.973.$$

说明 可以让学生思考：如果这 3 个灯泡串联，那么这段时间内吊灯能照明的概率是多少？以此比较两种连接方法的可靠性．

2. (1) 箱子中共有 $4n-1$ 个球，其中有白球 $2n$ 个，设事件 B 表示摸到的 n 个球都是白球，利用古典概型计算概率的公式得到

$$P(B)=\frac{C_{2n}^n}{C_{4n-1}^n}.$$

(2) 设事件 A 表示摸到的 n 个球都是黑球，事件 C 表示摸到的 n 个球颜色相同，则

$$C=A\cup B,\ P(A)=\frac{C_{2n-1}^n}{C_{4n-1}^n}.$$

又 A 与 B 互斥，所以

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{C_{2n}^n+C_{2n-1}^n}{C_{4n-1}^n}.$$

在已知 n 个球的颜色相同的情况下，该颜色是白色的概率为

$$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(C)}=\frac{C_{2n}^n}{C_{2n}^n+C_{2n-1}^n}.$$

说明 （2）中的计算同样可以利用古典概型计算概率的公式

$$P(B|C)=\frac{n(BC)}{n(C)}$$

得到，但是这里的计数是基于原始的基本事件全体来计数.

3. 设有 3 个孩子的家庭中女孩的个数为 $X\sim B(3,\ 0.5)$. 至少有 2 个是女孩等价于事件 $\{X\geqslant 2\}$，因此至少有 2 个是女孩的概率为

$$P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}.$$

说明 关键是把该问题转化为二项分布的模型. 当然该问题也可以利用古典概型计算概率的公式直接得到.

4. 利用条件概率公式有

$$P(B\cup C|A)=\frac{P((B\cup C)A)}{P(A)}=\frac{P(BA\cup CA)}{P(A)},$$

因为 B 和 C 互斥，所以 BA 和 CA 也互斥，利用概率的加法公式有

$$P(BA\cup CA)=P(BA)+P(CA).$$

因此

$$P(B\cup C|A)=\frac{P(BA)+P(CA)}{P(A)}=\frac{P(BA)}{P(A)}+\frac{P(CA)}{P(A)}=P(B|A)+P(C|A).$$

B 组

1. 每局比赛只有两个结果，甲获胜或乙获胜，每局比赛可以看成是相互独立的，所以甲获胜的局数 X 是随机变量，X 服从二项分布.

（1）在采用 3 局 2 胜制中，$X\sim B(3,\ 0.6)$，事件 $\{X\geqslant 2\}$ 表示“甲获胜”. 所以甲获胜的概率为

$$P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\mathrm{C}_3^2\times 0.6^2\times 0.4+0.6^3=0.648.$$

（2）在采用 5 局 3 胜制中，$X\sim B(5,\ 0.6)$，事件 $\{X\geqslant 3\}$ 表示“甲获胜”. 所以甲获胜的概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 3)&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=\mathrm{C}_5^3\times 0.6^3\times 0.4^2+\mathrm{C}_5^4\times 0.6^4\times 0.4+0.6^5\approx 0.683\end{aligned}$$

可以看出采用 5 局 3 胜制对甲更有利，由此可以猜测“比赛的总局数越多甲获胜的概率越大”，由此可以看出为了使比赛公平，比赛的局数不能太少. 在这个实际问题背景中，比赛局数越少，对乙队越有利；比赛局数越多，对甲队越有利.

说明 对于一个实际问题，最终目的是解决问题，而不是计算随机事件的概率. 在本题背景中，应该根据计算出的概率结果对赛制提出建议.

2. 设事件 A_1 表示从甲箱子里摸出白球，事件 A_2 表示从乙箱子里摸出白球，因为从甲箱子里摸球的结果不会影响从乙箱子里摸球的结果，所以 A_1 和 A_2 是相互独立的.

$$P(\text{获奖})=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0.3.$$

尽管两个箱子里装的白球比黑球多，但获奖的概率小于 0.5. 原因是除了两个球全为白球外，还有可能两个球全为黑球或两个球中一个为白球另一个为黑球，两个球全为黑球的概率为 $\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}=0.2$，两个球中一个为白球另一个为黑球的概率为 $1-0.3-0.2=0.5$. 由两个箱子里装的白球比黑球多，只能推出摸出的两个球全为白球的概率大于摸出的两个球全为黑球的概率. 由于这两个事件的并不等于必然事件，因此不能推出获奖的概率大于 0.5.

说明 问题的关键在于把几个事件的关系搞清楚，必然事件

$$\Omega=\{两个球全为白球\}\cup\{两个球全为黑球\}\cup\{一个为白球另一个为黑球\}.$$

3. (1) 在有放回的方式抽取中，每次抽取时都是从这 n 件产品中抽取，从而抽到次品的概率都为 0.02. 可以把 3 次抽取看成是 3 次独立重复试验，这样抽到的次品数 $X\sim B(3,\ 0.02)$，恰好抽到 1 件次品的概率为

$$P(X=1)=C_3^1\times0.02\times(1-0.02)^2=3\times0.02\times0.98^2\approx0.057\ 624.$$

在无放回的方式抽取中，抽到的次品数 X 是随机变量，X 服从超几何分布，X 的分布与产品的总数 n 有关，所以需要分 3 种情况分别计算：

① $n=500$ 时，产品的总数为 500 件，其中次品的件数为 $500\times2\%=10$，合格品的件数为 490. 从 500 件产品中抽出 3 件，其中恰好抽到 1 件次品的概率为

$$P(X=1)=\frac{C_{10}^1C_{490}^2}{C_{500}^3}=\frac{10\times\dfrac{490\times489}{2!}}{\dfrac{500\times499\times498}{3!}}=\frac{30\times490\times489}{500\times499\times498}\approx0.057\ 853.$$

② $n=5\ 000$ 时，产品的总数为 5 000 件，其中次品的件数为 $5\ 000\times2\%=100$，合格品的件数为 4 900. 从 5 000 件产品中抽出 3 件，其中恰好抽到 1 件次品的概率为

$$P(X=1)=\frac{C_{100}^1C_{4\ 900}^2}{C_{5\ 000}^3}=\frac{300\times4\ 900\times4\ 899}{5\ 000\times4\ 999\times4\ 998}\approx0.057\ 647.$$

③ $n=50\ 000$ 时，产品的总数为 50 000 件，其中次品的件数为 $50\ 000\times2\%=1\ 000$，合格品的件数为 49 000. 从 50 000 件产品中抽出 3 件，其中恰好抽到 1 件次品的概率为

$$P(X=1)=\frac{C_{1\ 000}^1C_{49\ 000}^2}{C_{50\ 000}^3}=\frac{3\ 000\times49\ 000\times48\ 999}{50\ 000\times49\ 999\times49\ 998}\approx0.057\ 626.$$

(2) 根据 (1) 的计算结果可以看出，当产品的总数很大时，超几何分布近似为二项分布. 这也是可以理解的，当产品总数很大而抽出的产品较少时，每次抽出产品后，次品率近似不变. 这样就可以近似看成每次抽样的结果是相互独立的，抽出产品中的次品件数近似服从二项分布.

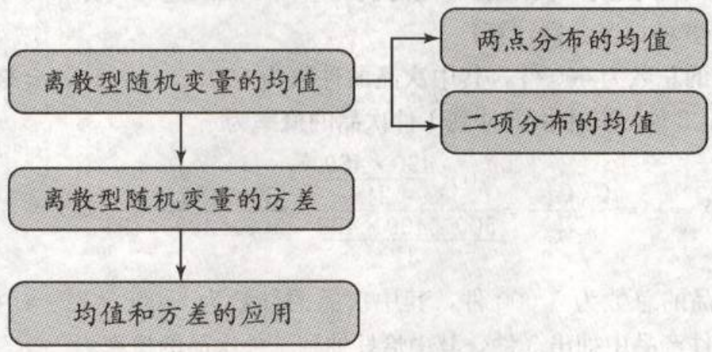
说明 由于数字比较大，可以利用计算机或计算器进行数值计算. 另外，本题目也可以帮助学生了解超几何分布和二项分布之间的关系：

第一，n 次试验中，某一事件 A 出现的次数 X 可能服从超几何分布或二项分布. 当这 n 次试验是独立重复试验时，X 服从二项分布；当这 n 次试验是不放回摸球问题，事件 A 为摸到某种特性（如某种颜色）的球时，X 服从超几何分布.

第二，在不放回 n 次摸球试验中，摸到某种颜色球的次数 X 服从超几何分布. 但是当袋子中的球的数目 N 很大时，X 的分布列近似于二项分布，并且随着 N 的增加，这种近似的精度也增加.

2.3 离散型随机变量的均值与方差

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

理解离散型随机变量的均值和方差的含义.

难点：

利用离散型随机变量的均值和方差解决实际问题.

三、编写意图与教学建议

随机变量的分布列全面刻画了随机变量取值的统计规律，随机变量的均值和方差分别从不同角度刻画了随机变量取值的特征．随机变量的均值是刻画随机变量取值的平均水平的指标，而随机变量的方差是刻画随机变量取值的离散程度的指标.

教科书以形象的混合糖果的定价问题的解释为例，引出了离散型随机变量的均值的定义．在此基础上，推导了离散型随机变量线性函数的均值的公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$．接着计算了两点分布和二项分布的均值．在《数学 3（必修）》中，学生已经学了样本的平均值，所以自然会问："随机变量的均值与样本的平均数有何联系与区别?"教科书利用"思考"引导学生对此进行探讨并给出了回答．最后是两个利用离散型随机变量的均值解决实际问题的例子.

教科书以两名射手的射击情况比较为问题情境，引入随机变量的方差和标准差的概念．经过计算，发现两名射手射击的环数的均值没有差别，于是自然提出问题："还有其他刻画两名同学各自射击特点的指标吗?"通过观察发现，两名射手的中靶环数分布列还是有差异的．为了刻画这种差异，引入离散型随机变量的另一指标——方差或标准差．与均值的学习类似，教科书引导学生思考随机变量的方差与样本的方差的联系与区别，并给出了回答.

本节介绍的离散型随机变量的均值和方差，与《数学 3（必修）》中介绍的样本的平均值和方差有区别也有联系．离散型随机变量可以看成是刻画某一总体的量，它的均值和方差也就是该总体的均值与方差，一般它们是未知的，但都是确定的常数；样本的平均值和方差都是随机变量，不同的试验一

般会得到不同样本，随着样本的不同，样本的平均数和方差就会改变．对于简单随机样本，随着样本容量的增加，样本的平均数越来越接近于总体的均值，样本的方差也越来越接近于总体的方差．

教学中，要把重点放在用均值和方差解决实际问题上，在解决实际问题的过程中使学生理解均值和方差的含义．

2.3.1 离散型随机变量的均值

离散型随机变量的均值是刻画离散型随机变量取值的平均水平的指标．用 Ω 表示一个随机试验可能出现的所有结果，考虑定义在 Ω 上的两个随机变量

$$\xi=\xi(\omega) \text{ 和 } \eta=\eta(\omega),\ \omega\in\Omega,$$

如何比较它们的大小？一个直观的想法是逐个比较，当对于一切 $\omega\in\Omega$ 都有

$$\xi(\omega)>\eta(\omega),$$

则称随机变量 ξ 大于随机变量 η．但实际中常常出现对某些结果 ξ 比 η 大，而对另一些结果 ξ 比 η 小，因此前面的比较方法不能保证所有的随机变量都能进行比较．从加权平均的角度，可以比较任意两个随机变量的大小，这导致了随机变量的均值的概念．另外，随机变量的均值又可以用这个随机变量的独立重复观测值的算术平均值估计，并且在理论上可以证明这个算术平均值随着观测次数的增加而趋近于随机变量的均值．随机变量的均值的这种特性在随机变量的比较中起到重要的作用．

1. 对 60 页“思考”的分析

教科书从平均的角度引入随机变量的均值的概念，引导学生通过实际问题理解这个概念．“思考”提出：“某商场要将单价分别为 18 元/kg，24 元/kg，36 元/kg 的三种糖果按 3∶2∶1 的比例混合销售，如何对混合糖果定价才合理?”直观上，通过分析 1 kg 这样的混合糖果的组成，容易得到合理的价格，即价格是三种糖果价格的加权平均，权分别是各种糖果的质量与总质量之比．至此问题已经解决，分析的过程似乎与随机现象无关．这只是表面现象，如果考虑 1 kg 糖果是如何从混合糖果中取出的，就会发现问题．

实际上可以把按 3∶2∶1 的比例混合在一起的糖果全体看成总体，那么所取出的 1 kg 混合糖果可以看成是对总体的一个抽样，其样本容量就是 1 kg 糖果或包含的颗粒数 n．为了简单，假设每颗糖果的质量、外形都是相同的，就可以把混合糖果中的每一颗糖果看成一个个体，则取出的 1 kg 糖果就可以看成是从总体中抽出的一个容量为 n 的简单随机样本．由样本的随机性知道这 1 kg 混合糖果中各种糖果之间的比例是随机的．

为了讨论方便，分别把 18 元/kg，24 元/kg，36 元/kg 的糖果表示为 a，b，c．事实上谁也不能保证在所取出的混合糖果中，恰好有 $\frac{1}{2}$ kg 的 a，$\frac{1}{3}$ kg 的 b，$\frac{1}{6}$ kg 的 c．但根据频率的稳定性知道当 n 充分大时，a 的频率 $f_1\approx\frac{1}{2}$，b 的频率 $f_2\approx\frac{1}{3}$，c 的频率 $f_3\approx\frac{1}{6}$．这里 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{6}$ 恰好分别是从总体中任意地抽取一颗糖果，分别抽到 a，b，c 的概率．

进一步，如果用 X_i 表示样本中第 i 块糖的单价，则样本的平均单价为

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=18\times f_1+24\times f_2+32\times f_3,$$

这才是所取出的 1 kg 混合糖果的真实价值．当 n 很大时，这个真实价值很接近于教科书 60 页所给出的定价．事实上，

$$\lim_{n\to\infty}(18\times f_1+24\times f_2+32\times f_3)=18\times\frac{1}{2}+24\times\frac{1}{3}+36\times\frac{1}{6}=23(\text{元/kg}).$$

既然 $\overline{X}$ 是所取出的糖的真实价值，为什么不用它来作为混合糖果的定价呢？原因是不同的样本有不同的样本均值，而混合糖果的定价只有一个，因此只好用极限价 23 元/kg 作为混合糖果的合理价格.

把从混合糖果中取出一颗糖果看成是一次随机试验，可以定义随机变量

$$X=\begin{cases}18,\text{ 如果取出的是 } a,\\ 24,\text{ 如果取出的是 } b,\\ 36,\text{ 如果取出的是 } c,\end{cases}$$

则 X 是离散型随机变量，其分布列为

X	18	24	36
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

这样就把混合糖的合理价格理解为随机变量 X 的值的加权平均，这个权就是相应的概率. 把这种想法抽象出来，就可以得到随机变量的均值的概念.

上面的分析过程，有助于深入理解随机变量的均值的含义，它可以看成是这个随机变量的平均，即随着观察这个随机变量次数的增加，所得观测数据的平均值越来越接近于这个随机变量的均值.

由于篇幅的限制，教科书没有介绍上述分析过程，而是通过思考栏目直接提出问题，引导学生理解混合糖果合理价格表达式中权的含义. 教科书 60 页"思考"提出："如果混合糖果中每一颗的质量都相等，你能解释权的实际含义吗?"其中条件"如果混合糖果中每一颗糖果的质量都相等"的用意是保证在混合糖果中任取一颗糖果，取到每颗糖果的可能性相等. 这样就可以根据古典概型计算概率的公式得到，取到每种糖果的概率就是该种糖果在全部糖果中所占的比例，从而混合糖果的合理价格实际上就是以概率为权重的每种糖果的单位价格的加权平均. 由此引入取有限值的离散型随机变量的均值的定义.

在给出随机变量的均值的一般定义之后，教科书给出了这个均值的直观含义，即"它反映了离散随机变量取值的平均水平". 这里的平均水平的含义是：反复对这个随机变量进行独立观测，随着观测次数的增加，所得到的各个观测值的算术平均值越来越接近于这个随机变量的均值.

2. 随机变量均值的线性性质

教科书仅介绍了随机变量均值的线性性质. 更一般的随机变量均值的线性性质是指：随机变量的线性组合的均值等于随机变量均值的线性组合，即若两个随机变量 X 和 Y 的均值都为有限数，则

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y),$$

其中 a 和 b 为任意实数. 对于只取有限个值的离散型随机变量，自然有 X 和 Y 的均值都为有限数，并且可以证明这个一般的均值的线性组合性质是成立的.

在有些情况下，利用均值的这个一般的线性组合性质可以简化随机变量均值的计算. 例如，在计算随机变量 $X\sim B(n,\ p)$ 的均值时，就可以利用均值的线性性质简化计算过程. 考虑成功概率为 p 的 n 次独立重复试验中成功的次数 X，则 $X\sim B(n,\ p)$. 记

$$X_i=\begin{cases}1,\text{ 第 } i \text{ 次试验的结果为成功},\\ 0,\text{ 第 } i \text{ 次试验的结果为失败},\end{cases}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. 进一步，$X_i\sim B(1,\ p)$，其分布列为

X_i	0	1
P	$1-p$	p

其均值为

$$E(X_i)=0\times(1-p)+1\times p=p，i=1，2，\cdots，n.$$

由随机变量均值的线性性质得

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np，$$

即 X 的均值为 np.

随机变量的均值与样本的平均值有何联系与区别呢？教科书在“思考”中提出这样的问题，用意在于让学生把学过的知识联系起来，引导他们进一步理解随机变量均值的含义，以及理解用均值解决实际问题的原理.

教科书仅介绍了取有限值的离散型随机变量的分布列，同样在本节也仅介绍取有限值的离散型随机变量的均值的定义．取有限值的离散型随机变量的均值的计算仅涉及有限和的计算，所以它们一定存在．这样做的目的是使学生更加专注于对随机变量的均值的理解.

3. 教学中应注意的问题

(1) 在 60 页“思考”的教学中，应引导学生从古典概型的角度入手解释权重的含义.

实际上，从混合糖果中任意取出一颗糖果是一个随机试验，可能出现的结果有三种：“取出的是 a”“取出的是 b”“取出的是 c”．“思考”中的假设“混合糖果中的每一颗糖果的质量都相等”保证了每一个结果在试验中出现的可能性都相等，因此可以用古典概型描述这个随机试验．现在我们关心的是取出的这颗糖果的价格，因此把糖果的种类映射为其价格，自然得到了随机变量

$$X=\begin{cases}18，如果取出的是 a，\\24，如果取出的是 b，\\36，如果取出的是 c.\end{cases}$$

根据随机变量的定义，有

$$P(X=18)=P(取出的是 a)，$$
$$P(X=24)=P(取出的是 b)，$$
$$P(X=36)=P(取出的是 c).$$

需要注意的是基本事件由混合糖果中一颗颗糖果构成，并不知道其总数 n 是多少．那么如何利用古典概型计算概率的公式来计算概率呢？根据问题背景，我们知道的是各类糖果在混合糖果的比例，即三种糖果的比例是 3∶2∶1．由此可以根据古典概型计算概率的公式计算前面提到的各个事件的概率．事实上，由该比例可以知道混合糖中 a 的颗数为 $n_1=\frac{3}{3+2+1}\times n=\frac{n}{2}$．类似地，$b$ 的颗数为 $n_2=\frac{n}{3}$，c 的颗数为 $n_3=\frac{n}{6}$．于是

$$P(取出的是 a)=\frac{n_1}{n}=\frac{1}{2}，$$

$$P(取出的是 b)=\frac{n_2}{n}=\frac{1}{3}，$$

$$P(取出的是 c)=\frac{n_3}{n}=\frac{1}{6}.$$

因此可以得到随机变量 X 的分布列为

X	18	24	36
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

从而混合糖果的合理价格可以表达为

$$18\times P(X=18)+24\times P(X=24)+36\times P(X=36),$$

其权重恰好为随机变量 X 取相应值的概率.

(2) 注意随机变量均值含义的正确理解. 教科书指出，离散型随机变量均值“是离散型随机变量取值的平均水平”. 这里“平均水平”的含义可以从两种角度来理解：一种从定义的角度，随机变量是以概率为权的加权平均；另一种是从样本（或观测）的角度，随机变量的均值是该随机变量的多次独立观测值的算术平均值（当观测次数趋于无穷时）的极限，即由独立观测组成的随机样本平均值（当样本容量趋于无穷时）的极限. 在实际应用中，特别是在决策中，常以第二种理解作为解决实际问题的依据（见教科书上 63 页例 3 的解释最后一段).

