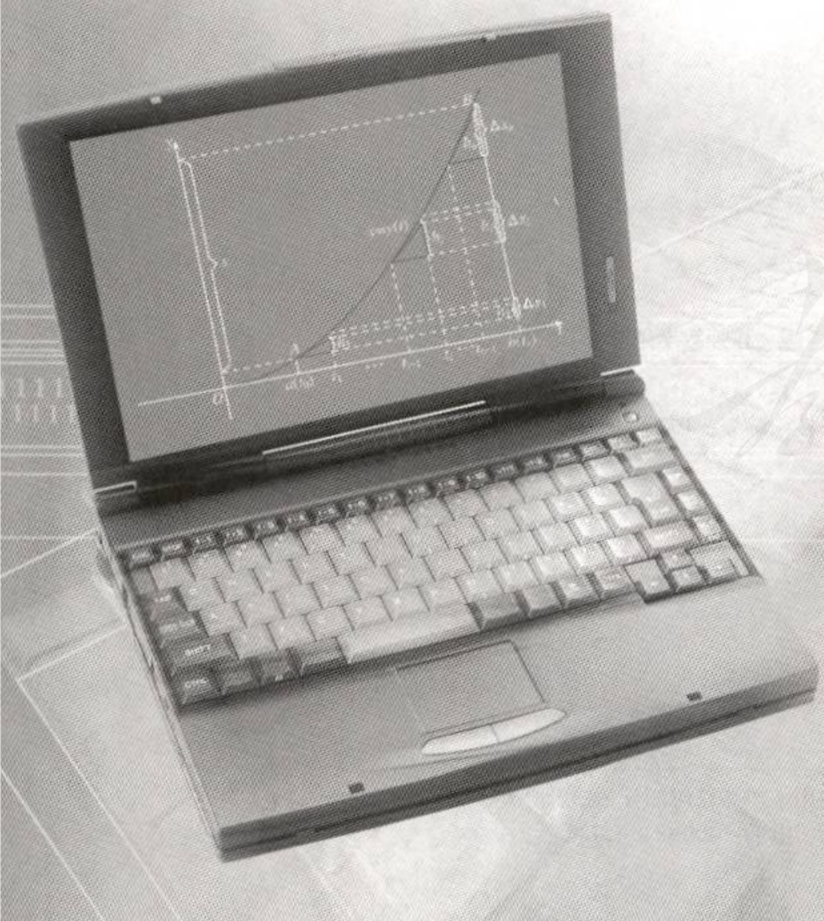
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书教师教学用书：A版．数学．2-2．选修/人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—2版．—北京：人民教育出版社，2007.5(2019.7重印)

ISBN 978-7-107-19109-1

Ⅰ．①普… Ⅱ．①人… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第021522号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 2-2 A版 教师教学用书

出版发行	人民教育出版社 （北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）
网 址	http://www.pep.com.cn
经 销	全国新华书店
印 刷	唐山市润丰印务有限公司
版 次	2007年5月第2版
印 次	2019年7月第28次印刷
开 本	890毫米×1 240毫米 1/16
印 张	7.5
字 数	195千字
定 价	16.20元

主　　编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：章建跃　王　嵘　张劲松　李龙才　宋莉莉　蒋佩锦

责任编辑：李龙才

美术编辑：王俊宏　王　艾

封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、独立性检验思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如线段的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

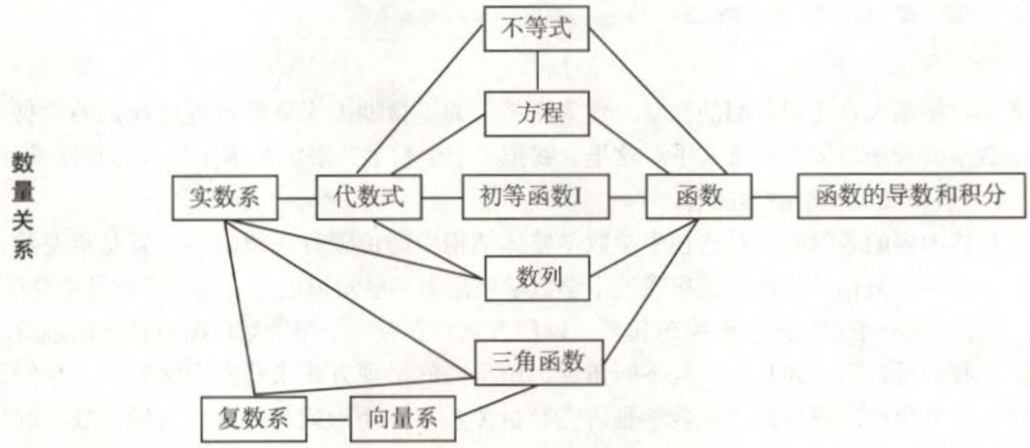
1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制；
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系. 这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数).

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+xi+yj+zk)$，而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等).

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“$=$”换成实数系所特有的“$>$”（或“$<$”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “$>$”的性质比“$=$”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数I 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数（即对数函数).

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

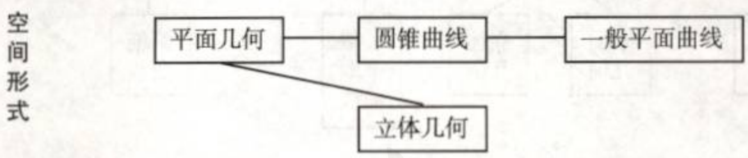
函数 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看柱面、锥面、台面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，几乎与函数结伴出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

“数形结合”

用三角函数解三角形 参看**三角函数**. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

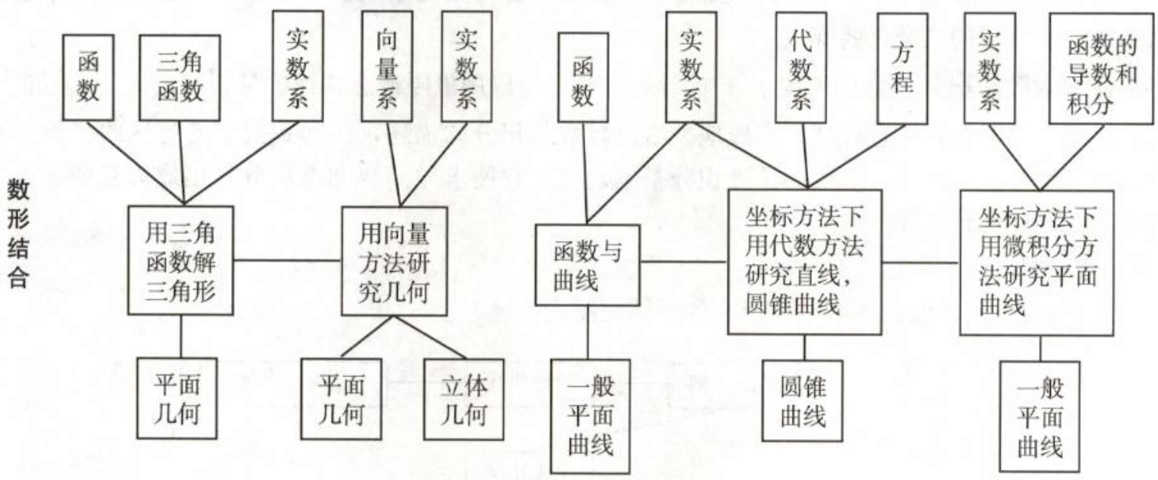
用向量来研究几何 用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线 用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看**函数**.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的图象，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

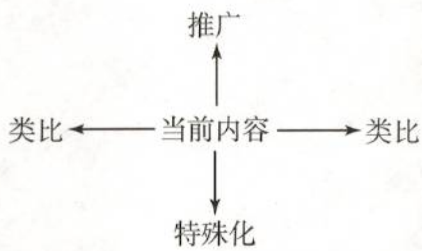
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

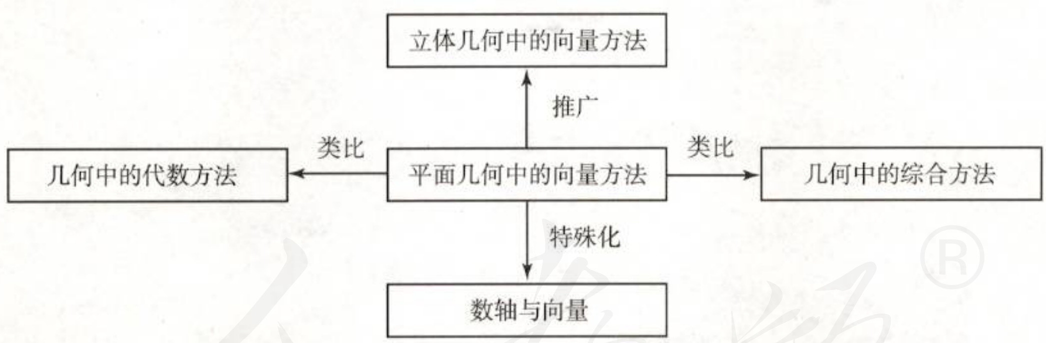
6. 相等的定义处处都有．我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的．例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的．

7. 逻辑结构编织着中学数学．中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据．在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理．这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体．如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等．

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示．例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考．例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题．

刘绍学

说 明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性等**，具有如下特点：

1. "亲和力"：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生"看个究竟"的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2. "问题性"：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的"关键点"上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的"关节点"上，在数学知识之间联系的"联结点"上，在数学问题变式的"发散点"上，在学生思维的"最近发展区"内，通过"观察""思考""探究"等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3. "科学性"与"思想性"：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的"数""形"

属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. “时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识.

5. “联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

（1）课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

（4）课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、编写意图与教学建议等.

（1）本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

（2）重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

（3）难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（4）编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴涵的

数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型.具体包括了下面一些内容：

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题所具备的巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需要的可以从人教网上下载.

本书是选修课程数学 2-2 的教师教学用书，包含导数及其应用，推理与证明，数系的扩充与复数的引入等三章内容. 全书共 36 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第 1 章	导数及其应用	约 24 课时
第 2 章	推理与证明	约 8 课时
第 3 章	数系的扩充与复数的引入	约 4 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

第一章
导数及其应用

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段．导数、定积分都是微积分的核心概念，它们有极其丰富的实际背景和广泛的应用．在本章中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等性质中的作用．学生还将经历求解曲边梯形的面积、汽车行驶的路程等实际问题的过程，初步了解定积分的概念，为以后进一步学习微积分打下基础．通过本章的学习，学生将体会导数的思想及其丰富内涵，感受导数在解决实际问题中的作用，了解微积分的文化价值．

2. 学习目标

(1) 变化率与导数

① 通过分析实例，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵．

② 通过函数图象直观地理解导数的几何意义．

(2) 导数的计算

① 能根据导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数．

② 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数．

③ 会使用导数公式表．

(3) 导数在研究函数中的应用

① 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间．

② 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及在给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值．

(4) 生活中的优化问题举例

例如，通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用.

(5) 定积分与微积分基本定理

① 通过实例（如求曲边梯形的面积、变力做功等），从问题情境中了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念.

② 通过实例（如变速运动物体在某段时间内的速度与路程的关系），直观了解微积分基本定理的含义.

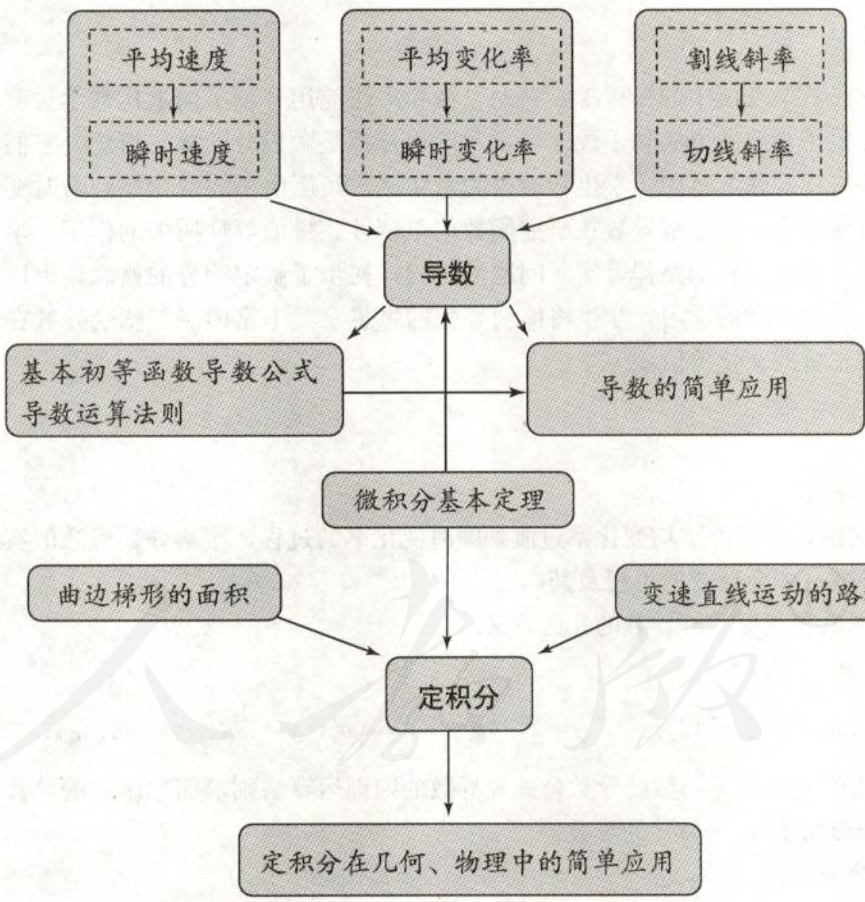
③ 应用定积分解决一些简单的几何和物理问题.

(6) 数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分7节：1.1 变化率与导数，1.2 导数的计算，1.3 导数在研究函数中的应用，1.4 生活中的优化问题举例，1.5 定积分的概念，1.6 微积分基本定理，1.7 定积分的简单应用. 另外还有一个实习作业.

(1) 为了突出导数概念的实际背景，教科书选取了两个典型实例，引导学生经历从平均变化率到瞬时变化率的过程，从而理解导数概念的本质——导数就是瞬时变化率．在此基础上，教科书借助函数图象的直观，阐明了曲线的切线斜率和导数间的关系．在介绍导数的定义、几何意义的过程中，教科书结合内容揭示了“逼近”“以直代曲”等数学思想．

(2) 教科书通过求几个常见函数的导数，引导学生学习根据定义求导数的方法，使他们进一步理解导数概念；为了使学生能用基本初等函数的导数公式与运算法则求简单函数的导数，教科书在直接给出公式和运算法则后，通过例题和习题引导学生模仿、操作，以熟悉和掌握导数的概念和基本运算．

(3) 教科书介绍了导数在研究函数的单调性、极值和最值以及导数在解决生活中的优化问题中的应用，其中，运用导数研究函数的单调性是基础．

(4) 在引导学生认识定积分概念的过程中，教科书利用求曲边梯形的面积、变速直线运动的路程这两个典型问题，着重揭示出“以直代曲”“以不变代变”和“逼近”的重要思想方法，给出求解这类问题的一般步骤，进而引出定积分的定义，给出定积分的几何意义．

(5) 教科书引导学生分析分别用变速直线运动的“位置函数” $y=y(t)$ 及其导数（“速度函数”）$v(t)=y'(t)$ 表示物体在某一时间段内的位移的方法，使学生体会微积分基本定理的内涵，了解导数和定积分之间的内在联系．

(6) 教科书介绍了定积分在求一些简单平面图形的面积、变速直线运动的路程以及变力做功中的应用，使学生进一步体会定积分丰富的背景和广泛的应用．

三、课时安排

本章教学时间约为 24 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 变化率与导数	约 4 课时
1.2 导数的计算	约 3 课时
1.3 导数在研究函数中的应用	约 4 课时
1.4 生活中的优化问题举例	约 3 课时
1.5 定积分的概念	约 4 课时
1.6 微积分基本定理	约 2 课时
1.7 定积分的简单应用	约 2 课时
实习作业	约 1 课时
小结	约 1 课时

II 教科书分析

章引言说明了三方面的问题：首先，简明地指出了函数和微积分的关系，微积分的研究对象就是函数，正是对函数的深入研究导致了微积分的产生；其次，概述了微积分的创立史以及它在数学和科学发展中的地位；第三，概述了本章的学习内容．

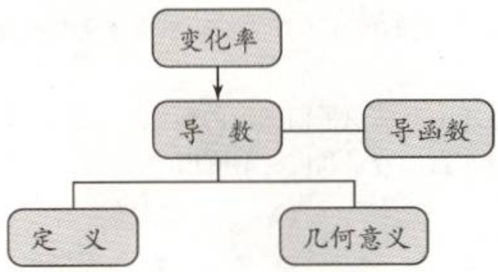
导数是对变化率的一种“度量”．章头图展示了生活中最常见的一种变化率——运动速度．速度是学生非常熟悉的物理知识，因此，教科书以高台跳水模型（近似看成竖直上抛运动）为贯穿全章的主

线问题，导数概念的引入，函数单调性、极值与导数之间的关系等都以此为背景，这可以使学生借助典型的运动模型理解导数概念，使抽象的导数概念建立在具体实例的基础上.

教学中，可以充分利用章引言中提示的微积分史料，引导学生探寻微积分发展的线索，体会微积分的创立与人类科技发展之间的紧密联系，认识导数和定积分在研究和处理实际问题中的作用，从而激发他们学习本章内容的兴趣. 建议学完本章后，再次引导学生阅读章引言，以加深学生对导数的思想、方法和作用的体会.

1.1 变化率与导数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是使学生知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵，理解导数的几何意义.

学生在本节学习中可能会遇到以下困难：

(1) 体会从平均变化率到瞬时变化率，从割线到切线的过程中采用的逼近方法；

(2) 理解导数的概念，将导数多方面的意义联系起来. 例如，导数就是瞬时变化率，导数反映了函数 $f(x)$ 在点 x 附近变化的快慢，导数是曲线上某点处切线的斜率，等等.

三、编写意图与教学建议

本节主要包括三方面的内容：变化率、导数概念、导数的几何意义. 实际上，它们是理解导数思想及其内涵的不同角度. 首先，教科书从平均变化率开始，用平均变化率探求瞬时变化率，并给予各种不同变化率在数量上的精确描述，即导数；然后，教科书从数转向形，借助函数图象，探求切线斜率和导数的关系，说明导数的几何意义.

在这样的两个阶段，教科书注重思考方法的渗透，即以已知探求未知；注重抽象概念不同意义间的转换，即从实际意义、数值意义、几何意义等方面理解导数内涵与思想. 目的在于，不仅让学生在数学知识的量上有所收获，而且能够体会其中蕴涵的丰富的思想，逐渐掌握数学研究的基本思考方式和方法.

1.1.1 变化率问题

本小节的主要知识内容是平均变化率. 在众多变化率问题中，教科书选择了气球膨胀率问题和高

台跳水运动的速度问题．这两个实例的共同点是背景简单，吹气球是很多人具有的生活经验，运动速度是学生非常熟悉的物理知识．从简单的背景出发，既可以利用学生原有的知识经验，又可以减少因为背景的复杂而可能引起的对数学知识学习的干扰．

1．气球膨胀率问题

“对一种生活现象的数学解释”是教科书介绍数学知识的切入角度，不仅可以激发学生深入探究的兴趣，而且让学生感到数学是有用的．如何从数学的角度描述吹气球过程中的现象“随着气球内空气容量的增加，气球的半径增加得越来越慢”？这可能也是学生感到困难的地方．在教学中，可以从以下几个方面进行引导：

（1）这句话中涉及到两个变量，气球空气容量，即气球体积 V，气球半径 r；还涉及到两个变量间的关系，运用几何知识可以写出它们之间的函数解析式，即 $r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$．

（2）“气球的半径增加得越来越慢”的意思就是说“随着气球体积的增大，当气球体积的增加量相同时，相应半径的增加量越来越小”，从数学角度进行描述就是，“随着气球体积的增大，比值 $\frac{\text{半径的增加量}}{\text{体积的增加量}}$ 越来越小”．而这个比值就是气球的平均膨胀率．

（3）运用上述数学解释计算一些具体的值，如 V 从 0 增加到 1 L，从 1 L 增加到 2 L，从 2 L 增加到 2.5 L，从 2.5 L 增加到 4 L 的平均膨胀率．感受气球膨胀率大小的变化，从而体会到平均膨胀率可以刻画气球半径变化的快慢．

2．高台跳水问题

教科书计算了两个时间段内运动员的平均速度，在教学中，可以让学生多计算几个平均速度，体会到平均速度可以描述运动员在某段时间内运动的快慢．

3．平均变化率的教学分析

在这两个问题的基础上，教科书归纳它们的共同特征，用 $f(x)$ 表示其中的函数关系，定义了一般的平均变化率，并给出符号表示．随后设置的“思考”（第 4 页）意在让学生借助函数图象，了解平均变化率的几何意义．

考虑到学生初次接触平均变化率及其符号表示，建议教学中多举一些具体的例子让学生巩固对这个概念的理解．

4．“探究”（第 3 页）的目的

让学生通过计算和思考意识到，平均速度只能粗略地描述运动员的运动状态，它并不能反映每一时刻的运动状态．因此，就需要寻找一个量，能更精细地刻画运动员的运动状态．所以，这里的“探究”会让学生感受到进一步探究、学习的必要性，为建立导数概念营造了一个良好的问题情境．在教学中，可以让学生就此探究进行思考、展开讨论，激发他们的认知需求，自然地进入导数概念的学习．

1.1.2　导数的概念

1．导数概念建立方式的说明

一般地，导数概念学习的起点是极限，即从数列→数列的极限→函数的极限→导数．这种建立概念的方式具有严密的逻辑性和系统性，但是也产生了一些问题：就高中学生的认知水平而言，他们很难理解极限的形式化定义，由此产生的困难也影响了对导数本质的理解．因此，教科书没有介绍形式

化的极限定义及相关知识，而是从变化率入手，用形象直观的“逼近”方法定义导数．这样一来，其一，避免学生认知水平和知识学习间的矛盾；其二，将更多精力用于对导数本质的理解上；其三，学生对逼近思想有了丰富的直观基础和一定的理解，有利于在大学的初级阶段学习严格的极限定义．

在教学中值得注意的是，本节教科书编写的重点在于理解导数的概念和基本方法，并不追求理论上的严密性和过多的技巧，建议教学时充分理解教科书的编写意图，将教学重点放在对导数思想及其内涵的理解上．

2. 导数概念建立过程的分析

教科书将导数概念的建立划分为两个阶段：首先明确瞬时速度的含义，然后将瞬时速度一般化，给出导数定义．这个过程蕴涵了逼近的思想和用已知探究未知的思考方法．在教学中，应特别注意这些思想方法的渗透和引导．

（1）从平均速度到瞬时速度

作为 1.1.1 节运动员速度问题的延续，教科书指出：“物体在某一时刻的速度称为瞬时速度……如何求运动员的瞬时速度呢?”根据物理中的知识，运动员在每一个时刻必有瞬时速度，那么如何求瞬时速度呢？面对问题，教科书从已知，即平均速度入手开始探求瞬时速度，首先是寻求解决问题的思路．公式$\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$定义了运动员在一段时间内的平均速度，它粗略地描述了这段时间内运动员运动的快慢．可以想象，如果 $|\Delta t|$ 非常非常小，$\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$就可以近似地反映这段时间内任何时刻的瞬时速度，当然也可以近似地反映 t 时刻的瞬时速度．所以，一个自然的想法是，选取一个时刻，如 $t=2$ s，在具体数值计算基础上，细致地观察它附近的变化情况．

确定思路后，教科书选取了两串绝对值越来越小的 Δt 的值，计算出 $t=2$ 两侧各时间段内运动员的平均速度，如第 4 页表格所示．观察表格中的两列数值，可以发现，当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋向于一个定值．自然地，这个定值就是 $t=2$ s 时的瞬时速度．

这样，教科书给出了运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度：

当 Δt 趋近于 0 时，$\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$趋于的定值．

最后出于表述上的方便，教科书用简洁的符号表示上述思想，即用“$\lim\limits_{\Delta t\to 0}$”代替“当 Δt 趋近于 0 时……趋于的定值”．于是，$t=2$ s 时的瞬时速度可以简洁地表示为

$$2\text{ s 时的瞬时速度}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=-13.1.$$

（2）瞬时速度教学分析

学生在高一年级的物理课程中学习过瞬时速度．因此，学生已经具备了一定的认知基础．教科书充分利用这一认知基础，展现了一个完整的数学探究过程：提出问题，寻求想法，实施想法，发现规律，给出定义．在教学中，应注重引导学生充分经历这个过程，通过思考、讨论、探究，理解瞬时速度的含义、感受逼近的思想．对于瞬时速度的符号记法，教学中应给予说明，并在此基础上，让学生完成第 5 页“探究”中的问题 1，从特殊到一般，表示运动员在时刻 t_0 的瞬时速度．

值得注意的是，当定义 t_0 时刻的瞬时速度时，只要求学生能直观认识到“当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度趋向于一个定值，这个定值就是 t_0 时刻的瞬时速度”，不提及极限，以及从极限的角度认识瞬时速度．在教学中，应注意把握好这一要求，采用逼近方法定义瞬时速度，不宜添加极限知识，追求理论上的严密性．

（3）从瞬时速度到导数

教科书第 5 页“探究”的第 2 个问题舍弃了高台跳水的物理意义，完全抽象为数学问题：

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处（运动员在 t_0 时刻），自变量 x 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 有改变量 Δx(时间从 t_0 到 $t_0+\Delta t$有改变量 Δt)，相应的函数改变量 Δy 表示函数变化的数量（Δh 表示运动员的位移），因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$表示在 x_0 处，当 x 变化时，函数 $y=f(x)$变化的快慢程度（$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$表示运动员的瞬时速度），这叫做瞬时变化率.

许多实际问题（如效率、点密度等等）都归结为变化率的问题，在数学上，这种反映函数在一点处变化快慢程度的变化率就定义为导数.

(4) 导数概念教学分析

形成导数定义以及理解导数内涵的基础都是瞬时速度这个具体的物理模型，因此教学的关键是让学生充分经历从平均速度到瞬时速度的探究过程，体会到整个过程中采用的方法以及明确瞬时速度的含义；然后是推广到一般的情形，包括方法、思想以及形式的迁移.

建议教学时，可以再选配一些其他的变化率问题. 形式丰富的实例有利于学生辨别出它们具有的共同特征，认识到导数可以描述任何事物的瞬时变化率. 在数学中，它反映函数 $f(x)$在点 x 处变化的快慢；在物理中，它的一种意义就是瞬时速度，反映物体在某一时刻运动的快慢.

经历了建立导数概念的过程，学生会对历史上导致导数产生的一类问题“根据物体的路程关于时间的函数求速度和加速度”有更深的体会. 因此，教科书在导数定义之后安排的一段话，意在使学生结合亲身的学习过程感受到数学知识的产生是水到渠成的，数学的发展与人类文明的发展相互促进. 教学中，建议教师提示学生意识到这一点.

3. 例题 1 的教学

安排在导数定义之后的例 1 意在帮助学生理解导数概念. 利用定义计算导数的过程会让学生感受其中蕴涵的逼近思想；应用计算结果解释瞬时变化率的意义，能让学生进一步体会导数的内涵，即导数反映了函数在某一点附近的变化情况.

1.1.3　导数的几何意义

教科书在 1.1.1 设置的“思考”揭示了平均变化率与割线斜率之间的关系，而建立导数概念是从平均变化率到瞬时变化率，因此从形的角度探究导数的几何意义时，一个想法就是从割线入手. 教科书以此为出发点，直观定义了切线，获得了导数的几何意义.

1. 切线的定义

教科书在“观察”中就四幅图提出问题，让学生观察割线的变化趋势. 在这里，运用信息技术演示割线的动态变化趋势，会对学生的观察、分析非常有帮助. 在教学中，应给予学生观察、思考的时间，并引导学生共同分析、直观获得切线定义.

第 7 页边框中的问题要求学生比较已学的两个切线定义，从而在比较中发展切线的定义. 参考解释如下：

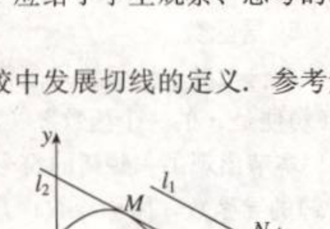


图 1-1

初中平面几何中圆的切线的定义：如果直线和圆有惟一公共点，则称直线和圆相切. 这时直线叫做圆的切线，惟一的公共点叫做切点.

圆是一种特殊的曲线. 这种定义并不适用于一般曲线的切线. 比如，图 1-1 中的曲线 C，直线 l_1 虽然与曲线 C 有惟一的公共点 N，但我们不能认为它与曲线 C 相切；而另一条直线 l_2，虽然与曲线 C 有不只一个公共点，我们还是认为它是曲线 C 在点 M 处的切线. 因此，以上圆的切线

的定义并不适用于一般的曲线.

通过逼近方法，将割线趋于的确定位置的直线定义为切线，适用于各种曲线. 所以，这种定义才真正反映了切线的本质特征.

2. 导数的几何意义

问题是教科书内容展开和启发学生思考的重要手段. 在获得切线定义以后，教科书通过问题“割线 PP_n 的斜率与切线 PT 的斜率 k 有什么关系”要求学生数形结合，将切线斜率和导数相联系，发现导数的几何意义.

教学中，应特别注重让学生意识到数与形的结合，认识到一个数学对象不同方面的意义，以及建立这些方面的联系时采用的数形结合的方法.

3. 以直代曲

以直代曲是微积分中重要的思想方法，即以简单的对象刻画复杂的对象. 大多数函数曲线就一小范围来看，大致可看作直线，所以，某点附近的曲线可以用过此点的切线近似代替，即以直代曲.

在教学中，可以让学生通过对曲线的直观观察体会以直代曲的思想. 比如，利用信息技术或不同倍数的放大镜将函数曲线某一点附近的图象放大得到一个近景图，图象放得越大，这一小段曲线看起来就越像直线（图 1-2）.

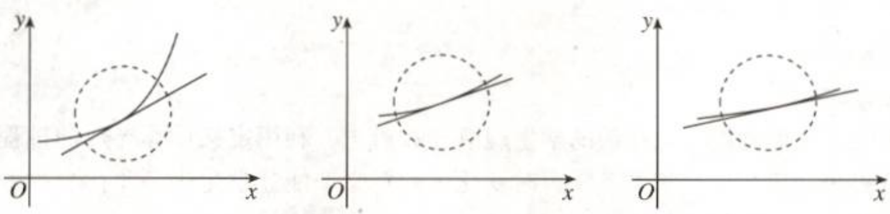


图 1-2

4. 例 2、例 3 的教学

例 2 是运用“以直代曲”解决问题. 例题解答中“所以”的根据在几何直观上就是“以直代曲”. 比如，在 t_1 附近，切线 l_1 可以近似代替曲线 $h(t)$，切线 l_1 的斜率小于零，呈下降趋势，故在 $t=t_1$ 附近曲线下降，函数 $h(t)$ 在 $t=t_1$ 附近单调递减. 在教学中应注意以此问题为载体，让学生体会“用简单对象刻画复杂对象”的思想.

例 3 的作用有两个：一是让学生通过直观操作进一步认识到导数和切线斜率之间的关系，二是第 9 页的表格为介绍导函数概念作铺垫.

5. 导函数

教科书对于导函数只是作了简单的介绍. 借助例 3 的表格，可以帮助学生体会“当 x 变化时，$f'(x)$ 便是 x 的一个函数”.

本节出现了一些新的符号，教学中应让学生明确这些符号的含义. 如 $f'(x)$（或 y'）是函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称导数；$f'(x_0)$（或 $y'|_{x=x_0}$）是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数；等等.

四、教学设计案例

1.1.2 导数的概念（2课时）

1. 教学任务分析

本节的中心任务是形成导数概念. 概念形成划分为两个层次：

(1) 借助高台跳水问题，明确瞬时速度的含义；

(2) 以速度模型为出发点，结合其他实例抽象出导数概念，使学生认识到导数就是瞬时变化率，了解导数内涵.

2. 教学重点、难点

形成导数概念，了解导数的内涵既是本节的重点也是难点.

3. 教学基本流程

提出问题，激发求知欲

↓

明确解决问题的想法及途径

↓

组织学生自主探索，获得导数定义

↓

通过例题和练习，了解导数内涵

4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师生活动	备　注
(1) 回顾第3页"探究".	(1) 让学生认识到平均速度只能粗略地描述某段时间内的运动状态. (2) 让学生产生进一步学习的需求，即有必要知道任意时刻的速度.	组织学生讨论、交流计算结果，激发学生的求知欲，明确研究课题.	此问题的设计基于学生在1.1.1学习后对于"探究"的自主学习.
(2) 如何求运动员的瞬时速度？比如，$t=2$ s时的瞬时速度是多少？	(1) 问题具体化，即求运动员在$t=2$ s时的瞬时速度. (2) 针对具体的问题情境，寻求解决问题的想法.	(1) 组织学生讨论问题，阐述想法. (2) 引导学生"以未知探求已知"，从平均速度出发，寻求想法. (3) 师生共同确定想法：计算$t=2$ s附近的平均速度，细致地观察它附近发生的情况.	(1) 应特别注重思考方法的引导，即以未知探究已知. (2) 直观的想法需通过数量计算得以明确.

续表

问题	设计意图	师生活动	备注
(3) 当 Δt 取不同值时，计算平均速度 $\bar{v}=\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 的值.	(1) 熟悉符号. (2) 让学生在亲自计算的过程中感受逼近的趋势.	(1) 引导学生采用数学符号将想法具体化，明确计算公式. (2) 要求学生利用计算器亲自计算两串平均速度.	适当增加表格中 Δt 的取值，更多的数值有利于学生发现其中蕴涵的规律.
(4) 当 Δt 趋近于0时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？	让学生经历观察、分析、归纳、发现规律的过程，体会瞬时速度的含义.	(1) 出示学生的计算结果，组织学生观察、讨论平均速度的变化趋势，引导学生说出“当 Δt 趋于0时，平均速度趋于一个确定的值13.1”. (2) 教师介绍符号表示，并解释符号含义.	在这里应给予学生充分思考和讨论的机会，慢慢引导他们说出自己的发现，并逐步修正到最终的结论上.
(5) 运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度怎样表示？	从特殊到一般，即从特殊点 $t=2$ 上升到任意点 $t=t_0$ 瞬时速度的表示.	(1) 带领学生回顾探求 $t=2$ 时瞬时速度的全过程. (2) 引导学生从特殊到一般，获得 $t=t_0$ 时瞬时速度的形式化表示.	应该让学生体会到从特殊到一般的过程中，研究问题的想法和方法是相同的，只是获得了更一般的形式化的表示.
(6) 气球在体积为 V_0 时的瞬时膨胀率如何表示？	将瞬时速度的形式化表示迁移到瞬时膨胀率上，让学生体会到其中的共同点.	(1) 回顾气球膨胀率问题. (2) 模仿瞬时速度的一般表示形式给出瞬时膨胀率的表示.	迁移的基础是两个变化率问题具有的共同特征.
(7) 如果将这两个变化率问题中的函数用 $y=f(x)$ 表示，那么函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的瞬时变化率怎样表示？	舍弃具体变化率问题的实际意义，抽象为数学问题，定义导数.	(1) 比较两个变化率问题，体会它们的共同特征. (2) 引导学生舍弃这两个问题的实际意义，抽象为数学问题. (3) 共同写出瞬时变化率的表示，并定义为导数.	这是学生思维上升的又一个层次，在这个过程中应特别注意教师的引导作用.
(8) 例1.	熟悉导数定义，了解导数内涵.	(1) 讲解例1，结合第6页练习上面的文字，让学生感受导数的内涵. (2) 让学生完成练习1. (3) 说明导数 $f'(x_0)$ 反映了函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的变化情况.	

续表

问　题	设计意图	师生活动	备　注
(9) 课堂小结.	教师引导学生从以下几个方面进行小结： ①导数产生的背景； ②导数形成的过程； ③导数的定义及其内涵； ④研究问题的步骤——提出问题、寻求想法、确定想法、实施操作、发现规律； ⑤思考方法——以已知探求未知.		
作业：教科书习题 1.1 A 组第 1，2，3，4，5 题.			

五、习题解答

练习（第 6 页）

在第 3 h 和 5 h 时，原油温度的瞬时变化率分别为 -1 和 3. 它说明在第 3 h 附近，原油温度大约以 1 ℃/h的速率下降；在第 5 h 时，原油温度大约以 3 ℃/h 的速率上升.

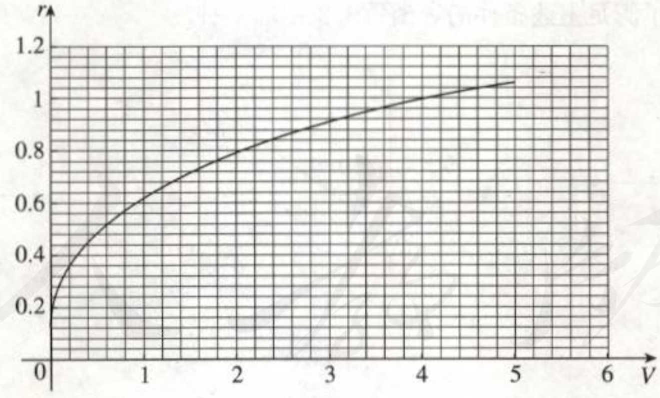
练习（第 8 页）

函数 $h(t)$ 在 $t=t_3$ 附近单调递增，在 $t=t_4$ 附近单调递增. 并且，函数 $h(t)$ 在 t_4 附近比在 t_3 附近增加得慢.

说明　体会“以直代曲”的思想.

练习（第 9 页）

函数 $r(V)=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ $(0\leqslant V\leqslant 5)$ 的图象为



根据图象，估算出 $r'(0.6)\approx 0.3$，$r'(1.2)\approx 0.2$.

说明　如果没有信息技术的支持，教师可以将此图直接提供给学生，然后让学生根据导数的几何意义估算两点处的导数.

习题 1.1（第 10 页）

A 组

1. 在 t_0 处，虽然 $W_1(t_0)=W_2(t_0)$，然而 $\dfrac{W_1(t_0)-W_1(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}\geqslant\dfrac{W_2(t_0)-W_2(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}$，所以企业甲比企业乙治理的效率高.

说明 平均变化率的应用，体会平均变化率的内涵.

2. $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-4.9\Delta t-3.3$，所以，$h'(1)=-3.3$.

这说明运动员在 $t=1$ s 附近以 3.3 m/s 的速度下降.

3. 物体在第 5 s 的瞬时速度就是函数 $s(t)$ 在 $t=5$ 时的导数.

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(5+\Delta t)-s(5)}{\Delta t}=\Delta t+10$，所以，$s'(5)=10$.

因此，物体在第 5 s 时的瞬时速度为 10 m/s，它在第 5 s 的动能 $E_k=\dfrac{1}{2}\times3\times10^2=150$ (J).

4. 设车轮转动的角度为 θ，时间为 t，则 $\theta=kt^2$ ($k>0$).

由题意可知，当 $t=0.8$ 时，$\theta=2\pi$. 所以 $k=\dfrac{25\pi}{8}$，于是 $\theta=\dfrac{25\pi}{8}t^2$.

车轮转动开始后第 3.2 s 时的瞬时角速度就是函数 $\theta(t)$ 在 $t=3.2$ 时的导数.

$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta(3.2+\Delta t)-\theta(3.2)}{\Delta t}=\dfrac{25\pi}{8}\Delta t+20\pi$，所以 $\theta'(3.2)=20\pi$.

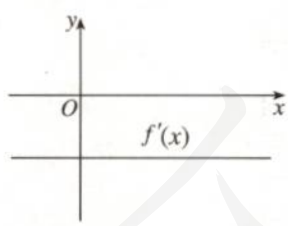
因此，车轮开始转动后第 3.2 s 时的瞬时角速度为 $20\pi\ \mathrm{s}^{-1}$.

说明 第 2，3，4 题是对了解导数定义及熟悉其符号表示的巩固.

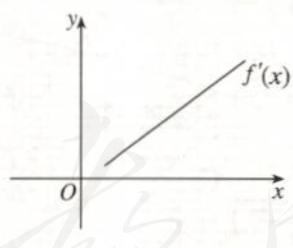
5. 由图可知，函数 $f(x)$ 在 $x=-5$ 处切线的斜率大于零，所以函数在 $x=-5$ 附近单调递增. 同理可得，函数 $f(x)$ 在 $x=-4$，-2，0，1 附近分别为单调递增，几乎没有变化，单调递减，单调递减.

说明 “以直代曲”思想的应用.

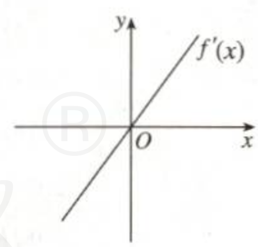
6. 第一个函数的图象是一条直线，其斜率是一个小于零的常数，因此，其导数 $f'(x)$ 的图象如图(1)所示；第二个函数的导数 $f'(x)$ 恒大于零，并且随着 x 的增加，$f'(x)$ 的值也在增加；对于第三个函数，当 x 小于零时，$f'(x)$ 小于零，当 x 大于零时，$f'(x)$ 大于零，并且随着 x 的增加，$f'(x)$ 的值也在增加. 以下给出了满足上述条件的导函数图象中的一种.



(1)



(2)



(3)

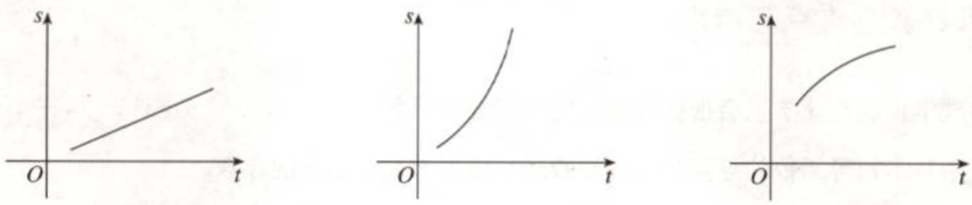
(第 6 题)

说明 本题意在让学生将导数与曲线的切线斜率相联系.

B 组

1. 高度关于时间的导数刻画的是运动变化的快慢，即速度；速度关于时间的导数刻画的是速度变化的快慢，根据物理知识，这个量就是加速度.

2.

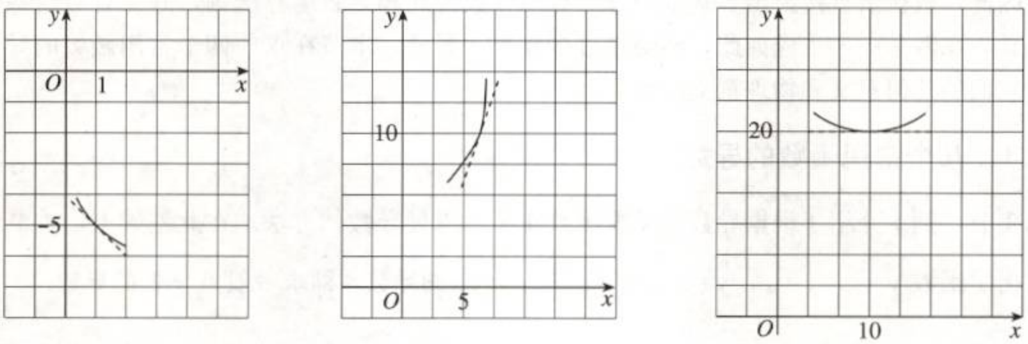


(1) (2) (3)

（第 2 题）

说明 由给出的 $v(t)$ 的信息获得 $s(t)$ 的相关信息，并据此画出 $s(t)$ 的图象的大致形状．这个过程基于对导数内涵的了解，以及数与形之间的相互转换．

3. 由（1）的题意可知，函数 $f(x)$ 的图象在点$(1,\ -5)$处的切线斜率为-1，所以此点附近曲线呈下降趋势．首先画出切线的图象，然后再画出此点附近函数的图象．同理可得(2)(3)某点处函数图象的大致形状．下面是一种参考答案．



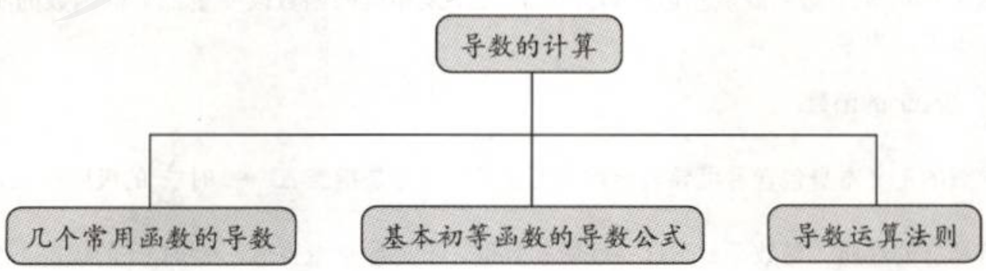
(1) (2) (3)

（第 3 题）

说明 这是一个综合性问题，包含了对导数内涵、导数几何意义的了解，以及对以直代曲思想的领悟．本题的答案不惟一．

1.2 导数的计算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是让学生会根据导数的定义求五个函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数，并能利用基本初等函数的导数公式和导数运算法则求简单函数的导数.

三、编写意图与教学建议

本节主要是介绍求导数的方法. 根据导数定义求导数是最基本的方法. 但是，由于最终总会归结为求极限，而本章并没有介绍极限知识，因此，教科书只是采用这种方法计算了 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$这五个常用函数的导数. 意在让学生感受根据导数定义求导数这种基本的方法，但不作过多要求. 只要学生能够利用教科书给出的基本初等函数的导数公式和导数运算法则求简单函数的导数即可. 因此，教科书直接给出了基本初等函数的导数公式和导数运算法则，并没有对这些公式和法则进行推导. 在教学中，也应如此，不要作过多要求. 另外，本节在求前四个常用函数的导数时，特别注意了它们的几何意义和物理意义的解释.

1.2.1 几个常用函数的导数

在 1.1 节，例 1 介绍了根据导数定义求函数在某一点处导数的方法. 在此基础上，本节继续用这种方法求出了函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数，即求一般点 x 处的导数.

1. 根据导数定义求函数的导数

根据定义求函数的导数实际上最终归结为求极限. 教科书在不介绍极限的情况下，尽量淡化这种方法的严格性要求及涉及的相关技巧，只是要求：

首先，计算$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，并化简；

然后，观察当 Δx 趋近于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋近于哪个定值；

最后，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋近于的定值就是函数 $y=f(x)$的导数.

以上过程中涉及到的一些相关知识，教师应该明了，但并不要求学生了解.

(1) 由于 Δx 是自变量 x 的改变量，所以 Δx 可正可负，但不能为零. 当 $\Delta x>0$(或 $\Delta x<0$)时，$\Delta x\to 0$ 表示 $x+\Delta x$ 从右边（或从左边）趋近于 x. Δy 是相应的函数改变量，则依函数的不同可以为正、为负，也可以为零.

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$是 Δx 的函数.

(3) 导数的定义本身包含着可导与导数两层含义. 可导是指当 $\Delta x\to 0$ 时$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在，它反映函数在一点所具有的性质，导数是刻画这一性质的数量. 不可导是指当 $\Delta x\to 0$ 时$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限不存在，即不无限地趋近于一个常数.

2. 导数不同意义间的转换

只要有可能，教科书总是将导数不同方面的意义进行相互转换和解释，贯彻了“加强联系性”这一思想．这样，不仅可以使学生转换思维角度，深刻认识导数内涵，而且能逐渐培养成用数学知识解释现实问题的习惯．例如，根据定义计算完函数 $y=c$，$y=x$ 的导数后，教科书从物理意义的角度进行解释；计算完 $y=x^2$ 的导数后，教科书分别从几何意义和物理意义两个角度进行解释；在 1.2.2 小节解答完每一个例题后，教科书都将计算结果转换为它们的实际意义．

建议教学设计时，应有层次地让学生逐步实现不同意义间的转换．首先分别认识导数不同方面的意义，然后建立不同意义间的联系，最后能够在不同意义间进行转换．

3. “探究”的说明与解答

●第 13 页的“探究”设计了三个逐层深入的问题，目的在于：首先，让学生模仿着根据导数定义求导数；其次，进一步体会导数与切线斜率间的关系；最后，发现正比例函数增减快慢的规律，为后继的学习做个铺垫．具体解答如下：

函数 $y=2x$，$y=3x$，$y=4x$ 的图象如图 1-3 所示，导数分别为 $y'=2$，$y'=3$，$y'=4$．

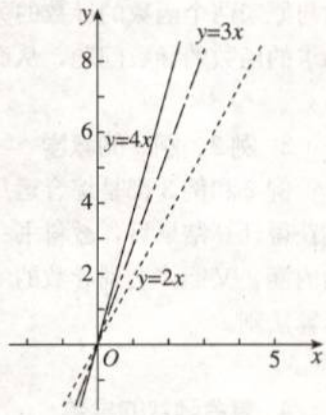


图 1-3

(1) 从图象上看，函数 $y=2x$，$y=3x$，$y=4x$ 的导数分别表示这些直线的斜率．

(2) 在这三个函数中，$y=4x$ 增加得最快，$y=2x$ 增加得最慢．

(3) 函数 $y=kx$ $(k>0)$增加的快慢与 k 有关系，即与函数的导数有关系，k 越大，函数增加得越快，k 越小，函数增加得越慢．

函数 $y=kx$ $(k<0)$减少的快慢与 $|k|$ 有关系，即与函数导数的绝对值有关系，$|k|$ 越大，函数减少得越快，$|k|$ 越小，函数减少得越慢．

●第 14 页的“探究”设计了两个问题，第一个问题要求学生在思考和模仿的基础上，利用函数 $y=\frac{1}{x}$ 的导数描述它的变化情况；第二个问题要求学生数形结合，求出曲线在点(1，1)处的切线方程．具体解答如下：

函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象如图 1-4 所示．

结合函数图象及其导数 $y'=-\frac{1}{x^2}$ 发现，当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，函数 $y=\frac{1}{x}$ 减少得越来越快；当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，函数减少得越来越慢．

点(1，1)处切线的斜率就是导数 $y'|_{x=1}=-\frac{1}{1^2}=-1$，故斜率为$-1$，过点(1，1)的切线方程为$y=-x+2$．

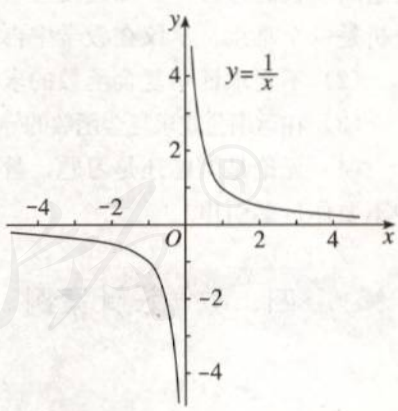


图 1-4

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

教科书直接给出基本初等函数的导数公式及导数的运算法则，不要求根据导数定义推导这些公式和法则，只要求能够利用它们求简单函数的导数即可．在教学中，适量的练习对于熟悉公式和法则的运用是必要的，但应避免过量的形式化的运算练习．

1. 基本初等函数的导数公式

教科书给出了 8 个常用的基本初等函数的导数，包括常数函数、幂函数（指数为非 0 有理数）、正弦函数、余弦函数、指数函数、对数函数. 其中每一个公式都可以根据导数定义推导出来，但在这里不做要求.

例 1 是一个关于指数型函数的实际问题，教科书通过这个例题展示了导数公式表的运用.

2. 导数的运算法则

“思考”说明了为什么要引入导数运算法则. 运用导数公式，已经会求 $f(t)=5$ 和 $g(t)=1.05^t$ 的导数，现在要求 $p(t)=5\times1.05^t$ 的导数，而 $p(t)$ 的导数正是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 乘积的导数. 一般来说，如果两个已知函数的导数会求或易求，引进四则运算的求导法则，就能得到两个函数的和、差、积、商的导数与原来两个函数的导数的关系. 应用这些法则就可以将比较复杂的函数的求导问题，化为会求的或易求的函数的导数问题，从而使许多函数的求导过程得到简化.

3. 例 2、例 3 的教学

例 2 和例 3 都是综合运用导数公式和运算法则计算导数的问题. 例 3 是一个净化度的实际问题，在获得计算结果后，教科书一如既往地运用数学结果解释其实际意义，既可以使学生进一步理解导数的内涵，又能体会到导数的应用性. 在教学中，可以选配适量的求导问题，帮助学生熟悉导数公式和运算法则.

4. 复合函数的导数

教科书第 16 页利用“思考”引导学生以分析函数 $y=\ln(x+2)$ 的结构特点为基础来了解复合函数的含义. 教科书直接给出复合函数的求导公式，并以例 4 具体说明如何运用此公式求简单复合函数的导数. 教学中应注意以下几点：

(1) 教学的重点应放在引导学生理解简单复合函数的复合过程，即因变量通过中间变量表示为自变量的函数的过程，并知道复合过程中的自变量、因变量以及中间变量分别是什么. 复合函数结构的分析是一个难点，建议在教学中再配备几个例题. 不必介绍复合函数的严格定义.

(2) 不要求证明复合函数的求导公式.

(3) 在运用公式求复合函数的导数时，关键是正确地分析出复合函数的复合过程，找出相应的中间变量.

(4) 无论是例题还是习题，教科书只要求能根据复合函数导数公式求形如 $f(ax+b)$ 的导数，教学中不要作过多引申.

四、教学设计案例

1.2.1 几个常用函数的导数（1 课时）

1. 教学任务分析

本节的教学任务是用导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

2. 教学重点、难点

教学重点是能用导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

3. 教学基本流程

回顾导数定义，明确根据定义求导数的方法

↓

求函数$y=c$，$y=x^2$的导数

↓

总结根据定义求导数的一般步骤

↓

师生同求函数$y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数

↓

小组学习，完成“探究”

↓

师生共同进行课堂总结

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动	备　注
（1）如何求函数$y=f(x)$的导数？	课题引入.	回顾、分析导数定义，明确根据定义求导数的方法.	
（2）求函数$y=c$，$y=x^2$的导数.	通过两个求函数导数的具体计算过程，让学生体会根据定义求导数的方法.	以教师计算、演示为主，说明根据定义求导数这种方法的具体操作过程.	在这个过程中，“Δx趋于0但不等于0；$\frac{\Delta y}{\Delta x}$可能趋于定值也可能不趋于定值”都不要求学生了解，只要求学生能直观观察出变化趋势，会用定义求导数即可.
（3）概括根据定义求导数的具体步骤.	将方法具体化为程序性的步骤，以便能快捷地根据定义求导数.	教师引导学生概括求以上两个函数导数的具体步骤： ①求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，并化简； ②观察“$\Delta x$趋于0时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$化简后的式子趋于哪个定值”； ③此定值即为函数的导数.	
（4）根据概括的步骤求函数$y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.	让学生模仿前两个函数求导数的过程，根据具体的步骤亲自尝试求这三个函数的导数.	学生亲自计算这两个函数的导数，并进行结果展示，教师给予评价，并解决学生解答中存在的普遍性问题.	本表中的问题（2）是让学生“看一看”，问题（3）是让学生“想一想”，问题（4）是让学生“做一做”.

续表

问　　题	设计意图	师生活动	备　注
(5) 从物体运动角度看，函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$ 的导数的物理意义分别是什么？函数 $y=x^2$ 的导数的几何意义是什么？	将导数各方面的意义联系起来，并相互转化，使学生进一步理解导数的内涵.	让学生画出三个函数的图象，教师引导学生从几何和物理两个方面解释导数的意义，理解导数的内涵.	
(6) 教科书第 13 页的“探究”.	(1) 让学生通过练习进一步熟悉根据定义求导数的方法. (2) 数形结合，进一步理解导数内涵. (3) 为 1.3 做铺垫.	教师指导学生分组进行探究性学习，分别展示探究的结论，教师给予分析、评价并总结.	
(7) 课堂小结.	教师引导学生从以下两个方面进行小结： ①根据定义求导数的方法； ②根据定义求导数的具体步骤.		
作业：教科书第 14 页的“探究”，习题 1.2A 组第 1 题.			

五、习题解答

练习（第 18 页）

1. $f'(x)=2x-7$，所以，$f'(2)=-3$，$f'(6)=5$.

2. (1) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$；　(2) $y'=2e^x$；

(3) $y'=10x^4-6x$；　(4) $y'=-3\sin x-4\cos x$；

(5) $y'=-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$；　(6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

习题 1.2（第 18 页）

A 组

1. $\dfrac{\Delta S}{\Delta r}=\dfrac{S(r+\Delta r)-S(r)}{\Delta r}=2\pi r+\pi\Delta r$，所以，$S'(r)=\lim\limits_{\Delta r\to 0}(2\pi r+\pi\Delta r)=2\pi r$.

2. $h'(t)=-9.8t+6.5$.

3. $r'(V)=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi V^2}}$.

4. (1) $y'=3x^2+\dfrac{1}{x\ln 2}$；　(2) $y'=nx^{n-1}e^x+x^ne^x$；　(3) $y'=\dfrac{3x^2\sin x-x^3\cos x+\cos x}{\sin^2 x}$；

(4) $y'=99(x+1)^{98}$；　(5) $y'=-2e^{-x}$；　(6) $y'=2\sin(2x+5)+4x\cos(2x+5)$.

5. $f'(x)=-8+2\sqrt{2}x$. 由 $f'(x_0)=4$ 有

$$4=-8+2\sqrt{2}x_0,$$

解得 $x_0=3\sqrt{2}$.

6. (1) $y'=\ln x+1$；

(2) $y=x-1$.

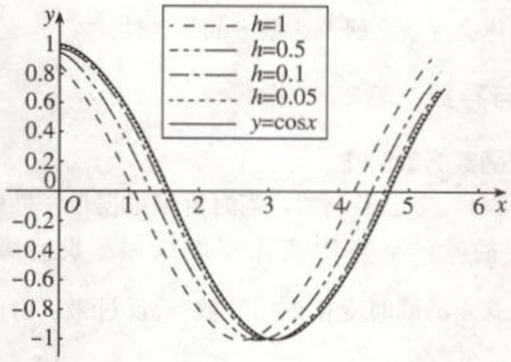
7. $y=-\dfrac{x}{\pi}+1$.

8. (1) 氡气的散发速度 $A'(t)=500\times\ln 0.834\times 0.834^{t}$.

(2) $A'(7)=-25.5$，它表示氡气在第 7 天左右时，以 25.5 g/天的速率减少.

B 组

1. (1)



(2) 当 h 越来越小时，$y=\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ 就越来越逼近函数 $y=\cos x$.

(3) $y=\sin x$ 的导数为 $y=\cos x$.

2. 当 $y=0$ 时，$x=0$. 所以函数图象与 x 轴交于点 $P(0,\ 0)$.

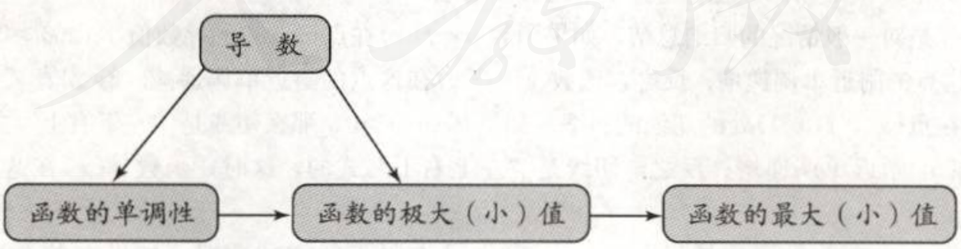
$y'=-e^{x}$，所以 $y'|_{x=0}=-1$.

所以，曲线在点 P 处的切线的方程为 $y=-x$.

3. $d'(t)=-4\sin t$. 所以，上午 6:00 时潮水的速度为 -0.42 m/h；上午 9:00 时潮水的速度为 -0.63 m/h；中午 12:00 时潮水的速度为 -0.83 m/h；下午 6:00 时潮水的速度为 -1.24 m/h.

1.3 导数在研究函数中的应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

2. 难点：函数在某点取得极值的必要条件和充分条件.

三、编写意图与教学建议

在《数学1》和《数学4》中，我们研究过函数、三角函数，知道函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型. 变化规律可用函数的性质来描述，函数的单调性是函数的重要性质之一. 当时我们直接根据函数单调性的定义，研究函数的单调性，以及函数的最大（小）值.

现在我们运用导数这个工具研究函数的单调性，体会导数在研究函数中的应用，并与《数学1》《数学4》中的方法进行比较，体会导数在研究函数中的优越性.

1.3.1 函数的单调性与导数

1. 为什么可以用导数研究函数的单调性

函数单调性的定义在《数学1》中已经介绍，当时直接根据单调性的定义研究函数的单调性. 导数是在研究变化现象中产生的，它是平均变化率的极限. 我们可由函数的某段平均变化率$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$逐步逼近函数在某点的瞬时变化率（导数）；反过来，由函数在某点的瞬时变化率我们可以估计函数在这点附近的变化情况. 当 $x_1\neq x_2$ 时，由函数在某段平均变化率$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$的符号，可以比较函数$f(x)$在 x_1，x_2 两点的大小. 因此，导数可以作为研究函数单调性的工具，而且利用导数研究函数的单调性具有一般性.

2. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系

高台跳水是本章一以贯之的例子. 本节以此作为“观察”栏目，引出学习的内容“函数的单调性与导数”. 让学生观察图象：一个是高度随时间变化的图象，一个是速度随时间变化的图象. 从图象上，学生可以直观得出运动员从起跳到最高点、从最高点到入水这两段的运动状态. 从函数的增减角度看，就是 $h(t)$单调递增，相应地，$v(t)=h'(t)>0$；$h(t)$单调递减，相应地，$v(t)=h'(t)<0$.

教科书中结合学生学过的大量实例：一次函数、二次函数、三次函数、反比例函数，借助这些函数的图象（几何直观），让学生观察，然后探讨函数的单调性与其导函数正负的关系. 在观察、探讨的基础上归纳出函数的单调性与其导函数正负之间的关系.

这里，结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与其导函数正负之间的关系，没有进行严格的证明. 这是《普通高中数学课程标准（实验）》的要求，学生只需归纳得出结论即可. 严格的证明需要导数的很多基础知识，远远超过本节的教学要求.

图 1.3-3 是对一般情况的归纳总结，如果函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 的导数值 $f'(x_0)>0$，那么函数 $y=f(x)$在这点的附近单调递增；反之，函数 $y=f(x)$在这点的附近单调递减. 导数值 $f'(x_0)$表示函数 $y=f(x)$在点$(x_0，f(x_0))$处的切线的斜率. 如果 $f'(x_0)>0$，那么切线是“左下右上”式的，这时，函数 $f(x)$在 x_0 附近单调递增；反之，切线是“左上右下”式的，这时，函数 $f(x)$在这点附近单调递减.

一定要注意，这里强调的是函数 $y=f(x)$在某点附近的增减情况. 如果在整个区间上恒有 $f'(x)>0$（<0），那么函数 $y=f(x)$在整个区间上单调递增（递减）.

3. 对第 23 页“边空”问题的说明

如果在某个区间上恒有 $f'(x)=0$，那么函数 $f(x)$在这个区间上是常数函数.

4. 对第 24 页“思考”的说明

平均变化率$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$的几何意义是经过$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$两点直线的斜率. 观察图象，我们可以发现，存在一点$\xi\in(x_1, x_2)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$（这个结论就是拉格朗日中值定理）. 从图象上看，这个结论非常直观. 当区间(x_1, x_2)的长度很小时，平均变化率可以近似地反映函数$y=f(x)$在这个区间内的单调性.

5. 关于例 1 的说明

由导函数$f'(x)$在某区间的符号，可以判定函数$y=f(x)$在这个区间的单调情况. 如果函数在某点ξ的导数值$f'(\xi)=0$，而且在这点附近的左侧单调递增（递减）、右侧单调递减（递增），那么这一点是函数的极值点. 由于此时还没有极值点的概念，我们姑且称之为“临界点”，要让学生知道函数在这点的函数值是附近所有点中最大（小）的.

根据上述信息以及我们的判断，可以画出函数图象的大致形状. 要注意这是图象的大致形状，在每段中，图象可能向“内”弯曲，可能向“外”弯曲，也可能是条直线. 而且上下平移函数的图象都能反映题目提供的信息，都符合题意.

例 1 具有一定的开放性，学生得出的函数图象不惟一. 只要学生抓住了问题的本质，即在相应区间上的单调性就可以了，不要作更多、更高的要求.

6. 关于例 2 的说明

例 2 直接运用函数的单调性与其导函数正负的关系判断函数的单调性，并求出单调区间. 函数以不超过三次的多项式函数为主.

在每道小题的后面，我们都给出函数的图象，目的是用函数的图象为我们的结论提供直观支持，把函数的解析表示、图象表示有机地结合起来. 我们鼓励使用各种信息技术工具画出函数的图象，用图象进行直观验证.

如果不用导数的方法，直接运用单调性的定义，也可以求解本题，但运算过程相对比较麻烦，有时需要很多变形的技巧，特别是判断三次的多项式函数的单调性并求其单调区间时，这种方法不是一般通用的方法. 导数是研究函数单调性的工具，其方法具有普适性、通用性.

鼓励学生直接运用单调性的定义求解本题. 通过比较，学生会有更深刻的体会.

7. 关于例 3 的说明

本例紧密结合具体问题，同时具有一定的趣味性，对学生的思维具有一定的挑战性. 直接经验告诉我们，不同形状的容器其水面的高度随时间变化，而且高度随着时间的增加逐渐变高，但高度增加有快有慢，也就是说变化是有快慢的.

在图象上如何表示变化的快慢？数学上如何表示？与导数具有怎样的联系？这都是例 3 需要回答的.

我们知道导数的符号反映函数$y=f(x)$的增减情况，怎样反映函数$y=f(x)$增减的快慢呢？能否从导数的角度解释变化的快慢呢？

在学习函数时，我们利用计算工具，比较过指数函数、对数函数增长的差异；同时结合实例，体会了直线上升、指数爆炸、对数增长这些变化的含义. 指数函数变化最快，直线次之，对数函数变化最慢. 反映在导数上就是，如果一个函数在某段导数的绝对值较大，那么函数在这段变化得快，函数在这段的图象就“陡峭”一些（向上或向下）；反之，函数的图象就“平缓”一些. 也就是说，导数的符

号反映了函数在某个区间上的单调性，导数绝对值的大小反映了函数在某个区间或某点附近变化的快慢程度.

1.3.2 函数的极值与导数

1. 从函数的单调性到极值

观察图 1.3-1，给出问题，让学生结合实际经验探索函数的极值与导数值变化之间的关系. 我们知道，$t=a$ 时，运动员距水面的高度最大. 从图象上看非常直观，为了使学生有“眼见为实”的感觉，我们采用技术手段，放大函数在这点附近的图象. 学生会直观感觉到 $h'(a)=0$，而且在 $t=a$ 的附近，当 $t<a$ 时，函数 $h(t)$ 单调递增，$h'(t)>0$；当 $t>a$ 时，函数 $h(t)$ 单调递减，$h'(t)<0$.