(3) 随机变量的均值与样本的平均值的联系与区别. 教科书第 62 页“思考”中提出的问题的用意在于让学生把学过的知识联系起来，也隐含着引导学生从样本平均值的角度考察随机变量均值的含义.

① 从定义可以看出，随机变量均值是一个常数，而样本平均值是一个随机变量，这是两个均值的根本区别. 比如，某篮球名星的罚球命中率为 0.7，我们知道罚球命中得 1 分，不中得 0 分. 设他罚球 1 次的得分为 X，那么 X 是一个离散型随机变量，他罚球的平均得分就是 X 的均值，即 $E(X)=0.7$，是离散型随机变量 X 的均值，这是一个常数. 在一场比赛中，他罚了 10 次球，命中 8 个，那么他在这场比赛中罚球 10 次的平均得分为 $\frac{8}{10}=0.8$. 可以把该明星在这场比赛中的每一次罚球得分结果看作是对 X 的一次观测，则 10 次罚球就得到一个容量为 10 的随机变量 X 的观测样本，而这个样本平均值恰为该明星在本场比赛罚球的平均得分 0.8. 样本平均值会随着样本的变化而变化，谁也不能保证这位明星在每 10 次罚球时都会恰有 8 次得分. 实际上，根据二项分布的知识，该明星 10 次罚球所得分数，即 X 的容量为 10 的样本平均值为服从二项分布 $B(10, 0.7)$的随机变量.

② 教科书直接给出了两个均值之间的联系，即对于简单随机样本而言，随着样本容量的增加，样本的平均值越来越接近于随机变量（即总体）的均值. 例如掷质地均匀的骰子，用 X 表示出现的点数，则 X 是离散型随机变量，分布列为

$$P(X=k)=\frac{1}{6},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

独立重复试验 n 次，用 X_i 表示第 i 次试验出现的点数，则可以把 X_1，X_2，…，X_n 看成是随机变量 X 的 n 次观测值，也可以把这些观测值看成是一个容量为 n 的样本. 这样 n 个观测值的算术平均值，即样本的平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1\times n_1}{n}+\frac{2\times n_2}{n}+\frac{3\times n_3}{n}+\frac{4\times n_4}{n}+\frac{5\times n_5}{n}+\frac{6\times n_6}{n},$$

其中 n_i 为 n 次试验中出现 i 点的试验次数，$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$. 注意到$\frac{n_i}{n}$恰为 n 次试验中出现 i 点的频率，根据频率与概率之间的关系可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{6}k\times\frac{n_k}{n}=\sum_{k=1}^{6}k\times P(X=k)=E(X),$$

即随机变量独立观测的算术平均值随着观测次数的增加而趋于该随机变量的均值，或者说样本的平均值随着样本容量的增加而趋于该随机变量的均值.

理论上可以证明，在很一般的情况下，随机变量的样本平均值随着样本容量的增加而趋于随机变量的均值，感兴趣的教师可以查阅概率论中大数定律方面的内容.

(4) 在实际应用中，有许多问题的解决依赖于总体均值，即表示总体指标的随机变量的均值. 但总体均值是未知的，因此需要通过样本来估计. 一般来讲，人们喜欢用样本的平均值来估计总体均值，其依据就是前面介绍的样本平均值与总体均值之间的关系.

在《数学 3（必修）》中，我们采用样本平均值估计总体均值，那么为什么可以用样本平均值估计总体均值呢？因为对于简单随机样本，随着样本容量的增加，样本平均值越来越接近于总体均值.

（5）例 1 的说明. 本例的目的是训练学生用离散型随机变量均值的定义计算两点分布的均值，进而导出两点分布随机变量的均值公式. 教学中应先引导学生注意随机变量 X 服从两点分布，即二项分布$B(1, 0.7)$，然后再观察 X 的均值和成功概率 $p=0.7$ 之间的关系. 由此不难得到教科书 62 页上边框问题的答案为罚球一次的得分均值为 0.8 分.

（6）由于两点分布和二项分布是常用的分布，所以教科书把它们的均值的计算结果作为公式给出. 实际上，两点分布和二项分布有密切的关系，利用这种关系可以帮助记忆这两个均值与成功概率之间的关系，也可以复习前面学过的知识.

对于两点分布随机变量，其均值等于其成功概率. 由于具有成功概率 p 的 n 个相互独立的两点分布随机变量之和服从二项分布 $B(n, p)$，根据均值的线性性质可以知道二项分布随机变量的均值为 np.

教学中，可以在承认结论“随机变量线性组合的均值等于这些随机变量均值的线性组合”的情况下，利用两点分布随机变量均值来计算二项分布的均值.

（7）例 2 的说明. 教学中，可先对例题的背景加以分析，解释为什么可以利用二项分布随机变量均值的结论来求平均成绩.

在本例的问题背景中，学生甲每做一道题，相当于进行一次随机试验，该试验只有两个可能的结果，即“对”或“错”，且出现对的概率为 0.9. 进一步，回答 20 道题相当于做了 20 次独立重复试验. 这样，学生甲做对题目的个数 X_1 服从二项分布 $B(20, 0.9)$，从而他在考试中获得的分数为 $5X_1$，进而可以经由二项分布随机变量的均值，以及均值的线性性质计算学生甲的成绩的均值. 可类似地计算学生乙的成绩的均值.

当然，也可以用 Y_1 和 Y_2 分别表示甲和乙的考试成绩，然后通过随机变量均值的定义分别计算 Y_1 和 Y_2 的均值. 学生可能会比较容易想到这种方法，但从计算量上看，这种方法比教科书上的方法更复杂.

（8）“学生甲在这次单元测试中的成绩一定会是 90 分吗？他的均值为 90 分的含义是什么？”学生甲在这次单元测试中的成绩当然不一定会是 90 分，他的成绩是一个随机变量，可能取值为 0，5，10，…，95，100. 这个随机变量的均值为 90 分，其含义是在多次类似的考试中，他的平均成绩大约是 90 分.

（9）例 3 的说明. 本例的背景是一个决策问题，教学中应使学生了解为什么要采用平均损失最小的原则来决策. 这里的“平均损失”指的是表示损失的随机变量的均值，因此平均损失最小的原则可以保证在遭受到多次损失的情况下，各次损失的平均值接近于最小.

另外，平均损失最小原则并不能保证每一次的损失都最小，其原因是每一次损失都是损失随机变量的一次观测值，不能保证这个观测值等于其期望值（即平均损失）. 例如，虽然根据例题的解答，方案 2 是基于平均损失最小原则得到的最好方案，但是谁也不能保证在近期内不会出现大洪水或不出现洪水.

另外，损失的计算，不仅要包括洪水造成的直接损失，还要包括执行方案的损失（这里指运设备、建围墙的费用）.

2.3.2 离散型随机变量的方差

教科书通过“探究”引导学生思考如何选择参加射击比赛代表问题，引入刻画随机变量稳定性的概念——方差.

两名同学射击水平高低的比较，自然可以用平均射击水平，即中靶环数的均值．但是经过计算发现他们的平均射击水平是相同的，从而引发了新问题．

为解决这个新问题，教科书提出“思考”：“除平均中靶环数外，还有其他刻画两名同学各自射击特点的指标吗?”以引导学生探讨均值相同的两个随机变量之间的其他特点问题．这里的射击特点自然是指击中目标靶环数的分布列的特点，因此需要从分布列中发现这些特点．从分布列发现两名同学击中目标靶环数的分布范围不同，第二名同学的击中目标靶的环数更集中于其均值．如何刻画这种差异呢？由于已经学过样本方差的概念，它是刻画样本数据集中于样本均值程度的一个量，和这里的情况比较类似．因此教科书通过“怎样定量刻画随机变量的稳定性?”引导学生类比样本方差的概念，引入取有限值的离散型随机变量的方差的定义．

教学中应注意以下几个问题：

（1）为了引导学生发现两个均值相同的随机变量的分布列的特征，并为进一步刻画这个特征作铺垫，在第 65 页中提出“思考”：“除平均中靶环数外，还有其他刻画两名同学各自射击特点的指标吗?”教学中，如果学生没有解决问题的思路，或者不从分布列的角度考虑问题，教师可作适当的引导．引导可以从分析射击特点的含义入手，第一名同学的射击特点指他中靶环数的特点，即随机变量 X_1 的分布列的特点，因此可以从 X_1 的分布列中考察这些特点．类似地，可以从 X_2 的分布列中考察第二名同学的射击特点．

（2）为了引导学生类比样本方差的定义给出离散型随机变量方差的定义，教科书提出“思考”：“怎样定量刻画随机变量的稳定性?”学生已经知道，样本方差是刻画数据集中于样本平均值程度的指标，样本方差越小，说明样本数据越集中于样本平均值的附近．样本方差

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\times\frac{1}{n},$$

这里的 $\overline{x}$ 表示所有样本点的平均值，$(x_i-\overline{x})^2$ 是第 i 个样本离样本平均值 $\overline{x}$ 距离的平方，$\frac{1}{n}$可以看成是第 $i(i=1, 2, \cdots, n)$个样本点在刻画数据集中于样本平均值时的权重．在样本方差的定义中，每个样本点所占的权重都是相同的．

把离散型随机变量的情形与样本的情形相比较，随机变量的均值的含义相当于样本的平均值，随机变量的各个不同取值相当于各个不同的样本点，随机变量取各个不同值的概率相当于各个样本点在刻画数据集中于样本平均值时的权重．在这种类比之下，自然可以建立起随机变量方差的概念——度量离散性随机变量集中于其均值程度的指标．

（3）教学中要注意对随机变量的方差和标准差概念含义的解释．有些教科书中把随机变量的方差解释成刻画随机变量离散程度的量，或解释成为刻画随机变量集中程度的量，或解释成刻画随机变量分散程度的量，这些解释是正确的．但在本书中把随机变量的方差更精确地解释为“随机变量的方差和标准差都反映了随机变量取值偏离于均值的平均程度”．这个解释有如下特点：

①“随机变量取值偏离于均值”指明了随机变量集中的位置是随机变量的均值；

②“平均程度”指明了方差或标准差是一种加权平均的度量指标．

（4）随机变量的方差与标准差的单位．根据随机变量方差的定义知道方差的单位是随机变量单位的平方；而标准差的单位与随机变量的单位相同．如当随机变量 X 表示考试成绩时，其单位为分数，相应的方差单位是分数的平方；而相应的标准差的单位也是分数．标准差的这种特性在实际中有许多应用．

例如，当用 X 表示一名学生在一次百分制考试中的成绩，用 Y 表示他在另一次 150 分制考试中的成绩，如何比较这名同学在两次不同考试中的表现呢？不同分制的考试相当于用不同的分值尺度来衡量考试的结果，如果我们能够把不同的尺度折算到一个标准尺度，就可以比较不同尺度的衡量结果．

令

$$X_d=\frac{X-E(X)}{\sqrt{DX}},\ Y_d=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{DY}},$$

则 X_d 和 Y_d 都是无量纲的量（即没有单位的量），这里的分子和分母的单位抵消掉了，我们可以通过比较 X_d 和 Y_d 来判断他在哪次考试中表现更好．如果 $X_d<Y_d$，说明在第二次考试中发挥更好；如果 $X_d>Y_d$，说明在第一次考试中发挥得更好；如果 $X_d=Y_d$，说明在两次考试中同样好．关于这个例子还有两点需要说明：

① X_d 和 Y_d 分别称为这名同学在两次考试中的标准分．在标准分的计算公式中需要用到随机变量的均值和标准差，而在实际应用中并不知道这些量，解决的途径是通过所有参加考试同学的成绩分别估计（样本平均值估计随机变量的均值，样本标准差估计随机变量的标准差）．

② 结论“如果 $X_d<Y_d$，说明在第二次考试中发挥更好”并不一定真成立，因为很有可能是某些偶然的随机因素引起 $X_d<Y_d$．例如很可能是某种偶然因素使得参加第一次考试的学生成绩普遍偏高，而该名同学发挥的是平常水平，结果使得该名同学的标准分数偏低．为了排除这些偶然因素的影响，可以采用假设检验的方法考察能够在犯错误概率一定的前提下推断“在第二次考试中发挥更好”．有关假设检验的内容，感兴趣的可以查阅有关概率统计教科书．

(5) 用随机变量的均值作为随机变量偏离程度度量参考点的原因．设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

其方差的定义为

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i\ .$$

这里，随机变量的各个不同值的偏离程度都以这个随机变量的均值为参考点来度量，主要是因为从平均的角度来讲，随机变量的各个不同值离均值最近（在平方距离度量的意义下），即对任何常数 c，有下面的关系式成立：

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2p_i\ .$$

事实上，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2p_i&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X)+E(X)-c)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i+\sum_{i=1}^{n}(E(X)-c)^2p_i+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))(E(X)-c)p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i+(E(X)-c)^2=D(X)+(E(X)-c)^2,\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\ (x_i-c)^2p_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i=D(X),$$

当且仅当 $c=E(X)$ 等号成立．

(6) 随机变量的方差与样本的方差的联系与区别．教科书通过类比样本方差的定义给出随机变量方差的定义，那么它们的联系与区别是什么？可以类似于随机变量的均值与样本的平均值的联系与区别的讨论，介绍随机变量方差与样本方差之间的联系与区别．

(7) 教科书第 66 页“思考”提出：“如果其他班级参赛选手的射击成绩都在 9 环左右，本班应该派哪一名选手参赛？如果其他班级参赛选手的成绩在 7 环左右，又应该派哪一名选手参赛?”这是为了引导学生灵活运用随机变量的均值和方差的含义解决实际问题. 在选择随机变量时，到底选择方差小的还是选择方差大的，应当由具体情况决定.

如果其他班级参赛选手的射击成绩都在 9 环左右，而本班的两名候选人的平均成绩只有 8 环，要想取胜或不输，本班的选手必须超常发挥. 一般来讲，方差越大的随机变量，超常发挥的可能性越大，因此应该派第一名同学参赛. 当然，这里已经具体给出了两名选手射击成绩的分布列，可以通过分布列分别计算出他们获胜或不输的概率（认为 9 环就不输).

如果其他班级参赛选手的成绩在 7 环左右，要想取胜或不输，本班选手的射击成绩最好能以较大的概率稳定在 8 环左右. 在这种情况下，由于本班的两名候选人的平均成绩只有 8 环，因此选择射击成绩更集中于 8 环的选手，即选择方差小的选手获胜或不输的可能性大，所以应选第二名同学参加比赛. 当然，这里也可以通过分布列分别计算出他们获胜或不输的概率（认为 7 环就不输).

(8) 教科书关于 66 页随机变量服从两点分布和二项分布时求方差的公式，及“探究”的说明. 这些结论很重要，因此是以公式的形式列出. 这些结论的证明可以作为练习. 下面分别给出这几个结论的证明.

① 若 X 服从两点分布 $B(1,\ p)$，则 $D(X)=p(1-p)$.

由两点分布随机变量均值的计算公式得 $E(X)=p$，于是

$$D(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p).$$

② 若 $X\sim B(n,\ p)$，则 $D(X)=np(1-p)$.

$$\begin{aligned}D(X)&=\sum_{i=0}^{n}\ (i-E(X))^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\ (i^2-2npi+(np)^2)\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\ i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-2np\sum_{i=0}^{n}\ i\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}+(np)^2\sum_{i=0}^{n}\ \mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\ i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-2(np)^2+(np)^2=\sum_{i=0}^{n}\ i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-(np)^2,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\ i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}&=\sum_{i=0}^{n}\ (i(i-1)+i)\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=2}^{n}\ i(i-1)\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}+\sum_{i=0}^{n}\ i\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=n(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\ \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-2-(i-2))!}p^{i-2}(1-p)^{n-2-(i-2)}+np\\&=n(n-1)p^2\sum_{i=0}^{n-2}\ \mathrm{C}_{n-2}^ip^i(1-p)^{n-2-i}+np\\&=n(n-1)p^2+np,\end{aligned}$$

因此

$$D(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np-np^2=np(1-p).$$

③ $D(aX+b)=a^2D(X)$.

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

由 $Y=aX+b$(a，b 为常数）知 Y 也是离散型随机变量，Y 的分布列为

Y	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_i+b	…	ax_n+b
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

由均值的线性性质得 $E(Y)=aE(X)+b$，于是

$$\begin{aligned}D(aX+b)=D(Y)&=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-E(Y))^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-aE(X)-b)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(ax_i-aE(X))^2p_i\\&=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-EX)^2p_i=a^2D(X).\end{aligned}$$

从上面的结论可以看出，平移变换不改变随机变量的方差，但伸缩变换改变随机变量的方差.

(9) 例题的说明.

例 4 的目的是训练学生利用方差的定义计算离散型随机变量的方差、标准差，属于基本题.

例 5 的目的是应用随机变量方差解决实际问题. 有两个单位，每个单位有四种不同的职位，四种不同职位的工资已知，该申请者能获得每种职位的概率已知，在知道以上的信息后，该选择哪个单位呢?

通常，首选平均工资较高的单位；如果两个单位工资的均值相等，就需要进一步通过方差的比较，再结合自己的特点选择合适的单位.

在两个单位工资的均值相等的情况下，如果认为自己的能力很强，应选择工资方差大的单位；如果认为自己的能力不强，就应选择工资方差小的单位. 原因如下：

① 方差大，意味着不同岗位的工资待遇差别大. 因此对于能力低的人很可能会长期从事低工资岗位工作；而对于能力高的人，经过一段时间的努力，会很快得到提升，从而得到高工资岗位.

② 方差小，意味着所有岗位的工资待遇差别不大，都接近于工资的均值水平. 因此对于能力低的人来说，在这种单位工作会比在工资方差大的单位得到更多的收入；而对于能力强的人来说，在这种单位工作的发展前途不如在工资方差大的单位的发展前途好.

教科书中，“如果你希望不同职位的工资差距小一些，就选择甲单位；如果你希望不同职位的工资差距大一些，就选择乙单位”，就隐含了前面的含义.

四、教学设计案例

2.3.1 离散型随机变量的均值

1. 教学任务分析

(1) 通过实例使学生理解取有限值离散型随机变量均值的含义：随机变量的均值刻画了随机变量取值的平均水平. 离散型随机变量的分布列全面地刻画了它的取值规律，而随机变量的均值是从一个

侧面刻画随机变量取值特点.

（2）通过比较使学生知道随机变量的均值与样本的平均值的联系与区别：随机变量的均值是常数，但样本的平均值是一个随机变量，它随着样本的变化而变化. 在随机变量的均值未知的情况下，通常用随机变量的观测值的平均值估计随机变量的均值，因为对于简单随机样本，随着样本容量的增加，样本的平均值越来越接近随机变量的均值.

（3）利用均值解决实际问题. 在一些决策问题中，会有很多可供选择方案，那么如何科学地选择好的方案？比较随机变量的均值是其中一种方法.

2. 教学重点与难点

离散型随机变量均值的含义及其应用.

3. 教学基本流程

回忆离散型随机变量分布列的内容

↓

混合糖果的定价问题

↓

离散型随机变量均值的定义

↓

离散型随机变量均值的性质

↓

与样本均值的比较

↓

二项分布均值的计算及例子

↓

均值的应用

↓

课堂练习、小结与课后作业

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动	备注
（1）你能说说刻画离散型随机变量取值统计规律的方法吗？	复习随机变量分布列概念.	教师引导学生回忆离散型随机变量分布列的内容.	
（2）你能回答60页的“思考”吗？	引导学生思考加权平均和权数的概念.	教师启发学生思考三种糖果混合后的定价问题，也可以自己举例，但这里几种糖果最好是不等比例的混合.	