事实上，当 t 在点 a 的附近从小到大经过点 a 时，$h'(t)$ 先正后负，且 $h'(t)$ 连续变化，于是在单调递增区间与单调递减区间的“边界点”处有 $h'(a)=0$. 无论是直观观察，还是根据 $h'(t)$ 的连续变化，我们都能得出 $h'(a)=0$.

教科书给出大量的函数图象，让学生观察图象，直观感受函数在某些特殊点（极值点）的函数值与附近点的函数值大小之间的关系，并直观感受函数在这些点的导数值以及在这些点附近函数的增减情况.

教科书以图 1.3-10 为例，进行了具体说明. 在此基础上，给出了函数的极大值和极小值的概念.

需要特别说明的是，极大值和极小值反映的是函数在某点附近的性质，是局部性质. 而且极大值不一定大于极小值，例如，在图 1.3-11 中，函数 $y=f(x)$ 在点 c 的极小值大于在点 f 的极大值.

2. 关于例 4 的说明

求三次多项式函数的单调区间以及极值是本节的重点，例 4 给出了求三次多项式函数极值的方法. 需要说明的是，表格给出了当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况，表格直观清楚，容易看出具体的变化情况，并且能判断出是极大值还是极小值，最后得出函数的所有极值.

图象是函数性质的直观载体，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象可以为我们的结论提供直观验证.

3. 函数在某点的导数值为 0 是取得极值的必要条件，而非充分条件

需要特别说明的是，导数值为 0 的点不一定是函数的极值点. 例如，函数 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，虽然 $f'(0)=0$，但由于无论 $x>0$，还是 $x<0$，恒有 $f'(x)>0$，即函数是单调递增的，所以 $x=0$ 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点. 也就是说，函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为 0 是函数 $y=f(x)$ 在这点取极值的必要条件，而非充分条件.

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点取极值的充分条件是：(1) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数值 $f'(x_0)=0$；(2) 在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$ (<0)，右侧 $f'(x)<0$ (>0).

本小节最后归纳概括了求函数 $y=f(x)$ 极值的一般步骤，学生熟悉一般步骤之后，有些步骤可以省略.

1.3.3 函数的最大（小）值与导数

1. 最大（小）值

极值反映的是函数在某一点附近的局部性质，而不是函数在整个定义域上的性质. 但是，在解决实际问题或研究函数的性质时，我们往往关心函数在指定的区间上，哪个值最大，哪个值最小. 这就是本小节要研究的最大（小）值问题.

函数的最大（小）值是在函数的极大（小）值基础上的发展. 从函数图象上我们容易直观地看出：

如果$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值.

结合函数极值中的例子，以及函数的图象不难看出，只要把函数$y=f(x)$的所有极值连同端点的函数值进行比较，就可以求出函数的最大（小）值.

2. 关于例5的说明

我们是在极值的基础上讲最大（小）值，例5的教学要紧密结合例4. 例4已求出函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$的极大值和极小值，在例5给定的区间上，函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$有极小值，然后求出函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$在给定区间端点的函数值，把区间端点的函数值与极小值比较，就可以得出函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$在给定区间上的最大值和最小值.

最后归纳给出了求函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的最大（小）值的步骤，学生熟悉一般步骤之后，有些步骤可以省略.

四、习题解答

练习（第26页）

1. (1) 因为$f(x)=x^2-2x+4$，所以

$$f'(x)=2x-2.$$

当$f'(x)>0$，即$x>1$时，函数$f(x)=x^2-2x+4$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x<1$时，函数$f(x)=x^2-2x+4$单调递减.

(2) 因为$f(x)=e^x-x$，所以

$$f'(x)=e^x-1.$$

当$f'(x)>0$，即$x>0$时，函数$f(x)=e^x-x$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x<0$时，函数$f(x)=e^x-x$单调递减.

(3) 因为$f(x)=3x-x^3$，所以

$$f'(x)=3-3x^2.$$

当$f'(x)>0$，即$-1<x<1$时，函数$f(x)=3x-x^3$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x>1$，或$x<-1$时，函数$f(x)=3x-x^3$单调递减.

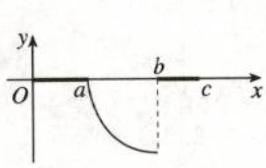
(4) 因为$f(x)=x^3-x^2-x$，所以

$$f'(x)=3x^2-2x-1.$$

当$f'(x)>0$，即$x>1$，或$x<-\frac{1}{3}$时，函数$f(x)=x^3-x^2-x$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$-\frac{1}{3}<x<1$时，函数$f(x)=x^3-x^2-x$单调递减.

2.



注：图象形状不惟一.

（第2题）

3. 因为$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$，所以

$$f'(x)=2ax+b.$$

（1）当 $a>0$ 时，

$f'(x)>0$，即 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$单调递增；

$f'(x)<0$，即 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$单调递减.

（2）当 $a<0$ 时，

$f'(x)>0$，即 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$单调递增；

$f'(x)<0$，即 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$单调递减.

4. 证明：因为 $f(x)=2x^3-6x^2+7$，所以

$$f'(x)=6x^2-12x.$$

当 $x\in(0,2)$时，$f'(x)=6x^2-12x<0$，因此函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 在$(0,2)$内是减函数.

练习（第 29 页）

1. x_2，x_4 是函数 $y=f(x)$的极值点，其中 $x=x_2$ 是函数 $y=f(x)$的极大值点，$x=x_4$ 是函数 $y=f(x)$的极小值点.

2. （1）因为 $f(x)=6x^2-x-2$，所以

$$f'(x)=12x-1.$$

令 $f'(x)=12x-1=0$，得 $x=\dfrac{1}{12}$.

当 $x>\dfrac{1}{12}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x<\dfrac{1}{12}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. 所以，当 $x=\dfrac{1}{12}$时，$f(x)$有极小值，并且极小值为 $f\left(\dfrac{1}{12}\right)=6\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^2-\dfrac{1}{12}-2=-\dfrac{49}{24}$.

（2）因为 $f(x)=x^3-27x$，所以

$$f'(x)=3x^2-27.$$

令 $f'(x)=3x^2-27=0$，得 $x=3$，或 $x=-3$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即 $x>3$，或 $x<-3$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即$-3<x<3$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	54	单调递减	-54	单调递增

因此，当 $x=-3$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 54；

当 $x=3$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-54.

（3）因为 $f(x)=6+12x-x^3$，所以

$$f'(x)=12-3x^2.$$

令 $f'(x)=12x-3x^2=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即$-2<x<2$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $x>2$，或 $x<-2$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-10	单调递增	22	单调递减

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-10；

当 $x=2$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 22.

(4) 因为 $f(x)=3x-x^3$，所以

$$f'(x)=3-3x^2.$$

令 $f'(x)=3-3x^2=0$，得 $x=1$，或 $x=-1$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即$-1<x<1$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $x>1$，或 $x<-1$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-2	单调递增	2	单调递减

因此，当 $x=-1$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-2；

当 $x=1$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 2.

练习（第 31 页）

(1) 在 $[0, 2]$上，当 $x=\frac{1}{12}$时，函数 $f(x)=6x^2-x-2$ 有极小值，并且极小值为 $f\left(\frac{1}{12}\right)=-\frac{49}{24}$. 又因为 $f(0)=-2$，$f(2)=20$，所以函数 $f(x)=6x^2-x-2$ 在$[0, 2]$上的最大值是 20，最小值是 $-\frac{49}{24}$.

(2) 在 $[-4, 4]$ 上，当 $x=-3$ 时，$f(x)=x^3-27x$ 有极大值，并且极大值为 $f(-3)=54$；当 $x=3$ 时，$f(x)=x^3-27x$ 有极小值，并且极小值为 $f(3)=-54$.

又由于 $f(-4)=44$，$f(4)=-44$，因此，函数 $f(x)=x^3-27x$ 在 $[-4, 4]$ 上的最大值是 54，最小值是-54.

(3) 在$\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$上，当 $x=2$ 时，$f(x)=6+12x-x^3$ 有极大值，并且极大值为 $f(2)=22$. 又由于 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{55}{27}$，$f(3)=15$，因此，函数 $f(x)=6+12x-x^3$ 在$\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$上的最大值为 22，最小值为$\frac{55}{27}$.

(4) 在 $[2, 3]$ 上，函数 $f(x)=3x-x^3$ 无极值. 因为$f(2)=-2$，$f(3)=-18$，所以函数 $f(x)=3x-x^3$ 在 $[2, 3]$ 上的最大值是-2，最小值是-18.

习题 1.3（第 31 页）

A 组

1. (1) 因为 $f(x)=-2x+1$，所以 $f'(x)=-2<0$.

因此，函数 $f(x)=-2x+1$ 是单调递减函数.

(2) 因为 $f(x)=x+\cos x$，$x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f'(x)=1-\sin x>0$，$x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

因此，函数 $f(x)=x+\cos x$ 在 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是单调递增函数.

(3) 因为 $f(x)=-2x-4$，所以 $f'(x)=-2<0$.

因此，函数 $f(x)=-2x-4$ 是单调递减函数.

(4) 因为 $f(x)=2x^3+4x$，所以 $f'(x)=6x^2+4$.

由于 $f'(x)=6x^2+4>0$，因此函数 $f(x)=2x^3+4x$ 是单调递增函数.

2. (1) 因为 $f(x)=x^2+2x-4$，所以 $f'(x)=2x+2$.

当 $f'(x)>0$，即 $x>-1$ 时，函数 $f(x)=x^2+2x-4$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x<-1$ 时，函数 $f(x)=x^2+2x-4$ 单调递减.

(2) 因为 $f(x)=2x^2-3x+3$，所以 $f'(x)=4x-3$.

当 $f'(x)>0$，即 $x>\dfrac{3}{4}$时，函数 $f(x)=2x^2-3x+3$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x<\dfrac{3}{4}$时，函数 $f(x)=2x^2-3x+3$ 单调递减.

(3) 因为 $f(x)=3x+x^3$，所以 $f'(x)=3+3x^2>0$.

因此，函数 $f(x)=3x+x^3$ 是单调递增函数.

(4) 因为 $f(x)=x^3+x^2-x$，所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$.

当 $f'(x)>0$，即 $x>\dfrac{1}{3}$，或 $x<-1$ 时，函数 $f(x)=x^3+x^2-x$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $-1<x<\dfrac{1}{3}$时，函数 $f(x)=x^3+x^2-x$ 单调递减.

3. (1) 图略.

(2) 加速度等于 0.

4. (1) 在 $x=x_2$ 处，导函数 $y=f'(x)$有极大值；

(2) 在 $x=x_1$ 和 $x=x_4$ 处，导函数 $y=f'(x)$有极小值；

(3) 在 $x=x_3$ 处，函数 $y=f(x)$有极大值；

(4) 在 $x=x_5$ 处，函数 $y=f(x)$有极小值.

5. (1) 因为 $f(x)=6x^2+x+2$，所以

$$f'(x)=12x+1.$$

令 $f'(x)=12x+1=0$，得 $x=-\dfrac{1}{12}$.

当 $x>-\dfrac{1}{12}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x<-\dfrac{1}{12}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以，当$x=-\dfrac{1}{12}$时，$f(x)$有极小值，并且极小值为 $f\left(-\dfrac{1}{12}\right)=6\times\left(-\dfrac{1}{12}\right)^2-\dfrac{1}{12}+2=\dfrac{47}{24}$.

(2) 因为 $f(x)=x^3-12x$，所以

$$f'(x)=3x^2-12.$$

令 $f'(x)=3x^2-12=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即 $x>2$，或 $x<-2$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $-2<x<2$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	16	单调递减	-16	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 16；

当 $x=2$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-16.

(3) 因为 $f(x)=6-12x+x^3$，所以

$$f'(x)=-12+3x^2.$$

令 $f'(x)=-12+3x^2=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	22	单调递减	-10	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 22；

当 $x=2$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-10.

(4) 因为 $f(x)=48x-x^3$，所以

$$f'(x)=48-3x^2.$$

令 $f'(x)=48-3x^2=0$，得 $x=4$，或 $x=-4$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即$-4<x<4$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $x>4$，或 $x<-4$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-128	单调递增	128	单调递减

因此，当 $x=-4$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-128；

当 $x=4$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 128.

6. (1) 在 $[-1, 1]$ 上，当 $x=-\frac{1}{12}$时，函数 $f(x)=6x^2+x+2$ 有极小值，并且极小值为$\frac{47}{24}$. 由于 $f(-1)=7$，$f(1)=9$，所以 $f(x)=6x^2+x+2$ 在$[-1, 1]$上的最大值和最小值分别为 9，$\frac{47}{24}$.

(2) 在$[-3, 3]$上，当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)=x^3-12x$ 有极大值，并且极大值为 16；当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x^3-12x$ 有极小值，并且极小值为-16. 又由于 $f(-3)=9$，$f(3)=-9$，所以函数 $f(x)=x^3-12x$ 的最大值和最小值分别为 16，-16.

(3) 在$\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$上，函数 $f(x)=6-12x+x^3$ 无极大值和极小值. 由于 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{269}{27}$，$f(1)=-5$，所以函数$f(x)=6-12x+x^3$ 在$\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$上的最大值和最小值分别为$\frac{269}{27}$，$-5$.

(4) 当 $x=4$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 128. 又由于 $f(-3)=-117$，$f(5)=115$，因此函数$f(x)=48x-x^3$ 在$[-3, 5]$上的最大值和最小值分别为 128，-117.

B组

1. (1) 证明：设 $f(x)=\sin x-x$，$x\in(0,\pi)$，因为 $f'(x)=\cos x-1<0$，$x\in(0,\pi)$，所以 $f(x)=\sin x-x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 内单调递减，因此 $f(x)=\sin x-x<f(0)=0$，$x\in(0,\pi)$，即 $\sin x<x$，$x\in(0,\pi)$.

   (2) 证明：设 $f(x)=x-x^2$，$x\in(0,1)$，因为 $f'(x)=1-2x$，$x\in(0,1)$，所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)=1-2x>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=x-x^2>f(0)=0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)=1-2x<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=x-x^2>f(1)=0$. 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0$，因此，$x-x^2>0$，$x\in(0,1)$.

   (3) 证明：设 $f(x)=e^x-1-x$，$x\neq0$，因为 $f'(x)=e^x-1$，$x\neq0$，所以，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=e^x-1-x>f(0)=0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=e^x-1-x>f(0)=0$. 综上，$e^x>1+x$，$x\neq0$.

   (4) 证明：设 $f(x)=\ln x-x$，$x>0$，因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-1$，所以，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-1>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=\ln x-x<f(1)=-1<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=\ln x-x<f(1)=-1<0$；当 $x=1$ 时，显然 $\ln 1<1$. 因此，$\ln x<x$.

   由 (3) 可知，$e^x>1+x>x$，$x>0$.

   综上，$\ln x<x<e^x$，$x>0$.

2. (1) 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象大致是个“双峰”图象，类似“ $\frown\smile$ ”或“ $\smile\frown$ ”的形状. 若有极值，则在整个定义域上有且仅有一个极大值和一个极小值，从图象上能大致估计它的单调区间.

   (2) 因为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，所以 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

   下面分类讨论：

   当 $a\neq0$ 时，分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情形：

   ①当 $a>0$，且 $b^2-3ac>0$ 时，设方程 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，当 $f'(x)=3ax^2+2bx+c>0$，即 $x>x_2$，或 $x<x_1$ 时，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递增；当 $f'(x)=3ax^2+2bx+c\leqslant0$，即 $x_1<x<x_2$ 时，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递减.

   当 $a>0$，且 $b^2-3ac<0$ 时，此时 $f'(x)=3ax^2+2bx+c\geqslant0$，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递增.

   ②当 $a<0$，且 $b^2-3ac>0$ 时，设方程 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，当 $f'(x)=3ax^2+2bx+c>0$，即 $x_1<x<x_2$ 时，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递增；当 $f'(x)=3ax^2+2bx+c<0$，即 $x>x_2$，或 $x<x_1$ 时，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递减.

   当 $a<0$，且 $b^2-3ac\leqslant0$ 时，此时 $f'(x)=3ax^2+2bx+c\leqslant0$，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 单调递减.

1.4 生活中的优化问题举例

生活中经常遇到求利润最大、用料最省、效率最高等问题，这些问题称为优化问题，优化问题有时也称为最值问题. 解决这些问题具有非常现实的意义. 这些问题通常可以转化为数学中的函数问题，进而转化为求函数的最大（小）值问题. 导数是求函数最大（小）值的强有力工具，本节我们运用导数解决生活中的一些优化问题.

本节中的优化问题举例一改过去直接给出题目，然后给出解答的模式. 而是改变了问题的呈现方

式，首先给出一些背景性的问题，让学生了解背景，如果对问题有一定的生活经验，那么先从生活经验的角度思考如何看待本题. 在生活经验的基础上，逐步引入到数学问题中，在数学问题中，按照学生的思维过程，逐步展开问题、解决问题. 解决完问题后，再给学生提出一些有思维价值的思考题目，作为正文例题的延续. 在分析问题、解决问题的过程中，让学生体会数学建模的过程. 培养学生主动发现问题、分析问题、解决问题的能力. 进一步培养学生应用数学的意识.

1. 关于例 1 的说明

这道例题的背景，对于学生来说并不陌生. 贴近学生的生活实际，是教科书选取应用问题的重要前提之一. 这样的问题能够引起学生的兴趣，使他们感觉“数学”就在自己身边，从而激发他们解决这道例题的冲动.

很多学校或班级举行活动，通常需要张贴海报进行宣传. 例 1 的前提是海报的版心面积一定，上、下边距一定，左、右边距一定，而版心的高和宽是不定的、变化的. 因此，可设版心的高为 x，相应地，版心的宽可用含 x 的式子$\frac{128}{x}$表示. 由于上、下边距一定，左、右边距一定，这样，整个海报的面积也可用含 x 的式子 $(x+4)\left(\frac{128}{x}+2\right)$表示出来，整个海报的面积减去版心的面积就是四周空白的面积，即教科书中的表达式.

这道题目学生必须明确“版心”的概念，通俗地讲，版心是我们能够写东西、发挥创意的地方. 考虑到美观，不能占有整个版面，四周必须留有适当的边距.

由于版心的高和宽是变化的，整个海报的面积也是变化的，其面积为 $(x+4)\left(\frac{128}{x}+2\right)$，它的最小面积为 200 dm^2. 当整个版面的面积最小时，由于版心的面积固定，此时四周空白的面积最小. 这也是处理问题的一种方式，即如果我们能够按照题目的条件，求出海报面积的最小值，那么四周空白的最小面积也就确定了.

2. 关于例 2 的说明

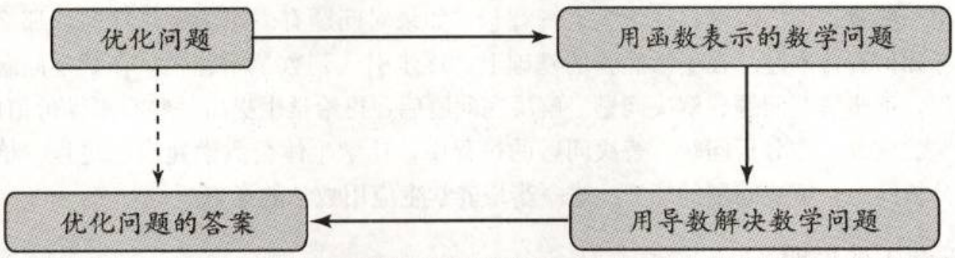
例 2 是一个实际生活中经常遇到的经济问题，让学生结合各自的生活经验，首先回答前面两个问题；在回答问题的基础上，给出问题的背景知识，让学生分析问题、解决问题；最后，从函数图象上直观验证结果.

3. 关于例 3 的说明

当前已进入信息化时代，计算机存储与检索是计算机的基本功能. 学生应了解计算机的存储与检索信息的功能，同时应了解磁盘的结构以及一个圆环状的磁盘如何存储更多的信息. 例 3 的三个问题就是针对上面情况提出的，学生必须了解数学问题的现实背景. 先提问题，然后对背景知识进行详细地说明，尔后提出数学问题，在这个基础上，学生再来解决数学问题.

如果每条磁道存储的信息与磁道的长度成正比，可以计算磁盘存储的信息，此时，r 越小，磁盘的存储量越大.

最后通过优化问题的举例，提出解决优化问题的基本思路，也就是典型的数学建模的过程：



本节三个例题具有一定的代表性，从不同的侧面说明了生活中的优化问题，并对问题进行了深入细致的分析．目的是通过三个问题，了解现实生活中存在大量的优化问题，同时了解导数在解决优化问题中的作用．

习题解答

习题 1.4（第 37 页）

A 组

1. 设两段铁丝的长度分别为 x，$l-x$，则这两个正方形的边长分别为 $\frac{x}{4}$，$\frac{l-x}{4}$，两个正方形的面积和为

$$S=f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{l-x}{4}\right)^2=\frac{1}{16}(2x^2-2lx+l^2)，0<x<l.$$

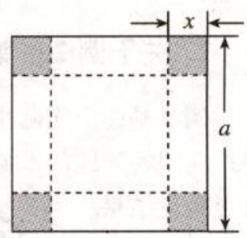
令 $f'(x)=0$，即 $4x-2l=0$，$x=\frac{l}{2}$.

当 $x\in\left(0,\ \frac{l}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{l}{2},\ l\right)$ 时，$f'(x)>0$.

因此，$x=\frac{l}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点．所以，当两段铁丝的长度都是 $\frac{l}{2}$ 时，两个正方形的面积和最小．

答：两段铁丝的长度都是 $\frac{l}{2}$ 时，两个正方形的面积和最小．

2. 如图所示，由于在边长为 a 的正方形铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，做成一个无盖方盒，所以无盖方盒的底面为正方形，且边长为 $a-2x$，高为 x.



（第 2 题）

(1) 无盖方盒的容积 $V(x)=(a-2x)^2x$，$0<x<\frac{a}{2}$.

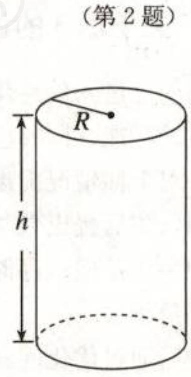
(2) 因为 $V(x)=4x^3-4ax^2+a^2x$，所以 $V'(x)=12x^2-8ax+a^2$.

令 $V'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$（舍去），或 $x=\frac{a}{6}$.

当 $x\in\left(0,\ \frac{a}{6}\right)$ 时，$V'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{a}{6},\ \frac{a}{2}\right)$ 时，$V'(x)<0$.

因此，$x=\frac{a}{6}$ 是函数 $V(x)$ 的极大值点，也是最大值点．所以，当 $x=\frac{a}{6}$ 时，无盖方盒的容积 V 最大．

答：当 $x=\frac{a}{6}$ 时，方盒的容积 V 最大．



（第 3 题）

3. 如图，设圆柱的高为 h，底半径为 R，则表面积

$$S=2\pi Rh+2\pi R^2.$$

由 $V=\pi R^2h$，得 $h=\frac{V}{\pi R^2}$，因此

$$S(R)=2\pi R\times\frac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2，R>0.$$

令 $S'(R)=-\frac{2V}{R^2}+4\pi R=0$，解得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

当 $R\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$时，$S'(R)<0$；当 $R\in\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},+\infty\right)$时，$S'(R)>0$.

因此，$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$是函数 $S(R)$ 的极小值点，也是最小值点. 此时，$h=\frac{V}{\pi R^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2R$.

答：当罐高与底面直径相等时，所用材料最省.

4. 证明：由于 $f(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

可以得到，$x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 是函数 $f(x)$的极小值点，也是最小值点.

这个结果说明，用 n 个数据的平均值$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$表示这个物体的长度是合理的，这就是最小二乘法的基本原理.

5. 设矩形的底宽为 x m，则圆的半径为$\frac{x}{2}$ m，半圆的面积为$\frac{\pi x^2}{8}$ m^2，矩形的面积为$\left(a-\frac{\pi x^2}{8}\right)\mathrm{m}^2$，矩形的另一边长为$\left(\frac{a}{x}-\frac{\pi x}{8}\right)$ m，因此铁丝的长为

$$l(x)=\frac{\pi x}{2}+x+\frac{2a}{x}-\frac{\pi x}{4}=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2a}{x}，0<x<\sqrt{\frac{8a}{\pi}}.$$

令 $l'(x)=1+\frac{\pi}{4}-\frac{2a}{x^2}=0$，得 $x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$（负值舍去）.

当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}\right)$时，$l'(x)<0$；当 $x\in\left(\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}},\sqrt{\frac{8a}{\pi}}\right)$时，$l'(x)>0$.

因此，$x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$是函数 $l(x)$ 的极小值点，也是最小值点. 所以，当底宽为$\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$m 时，所用材料最省.

答：为使所用材料最省，底宽应为$\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$ m.

6. 利润 L 等于收入 R 减去成本 C，而收入 R 等于产量乘单价. 由此可得出利润 L 与产量 q 的函数关系式，再用导数求最大利润.

收入 $R=q\cdot p=q\left(25-\frac{1}{8}q\right)=25q-\frac{1}{8}q^2$，

利润 $L=R-C=\left(25q-\frac{1}{8}q^2\right)-(100+4q)=-\frac{1}{8}q^2+21q-100$，$0<q<200$.

求导得 $L'=-\frac{1}{4}q+21$.

令 $L'=0$，即$-\frac{1}{4}q+21=0$，解得 $q=84$.

当 $q\in(0,84)$ 时，$L'>0$；当 $q\in(84,200)$ 时，$L'<0$.

因此，$q=84$ 是函数 L 的极大值点，也是最大值点. 所以产量为 84 时，利润 L 最大.

答：产量为 84 时，利润 L 最大.

B组

1. 设每个房间每天的定价为 x 元，那么宾馆利润

$$L(x)=\left(50-\frac{x-180}{10}\right)(x-20)$$

$$=-\frac{1}{10}x^2+70x-1\ 360，180<x<680.$$

令 $L'(x)=-\frac{1}{5}x+70=0$，解得 $x=350$.

当 $x\in(180，350)$ 时，$L'(x)>0$；当 $x\in(350，680)$ 时，$L'(x)<0$.

因此，$x=350$ 是函数 $L(x)$ 的极大值点，也是最大值点. 所以，当每个房间每天的定价为 350 元时，宾馆利润最大.

答：当每个房间每天的定价为 350 元时，宾馆利润最大.

2. 设销售价为 x 元/件时，利润

$$L(x)=(x-a)\left(c+c\times\frac{b-x}{b}\times4\right)$$

$$=c(x-a)\left(5-\frac{4}{b}x\right)，a<x<\frac{5b}{4}.$$

令 $L'(x)=-\frac{8c}{b}x+\frac{4ac+5bc}{b}=0$，解得 $x=\frac{4a+5b}{8}$.

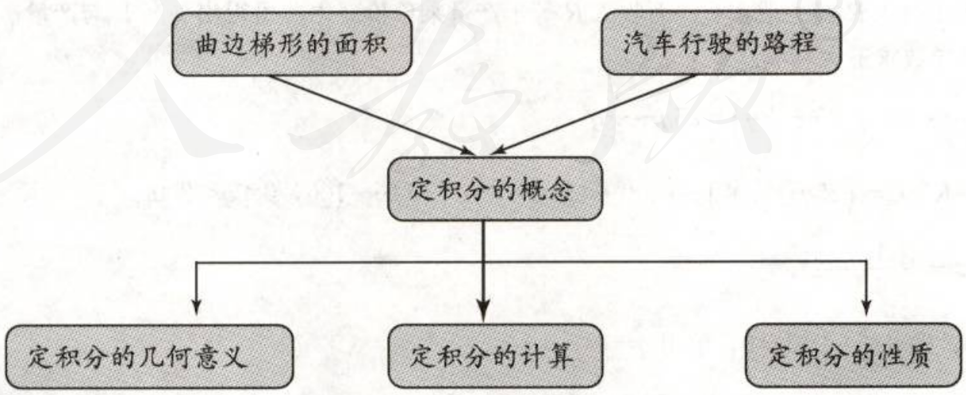
当 $x\in\left(a，\frac{4a+5b}{8}\right)$时，$L'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{4a+5b}{8}，\frac{5b}{4}\right)$时，$L'(x)<0$.

因此，$x=\frac{4a+5b}{8}$是函数 $L(x)$ 的极大值点，也是最大值点. 所以，销售价为$\frac{4a+5b}{8}$ 元/件时，可获得最大利润.

答：销售价为$\frac{4a+5b}{8}$ 元/件时，可获得最大利润.

1.5 定积分的概念

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：“以直代曲”“以不变代变”的思想方法，定积分的概念、几何意义.
2. 难点：“以直代曲”“以不变代变”的思想方法，定积分的概念.

三、编写意图与教学建议

本节的主要内容是定积分的引入、定积分的定义和几何意义、定积分的基本性质. 教科书在对两类典型问题——求曲边梯形的面积和求变速直线运动物体的位移进行详细讨论的基础上，抽象、概括出它们的共同本质特征，进而引入定积分的概念及其几何意义，最后给出定积分的基本性质.

在本节的开头，教科书提出了如何计算平面“曲边图形”的面积、如何求变速直线运动物体的位移、如何求变力所做的功等问题，并猜测解决它们的基本思想方法，即将求“曲边图形”的面积转化为求“直边图形”的面积，利用匀速直线运动的知识解决变速直线运动的问题. 从而引发学生学习定积分知识的欲望.

为了研究问题的方便，教科书在描述连续函数意义的基础上，将本节中研究的对象限定在连续函数的范围内.

1.5.1 曲边梯形的面积

本小节内容安排的思路是：以“思考”给出求一般曲边梯形的面积问题，构建问题情境，然后根据从具体到抽象、从特殊到一般的原则，先研究一个特殊的曲边梯形面积问题，通过类比圆的面积的求法得到解决它的思想方法，并具体化为四个步骤——分割、近似代替、求和、取极限，从而求出它的面积，最后再说明这个方法可以推广到求一般曲边梯形的面积.

求曲边梯形面积的过程蕴涵着定积分的基本思想方法，因此，在本小节的教学中，应突出解决问题的思想方法和步骤，从而为引入定积分的概念、体会定积分的基本思想、初步了解定积分的概念奠定基础.

1. 揭示解决问题的思想方法

教科书首先通过“思考”栏目提出如何求曲边梯形面积的问题. 这是一个一般而又抽象的问题，学生从未遇到过类似的问题，因此，直接解决这个问题超出了学生的认知水平. 为了使学生建立解决它的基本经验，教科书引导学生先考虑一个特殊的曲边梯形面积问题：求由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围成的平面图形面积 S. 为了引出“以直代曲”的思想，教科书以“思考”引导学生分析曲边梯形与“直边图形”的区别，再通过类比求圆的面积的过程，启发学生得到解决问题的思路：将求曲边梯形面积的问题转化为求“直边图形”面积的问题. 在此基础上，教科书详细地说明了“以直代曲”这一思想方法的内涵.

教学中，应注意引导学生在回忆用正多边形逼近圆，以正多边形面积逼近圆的面积而求出圆的面积的过程中，概括出求平面曲边梯形面积的基本思想：在每个局部小范围内“以直代曲”和“逼近”的思想. 事实上，这就是定积分概念中蕴涵的最本质的思想，也是应用定积分解决实际问题的思想方法.

2. 强调解决问题的四个步骤

在解决问题的过程中，思想必须转化为可以具体操作的方法，才能真正发挥作用. 教科书将上述“以直代曲”和“逼近”的思想具体化为四个步骤：分割、近似代替、求和、取极限.

第一步，分割. 教学中应引导学生体会：用“以直代曲”的方法求曲边梯形的面积时，关键是减小误差. 如果将曲边梯形分割成若干个小曲边梯形，在每个局部小范围内实施“以直代曲”，那么就能有效地减小误差，而且分割得越细，误差就会越小. 由于所给曲边梯形的曲边是连续曲线，教科书采取了“等分”的办法，即在区间 $[0,1]$ 上等间隔地插入 $n-1$ 个点，将它等分成 n 个小区间. 当然，在定积分理论中，这种分割应该是任意的，只要保证每一小区间的长度都趋向于 0 就可以了. 由于对连续函数而言，“等分”和“任意分割”是等价的，因此，为了方便，教科书采用等分的方式来研究问题.