续表

问　题	设计意图	师生活动	备注
(3) 假设混合糖果中每颗糖果的质量相同，你能解释权数的含义吗？	引导学生思考权数的含义.	教师启发学生思考、讨论得出：权数就是从混合糖果中任取一颗糖果，取到每种糖果的概率. 在混合糖果中，任取一颗糖果，它每千克的价格用 X 表示，引导学生写出 X 的分布列，解释每千克混合糖果的定价公式：取值乘以取该值的概率，这就是混合糖果的合理价格，也就是在混合糖果中，任取一颗糖果，它的每千克的价格 X 的平均值. 给出一般离散型随机变量的均值的公式.	权数就是从混合糖果中任取一颗糖果，取到每种糖果的概率，其前提是“质量相同”.
(4) 一个离散型随机变量可能取很多值，那么它的均值表示什么含义？	引导学生明确离散型随机变量的均值的含义.	教师利用混合糖果定价的例子，解释：离散型随机变量的均值一定在随机变量可能取值的最小值和最大值之间，它表示随机变量可能取值的平均水平.	
(5) 如果 X 是一个随机变量，a，b 为常数，$Y=aX+b$ 是不是随机变量？如何计算 Y 的均值？	引入随机变量均值的性质.	教师提出问题，引导学生思考. 学生思考并给出答案. (1) Y 是一个随机变量； (2) 给出 Y 的分布列，并利用离散型随机变量的均值的计算公式给出 Y 的均值的计算公式 $$E(aX+b)=aE(X)+b.$$	
(6) 样本平均值与离散型随机变量均值之间的联系和区别是什么？	使学生知道随机变量的均值与样本的平均值的联系与区别.	教师：哪位同学能通过一个例子，说说随机变量和样本的关系？ 学生思考，讨论，回答问题. 教师：哪位同学能举例说说随机变量的均值与样本的平均值的联系与区别？ 学生思考，讨论，回答问题.	首先要让学生理解样本和随机变量的关系.
(7) 两点分布、二项分布的均值分别是多少？	给出两点分布和二项分布的均值的计算公式.	教师提出问题，并给出具体两个公式的推导过程. 学生思考，讨论，计算.	
(8) 教科书例 2.	熟悉离散型随机变量均值的计算公式.	教师引导学生自己得出解答.	
(9) 你能回答 63 页的“思考”吗？	进一步加深对随机变量均值含义的理解.	教师提出问题，引导学生思考. 学生思考，得到答案：90 分是随机变量的均值，而这次考试的成绩只是随机变量的一次观测值.	
(10) 教科书例 3.	应用随机变量的均值解决实际问题.	教师引导学生解答. 要特别注意将实际问题转化为均值计算问题，引导学生理解为什么可以通过比较均值作出决策.	
(11) 如何理解方案 2 是一个好的方案？	通过具体问题进一步理解随机变量均值的含义.	教师提出问题，引导学生思考，讨论，给出正确的解释.	
小结： 1. 离散型随机变量均值的定义. 2. 样本平均值和随机变量均值的区别与联系. 3. 随机变量均值的含义. 4. 随机变量均值的应用.			

五、习题解答

练习（第 64 页）

1. 不一定. 比如掷一枚硬币，出现正面的次数 X 是随机变量，它取值 0，1，取每个值的概率都为 0.5，其均值是 0.5，即不是 1，也不是 0. 再比如随机变量 X 的分布列为

X	-10	10
P	0.4	0.6

X 的均值是 2，而不是 10.

说明 本题的目的是希望学生不要误解均值的含义，均值是随机变量取值的平均水平，它不一定是随机试验的结果之一.

2. $E(X)=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1+5\times0.1=2.3$.

说明 根据定义计算离散型随机变量的均值，是最基本的习题.

3. X 的分布列为

X	-1	1
P	0.5	0.5

所求均值为

$$E(X)=-1\times0.5+1\times0.5=0.$$

说明 要计算离散型随机变量的均值，一般首先写出该随机变量的分布列.

4. 第 1 台机床生产零件的平均次品数

$$E(X_1)=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1,$$

第 2 台机床生产零件的平均次品数

$$E(X_2)=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2=0.9.$$

因为第 2 台机床生产零件的平均次品数 $E(X_2)$ 小于第 1 台机床生产零件的平均次品数 $E(X_1)$，所以第 2 台机床更好，其实际含义是随着产量的增加，第 2 台机床生产出的次品数要比第 1 台机床生产出的次品数小.

说明 本题考查学生对随机变量均值含义的理解.

5. 同时抛掷 5 枚质地均匀的硬币，相当于做 5 次重复试验，出现正面向上的硬币数 X 服从二项分布 $B(5,\ 0.5)$，所以 $E(X)=np=5\times0.5=2.5$.

说明 教科书已给出二项分布的均值，本题可以直接利用这个结果.

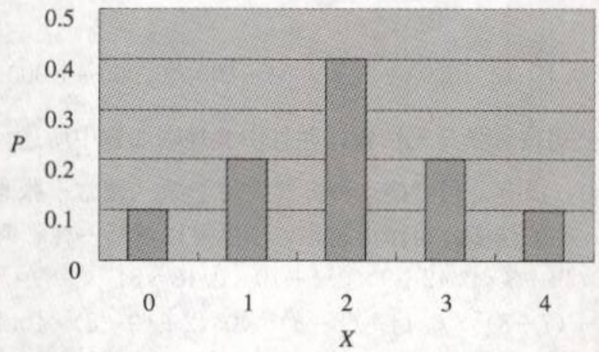
练习（第 68 页）

1. $E(X)=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.4+3\times0.2+4\times0.1=2$,

$D(X)=(0-2)^2\times0.1+(1-2)^2\times0.2+(2-2)^2\times0.4+(3-2)^2\times0.2+(4-2)^2\times0.1=1.2$,

$\sqrt{D(X)}\approx1.095$.

说明 这个分布列是对称的，对称轴是 $X=2$，所以均值为 2. 图象表示的分布列如下：



（第 1 题）

2. $E(X)=c\times1=c$，$D(X)=(c-c)^2\times1=0$.

说明 随机变量 X 满足 $P(X=c)=1$，其中 c 为常数，这个分布称为单点分布，实际上，这里把常数看成是特殊的离散型随机变量. 因为该随机变量仅取一个值，当然刻画离散程度的量应该为 0.

3. 随机变量的方差反映随机变量的取值稳定（或偏离）于均值的程度. 方差越大，随机变量的取值越分散；方差越小，随机变量的取值越集中于均值附近. 通常在均值相等的情况要比较方差的大小. 例如，在本节 63 页例 3 中，三个方案的平均损失分别为 3 800，2 600，3 100，平均损失不等，所以选择平均损失最小的方案. 但假如三个方案的平均损失相等，通常我们会选择方差最小的方案. 再例如，有两种投资方案，它们的平均收益相同，但方差不同，是选择方差大的方案还是选择方差小的方案，这要因情况而定. 如果一个人比较喜欢冒险，那么应该选择方差大的方案；如果一个人喜欢稳定的收入，那么应该选择方差小的方案. 如股票投资和储蓄两种方案，假设它们的平均收益相同，喜欢冒险的人一般会选择股票投资.

说明 通过让学生举例子的方式，希望学生理解方差的含义.

习题 2.3（第 68 页）

A 组

1. $E(X)=-2\times0.16+1\times0.44+3\times0.40=1.32$，
$E(2X+5)=2\times E(X)+5=7.64$，
$D(X)=(-2-1.32)^2\times0.16+(1-1.32)^2\times0.44+(3-1.32)^2\times0.40=2.937\,6$，
$\sqrt{D(X)}\approx1.714$.

说明 已知离散型随机变量的分布列，计算均值、方差和标准差属于最基本的习题.

2. $a=b=\frac{1}{3}$.

说明 利用均值的定义和分布列的性质即可求得.

3. 在同样的条件下连续射击 10 次，相当于做 10 次独立重复试验，击中靶心的次数 X 服从二项分布 $B(10, 0.9)$，所以 $E(X)=np=10\times0.9=9$.

说明 此题类似 64 页第 5 题，在教科书中已给出二项分布的均值的公式，本题可以直接利用这个结果，不用再按均值的定义重新计算.

4. 设 X 表示一张彩票的中奖金额，则它的分布列为

X	0	2	10	50	100	1 000
P	0.854 5	0.1	0.03	0.01	0.005	0.000 5

其均值为

$$E(X)=2\times 0.1+10\times 0.03+50\times 0.01+100\times 0.005+1\,000\times 0.000\,5=2.$$

说明 如果发行彩票的公司按每张 2 元销售，并且中奖规则如题中所述，那么该公司一分钱也赚不到，连手续费都要自己出，没有公司会按这种方式发行彩票. 通常一张彩票可能中奖金额的均值要小于买一张彩票的金额，小的越多公司挣得越多，学生可以就某一种彩票的中奖情况进行分析.

5. $E(X_1)=6\times 0.16+7\times 0.14+8\times 0.42+9\times 0.1+10\times 0.18=8$,

$$D(X_1)=(6-8)^2\times 0.16+(7-8)^2\times 0.14+(8-8)^2\times 0.42+(9-8)^2\times 0.1+(10-8)^2\times 0.18$$
$$=1.6,$$

$E(X_2)=6\times 0.19+7\times 0.24+8\times 0.12+9\times 0.28+10\times 0.17=8$,

$$D(X_2)=(6-8)^2\times 0.19+(7-8)^2\times 0.24+(8-8)^2\times 0.12+(9-8)^2\times 0.28+(10-8)^2\times 0.17$$
$$=1.96.$$

因为甲、乙两名射手射击的环数均值相等，而乙射手射击的环数方差比甲射手射击的环数方差大，所以可以说，甲、乙两名射手射击的平均水平没有差别，在多次射击中平均得分差别不会很大，但甲通常发挥比较稳定，多数得分在 8 环，而乙得分比较分散，近似平均分配在 6～10 环.

说明 考查学生对离散型随机变量的均值和方差的理解.

B 组

1. 利用古典概型计算概率的公式计算试验成功的概率：

$$P=\frac{\text{试验成功包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}.$$

在 30 次试验中成功次数 X 服从二项分布 $B(30, \frac{5}{9})$，成功次数 X 的均值为

$$E(X)=np=30\times\frac{5}{9}=\frac{50}{3}\approx 16.7.$$

说明 本题的关键是看出在 30 次试验中的成功次数 X 服从二项分布和计算试验成功的概率 p.

2. 设这台机器一周内可能获利 X 万元，首先计算 X 可能取每个值的概率：

$$P(X=5)=(1-0.1)^5=0.590\,49,$$
$$P(X=2.5)=C_5^1\cdot 0.1\cdot(1-0.1)^4=0.328\,05,$$
$$P(X=0)=C_5^2\cdot 0.1^2\cdot(1-0.1)^3=0.072\,9,$$
$$P(X=-1)=1-P(X=5)-P(X=2.5)-P(X=0)=0.008\,56,$$

即 X 的分布列如下：

X	5	2.5	0	-1
P	0.590 49	0.328 05	0.072 9	0.008 56

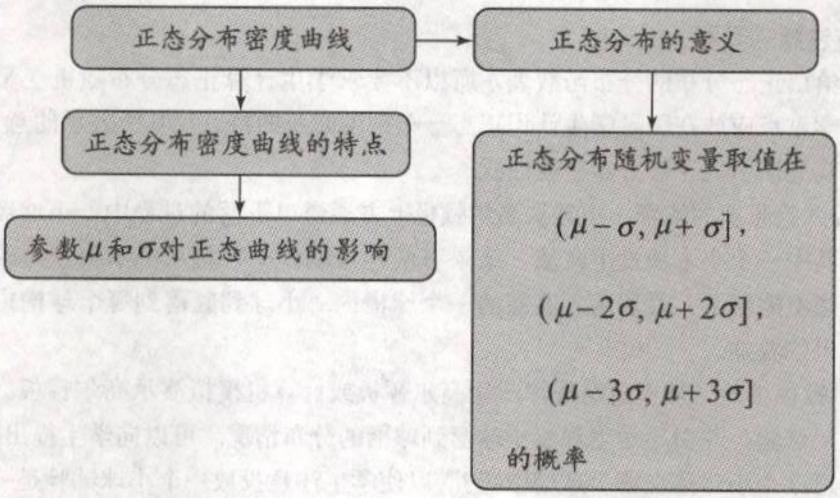
所以，这台机器一周内可能获利的均值为

$$E(X)=5\times 0.590\,49+2.5\times 0.328\,05+0\times 0.072\,9+(-1)\times 0.008\,56=3.764\,015.$$

说明 与习题 A 中第 4 题类似，需要先求出 X 的分布列，然后再求 X 的均值. 这里求分布列时用到了二项分布.

2.4 正态分布

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 正态分布密度曲线的特点；
2. 正态分布密度曲线所表示的意义.

难点：

1. 在现实生活中什么样的随机变量服从正态分布；
2. 正态分布密度曲线所表示的意义.

三、编写意图与教学建议

1. 关于正态分布的概念

正态分布在统计中是很常用的分布，它能刻画很多随机现象. 由中心极限定理知一个随机变量如果是众多的、互不相干的、不分主次的偶然因素作用结果之和，它就服从或近似服从正态分布. 服从正态分布的随机变量是一种连续型随机变量. 我们知道，离散型随机变量最多取可列个不同值，它等于某一特定实数的概率可能大于0，人们感兴趣的是它取某些特定值的概率，即感兴趣的是其分布列；连续型随机变量可能取某个区间上的任何值，它等于任何一个实数的概率都为0，所以通常感兴趣的是它落在某个区间的概率. 离散型随机变量的概率分布规律用分布列描述，而连续型随机变量的概率分布规律用分布密度函数（曲线）描述.

正态分布密度函数的推导是十分困难的，一般教科书采用直接给出正态分布密度函数表达式的方法，这使学生在很长一段时间里不理解正态分布的实际含义. 本书采用高尔顿板试验的方法引入正态分布密度曲线，目的是为了帮助学生理解正态分布曲线的来源. 教学中教师可以利用真正的高尔顿板

或利用计算机模拟的方式进行试验，使学生对钟型曲线的来源有一个直观的印象，从描述钟型曲线形状的角度引入正态分布密度函数的数学表达式. 教科书列举了一些服从正态分布的随机变量的例子，以说明正态分布在概率统计理论和实际应用中都占有重要的地位.

教科书通过分析正态分布密度曲线的解析表达式，得到正态分布密度曲线的特点，借助对比不同参数的正态分布密度曲线的图象，得到两个参数的含义，并直接给出了正态分布随机变量分别取值在$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$，$(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma]$，$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma]$的概率.

2. 教学中应注意的问题

教科书没有给出正态分布的分布函数表，所以不要求学生计算正态分布随机变量落到任意区间的概率. 本节的教学重点应放在引导学生认识正态分布密度曲线的特点及其所表示的意义上.

(1) 通过直观方法引入正态分布密度曲线.

① 高尔顿板试验原理的解释. 小球从高尔顿板上方通道口下落的过程中，小球经过每一层圆形小木块时，都要和其中一个小木块发生碰撞，结果有两种可能，一种是从小木块左边的空隙落下，另一种是从小木块右边空隙落下，最后落入底部的一个球槽内. 小球到底落到哪个球槽内，是很多次与小木块随机碰撞结果的叠加.

② 观察高尔顿板试验，从中总结规律. 用高尔顿板或计算机模拟演示高尔顿板（模拟演示课件可以从人教网下载）试验，并引导学生观察小球落到球槽的分布情况. 可以向学生提出问题："在投放小球之前，你能知道这个小球落在哪个球槽中吗?" 以使学生注意投放一个小球试验是一个随机试验，其结果就是球落在某一个小槽内.

重复投放n个小球，相当于做了n次独立重复试验，某一槽中球的个数就是小球落到这个槽中的频数，这个频数和槽中的小球堆积高度成正比. 因此各个槽中小球的堆积高度，反映了小球落入各个槽内的频数分布规律.

③ 为了表达这个结论，教科书把球槽编号. 这实际上是把上述随机试验的结果与一些自然数建立起了一一对应关系，即构造了一个描述这个随机试验的离散型随机变量，从而可以用随机变量来研究试验的概率分布规律.

对于离散型随机变量而言，其分布列完全刻画了它的概率分布规律，但是现在无法知道所构造的随机变量的分布列，所以只能通过频率来近似.

④ 由于现在的频率分布直方图相当于是等距分组的，所以频率直方图的外形和试验中小球的堆积形状是一样的. 因此，可以通过观察试验后小球的堆积形状发现这个随机变量的分布列特征.

教学中，可以对不同试验次数的小球堆积形状作比较，使学生发现随着试验次数的增加堆积形状变化规律，从而推测这个随机变量分布列的特征：随着试验次数的增加，频率直方图的形状会越来越像一条钟型曲线.

⑤ 严格地讲，随着试验次数的增加，这个频率直方图的极限形状是一个二项分布的图形，因此这个频率直方图的极限不是一条光滑的钟型曲线. 教科书 71 页中"越来越像一条钟型曲线"含义是钟型曲线很"像"这个随机变量的分布列，当高尔顿板中小木块的排数越多，即底部的球槽的个数越多时，分布列图形的形状就越像钟型曲线. 这些解释的理论依据是中心极限定理，感兴趣的教师可以参考概率论教科书.

在给出正态分布密度曲线的定义后，可以给出正态分布密度函数的定义，称$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$为正态分布密度函数.

(2) 教学中，要解释参数μ和σ的含义，以及如何用样本来估计它们，这些知识在实际中很有用. 实际上，参数μ和σ就是正态分布随机变量的均值和标准差，因此可以用样本平均值和样本标准差来

估计它们. 由于学生仅有离散型随机变量的均值和标准差的概念，所以教科书在 72 页以边注的形式给出这个结论.

(3) 关于正态分布随机变量的产生背景. 因为中学生没有学习中心极限定理，所以教科书的表述为“经验表明一个随机变量如果是众多的、互不相干的、不分主次的偶然因素作用结果之和，它就服从或近似服从正态分布”. 作为应用，教科书解释了为什么在高尔顿板投球试验中小球落地的坐标 X 近似地服从正态分布.

(4) 为体现正态分布的重要性，教科书列举了许多服从正态分布的随机变量的例子. 教师可以引导学生分析一下为什么它们都近似服从正态分布，以加强学生对随机变量产生背景的印象. 比如某一地区同龄人群身高的分布，就可以看成近似正态分布. 因为一个人的身高受许多因素的影响，包括遗传基因、饮食习惯、锻炼的时间、学习的时间、生活习惯、气候条件、周围环境等.

(5) 正态曲线的特点包括图象与坐标横轴之间的关系、单峰性、对称性、峰值的位置与大小、图象与坐标横轴围成的面积. 这里前四个特点都可以根据函数曲线的形状及正态分布密度函数表达式得到，最后一个需要利用概率的性质. 事实上，取 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则有

$$1 = P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x\,,$$

而上式右端积分恰为曲线 $y=\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 与坐标横轴围成图形的面积. 需要指出的是上式第二个等号的证明需要较多的概率论知识，因此教科书没有给出具体证明.

(6) 教科书利用图形直观展示了两个参数对正态分布密度曲线的影响，进而得出正态分布的一些其他性质. 教学中，只需要通过图形直观使学生认识这些性质即可.

四、习题解答

练习（第 74 页）

1. 由正态分布密度曲线可知，参数 $\mu=60$，$\sigma=8$，所以

$$P(52 < X \leqslant 68) = P(60-8 < X \leqslant 60+8) \approx 0.682\,7.$$

说明 本题从两个方面考查学生对正态分布的理解：第一，对正态分布密度曲线特点的认识；第二，了解 X 落在区间

$$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma),\ (\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma),\ (\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$$

的概率大小.

2. 例 1 某地区 16 岁男孩的身高分布可以近似看成正态分布.

例 2 某厂生产的某种型号的灯泡的使用寿命的分布可以近似看成正态分布.

说明 教科书中第 72 页给出了在现实生活中服从正态分布的例子，学生只要把那些例子具体化，就能举出很多实例.

3. 由于正态分布密度曲线关于 $x=\mu$ 对称，因此

$$P(\mu < X < \mu+\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.682\,7 \approx 0.341\,4.$$

说明 利用正态分布密度曲线的对称性和 X 落在区间$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$，$(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma]$，$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma]$的概率，计算 X 落在其他一些特殊区间的概率.

习题 2.4（第 75 页）

A 组

1. (1) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=f(x),\ x\in(-\infty,+\infty),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) 当 $x=0$ 时，$f(x)$达到最大值 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(3) 在区间$(-\infty,\ 0]$上 $f(x)$单调递增，在区间$(0,\ \infty)$上 $f(x)$单调递减.

说明 本题中给出了标准正态分布的定义，即 $\mu=0$，$\sigma=1$ 的正态分布为标准正态分布. 此题的目的是加深学生对标准正态分布密度曲线的特点的认识.

2. 设该种包装的大米质量为 X，由 $X\sim N(10,\ 0.1^2)$知，正态分布密度函数的两个参数为

$$\mu=10,\ \sigma=0.1,$$

所以

$$P(9.8<X\leqslant 10.2)=P(10-2\times 0.1<X\leqslant 10+2\times 0.1)\approx 0.954\ 5.$$

说明 本题考查学生是否了解服从正态分布的随机变量 X 落在区间

$$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma),\ (\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma),\ (\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$$

的概率大小.

B 组

1. 对于任何实数 a 和自然数 n 有

$$\left\{a-\frac{1}{n}<X\leqslant a\right\}=\{X=a\}\cup\left\{a-\frac{1}{n}<X<a\right\},$$

且事件$\{X=a\}$与事件$\left\{a-\frac{1}{n}<X<a\right\}$互不相容，由概率的加法公式得

$$P\left(a-\frac{1}{n}<X\leqslant a\right)=P(X=a)+P\left(a-\frac{1}{n}<X<a\right)\geqslant P(X=a).$$

令 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，所以

$$\begin{aligned}0\leqslant P(X=a)\leqslant P\left(a-\frac{1}{n}<X\leqslant a\right)&=\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{n\sigma\sqrt{2\pi}},\ n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即 $P(X=a)=0$.

说明 这个题目属于综合性题目，需要的知识范围比较广. 首先要用到概率的单调性，即若事件 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；其次要用到正态分布的定义；最后还要用到积分的单调性，即如果 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 由于本套教科书没有介绍概率的单调性，所以在这里是利用了概率的加法公式证明. 由此题的结论可知，如果随机变量 X 服从正态分布，则有

$$P(a<x<b)=P(a<x\leqslant b)=P(a\leqslant x<b)=P(a\leqslant x<b).$$

2. 由 $X\sim N(5,\ 1)$知，正态分布密度函数的两个参数为 $\mu=5$，$\sigma=1$. 又因为该正态密度曲线关于 $x=5$ 对称，所以

$$P(5<X<7)=\frac{1}{2}P(3<X<7)\approx\frac{1}{2}\times0.954\,5\approx0.477\,3;$$

$$P(5<X<6)=\frac{1}{2}P(4<X<6)\approx\frac{1}{2}\times0.682\,7\approx0.341\,4;$$

$$P(6<X<7)=P(5<X<7)-P(5<X<6)\approx0.135\,9.$$

说明 利用正态分布的对称性和 X 落在区间

$$(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma),\ (\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma),\ (\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$$

的概率，可以计算 X 落在一些区间的概率，这里主要考查学生能否灵活运用所掌握的知识解决问题.

复习参考题（第 77 页）

A 组

1. 根据分布列的性质得知 q 要满足以下条件：

$$\begin{cases}0.5+1-2q+q^2=1,\\1-2q\geqslant0,\\q^2\geqslant0.\end{cases}$$

所以常数 $q=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

说明 考查学生是否掌握离散型随机变量分布列的两个性质.

2. 因为随机变量 X 取所有可能的值 1，2，…，n 是等可能的，所以取每个可能值的概率均为 $\frac{1}{n}$，从而

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}i\times\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

又 $E(X)=50.5$，推得 $\frac{n+1}{2}=50.5$，即 $n=100$.

说明 随机变量 X 取所有可能的值 1，2，…，n 是等可能的，即 X 的分布列为

X	1	2	…	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

这样的分布称为离散型均匀分布，由此可以计算均值.

3. 假设要用 n 门大炮同时对目标射击，才能使目标被击中的概率超过 95%. 可以把一门大炮的射击看成是一次随机试验，将击中目标看成是成功，则成功概率为 0.3. 用 X 表示这 n 门大炮中击中目标的门数，即 n 次试验中出现的成功次数，则 $X\sim B(n,\ 0.3)$. 事件“目标被击中”可以表示为 $\{X>0\}$，它的对立事件是 $\{X=0\}$，所以“目标被击中”的概率为

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-(1-0.3)^n.$$

为使目标被击中的概率超过 95%，只有选择合适的 n，使 $1-(1-0.3)^n>95\%$，解得 $n>8.4$. 根据实际含义，至少要用 9 门大炮才能使目标被击中的概率超过 95%.

为了提高击中目标的概率，可以采取多门炮向目标同时射击的方法. 炮的门数越多，击中目标

的概率越大.

说明 本题目是应用二项分布解决实际问题，主要锻炼学生把实际问题转化为二项分布问题，并用二项分布随机变量表示所考虑的事件的能力.

4. 商场有两种方案可以选择：

第 1 种方案是选择在商场内促销，此时可获利 2 万元.

第 2 种方案是选择在商场外促销，此时可能获利 X 万元，X 的分布列为

X	10	-4
P	0.6	0.4

第 2 种方案的平均收入为

$$E(X)=10\times0.6+(-4)\times0.4=4.4.$$

若根据平均收入最高的准则，因为 $4.4>2$，所以应选择第 2 种方案.

说明 尽管第 2 种方案的平均收入较高，但并不能保证选择第 2 种方案一定能获利比第 1 种方案高，也可能损失 4 万元，所以保守的经营者也可能选择第 1 种方案.

B 组

1. 一份意外伤害保险费为 20 元，共销售 10 万份保单，可得保险费 200 万元. 保险金额为 45 万元，表示如果某人出险，需要赔付 45 万元. 在一年内若有 5 人出险，保险公司将要赔付 225 万元；在一年内若有 4 人出险，保险公司将要赔付 180 万元. 可以看出在一年内若有 4 人以上出险，保险公司将亏本. 每个人在一年内是否遭遇意外伤害可以看成是一次随机试验，把遭遇意外伤害看作成功，则成功概率为 10^{-6}. 10 万参保人可以看成是 10 万次独立重复这种试验，用 X 表示一年内这 10 万人中遭遇意外伤害的人数，则 $X\sim B(100\ 000,\ 0.000\ 001)$.

(1) 这家保险公司亏本的概率为

$$P(X>4)=1-P(X\leqslant4)\approx1-0.999\ 999\ 923=7.7\times10^{-8}.$$

可以看出这家保险公司亏本的概率是很小的，几乎不可能发生.

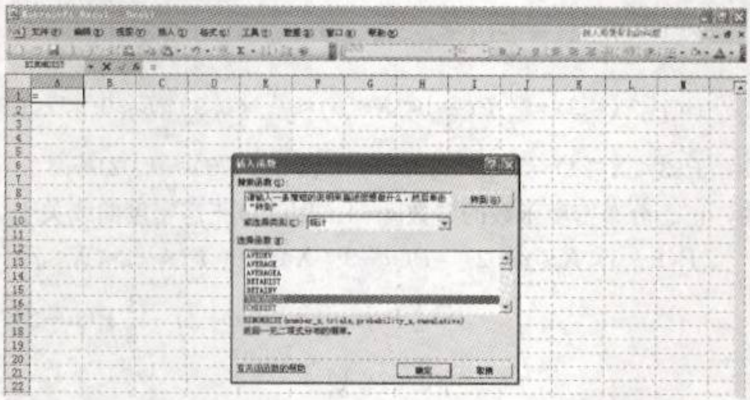
(2) 这家保险公司一年内获利不少于 110 万元，表示一年内最多只能有 2 人出险，所以这家保险公司一年内获利不少于 110 万元的概率

$$P(X\leqslant2)\approx0.999\ 845\ 351.$$

可以看出这家保险公司一年内获利不少于 110 万元的概率是很大的.

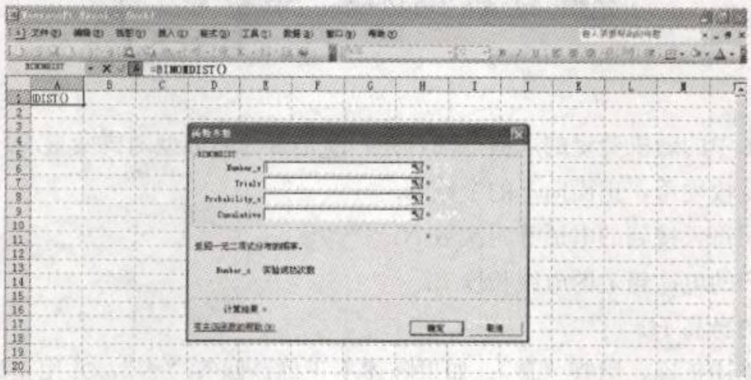
说明 当 n 很大时计算二项分布的概率比较困难，可以用统计软件完成. 一般统计软件都有计算二项分布的概率的内部函数，把该函数调出，并给定各个变量或参数的值，即可得到所求二项分布的概率. 比如，在 Excel 软件中，计算二项分布的概率的内部函数为 BINOMDIST，这个函数有 4 个参数，分别是 Number _ s（试验成功的次数），Trials（独立重复试验的总次数），Probability _ s（每次试验中成功的概率），Cumulative（逻辑值，决定函数的形式. 累积分布函数，使用 true，概率密度函数，使用 false）. 以下以 Excel 为例，给出具体的计算步骤：

① 先选定一个单元格，然后选择“插入”下拉菜单，选择“函数”选项，如下图：



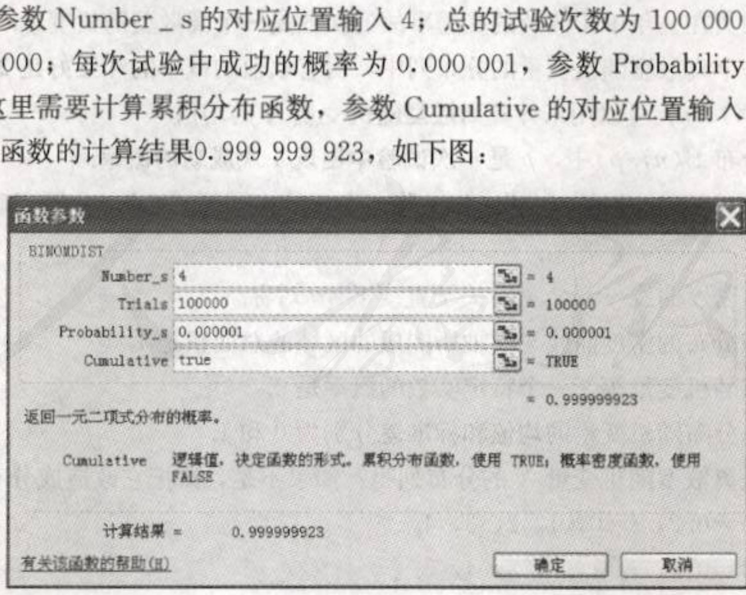
（第 1 题①）

② 当出现对话框时，从“或选择类别”窗口选择“统计”，从“函数名字”窗口选择“BINOMDIST”，选择确定，如下图：



（第 1 题②）

③ 当 BINOMDIST 对话框出现时，分别输入 4 个参数．比如在本题中要计算 $P(X\leqslant 4)$，此时成功的次数为 4，参数 Number _ s 的对应位置输入 4；总的试验次数为 100 000，参数 Trials 的对应位置输入 100 000；每次试验中成功的概率为 0. 000 001，参数 Probability _ s 的对应位置输入 0. 000 001；这里需要计算累积分布函数，参数 Cumulative 的对应位置输入 true．参数全部输入后可以看见该函数的计算结果0. 999 999 923，如下图：



（第 1 题③）

④ 按确定后，在指定的单元格中出现该累积概率值 0. 999 999 923.

2. 由 $X\sim N(1,1)$知，正态分布密度函数的两个参数为 $\mu=1$，$\sigma=1$．因为该正态分布密度曲线关于 $x=1$ 对称，所以

$$P(1<X\leqslant 4)=\frac{1}{2}P(-2<X\leqslant 4)\approx\frac{1}{2}\times 0.997\,3\approx 0.498\,7;$$

$$P(1<X\leqslant 3)=\frac{1}{2}P(-1<X\leqslant 3)\approx\frac{1}{2}\times 0.954\,5\approx 0.477\,3;$$

$$P(3<X\leqslant 4)=P(1<X\leqslant 4)-P(1<X\leqslant 3)\approx 0.021\,5.$$

3. 由 $X\sim N(\mu,\ 1)$知，正态分布密度函数的参数 $\sigma=1$. 因为该正态密度曲线关于 $x=\mu$ 对称，所以

$$\begin{aligned}P(\mu-3<X\leqslant\mu-2)&=P(\mu-3<X\leqslant\mu)-P(\mu-2<X\leqslant\mu)\\&=\frac{1}{2}P(\mu-3<x\leqslant\mu+3)-\frac{1}{2}P(\mu-2<X\leqslant\mu+2)\\&\approx 0.021\,4.\end{aligned}$$

III 自我检测题

1. 确定下列情形中的随机变量的取值范围，并判断是否为离散型随机变量.

（1）同时掷 5 枚硬币，正面向上的个数 X.

（2）一个公司每天接到的电话呼叫次数 N.

（3）某厂生产的电冰箱上的电线长度 L.

（4）高中生的身高 H.

2. 如果下面的陈述正确，回答“是”；如果陈述不正确，回答“否”，并用正确的词语代替粗体印刷的词语.

（1）排队取午饭等待的时间**是一个离散型**随机变量.

（2）一名驾驶员在一年中所涉及的交通事故的次数**是一个离散型**随机变量.

（3）在任何一个离散型随机变量的分布列中，所有取值的概率的和**正好是 2**.

（4）公式 $E(X)=np$ 可以用来计算**离散型**随机变量 X 的均值.

（5）在二项分布 $B(n,\ p)$中，**p 是 n 次试验中出现 1 次成功的概率**.

3. 如果下面的陈述正确，回答“是”；如果陈述不正确，回答“否”，并用正确的词语代替粗体印刷的词语.

（1）正态分布密度曲线 $y=\varphi_{\mu,\sigma}(x)$关于直线 $x=\mu$ **对称**.

（2）任何正态分布的密度曲线与横轴所围成的区域的**总面积**是 1.

（3）正态分布随机变量等于一个特定实数的**概率**是 0.

（4）标准正态分布随机变量的**均值和标准差**分别为 0 和 1.

4. 下列表达式是离散型随机变量 X 的分布列吗？如果不是，试把它改造成分布列.

（1）$P(X=i)=0.2$，$i=0$，1，2，3，4.

（2）$P(X=i)=0.2$，$i=1$，2，3，4，5.

（3）$P(X=i)=\dfrac{i^2+5}{50}$，$i=1$，2，3，4，5.

5. 下面的表达式是离散型随机变量 X 的分布列吗？为什么？

$$P(X=i)=\frac{i}{10},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

6. 设 $a>0$，$b>0$，试用二项分布证明 $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$.

7. 检查 100 件一盒的螺丝钉，每枚螺丝钉都分为“合格”或“不合格”，解释为什么一盒螺丝钉中的不合格螺丝钉枚数 X 服从二项分布，并写出 X 的分布列.

8. 掷骰子 20 次，用 X 表示这 20 次试验中出现结果小于 3 点的次数，解释为什么 X 服从二项分布，并写出 X 的分布列.

9. 园林公司种植的树的成活率为 90%，该公司种植的 10 棵树中有 8 棵或 8 棵以上将成活的概率是多少？从平均的角度来看，该公司种植的 10 棵树中将有多少棵成活？

10. 由家具制造商购买的每 10 块板中平均有 1 块是不能用于做家具的，一组 5 块这样的板中有 3 或4 块可用的概率什么？

11. 一名篮球运动员在比赛时罚球命中率为 80%，他在 5 次罚球中罚失 2 次的概率是多少？

12. 随机变量 $X\sim B(n, p)$，其均值等于 200，标准差等于 10，求 n 和 p 的值.

13. 随机变量 X 表示 5 次独立重复试验中成功的次数，每次试验的成功概率为 0.3，求这个随机变量比均值大的概率.

14. 一个医生由经验知道某一种药对 10%的病人有意外的副作用，求 10 个服用该药的病人中至多 2 个有意外的副作用的概率.

15. 一个盒中含 10 件产品，其中 3 件是不合格品，无放回地从中任取 2 件产品，用 X 表示这 2 件中的不合格品数，解释为什么 X 不是一个二项分布随机变量.

16. 一批电池用于手电筒（单电池）的寿命服从均值为 35.6 小时、标准差为 4.4 小时的正态分布，随机从这批电池中任意取一节，这节电池可持续使用不小于 40.0 小时的概率是多少？

17. 经过统计，一位同学每天上学路上（单程）所花时间 X 的样本的平均值为 22 分钟，其样本标准差为 2 分钟. 如果 X 服从正态分布，学校 8 点钟开始上课，为使该同学至少能够以 0.99 的概率准时到校，至少要提前多少分钟出发？

参考答案

1. (1) X 取值于$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，它为离散型随机变量.
   (2) N 取值的范围为非负整数全体，它为离散型随机变量.
   (3) L 取值的范围为非负实数全体，它不是离散型随机变量.
   (4) H 取值的范围为非负实数全体，它不是离散型随机变量.
2. (1) 否. 不是离散型.
   (2) 是.
   (3) 否. 正好是1.
   (4) 否. 服从二项分布 $B(n, p)$的.
   (5) 否. p 是 1 次试验中出现成功的概率.
3. (1) 是.
   (2) 是.
   (3) 是.
   (4) 是.
4. (1) 因为 $0<P(X=i)<1$，$i=0, 1, 2, 3, 4$，并且

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1,$$

所以是离散型随机变量 X 的分布列.

(2) 因为 $0<P(X=i)<1$，$i=1, 2, 3, 4, 5$，并且

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1,$$

所以是离散型随机变量 X 的分布列.

(3) 虽然 $0<P(X=i)<1$，$i=1$，2，3，4，5，但是

$$\begin{aligned}&P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{1}{50}(1^2+5+2^2+5+3^2+5+4^2+5+5^2+5)=\frac{8}{5}>1,\end{aligned}$$

所以不是离散型随机变量 X 的分布列．如果把表达式的右端除以常数 $\frac{8}{5}$，就可以得到一个分布列的表达式，即

$$P(X=i)=\frac{i^2+5}{80},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

5. 是．因为 $0<P(X=i)<1$，$i=1$，2，3，4，且

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{10}{10}=1,$$

所以是离散型随机变量 X 的分布列.

6. 需证明

$$1=\frac{1}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i a^i b^{n-i}.$$

注意到

$$\frac{1}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i a^i b^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\frac{a^i b^{n-i}}{(a+b)^n}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\frac{a}{a+b}\right)^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i},$$

因此只需证明

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\frac{a}{a+b}\right)^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i}=1.$$

考虑二项分布 $B\left(n,\ \frac{a}{a+b}\right)$，其成功概率为 $p=\frac{a}{a+b}$，进而 $1-p=\frac{b}{a+b}$．由分布列的性质知

$$1=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i p^i(1-p)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\frac{a}{a+b}\right)^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i},$$

即 $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i a^i b^{n-i}$.

7. 可以把一枚螺丝钉的加工过程看成是一个随机试验，其可能出现的结果是加工出的这枚螺丝钉“合格”或“不合格”，记 $p=P$(结果为“不合格”)．由于这盒中的每一枚螺丝钉都是在同样的环境下生产的，所以这 100 枚螺丝钉的加工过程可以看成是 100 次独立重复试验，因此其中出现的不合格螺丝钉枚数 X 服从二项分布 $B(100,\ p)$，其分布列为

$$P(X=i)=\mathrm{C}_{100}^i p^i(1-p)^{100-i},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100.$$

8. 掷一次骰子相当于进行一次随机试验，用 A 表示“掷出的点数小于 3”，则掷 20 次骰子相当于做了 20 次独立重复试验，X 恰为这 20 次试验中事件 A 发生的次数，从而 $X\sim B(20,\ p)$，其中 $p=P(A)=\frac{1}{3}$．进一步，X 的分布列为

$$P(X=i)=\mathrm{C}_{20}^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{20-i},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20.$$

9. 用 X 表示该公司种植的 10 棵树中的成活棵数，则 $X\sim B(10,\ 0.9)$．从而这 10 棵树中有 8 棵或 8 棵以上将成活的概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 8)&=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\\&=\mathrm{C}_{10}^8\times 0.9^8\times 0.1^2+\mathrm{C}_{10}^9\times 0.9^9\times 0.1+\mathrm{C}_{10}^{10}\times 0.9^{10}\end{aligned}$$

$$\approx 0.930.$$

从平均的角度来看，该公司种植的10棵树中将成活的棵数约为$E(X)=10\times 0.930\approx 9$.

10. 用X表示5块板中可用于做家具的板的数量，则$X\sim B(5, 0.9)$. 一组5块这样的板中有3或4块是可用的概率为

$$P(3\leqslant X\leqslant 4)=C_5^3\times 0.9^3\times 0.1^2+C_5^4\times 0.9^4\times 0.1=0.400\,95.$$

11. 用X表示这名运动员在5次罚球中罚失的次数，则$X\sim B(5, 0.2)$. 他在5次罚球中罚失2次的概率为

$$P(X=2)=C_5^2\times 0.2^2\times 0.8^3=0.204\,8.$$

12. 因为$np=E(X)$，$np(1-p)=D(X)$，所以

$$np=200,\ \sqrt{np(1-p)}=10,$$

将前一式代入后式得$200(1-p)=100$，进而有

$$p=0.5,\ n=400.$$

13. $E(X)=5\times 0.3=1.5$，所以这个随机变量比均值大的概率为

$$P(X>1.5)=1-P(X=0)-P(X=1)\approx 0.472.$$

14. 用X表示10个服药病人中出现意外的副作用的人数，则$X\sim B(10, 0.1)$. 10个服用该药的病人中至多2个有意外的副作用的概率为

$$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0.930.$$

15. 虽然第1次抽取1件产品和第2次抽取1件产品都是随机试验，但是第1次是从10件产品中任意抽取1件，而第2次是从第1次抽剩下的9件产品中任意抽取1件，因此2次随机试验不是相同的随机试验. 因为X不是2次独立重复试验得到的不合格产品数，所以它不服从二项分布. 事实上，X服从超几何分布.