第二步，近似代替．对每个小曲边梯形实施“以直代曲”，用矩形的面积近似代替小曲边梯形的面积，求出每个小曲边梯形面积的近似值．

第三步，求和．对所有这些近似值求和，得到原曲边梯形面积的近似值．

第四步，取极限．显然，分割越细，近似程度越好．教科书采用几何直观和列表计算相结合的方法，引导学生观察近似值的变化趋势．教学中，教师可以利用图 1.5-5 及表 1-1，引导学生想象近似值随分割的不断细化而趋向于曲边梯形面积$\left(\text{其值为}\frac{1}{3}\right)$的过程，有条件的要利用信息技术向学生展示逼近过程，以增强学生的直观感知．

3. 对“探究”的说明

在第二步中，教科书用每个小区间左端点处的函数值近似代替函数在该区间上各点处的函数值，从而用底边长为$\frac{1}{n}$，高为$f\left(\frac{i-1}{n}\right)$的小矩形的面积近似代替第 i 个小曲边梯形的面积．若用每个小区间右端点处的函数值作近似代替，那么第 i 个小曲边梯形的面积就用底边长为$\frac{1}{n}$，高为$f\left(\frac{i}{n}\right)$的小矩形的面积近似代替，同样也可以求出曲边梯形的面积为$\frac{1}{3}$．这就是“探究”中的前两问．

对于“探究”中的第三问：用每个小区间任意一点处的函数值作近似代替，是否也可以求出曲边梯形的面积？教学中可以借助几何直观，引导学生体会“左右夹逼”的方法．对于所给曲边梯形，由于 $f(x_{i-1})\leqslant f(\xi_i)\leqslant f(x_i)$，因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_{i-1})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i),$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i).$$

应当说，从几何直观上学生比较容易感知曲边梯形的面积与作近似代替时在每个小区间上选取的点 ξ_i 无关，即曲边梯形的面积可以表示成$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)$的形式，其中 ξ_i 是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上任意一点．由于学生没有极限的基础知识，因此教学中只要使学生从几何直观上感知$S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)$成立即可，有条件的可以结合信息技术应用的教学给予适当的引导和阐述．

4. 一般曲边梯形的面积

求由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围成的曲边梯形面积 S 的方法，可以推广到解决一般曲边梯形的面积问题．采用同样的方法，可以求出由直线 $x=a$，$x=b$ $(a\neq b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积．

教学中，可对计算一般曲边梯形面积的意义作适当说明．如图 1-5，对于由任意形状的曲线所围成的平面图形，可以用两组互相垂直的直线把它分成若干部分，每一部分要么是一个矩形，要么是一个曲边梯形．如果能计算出一般曲边梯形的面积，那么就能计算出任意平面图形的面积了．所以，在研究平面图形的面积问题时，曲边梯形面积的计算起着关键性的作用．

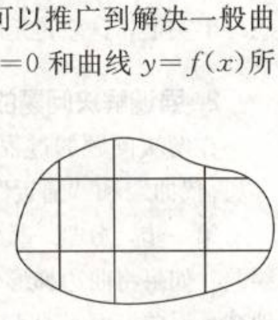


图 1-5

5. 关于“信息技术应用 曲边梯形的面积”

有条件的学校，应当充分使用信息技术，引导学生感知“以直代曲”和“逼近”的思想方法，体

会“分割、近似代替、求和、取极限”是求曲边梯形面积的基本步骤.

教科书中给出了用几何画板演示小矩形面积的和逼近曲边梯形面积的主要过程. 教学中，可以根据教科书的提示，向学生演示或让学生自己动手操作，观察曲边梯形的面积 S 的不足近似值和过剩近似值随区间 $[0,1]$ 的等份数 n 的增大而变化的趋势，从而增强学生对定积分基本思想的直观感知.

6. 两个需要注意的问题

（1）关于曲边梯形面积的定义

从严格的数学意义来说，我们应当先给出曲边梯形面积的定义，再计算曲边梯形的面积. 考虑到学生的接受能力，而且从直观上也比较容易接受用矩形等“直边图形”面积逼近曲边梯形面积的方法，所以教科书采取了默认曲边梯形面积意义的做法，直接对曲边梯形面积的计算进行研究.

（2）关于求和符号 $\sum$

利用求和符号 $\sum$ 可以简洁地表示出若干个数（或单项式）连加的式子，尤其是在表示和项不是具体数值的连加式时，求和号被广泛使用. 教学中，应根据学生的实际情况，在讲述相关内容时对求和符号进行适当介绍. 例如，可给出

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i,$$

帮助学生认识求和符号 $\sum$.

1.5.2 汽车行驶的路程

求变速直线运动物体的路程也是定积分概念的一个重要的背景. 与求曲边梯形面积的实例相比，它们只是背景不同，解决问题的思想方法和求解步骤都是相同的，它们的求解过程都蕴涵着定积分的基本思想. 在本小节的教学中，应注意引导学生类比求曲边梯形面积的过程，让他们自己独立解决问题，以进一步体会定积分的背景、思想和方法，为引入定积分的概念奠定基础.

1. 求解过程分析

求汽车行驶的路程时，教科书采取“以不变代变”的方法，把变速直线运动的路程问题化归为匀速直线运动的路程问题. 教学中可以引导学生类比求曲边梯形面积的思想方法和基本步骤，自己得出相应的思想和步骤：将区间 $[0,1]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间上，由于速度函数 $v(t)$ 的变化很小，可以认为汽车近似于做匀速直线运动，从而求得汽车在每个小区间上行驶路程的近似值，再求和得 s 的近似值，最后让 n 趋向于无穷大就得到 s 的精确值. 与求曲边梯形的面积相比，这里采用的“以不变代变”的思想方法更直观、更容易理解. 教学中，只要分析出解题思路，学生就能凭借求曲边梯形面积的经验，通过分割、近似代替、求和、取极限四个步骤解决问题.

2. 关于汽车行驶路程的一般表达式

教科书在旁白中给出了路程的一般表达式

$$s=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v(\xi_i),$$

目的是为给出定积分的定义作进一步的铺垫. 教学中只要求学生能直观地感觉到这个一般表达式成立即可.

3. 对“探究”的说明

解决“探究”中所提问题的基本思想是：由于汽车行驶路程的表达式

$$s=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v(\xi_i)$$

与曲边梯形面积的表达式

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)$$

在形式上是一致的，因此，比较这两个式子，就可以推断出该路程在数值上等于教科书中图 1.5-6 所示的曲边梯形的面积，从而给出变速直线运动的路程的几何解释，即求变速直线运动路程的问题也可以解释成求曲边梯形面积的问题. 这样就可以在给出定积分定义之后，直接给出定积分的几何意义. 教学中可以引导学生观察两个表达式，概括它们的共同特征，自己给出相应的解释.

4. 关于习题的处理

练习 1 可以在课堂上与探求路程的一般表达式时一起进行处理，练习 2 可作为课堂练习. 习题 1.5A 组第 2 题，B 组第 1，2 题可作为课后习题.

1.5.3 定积分的概念

本小节在前面研究曲边梯形面积和变速直线运动路程的基础上，通过概括它们的共同特征而引入定积分概念，给出定积分的几何意义与基本性质.

1. 定积分概念

教科书从两个方面归纳了解决曲边梯形面积和变速直线运动的共同特征：第一，都通过"四步曲"——分割、近似代替、求和、取极限来解决问题；第二，最终的结果都归结为求同一种类型的和式的极限. 教学中，要注意引导学生在分析它们的异同点的基础上概括出共同本质特征：尽管它们的背景迥异，但解决它们的思想方法是相同的，即都采用了在局部小范围内"以直代曲""以不变代变"和"逼近"的思想，而且这种思想方法具有普遍意义，类似的问题都可以通过"四步曲"加以解决，并且最终的结果都可以归结为这种类型的和式的极限.

有了上述过程，引出定积分概念就水到渠成了. 为了加深学生对定积分概念的理解，在给出定积分的定义后，建议作如下说明：

(1) 定积分的含义

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一种特定形式的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$ 的极限，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示当 $n\to\infty$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$ 所趋向的定值.

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中符号的含义

$\int$ 叫做积分号，a，b 分别叫做积分下限和积分上限，区间 $[a,\ b]$ 叫做积分区间，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，x 叫做积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积式.

教学中还可以引导学生体会数学的力量. 定积分把曲边梯形的面积、变速直线运动的路程这两个背景和实际意义截然不同的问题的结果，表示成了同样的形式. 这显示了定积分的强大威力，也再一次表明了数学的威力.

2. 对旁白的说明

(1) 关于区间 $[a,\ b]$ 分法. 对区间 $[a,\ b]$ 的分割应该是任意的，只要保证每一小区间的长度

都趋向于 0 就可以了．由于被积函数限定在连续函数的范围，因此，教科书采用等分的方式，既不失严谨性，又照顾了学生的认知基础问题．

（2）关于点 ξ_i 的取法．在定积分的定义中，规定 ξ_i 是第 i 小区间上任意取定的点，这主要是考虑到定义的一般性，但在解决实际问题或计算定积分时，可以把 ξ_i 都取为每个小区间的左端点（或都取为右端点），以便于得出结果．

对于上述两点，教学中只需作直观说明，不必在此深究．

3. 定积分的几何意义

为了使学生更好地理解定积分概念，教科书通过“思考”引导学生分析定积分的几何意义．由于有了求曲边梯形面积的经验，因此，学生自己得出定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$f(x)\geqslant 0$）的几何意义并不困难．教学中可以让学生在回顾前面两个实例的基础上做出回答，然后再要求学生回答“探究”中的问题，即考虑如何用定积分表示位于 x 轴上方的两条曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 围成的平面图形的面积．由于在教科书的图 1.5-8 中用虚线给出了辅助线，因而学生容易得到阴影部分的面积可表示为 $S=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$．这也为 1.7 节中利用定积分求平面图形的面积奠定了基础．

4. 例 1 的教学分析

例 1 是一个用定积分的定义计算定积分的问题．教学中，可以先引导学生分析 ξ_i 的取法对得出结果的影响．实际上，如果任意选取，由于没有规律性，因此一些已知的结果（如教科书边空给出的）就很难发挥作用，这样就不利于计算．把 ξ_i（$i=1, 2, \cdots, n$）取为特殊点，例如，把 ξ_i 都取为每个小区间的左端点（或都取为右端点），由于规律性很强，就可以利用一些已知的结果，从而便于计算．

安排例 1 的目的是使学生进一步熟悉定积分的定义，熟悉计算定积分的“四步曲”．教学中，可以先让学生叙述解题思路，然后让他们独立完成计算．另外，还可以让学生把 ξ_i（$i=1, 2, \cdots, n$）取为每个小区间的左端点来计算这个定积分．

5. 定积分的基本性质

为了便于计算定积分，教科书给出了定积分的三个基本性质．对于性质 1，可以让学生指出等式两边的两个定积分的积分上、下限和被积函数分别是什么；对于性质 2，可以说明对于被积函数是有限个（两个以上）函数的情形也成立；性质 3 称为定积分对积分区间的可加性，它对把区间 $[a, b]$ 分成有限个（两个以上）小区间的情形也成立．

由于没有学习极限的相关知识，教学中，不要求学生证明这些基本性质．教科书通过“思考”栏目，帮助学生从几何直观上感知性质 3 成立．如图 1-6 所示，设在区间 $[a, b]$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$，c 是区间 (a, b) 内的一点，那么，从几何图形上看，直线 $x=c$ 把大曲边梯形分成了两个小曲边梯形，因此，大曲边梯形的面积 S 是两个小曲边梯形的面积 S_1，S_2 之和，即 $S=S_1+S_2$．用定积分表示就是性质 3．

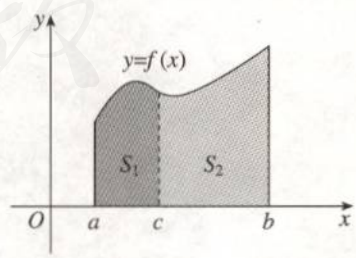


图 1-6

6. 补充例题

由于篇幅所限，教科书没有举例说明定积分性质的应用．教学中，在给出三个性质后，可补充下面的例子．

例 1 计算定积分 $\int_0^1(2x-x^2)\mathrm{d}x$．

分析：利用定积分的性质 1、性质 2，可将定积分$\int_0^1 (2x-x^2)\mathrm{d}x$转化为$2\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，利用定积分的定义分别求出$\int_0^1 x\mathrm{d}x$，$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，就能得到定积分$\int_0^1 (2x-x^2)\mathrm{d}x$的值.

解：略.

7. 关于习题

习题 1.5A 组第 3 题，B 组第 3，4 题，可在学习了定积分的定义后作为课后习题．学习了定积分的几何意义和性质后，可把习题 1.5A 组第 4，5 题作为课后习题.

四、教学设计案例

1.5.1 曲边梯形的面积

1. 教学任务分析

通过探求曲边梯形的面积，使学生了解定积分的实际背景，了解“以直代曲”“逼近”的思想方法，建立定积分概念的认知基础，为理解定积分概念及几何意义奠定基础．通过这部分内容的教学，逐步培养学生分析问题、解决问题的能力和思维能力.

2. 教学重点、难点

重点：了解定积分的基本思想方法——以直代曲、逼近的思想，初步掌握求曲边梯形面积的步骤——“四步曲”.

难点：“以直代曲”“逼近”思想的形成过程；求和符号$\sum$.

3. 教学基本流程

提出求曲边梯形面积的问题

↓

回忆求圆的面积的思想方法

↓ 类比

得出求曲边梯形面积问题的思想方法

↓

给出解决问题的“四步曲”，并得到结果

↓

一般曲边梯形（在 x 轴的上方）面积的求法

↓

小结

4. 教学情境设计

问题	设计意图	师生活动
(1) 请梳理一下，你已经会求哪些平面图形的面积？这些平面图形的主要特点是什么？	引导学生认识到平面图形分成“直边图形”和“曲边图形”两大类.	教师引导学生分析图形的特点，归纳出两类：“直边图形”和“曲边图形”. 学生会提出各种具体的、零散的多边形以及圆形、扇形和环形等会计算面积的平面图形，教师应引导学生进行概括，并指出扇形和环形的面积都可以利用圆形的面积来计算.
(2) 给出曲边梯形的定义，明确本小节的目的——求曲边梯形的面积，并给出教科书中的具体问题.		
(3) 圆的面积是如何计算的？	总结出“以直代曲”“逼近”的思想方法.	教师引导学生总结出“以直代曲”“逼近”的思想方法.
(4) 类比计算圆的面积的方法，能否将求曲边梯形面积 S 的问题转化为求“直边图形”面积的问题？	通过类比启发学生思维，探求解决问题的路径.	师生共同讨论，得出采用“以直代曲”“逼近”的思想方法求曲边梯形面积的可行性.
(5) 求曲边梯形面积时，能否直接对整个曲边梯形进行“以直代曲”呢？怎样才能减小误差？	得出分割、求和的方法，即在局部小范围内“以直代曲”.	教师引导学生思考、讨论，得出结论：直接对整个曲边梯形进行“以直代曲”误差太大. 为了减小近似代替的误差，需要先分割再分别对每个小曲边梯形“以直代曲”.
(6) 对每个小曲边梯形如何“以直代曲”？	引导学生用恰当的方式作近似代替.	学生可能会提出多种“以直代曲”的方法，教学中应分析各种方法的利弊，引导学生用矩形近似代替小曲边梯形——数学最讲究简洁.
(7) 如何从曲边梯形面积的近似值求出曲边梯形的面积？	让学生体验“逼近”的思想.	教师引导学生阅读教科书中的相关内容（图 1.5-5、表 1-1），得出结论.
(8) 提出教科书第 42 页“探究”中的第一、第二个问题.	使学生意识到近似代替的方式不惟一，为得出定积分的定义作初步的铺垫.	教师引导学生用另一种近似代替的方式（过剩近似值）也得出同样的结论. 学生类比前面用不足近似值求曲边梯形面积的过程，进行思考、讨论和演算，用过剩近似值得到曲边梯形的面积.
(9) 取任意 $\xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 的函数值 $f(\xi_i)$ 作为近似值，情况又怎样？	得出与定积分定义中一致的形式，为给出定积分的定义作进一步的铺垫.	学生阅读并实际操作教科书中“信息技术应用”的相关内容，教师引导学生直观地看出曲边梯形面积的一般表达式 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)$.
(10) 如何求一般的曲边梯形的面积？	通过类比，由特殊上升到一般.	由学生自己独立思考并得出结论.
(11) 小结：求曲边梯形面积的思想方法是什么？具体步骤是什么？最终形式是什么？	归纳、总结本小节的知识和方法.	以学生叙述为主.
(12) 课后作业：第 42 页练习.		

5. 教学手段的使用

利用信息技术手段使学生直观地感知近似代替的过程，体验逼近的思想，掌握解决问题的“四步曲”.

6. 几点说明

(1) 在教学过程中，要努力揭示解决问题的思想方法：在局部小范围内“以直代曲”和“逼近”的思想；

(2) 把解决问题的过程归结为“四步曲”：分割、近似代替、求和、取极限，并强调最终的结果是一种特殊形式的和式的极限；

(3) 根据学生的实际情况，对求和符号 $\sum$ 做一定的解释或介绍.

五、习题解答

练习（第 42 页）

$\frac{8}{3}$.

说明 进一步熟悉求曲边梯形面积的方法和步骤，体会“以直代曲”和“逼近”的思想.

练习（第 45 页）

1. $\Delta s_i \approx \Delta s_i' = v\left(\frac{i}{n}\right)\Delta t = \left[-\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\right]\cdot\frac{1}{n} = -\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}$，$i=1$，2，…，$n$.

于是

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i' = \sum_{i=1}^{n} v\left(\frac{i}{n}\right)\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\right] \\ &= -\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}-\cdots-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{n}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+2 \\ &= -\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+n^2]+2 \\ &= -\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2 \\ &= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)+2. \end{aligned}$$

取极限，得

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)+2\right] = \frac{5}{3}.$$

说明 进一步体会“以不变代变”和“逼近”的思想.

2. $\frac{22}{3}$ km.

说明 进一步体会“以不变代变”和“逼近”的思想，熟悉求变速直线运动物体路程的方法和步骤.

练习（第 48 页）

$\int_0^2 x^3\,dx=4$.

从几何上看，表示由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=0$，$x=2$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积 $S=4$.

说明 进一步熟悉定积分的定义和几何意义.

习题 1.5（第 50 页）

A 组

1. (1) $\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{100}\left[\left(1+\frac{i-1}{100}\right)-1\right]\times\frac{1}{100}=0.495$；

(2) $\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{500}\left[\left(1+\frac{i-1}{500}\right)-1\right]\times\frac{1}{500}=0.499$；

(3) $\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{1\,000}\left[\left(1+\frac{i-1}{1\,000}\right)-1\right]\times\frac{1}{1\,000}=0.499\,5$.

说明 体会通过分割、近似替换、求和得到定积分的近似值的方法.

2. 距离的不足近似值为：$18\times1+12\times1+7\times1+3\times1+0\times1=40$（m）；

距离的过剩近似值为：$27\times1+18\times1+12\times1+7\times1+3\times1=67$（m）.

3. 证明：令 $f(x)=1$. 用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

将区间 $[a,\ b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上任取一点 ξ_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}=b-a,$$

从而 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}=b-a$.

说明 进一步熟悉定积分的概念.

4. 根据定积分的几何意义，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 以及曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 所围成的曲边梯形的面积，即四分之一单位圆的面积，因此 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

说明 进一步熟悉定积分的几何意义.

5. (1) $\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

由于在区间 $[-1,\ 0]$ 上 $x^3\leqslant0$，所以定积分 $\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0$，$x=-1$，$y=0$ 和曲线 $y=x^3$ 所围成的曲边梯形的面积的相反数.

(2) 根据定积分的性质，得 $\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=0$.

由于在区间 $[-1,\ 0]$ 上 $x^3\leqslant0$，在区间 $[0,\ 1]$ 上 $x^3\geqslant0$，所以定积分 $\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x$ 等于位于 x 轴上方的曲边梯形面积减去位于 x 轴下方的曲边梯形面积.

(3) 根据定积分的性质，得 $\int_{-1}^{2}x^3\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}+4=\frac{15}{4}$.

由于在区间 $[-1,\ 0]$ 上 $x^3\leqslant0$，在区间 $[0,\ 2]$ 上 $x^3\geqslant0$，所以定积分 $\int_{-1}^{2}x^3\mathrm{d}x$ 等于位于 x 轴上方的曲边梯形面积减去位于 x 轴下方的曲边梯形面积.

说明 在(3)中，由于 x^3 在区间 $[-1,\ 0]$ 上是非正的，在区间 $[0,\ 2]$ 上是非负的，如果直接利用定义把区间 $[-1,\ 2]$ 分成 n 等份来求这个定积分，那么和式中既有正项又有负项，而且无法抵消一些项，求和会非常麻烦. 利用性质 3 可以将定积分 $\int_{-1}^{2}x^3\mathrm{d}x$ 化为 $\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_0^2 x^3\mathrm{d}x$，这样，$x^3$ 在区间

$[-1, 0]$ 和区间 $[0, 2]$ 上的符号都是不变的，再利用定积分的定义，容易求出 $\int_{-1}^{0} x^3 \mathrm{d}x$，$\int_{0}^{2} x^3 \mathrm{d}x$，进而得到定积分 $\int_{-1}^{2} x^3 \mathrm{d}x$ 的值. 由此可见，利用定积分的性质可以简化运算.

在 (2)(3) 中，被积函数在积分区间上的函数值有正有负，通过练习进一步体会定积分的几何意义.

B 组

1. 该物体在 $t=0$ 到 $t=6$（单位：s）之间走过的路程大约为 145 m.

说明 根据定积分的几何意义，通过估算曲边梯形内包含单位正方形的个数来估计物体走过的路程.

2. (1) $v=9.81t$.

(2) 过剩近似值：$\sum_{i=1}^{8} 9.81\times\frac{i}{2}\times\frac{1}{2}=9.81\times\frac{1}{4}\times\frac{8\times 9}{2}=88.29$ (m)；

不足近似值：$\sum_{i=1}^{8} 9.81\times\frac{i-1}{2}\times\frac{1}{2}=9.81\times\frac{1}{4}\times\frac{8\times 7}{2}=68.67$ (m).

(3) $\int_0^4 9.81t\mathrm{d}t$；$\int_0^4 9.81t\mathrm{d}t=78.48$ (m).

3. (1) 分割

在区间 $[0, l]$ 上等间隔地插入 $n-1$ 个分点，将它等分成 n 个小区间：

$$\left[0, \frac{l}{n}\right], \left[\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}\right], \cdots, \left[\frac{(n-1)l}{n}, l\right],$$

记第 i 个区间为 $\left[\frac{(i-1)l}{n}, \frac{il}{n}\right]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，其长度为

$$\Delta x=\frac{il}{n}-\frac{(i-1)l}{n}=\frac{l}{n}.$$

把细棒在小段 $\left[0, \frac{l}{n}\right]$，$\left[\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}\right]$，…，$\left[\frac{(n-1)l}{n}, l\right]$ 上质量分别记作：

$$\Delta m_1, \Delta m_2, \cdots, \Delta m_n,$$

则细棒的质量 $m=\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$.

(2) 近似代替

当 n 很大，即 Δx 很小时，在小区间 $\left[\frac{(i-1)l}{n}, \frac{il}{n}\right]$ 上，可以认为线密度 $\rho(x)=x^2$ 的值变化很小，近似地等于一个常数，不妨认为它近似地等于任意一点 $\xi_i\in\left[\frac{(i-1)l}{n}, \frac{il}{n}\right]$ 处的函数值 $\rho(\xi_i)=\xi_i^2$. 即在小区间 $\left[\frac{(i-1)l}{n}, \frac{il}{n}\right]$ 上，细棒的质量近似于均匀分布，其线密度近似地等于 $\rho(\xi_i)=\xi_i^2$. 于是，细棒在小段 $\left[\frac{(i-1)l}{n}, \frac{il}{n}\right]$ 上质量

$$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i)\Delta x=\xi_i^2\frac{l}{n} \ (i=1, 2, \cdots, n).$$

(3) 求和

得细棒的质量

$$m=\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\frac{l}{n}.$$

(4) 取极限

细棒的质量 $m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\frac{l}{n}$.

所以 $m=\int_0^l x^2\mathrm{d}x$.

1.6 微积分基本定理

一、本节知识结构

分别用 $y(t)$, $v(t)$ 表示变速直线运动物体的位移

一般化

微积分基本定理

应用定理计算简单的定积分

二、教学重点与难点

1. 重点：直观了解微积分基本定理的含义，并能用定理计算简单的定积分.
2. 难点：了解微积分基本定理的含义.

三、编写意图与教学建议

教科书采用从局部到整体、从具体到一般的思想，先利用物理意义和导数的几何意义，并根据定积分的概念，探究变速直线运动物体在某段时间内的速度与位移的关系，通过寻求导数和定积分之间的内在联系，得到微积分基本定理的雏形，然后一般化而得出积分基本定理．在这个过程中，学生既经历了微积分基本定理的发现过程，又直观了解微积分基本定理的含义.

微积分基本定理不仅揭示了导数和定积分之间的内在联系，而且还提供了计算定积分的一种有效方法.

1. 揭示寻求计算定积分新方法的必要性，激发学生的求知欲

从理论上看，可以用定积分的定义计算定积分，但这种方法需要计算一个和式的极限，而求和与求极限一般都要经过复杂的计算，技巧性强，有时甚至不可能计算出结果．从计算定积分 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ 的过程可以发现，虽然被积函数 $f(x)=x^3$ 比较简单，但利用定义计算定积分时，需要用 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 这一结果，技巧性较强．另外，像 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的计算，需要求 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ 的和，而这个“和”是“求不出”的，因而用定义就算不出 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的结果．因此，我们需要寻找一种简便、有效的方法来求定积分．教学中可以让学生用定义求一求 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，以增强感受，激发学习微积分基本

定理的欲望.

对于怎样寻找简便、有效的方法求定积分的问题，教科书接着指出："微积分学中两个最基本和最重要的概念——导数和定积分，这两个概念之间有没有内在的联系呢？我们能否利用这种联系求定积分呢？"以明确本节的主要目标，指出寻找计算定积分新方法的方向. 这样做主要是考虑到由学生想到导数与积分具有内在联系比较困难.

2. 突出微积分基本定理的探究过程

教科书通过"探究"，引导学生分别用物体的运动规律 $y=y(t)$ 和速度函数 $v=v(t)$ 表示出变速直线运动物体在时间段$[a, b]$上的位移 s，从而为得出微积分基本定理奠定基础.

如果做直线运动的物体的运动规律是 $y=y(t)$，那么根据物理知识可得，这个物体在时间段$[a, b]$上的位移为 $s=y(b)-y(a)$.

另一方面，根据定积分的定义，可由速度 $v(t)$ 求出位移 s. 先把时间段 $[0, 1]$ n 等分为 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，再分别从物理意义、导数的几何意义两个角度给出物体在 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上位移的近似值：利用物理意义求物体在时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上位移的近似值是学生所熟知的（在 1.5.2 节中遇到过）；由函数 $y=y(t)$ 的图形（图 1.6-2），并利用导数的几何意义，可以使学生从几何图形上直观地看出物体在时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上位移的近似值. 结合图 1.6-1，可以直观地看出物体在时间段 $[a, b]$ 上位移的近似值. 最后，由定积分的定义，得 $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$，从而 $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=\int_a^b y'(t)\mathrm{d}t=y(b)-y(a)$，这就是微积分基本定理的雏形.

把所得的结论一般化，就可得出微积分基本定理. 这种处理方式，尽管不是严格的证明，但体现了定积分的基本思想，突出了导数的几何意义，体现了数形结合这一数学中的基本思想方法.

3. 微积分基本定理的重要意义

微积分基本定理揭示了导数和定积分之间的内在联系，是微积分学乃至整个高等数学中最重要的定理，它的作用怎么说都不为过. 教学中可以结合数学史、数学文化的学习向学生进行适当介绍.

另一方面，微积分基本定理也提供了计算定积分的一种有效方法. 由微积分基本定理知，计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 关键是找出满足 $F'(x)=f(x)$ 的函数 $F(x)$，从而把问题转化为计算函数 $F(x)$ 在区间的两个端点处的函数值之差. 通常，我们可以运用基本初等函数求导公式和导数的四则运算法则从反方向上求出 $F(x)$.

例如，对于定积分 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$，因为 $\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$，所以

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\times1^4-\frac{1}{4}\times0^4=\frac{1}{4},$$

这显然比用定义计算定积分简单. 又如，对于定积分 $\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，有了微积分基本定理，就能很顺利地求出它的值：因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以

$$\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

教学中可以引导学生对"定义法"和用定理求定积分进行对比，使学生体会利用微积分基本定理求定积分的优越性.

4. 例题的教学分析

安排例 1 的意图是运用微积分基本定理求定积分，并且给出标准的书写格式. 其中，第（1）题与

本节引言中讨论过的问题相呼应，表明基本定理的威力；第（2）题的解题过程中利用了定积分的性质2，以说明利用定积分的性质可以简化求解过程.

安排例2的目的有两个，一是使学生进一步熟悉运用基本定理求定积分的过程，二是着重说明定积分的值与曲边梯形面积之间的关系：令位于 x 轴上方的曲边梯形的面积取正值，位于 x 轴下方的曲边梯形的面积取负值，这样定积分的值就是曲边梯形面积的代数和. 教学中可以结合本题的结果先让学生思考定积分与曲边梯形面积之间的关系，再给出书本上的结论.

一般情况下（图1-7），定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是：介于 x 轴，曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=a$，$x=b$ 之间各部分曲边梯形面积的代数和，在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号.

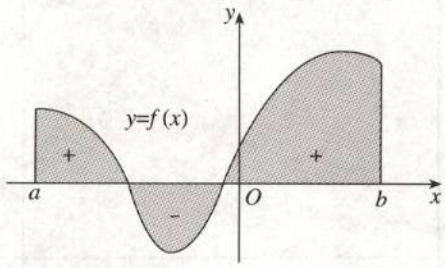


图1-7

四、教学设计案例

1.6 微积分基本定理（第1课时）

1. 教学任务分析

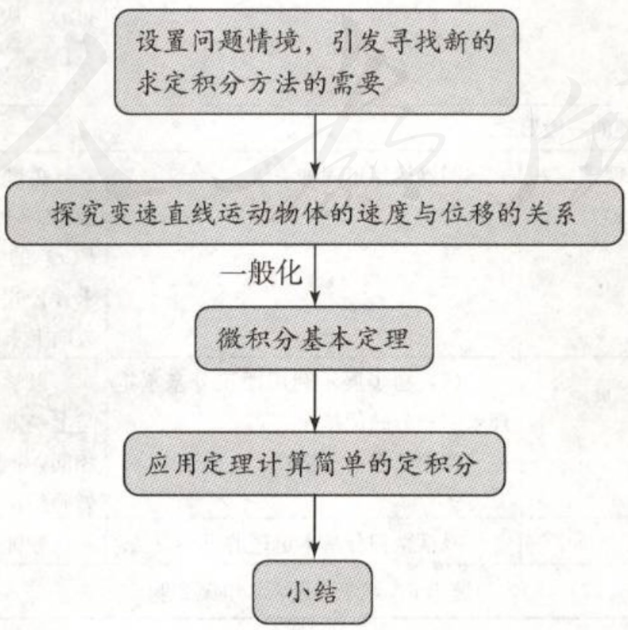
本节课通过对变速直线运动物体位移问题的探究，分别用物体的运动规律 $y=y(t)$ 和速度函数 $v=v(t)$ 表示出物体在时间段 $[a, b]$ 上的位移 s，进而将结论一般化，给出微积分基本定理. 通过这个探究过程，使学生经历定理的发现过程，直观了解微积分基本定理的含义. 通过计算两个简单的定积分，使学生体会微积分基本定理的威力.

2. 教学重点、难点

重点：通过探究变速直线运动物体的速度与位移的关系，使学生直观了解微积分基本定理的含义，并能正确运用基本定理计算简单的定积分.

难点：了解微积分基本定理的含义.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题	设计意图	师生活动
(1) 你能用定义计算 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 吗？	激发寻求计算定积分新方法的认知需要.	让学生回顾用定义计算 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ 的过程，并动手利用定义计算 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，引导学生思考用定义计算定积分的困难及其原因. 教师提出问题：导数和定积分有没有内在联系？能否从这种联系中找出求定积分的简便、有效的方法？
(2) 你能说说解决书本第 51 页的“探究”的基本思路吗？	引导学生大胆尝试.	教师提出问题，学生阅读“探究”，并尝试提出解决问题的思路. 教师指出：为了解决问题，我们可以先把问题分解一下.
(3) 如果做直线运动的物体的运动规律是 $y=y(t)$，那么它在时刻 t 的速度是什么？	复习路程与速度之间的关系.	教师提问，学生回答 $v(t)=y'(t)$.
(4) 如何用 $y(t)$ 表示物体在 $[a,b]$ 内的位移 s？	得到基本定理中右端的雏形——$y(b)-y(a)$.	教师引导学生画出函数 $y=y(t)$ 的图象，观察图象（或根据位移的定义）得出 $s=y(b)-y(a)$.
(5) 如何用 $v(t)$ 表示物体在 $[a,b]$ 内的位移 s？	得出基本定理中左端的雏形——$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.	教师引导学生利用导数的几何意义，从图形上直观地观察近似值的意义，并用定积分得出 $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.
(6) 由上面的讨论你能得到什么结论？	得出微积分基本定理的一个特例，为得出微积分基本定理奠定基础.	教师引导学生小结：物体在区间 $[a,b]$ 上的位移就是 $v(t)=y'(t)$ 在区间上的定积分，等于函数 $y(t)$ 在区间端点 b，a 处的函数值之差 $y(b)-y(a)$，从而 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=\int_a^b y'(t)\mathrm{d}t=y(b)-y(a)$.
(7) 给出微积分基本定理的一般形式.		
(8) 运用微积分基本定理求定积分的关键是什么？如何求 $F(x)$？	明确运用定理的关键.	关键是求出满足 $F'(x)=f(x)$ 的函数 $F(x)$，教师引导学生得出求函数 $F(x)$ 的方法：运用基本初等函数的求导公式和导数的四则运算法则从反方向上求出 $F(x)$.
(9) 计算 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$，第 53 页例 1.	(1) 初步展示利用微积分基本定理求定积分的优越性. (2) 规范书写格式.	以学生练习、讨论为主，让学生与上一节例题比较，得出结论：结果相同，但比用定义计算定积分简单. 教师给出规范的书写格式.
小结.	概括微积分基本定理的思想方法.	教师引导学生概括.
课后作业：练习 (1) (6) (7) (8)，习题 1.6A 组第 2 题，B 组第 2 题.		

五、习题解答

练习（第 55 页）

(1) 50； (2) $\dfrac{50}{3}$； (3) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\dfrac{5}{3}$； (4) 24；

(5) $\dfrac{3}{2}-\ln 2$； (6) $\dfrac{1}{2}$； (7) 0； (8) -2.

说明 本题利用微积分基本定理和定积分的性质计算定积分.