16. 用X表示电池的寿命，则$X\sim N(35.6, 4.4^2)$. 从而

$$P(X\geqslant 40.0)=P(X\geqslant 35.6+4.4)=\int_{35.6+4.4}^{\infty}\varphi_{35.6,4.4}(x)\mathrm{d}x.$$

注意到正态分布密度函数$\varphi_{35.6,4.4}(x)$关于直线$x=35.6$对称，可以得到

$$\int_{35.6+4.4}^{\infty}\varphi_{35.6,4.4}(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{35.6-4.4}\varphi_{35.6,4.4}(x)\mathrm{d}x,$$

所以这节电池可持续使用不小于40.0小时的概率是

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 40.0)&=\frac{1}{2}\left(\int_{35.6+4.4}^{\infty}\varphi_{35.6,4.4}(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{35.6-4.4}\varphi_{35.6,4.4}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}(P(X>35.6+4.4)+P(X\leqslant 35.6-4.4))\\&=\frac{1}{2}(1-P(35.6-4.4<X\leqslant 35.6+4.4))\approx\frac{1}{2}\times(1-0.682\,7)\approx 0.158\,7.\end{aligned}$$

17. 由于$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，并且可以分别用样本的平均值和方差来估计μ和σ^2，即$\mu\approx 22$，$\sigma^2\approx 4$，所以近似地有$X\sim N(22, 4)$. 设该同学提前t分钟从家出发，则他不迟到的概率为

$$P(X<t)\approx\int_{-\infty}^{t}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x,$$

因此需要

$$0.99\leqslant\int_{-\infty}^{t}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x,$$

才能够保证该同学不迟到的概率大于0.99. 由正态分布密度函数的对称性知

$$\int_{-\infty}^{22+6}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\left(\int_{22+6}^{\infty}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{22-6}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(1-\int_{22-6}^{22+6}\varphi_{22,2}(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(1-0.997\,3)\approx 0.998\,7,$$

所以取 $t>22+6=28$，即提前 28 分钟以上动身，就至少能以 0.99 的概率保证准时到校.

第三章
统 计 案 例

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在《数学 3（必修）》概率统计内容的基础上，通过典型案例进一步介绍回归分析的基本思想、方法及其初步应用；通过典型案例介绍独立性检验的基本思想、方法及其初步应用，使学生认识统计方法在决策中的作用.

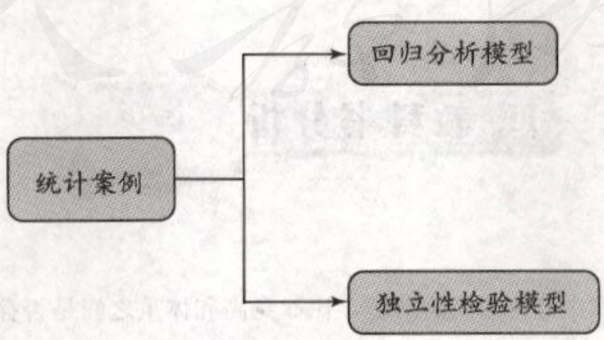
2. 学习目标

（1）通过典型案例的探究，进一步了解回归分析的基本思想、方法及其初步应用.

（2）通过典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及其初步应用.

二、内容安排

1. 本章知识结构



2. 对内容安排的说明

本章共分 2 节：3.1 回归分析的基本思想及其初步应用，3.2 独立性检验的基本思想及其初步

应用.

(1) 回归分析的部分内容在《数学3（必修）》中已出现过，比如画散点图、最小二乘估计的基本思想和计算公式、建立回归方程并进行预报等. 在此基础上，本章通过典型案例“女大学生身高和体重的关系”引入一元线性回归模型，分析模型中随机误差产生的原因，使学生理解函数模型与回归模型的区别.

(2) 本章从残差分析的角度解释了 R^2 的统计含义：R^2 越大，模型的拟合效果越好.

(3) 教科书从残差分析和 R^2 的角度讨论模型选择问题，引导学生体会模型诊断的思想.

(4) 教科书介绍了用解释变量（自变量）估计预报变量（因变量）时需要注意的问题，并归纳了建立回归模型的基本步骤.

(5) 作为线性回归模型的一个应用，教科书给出了一个讨论非线性相关关系的例子，并通过 R^2 比较不同模型对同一组样本数据集的拟合效果. 这里所涉及的非线性相关关系可以通过适当地变换转化成线性相关关系，从而可以用线性回归模型研究这种关系. 这个例子的目的在于开阔学生的思路，使学生了解虽然任何数据对都可以用线性回归模型来拟合，但其拟合的效果并不一定最好. 通过此例，还可以使学生体会到：对于需要解决的实际问题而言，没有一个模型是完全正确的，任何数学模型只能是近似描述实际问题，统计学追求的是根据问题的实际背景寻求描述效果更好的模型.

(6) 在独立性检验中，教科书通过典型案例“患肺癌是否与吸烟有关系”的研究，介绍了独立性检验的基本思想、方法和初步应用. 独立性检验的步骤是固定的，仿照教科书的例题，学生不难完成习题，但独立性检验的思想对学生来说是比较难理解的，教学中如何结合例题介绍独立性检验的思想是需要认真考虑的. 独立性检验的基本思想和反证法类似，它们都是假设结论不成立，反正法是在假设结论不成立基础上推出矛盾证得结论成立，而独立性检验是在假设结论不成立基础上推出有利于结论成立的小概率事件发生，于是认为结论在很大程度上是成立的. 因为我们知道小概率事件在一次试验中通常是不会发生的，所以有利于结论成立的小概率事件的发生为否定假设提供了有力的证据.

三、课时安排

全章共安排了2个小节，教学约需10课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

1.1　回归分析的基本思想及其初步应用	约4课时
1.2　独立性检验的基本思想及其初步应用	约3课时
实习作业	约2课时
小结	约1课时

II 教科书分析

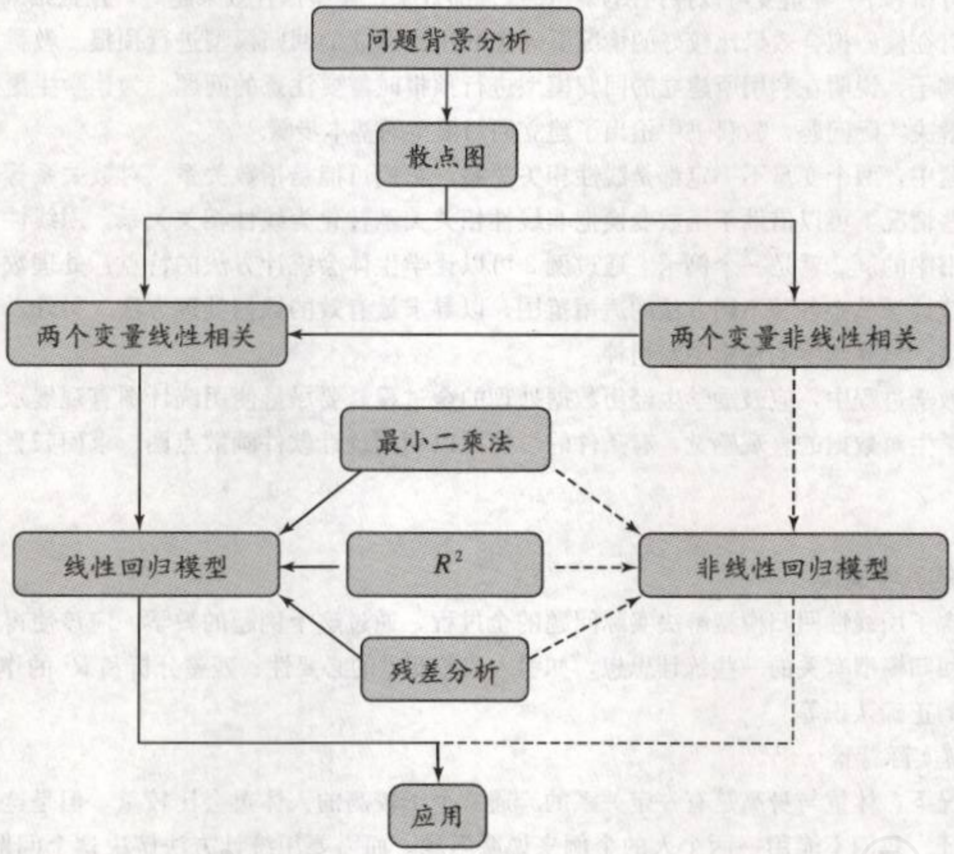
章引言首先提出了现实中经常遇到的问题，比如身高和体重之间是否存在线性相关关系？吸烟与患肺癌是否有关系？等等. 现实中类似的问题大量存在，如何得出准确的推断，这就需要科学的方法，统计方法就是其中的一种常用方法.

在提出统计问题的基础上，章引言给出了统计方法解决这些实际问题的思路，即确定总体、选择合适的变量、用适当的抽样方法收集数据、最后选择恰当的统计方法分析整理数据以得到最可靠的结

论，意在让学生掌握用统计方法解决问题的全过程．最后引出本章要学习的两种统计方法——回归分析和独立性检验．

3.1 回归分析的基本思想及其初步应用

一、本节知识结构



注：在上面的知识结构图中，虚线表示高中阶段不涉及的关系．

二、教学重点与难点

重点：

1. 了解回归模型与函数模型的区别；
2. 了解任何模型只能近似描述实际问题；
3. 模型拟合效果的分析工具：残差分析和指标 R^2．

难点：

1. 残差变量的解释与分析；
2. 指标 R^2 的理解．

三、编写意图与教学建议

由于在《数学 3（必修）》中学生已学习了两个变量之间的相关关系，包括画散点图、求回归直线方程、利用回归直线方程进行预报等内容，因此本节的内容是在以上内容的基础上进一步介绍回归模型的基本思想及其初步应用．通过案例“女大学生的身高与体重的关系”介绍了线性回归模型的数学表达式，说明了线性回归模型与学生熟悉的函数关系的区别，解释了随机误差项产生的原因，使学生能正确理解回归方程的预报结果．

从残差分析和 R^2 等角度可以探讨回归模型拟合的效果，模型拟合效果越好，预报结果的精度就越高，因此只有在模型拟合效果比较好的情况下才能利用所建立的回归模型进行预报．教科书借助身高预报体重的例子，说明在利用所建立的回归模型进行预报时需要注意的问题．为让学生更好地掌握利用回归模型解决实际问题，教科书中给出了建立回归模型的基本步骤．

实际问题中，两个变量不一定都是线性相关关系，它们可能是指数关系、对数关系等非线性相关关系．在某些情况下可以借助于函数变换把非线性相关关系转化为线性相关关系，用线性回归模型来解决，教科书中的例 2 就是一个例子．通过例 2 可以让学生体会统计方法的特点：处理数据有不同的统计方法，统计学关心各种不同方法的适用范围，以寻求最有效的数据处理方法．另外，例 2 还可开阔学生的思路，培养学生的探索创新精神．

教师在教学过程中，应鼓励学生经历数据处理的全过程，要尽量使用统计图直观展示两个变量的关系，培养学生对数据的直观感觉，有条件的学校可以利用统计软件画散点图、求回归直线方程并画出回归直线．

1. 例 1 的教学建议

例 1 包含了用线性回归模型解决实际问题的全过程，通过这个例题的教学，应该使得学生进一步了解与线性回归模型有关的一些统计思想，如引入残差变量的必要性、残差分析和 R^2 的作用、对于模型预报结果的正确认识等．

(1) 讲解实际背景

一般情况下，体重与身高是有一定关系的．通常个子较高的人体重会比较重，但是这个结论的正确性需要验证．我们不能用一两个人的个例来说明问题，而需要用统计方法解决这个问题．教学时，可以先让学生回忆统计方法解决问题的基本过程，使当前的学习与《数学 3（必修）》中随机抽样和样本估计总体的知识相联系起来，从而使学生进一步掌握用统计方法解决问题的基本步骤（提出问题、收集数据、分析整理数据、进行预测或决策）．然后，给出教科书中的数据表．

(2) 画散点图

散点图可以形象地展示两个变量的关系，所以先把数据用散点图表示出来，可以帮助我们直观了解两个变量的关系．通常用横坐标表示解释变量，用纵坐标表示预报变量．这里要用身高预测体重，所以应以身高为解释变量（自变量），体重为预报变量（因变量）画散点图．有条件的学校可以用多媒体展示散点图，还可以让学生用某种软件（例如 Excel、几何画版等）画散点图．

(3) 建立回归方程

复习《数学 3（必修）》中学过的最小二乘估计的思想及计算公式，从而得到线性回归方程．

(4) 解释线性回归模型与一次函数的不同

进一步，在散点图上画（可利用信息技术）回归直线，展示回归直线与原始数据拟合的情况，使学生能直观感觉回归直线和散点之间的关系．通过复习满足线性函数模型的散点图的特点，从图形上

考察女大学生的体重 y 和身高 x 之间的关系是否可以用一次函数

$$y=bx+a$$

来严格刻画（因为样本点不共线，所以线性函数模型只能近似地刻画身高和体重之间的关系）. 数据显示，身高为 165 cm 的三位女大学生，她们的体重分别为 48 kg，57 kg 和 61 kg，因此不能用一次函数来描述体重与身高的关系，否则的话，身高为 165 cm 的三位女大学生的体重应相同. 这就说明体重不仅受身高的影响还受其他因素的影响，把这种影响的结果 e（即随机误差或残差变量）引进来，从而把线性函数模型修改为线性回归模型：

$$y=bx+a+e.$$

其中，随机误差 e 中包含体重不能由身高的线性函数解释的所有部分，它是一个随机变量，一般假定它的均值为 0，即有 $E(y)=bx+a$，也就是 y 的期望值是 x 的一次函数. 在实际问题中，线性回归模型适用的范围要比一次函数的适用范围大得多. 当残差变量恒等于 0 时，线性回归模型就变成一次函数模型. 因此一次函数模型是线性回归模型的特殊形式，线性回归模型是一次函数模型的一般形式.

（5）随机误差 e 的主要来源

① 用线性回归模型近似真实模型（真实模型是客观存在的，通常我们并不知道真实模型到底是什么）所引起的误差. 可能存在非线性的函数能够更好地描述 y 与 x 之间的关系，但是现在却用线性函数来表述这种关系，结果就会产生误差. 这种由于模型近似所引起的误差包含在 e 中.

② 忽略了某些因素的影响. 影响变量 y 的因素不只变量 x 一个，可能还包括其他许多因素（例如在描述身高和体重关系的模型中，体重不仅受身高的影响，还会受遗传基因、饮食习惯、生长环境等其他因素的影响），但通常它们每一个因素的影响可能都是比较小的，它们的影响都体现在 e 中.

③ 观测误差. 由于测量工具等原因，得到的 y 的观测值一般存在误差（例如一个人的体重是确定的数，不同的秤可能会得到不同的观测值，它们与真值之间存在误差），这样的误差也包含在 e 中.

上面三项误差越小，说明我们的回归模型的拟合效果越好.

（6）利用回归方程进行预测

得到直线回归方程不是最终目的. 如果建立的回归模型有效，我们希望用它进行预测或决策. 利用回归方程

$$\hat{y}=0.849x-85.712,$$

预测身高为 172 cm 的女大学生的体重，只要把 $x=172$ 代入方程中即可得到体重的预测值 60.316 kg.

教科书在这里让学生探究："身高为 172 cm 的女大学生的体重一定是 60.316 kg 吗？如果不是，引起误差的原因是什么?"其目的是让学生正确理解（线性）回归方程预测结果的含义. 该问题的答案是否定的，实际上 60.316 kg 是身高为 172 cm 的女大学生的平均体重的估计值，而不一定是这位身高 172 cm 的女大学生的真实体重. 也就是说，身高为 172 cm 的女大学生的平均体重大约是 60.316 kg，并且大部分 172 cm 的女大学生的体重在 60.316 kg 附近. 教学中要努力让学生体会这些内容，因为这是统计得出的结论的最重要的特征. 另外，还要使学生认识到，用这个回归方程不能给出每个身高为 172 cm 的女大学生的体重的预测值，只能给出她们平均体重的值.

（7）R^2 与相关系数 r 的关系

在含有一个解释变量的线性回归模型中，R^2 恰好等于相关系数 r 的平方. 推导如下：

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i+\hat{a}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i+\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i-\hat{b}\cdot\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{(\hat{b})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

$$=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=r^2.$$

进一步，由上式以及线性相关系数的性质知：在线性回归模型中有 $0\leqslant R^2\leqslant 1$.

所以在一元线性回归模型中，R^2 和两个变量的相关系数 r 都能刻画用线性回归模型拟合数据的效果. r 的绝对值越大，R^2 就越大，用线性回归模型拟合数据的效果就越好.

当 $r=\pm 0.8$ 时，$R^2=0.64$；当 $r=\pm 0.9$ 时，$R^2=0.81$. 通常当 $R^2>0.80$ 时，认为线性回归模型对该组数据是很有效的，这时两个变量的相关系数的绝对值几乎超过 0.9. 例 1 的 $R^2\approx 0.64$，此时两个变量的相关系数的绝对值近似为 0.8，所以认为该组数据用线性回归模型拟合还是比较有效的.

(8) R^2 的含义

由于 R^2 的定义为

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2},$$

表达式 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 从整体上描述了用估计量来近似预报变量的效果，它越小，说明模型的拟合效果越好；表达式 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ 仅与样本数据有关，与所选用的模型无关. 因此 R^2 可以作为衡量模型拟合效果的一个指标，它越大，说明模型拟合的效果越好.

另外，我们还可以通过偏差平方和分解的角度来解释线性回归模型中 R^2 的含义. 教科书中没有从这个角度展开，有兴趣的老师可以参看拓展资源中的相关内容.

(9) 残差分析

在回归模型中，随机误差是一个不能被观测的量，即在实际问题中我们无法得到随机误差的观测值. 因此，我们不能希望有某种方法获取随机误差的值以提高预报变量的估计精度，但却可以估计预报变量观测值中所包含的随机误差，这种估计对于查找样本数据中的错误和模型的评价极为有用. 残差分析是回归诊断的一种方法. 最简单的残差分析是通过观测残差图，以发现观测数据中可能出现的错误以及所选用的回归模型是否恰当. 利用残差图进行残差分析的具体步骤如下：

① 计算每组观测数据的残差$\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i(i=1, 2, \cdots, n)$，即残差等于观测值减预测值，如教科书中的表 3-2. 残差表示预报变量中不能由回归方程解释的部分，因此它们比较小就说明回归模型拟合这组数据较好.

② 画残差图. 残差图的纵坐标为残差，横坐标通常可以是观测样本的序号、自变量、因变量的预测值等. 残差图是一种散点图，如教科书中的图 3.1-3.

③ 分析残差图. 几种常见的残差图如下：

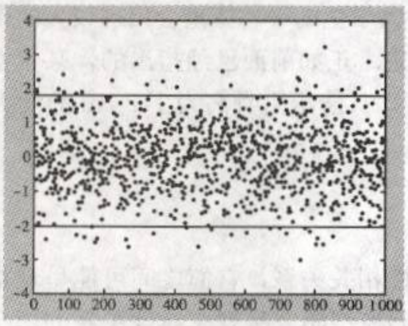


图 3.1-1

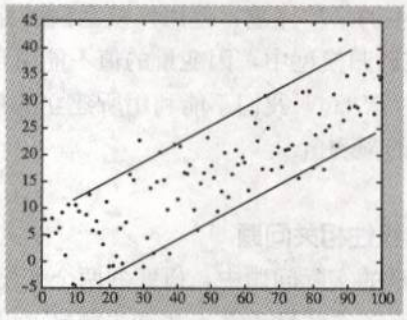


图 3.1-2

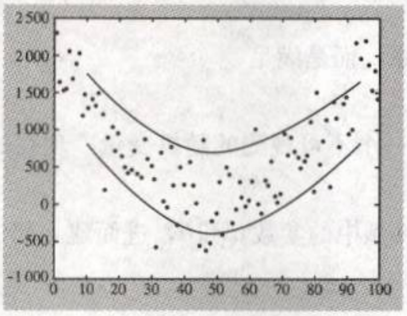


图 3.1-3

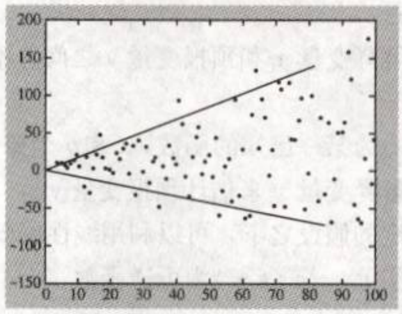


图 3.1-4

下面分别说明这些典型残差图所给出的关于模型诊断的信息.

图 3.1-1：残差散点图中的点分布在以 0 为中心的水平带形区域上，并且沿水平方向散点的分布规律相同，说明残差是随机的，所选择的回归模型建模是合理的.

图 3.1-2：残差散点图中的点分布在一条倾斜的带形区域上，并且沿带形区域方向散点的分布的规律相同，说明残差与横坐标有线性关系，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

图 3.1-3：残差散点图中的点分布在一条二次曲线形的弯曲带形区域上，说明残差与坐标横轴变量有二次关系，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

图 3.1-4：残差散点图中的点的分布范围随着横坐标的增加而增加，说明残差的方差与坐标横轴变量有关，不是一个常数，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

④ 查找异常样本数据（此时常以数据编号为横坐标，以方便查找异常数据）. 根据计算的残差值和残差图，观察残差是否有特别大的点，即远离横坐标轴的点. 如果存在远离坐标轴的点，就要研究它出现的原因，是否在数据收集和录入中出现错误，如果有错误，改正后重新建立回归模型.

(10) 预报时需要注意的问题

以例 1 为例，教科书较详细地说明了用线性回归模型进行预报时应注意的 4 个方面，用一句话概括之，就是要注意模型的适用范围. 这一点是十分重要的，否则可能会出现严重的错误. 应用非线性回归模型解决实际问题也同样需要注意这些方面.

① 样本数据是来自这个总体的，预报时也仅适用这个总体. 例如用女大学生数据所建立起的模型来预测一名男大学生的身高是不恰当的，即这时所得到的分析结果可能会存在较大误差.

② 利用不同时间段的样本数据建立的模型，只能用来对那段时间范围的数据进行预报. 例如把 1900 年建立的身高与体重的模型用于 2005 年的身高情况的预报是不恰当的，这样可能产生较大的误差，因为基因的进化、生活条件的变化可能引起身高与体重之间关系的变化.

③ 建立模型时自变量的取值范围决定了预报时模型的适用范围，通常不能超出太多. 比如例 1 中建立模型时自变量身高的取值范围为 155～175 cm，我们可以利用例 1 建立的模型预报身高为176 cm

的女大学生的平均体重，但用该模型预报身高为 190 cm 的女大学生的平均体重会出现较大的误差.

④ 在回归模型中，因变量的值不能由自变量的值完全确定. 正如前面已经指出的，某位女大学生的身高为 172 cm，我们不能利用所建立的模型预测她的体重，只能给出身高为 172 cm 的女大学生的平均体重的预测值.

2. 非线性相关问题

在大量的实际问题中，研究的两个变量不一定都呈现线性相关关系，它们之间可能呈现指数关系或对数关系等非线性关系. 在某些情况下可以借助于线性回归模型研究呈现非线性关系的两个变量之间的关系，教科书中的例 2 就是一个例子. 一般地，在下列情况中，可以利用线性回归模型解决非线性相关问题.

(1) 解释变量 x 和预报变量 y 之间并不满足线性相关关系，而是满足

$$y=f(ax+b+e), \qquad (*)$$

其中 $f(\cdot)$为某一已知的函数，a 和 b 为要估计的参数，e 为一个不可观测的随机变量. 现在的问题是如何通过解释变量 x 来估计预报变量 y?

在一定的假设之下，可以利用线性回归模型来估计上述模型中的参数 a 和 b，进而建立起估计 y 的公式. 事实上，若 $f(\cdot)$为可逆函数，令

$$z=f^{-1}(y),$$

则有

$$z=ax+b+e, \qquad (**)$$

即 x 和 z 之间满足线性回归模型. 利用线性回归模型的理论，通过（$**$）可以得到参数 a 和 b 的最小二乘估计量 $\hat{a}$ 和$\hat{b}$. 将估计量代入（$*$），并忽略 e 的影响，得到预报变量的估计值

$$\hat{y}=f(\hat{a}x+\hat{b}),$$

利用此式可以解决很多实际问题.

(2) x 和 y 之间满足

$$y=ag(x)+b+e,$$

其中 $g(\cdot)$为一个已知的函数，a 和 b 为未知参数，e 为残差变量. 令

$$t=g(x),$$

则 t 与 y 之间满足线性回归模型

$$y=at+b+e,$$

从而可以对上式利用最小二乘法，得到参数 a 和 b 的估计量$\hat{a}$和$\hat{b}$，进而得到解释变量 y 的估计公式

$$\hat{y}=\hat{a}g(x)+\hat{b}.$$

(3) 在更复杂的情况下，解释变量 x 和预报变量 y 之间满足的关系

$$y=f(ag(x)+b+e), \qquad (***)$$

其中 $f(\cdot)$和 $g(\cdot)$都是已知的函数，a 和 b 是未知参数，e 是不可观测的随机变量. 当 $f(\cdot)$为可逆函数时，令

$$z=f^{-1}(y),\ t=g(x),$$

则有

$$z=at+b+e,$$

即 t 和 z 之间满足线性回归模型. 对这个线性回归模型应用最小二乘法，得到参数 a 和 b 的最小二乘估计量$\hat{a}$和$\hat{b}$. 将参数的估计值代入（$***$），并忽略随机变量 e 的影响，可以得到预报变量 y 的估

计公式

$$\hat{y}=f(\hat{a}g(x)+\hat{b}).$$

在前面列出的三种情形中，关键是如何确定函数 $f(\cdot)$ 或 $g(\cdot)$ 的具体形式. 对于这个问题，需要针对具体的数据进行分析，没有一个普遍适用的方法. 可通过散点图和有关函数曲线知识，选取一个或几个可能合适的函数，然后通过观察变换后数据的散点图、计算 R^2 等确定一个相对合适的函数形式. 在例 2 中，我们尝试用指数函数的形式或二次函数的形式，分别建立模型，再通过 R^2 等从中确定一个满意的模型.

相比较之下，情形（3）更加复杂，这里要同时确定两个函数的形式，教材中没有涉及这方面的内容.

3. 例 2 的教学建议

教科书设置本例的目的是要让学生体会统计方法的特点. 处理数据有不同的统计方法（如不同的回归模型），统计学关心各种不同方法的适用范围，并从中寻求最有效的数据处理方法. 教学中可以按教科书给出的建立回归模型步骤来完成本例的建模过程，使学生逐渐熟悉探究更有效的回归模型的方法和步骤. 通过该例还应该使学生们了解：对于样本数据，人们不可能知道这些数据来自于何模型，即不知道正确的模型是什么，只能根据问题的背景和已经掌握的数学知识建立模型来近似这个正确的模型，统计学的任务是建立近似效果更好的模型. 对于理解力强的学生，还可以鼓励他们利用本例的数据尝试建立不同的非线性回归模型，通过残差图和 R^2 比较各个模型的拟合效果.

本例可按下面的思路组织教学.

（1）确定变量

根据已给出的背景分析的结果，即红铃虫的产卵数 y 和温度 x 有关，要通过所给出的观测数据研究这种关系，把温度 x 作为解释变量，红铃虫的产卵数 y 作为预报变量.

（2）画散点图

从散点图中可以看到随着自变量 x 的增加，因变量 y 有增加的趋势，但它们明显不是线性关系. 此处，应该让学生体会画散点图的目的是确定回归模型的形式，其方法和确定拟合这些数据的函数模型一样，都是通过已有的函数图象形状的知识确定回归模型的形式.

（3）分析回归模型的类型

根据散点分布情况，确定回归模型的类型，研究是否可以通过线性回归模型估计未知参数. 在本例中，散点更像是分布在指数函数（即 $y=e^{ax+b}$）或二次函数曲线（即 $y=ax^2+b$）的周围，因此可以考虑对原始数据进行相应的变换（即对预报变量的对数变换或解释变量的平方变换），把非线性问题转化为线性问题. 这里，应该使学生体会变换的目的是使变换后的数据散点分布在一条直线的周围，以便借助线性回归模型解决问题. 一个好的变换应该使变换后的数据的散点图呈现线性相关的特点，即散点集中在一条直线的附近.

（4）分析拟合效果

本例中同时考虑了利用线性回归模型、指数模型和二次模型拟合原始数据，并从变换后数据的散点图、残差以及 R^2 的角度分析 3 个模型对数据的适用性，比较模型的拟合效果.

（5）小结

在完成本例的教学后，可以让学生深入体会统计方法的特点：人们所知的模型仅能近似描述产生样本数据的真实模型，寻求近似效果更好的模型是人们不断追求的目标；处理数据有不同的统计方法，统计学关心的是寻求最有效的数据处理方法. 对于本例中的数据，教科书列举了 3 种不同的拟合模型，它们分别是

$$y=ax+b+e,\ y=e^{ax+b+e},\ 和\ y=ax^2+b+e.$$

统计理论关心的是上述 3 个模型中的哪一个能够更好地拟合数据，是不是还有更好的拟合模型．也可以鼓励学生提出其他的拟合模型，并通过 R^2 来比较所提出的模型的拟合效果．

本例的教学之后，可引导学生总结利用观测数据建立回归模型的步骤．

四、教学设计案例

第 86 页例 2 的教学

1. 教学任务分析

（1）回归模型的选择．虽然两个变量的观测数据都可以用线性回归模型来拟合，但不能保证这种模型对数据的拟合效果最好．为更好地刻画两个变量之间的关系，要根据观测数据的特点来选择回归模型．

（2）通过探究使学生体会，有些非线性回归模型通过变换可以转化为线性回归模型，即借助于线性回归模型研究呈非线性关系的两个变量之间的关系：

① 如果散点图中的点分布在一个直线状带形区域，可以选用线性回归模型来建模；

② 如果散点图中的点分布在一个曲线状带形区域，要先对变量作适当的变换，再利用线性回归模型来建模．

利用散点图可以看出两个变量之间的关系有时不能用线性回归模型描述，判断它们之间的关系是否近似于某种非线性关系，如 $y=c_1e^{c_2x}$，$y=c_1x^2+c_2$．若通过观察发现，它们经过变换后可以转化为线性回归模型，如在 $y=c_1x^2+c_2$ 中，令 $t=x^2$，这时 y 与 t 是线性关系，可以利用线性回归模型的知识建立 y 与 t 的模型，然后再把 $t=x^2$ 代入，即得 y 与 x 的关系．

（3）初步体会不同模型拟合数据的效果．计算不同模型的 R^2，通过比较 R^2 的大小来比较不同模型的拟合效果．这只是模型比较的一种方法，当然还有很多种其他方法．

（4）体会数学模型的作用：用来近似产生样本数据的真实模型．

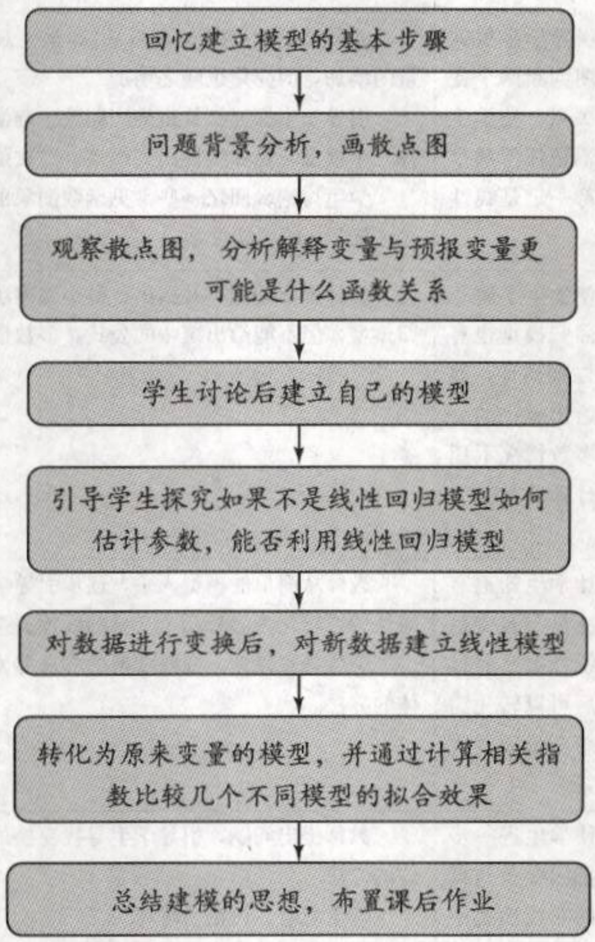
（5）体会统计学的一个目标：寻求近似效果更好的模型．

2. 教学重点与难点

重点：通过探究使学生体会用线性回归模型研究非线性回归模型，了解在解决实际问题的过程中寻找更好的模型的方法．

难点：理解数学模型的作用，以及统计学对于建模所追求的目标．

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 你能回忆一下建立回归模型的基本步骤吗?	复习建立线性回归模型的基本步骤.	教师提出问题，引导学生回忆建立回归模型的基本步骤（选变量、画散点图、选模型、估计参数、分析与预测）. 学生回忆、叙述建立回归模型的基本步骤.
(2) 思考例 2 中如何选择解释变量与预报变量?	引导学生分析哪个变量作自变量，哪个变量作因变量.	教师读例 2 的要求，引导学生理解例题含义. 学生思考、讨论、叙述自己的理解. 形成把温度 x 作自变量，红铃虫的产卵数 y 作因变量的共识.

续表

问　题	设计意图	师生活动
(3) 观察图 3.1-4 中的散点图，红铃虫的产卵数 y 与温度 x 具有线性关系吗？除线性关系外，还学过哪些常见的函数关系？	引导学生根据散点图判断两个变量的关系，使学生了解不是任何两个变量都一定是线性关系.	教师绘制散点图 3.1-4，引导学生观察散点图的特点：随着自变量的增加，因变量也随之增加. 引导学生探究红铃虫的产卵数 y 与温度 x 更可能是什么关系，选择几个模型，比如线性回归模型、二次函数模型、指数函数模型. 学生讨论、回忆一些常见函数图象的特点，判断红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的可能关系.
(4) 两个变量是线性关系时利用最小二乘法得到了两个参数的估计公式，当模型不是线性回归模型时如何估计模型中的参数？	使学生了解非线性回归模型也有最小二乘估计，但不能给出统一的公式，多数情况下用数值计算的方法.	教师提出问题，并指出：最小二乘法的思想同样适用于非线性回归模型，但不能给出统一的公式，多数情况下用数值计算的方法.
(5) 对模型 $y=c_1x^2+c_2$ 是否有办法求参数 c_1 和 c_2 的最小二乘估计？	让学生知道有时因变量与自变量的非线性关系经过变换后可以转化为两个新变量间的线性关系.	教师从简单的模型入手，逐步引导学生思考把原来两个变量的非线性关系转化为另外两个变量的线性关系. 学生观察模型，探究变换的方法并发表自己的意见. 最后给出具体的方法.
(6) 经过怎样的变换可以把模型 $y=c_1e^{c_2x}$转化为另外两个变量的线性关系？	使学生进一步体会把因变量与自变量的非线性关系经过变换后转化为另外两个变量的线性关系的方法.	教师提出问题，引导学生寻找变换的方法，在学生讨论后给出具体的方法. 学生思考、讨论、解释.
(7) 经过变换后这几个模型都转化为线性回归模型，如何得到这几个线性回归模型的参数估计？	使学生熟悉线性回归模型的参数估计方法.	教师提出问题，引导学生分组讨论，启发学生把原变量的观测数据转化为新变量的数据，然后让学生给出每种线性回归模型的参数估计. 学生以组为单位进行数据变换，求参数的最小二乘估计（可以用计算器）.
(8) 如何使得到的线性回归模型再变回到红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型？	得出红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型.	教师提问：我们的目标是建立红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型，如何由得到的线性回归模型再变回到红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型？ 学生进行变换，每组得到红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型.
(9) 上述模型中哪个能更好地刻画红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的关系？	引导学生尝试进行不同模型的比较.	教师提出问题，引导学生回忆评价线性回归模型拟合好坏的标准 R^2，进一步引导学生探讨如何进行不同模型的比较，介绍计算模型 R^2 和残差分析的方法，说明一般在参数个数一定的条件下，R^2 越大说明模型拟合得越好. 学生讨论，提出自己的想法. 计算每个模型的 R^2，并进行模型的比较.

续表

问　　题	设计意图	师生活动
(10) 小结：我们希望找到两个变量的关系，如何发现它们之间的关系？如何比较不同模型的拟合效果？	让学生整理解决本例的思路，鼓励学生探究建立更好的模型.	教师强调要借助散点图的直观性、联想已学过的基本函数图象以及知识间的联系，鼓励学生在建模中大胆尝试. 学生独立思考，总结从该例中获得的启发.
(11) 我们知道红铃虫的产卵数与温度的样本数据来自什么模型吗？对于实际问题，应该基于什么想法选择模型？	引导学生们思考模型的作用，体会统计学对于建模所追求的目标.	教师提出问题，学生独立思考并回答. 教师总结，归纳出一般的结论：模型只能用来近似产生样本数据的真实模型；建模追求的目标是建立效果最好的（在已知模型的范围内），或者更好的（比已知的模型）模型.
(12) 课后作业： 练习 第1，2题；习题3.1第1题.		

5. 两点说明

(1) 有条件的学校老师在课堂上可以演示用计算机软件计算参数的最小二乘估计、R^2、画残差图等.

(2) 在教学中应鼓励学生多思考，遇到不同的实际问题应考虑原来的统计方法是否仍然适用，在不能适用的情况下要探索新的统计方法，从而体会统计方法的有效性、局限性和可改进性的特点.

五、习题解答

练习（第89页）

1. 画散点图的目的是通过变量的散点图判断两个变量更近似于什么样的函数关系，以确定是否直接用线性回归模型来拟合原始数据.

说明 学生在对常用的函数图像比较了解的情况下，通过观察散点图可以判断两个变量的关系更近似于哪个函数类.

2. 分析残差可以帮助我们解决以下几个问题：

① 寻找异常点，就是残差特别大的点，考察相应的样本数据是否有错；

② 分析残差图可以发现模型选择是否合适.

说明 分析残差是回归诊断的一部分内容，可以帮助发现样本数据中的错误，分析模型选择是否合适，是否有其他变量需要加入到模型中，模型的假设是否正确等. 本题只要求学生能回答上面的两项即可，主要让学生体会残差和残差图可以帮助判断模型的拟合效果.

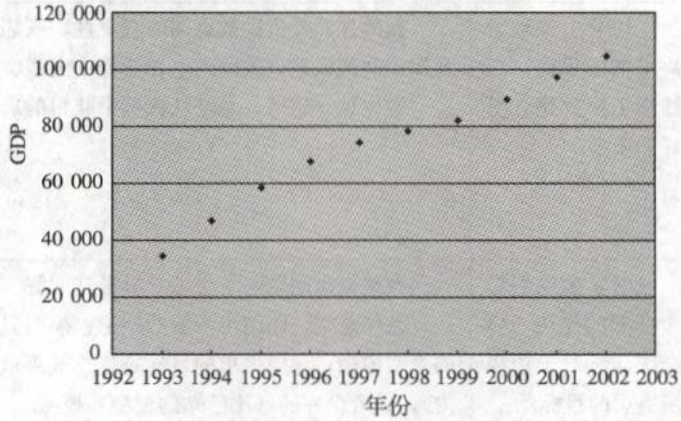
3. (1) 解释变量和预报变量的关系是线性函数关系.

(2) $R^2=1$.

说明 如果所有的样本点都在一条直线上，建立的线性回归模型一定是这条直线，所以每个样本点的残差均为0，即此时的模型为 $y=bx+a$，因为没有随机误差项，所以是严格的一次函数关系. 通过计算可以证明解释变量和预报变量之间的 R^2 是1.

习题 3.1（第 89 页）

1. (1) 由表中数据制作的散点图如下：



（第 1(1)题）

从散点图中可以看出 GDP 值与年份近似呈现线性关系.

(2) 用 y 表示 GDP 值，t 表示年份. 根据截距和斜率的最小二乘计算公式得

$$\hat{a}\approx-14\ 292\ 537.729,\ \hat{b}\approx7\ 191.969,$$

从而得线性回归方程

$$\hat{y}=7\ 191.969t-14\ 292\ 537.729.$$

残差计算结果见下表.