习题 1.6（第 55 页）

A 组

1. (1) $\dfrac{40}{3}$； (2) $-\dfrac{1}{2}-3\ln 2$； (3) $\dfrac{9}{2}+\ln 3-\ln 2$；

(4) $-\dfrac{17}{6}$； (5) $\dfrac{3\pi^2}{8}+1$； (6) $e^2-e-2\ln 2$.

说明 本题利用微积分基本定理和定积分的性质计算定积分.

2. $\int_0^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{3\pi}=2$.

它表示位于 x 轴上方的两个曲边梯形的面积与 x 轴下方的曲边梯形的面积之差. 或表述为：位于 x 轴上方的两个曲边梯形的面积（取正值）与 x 轴下方的曲边梯形的面积（取负值）的代数和.

B 组

1. (1) 原式 $=\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}$；

(2) 原式 $=\left[\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$；

(3) 原式 $=\left[\dfrac{2^x}{\ln 2}\right]_1^3=\dfrac{6}{\ln 2}$.

2. (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{\cos mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\dfrac{1}{m}[\cos m\pi-\cos(-m\pi)]=0$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x=\dfrac{\sin mx}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\dfrac{1}{m}[\sin m\pi-\sin(-m\pi)]=0$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1-\cos 2mx}{2}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$；

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1+\cos 2mx}{2}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$.

3. (1) $s(t)=\int_0^t\dfrac{g}{k}(1-e^{-kt})\mathrm{d}t=\left[\dfrac{g}{k}t+\dfrac{g}{k^2}e^{-kt}\right]_0^t=\dfrac{g}{k}t+\dfrac{g}{k^2}e^{-kt}-\dfrac{g}{k^2}=49t+245e^{-0.2t}-245$.

(2) 由题意得

$$49t+245e^{-0.2t}-245=5\,000.$$

这是一个超越方程，为了解这个方程，我们首先估计 t 的取值范围.

根据指数函数的性质，当 $t>0$ 时，$0<e^{-0.2t}<1$，从而

$$5\,000<49t<5\,245,$$

因此

$$\frac{5\,000}{49}<t<\frac{5\,245}{49}.$$

因为 $245\mathrm{e}^{-0.2\times\frac{5\,000}{49}}\approx3.36\times10^{-7}$，$245\mathrm{e}^{-0.2\times\frac{5\,245}{49}}\approx1.24\times10^{-7}$，所以 $1.24\times10^{-7}<245\mathrm{e}^{-0.2t}<3.36\times10^{-7}$. 从而，在解方程 $49t+245\mathrm{e}^{-0.2t}-245=5\,000$ 时，$245\mathrm{e}^{-0.2t}$可以忽略不计.

因此

$$49t-245\approx5\,000,$$

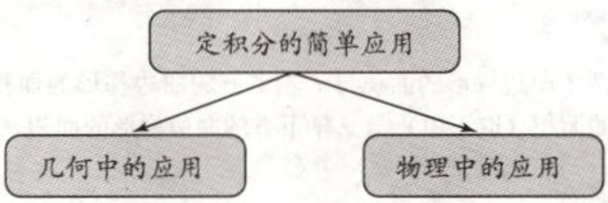
解之得

$$t\approx\frac{5\,245}{49}\ (\mathrm{s}).$$

说明 B组中的习题涉及到被积函数是简单的复合函数的定积分，可视学生的具体情况选做，不要求掌握.

1.7 定积分的简单应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：应用定积分解决平面图形的面积、变速直线运动的路程和变力做功等问题，使学生在解决问题的过程中体验定积分的价值.

2. 难点：将实际问题化归为定积分的问题.

三、编写意图与教学建议

本节内容是应用定积分求比较复杂的平面图形的面积、求变速直线运动物体的路程以及求变力所做的功等. 解决这些问题的关键是将它们化归为定积分的问题. 通过本节的学习，使学生了解应用定积分解决实际问题的基本思想方法，知道在求平面图形的面积、变速直线运动物体的路程以及变力做功时，定积分是一种普遍适用的方法，初步了解定积分具有广泛的应用. 同时，在解决问题的过程中，通过数形结合的思想方法，加深对定积分几何意义的理解.

1.7.1 定积分在几何中的应用

本小节通过举例引导学生解决一些在几何中用初等数学方法难以解决的平面图形面积问题. 在这部分的教学中，应特别注意利用定积分的几何意义，借助图形直观，把平面图形进行适当的分割，从而把求平面图形面积的问题转化为求曲边梯形面积的问题.

例 1 是求由两条曲线围成的平面图形的面积. 第一步，画图并确定图形范围，即借助几何直观，将所求平面图形面积看成位于 x 轴上方的两个曲边梯形面积之差；第二步，确定积分上、下限，即通

过解方程组求出交点的横坐标，进而确定被积函数和积分上、下限（本例中需将曲线 $y^2=x$ 的解析式进行变形，得到 $y=\pm\sqrt{x}$，由于所围图形在 x 轴上方，因此取 $y=\sqrt{x}$)；第三步，写出平面图形面积的定积分表达式，运用微积分基本定理计算定积分，从而求出平面图形的面积.

例 2 的解题步骤与例 1 相同，不同的是，本例中将所求平面图形的面积看成位于 x 轴上方的两个部分的面积之和. 本例还可以有不同的解法. 例如：

解法一 将所求平面图形的面积看成一个曲边梯形与一个三角形的面积之差.

$$S=\int_0^8\sqrt{2x}\mathrm{d}x-\int_5^8(x-4)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}.$$

解法二 将所求平面图形的面积看成位于 y 轴右边的一个梯形与一个曲边梯形的面积之差，因此取 y 为积分变量，还需把函数 $y=x-4$ 变形为 $x=y+4$，函数 $y=\sqrt{2x}$变形为 $x=\frac{y^2}{2}$.

$$S=\int_0^4(y+4)\mathrm{d}y-\int_0^4\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{40}{3}.$$

比较这些解法可以发现，利用定积分求平面图形面积时，适当地分割图形或适当地选择积分变量可以简化解题过程. 教学中，可以引导学生得出不同的解法并进行比较.

教学中，应结合例题对解题步骤进行归纳总结，使学生明确利用定积分求平面图形面积的基本步骤：一般要先画出它的草图，并根据图形的特点选择适当的积分变量，再借助图形直观确定出被积函数以及积分的上、下限，最后利用微积分基本定理计算定积分，从而求出平面图形的面积.

1.7.2 定积分在物理中的应用

本小节主要目的是通过举例复习变速直线运动的路程，引导学生解决变力所做的功等一些简单的物理问题. 教学中，应特别注意利用这些问题的物理意义，有时也要注意借助于定积分的几何意义，用“数形结合”的思想方法解决问题.

1. 变速直线运动的路程

例 3 中，首先要根据图象写出解析式，然后用变速直线运动的路程公式求出路程. 由于本例比较简单，教学时可以采取让学生独立解答后再相互交流的方法.

本例也可以由变速直线运动的路程公式和定积分的几何意义，直观地得出路程即为图 1.7-3 所示的梯形 $OABC$ 的面积，即

$$s=S_{\text{梯形}OABC}=\frac{(30+60)\times30}{2}=1\ 350\ (\mathrm{m}).$$

这种解法更为简洁，教学中，教师可以用提问的方式让学生思考、讨论，使学生进一步从“数形结合”的角度理解定积分的概念并解决问题.

2. 变力做功

恒力做功的问题是学生熟悉的，变力做功的问题是恒力做功问题的自然引申. 与求变速直线运动的路程一样，用定积分的思想方法可以顺利解决变力做功问题.

由于变力做功公式的推导与变速直线运动路程公式的推导类似，因此教科书只通过“探究”提出问题. 教学中，可引导学生类比求变速直线运动路程的过程，自己推导出变力做功的公式 $W=\int_a^bF(x)\mathrm{d}x$，进一步体验用定积分解决问题的思想方法.

利用变力做功公式可以顺利解决例 4 的问题. 教学中，可结合物理学中相关内容，使学生对弹簧的平衡位置和伸长（压缩）量、弹性限度、弹性系数、胡克定律等有正确的认识.

四、习题解答

练习（第 58 页）

(1) $\frac{32}{3}$；　　(2) 1.

说明 进一步熟悉应用定积分求平面图形的面积的方法与求解过程.

练习（第 59 页）

1. $s=\int_3^5 (2t+3)\mathrm{d}t=[t^2+3t]_3^5=22$ (m).

2. $W=\int_0^4 (3x+4)\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}x^2+4x\right]_0^4=40$ (J).

习题 1.7（第 60 页）

A 组

1. (1) 2；　　(2) $\frac{9}{2}$.

2. $W=\int_a^b k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\left[-k\frac{q}{r}\right]_a^b=k\frac{q}{a}-k\frac{q}{b}$.

3. 令 $v(t)=0$，即 $40-10t=0$. 解得 $t=4$. 即第 4 s 时物体达到最大高度.

最大高度为

$$h=\int_0^4 (40-10t)\mathrm{d}t=[40t-5t^2]_0^4=80 \text{ (m)}.$$

4. 设 t s 后两物体相遇，则

$$\int_0^t (3t^2+1)\mathrm{d}t=\int_0^t 10t\mathrm{d}t+5,$$

解之得 $t=5$. 即 A，B 两物体 5 s 后相遇.

此时，物体 A 离出发地的距离为

$$\int_0^5 (3t^2+1)\mathrm{d}t=[t^3+t]_0^5=130 \text{ (m)}.$$

5. 由 $F=kl$，得 $10=0.01k$. 解之得 $k=1\,000$.

所做的功为

$$W=\int_0^{0.1} 1\,000l\mathrm{d}l=500l^2\Big|_0^{0.1}=5 \text{ (J)}.$$

6. (1) 令 $v(t)=5-t+\frac{55}{1+t}=0$，解之得 $t=10$. 因此，火车经过 10 s 后完全停止.

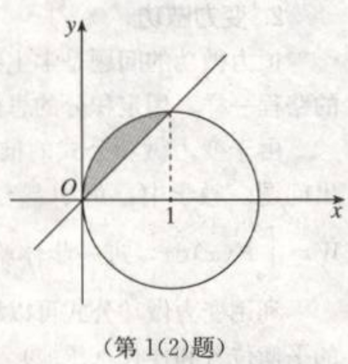
(2) $s=\int_0^{10}\left(5-t+\frac{55}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\left[5t-\frac{1}{2}t^2+55\ln(1+t)\right]_0^{10}=55\ln 11$ (m).

B 组

1. (1) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$表示圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 x 轴所围成的上半圆的面积，

因此$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2}$.

(2) $\int_0^1 \left[\sqrt{1-(x-1)^2}-x\right]\mathrm{d}x$表示圆$(x-1)^2+y^2=1$ 与直线 $y=x$ 所围成的图形（如图所示）的面积，因此

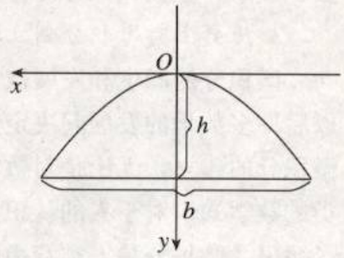


(第 1(2)题)

$$\int_0^1 \left[\sqrt{1-(x-1)^2}-x\right]dx=\frac{\pi\times 1^2}{4}-\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

2. 证明：建立如图所示的平面直角坐标系，可设抛物线的方程为 $y=ax^2$，则 $h=a\times\left(\frac{b}{2}\right)^2$，所以 $a=\frac{4h}{b^2}$. 从而抛物线的方程为

$$y=\frac{4h}{b^2}x^2.$$



(第 2 题)

于是，抛物线拱的面积

$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)dx=2\left[hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right]_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

3. 如图所示. 解方程组

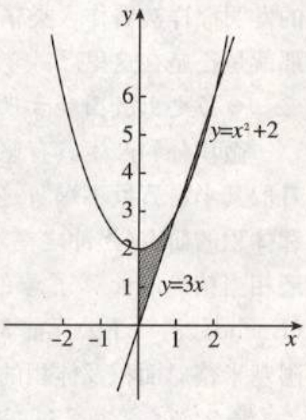
$$\begin{cases} y=x^2+2, \\ y=3x \end{cases}$$

得曲线 $y=x^2+2$ 与曲线 $y=3x$ 交点的横坐标 $x_1=1$，$x_2=2$.

于是，所求的面积为

$$\int_0^1 \left[(x^2+2)-3x\right]dx+\int_1^2\left[3x-(x^2+2)\right]dx=1.$$

4. 证明：$W=\int_R^{R+h} G\frac{Mm}{r^2}dr=\left[-G\frac{Mm}{r}\right]_R^{R+h}=G\frac{Mmh}{R(R+h)}$.



(第 3 题)

实习作业 走进微积分

1. 实习作业的主要目的

“实习作业 走进微积分”属于“数学文化”内容. 目的是让学生自己收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

2. 实习作业的主要方式

实习作业的主要方式是，带着教科书上提出的问题，查阅资料，回答上述问题. 教科书列出了一些主要的、权威的参考书目；学生也可以借助互联网查阅相关的内容，比如在著名的搜索引擎“google”中输入“微积分”“牛顿”“莱布尼茨”等关键词进行搜索，最后将查阅的资料进行汇总，写出实习报告.

写出实习报告以后，要求以小组为单位进行交流，初步了解数学科学与人类社会发展的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值，开阔学生的视野，寻求数学进步的历史轨迹，提高学生的文化素养和创新意识.

3. 对实习报告的评价

学生递交实习报告后，教师应结合这部分内容，有意识地强调数学的科学价值和应用价值.

通过实习作业，教师可以考察学生在查阅文献、阅读资料、撰写报告以及合作交流中的表现，对于优秀的作品应当给予鼓励、展示和推荐.

4. 关于教科书上几个问题的说明

● 微积分的研究对象和基本概念

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支科学．微积分中的基本概念是函数、极限、导数、积分等，其中极限是微积分的基石．

●历史上对微积分创立和发展的一些重要评价

微积分的产生和发展被誉为“近代技术文明产生的关键事件之一，它引入了若干极其成功的、对以后许多数学的发展起决定性作用的思想”．恩格斯更是称之为“17 世纪自然科学的三大发明之一”．微积分的建立，无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展都产生了巨大的影响，充分显示了人类的数学知识对于人的认识发展和改造世界的能力的巨大促进作用．微积分为创立许多新的学科提供了源泉．微积分是人类智力的伟大结晶，它给出了一整套的科学方法，开创了科学的新纪元，并因此加强与加深了数学的作用．恩格斯曾说：“在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了．如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和惟一的功绩，那就是正是在这里．”

●历史上我国和古代欧洲有关微积分思想的一些代表性工作

微积分的产生具有悠久的历史渊源．在中国，公元前 4 世纪，桓团、公孙龙等提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；公元 3 世纪刘徽的“割圆术”和公元 5～6 世纪祖冲之、祖暅对圆周率、面积和体积的研究(祖冲之在刘徽割圆术的基础上首先计算出了精确到小数点后 7 位的圆周率的近似值，他还相当精确地计算了球的体积)，都包含着微积分概念的萌芽．在欧洲，公元前 3 世纪欧几里得(Euclid，活动于公元前 300 年左右)在几何《原本》中对不可约量及面积与体积的研究，公元前 3 世纪阿基米德对面积及体积的进一步研究(穷竭法)，也都包含着上述萌芽．

●欧洲文艺复兴到 17 世纪期间的社会、经济状况、科学发展、贸易、航运等情况，对数学提出了要求

欧洲文艺复兴之后，资本主义生产方式兴起，生产力有了较大的发展．到了 16 世纪，由于航海、机械制造以及军事上的需要，运动的研究成了自然科学的中心议题．于是在数学中开始研究各种变化过程中变化的量(变量)间的依赖关系，变量的引进，形成了数学中的转折点．在伽利略等人的数学著作中，都包含着微积分的初步想法．

到了 17 世纪，生产的发展提出了许多技术上的新要求，而要实现技术要求必须有相应的科学知识，例如，流体力学(与矿井的通风和排水有关)、机械力学等都有了突飞猛进的发展．在资本主义社会的商品生产中，贸易活动占有重要地位，与此相关的海运事业迅速发展，向外扩张的军事需要，也促进了航海的发展．航海需要精确而方便地确定位置(经纬度)、预报气象，天文学因而发展起来，对经纬度测量的需要使人们进行了这样一系列研究：(1) 对月亮与太阳及某一恒星距离的计算；(2) 对木星卫星蚀的观察；(3) 对月球穿越子午圈的观测；(4) 摆钟及其他航海计时在海上的应用等等．由于这些研究，产生了近代力学、天文学等近代理论．

所有这些发展都对数学提出了新的要求，这些要求表现为一些亟待数学解决的问题，这些问题可以分为以下四种类型：

(1) 已知物体移动的距离能表示为时间的函数的公式 $s=s(t)$，求物体在任意时刻的速度 $v=v(t)$ 和加速度 $a=a(t)$；或者反过来，已知物体加速度能表示为时间的函数 $a=a(t)$，求物体在任意时刻的速度；或已知物体速度能表示为时间的函数 $v=v(t)$，求物体在任意时刻的移动距离．上述问题如果对于匀速直线运动来考虑，当时的数学工具已经可以解决，但当时天文学、力学等涉及许多非匀速运动，大多数也不是直线运动，所以要求新的数学工具．

(2) 已知曲线求其切线．这不仅是几何学的问题，而且也是许多其他科学问题的要求：物体作曲线运动时，在每一瞬间的速度方向是此曲线相应的点的切线的方向；在光学中对光的折射和反射的研究需要求出界面的法线方向，法线方向是由切线方向决定的．

(3) 已知函数求函数的极大值和极小值．这与天文学和力学都有关，例如求行星运动的近日点和

远日点，抛射体的最大射程和最大高度等问题，都可归结为这种类型的问题.

(4) 求曲线的长度. 这是以计算行星或曲线运动的物体走过的路程为背景的(图 1-8)；求曲线围成的图形的面积，以计算行星与太阳之间的线段扫过的面积为代表(图 1-8)；还有求物体的重心、求两个天体之间的引力(图 1-9)等问题.

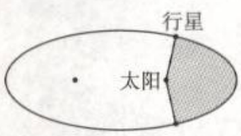


图 1-8

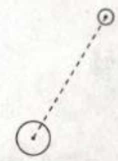


图 1-9

这些问题，都是 17 世纪时其他科学，尤其是天文学和力学及某些技术科学所提出的基本数学问题.

●牛顿和莱布尼茨是微积分的主要创立者

到 17 世纪前叶，已经积累了许多关于微积分思想的成果，但微积分作为一门学科发展起来，还是由于牛顿和莱布尼茨的杰出工作. 在他们之前，微积分的工作基本局限于一些具体问题的细节之中，还缺乏普遍性的规律.

在 17 世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨总结了诸多数学家的工作之后，分别独立地建立了微积分学. 他们建立微积分的出发点都是直观无穷小量.

牛顿(Newton，1642—1727)，英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家. 牛顿在数学上最卓越的贡献是创建微积分. 17 世纪早期，数学家们已经建立起一系列求解无限小问题(诸如曲线的切线、曲率、极值，运动的瞬时速度，面积、体积、曲线长度、物体重心的计算)的特殊方法. 牛顿超越前人的功绩在于将这些特殊的技巧归结为一般的算法，特别是确立了微分与积分的逆运算关系(微积分基本定理). 牛顿的微积分中有一个重要的基本概念“流数”，流数被定义为可借运动描述的连续量——流量(用 x，y，z，…表示)的变化率(速度)，并用在字母上加点来表示，如 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，…. 牛顿表述流数术的基本问题为：已知流量间的关系，求它们的流数间的关系，以及逆运算. 牛顿创立微积分有深刻的力学背景，他更多的是从运动变化的观点考虑问题，把力学问题归结为数学问题.

莱布尼茨(Leibniz，1646—1716)，德国数学家、哲学家，和牛顿同为微积分学的创始人. 莱布尼茨终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法. 这种努力导致许多数学上的发现，最突出的是微积分学. 莱布尼茨创立微积分主要是从几何学的角度考虑，他创建的微积分的符号(如 $\mathrm{d}x$，$\int$ 等)以及微分的基本法则，对以后微积分的发展有极大的影响.

微积分的产生和发展与力学、物理学和几何学的发展紧密相联，微积分的许多基本概念都有实际背景，并受实际需要的推动. 17 世纪牛顿和莱布尼茨分别独立地完成了微积分的创建工作，与此同时，力学和物理学也得到了发展. 牛顿和莱布尼茨的工作使得导数和积分的互逆关系成为相当广泛的一类函数的普遍规律. 他们有效地创立了微积分的基本定理和运算法则，从而使微积分能普遍应用于科学实践.

●微积分产生的历史意义

微积分的产生具有深远的历史意义. 一方面，它极大地推动了数学科学的发展，丰富了数学科学的思想宝库，随着微积分的理论基础逐步完善，以微积分为基础的数学分析科学得到空前发展，建立了多种数学分支，如微分方程、积分方程、复变函数、实变函数、泛函分析、微分几何、拓扑学、流形等；另一方面，微积分在力学、天文学以及物理和其他科学技术中的运用，极大地促进了以上科学的发展.

●微积分产生说明了什么

微积分产生的时代背景和历史意义充分说明，数学来源于实践又反过来作用于实践；数学中普遍存在着对立统一、运动变化、相互联系、相互转化；数学可提供自然现象、社会系统的数学模型；数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分.

复习参考题（第 65 页）解答

A 组

1. （1）3；（2）$y=-4$.

2. （1）$y'=\dfrac{2\sin x\cos x+2x}{\cos^2 x}$；（2）$y'=3(x-2)^2(3x+1)(5x-3)$；

（3）$y'=2^x\ln x\ln 2+\dfrac{2^x}{x}$；（4）$y'=\dfrac{2x-2x^2}{(2x+1)^4}$.

3. $F'=-\dfrac{2GMm}{r^3}$.

4. （1）$f'(t)<0$. 因为红茶的温度在下降.

（2）$f'(3)=-4$ 表明在 3 ℃附近时，红茶温度约以 4 ℃/min 的速率下降.

图略.

5. 因为 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，所以 $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

当 $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$单调递增；

当 $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$单调递减.

6. 因为 $f(x)=x^2+px+q$，所以 $f'(x)=2x+p$.

当 $f'(x)=2x+p=0$，即 $x=-\dfrac{p}{2}=1$ 时，$f(x)$有最小值.

由 $-\dfrac{p}{2}=1$，得 $p=-2$. 又因为 $f(1)=1-2+q=4$，所以 $q=5$.

7. 因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$，所以

$$f'(x)=3x^2-4cx+c^2=(3x-c)(x-c).$$

当 $f'(x)=0$，即 $x=\dfrac{c}{3}$，或 $x=c$ 时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 可能有极值.

由题意知，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值，所以 $c>0$. 由于

x	$\left(-\infty,\ \frac{c}{3}\right)$	$\frac{c}{3}$	$\left(\frac{c}{3},\ c\right)$	c	$(c,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以，当 $x=\dfrac{c}{3}$时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值. 此时，$\dfrac{c}{3}=2$，即 $c=6$.

8. 设当点 A 的坐标为$(a,\ 0)$时，$\triangle AOB$ 的面积最小.

因为直线 AB 过点 $A(a,\ 0)$，$P(1,\ 1)$，所以直线 AB 的方程为

$$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-a}{1-a},$$

即

$$y=\frac{1}{1-a}(x-a).$$

当 $x=0$ 时，$y=\frac{a}{a-1}$，即点 B 的坐标是 $\left(0,\ \frac{a}{a-1}\right)$.

因此，$\triangle AOB$ 的面积

$$S_{\triangle AOB}=S(a)=\frac{1}{2}a\times\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{2(a-1)}.$$

令 $S'(a)=0$，即 $S'(a)=\frac{a^2-2a}{2(a-1)^2}=0$.

当 $a=0$，或 $a=2$ 时，$S'(a)=0$，$a=0$ 不合题意舍去．由于

a	$(0,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
$S'(a)$	$-$	0	$+$
$S(a)$	单调递减	极小值	单调递增

所以，当 $a=2$，即直线 AB 的倾斜角为 $135°$ 时，$\triangle AOB$ 的面积最小，最小面积为 2.

9. D.

10. 设底面一边的长为 x m，另一边的长为 $(x+0.5)$ m．因为钢条长为 14.8 m，所以长方体容器的高为

$$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=\frac{12.8-8x}{4}=3.2-2x.$$

设容器的容积为 V，则

$$V=V(x)=x(x+0.5)(3.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x,\ 0<x<1.6.$$

令 $V'(x)=0$，即 $-6x^2+4.4x+1.6=0$，所以，$x=-\frac{4}{15}$(舍去)，或 $x=1$.

当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$V'(x)>0$；当 $x\in(1,\ 1.6)$ 时，$V'(x)<0$.

因此，$x=1$ 是函数 $V(x)$ 的极大值点，也是最大值点.

所以，长方体容器的高为 1.2 m 时，容器最大，最大容积为 $1\times1.5\times1.2=1.8$ (m^3).

11. 设旅游团人数为 $100+x$ 时，旅行社收费为

$$y=f(x)=(100+x)(1\,000-5x)=-5x^2+500x+100\,000,\ 0\leqslant x\leqslant 80.$$

令 $f'(x)=0$，即 $-10x+500=0$，所以 $x=50$.

当 $x\in(0,\ 50)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(50,\ 80)$ 时，$f'(x)<0$.

因此，$x=50$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，也是最大值点.

所以，旅游团人数为 150 时，可使旅行社收费最多.

12. 设打印纸的宽为 x cm 时，可使其打印面积最大.

因为打印纸的面积为 623.7，宽为 x，所以打印纸的高为 $\frac{623.7}{x}$，打印面积

$$S(x)=(x-2\times2.54)\left(\frac{623.7}{x}-2\times3.17\right)$$

$$=655.907\,2-6.34x-\frac{3\,168.396}{x},\ 5.08<x<98.38.$$

令 $S'(x)=0$，即 $6.34-\frac{3\ 168.396}{x^2}=0$，解之得 $x\approx22.36$（负值舍去），$\frac{623.7}{22.36}\approx27.89$.

容易知道，$x\approx22.36$ 是函数 $S(x)$ 的极大值点，也是最大值点.

答：打印纸的宽与高分别约为 22.36 cm，27.89 cm 时，可使其打印面积最大.

13. 设每年养 q 头猪时，总利润为 y 元. 则

$$y=R(q)-20\ 000-100q=-\frac{1}{2}q^2+300q-20\ 000,\ 0\leqslant q\leqslant400.$$

令 $y'=0$，即 $-q+300=0$，解得 $q=300$.

容易知道，$q=300$ 是函数的极大值点，也是最大值点.

当 $q=300$ 时，$y=-\frac{1}{2}\times300^2+300^2-20\ 000=25\ 000$（元）.

答：每年养 300 头猪时可使总利润最大，最大总利润为 25 000 元.

14. (1) $2\sqrt{3}-2$；　(2) $2e-2$；　(3) 1；

(4) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$；

(5) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{2}dx=\left[\frac{x-\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{4}$.

15. 略.

说明 利用函数图象的对称性、定积分的几何意义进行解释.

16. $2\sqrt{2}-2$.

17. 由 $F=kl$，得 $0.049=0.01k$. 解之得 $k=4.9$.

所做的功为

$$W=\int_{0.1}^{0.3}4.9l\,dl=4.9\times\frac{l^2}{2}\Big|_{0.1}^{0.3}=0.196\ (\text{J}).$$

B组

1. (1) $b'(t)=10^4-2\times10^3t$. 所以，细菌数量在 $t=5$ 与 $t=10$ 时的瞬时变化率分别为 0 和 -10^4.

(2) 当 $0<t<5$ 时，$b'(t)>0$，所以细菌数量在增加；当 $5<t<5+5\sqrt{5}$ 时，$b'(t)<0$，所以细菌数量在减少.

2. 设扇形的半径为 r，中心角为 α 弧度时，扇形的面积为 S.

由 $l-2r=\alpha r$，得 $\alpha=\frac{l}{r}-2$. 所以

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}-2\right)r^2=\frac{1}{2}(lr-2r^2),\ 0<r<\frac{l}{2}.$$

令 $S'=0$，即 $l-4r=0$，解得 $r=\frac{l}{4}$. 此时 α 为 2 弧度.

容易得到，$r=\frac{l}{4}$ 是函数 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$ 的极大值点，也是最大值点.

答：扇形的半径为 $\frac{l}{4}$，中心角为 2 弧度时，扇形的面积最大.

3. 设圆锥的底面半径为 r，高为 h，体积为 V，那么 $r^2+h^2=R^2$，因此

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h=\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^3,\ 0<h<R.$$

令 $V'=\frac{1}{3}\pi R^2-\pi h^2=0$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

容易知道，$h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 是函数 V 的极大值点，也是最大值点. 所以，当 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 时，容积最大.

把 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 代入 $r^2+h^2=R^2$，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

由 $R\alpha=2\pi r$，得 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

所以圆心角为 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，容积最大.

答：扇形的圆心角 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，容器的容积最大.

4. 由于 $80=k\times 10^2$，所以 $k=\frac{4}{5}$.

设船速为 x km/h 时，总费用为 y，则

$$y=\frac{4}{5}x^2\times\frac{20}{x}+\frac{20}{x}\times 480=16x+\frac{9\ 600}{x},\ x>0.$$

令 $y'=0$，即 $16-\frac{9\ 600}{x^2}=0$，解得 $x\approx 24$.

容易得到，$x\approx 24$ 是函数 y 的极小值点，也是最小值点.

当 $x=24$ 时，$\left(16\times 24+\frac{9\ 600}{24}\right)\div\left(\frac{20}{24}\right)\approx 941$（元/时）.

答：船速约为 24 km/h 时，总费用最少，此时每小时费用约为 941 元.

5. 设汽车以 x km/h 行驶时，行车的总费用

$$y=\frac{130}{x}\left(3+\frac{x^2}{360}\right)\times 3+\frac{130}{x}\times 14,\ 50\leqslant x\leqslant 100.$$

令 $y'=0$，解得 $x\approx 53$（km/h）．此时，$y\approx 114$（元）.

容易得到，$x\approx 53$ 是函数 y 的极小值点，也是最小值点.

答：最经济的车速约为 53 km/h；如果不考虑其他费用，这次行车的总费用约为 114 元.

6. 原式 $=\int_{-2}^{4}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-x}]_{-2}^{0}+\mathrm{e}^{x}\Big|_{0}^{4}=\mathrm{e}^4+\mathrm{e}^2-2.$

7. 解方程组

$$\begin{cases} y=kx, \\ y=x-x^2 \end{cases}$$

得，直线 $y=kx$ 与抛物线 $y=x-x^2$ 交点的横坐标为 $x=0$，$1-k$.

抛物线与 x 轴所围图形的面积

$$S=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

由题设得

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{1-k}(x-x^2)\mathrm{d}x-\int_0^{1-k}kx\mathrm{d}x\\&=\int_0^{1-k}(x-x^2-kx)\mathrm{d}x=\left[\frac{1-k}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-k}\\&=\frac{(1-k)^3}{6}.\end{aligned}$$

又因为 $S=\frac{1}{6}$，所以 $(1-k)^3=\frac{1}{2}$．于是

$$k=1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

说明 本题也可以由面积相等直接得到$\int_0^{1-k}(x-x^2-kx)\mathrm{d}x=\int_0^{1-k}kx\mathrm{d}x+\int_{1-k}^{1}(x-x^2)\mathrm{d}x$，由此求出 k 的值．但计算较为烦琐．

III 自我检测题

一、选择题

1. 质量为 5 kg 的物体按规律 $s=2t+3t^2$（t 的单位：s，s 的单位：cm）做直线运动，则物体受到的作用力为（　　）.

(A) 30 N　　(B) 6×10^{-5} N　　(C) 0.3 N　　(D) 6 N

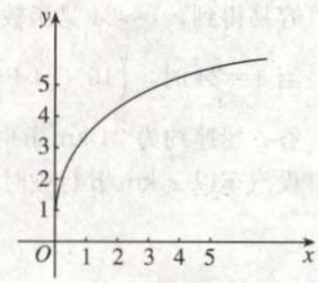
2. 函数 $f(x)$的图象如图所示，下列数值排序正确的是（　　）.

(A) $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

(B) $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

(C) $0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

(D) $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$



（第 2 题）

3. 若函数 $f(x)=x^3-3bx+3b$ 在$(0, 1)$内有极小值，则（　　）.

(A) $0<b<1$　　(B) $b<1$　　(C) $b>0$　　(D) $b<\frac{1}{2}$

4. 函数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ 在$[0, 3]$上的最大值和最小值分别是（　　）.

(A) 5，-15　　(B) 5，-4

(C) -4，-15　　(D) 5，-16

二、填空题

5. 已知物体的运动方程是 $s=t^2+\frac{3}{t}$（t 的单位：s，s 的单位：m），则物体在时刻 $t=4$ 时的速度 $v=$________，加速度$a=$________.

6. 甲工厂八年来某种产品年产量 y 与时间 x（单位：年）的函数关系如图所示．现有下列四种说法：

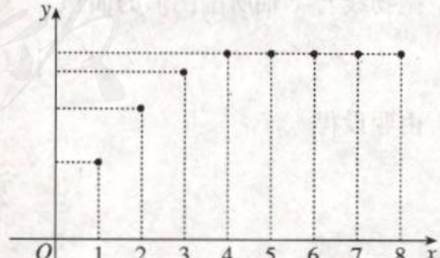
①前三年该产品产量增长速度越来越快；

②前三年该产品产量增长速度越来越慢；

③第三年后该产品停止生产；

④第三年后该产品年产量保持不变．

其中说法正确的是________.