GDP 值与年份线性拟合残差表

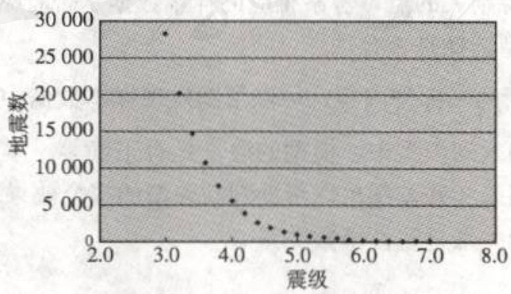
年份	1993	1994	1995	1996	1997
残差	−6 422.269	−1 489.238	3 037.493	5 252.024	4 638.055
年份	1998	1999	2000	2001	2002
残差	1 328.685	−2 140.984	−1 932.353	−1 277.622	−993.791

(3) 2003 年的 GDP 预报值为 112 976.4，根据国家统计局 2004 年的统计，2003 年实际 GDP 值为 117 251.9，预报与实际相差−4 275.5.

(4) 上面建立的回归方程的 $R^2=0.974$，说明年份能够解释 97%的 GDP 值变化，因此所建立的模型能够很好地刻画 GDP 和年份的关系.

2. 该题目的结果与具体的数据有关，不作统一答案.

3. 由表中数据得散点图如下：



（第 3(1)题）

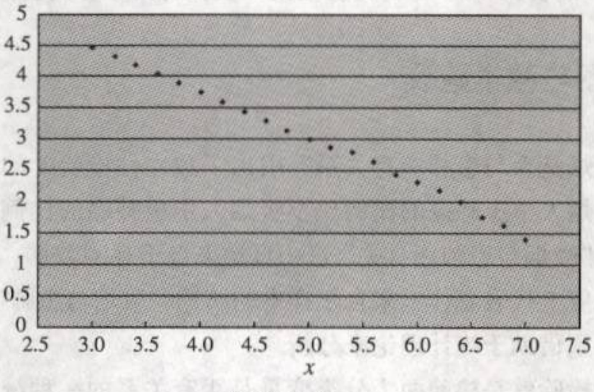
从散点图中可以看出震级 x 与不小于该震级的地震数 $N(x)$ 之间不是线性相关. 从图中可以看出，随着 x 的减少，所考察的地震数 $N(x)$ 近似地以指数形式增长. 作变换

$$y=\lg N(x),$$

得到的数据如下表所示.

x	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
y	4.453	4.309	4.170	4.029	3.883	3.741	3.585	3.431	3.283	3.132	2.988
x	5.2	5.4	5.6	5.8	6	6.2	6.4	6.6	6.8	7	
y	2.873	2.781	2.638	2.438	2.314	2.170	1.991	1.756	1.613	1.398	

x 和 y 的散点图如下：



(第 3(2)题)

从这个散点图中可以看出 x 和 y 之间有很强的线性相关性，因此可以用线性回归模型拟合它们之间的关系．根据截距和斜率的最小二乘计算公式得

$$\hat{a}\approx 6.704，\hat{b}\approx -0.741，$$

从而线性回归方程为

$$\hat{y}=6.704-0.741x.$$

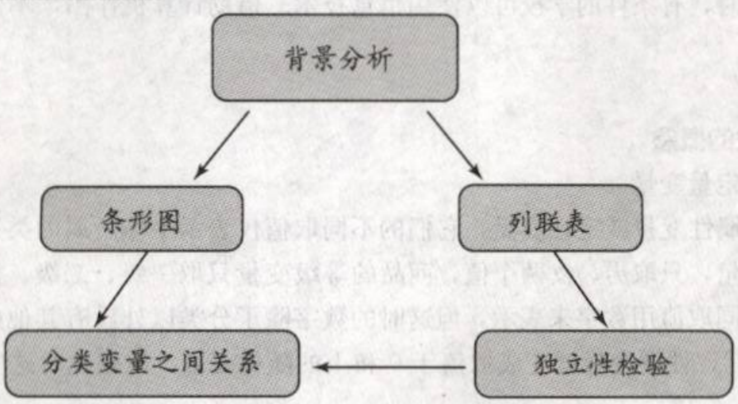
所建立的回归方程的 $R^2=0.997$，说明 x 可以解释 y 的 99.7%的变化．因此可以用回归方程

$$\hat{N}=10^{6.704-0.741x}$$

描述 x 和 N 之间的关系.

3.2 独立性检验的基本思想及其初步应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

理解独立性检验的基本思想及实施步骤.

难点：

(1) 了解独立性检验的基本思想；

(2) 了解随机变量 K^2 的含义，K^2 的观测值很大，就认为两个分类变量是有关系的.

三、编写意图与教学建议

教科书通过探究“吸烟是否与患肺癌有关系”引出了独立性检验的问题，并借助样本数据的列联表、等高条形图展示在吸烟人中患肺癌的比例比不吸烟人中患肺癌的比例要高，使学生直观感觉到吸烟和患肺癌可能有关系．“吸烟与患肺癌有关”这一直觉来自于观测数据，即样本．问题是这种来自于样本的印象能够在多大程度上代表总体？来自于样本的结论“吸烟与患肺癌有关”能够推广到总体吗？为了回答这个问题，就必须借助于统计理论来分析.

在统计学中，独立性检验就是检验两个分类变量是否有关系的一种统计方法．教科书借助用字母表示的吸烟与患肺癌的列联表，构造了一个随机变量 K^2．若吸烟与患肺癌没有关系，K^2 应该很小；否则 K^2 应该很大．也就是说 K^2 越大，说明吸烟与患肺癌有关系的可能性越大．教科书在检验吸烟与患肺癌有关系的基础上，给出了两个分类变量独立性检验的一般步骤，同时给出了 K^2 的临界值表．最后通过例 1 和例 2 使学生进一步体会独立性检验的基本思想、方法和初步应用.

教学中，要把重点放在独立性检验的统计学原理上，使学生们掌握独立性检验的基本步骤，体会独立性检验的基本思想．独立性检验的步骤是固定的，仿照教科书的例题，学生不难独立完成习题，但独立性检验的统计思想对学生来说是比较难理解的，教学中应认真考虑如何结合例题介绍独立性检验的基本思想.

独立性检验的思想来自于统计上的假设检验思想，它与反证法类似．假设检验和反证法都是先假设结论不成立，然后根据是否能够推出“矛盾”来断定结论是否成立．但二者“矛盾”的含义不同，反证法中的“矛盾”是指一种不符合逻辑事情的发生；而假设检验中的“矛盾”是指一种不符合逻辑的小概率事件的发生，即在结论不成立的假设下，推出有利于结论成立的小概率事件发生．我们知道，小概率事件在一次试验中通常是不会发生的，若在实际中这个事件发生了，说明假设这个事件为小概率事件的条件有问题，即应该认为结论成立．在教学中可以把假设检验的方法与反证法作对比，以加深学生对独立性检验思想的理解.

在画等高条形图时，有条件的学校可以使用信息技术．借助计算机作图，不但作出的图形效果理想，且省时省力.

1. 与列联表相关的概念

(1) 分类变量与定量变量

分类变量也称为属性变量或定性变量，它们的不同取值仅表示个体所属的类别，它们的取值一定是离散的，如性别变量，只取男、女两个值，商品的等级变量只取一级、二级、三级，等等．有时也可以把分类变量的不同取值用数字来表示，但这时的数字除了分类以外没有其他的含义．例如用 0 表示“男”，1 表示“女”，性别变量就变成取值于 0 和 1 的随机变量，但是此时这些数字没有其他的含

义，比较性别变量的两个不同值之间的大小没有意义，性别变量的均值和方差也没有意义.

定量变量的取值一定是实数，它们的取值大小有特定的含义，不同取值之间的运算也有特定的含义. 例如身高、体重、考试成绩等，张明的身高是 180 cm，李立的身高是 175 cm，说明张明比李立高 $180-175=5$ (cm). 定量变量的数字特征，如均值和方差有实际意义.

本节研究的是两个分类变量的独立性检验问题.

(2) 列联表

列联表一般为两个以上分类变量的汇总统计表，教材中仅限于两个分类变量的列联表，并且每个分类变量只取两个值，这样的列联表称为 2×2 的列联表（一般的独立性检验并不要求每个分类变量只取两个值，但这时的检验统计量的构造更复杂一些）.

在教学中不要求给出这些概念的严格定义，只要给出描述性的说明即可.

2. 独立性检验的基本思想

假设检验的方法是统计学的一个很重要的方法，也是统计学中很常用的方法. 独立性检验仅是假设检验的一个特例. 因为中学生接触的统计内容不多，也没有掌握一些常用分布的概念，所以教科书中没有使用统计量的概念及卡方分布的概念，而是尽量用形象直观的语言解释独立性检验的基本思想. 为了帮助教师更好的理解这部分内容，我们这里给出在大学教科书中假设检验的一般步骤便于教师比较.

(1) 提出假设检验问题

这里包括原假设和备择假设，原假设用 H_0 表示，备择假设用 H_1 表示. 一个假设检验问题可以表达为

$$H_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1.$$

例如，在吸烟与患肺癌是否有关系的独立性检验问题中，原假设 H_0 为“吸烟与患肺癌没有关系”，备择假设 H_1 为“吸烟与患肺癌有关系”. 这个假设检验问题可以表述为：

H_0：吸烟与患肺癌没有关系$\leftrightarrow$$H_1$：吸烟与患肺癌有关系.（*）

(2) 选择检验的指标

选择适当的样本的函数 $T(X)$（不含有任何未知参数的样本的函数，统计学上称之为检验统计量）作为检验指标，$T(X)$越小，原假设 H_0 成立的可能性越大；$T(X)$越大，备择假设 H_1 成立的可能性越大.

例如，对于假设检验问题（*），选择的检验指标为

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

它越小，原假设

H_0：吸烟与患肺癌没有关系

成立的可能性越大；它越大，备择假设

H_1：吸烟与患肺癌有关系

成立的可能性越大.

(3) 根据检验指标的含义确定拒绝域的构造

当检验指标越小原假设成立的可能性越大时，拒绝域的构造为

$$D=\{T:T=T(x)>t\},$$

其中 t 是待定常数. 我们称拒绝域的边界值 t 为临界值. 构造拒绝域是为了确定是否应该断定备择假设 H_1 成立. 具体做法是：当由观测数据计算得到的观测指标 $T(x)$ 落在拒绝域 D 中，就应该断定备择假设 H_1 成立.

例如，对于假设检验问题（*），拒绝域的构造为

$$D=\left\{K^2: K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}>k_0\right\},$$

这里 k_0 为临界值. 从而由观测数据计算得到 K^2 的观测值 k 落在拒绝域 D 中，即 $k>k_0$ 时，就应该断定备择假设 H_1 成立.

(4) 确定拒绝域中的临界值

预先给定的很小的正数 α，确定临界值 t_α，使得在 H_0 成立的假设下检验统计量大于该临界值的概率不超过 α，即

$$P(D_\alpha)\leqslant\alpha.$$

其中

$$D_\alpha=\{T:T=T(X)>T_\alpha\},$$

称这里的 α 为显著水平，称 D_α 为对应于显著水平 α 的拒绝域，常用的显著水平为 0.1，0.05 或 0.01.

例如，对于假设检验问题（*），统计学家证明了当 H_0 成立时，即当“吸烟与患肺癌没有关系”成立时，检验统计量

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

应该近似地服从卡方分布（样本容量越大，近似的程度越高）. 因此临界值 k_α 应该满足下式

$$P(K^2\geqslant k_\alpha)\leqslant\alpha,$$

由概率的单调性，即对于任何实数 $x_1\leqslant x_2$ 有

$$P(K^2\geqslant x_2)\leqslant P(K^2>x_1),$$

所以可选择满足条件

$$P(K^2\geqslant k_\alpha)=\alpha$$

的 k_α 作为拒绝域的临界值.

因此要确定拒绝域的临界值，就必需知道随机变量 K^2 的概率分布. 但是在独立性检验中，K^2 的概率分布不容易计算，因此用卡方分布来近似. 这样，当取显著水平 $\alpha=0.01$ 时，临界值 $k_\alpha\approx6.635$，拒绝域

$$D_{0.01}=\{K^2: K^2>6.635\}.$$

(5) 给出推断结果及其解释

根据样本数据计算检验统计量的值，如果该值在拒绝域之中，就拒绝原假设成立；否则接受原假设成立. 拒绝原假设的结论解释为：在犯错误概率不超过 α 的前提下认为 H_1 成立. 接受原假设的结论解释为：没有发现样本数据与 H_0 矛盾.

例如，对于假设检验问题（*），取显著水平 $\alpha=0.01$ 时，临界值 $k_\alpha\approx6.635$. 而由教科书上的数据计算得到检验统计量 K^2 的值约为 54.721，落在拒绝域中，因此要拒绝原假设 H_0 成立，即在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为吸烟与患肺癌有关系.

(6) 假设检验方法的特点与结果的解释

① 假设检验具有保护原假设的倾向，即容易接受原假设.

② 要特别注意，接受原假设仅意味着没有发现样本数据与 H_0 矛盾，这不足以说明原假设一定正确.

③ 若在显著水平 α 下拒绝原假设，则说明在此种情况下错误地拒绝原假设的概率至多为 α，即断言“备择假设成立”出错的概率上界为 α.

④ 若在显著水平 α 下接受原假设，则说明没有发现充分的证据支持备择假设 H_1. 显著水平越小，越容易产生接受原假设的结论.

(7) 应用假设检验方法解决实际问题的注意事项

① 对于所考虑的实际问题，显著水平 α 要事先确定，即在获取观测数据之前确定，而不能根据观

测数据的结果确定显著水平.

② 确定原假设和备择假设的原则：

把需要证明的新结论作为备择假设；

把由大量历史经验和数据证实的结论作为原假设；

把如果不成立会造成重大损失的结论作为备择假设.

教材中仅是通过吸烟与患肺癌之间的关系的讨论过程体现假设检验思想，并没有一般地给出实施假设检验的具体步骤，其目的仅是让学生通过实例初步体会一下假设检验思想.

可以从与反证法思想比较的角度帮助学生理解上面介绍的假设检验原理. 下表列出了二者的对应关系：

反证法	假设检验
要证明的结论 A	备择假设 H_1
在 A 不成立的前提下进行推理	在 H_1 不成立的条件下，即 H_0 成立的条件下进行推理
推出矛盾，意味着结论 A 成立	推出有利于 H_1 成立的小概率事件（概率不超过 α 的事件）发生，意味着 H_1 成立的可能性很大
没有找到矛盾，不能对 A 下任何结论，即反证法不成功	推出有利于 H_1 成立的小概率事件不发生，接受原假设

从上面的对比中，可以看出假设检验的思想方法和反证法类似，但有两点不同：第一，在假设检验中用有利于 H_1 的小概率事件的发生代替了反证法中的矛盾；第二，假设检验中的接受原假设的结论相当于反证法中没有找到矛盾.

把假设检验的基本思想具体到独立性检验问题中，得到两个分类变量独立性检验的基本思想如下：在假设“两个分类变量没有关系”的前提下，构造一个有利于“两个分类变量有关系”的小概率事件（即概率不超过 α 的事件）. 如果样本观测数据使得这个小概率事件发生，就可以在犯错误的概率不超过 α 的前提下认为“两个分类变量有关系”.

在探究中，通过随机变量 K^2 来构造这类小概率事件 $\{K^2 \geqslant k_0\}$，其中临界值 k_0 满足条件 $P(K^2 \geqslant k_0) \leqslant \alpha$. 这里的概率计算要以“两个分类变量没有关系”为前提条件. 在实际应用中，人们总是喜欢用随机变量 K^2 解决两个分类变量的独立性检验问题. 在例 2 中，教科书给出了通过 K^2 来构造这类小概率事件的方法.

3. 关于检验的必要性

教学中，要特别强调检验的必要性，即为什么不能只凭列联表的数据和等高条形图下结论. 原因是列联表中的数据是样本数据，它只是总体的代表，它具有随机性，因此需要用列联表检验的方法提供所得结论犯错误概率的信息.

4. 对教科书 93 页（1）式的说明

教科书 93 页（1）式的推导主要是为了构造否定域，即有利于结论“吸烟与患肺癌有关系”的小概率事件. 为了简便，教科书仅提到原假设 H_0，没有明确指出备择假设，从而不能借用否定域解决问题. 教材从分析 K^2 与 H_0 之间的关系入手，得到当结论“吸烟与患肺癌没有关系”成立时，K^2 不应该很大的结论，从而把列联表检验的问题归结为确定 K^2 是否很大的问题. 教学中应使学生注意这个

结论，正确理解随机变量 K^2 的含义.

5. 教科书93页（2）式应注意的问题

（1）该式成立的前提是“两个变量（吸烟与患肺癌）没有关系”，如果这个前提不成立，式子就不成立.

（2）式中的概率近似地等于0.01，当样本容量 $n=a+b+c+d$ 越大，近似的程度越高. 为保证近似的效果，在实际应用中要求四个数 a，b，c 和 d 都超过5.

（3）可以向学生说明，这个公式的推导需要许多概率统计知识，感兴趣的同学可以在以后进一步学习这方面的知识，这里只需要记住结果就可以.

6. 对犯错误的概率的解释

在吸烟与患肺癌的例子中，由 $k\approx 56.632\geqslant 6.635$ 得到结论“吸烟与患肺癌有关系”，并且这个结论犯错误的概率不会超过0.01. 另一方面，由教科书中的表3-11可知

$$P(K^2\geqslant 10.828)\approx 0.001,$$

因此由 $k\approx 56.632\geqslant 10.828$ 也可得到结论“吸烟与患肺癌有关系”，并且这个结论犯错误的概率不会超过0.001.

这里用的是同样的数据，得到的是相同的结论，为什么会得到不同的犯错误概率的上界估计？两个估计中哪一个正确？

实际上这两种说法都正确，0.01和0.001是在不同的判断规则下把“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率上界.

规则一：如果 $K^2\geqslant 6.635$，就认为“吸烟与患肺癌有关系”；否则，就认为“吸烟与患肺癌没有关系”.

规则二：如果 $K^2\geqslant 10.828$，就认为“吸烟与患肺癌有关系”；否则，就认为“吸烟与患肺癌没有关系”.

规则一将“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率不会超过0.01（而不是0.001）；规则二将“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率不会超过0.001. 因此，结论“吸烟与患肺癌有关系”犯错误的概率上界由临界值确定，不同的临界值对应于不同的上界估计.

7. 用Excel软件制作等高条形图的步骤

下面以教科书中的吸烟与患肺癌列联表(表3-7)中的数据为例，给出用Excel软件制作等高条形图的步骤.

（1）如图3.2-1，在Excel软件中输入列联表中的数据. 在A2位置输入“不吸烟”，A3位置输入“吸烟”；B1位置输入“不患肺癌”，B2位置输入“7775”，B3位置输入“2099”；C1位置输入“患肺癌”，C2位置输入“42”，C3位置输入“49”. 选中键入数据的表格，即选中A1～A3，B1～B3，C1～C3.