（第 6 题）

7. 函数 $f(x)=2x^3-6x^2+m$（m 为常数）在$[-2, 2]$上有最大值 3，那么此函数在$[-2, 2]$上的最小值为________.

8. 周长为 20 cm 的矩形，绕一条边旋转成一个圆柱，则圆柱体积的最大值为________.

9. $(\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}})'=$____________.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x=$____________.

三、解答题

11. 假设 $g(x)=\sqrt{x}$，$f(x)=kx^2$，其中 k 为常数.

(1) 计算 $g(x)$的图象在点(4，2)处的切线斜率；

(2) 求此切线方程；

(3) 如果函数 $f(x)$的图象经过点(4，2)，计算 k 的值；

(4) 求函数 $f(x)$的图象与(2)中的切线的交点.

12. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x=-1$ 时，$f(x)$的极大值为 7；当 $x=3$ 时，$f(x)$有极小值. 求：

(1) a，b，c 的值；

(2) 函数 $f(x)$的极小值.

13. 某厂生产某种产品 x 件的总成本 $c(x)=1\,200+\frac{2}{75}x^3$（万元），已知产品单价的平方与产品件数 x 成反比，生产 100 件这样的产品单价为 50 万元，产量定为多少时总利润最大?

14. 有一质量非均匀分布的细棒，已知其线密度为 $\rho(x)=x^3$（取细棒所在的直线为 x 轴，细棒的一端为原点），棒长为 1，试用定积分表示细棒的质量 M.

15. 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 围成的平面图形的面积.

参考答案

一、选择题

1. C.　2. B.　3. A.　4. A.

二、填空题

5. $\frac{125}{16}$ m/s，$\frac{67}{32}$ m/s^2.

6. ②④.

7. -37.

8. $\frac{4\,000}{27}\pi$ cm^3.

9. $-\frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{3}}$.

10. 1.

三、解答题

11. (1) $\frac{1}{4}$；　(2) $y=\frac{1}{4}x+1$；　(3) $\frac{1}{8}$；　(4) (4，2)，$\left(-2，\frac{1}{2}\right)$.

12. (1) $a=-3$，$b=-9$，$c=2$；　(2) -25.

13. 当产量为 25 件时，总利润最大.

14. $M=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$.

15. $\frac{8}{3}$.

Ⅳ 拓展资源

1. 变化率

西红柿在成熟的过程中，它的大小、含糖量等都会随时间变化；树木在成长过程中，它的高度、树干的直径都会随时间变化……这些变化有时快、有时慢. 描述变化快慢的量就是变化率.

变化率在描述各种变化规律过程中起着非常重要的作用，速度和加速度就是两个很好的例子. 变化率表示变化的快慢，不表示变化的大小. 速度大，加速度不一定大，比如匀速飞行的高空侦察机，尽管它的速度能够接近 1 000 m/s，但它的加速度为 0. 相反，速度小，加速度也可以很大. 比如枪筒里的子弹，在扣扳机火药刚刚爆发的时刻，尽管子弹的速度接近 0，但它的加速度可以达到 $5\times10^4\ \text{m/s}^2$.

当然，生活中的变化率问题多种多样. 在数学上，差商就是平均变化率，导数就是瞬时变化率，利用数学工具，可以详尽地研究导数，继而解决现实中的变化率问题. 对于源于变化率问题的导数，既要体会变化率的思想，又要明确其中采用的数学方法，如逼近的思想方法、以直代曲等等.

2. 变化率问题示例

交流电路：电荷量对时间的导数为电流.

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

非均匀的物体：质量对长度(面积，体积)的导数为物体的线(面，体)密度.

3. 物理教科书中的速度知识

《普通高中课程标准实验教科书 物理 必修 1》第一章《运动的描述》中介绍了“运动快慢的描述——速度”. 相关内容如下.

平均速度和瞬时速度

一般说来，物体在某一时间间隔内，运动的快慢不一定是时时一样的，所以由 $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 求得的速度，表示的只是物体在时间间隔 Δt 内的平均快慢程度，称为平均速度.

显然，平均速度只能粗略地描述运动的快慢. 为了使描述精确些，可以把 Δt 取得小一些. 物体在从 t 到 $t+\Delta t$ 这样一个较小的时间间隔内，运动快慢的差异就小一些. Δt 越小，运动的描述就越精确. 可以想象，如果 Δt 非常非常小，就可以认为 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 表示的是物体在时刻 t 的速度，这个速度叫做瞬时速度.

4. 关于连加号“$\sum$”

在数学中经常遇到若干个数（单项式）相加的式子

$$a_1+a_2+\cdots+a_n, \qquad ①$$

为了书写方便，常把①式记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad ②$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

② 式中的记号“$\sum$”称为连加号，或称为求和号．“$\sum$”是一个大写的希腊字母，读作 sigma，a_i 表示一般项，i 是整数，称为求和指标，连加号“$\sum$”上下的写法，表示 i 的取值由 1 到 n．例如

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2; \quad ③$$

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1} aq^i=\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1}; \quad ④$$

$$f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x. \quad ⑤$$

连加号有如下基本性质：

(1) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$（$k$ 是与 i 无关的常数）；

证明：
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ka_i &= ka_1+ka_2+\cdots+ka_n\\ &=k(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\ &=k\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

利用性质(1)可将④式写成

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1} aq^i=a\sum_{i=0}^{n-1} q^i;$$

⑤式可写成

$$f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

(2) $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$；

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{m} a_i+\sum_{i=m+1}^{n} a_i$（$m$ 是介于 1 与 n 之间的整数）．

5. 关于定积分的一般定义

定义　设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个函数．T 表示在区间 $[a, b]$ 内插入任意 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

而成的一个确定的分法．将这 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 长度的最大值记为 $l(T)$．在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意取定一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作和

$$\begin{aligned}I_n &= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\ &=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).\end{aligned}$$

如果不论区间 $[a, b]$ 的分法如何，不论 ξ_i 怎样选取，当 $l(T)\to 0$ 时，和 I_n 都存在极限，且极限值都是 I，即

$$I=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，并称极限值 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 这里，a 与 b 分别叫做积分下限与积分上限，区间 $[a, b]$ 叫做积分区间，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，x 叫做积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积式.

如果和 I_n 的极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不可积.

这个定义是德国数学家黎曼（B. Riemann，1826－1866）首先给出的，所以这样定义下的定积分通常称为黎曼积分.

根据黎曼积分的定义，在区间 $[a, b]$ 上的连续函数、单调有界函数、只有有限个不连续点的有界函数，都是可积的. 因此，教科书所讲的定积分是黎曼积分的特殊情形，黎曼积分是我们所讲的定积分的一种推广.

6. 关于微积分基本定理

（1）微积分基本定理的背景与意义

定积分起源于求平面图形的面积和其他一些实际问题. 定积分的思想在古代数学家的工作中就已经有了萌芽. 比如阿基米德（Archimedes，前287—前212）远在公元前240年左右，就曾用求和的方法计算过抛物线弓形及其他图形的面积. 定积分的概念，在很早以前就已经在许多人的工作中逐渐形成. 但是，直到牛顿和莱布尼茨的工作出现之前，有关定积分的种种结果还是孤立零散的，比较完整的定积分理论始终未能形成. 定积分的形成与发展为什么经过这样漫长的岁月呢？这与定积分的一般计算方法的解决有很大关系. 在牛顿、莱布尼茨之前，计算定积分一直没有一般可行的方法. 当时所用的方法各色各样，有的用几何的方法，有的用代数的方法，其共同的特点是都躲避不了繁难且技巧性很高的计算. 比如计算教科书第39页的曲边梯形面积，就必须算出

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

这在那时是相当困难的. 对于更复杂的问题，那就更不好计算了. 这就使得定积分不能广泛地应用到实际，因而限制了它的发展. 牛顿-莱布尼茨公式的建立，揭示了定积分与导数之间的内在联系，给出了计算定积分的一般的简便而适用的方法，使定积分真正成为解决许多实际问题的有力工具，促进了积分学的迅速发展. 因此，可以说牛顿-莱布尼茨公式的出现是积分学建立和发展的转折点，是积分学有如此广泛应用的关键. 正是由于这个公式本身的特点和在历史上的作用，所以又称它为微积分基本定理（或微积分基本公式）.

然而，微积分基本定理不是万能的. 大家知道，应用这个公式求定积分，需要首先求出被积函数的原函数，但是求原函数并不都是很容易的，有时甚至原函数根本无法用初等函数来表达；况且从工程技术与科学实验提出的大量的被积函数，常常是用曲线或表格给出的，这时写不出被积函数的表达式，当然也就无法用式子表示出它的原函数. 这时计算定积分常用的方法就是近似计算法，在计算机广泛应用的今天，这种方法显得更加可行与重要. 关于这方面的知识，《计算方法》课程中有专门的讨论.

（2）微积分基本定理的证明

微积分基本定理的证明过程中，需要用到微分中值定理.

证明：用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

将区间 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间，每个小区间长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. 相应的函数 $F(x)$ 的总改变量 $F(b)-F(a)$ 可分为 n 个部分改变量的和，即

$$
\begin{aligned}
&F(b)-F(a)\\
&=F(x_n)-F(x_0)\\
&=[F(x_n)-F(x_{n-1})]+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+\cdots+[F(x_i)-F(x_{i-1})]+\cdots+[F(x_1)-F(x_0)]\\
&=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})].
\end{aligned}
$$

根据微分中值定理，在每个小区间（x_{i-1}，x_i）内一定存在一点 ξ_i，使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x=f(\xi_i)\Delta x.$$

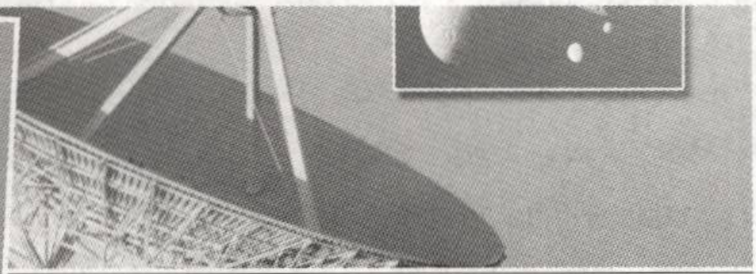
从而

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x.$$

当 $n\to\infty$ 时，根据定积分的定义，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

第二章 推理与证明



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式．推理一般包括合情推理和演绎推理．合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程．归纳、类比是合情推理常用的思维方法．在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养．演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到结论的推理过程，培养和提高学生的演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标，合情推理和演绎推理之间联系紧密、相辅相成．证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，数学结论的正确性必须通过逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论．在本章中，学生将通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明的方法（如分析法、综合法、数学归纳法）和间接证明的方法（如反证法）；感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯．

2. 学习目标

（1）结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用．

（2）结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本模式，并能运用它们进行一些简单推理．

（3）通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异．

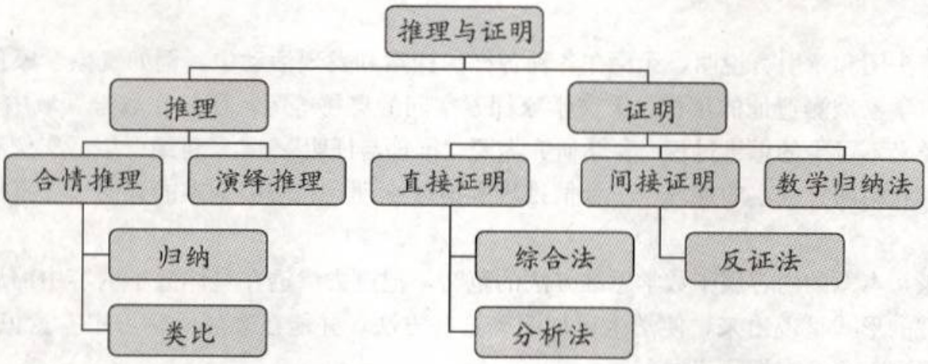
（4）结合已学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点．

（5）结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点．

（6）了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题．

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 3 节：2.1 合情推理与演绎推理，2.2 直接证明与间接证明，2.3 数学归纳法.

(1) 归纳推理和类比推理是合情推理常用的思维方法，前者是由部分到整体、个别到一般的推理，后者是由特殊到特殊的推理. 教科书以提出哥德巴赫猜想的思维过程为背景，从中概括出归纳推理的含义，然后借助例题说明应用归纳推理的一般步骤以及归纳推理的作用；从提出猜想“火星上可能有生命存在”的思维过程和圆与球的类比的思维过程中，总结出类比推理的含义，然后借助例题说明应用类比推理的一般步骤以及类比推理的作用. 合情推理的结论未必可靠，教科书结合例题对此进行了说明.

(2) 演绎推理是由一般到特殊的推理，“三段论”是演绎推理的一般模式. 教科书首先从证明问题的思维过程中提炼出演绎推理的含义，然后以学生熟悉的证明题为例，详细分析证明过程中包含的演绎推理过程. 演绎推理只要前提正确，推理的形式正确，推理所得的结论就一定是正确的. 教科书以探究的形式说明了演绎推理可能犯错的情况.

(3) 数学结论的正确性必须通过逻辑推理的方式加以证明才能得到确认，这是数学区别于其他学科的显著特点. 教科书结合学生已经学过的数学知识，通过数学实例学习两类基本的数学证明方法：直接证明与间接证明，了解这些证明方法的思考过程与特点. 这部分内容也是对学生已经学习过的基本证明方法的总结.

(4) 数学归纳法作为直接证明的一种特殊方法，主要用于证明与正整数有关的数学命题. 教科书首先通过实例归纳出数学归纳法的原理，然后用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

三、课时安排

全章共安排了 3 个小节，教学时间约需 8 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

2.1	合情推理与演绎推理	约 3 课时
2.2	直接证明与间接证明	约 3 课时
2.3	数学归纳法	约 2 课时

II 教科书分析

本章的章头图和章引言说明，无论在各种各样的探索和发现活动中，例如气象学家预测天气的可能状态、考古学家推测遗址的年代、天文学家探索空间的奥秘等等，还是在数学领域中，“推理与证明”都是人类必不可少的思维过程．科学研究需要“推理与证明”．本章将结合生活实例和学生已学过的数学实例，介绍两种基本的推理——合情推理和演绎推理，和两类基本的证明——直接证明和间接证明．

总体说来，本章的内容属于数学思维方法的范畴，把过去渗透在具体数学内容中的思维方法，以集中的、显性的形式呈现出来，使学生更加明确这些方法，并能在今后的学习中有意识地使用它们，以培养言之有理、论证有据的习惯．

2.1 合情推理与演绎推理

一、本节知识结构

二、教学重点与难点

1. 重点：了解合情推理的含义，能利用归纳和类比进行简单的推理；了解演绎推理的含义，能利用“三段论”进行简单的推理．

2. 难点：用归纳和类比进行推理，做出猜想；用“三段论”进行简单的推理．

三、编写意图与教学建议

推理一般包括合情推理和演绎推理，它们都是日常学习和生活中经常使用的思维方法．教科书尽量结合学生已学过的数学实例和生活中的实例，从中挖掘、提炼出合情推理和演绎推理的含义和推理方法，同时纠正推理过程中可能犯的典型错误，帮助学生了解合情推理和演绎推理的含义，为学生规范地应用这两种推理解决问题做出示范．

2.1.1 合情推理

数学发现的过程往往包含合情推理的成分，在人类发明、创造活动中，合情推理也扮演了重要角

色. 因此，分析合情推理的过程，对于了解数学发现或其他发现的过程是非常重要的. 归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 教科书以学生熟悉的例子为载体，引导他们提炼、概括归纳和类比的含义和推理方法，并借助例题具体说明在数学发现的过程中应用归纳和类比的过程.

1. 归纳推理的含义

教科书以数学史上著名的哥德巴赫猜想为背景引入归纳推理. 哥德巴赫猜想的提出过程是一个典型的运用归纳推理的过程，教科书详细分析了猜想的提出过程，同时分析了其中的思维方法，并从这个过程中提炼出归纳推理的含义.

教学中，在分析哥德巴赫猜想的提出过程时，可以引导学生认识以下几点：第一，“猜想”有一定的偶然性，但这与哥德巴赫对数有极其浓厚的兴趣有关；第二，数学研究中，有时对研究对象进行一些形式上的改变有利于发现规律，例如把 $3+7=10$，$3+17=20$……改写为 $10=3+7$，$20=3+17$……第三，在猜想提出的过程中，特例的验证是必须的；第四，由于特例的属性可能有许多（例如 10，20，30…的属性就有偶数、10 的倍数等），所以，特例也要尽量选得具有“一般性”；第五，猜想是从具体实例中概括出来的，因此对每一个具体事例的不同方面的特征进行细致分析很重要，这样才有利于概括出不同事例的共同特征，进而作出猜想.

2. 归纳推理的特点

下面，我们将归纳推理的特点作一个小结，以供教师参考.

(1) 归纳推理是由部分到整体、由个别到一般的推理；

(2) 归纳推理的前提是部分的、个别的事实，因此归纳推理的结论超出了前提所界定的范围，其前提和结论之间的联系不是必然性的，而是或然性的，所以“前提真而结论假”的情况是有可能发生的（如教科书第 77 页所述的费马的猜想）；

(3) 人们在进行归纳推理的时候，总是先搜集一定的事实材料，有了个别性的、特殊性的事实作为前提，然后才能进行归纳推理，因此归纳推理要在观察和实验的基础上进行；

(4) 归纳推理能够发现新事实、获得新结论，是做出科学发现的重要手段.

在进行归纳推理时，一般步骤是：首先，对有限的资料进行观察、分析、归纳整理；然后，在此基础上提出带有规律性的结论，即猜想；最后，检验这个猜想. 教科书的例 1 就是按照这个过程进行归纳推理的. 教学中也要让学生进行简单的归纳推理的练习.

3. 例 1 的教学建议

例 1 是应用归纳推理，发现新事实、获得新结论的例子. 本例比较简单，教学中，可以先让学生用递推公式自己计算出数列的前几项，观察其中的规律，并说出第 n 项与序号 n 之间的关系，再由此猜想该数列的通项公式. 另外，还要注意引导学生体会基础知识在得出猜想过程中的作用，本例中，“求通项公式就是求函数的解析式 $a_n=f(n)$”指引我们从数列的前几项作出猜想.

4. 类比推理的含义

与归纳推理类似，教科书对类比推理的引入也是先分析具体例子所反映的思维过程，从中提炼出类比推理的一般过程，然后再概括出类比推理的含义. 教科书列出的两个引例是科学家将火星与地球作类比的例子和数学上将空间中的球与平面上的圆作类比的例子. 第 1 个引例的思维过程是：先把火星与地球作类比，发现火星存在一些与地球类似的特征，然后从地球的一个已知特征（有生命存在）出发，猜测火星也可能具有这个特征. 教师可以用表格的形式将这个过程明确表示出来（表 2-1）.

表 2-1

地　　球	火　　星
行星、围绕太阳运行、绕轴自转	行星、围绕太阳运行、绕轴自转
有大气层	有大气层
一年中有季节的变更	一年中有季节的变更
温度适合生物的生存	大部分时间的温度适合地球上某些已知生物的生存
有生命存在	可能有生命存在

第 2 个引例的思维过程是：将球与圆作类比，发现球存在一些与圆类似的特征（如都具有完美的对称性，都是到定点的距离等于定长的点的集合），而已经知道圆的一些已知特征，由此可以推测球的类似特征．由于圆是平面内的基本图形，而球是空间中的基本图形，所以在将圆的基本特征推广为球的类似特征时，要将涉及到的平面元素推广为相应的空间元素．教科书第 72 页的“探究”栏目的参考解答如下（表 2-2）：

表 2-2

圆的概念和性质	球的类似概念和性质
圆的周长	球的表面积
圆的面积	球的体积
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦.	球心与截面圆（不经过球心的截面圆）圆心的连线垂直于截面圆.
与圆心距离相等的两弦相等；与圆心距离不等的两弦不等，距圆心较近的弦较长.	与球心距离相等的两个截面圆面积相等；与球心距离不等的两个截面圆面积不等，距球心较近的截面圆面积较大.
以点 $P(x_0,\ y_0)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.	以点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为球心，r 为半径的球的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

教学中要充分分析这两个例子所反映的思维过程，从中挖掘出类比推理的过程，然后再给出类比推理的含义.

5. 类比推理的特点

（1）类比推理是从特殊到特殊的推理；

（2）类比推理是从人们已经掌握了的事物的特征，推测正在被研究中的事物的特征，所以类比推理的结果具有猜测性，不一定可靠；

（3）类比推理以旧的知识作基础，推测新的结果，具有发现的功能．类比在数学发现中有重要作用，例如，通过空间与平面、向量与数、无限与有限、不等与相等的类比，可以从熟悉的知识（平面、数、有限、相等）中得到启发，发现可以研究的问题及其研究方法；

（4）由于类比推理的前提是两类对象之间具有某些可以清楚定义的类似特征，所以进行类比推理的关键是明确地指出两类对象在某些方面的类似特征.

在进行类比推理时，一般步骤是：首先，找出两类对象之间可以确切表述的相似特征；然后，用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想；最后，检验这个猜想．教科书的例 3 就是按照这个过程进行类比推理的．教学中也要让学生进行简单的类比推理的练习.

6. 例 2 和例 3 的编写意图和教学建议

（1）例 2 的教学可以分为两个层次．首先，由上所述，进行类比推理的前提是明确类比关系．因此，本例的设计意图之一就是让学生通过类比，将实数的加法和乘法的相似运算性质明确地表示出来．尽管实数的加法和乘法都是学生熟悉的运算，但是从什么角度进行类比和怎样明确地表示二者的相似

性，对学生来说并不容易，不同的学生可能有不同的答案．实际上，本例解答中的 4 个类比角度就是刻画“交换群”的运算的 4 个方面．教师教学时可以先让学生尽可能多地选取不同的角度进行类比，明确地说出二者的相似性，然后进行总结（表 2-3）：

表 2-3

类比角度	实数的加法	实数的乘法
运算结果	若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $a+b\in\mathbf{R}$.	若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $ab\in\mathbf{R}$.
运算律 （交换律和结合律）	$a+b=b+a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$	$ab=ba$ $(ab)c=a(bc)$
逆运算	加法的逆运算是减法，使得方程 $a+x=0$ 有惟一解 $x=-a$.	乘法的逆运算是除法，使得 $ax=1$ 有惟一解 $x=\frac{1}{a}$.
单位元	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$

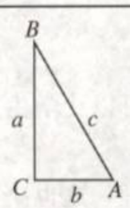
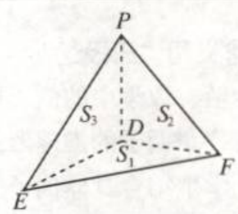
其次，应用类比推理是可以做出新发现的．在得到实数的加法和乘法的相似运算性质之后，教师可以简单介绍数学史上法国数学家伽罗瓦提出“群”理论的过程．伽罗瓦正是通过类比不同的集合及其运算性质，从中归纳出共同的结构，从而提出了“群”的理论．在这个过程中，伽罗瓦不仅用到了类比，而且用到了归纳．教师还可以结合这个例子向学生说明，数学学习和研究从不满足于特殊情况的结果，而是通过类比、归纳等方法去探索、研究各种对象的一般规律，寻求解决问题的一般方法．

（2）进行类比推理时，合理地确定类比对象是非常重要的，否则会使类比成为“乱比”．为此，在例 3 之前，教科书以寻找四面体的类比对象为例，说明了确定类比对象的基本原则．教学中可以让学生从不同角度选择类比对象，但要强调类比的原则是根据当前问题的需要，选择恰当的类比对象．教学中还可以列举其他例子说明这一问题．例如，从长方形的每一边都与对边平行，而与其他边垂直，长方体的每一面都与对面平行，而与其他面垂直的角度考虑，可以把长方体作为长方形的类比对象；从质量是物体大小的度量的角度考虑，概率是随机事件发生的可能性大小的度量，可以把质量作为概率的类比对象；等等．

由于确定类比对象对学生的要求过高，因此教科书的例题和习题一般都直接给出了进行类比的两类对象．

为了降低难度，例 3 将三角形的类比对象确定为四面体，所以学生只需给直角三角形选择一种四面体作为类比对象．例 3 的教学重点是按照类比推理的一般步骤进行推理，因此，教学中，要让学生充分感受和体验类比推理的过程．首先，要分析和明确两个类比对象的相似特征，可以画出表格将其列举出来（表 2-4）；然后，类比勾股定理的结构，猜想得到等式 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$．这个结论的正确性可以让学生在学完 2.2 节后再证明．

表 2-4

 直角三角形	 3 个面两两垂直的四面体
$\angle C=90°$ 3 条边的长度 a，b，c 2 条直角边 a，b 和 1 条斜边 c	$\angle PDF=\angle PDE=\angle EDF=90°$ 4 个面的面积 S_1，S_2，S_3 和 S 3 个“直角面” S_1，S_2，S_3 和 1 个“斜面” S

7. 合情推理的含义与特点

归纳和类比是合情推理常用的思维方法，教科书从归纳和类比的推理过程中概括出合情推理的描述性定义. 教学中可以先引导学生回顾例 1～例 4 的推理过程，然后总结出合情推理的含义. 同时，还可以向学生说明，由合情推理的过程可以看出，合情推理的结论往往超越了前提所涵盖的范围，带有猜想的成分，因此推理所得的结论未必正确；但是，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供证明的思路和方向的作用.

8. 例 4 的编写意图和教学建议

例 4 的解答需要同时应用归纳推理和类比推理，即由移动 1，2，3，4 个金属片的简单情形，到移动 n 个金属片的情形，需要归纳推理；而由移动 2 个金属片的情形，到移动 3 个金属片的情形，再到移动 4 个金属片的情形，需要类比推理.

本例的教学可以参考下面的顺序：

首先，先分析移动金属片的规则，然后从移动 2 个金属片的情形入手，画简图表示移动的方法；

接着，让学生用类比推理猜想移动 3 个金属片的方法和次数，这里类比的关键是把上面两个金属片作为一个整体，把问题归结为移动 2 个金属片的情形，而对于上面两个金属片的移动也可以归结为移动 2 个金属片的情形，然后让学生画简图或动手实验验证他们的猜想；

类似地，让学生用类比推理猜想移动 4 个金属片的方法和次数，这里类比的关键是如何把当前的情形（移动 4 个金属片）归结为前一种情形（移动 3 个金属片），这里也要让学生画简图或动手实验验证他们的猜想；

最后，让学生从移动 1，2，3，4 个金属片所需的次数中总结规律，归纳出移动 n 个金属片所需次数的通项公式. 显然，归纳出通项公式时，将 1，3，7，15 改写为 2^1-1，2^2-1，2^3-1，2^4-1 是关键，这不仅需要有较强的观察能力，而且需要有对数的敏感性.

本例的解答过程不仅获得了移动 1，2，3，4 个金属片所需的次数，还获得了移动它们的方法，因此例 4 之后的探究栏目的设计意图是，让学生从移动 1，2，3，4 个金属片的方法中总结规律，归纳对 n 个金属片都适用的移动方法，并且从中获得移动 n 个金属片所需次数的递推公式. 从这个递推公式出发，用后面将学习的数学归纳法，可证例 4 中获得的移动 n 个金属片所需次数的通项公式是正确的.

2.1.2 演绎推理

与合情推理一样，演绎推理也是学生在学习和生活中经常使用的一种推理形式. 特别地，数学证明主要通过演绎推理来进行. 学生对演绎推理并不陌生，这里学习演绎推理的目的，除了了解演绎推理在证明中的应用外，主要是为了了解演绎推理的含义、基本方法及其与合情推理的联系与差异.

1. 演绎推理的含义和“三段论”

教科书以 5 个生活、数学中的例子概括出了演绎推理的含义. 教学中可以让学生分析这 5 个例子的推理过程，明确每一个例子的推理形式，从中概括出演绎推理的推理过程.

教学中，应该让学生结合具体例子体会演绎推理是由一般到特殊的推理，这也决定了演绎推理的结论不会超出前提所界定的范围，所以其前提和结论之间的联系是必然的. 因此，在演绎推理中，只要前提和推理形式正确，结论就必然正确.

“三段论”是演绎推理的一般模式. 教科书以“三段论”来说明演绎推理的特点、作用以及推理过程中可能犯的典型错误. 教学中要先结合具体例子明确说明“三段论”中“大前提”“小前提”和“结

论”的含义，以及“三段论”的推理过程，再结合例 5 和例 6 具体分析应用“三段论”解决问题的思路. 在应用“三段论”进行推理的过程中，大前提、小前提或推理形式之一错误，都可能导致结论错误. 例 6 之后的“思考”栏目就是一个这样的反例，教师还可以举一些学生作业中的推理错误，让学生自己分析错误的原因，以进一步说明这个问题.

2. 例 5 和例 6 的编写意图和教学建议

例 5 和例 6 都是学生熟悉的证明题，教科书的编写意图是挖掘证明过程中所包含的推理思路，使学生明确演绎推理的基本过程，突出演绎推理中的“大前提”“小前提”和“结论”. 事实上，许多学生能写出证明过程但不一定非常清楚证明的逻辑规则，因此他们在表述证明过程时，往往显得随心所欲、杂乱无章. 通过这两个例子的教学，应当使这种状况得到改善. 教学中，可以先让学生自己写出证明过程，再标明相应的大前提、小前提和结论. 另外，对什么时候可以省略大前提也要有一个交待.

教学中可以视需要适当补充一些证明题，要求学生给出证明，并写出其中的大前提、小前提和结论.

3. 合情推理与演绎推理的联系与差异

在合情推理和演绎推理的教学之后，应对这两种推理的联系与差异进行总结，使学生进一步认识它们各自的特点和相互关系.

总体来说，从推理形式和推理所得结论的正确性上讲，二者有差异；从二者在认识事物的过程中所发挥的作用的角度考虑，它们又是紧密联系、相辅相成的. 合情推理的结论需要演绎推理的验证，而演绎推理的思路一般是通过合情推理获得的. 正如波利亚所说的：“论证推理（即演绎推理）是可靠的、无疑的和终决的. 合情推理是冒险的、有争议的和暂时的. 它们相互之间并不矛盾，而是相互补充的.”

对于数学学习来说，演绎推理可以验证合情推理的结论的正确性，合情推理可以为演绎推理提供方向和思路. 波利亚认为：“一个对数学有抱负的学生，不管他将来的兴趣如何，都应该力求学习两种推理——论证推理（演绎推理）和合情推理. 前者是他专业也是他从事的那门科学的特殊标志，后者则是他取得真正的成就所必不可少的.”因此，通过本节的学习，要让学生不仅学会证明，也要学会猜想.

4. 关于“阅读与思考　平面与空间中的余弦定理”

与例 3 类似，教科书先从当前需要（类比三角形的余弦定理，猜想“四面体的余弦定理”）出发，将三角形与四面体类比，得到了两组类比关系，即三角形的 3 条边的边长对应四面体的 4 个面的面积，三角形的两边夹角对应四面体两个面所成的二面角；然后从三角形的余弦定理出发，猜想得到“四面体的余弦定理”. 类似地，教科书从证明方法的角度作类比，利用上述两组类比关系，由证明三角形的余弦定理的方法，得到了证明“四面体的余弦定理”的方法.

四、习题解答

练习（第 77 页）

1. 由 $a_1=a_2=a_3=a_4=1$，猜想 $a_n=1$.
2. 相邻两行数之间的关系是：每一行首尾的数都是 1，其他的数都等于上一行中与之相邻的两个数的和.

3. 设 $V_{O\text{-}P_1Q_1R_1}$ 和 $V_{O\text{-}P_2Q_2R_2}$ 分别表示四面体 $O\text{-}P_1Q_1R_1$ 和 $O\text{-}P_2Q_2R_2$ 的体积，则

$$\frac{V_{O\text{-}P_1Q_1R_1}}{V_{O\text{-}P_2Q_2R_2}}=\frac{OP_1}{OP_2}\cdot\frac{OQ_1}{OQ_2}\cdot\frac{OR_1}{OR_2}.$$

练习（第 81 页）

1. 略.

2. 因为通项公式为 a_n 的数列$\{a_n\}$，若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$，其中 p 是非零常数，则$\{a_n\}$是等比数列. …… 大前提

   又因为 $cq\neq0$，则 $q\neq0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{cq^{n+1}}{cq^n}=q$. …………………………………… 小前提

   所以通项公式为 $a_n=cq^n$（$cq\neq0$）的数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. …………………………… 结论

3. 由 $AD>BD$，得到$\angle ACD>\angle BCD$ 的推理是错误的. 因为这个推理的大前提是“在同一个三角形中，大边对大角”，小前提是“$AD>BD$”，而 AD 与 BD 不在同一个三角形中.

习题 2.1（第 83 页）

A 组

1. $a_n=\frac{2}{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

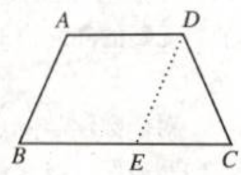
2. $F+V=E+2$.

3. 当 $n\leqslant6$ 时，$2^{n-1}<(n+1)^2$；当 $n=7$ 时，$2^{n-1}=(n+1)^2$；当 $n\geqslant8$ 时，$2^{n-1}>(n+1)^2$.

4. $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_n}\geqslant\frac{n^2}{(n-2)\pi}$（$n>2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）.

5. $b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_{17-n}$（$n<17$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）.

6. 如图，作 $DE//AB$ 交 BC 于点 E.