	A	B	C
1		不患肺癌	患肺癌
2	不吸烟	7775	42
3	吸烟	2099	49

图3.2-1

(2) 单击工具栏上的“图表向导”按钮，进入“图表向导-4 步骤之 1-图表类型”对话框．选择“标准类型”中的“柱形图”后，再选择“子图表类型”中的“百分比堆积柱形图”，单击“完成”按钮．经过上面的操作可以得到如下的图形(图 3.2-2)：

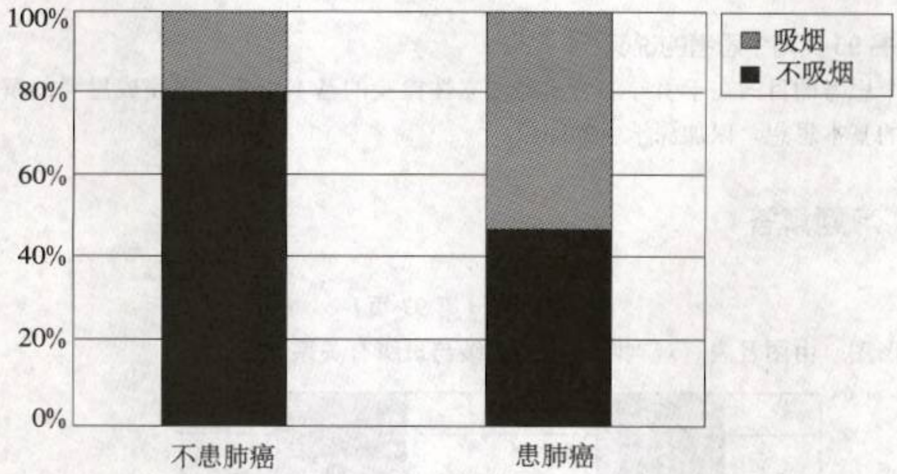


图 3.2-2

(3) 为了对比吸烟人群和不吸烟人群中患肺癌的比例，可单击工具栏上的“切换行/列”按钮，得到如下的图形(图 3.2-3)：

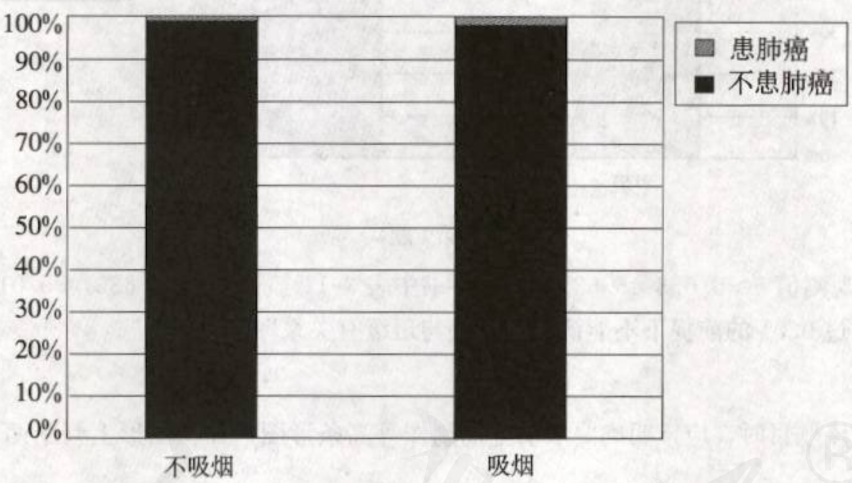


图 3.2-3

8. 例 1 的教学说明

教学中要注意先直观后计算，教学的重点应该放在解释独立性检验的基本思想上，要注意引导学生运用已经学过的统计知识解决问题．

(1) 解答中给出列联表，目的是复习列联表的制作．

(2) 在学生利用等高条形图判断秃顶与患心脏病是否有关系后，向学生强调这种判断的不足之处，使他们进一步体会独立性检验的重要性．

(3) 在得到独立性检验的结论之后，要通过上下文向学生解释这里“犯错误的概率”是指把“秃顶与患心脏病没有关系”错判成“秃顶与患心脏病有关系”的概率．

(4) 讲完例题解答后，需要向学生说明：在熟悉独立性检验的基本原理后，可以通过直接计算 K^2

的观测值（不画等高条形图）来解决两个分类变量的独立性检验问题．但是，借助于图形可以更直观地向非专业人士解释所得到的统计分析结果．

（5）注意解释贴示中的内容，这里的结论只适用于该院的住院病人群体，不适用于其他群体．

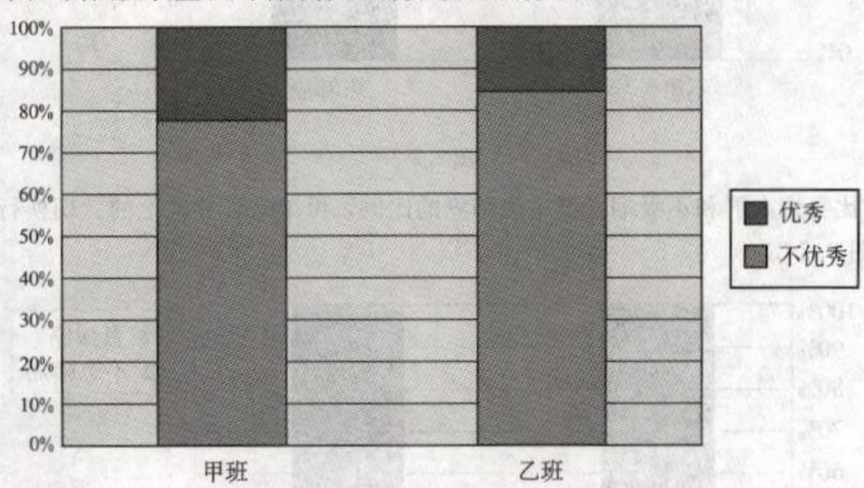
9．对教科书 96 页两个思考的说明

给出这两个思考的目的在于引导学生重温独立性检验的基本思想．在完成思考的解答后可再次总结独立性检验的基本思想，以加深学生的印象．

四、习题解答

练习（第 97 页）

（1）画等高条形图．由图及表直观判断好像“成绩与班级有关系”．



（第 1 题）

（2）因为 K^2 的观测值 $k\approx 0.653<6.635$，由教科书中表 3-11 知 $P(K^2\geqslant 6.635)\approx 0.01$，所以在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下不能认为“成绩与班级有关系”．

说明

（1）教师在布置该题目时，应该明确要求学生们制作等高条形图，并从图形上判断两个分类变量之间是否有关系．

（2）通过图形的直观感觉的结果可能会出错误．

（3）本题与例题不同，此题计算得到的 K^2 的观测值比 6.635 小，所以没有证据表明“成绩与班级有关系”．独立性检验与反证法有类似的地方，在使用反证法证明结论时，在假设结论不成立的条件下，如果没有推出矛盾，并不能说明结论成立，也不能说明结论不成立．在独立性检验中，没有推出小概率事件发生类似于反证法中没有推出矛盾．

习题 3.2（第 97 页）

1．如果“服药与患病之间没有关系”，则 K^2 的观测值应比较小．如果 K^2 的观测值很大，则说明很可能“服药与患病之间有关系”．由题目中所给数据计算得 $k\approx 6.109$，而由表 3-11 知 $P(K^2\geqslant 5.024)\approx 0.025$，而 $6.109>5.024$，所以在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下可以认为“服药与患病之间有关系”．再由服药群体中患病者的频率 0.182 小于没有服药群体中患病者的频率 0.400，从而“服药与患病之间有关系”可以解释为药物对于疾病有预防作用．因此在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下可以认为药物有效．

说明 学生很容易完成此题，但希望学生能理解独立性检验在这里的具体含义："服药与患病之间有关系"可以解释为"药物对于疾病有预防作用".

2. 如果"性别与读营养说明之间没有关系"，则 K^2 的观测值应比较小. 如果 K^2 的观测值很大，则说明很可能"性别与读营养说明之间有关系". 按题目中给出的数据计算得 K^2 的观测值 $k\approx8.416$，而由表 3-11 知 $P(K^2\geqslant7.879)\approx0.005$，而 $8.416>7.879$，所以在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为"性别与读营养说明之间有关系".

说明 如果问题为"性别与读营养说明之间有没有关系?"则下面表述同样正确：因为 K^2 的观测值 $k\approx8.416>6.635$，而 $P(K^2\geqslant6.635)\approx0.010$，所以在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为"性别与读营养说明之间有关系".

3. 需要收集数据，所以没有统一答案.

说明 第一步，要求学生收集并整理数据后得到列联表；第二步，类似上面的习题做出推断.

4. 需要从媒体上收集数据，同学关心的问题不同收集的数据会不同.

说明 第一步，要求学生收集并整理数据后得到列联表；第二步，类似上面的习题做出推断.

复习参考题（第 101 页）

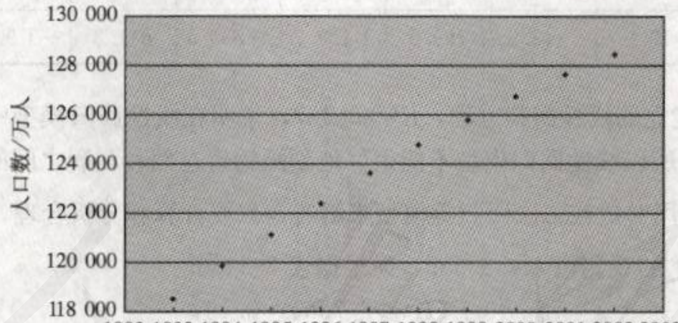
A 组

1. 1993 年到 2002 年中国人口总数如下表：

年份	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
年末人数/万人	118 517	119 850	121 121	122 389	123 626	124 761	125 786	126 743	127 627	128 453

数据来源：中国统计年鉴，2003.

根据表中数据作散点图如下：



（第 1 题）

根据散点图，可以认为中国人口总数与年份呈现很强的线性相关关系，因此选用线性回归模型建立回归方程. 根据截距和斜率的最小二乘计算公式得

$$\hat{a}\approx-2\ 095\ 141.503，\hat{b}\approx1\ 110.903.$$

因此线性回归方程为

$$\hat{y}=-2\ 095\ 141.503+1\ 110.903x,$$

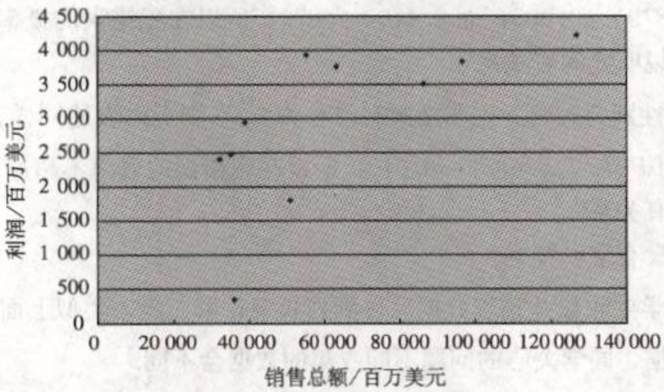
其中 x 代表年份，$\hat{y}$ 是相应年份的全国人口总数的估计. 由 R^2 的计算公式得

$$R^2\approx0.994,$$

这说明线性回归模型对数据的拟合效果相当好.

根据回归方程，预计 2003 年末中国人口总数为 129 997 万人，而实际情况为 129 227 万人，预测误差为−770 万人；2004 年末中国人口总数为 131 108 万人，而实际情况为 129 988 万人，预测误差为−1 120 万人.

2. (1) 将解释变量销售总额作为横轴，预报变量利润作为纵轴绘制散点图如下：



(第 2(1)题)

由于散点图中的样本点基本上在一个带形区域分布，猜想销售总额与利润之间呈现线性相关关系.

(2) 由线性回归模型的最小二乘估计量的计算公式得

$$\hat{a}\approx 1\ 334.5,\ \hat{b}\approx 0.025\ 6,$$

从而线性回归方程为

$$\hat{y}=1\ 334.5+0.025\ 6x,$$

其残差值计算结果见下表：

销售总额	126 974	96 933	86 656	63 438	55 264	50 976	39 069	36 156	35 209	32 416
利润	4 224	3 835	3 510	3 758	3 939	1 809	2 946	359	2 480	2 413
残差	−361.0	19.0	−42.9	799.5	1 189.7	−830.5	611.3	−1 901.1	244.1	248.7

(3) 对于 (2) 中所建立的线性回归方程，$R^2\approx 0.457$，说明在线性回归模型中销售总额只能解释利润变化的 46%，所以线性回归模型不能很好地刻画销售总额和利润之间的关系.

说明 此题目也可以用对数或二次回归等模型来解答，只要计算和分析合理，就算正确.

3. 由所给数据计算出 K^2 的观测值 $k\approx 3.689$，而根据表 3-11 知

$$P(K^2\geqslant 2.706)\approx 0.10,$$

而 $3.689>2.706$，因此在犯错误概率不超过 0.1 的前提下认为“婴儿的性别与出生的时间有关系”.

B组

1. 总偏差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 表示总的效应，即因变量的变化效应；残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 表示随机误差的效应，即随机误差的变化效应；回归平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$ 为解释变量的效应，即自变量的变量变化效应. 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$$

表示因变量的变化总效应等于随机误差的变化效应与自变量的变化效应之和.

2. 本题主要是考查学生们应用回归分析模型解决实际问题的能力，解答应该包括如何获取数据，如何根据散点图寻找合适的模型去拟合数据，以及所得结果的解释三方面的内容.

III 自我检测题

一、选择题

1. 在画两个变量的散点图时，下面叙述正确的是（ ）.

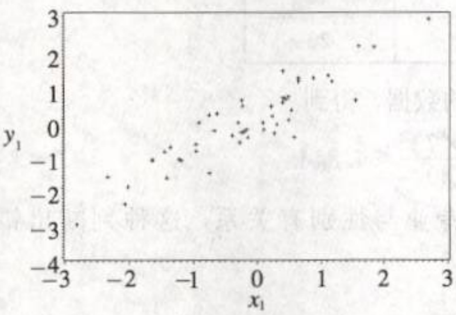
(A) 预报变量在 x 轴上，解释变量在 y 轴上

(B) 解释变量在 x 轴上，预报变量在 y 轴上

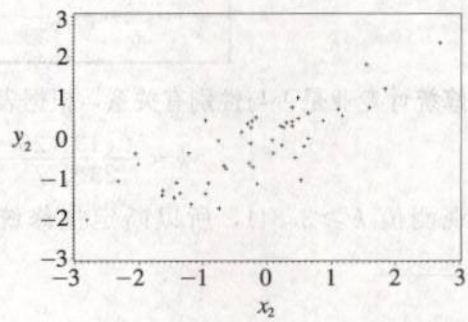
(C) 可以选择两个变量中任意一个变量在 x 轴上

(D) 可以选择两个变量中任意一个变量在 y 轴上

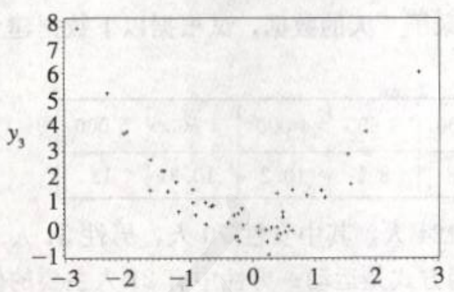
2. 下面散点图中的两个变量之间的关系不适合用线性回归模型拟合的是（ ）.



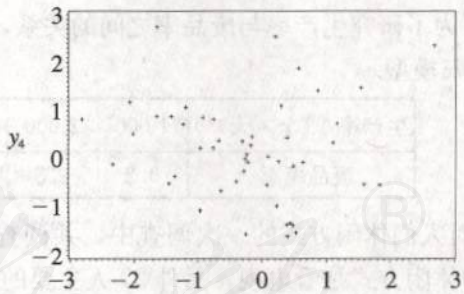
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 一位母亲记录了她儿子 3 到 9 岁的身高，数据如下表.

年龄/岁	3	4	5	6	7	8	9
身高/cm	94.8	104.2	108.7	117.8	124.3	130.8	139.0

由此她建立了身高与年龄的回归模型 $y=73.93+7.19x$，她用这个模型预测儿子 10 岁时的身高，则下面的叙述正确的是（ ）.

(A) 身高一定是 145.83 cm　　(B) 身高在 145.83 cm 以上

(C) 身高在 145.83 cm 左右　　(D) 身高在 145.83 cm 以下

4. 在建立两个变量 y 与 x 的回归模型中，分别选择了 4 个不同模型，模型 1～4 的 R^2 分别为

0.98，0.80，0.50，0.25，则其中拟合得最好的模型是（　　）.

(A) 模型1　　(B) 模型2　　(C) 模型3　　(D) 模型4

二、填空题

5. 作两个变量散点图的主要目的是____________.

6. 许多因素都会影响贫穷，教育也许是其中的一个. 在研究这两个因素的关系时，收集了某国50个地区的成年人至多受过9年教育的百分比（$x\%$）和收入低于官方规定的贫困线的人数占本地区人数的百分比（$y\%$）的数据，建立的回归直线方程是 $y=4.6+0.8\,x$. 这里，斜率的估计等于0.8说明____________.

7. 某大学希望研究性别与职称之间是否有关系，你认为应该收集哪些数据？________________________.

8. 某高校"统计初步"课程的教师随机调查了选该课程的一些学生的情况，具体数据如下表.

专业 / 性别	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

为了检验主修统计专业是否与性别有关系，根据表中的数据，得到

$$k=\frac{50(13\times20-10\times7)^2}{23\times27\times20\times30}\approx4.844.$$

因为 K^2 的观测值 $k\geqslant3.841$，所以断定主修统计专业与性别有关系，这种判断出错的概率为____________.

三、解答题

9. 某厂为了研究生产率与废品率之间的关系，记录了7天的数据，试根据以下数据建立废品率与生产率的回归模型.

生产率/（个·天$^{-1}$）	1 000	2 000	3 000	3 500	4 000	4 500	5 000
废品率/%	5.2	6.5	6.8	8.1	10.2	10.3	13

10. 在对人们休闲方式的一次调查中，共调查了124人，其中女性70人，男性54人. 女性中有43人主要的休闲方式是看电视，另外27人主要的休闲方式是运动；男性中有21人主要的休闲方式是看电视，另外33人主要的休闲方式是运动.

(1) 根据以上数据建立一个2×2的列联表；

(2) 能否在犯错误的概率不超过0.025的前提下认为"性别与休闲方式有关系"？

参考答案：

1. B.　　2. D.　　3. C.　　4. A.

5. 直观了解两个变量的关系.

6. 一个地区受过9年或更少的教育的百分比每增加1%，则收入低于官方规定的贫困线的人数占本地区人数的百分比将增加0.8%左右.

7. 女教授的人数，男教授的人数，女副教授的人数，男副教授的人数（或高级职称中女性的人数，高级职称中男性的人数，中级职称中女性的人数，中级职称中男性的人数）.

8. 0.05.

9. 用 $y\%$表示废品率，x 表示生产率，则 $y=2.628+0.002x$.

10. (1) 2×2 的列联表：

休闲方式 \ 性别	看电视	运动	合计
女	43	27	70
男	21	33	54
合计	64	60	124

(2) 假设“休闲方式与性别没有关系”，计算

$$k=\frac{124(43\times33-27\times21)^2}{70\times54\times64\times60}\approx6.201.$$

因为 K^2 的观测值 $k\geqslant5.024$，所以在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“休闲方式与性别有关系”.

IV 拓展资源

一、偏差平方和分解与 R^2

偏差平方和分解指如下的公式（简称为平方和分解公式）：

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2\ ,$$

其中

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

称为总偏差平方和；

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$$

称为回归平方和；

$$SS_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

称为残差平方和. 偏差平方和分解公式也可以用文字或符号表示为：

总的偏差平方和＝回归平方和＋残差平方和

或

$$SS_T=SS_R+SS_E.$$

1. 偏差平方和分解公式的推导

假设观测数据为(x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i+\hat{y}_i-\bar{y})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i). \qquad (*)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i) &= \sum_{i=1}^{n}(\hat{b}x_i-\hat{b}\bar{x})(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\hat{b}(x_i-\bar{x})[(y_i-\hat{a}-\hat{b}\bar{x}-\hat{b}(x_i-\bar{x})]\\ &= \hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})((y_i-\bar{y})-\hat{b}(x_i-\bar{x}))\\ &= \hat{b}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]=0,\end{aligned}$$

代入（$*$）式可得偏差平方和分解公式.

2. 有关总偏差平方和、回归平方和、残差平方和以及R^2的说明

(1) 总偏差平方和

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

刻画了预报变量y的变化程度.

(2) 在回归平方和

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

中，所有预测值的平均值也等于$\bar{y}$，推导如下：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}x_i+\hat{a})=\hat{b}\cdot\bar{x}+\hat{a}=\hat{b}\cdot\bar{x}+\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=\bar{y}.$$

因此回归平方和又可以写成

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\right)^2,$$

从而回归平方和刻画了估计量$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$的变化程度. 由于估计量由解释变量x所决定，所以回归平方和刻画了预报变量的变化中由解释变量通过线性回归模型所引起的那一部分变化.

(3) 残差平方和

$$SS_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

刻画了残差变量的变化程度.

(4) 由上所述，可以把平方和分解公式解释为：预报变量的变化可以分解为由解释变量引起的变化与残差变量引起的变化之和.

(5) 由平方和分解公式

$$1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}, \qquad (**)$$

这意味着在线性回归模型中，预报变量的 1 个单位的变化，需要由解释变量贡献 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，由残差变量贡献 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$. 因此在线性回归模型中，我们说预报变量 y 的变化中的 $100\times\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}\%$ 是由解释变量 x 所引起，或者说解释变量 x 可以解释预报变量 y 的 $100\times\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}\%$ 的变化.

(6) 在线性回归模型中，R^2 与平方和分解公式之间的关系：由表达式（**）移项得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=R^2,$$

即

$$R^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}.$$

由 (5) 知在线性回归模型中，可以说“预报变量 y 的变化中的百分之 $100R^2$ 是由解释变量 x 所引起”，或者说“解释变量 x 可以解释预报变量 y 的百分之 $100R^2$ 的变化”. 因此，R^2 越大，模型的拟合效果越好；R^2 越小，模型的拟合效果越差.

二、参考文献

G. R. Iversen & M. Gergen. 统计学——基本概念和方法. 吴喜之，等译. 北京：高等教育出版社，2000.

吴喜之. 统计学——从数据到结论. 北京：中国统计出版社，2004.

廖昭懋，杨文礼. 概率论与数理统计. 北京：北京师范大学出版社，1990.

茆诗松，王静龙. 数理统计. 上海：华东师范大学出版社，2000.