（第 6 题）

   因为两组对边分别平行的四边形是平行四边形，
   又因为$AD//BE$，$AB//DE$，
   所以$ABCD$ 是平行四边形.
   因为平行四边形的对边相等，
   又因为$ABCD$ 是平行四边形，
   所以$AB=DE$.
   因为与同一条线段等长的两条线段的长度相等，
   又因为$AB=DE$，$AB=DC$，
   所以$DE=DC$.
   因为等腰三角形的两底角是相等的，
   又因为$\triangle DEC$ 是等腰三角形，
   所以$\angle DEC=\angle C$.
   因为平行线的同位角相等，
   又因为$\angle DEC$ 与$\angle B$ 是同位角，
   所以$\angle DEC=\angle B$.
   因为等于同角的两个角是相等的，
   又因为$\angle DEC=\angle C$，$\angle DEC=\angle B$，
   所以$\angle B=\angle C$.

B 组

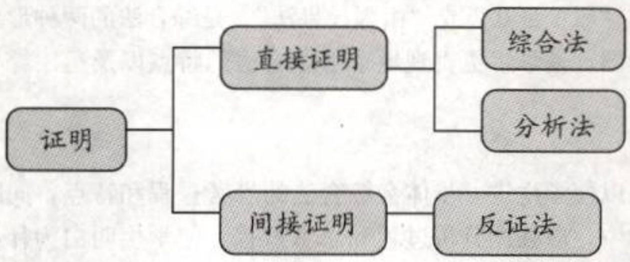
1. 由 $S_1=-\frac{2}{3}$，$S_2=-\frac{3}{4}$，$S_3=-\frac{4}{5}$，$S_4=-\frac{5}{6}$，$S_5=-\frac{6}{7}$，猜想 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$.

2. 略.

3. 略.

2.2　直接证明与间接证明

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——综合法和分析法，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解综合法、分析法和反证法的思考过程、特点.

2. 难点：根据问题的特点，结合综合法、分析法和反证法的思考过程、特点，选择适当的证明方法或把不同的证明方法结合使用.

三、编写意图与教学建议

在以前的学习中，学生已经能应用综合法、分析法和反证法证明数学命题，但他们对这些证明方法的内涵和特点不一定非常清楚. 本节结合学生已学过的数学知识，通过实例引导学生分析这些基本证明方法的思考过程与特点，并归纳出操作流程图，使他们在以后的学习和生活中，能自觉地、有意识地运用这些方法进行数学证明，养成言之有理、论证有据的习惯.

2.2.1　综合法和分析法

分析法和综合法，是直接证明中最基本的两种证明方法，也是解决数学问题时常用的思维方式.

1. 综合法

在以前的学习中，学生积累了较多的用综合法证明数学命题的经验，但这些经验是零散的、不系统的，他们也没有进行过综合法这一知识的较系统的学习. 由此，教科书借助学生熟悉的数学实例，引导学生归纳和总结综合法的特点，促使他们形成对综合法的较完整的认识.

（1）通过实例，概括综合法的特点

教科书借助“已知 a，$b>0$，求证 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc$”这一简单而又典型的数学问题，引导学生分析综合法的特点. 教学中，可以先让学生独立分析，再进行讨论，从而明确教科书中给出的证法的特点.

首先，分析待证不等式的特点：不等式的右端是 3 个数 a，b，c 乘积的 4 倍，左端为两项之和，

其中每一项都是一个数与另两个数的平方和之积．据此，只要把两个数的平方和转化为这两个数的积的形式，就能使不等式左、右两端具有相同形式．

其次，寻找转化的依据及证明中要用的其他知识：应用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 就能实现转化，不等式的基本性质是证明的依据．

最后，给出具体证明：由 $b^2+c^2\geqslant 2bc$ 及条件 $a>0$，根据不等式的基本性质得 $a(b^2+c^2)\geqslant 2abc$；类似地，得 $b(c^2+a^2)\geqslant 2abc$．从而有 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc$．

这样，从已知条件、不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 和不等式的基本性质，通过推理得出结论成立．

通过上述分析，可以概括出综合法的特点：从已知条件和某些学过的定义、公理、定理等出发，通过推理得出结论．

教科书中脚注所说的“顺推证法”或“由因导果法”，是综合法的两种形象化的说法．

教科书中给出的流程图，使学生更直观地了解综合法的特点以及运用综合法分析问题、解决问题的思考过程．

（2）例 1 的教学分析

通过例 1 的教学，可以使学生进一步体会综合法的思考过程和特点，同时为学生用综合法证明数学命题起示范作用．教学中，应强调分析过程和思考过程，使学生明白为什么采用综合法，以及运用综合法进行证明的过程．

在证明数学命题时，经常需要把已知条件进行语言转换，如把文字语言转换成符号语言，或把符号语言转换成图形语言等，还要把命题中的隐含条件显性化．本例中，首先把已知条件进行语言转换，即将 A，B，C 成等差数列转化为 $2B=A+C$，将 a，b，c 成等比数列转化为 $b^2=ac$；接着把隐含条件显性化，将 A，B，C 为$\triangle ABC$ 的内角明确表示为 $A+B+C=\pi$；然后再寻找条件与结论的联系：利用余弦定理把边和角联系起来，建立边和角之间的关系，进而判断三角形的形状．这样，就可以尝试直接从已知条件和余弦定理出发，运用综合法来推导出结论．

另外，学生在应用综合法证明时，经常出现因果关系不清晰、逻辑表达混乱的情况．为了帮助学生正确使用综合法，本例的教学中，可以采取让学生先独立分析、证明，再集体讨论，纠正不正确的表达，给出因果关系明确、简洁而正确的表达方法，让学生在修正自己的证明过程中学会规范化表达．

2. 分析法

这部分的编写方式与综合法基本类似．

（1）通过实例，概括分析法的特点

教科书借助基本不等式$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a>0$，$b>0$）的证明过程，引导学生了解分析法的特点．教学中可以先让学生回顾用分析法证明这一不等式的过程，再让他们总结这类证法的特点：要证明结论成立，逐步寻求推证过程中，使每一步结论成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止．

教科书中脚注所说的“逆推证法”或“执果索因法”，是分析法的两种形象化的说法．

与综合法类似，教科书中给出了分析法的流程图，使学生更直观地了解分析法的特点及其思考过程．

（2）例 2 的教学分析

当已知条件与结论之间的联系不够明显、直接，证明中需要用哪些知识不太明确具体时，往往采用从结论出发，结合已知条件，逐步反推，寻求使当前命题成立的充分条件的方法．其中，既有一般数学思想方法的作用，也有条件和已有相关知识的指引．

例 2 求证一个不等式成立．由于本例不易发现证明的出发点，所以用综合法直接证明比较困难．因此，本例从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题．如果能够肯定这些充分条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立．教学中，应引导学生体验分析法的特点：从结论出发，逐步寻求一个明显成立的充分条件．

一般地，对于数学思想方法的教学，都应当采取先让学生自己独立思考、实践，再讨论、归纳、概括的方法进行，因为思想方法不能靠讲解、灌输、记忆而学会，只能通过在实践基础上的领悟而掌握．

3. 例 3 的教学分析

本例是为了说明综合法和分析法结合使用而设置的．

从学生的学习经历看，他们对两种方法结合使用是非常熟悉的．因此，本例的教学可以采取与前面例题同样的处理方法，即先让学生自己给出证明，说明证明中使用的方法，再总结归纳，概括出两种方法结合使用的思维特点．

本例中，从条件出发得出 $4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$ 后，再继续向结论转化，虽然可以成功，但有一定困难，它比从结论出发得到 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$ 要复杂得多，技巧性也强得多．所以，在使用综合法出现困难时，及时调整思路，分析一下要证明结论需要怎样的充分条件是明智之举．这种思想可以形象地描述为：发展条件、转化结论、寻找联系．教学中要注意引导学生充分体会本例中渗透的这一思想，必要时，可以适当补充一些典型例题．另外还要使学生明确，牢固掌握基础知识是灵活应用两种方法证明问题的前提，本例中，和（差）角的三角公式、“切化弦”的基本方法以及代数变换的基本技能等都发挥着重要作用．

2.2.2　反证法

学生从初中开始就对反证法有所接触．反证法的逻辑规则并不复杂，但用反证法证明数学命题却是学生学习的一个难点．究其原因，主要是反证法的应用需要逆向思维，但在中小学阶段，逆向思维的训练和发展都是不充分的．

1. 通过实例概括反证法的特点

教科书通过“思考”引出反证法．用反证法证明这个问题的关键是将问题“数学化”，转化为“奇偶分析”，导出矛盾．“奇偶分析”是学生不习惯的，教学中应当进行适当引导．教学中，可以引导学生用列举的方法直接给出证明，并比较两种证明方法的各自特点，从中体验反证法的思考过程和特点：先假设要证的命题不成立，以此为出发点，结合已知条件，经过正确的推理，得出矛盾，因此说明假设错误，从而得到原命题成立．

使用反证法进行证明的关键是在正确的推理下得出矛盾．这个矛盾可以是与已知条件矛盾，或与假设矛盾，或与定义、公理、定理、事实矛盾等．教学时可以结合例题的讲解引导学生归纳出这个关键点．

反证法主要适用于以下两种情形：

①要证的结论与条件之间的联系不明显，直接由条件推出结论的线索不够清晰；

②如果从正面证明，需要分成多种情形进行分类讨论，而从反面进行证明，只要研究一种或很少的几种情形．

2. 例题的教学分析

例 4 中，要证的结论与条件之间的联系不明显，直接由条件推出结论的线索不够清晰，于是考虑采用反证法证明本例．

用反证法证明例 4 的难点是如何由假设推出矛盾．教学中可以先让学生根据反证法的基本规则思考这样的问题：在 $a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a/\!/b$ 的条件下，若假设 a 与 α 有公共点，可以推出什么矛盾，如何推出矛盾呢？然后再引导学生思考：如果我们想推出与已知条件“$a/\!/b$”矛盾，应该如何做呢？由空间中两条直线的位置关系可知，只要推出“a 与 b 成异面直线”或“a 与 b 相交”即可．教科书利用构造平面的方法推出“a 与 b 相交”．教学中还可以让学生思考其他的方法．例如，可以先引导学生回忆直线与平面的位置关系有且只有三种：直线在平面内、直线与平面相交和直线与平面平行，然后由假设“α 与 a 有公共点”，可得 a 与 α 相交于一点．设 $a\cap\alpha=P$，若 $P\in b$，则 $a\cap b=P$，与 $a/\!/b$ 矛盾；若 $P\notin b$，则 a 与 b 成异面直线，也与 $a/\!/b$ 矛盾．

例 5 是一个典型的使用反证法证明的问题．本例的难点是学生对无理数的了解很少，有理数的性质也接触得很少，许多学生甚至对有理数的表示也不太熟悉，因此，用反证法得出矛盾的方向很不明确．教学中可以进行如下引导：

从实数分类来说，一个数不是无理数就一定是有理数；

关于有理数，我们研究过哪些问题？——有理数的定义、表示、性质、运算、运算律……

如果$\sqrt{2}$是有理数，如何利用已有知识引出矛盾呢？——因为只有一个数，所以数的运算、运算律等知识无法使用，只有在有理数的定义、表示、性质上找突破口；

假设$\sqrt{2}$是有理数，则存在互质的正整数 m，n，使$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，如何从这个等式中得出矛盾？——可以从“m，n 为互质的正整数”得到启发，通过“奇偶数分析”得出矛盾．

由于学生对反证法不太熟悉，因此教学中要多给学生练习的机会，使学生在动手证明的过程中逐步体会这种证明方法的内涵，建立应用反证法的感觉．下面的问题可作为课堂补充例题．

补充例题 已知 x，$y>0$，且 $x+y>2$．试证：

$\frac{1+x}{y}$，$\frac{1+y}{x}$中至少有一个小于 2．

四、教学设计案例

分析法

1. 教学任务分析

学生在过去的学习中经常使用分析法，但他们对分析法的认识是经验型的、不充分的．本节课要结合已经学过的数学实例，引导他们了解分析法的思考过程和特点，使他们对分析法有一个较完整的认识．

2. 教学重点、难点

重点：（1）了解分析法的思考过程和特点；

（2）运用分析法证明数学命题．

难点：对分析法的思考过程和特点的概括．

3. 教学基本流程

通过实例，概括分析法的思考过程、特点

↓

总结分析法的操作流程框图

↓

分析法证明数学命题举例

4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师生活动
(1) 你能回顾一下基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的证明过程吗？	给出分析法的实例，为分析其思考过程和特点作准备.	学生回顾、写出证明过程.
(2) 你能分析一下这个证明的思考过程和特点吗？	引导学生概括分析法的特点.	教师引导学生总结、交流，得出分析法的特点. 让学生阅读教科书第86页“分析法”的开篇语.
(3) 你能用框图表示分析法的思考过程、特点吗？	使分析法的思考过程和特点得到形象表示，以便于学生掌握.	师生共同完成.
(4) 例 2.	加深学生对分析法的认识，提高他们根据条件、结论的特点寻找证明方法的能力.	教师引导学生分析问题的特点，由学生自己写出分析过程和证明过程，然后再进行交流. 教师要注意引导学生思考分析的方向.
(5) 小结.	进一步明确分析法的思考过程和特点.	教师引导学生总结分析法的思考过程和特点，要关注用分析法证题时可能出现的错误（充分条件不充分）.

五、习题解答

练习（第 89 页）

1. 证明：因为 $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1\cdot\cos 2\theta=\cos 2\theta$，

   所以，原命题得证.

2. 证明：要证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，只需证 $(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，即证 $13+2\sqrt{42}>13+4\sqrt{10}$，即证$\sqrt{42}>2\sqrt{10}$，只需证 $(\sqrt{42})^2>(2\sqrt{10})^2$，即证 $42>40$，这是显然成立的.

   所以，命题得证.

3. 证明：因为

$$(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2=(2\sin\alpha)^2(2\tan\alpha)^2=16\sin^2\alpha\tan^2\alpha,$$

又因为

$$\begin{aligned}16ab&=16(\tan\alpha+\sin\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)=16\,\frac{\sin\alpha\ (1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\\&=16\,\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=16\,\frac{\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=16\sin^2\alpha\tan^2\alpha,\end{aligned}$$

从而 $(a^2-b^2)^2=16\sin^2\alpha\tan^2\alpha$.

所以，命题成立.

说明 进一步熟悉运用综合法、分析法证明数学命题的思考过程与特点.

练习（第 91 页）

1. 证明：假设$\angle B$不是锐角，则$\angle B \geqslant 90°$. 因此$\angle C+\angle B \geqslant 90°+90°=180°$. 这与三角形的内角和等于 180°矛盾. 所以，假设不成立.

   从而，$\angle B$一定是锐角.

2. 证明：假设$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$成等差数列，则$2\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. 所以$(2\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，化简得$5=2\sqrt{10}$，从而$5^2=(2\sqrt{10})^2$，即$25=40$，这是不可能的. 所以，假设不成立.

   从而，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$不可能成等差数列.

说明 进一步熟悉运用反证法证明数学命题的思考过程与特点.

习题 2.2（第 91 页）

A 组

1. 证明：由于$a\neq 0$，因此方程至少有一个根$x=\dfrac{b}{a}$.

   假设方程不止一个根，则至少有两个根，不妨设x_1，x_2是它的两个不同的根，则

   $$ax_1=b, \qquad ①$$

   $$ax_2=b. \qquad ②$$

   ①−②得

   $$a(x_1-x_2)=0,$$

   因为$x_1\neq x_2$，所以$x_1-x_2\neq 0$，从而$a=0$，这与已知条件矛盾，故假设不成立.

   所以，当$a\neq 0$时，方程$ax=b$有且只有一个根.

2. 证明：因为

   $$(1+\tan A)(1+\tan B)=2,$$

   展开得

   $$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2,$$

   即

   $$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B. \qquad ①$$

   假设$1-\tan A\tan B=0$，则$\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=0$，即$\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}=0$，所以$\cos(A+B)=0$.

   因为A，B都是锐角，所以$0<A+B<\pi$，从而$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，与已知矛盾. 因此$1-\tan A\tan B\neq 0$.

   ①式变形得

   $$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$$

   即

   $$\tan(A+B)=1.$$

   又因为$0<A+B<\pi$，所以$A+B=\dfrac{\pi}{4}$.

说明 本题也可以把综合法和分析法结合使用完成证明.

3. 证明：因为

   $$\frac{1-\tan\alpha}{2+\tan\alpha}=1,$$

所以

$$1+2\tan\alpha=0,$$

从而

$$2\sin\alpha+\cos\alpha=0.$$

另一方面，要证

$$3\sin 2\alpha=-4\cos 2\alpha,$$

只要证

$$6\sin\alpha\cos\alpha=-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

即证

$$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0,$$

即证

$$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0.$$

由 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 可得，$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0$ 成立，于是命题得证.

说明　本题可以单独使用综合法或分析法进行证明，但把综合法和分析法结合使用进行证明的思路更清晰.

4. 证明：因为 a，b，c 的倒数成等差数列，所以

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

假设 $B<\frac{\pi}{2}$ 不成立，即 $B\geqslant\frac{\pi}{2}$，则 B 是 $\triangle ABC$ 的最大内角，因此 $b>a$，$b>c$（在三角形中，大角对大边），从而

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}>\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}.$$

这与 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 矛盾，因此假设不成立.

所以 $B<\frac{\pi}{2}$.

B 组

1. 证明：要证 $s<2a$，由于 $s^2=2ab$，所以只需证 $s<\frac{s^2}{b}$，即证 $b<s$.

因为 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，所以只需证 $2b<a+b+c$，即证 $b<a+c$.

由于 a，b，c 为一个三角形的三条边，所以上式成立．于是原命题成立.

2. 证明：由已知条件得

$$b^2=ac, \quad ①$$
$$2x=a+b,\ 2y=b+c. \quad ②$$

要证

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2,$$

只要证

$$ay+cx=2xy,$$

只要证

$$2ay+2cx=4xy.$$

由①②得

$$2ay+2cx=a(b+c)+c(a+b)=ab+2ac+bc,$$
$$4xy=(a+b)(b+c)=ab+b^2+ac+bc=ab+2ac+bc,$$

所以 $2ay+2cx=4xy$. 命题得证.

3. 证明：由

$$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$$

得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

即

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha. \quad ①$$

要证

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta),$$

即证

$$3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha],$$

即证

$$3[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

化简得

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha.$$

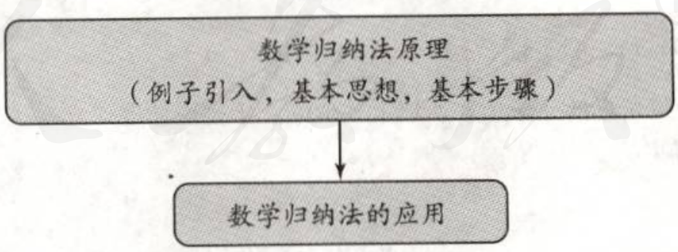
这就是①式.

所以，命题成立.

说明 用综合法和分析法证明命题时，经常需要把两者结合起来使用.

2.3 数学归纳法

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：借助具体实例了解数学归纳法的基本思想，掌握它的基本步骤，运用它证明一些与正整数 n（n 取无限多个值）有关的数学命题.

2. 难点：(1) 学生不易理解数学归纳法的思想实质，具体表现在不了解第二个步骤的作用，不易根据归纳假设作出证明；

（2）运用数学归纳法时，在“归纳递推”的步骤中发现具体问题的递推关系.

三、编写意图与教学建议

数学推理中，常用的方法是演绎法和归纳法，归纳推理又可以分为完全归纳法（枚举法）和不完全归纳法. 完全归纳法所得出的结论是可靠的，因为它考察了问题涉及的所有对象；不完全归纳法得出的结论不一定可靠，因为它只考察了某件事情的部分对象. 数学问题中，有一类问题是与自然数有关的命题，因为自然数有无限多个，我们不可能对所有自然数进行一一验证，所以用完全归纳法是不可能的. 由于只对部分自然数验证得到结论是不一定可靠的，因此就需要研究一种新的方法——数学归纳法.

数学归纳法是一种特殊的直接证明的方法. 在证明一些与正整数 n（n 取无限多个值）有关的数学命题时，数学归纳法往往是非常有用的研究工具，它通过有限个步骤的推理，证明 n 取无限多个正整数的情形.

本节分为两部分：第一部分主要内容是借助具体实例归纳出数学归纳法的基本原理、步骤；第二部分的重点是用数学归纳法证明一些简单的数学命题，教科书安排了两个例题，通过证明数学命题巩固对数学归纳法原理的认识.

1. 数学归纳法基本原理的得出

教科书的编写思路是：问题情境引发数学归纳法的学习欲望——多米诺骨牌蕴含的原理分析——用多米诺骨牌原理解决数学问题——从具体事例中概括出数学归纳法.

首先，教科书通过已有问题说明探索新的证明方法的必要性.

对于数列 $\{a_n\}$，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$（$n=1$，2，…），通过对前 4 项的归纳，猜想其通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n}$，这里使用了不完全归纳法，因而不能肯定它对后续的所有项都成立，所以需要寻找新的方法加以证明. 教科书通过这个问题，不但引发了学生学习数学归纳法的欲望，而且指明了寻求新方法的方向：通过有限个步骤的推理，证明 n 取所有正整数时猜想都成立.

其次，详细分析“多米诺骨牌”全部倒下的原理.

教科书通过“思考”，引导学生分析使“多米诺骨牌”全部倒下的两个条件：

① 第一块骨牌倒下；

② 任意相邻的两块骨牌，前一块倒下一定导致后一块倒下.

并通过“思考”引导学生深入分析条件②的作用：给出一个递推关系.

多米诺骨牌游戏是递推思想的一个模型. 事实上，条件①②就是数学归纳法原理的雏形.

再次，利用“多米诺骨牌”原理证明关于数列的猜想.

教科书通过“思考”，引导学生通过类比，借助多米诺骨牌游戏全部倒下的原理，证明数列的通项公式是 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 这个猜想.

这样，教科书从生活实例和证明数学命题两个方面为给出数学归纳法原理奠定了坚实基础.

最后，给出数学归纳法的原理.

有了上述铺垫，数学归纳法基本原理的得出是非常自然的. 形象地说，数学归纳法的基本原理相当于有无限多张牌的多米诺骨牌游戏，其核心是归纳递推.

应当注意的是，数学归纳法的理论根据是皮亚诺公理（见拓展资源），这里仅仅是结合具体问题归纳出数学归纳法的原理.

2. 对数学归纳法基本原理的教学建议

教学中，要强调用数学归纳法进行证明时，“归纳奠基”和“归纳递推”两个步骤缺一不可. 其中第一步是命题递推的基础，第二步是命题递推的根据. 只有把两个步骤中的结论结合起来，才能断定命题对所有自然数都成立. 具体地，可作如下说明.

(1) 第一步——归纳奠基

学生初学数学归纳法时，往往把注意力集中在第二步（归纳递推）上，而对第一步（归纳奠基）感到可有可无. 为使学生对此能有所认识，教学中应强调奠基的作用，说明没有它，证明就如同空中楼阁，是不可靠的. 为使学生加深印象，教师可以结合反例进行说明. 例如，“奇数是 2 的倍数”显然是个假命题，但是如果没有第一步奠基，直接假设“如果奇数 k 是 2 的倍数（这是一个不合实际的假设)”，却能推出“那么后一个奇数 $k+2$ 也是 2 的倍数”. 教学中还应提醒学生：在用数学归纳法进行证明时，第一步从 n 等于几开始，要根据具体问题而定. 一般地，如果要证明的命题是对全体正整数都成立的，则要从 $n=1$ 证起；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的全体正整数都成立，则要从 $n=n_0$ 证起；如果要证明的命题是对全体自然数（包括 0）都成立的，则要从 $n=0$ 证起.

(2) 第二步——归纳递推

这一步中，学生往往会产生这样的疑惑：为什么可以先假设 $n=k$（$k\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}^*$）时命题成立呢？“假设”怎么可以作为条件来使用呢？教学中应使学生明白，这一步实际上是证明一个命题：“若 $n=k$（$k\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}^*$）时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立”，其本质是证明一个递推关系，归纳递推的作用是从前往后传递，有了这种向后传递的关系，就能从一个起点（例如 $n=1$）不断发展，以至无穷. 如果没有它，即使已经验证了命题对许多正整数 n 都成立，也不能保证命题对后面的所有正整数都成立. 教学中，也可以通过具体例子对此进行说明. 例如，“n^2+n+11 是质数”这个命题对于 $n=1$，2，3，…，9 都成立，但是对于 $n=10$ 却不成立，因为 $10^2+10+11=121=11^2$ 是一个合数.

用数学归纳法证明命题时，难点和关键都在第二步，而这一步主要在于合理运用归纳假设，即以“$n=k$ 时命题成立”为条件，结合其他数学知识，证明“当 $n=k+1$ 时命题成立”. 学生往往不会使用归纳假设，即在证明中不使用“$n=k$ 时命题成立”这个条件，而直接将 $n=k+1$ 代入命题，便断言此时命题成立，从而得出原命题成立的结论. 教学中要引导学生分析这样的“证明”中存在的问题，即由此不能得出递推关系

$$“n=k\text{ 时命题成立}\Rightarrow n=k+1\text{ 时命题也成立}”,$$

因此证明并没有完成.

(3) 数学归纳法的适用范围

教学时要使学生明确，数学归纳法一般被用于证明某些与正整数 n（n 取无限多个值）有关的数学命题，例如教科书中所举的例题. 但是，并不能简单地说所有与正整数 n（n 取无限多个值）有关的数学命题都可以用数学归纳法证明，例如用数学归纳法证明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的单调性就难以实现. 一般说，从 $n=k$ 时的情形过渡到 $n=k+1$ 时的情形，如果问题中存在可利用的递推关系，则数学归纳法有用武之地，否则使用数学归纳法就有困难.

对数学归纳法有一个正确的整体认识，对于提高使用数学归纳法的能力很重要.

3. 对例题的说明

例 1 是证明等式的问题，安排这个例题的意图是使学生熟悉用数学归纳法证明数学命题的过程及表述规范. 教学中需要引导学生注意：

(1) 在第一步奠基中，验证 $n=1$ 时命题成立，即证明命题“$1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}$”.

(2) 在第二步归纳递推中，就是要证明命题“假设 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，那么 $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$”. 证明的关键是，如何从 $n=k$ 时的情形过渡到 $n=k+1$ 时的情形，即：要证明 $n=k+1$ 时等式成立，应如何利用 $n=k$ 时等式成立这个假设.

(3) 完成第一步、第二步后，必须要下结论，其格式为：根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，这样才算完成了证明.

例 2 是一个数列的问题，分为两部分：先运用归纳推理猜想数列前 n 项和 S_n 的表达式，再用数学归纳法进行证明. 一般说来，数学研究与发现往往包括两个要素——发现结论与证明结论（两者通常交织在一起），发现结论往往通过合情推理，结论的正确性需要通过逻辑证明来确认. 安排这个例题的意图就是使学生经历一次数学研究与发现的完整过程，并进一步熟悉数学归纳法. 教学中，应引导学生关注两个问题：

(1) 猜想 S_n 的表达式的关键是猜想其分母的表达式. 观察 S_1，S_2，S_3，S_4 的分母可以发现，第一项为 4，后面的每一项比前一项增加 3，于是，我们猜想：S_n 的分母是首项为 4，公差为 3 的等差数列. 写出这个等差数列的通项公式后，就容易猜想出 S_n 的表达式；

(2) 用数学归纳法证明时，要注意从 $n=k$ 时的情形到 $n=k+1$ 时的情形是怎样过渡的，即要证明 $n=k+1$ 时等式成立，应如何利用 $n=k$ 时等式成立这个假设.

四、习题解答

练习（第 95 页）

1. 先证明：首项是 a_1，公差是 d 的等差数列的通项公式是 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=a_1$，右边 $=a_1+(1-1)d=a_1$，因此，左边 $=$ 右边.

所以，当 $n=1$ 时命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$a_k=a_1+(k-1)d.$$

那么，

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_k+[(k+1)-1]d.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据 (1) 和 (2)，可知命题对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

再证明：该数列的前 n 项和的公式是 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=S_1=a_1$，

$$右边=1\times a_1+\frac{1\times(1-1)}{2}d=a_1,$$

因此，左边 $=$ 右边. 所以，当 $n=1$ 时命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d.$$

那么，

$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d+a_1+[(k+1)-1]d$$

$$=(k+1)d+k\left[\frac{(k-1)}{2}+1\right]d=(k+1)d+\frac{(k+1)k}{2}d.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据（1）和（2），可知命题对任何 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 略.

习题 2.3（第 96 页）

A 组

1. (1) 略.

(2) 证明：① 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1^2=1$，因此，左边$=$右边.

所以，当 $n=1$ 时等式成立.

② 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

那么，

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

所以，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据①和②，可知等式对任何 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

(3) 略.

2. $S_1=\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$,

$S_2=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$,

$S_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=1-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}$.

由此猜想：$S_n=1-\frac{1}{n+1}$.

下面我们用数学归纳法证明这个猜想.

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=S_1=\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，右边$=1-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，因此，左边$=$右边.

所以，当 $n=1$ 时猜想成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时猜想成立，即

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{k+1}.$$

那么，

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=1-\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+2-1}{k+2}=1-\frac{1}{k+2}.$$

所以，当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

根据（1）和（2），可知猜想对任何 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

B 组

1. 略.

2. 证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边$=1\times 1=1$，右边$=\frac{1}{6}\times 1\times(1+1)\times(1+2)=1$，因此，左边$=$右边.

所以，当 $n=1$ 时等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+k\times1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2).$$

那么，

$$\begin{aligned}&1\times(k+1)+2\times[(k+1)-1]+3\times[(k+1)-2]+\cdots+(k+1)\times1\\&=[1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)+\cdots+k\times1]+[1+2+3+\cdots+(k+1)]\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3).\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1) 和 (2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

复习参考题（第 98 页）

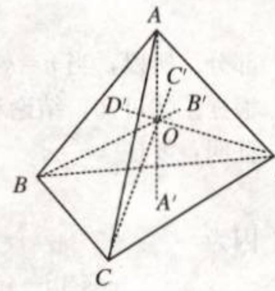
A 组

1. 图略，共有 $n(n-1)+1$（$n\in\mathbf{N}^*$）个圆圈.
2. $\overbrace{33\cdots3}^{n个}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.
3. 因为 $f(2)=[f(1)]^2=4$，所以 $f(1)=2$，$f(3)=f(2)f(1)=8$，$f(4)=f(3)f(1)=16$……猜想 $f(n)=2^n$.
4. 运算的结果总等于 1.
5. 设 O 是四面体 $ABCD$ 内任意一点，连结 AO，BO，CO，DO 并延长交对面于点 A'，B'，C'，D'，则

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

用"体积法"证明：

$$\begin{aligned}&\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}\\&=\frac{V_{O\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}+\frac{V_{O\text{-}CDA}}{V_{B\text{-}CDA}}+\frac{V_{O\text{-}DAB}}{V_{C\text{-}DAB}}+\frac{V_{O\text{-}ABC}}{V_{C\text{-}ABC}}=\frac{V_{A\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}=1.\end{aligned}$$



（第 5 题）

6. 证明：要证

$$(1+\tan A)(1+\tan B)=2,$$

只需证

$$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2,$$

即证

$$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B. \qquad ①$$

另一方面，由 $A+B=\frac{5}{4}\pi$，得 $\tan(A+B)=1$. 又因为 A，$B\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，所以

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$$

变形即得①式.

所以，命题得证.

7. 证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=-1$，右边 $=(-1)^1\times1=-1$，因此，左边 $=$ 右边.

所以，当 $n=1$ 时等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k k.$$

那么，

$$\begin{aligned}&-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}[2(k+1)-1]\\&=(-1)^k k+(-1)^{k+1}(2k+1)=(-1)^{k+1}(-k+2k+1)\\&=(-1)^{k+1}(k+1).\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1) 和 (2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

B 组

1. (1) 25 条线段，16 部分.

(2) n^2 条线段.

(3) 最多将圆分割成 $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 部分. 下面用数学归纳法证明这个结论.

① 当 $n=1$ 结论成立.

② 假设 $n=k$ 时结论成立，即：k 条线段，两两相交，最多将圆分割成 $\frac{1}{2}k(k+1)+1$ 部分.

当 $n=k+1$ 时，其中的 k 条线段 l_1，l_2，…，l_k 两两相交，最多将圆分割成 $\frac{1}{2}k(k+1)+1$ 部分，第 $k+1$ 条线段 l_{k+1} 与线段 l_1，l_2，…，l_k 都相交，最多增加 $k+1$ 个部分，因此，$k+1$ 条线段，两两相交，最多将圆分割成

$$\frac{1}{2}k(k+1)+1+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)+1$$

部分. 所以，当 $n=k+1$ 时结论成立.

根据①②可知，结论对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 证明：要证

$$\cos 4\beta-\cos 4\alpha=3,$$

因为

$$\begin{aligned}\cos 4\beta-4\cos 4\alpha&=\cos(2\times 2\beta)-4\cos(2\times 2\alpha)\\&=1-2\sin^2 2\beta-4(1-2\sin^2 2\alpha)\\&=1-8\sin^2\beta\cos^2\beta-4(1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\\&=1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)],\end{aligned}$$

只需证

$$1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]=3.$$

由已知条件得

$$\sin\alpha=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2},\ \sin^2\beta=\sin\theta\cos\theta,$$

代入上式的右端得

$$\begin{aligned}&1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta\cos\theta)+32\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta+2(1+2\sin\theta\cos\theta)(3-2\sin\theta\cos\theta)\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta+6-8\sin^2\theta\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta\\&=3.\end{aligned}$$

因此，$\cos 4\beta-\cos 4\alpha=3$.

III 自我检测题

1. 设 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，若 $x+x^{-1}=3$，猜想 $x^{2^n}+x^{-2^n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的个位数字是多少？

2. 当 $n=1$ 时，有 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$；

当 $n=2$ 时，有 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

当 $n=3$ 时，有 $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$；

当 $n=4$ 时，有 $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$.

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，你能得到什么结论？

3. 平面内的 1 条直线把平面分成两部分，2 条相交直线把平面分成 4 部分，3 条两两相交但不共点的直线把平面分成 7 部分，n 条两两相交但任意 3 条不共点的直线，把平面分成多少部分？

4. 用综合法或分析法证明：

(1) 如果 a，$b>0$，则 $\lg\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$；

(2) 求证 $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

5. 用反证法证明：如果 $x>\dfrac{1}{2}$，那么 $x^2+2x-1\neq 0$.

6. 用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

参考答案

1. 当 $n=1$ 时，有 $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=3^2-2=7$；

当 $n=2$ 时，有 $x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=7^2-2=47$；

当 $n=3$ 时，有 $x^8+x^{-8}=(x^4+x^{-4})^2-2=47^2-2=2\,207$；

当 $n=4$ 时，有 $x^{16}+x^{-16}=(x^8+x^{-8})^2-2=2\,207^2-2=4\,870\,847$；

据此猜想，得 $x^{2^n}+x^{-2^n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的个位数字是 7.

2. $(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$.

3. 设平面被 n 条直线分成 S_n 部分，则

当 $n=1$ 时，$S_1=1+1=2$；

当 $n=2$ 时，$S_2=1+1+2=4$；

当 $n=3$ 时，$S_3=1+1+2+3=7$；

当 $n=4$ 时，$S_4=1+1+2+3+4=11$.

据此猜想，得 $S_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

4. (1) 当 a，$b>0$ 时，有

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

上式两端取对数得

$$\lg\frac{a+b}{2}\geqslant\lg\sqrt{ab},$$

从而

$$\lg\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{\lg(ab)}{2}=\frac{\lg a+\lg b}{2}.$$

所以，命题得证.

(2) 要证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，只需证$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，即$2\sqrt{42}>2\sqrt{40}$，这是显然成立的. 所以，原不等式成立.

5. 证明：假设$x^2+2x-1=0$，则$x=-1\pm\sqrt{2}$.

容易看出$-1-\sqrt{2}<\frac{1}{2}$，下面证明$-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$.

因为$8<9$，所以$\sqrt{8}<\sqrt{9}$，即$2\sqrt{2}<3$，从而$\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，变形得$-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$.

综上得$x<\frac{1}{2}$，这与已知条件$x>\frac{1}{2}$矛盾. 因此，假设不成立，即原命题成立.

6. 证明：(1) 当$n=1$时，左边$=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$，右边$=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$，因此，左边=右边.

所以，当$n=1$时等式成立.

(2) 假设当$n=k$时等式成立，即

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

那么，

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\times(2k+1)}\right]+\frac{1}{(2k+1)\times(2k+3)}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)\times(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)\times(2k+3)}\\&=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)\times(2k+3)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}.\end{aligned}$$

所以，当$n=k+1$时等式也成立.

根据 (1) 和 (2)，可知等式对任何$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

Ⅳ 拓展资源

皮亚诺公理

意大利数学家皮亚诺（G. Peano，1858—1932）总结了正整数的有关性质，并提出了关于正整数的五条公理，后人称之为“皮亚诺公理”.

皮亚诺公理的内容如下：

任何一个满足下列条件的非空集合叫做正整数集合，记作$\mathbf{N}^*$：

(1) $1\in\mathbf{N}^*$；

(2) 若 $k\in\mathbf{N}^*$，则有且仅有一个正整数称为 k 的后继数，记作 $k+1$，这就是说，如果 $k=h$，那么 $k+1=h+1$；

(3) 若 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $k+1\neq1$，这就是说，任何一个正整数的后继数都不是 1；

(4) 若 $k\in\mathbf{N}^*$，$h\in\mathbf{N}^*$，且 $k+1=h+1$，则 $k=h$，这就是说，对于每一个正整数，只能是某一个正整数的后继数或者根本不是后继数；

(5) 设 M 是正整数集的一个子集，且它具有下列性质：

① $1\in M$；

② 若 $k\in M$，则 $k+1\in M$.

那么 M 是全体正整数的集合，即 $M=\mathbf{N}^*$.

这五条公理对正整数集合进行了刻画和约定，由它们可以推出正整数的各种性质.

皮亚诺公理中第五条也叫做归纳公理. 设 P 是一个与正整数有关的命题，我们把使 P 成立的所有正整数组成的集合记为 M，如果要证明 P 对于所有正整数都成立，只要证明 $M=\mathbf{N}^*$ 即可. 为此，根据归纳公理，首先证明 $1\in M$（数学归纳法中的第一步“奠基”正是进行这样的证明）；其次证明若 $k\in M$，则 $k+1\in M$（数学归纳法中的第二步“递推”正是进行这样的证明）. 这样即可得到 $M=\mathbf{N}^*$，从而证明了命题 P 对于一切正整数成立. 不难看出归纳公理是数学归纳法的理论根据，数学归纳法的两个证明步骤恰是验证这条公理所说的两个性质.

第三章
数系的扩充与复数的引入

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章学习的主要内容是数系的扩充和复数的概念，复数代数形式的四则运算.

复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充，这不仅可以使学生对于数的概念有一个初步的、完整的认识，也为进一步学习数学打下了基础. 通过本章学习，要使学生在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性，学习复数的一些基本知识，体会人类理性思维在数系扩充中的作用.

2. 学习目标

(1) 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

(2) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件.

(3) 了解复数的代数表示法及其几何意义.

(4) 能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图

数系扩充复数引入 → 复数的概念 → 复数代数形式的四则运算

2. 对内容安排的说明

本章内容分为 2 节：3.1 数系的扩充和复数的概念，3.2 复数代数形式的四则运算.

(1) 复数系是在实数系的基础上扩充而得到的. 为了帮助学生了解引入复数的必要性，了解实际需求和数学内部的矛盾在数系扩充中的作用，本章从一个思考问题开始，在问题情境中简单介绍了由实数系扩充到复数系的过程，这样不仅可以激发学生学习复数的欲望，而且也可以比较自然地进入复

数的学习之中.

复数的概念是整个复数内容的基础. 复数的有关概念都是围绕复数的代数表示形式展开的. 虚数单位、实部、虚部的命名，复数相等的充要条件，以及虚数、纯虚数等概念的理解，都应促进对复数实质的理解，即复数实际上是一有序实数对.

类比实数可以用数轴上的点表示，把复数在直角坐标系中表示出来，就得到了复数的几何表示. 用复平面内的点或平面向量表示复数，不仅使抽象的复数有了直观形象的表示，而且也使数和形得到了有机的结合.

(2) 复数代数形式的四则运算，即复数代数形式的加法、减法、乘法和除法，重点是加法和乘法. 复数加法和乘法的法则是规定的，其合理性表现在：这种规定与实数加法、乘法的法则是一致的，而且实数加法、乘法的有关运算律在这里仍然成立. 由减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算的规定，可以得到复数减法、除法的运算法则. 复数代数形式的四则运算可以类比代数式运算中的“合并同类项”“分母有理化”等，利用 $i^2=-1$，将它们归结为实数的四则运算.

复数的加法、减法运算还可以通过向量加法、减法的平行四边形法则或三角形法则来进行，这不仅又一次看到了向量这一工具的功能，也把复数及其加、减运算与向量及其加、减运算完美地统一起来.

(3) 与传统教科书的复数内容相比，这里的复数内容有了比较多的删减，教学中应严格执行《普通高中数学课程标准（实验）》的要求，不宜多作补充和延伸，也应该注意避免繁琐的计算与技巧的训练.

三、课时安排

本章教学时间约 4 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 数系的扩充和复数的概念	约 2 课时
3.2 复数代数形式的四则运算	约 2 课时

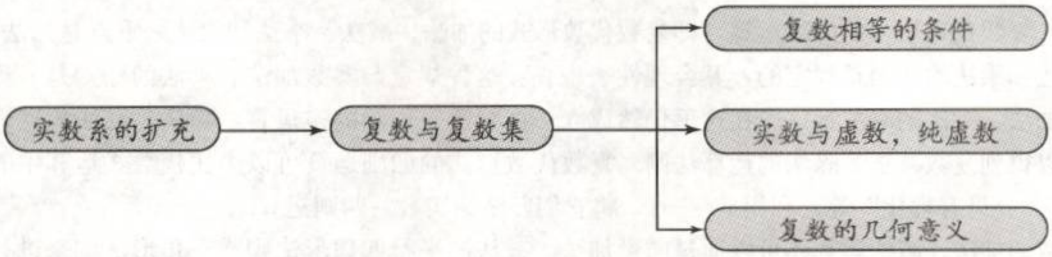
II 教科书分析

章引言通过问题情境：“在实数集内，像 $x^2+1=0$ 这样的方程是没有根的. 因此在研究代数方程的过程中，如果限于实数系，有些问题就无法解决.” 怎么使问题变得可以解决呢？引发学生对于扩充实数系的需求，同时使学生初步认识学习复数的意义. 章头图中通过两幅图提示学生，将要学习的复数与直角坐标系中的点、平面向量是密切联系的，还用火箭升空的画面显示了人类进入太空，实现了对宇宙认识的飞跃，用以比喻学习复数，将会对数的认识实现一次飞跃.

章引言中还简略介绍了复数的由来，复数在数学和其他学科中的应用，以及在进一步学习数学中的基础作用. 最后明确了本章学习的基本要求.

3.1 数系的扩充和复数的概念

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：复数的概念，复数的代数形式，复数的向量表示.
2. 难点：复数相等的条件，复数的向量表示.

三、编写意图与教学建议

3.1.1 数系的扩充和复数的概念

1. 数系的扩充

在数学中，数系的扩充必须遵循有关的原则，但把这些原则都介绍给中学生，不仅没有必要，也不会有好的效果. 教科书中只对实数系扩充到复数系的过程作了粗略的阐述. 为了承前启后，自然地引入复数，教科书首先提出了一个思考问题（用什么方法解决方程 $x^2+1=0$ 在实数集中无解的问题），目的是为了引发学生的认知冲突，激发学生把实数系进一步扩充的欲望. 然后通过回顾，提出扩充后的新数集应该怎样规定的设想.

回顾，即回顾从自然数集逐步扩充到实数系的过程，这不仅为实数系的扩充提供了类比对象，而且也为怎样扩充实数系指明了方向.

希望和设想分两个方面：

（1）由希望 $x^2+1=0$ 这样的方程有解，设想引入一个新数 i，使 i 是方程 $x^2+1=0$ 的根，即 $i^2=i\cdot i=-1$.

（2）由希望实数和新引入的数 i，要能像实数系那样进行加法、乘法运算，并希望运算时，原有的加法、乘法的运算律仍然成立，就设想依此把实数和 i 去进行运算，从而得到把实数集扩充后的新数集应该是 $\{a+bi \mid a,\ b\in \mathbf{R}\}$，这就是复数集.

由于学生对数系扩充的知识并不熟悉，教学中教师还需多作引导.

2. 复数的概念

（1）引入复数后，对形如 $a+bi$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$ 形式的数，规定了虚数单位、复数的代数形式、实部、虚部等名称. 应注意 b 称为虚部而不称为虚部系数.

(2) 当 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$ 时，两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$ 相等的充要条件实际上就是两个复数相等的定义. 由此可得到，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，

$$a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow a=0 \text{ 且 } b=0.$$

教学中还应使学生明确，这里不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求复数值的依据，即利用复数相等的条件，可以得到关于实数的方程（组），通过解方程（组）得到 a，b 的值.

(3) 需要指出的是，“一般说来，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小”. 即：若两个复数都是实数，则可以比较大小；否则，不能比较大小. 教学中不必予以展开. 因为中学生很难理解以下的原则，即不论怎样定义两个复数之间的一个关系“$<$”，都不能使这种关系同时满足实数集中大小关系的下述四条性质：

① 对于任意实数 a，b，$a<b$，$a=b$，$b<a$ 这三种情况有且只有一种成立；

② 如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

③ 如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

④ 如果 $a<b$，$0<c$，那么 $ac<bc$.

(4) 虚数、纯虚数的概念是在研究复数集与实数集的关系时引入的概念，它们与对复数的实部、虚部是否为零的讨论相联系，又揭示了复数的分类.

3. 例题

这是一道巩固复数概念的题目，首先要在变化中认识复数代数形式的结构，正确判断这里复数 z 的实部是 $m+1$，虚部是 $m-1$；然后依据复数是实数、虚数、纯虚数的条件，用列方程（或不等式）的方法求出相应的 m 的取值.

3.1.2 复数的几何意义

1. 教科书开始给出一个思考问题，要求学生类比实数的几何意义，思考复数的几何意义是什么. 只要注意到复数的实质是一有序实数对，再运用学习代数、解析几何的经验，学生自己回答“复数的几何意义是平面上的点”是不难的.

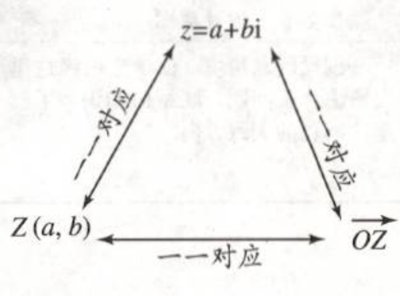
2. 引入复平面时，不强调复平面与一般坐标平面的区别. 规定了 y 轴叫做虚轴，但在说明虚轴上的点都表示纯虚数时，需要指出“除原点外”，因为原点表示实数 0.

3. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 用复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示. 复平面内的点 Z 的坐标是 (a, b)，而不是 $(a, b\mathrm{i})$，也就是说，复平面内的纵坐标轴上的单位长度是 1，而不是 i.

4. 由于已经学过平面向量及其几何表示、坐标表示，得到用平面向量来表示复数就比较容易了.

这里复数的模是通过向量的模来定义的，学生只作了解即可. 这段内容未放在正文而只放在边空中，教学中不要再作扩展.

5. 在学习复数的几何意义时，除了要使学生明确复数有两种几何意义外，还应强调，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内的一点 $Z(a, b)$ 对应，复平面内任意一点 $Z(a, b)$ 又可以与以原点为起点，点 $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应. 这些对应都是一一对应，即



这样，讨论复数的运算、性质和应用时，就可以在复平面内用向量方法进行.

四、教学设计案例

3.1.1 数系的扩充和复数的概念（约1课时）

1. 教学任务分析

(1) 在问题情境中让学生了解把实数系扩充到复数系的过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

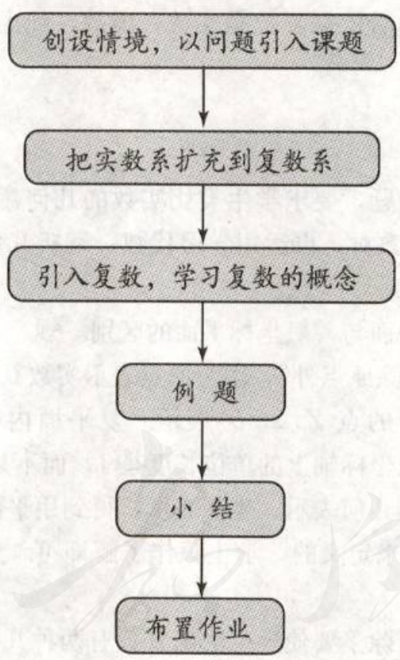
(2) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件.

2. 教学重点、难点

重点：对引入复数的必要性的认识，理解复数的基本概念.

难点：由于学生对数系扩充的知识不熟悉，因此对了解从实数系扩充到复数系的过程有困难. 由于对理解复数是一对有序实数不习惯，因此对复数概念的理解也有一定困难.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题	设计意图	师生活动
(1) 方程 $x^2+1=0$ 在实数集中无解. 联系从自然数系到实数系的扩充过程，你能设想一种方法，使这个方程有解吗？	创设问题情境，使学生明确这里要解决什么问题，联系旧知识，了解解决问题的大致方向.	教师提出问题，学生思考、回答，教师再评价、引导.

续表

问题	设计意图	师生活动
(2) 类比引进$\sqrt{2}$就可以解决方程$x^2-2=0$在有理数集中无解的问题，怎么解决$x^2+1=0$在实数集中无解的问题？	通过类比，使学生了解扩充数系要从引入新数开始.	教师提问，学生回答.
(3) 把实数和新引入的数 i 像实数那样进行加法、乘法运算，并希望运算时有关的运算律仍成立，你得到了什么样的数？	使学生感受为什么把集合$\{a+bi \mid a, b\in \mathbf{R}\}$作为实数集扩充后的新数集.	由学生自己动手试做，然后讨论. 最后统一认识.
(4) 给出复数、虚数单位，实部、虚部、复数的代数形式的意义.	认识复数的代数结构，熟悉有关名称.	不仅给出名称，还应结合实例，以求掌握.
(5) 你认为应该怎样定义两个复数相等？	由学生按自己的理解，试着给两复数的相等关系下定义.	学生回答、教师点评，还可以进行适当练习.
(6) 复数$z=a+bi$在什么条件下是实数？	引出复数的分类，并搞清复数集和实数集的关系.	学生自己经历对$z=a+bi$中，a，b是否为零的讨论的全过程.
(7) 例 1.	巩固复数概念.	学生自己完成，教师点评.
(8) 小结.	对数系扩充的过程方面以及对复数实质的理解方面的收获进行小结.	可课堂交流，也可写在自己的笔记本上.
(9) 作业 练习（第 104 页）第 1，2，3 题.		

五、习题解答

练习（第 104 页）

1. 实部分别是-2，$\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，0，0；

虚部分别是$\frac{1}{3}$，1，0，$-\sqrt{3}$，1，0.

2. $2+\sqrt{7}$，0.618，0，i^2 是实数；

$\frac{2}{7}i$，i，$5i+8$，$3-9\sqrt{2}i$，$i(1-\sqrt{3})$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ 是虚数；

$\frac{2}{7}i$，i，$i(1-\sqrt{3})$是纯虚数.

3. 由$\begin{cases}x+y=2x+3y,\\ y-1=2y+1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\ y=-2.\end{cases}$

练习（第 105 页）

1. A：$4+3i$，B：$3-3i$，C：$-3+2i$，D：$-\frac{5}{2}-3i$，E：$\frac{11}{2}$，F：-2，G：$5i$，H：$-5i$.

2. 略.

3. 略.

习题 3.1（第 106 页）

A 组

1. (1) 由$\begin{cases}3x+2y=17,\\ 5x-y=-2,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=1,\\ y=7.\end{cases}$

(2) 由$\begin{cases}x+y-3=0,\\x-4=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$

2. (1) 当$m^2-3m=0$，即$m=0$或$m=3$时，所给复数是实数.

(2) 当$m^2-3m\neq0$，即$m\neq0$且$m\neq3$时，所给复数是虚数.

(3) 当$\begin{cases}m^2-5m+6=0,\\m^2-3m\neq0,\end{cases}$ 即$m=2$时，所给复数是纯虚数.

3. (1) 存在，例如$-\sqrt{2}+\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$，等等.

(2) 存在，例如$1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，等等.

(3) 存在，只能是$-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

4. (1) 点P在第一象限.

(2) 点P在第二象限.

(3) 点P位于原点或虚轴的下半轴上.

(4) 点P位于实轴下方.

5. (1) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$ 即$-2<m<3$或$5<m<7$时，复数z对应的点位于第四象限.

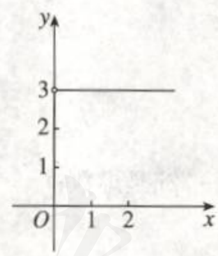
(2) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14>0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}m^2-8m+15<0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$ 即$m<-2$或$3<m<5$或$m>7$时，复数z对应的点位于第一、三象限.

(3) 当$m^2-8m+15=m^2-5m-14$，即$m=\dfrac{29}{3}$时，复数z对应的点位于直线$y=x$上.

6. (1) $2-\mathrm{i}$； (2) $-2-\mathrm{i}$.

B组

1. 复数z对应的点位于如图所示的图形上.



(第1题)

2. 由已知，设$z=a+\sqrt{3}\mathrm{i}$ ($a\in\mathbf{R}$).

则$a^2+(\sqrt{3})^2=4$.

解得$a=\pm1$.

所以$z=\pm1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

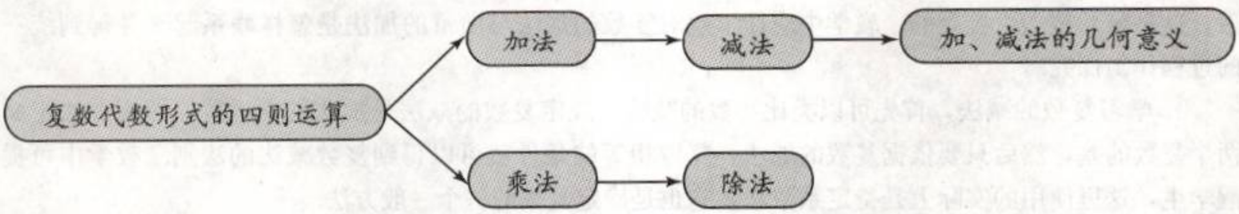
3. 因为

$$|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_3|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_4|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5},$$

所以，Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 这 4 个点都在以原点为圆心，半径为$\sqrt{5}$的圆上.

3.2 复数代数形式的四则运算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则、运算律，以及复数加、减运算的几何意义.

2. 难点：复数减法、除法的运算法则.

三、编写意图与教学建议

3.2.1 复数代数形式的加、减运算及其几何意义

1. 在复数代数形式的加法和减法中，重点是加法. 教科书首先规定了加法的运算法则，这个规定的合理性可从下面两方面认识：

(1) 当 $b=0$，$d=0$ 时，与实数加法法则一致；

(2) 实数加法的交换律、结合律在复数集 **C** 中仍然成立.

2. 复数加法满足交换律、结合律的证明如下.

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$.

(1) 因为

$$\begin{aligned} z_1+z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})\\ &=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},\\ z_2+z_1&=(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})\\ &=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

又因为 $a_1+a_2=a_2+a_1$，$b_1+b_2=b_2+b_1$，所以

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} &(z_1+z_2)+z_3\\ =&[(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})]+(a_3+b_3\mathrm{i})\\ =&[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}]+(a_3+b_3\mathrm{i}) \end{aligned}$$

$$=[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]\mathrm{i},$$

$$\begin{aligned}&z_1+(z_2+z_3)\\&=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]\\&=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]\\&=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]\mathrm{i},\end{aligned}$$

又因为$(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$，$(b_1+b_2)+b_3=b_1+(b_2+b_3)$，所以

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. 复数加法的几何意义，就是复数的加法可以按照向量的加法来进行，在学习了平面向量的知识后，这是容易被学生接受的. 教学中应让学生对复数的加法与向量的加法是怎样联系起来并得到统一的过程作出探究.

4. 学习复数的减法，首先可以类比实数的减法，规定复数的减法是加法的逆运算，即用加法定义两个复数的差，然后只要依据复数的加法，复数相等的条件就可以得到复数减法的法则. 教学中可提醒学生，这里使用的实际上是待定系数法，它也是确定复数的一个一般方法.

5. 例题

本例是一道巩固复数加、减法运算法则的题目，且是一道加、减混合运算题.

通过本例应使学生看到，复数代数形式的加、减法，形式上与多项式的加、减法是类似的，这样既可不必记忆公式，还可以减少运算中的错误.

3.2.2 复数代数形式的乘除运算

1. 复数代数形式的乘法运算法则也是直接规定的，它与复数加、减法一样，可按与多项式相乘类似的办法进行，而不必专门记公式.

2. 复数的乘法运算满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律. 证明如下：

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$.

(1) 因为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i},\\z_2z_1&=(a_2+b_2\mathrm{i})(a_1+b_1\mathrm{i})\\&=(a_2a_1-b_2b_1)+(b_2a_1+a_2b_1)\mathrm{i},\end{aligned}$$

又因为 $a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1$，$b_1a_2+a_1b_2=b_2a_1+a_2b_1$，所以

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}&(z_1z_2)z_3\\&=[(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})](a_3+b_3\mathrm{i})\\&=[(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(b_1a_2+a_1b_2)b_3]+[(b_1a_2+a_1b_2)a_3+(a_1a_2-b_1b_2)b_3]\mathrm{i}\\&=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)\mathrm{i},\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&z_1(z_2z_3)\\&=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)\mathrm{i},\end{aligned}$$

所以

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

(3) 因为

$$
\begin{aligned}
&z_1(z_2+z_3)\\
&=(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]\\
&=(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]\\
&=[a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)]+[b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3)]\mathrm{i}\\
&=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i},\\
&z_1z_2+z_1z_3\\
&=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})(a_3+b_3\mathrm{i})\\
&=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i}+(a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\
&=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_2+a_1b_2+b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\
&=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

所以

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

3. 例题

(1) 例 2 要求把 3 个复数顺序相乘，目的是熟悉复数乘法的法则，特别要提醒其中$(-2\mathrm{i})\cdot 4\mathrm{i}=8$，而不是$-8$. 也可以先安排几个两个复数相乘的题目后，再做例 2.

(2) 例 3 依乘法法则计算也是可以的，但这里主要提醒学生实数系中的乘法公式在复数系中也是成立的，运用乘法公式可以简化运算过程.

本例也为引出共轭复数的概念提供实例支持，并通过计算和思考，了解共轭复数的一些性质，为学习复数除法作点准备.

4. 教科书中要求学生类比实数的除法，联系复数减法法则的引入过程，探求复数除法的法则.

规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = a+b\mathrm{i}\ (c+d\mathrm{i}\neq 0)$$

的复数 $x+y\mathrm{i}$，叫做复数 $a+b\mathrm{i}$ 除以复数 $c+d\mathrm{i}$ 的商.

经计算可得

$$(cx-dy)+(dx+cy)\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}.$$

根据复数相等的定义，有

$$cx-dy=a,\ dx+cy=b.$$

由此得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

于是

$$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\ (c+d\mathrm{i}\neq 0).$$

这就是复数的除法法则.

5. 在实际进行复数除法运算时，每次都按做乘法的逆运算的办法来求商，这是十分麻烦的. 可以由学生设想解决的办法，还可引导学生类比根式的除法，从而得到简便的操作方法：先把两个复数相除写成分数形式，然后把分子与分母都乘分母的共轭复数，使分母“实数化”，最后再作化简.

6. 例题

例 4 是复数除法的计算题，目的是让学生熟练操作上述作除法的简便过程.

四、习题解答

练习（第 109 页）

1. (1) 5； (2) $2-2i$； (3) $-2+2i$； (4) 0.

2. 略.

练习（第 111 页）

1. (1) $-18-21i$； (2) $6-17i$； (3) $-20-15i$.

2. (1) -5； (2) $-2i$； (3) 5.

3. (1) i； (2) $-i$； (3) $1-i$； (4) $-1-3i$.

习题 3.2（第 112 页）

A 组

1. (1) $9-3i$； (2) $-2+3i$；

(3) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}i$； (4) $0.3+0.2i$.

2. $\overrightarrow{AB}$对应的复数为 $(-3+4i)-(6+5i)=-9-i$.

$\overrightarrow{BA}$对应的复数为 $9+i$.

3. $3+5i$.

向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数为 $(1+3i)-(-i)=1+4i$，

向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数为 $(2+i)-(-i)=2+2i$，

于是向量$\overrightarrow{BD}$对应的复数为 $(1+4i)+(2+2i)=3+6i$，点 D 对应的复数为 $(-i)+(3+6i)=3+5i$.

4. (1) $-21+24i$； (2) $-32-i$；

(3) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$； (4) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. (1) $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$； (2) $\frac{18}{65}-\frac{1}{65}i$；

(3) $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$； (4) $1-38i$.

6. 由 $2(2i-3)^2+p(2i-3)+q=0$，得 $(10-3p+q)+(2p-24)i=0$.

于是，有$\begin{cases}10-3p+q=0,\\2p-24=0.\end{cases}$

解得 $p=12$，$q=26$.

B 组

1. (1) $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$.

(2) $a^4+b^4=(a+b)(a-b)(a+bi)(a-bi)$.

2. 略.

复习参考题（第 116 页）

A 组

1. (1) A； (2) B； (3) D； (4) C.

2. 由已知，设 $z=bi$ ($b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0$). 则

$$(z+2)^2-8i=(bi+2)^2-8i=(4-b^2)+(4b-8)i.$$

由 $(z+2)^2-8i$ 是纯虚数，得

$$\begin{cases}4-b^2=0,\\4b-8\neq 0.\end{cases}$$

解得 $b=-2$.

因此 $z=-2\mathrm{i}$.

3. 由已知可得　$z_1+z_2=8+6\mathrm{i}$，$z_1z_2=55+10\mathrm{i}$.

又因为$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}$，

所以

$$z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{55+10\mathrm{i}}{8+6\mathrm{i}}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

B 组

1. 设$z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

由$(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$，得 $(1+2\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$，

化简，得 $(a+2b)+(2a-b)\mathrm{i}=4+3\mathrm{i}$.

根据复数相等的条件，有

$$\begin{cases}a+2b=4,\\2a-b=3.\end{cases}$$

解得 $a=2$，$b=1$.

于是 $z=2+\mathrm{i}$，$\bar{z}=2-\mathrm{i}$.

所以$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

2. (1)

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-\mathrm{i}$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$	1

(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$，有

$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+4}=1$.

3. 由 $z_1=z_2$，得

$$\begin{cases}m=2\cos\theta,\\4-m^2=\lambda+3\sin\theta.\end{cases}$$

消去 m 可得$\lambda=4\sin^2\theta-3\sin\theta$

$$=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}.$$

由于$-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，可得

$$-\frac{9}{16}\leqslant\lambda\leqslant 7.$$

III 自我检测题

一、选择题

1. $a=0$ 是复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件也非必要条件

2. 设 $z_1=3-4i$，$z_2=-2+3i$，则 z_1+z_2 在复平面内对应的点位于（　　）.

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 设 O 是原点，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$对应的复数分别为 $2-3i$，$-3+2i$，那么向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数是（　　）.

(A) $-5+5i$　　(B) $-5-5i$

(C) $5+5i$　　(D) $5-5i$

4. $(1-i)^2\cdot i$ 等于（　　）.

(A) $2-2i$　　(B) $2+2i$

(C) -2　　(D) 2

5. 复数 $\left(1+\frac{1}{i}\right)^2$ 的值是（　　）.

(A) $2i$　　(B) $-2i$

(C) 2　　(D) -2

6. 如果复数$\frac{2-bi}{1+2i}$的实部和虚部互为相反数，那么实数 b 的值为（　　）.

(A) $\sqrt{2}$　　(B) -2

(C) $-\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$

二、填空题

7. 复数$\frac{2}{1+i}$的实部为________，虚部为________.

8. $(15+8i)(-1-2i)$的值为________.

9. 若 $z=1+\sqrt{2}i$，则 z^2-2z 的值为________.

10. 若复数 z 满足$\frac{1-z}{1+z}=i$，则 $|z+1|$ 的值为________.

三、解答题

11. 已知复数 $z=(2+i)m^2-\frac{6m}{1-i}-2(1-i)$. 当实数 m 取什么值时，复数 z 是

(1) 0；

(2) 虚数；

(3) 纯虚数；

(4) 复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数.

12. 设 z_1 是虚数，$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}$是实数，且 $-1\leqslant z_2\leqslant 1$.

(1) 求 $|z_1|$ 的值以及 z_1 的实部的取值范围；

(2) 若 $w=\frac{1-z_1}{1+z_1}$，求证 w 为纯虚数.

参考答案及说明

一、选择题

1. B. 2. D. 3. D. 4. D. 5. B. 6. C.

二、填空题

7. 1，−1. 8. $1-38\mathrm{i}$. 9. −3. 10. $\sqrt{2}$.

说明 7. $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，要注意虚部不是$-\mathrm{i}$.

8. 计算时也可以先变成$-(15+8\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$，可减少符号出错.

9. 可先作变形：$z^2-2z=(z-1)^2-1=(\sqrt{2}\mathrm{i})^2-1=-3$.

10. 由$\dfrac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$，得$(1-z)=(1+z)\mathrm{i}$，即$(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，于是有$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，从而得$|z+1|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

三、解答题

11. 由于$m\in\mathbf{R}$，复数z可以表示为

$$\begin{aligned}z&=(2+\mathrm{i})m^2-3m(1+\mathrm{i})-2(1-\mathrm{i})\\&=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(1) 当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\m^2-3m+2=0,\end{cases}$即$m=2$时，$z$为0.

(2) 当$m^2-3m+2\neq0$，即$m\neq2$且$m\neq1$时，z为虚数.

(3) 当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\m^2-3m+2\neq0,\end{cases}$即$m=-\dfrac{1}{2}$时，$z$为纯虚数.

(4) 当$2m^2-3m-2=-(m^2-3m+2)$，即$m=0$或$m=2$时，z为复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数.

说明 本题考查复数的四则运算以及复数的概念，对于解方程组也有较高要求.

12. (1) 设$z_1=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$，且$b\neq0$），则

$$\begin{aligned}z_2&=z_1+\frac{1}{z_1}=a+b\mathrm{i}+\frac{1}{a+b\mathrm{i}}\\&=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因为z_2是实数，$b\neq0$，于是有$a^2+b^2=1$，即$|z_1|=1$，还可得$z_2=2a$.

由$-1\leqslant z_2\leqslant1$，得$-1\leqslant2a\leqslant1$，解得$-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$，即$z_1$的实部的取值范围为$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) $w=\dfrac{1-z_1}{1+z_1}=\dfrac{1-a-b\mathrm{i}}{1+a+b\mathrm{i}}=\dfrac{1-a^2-b^2-2b\mathrm{i}}{(1+a)^2+b^2}=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{i}$.

因为$a\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以$w$是纯虚数.

说明 本题在考查复数运算时有较高要求，还考查模、实部等概念，并考查通过运算进行推理论证的能力.