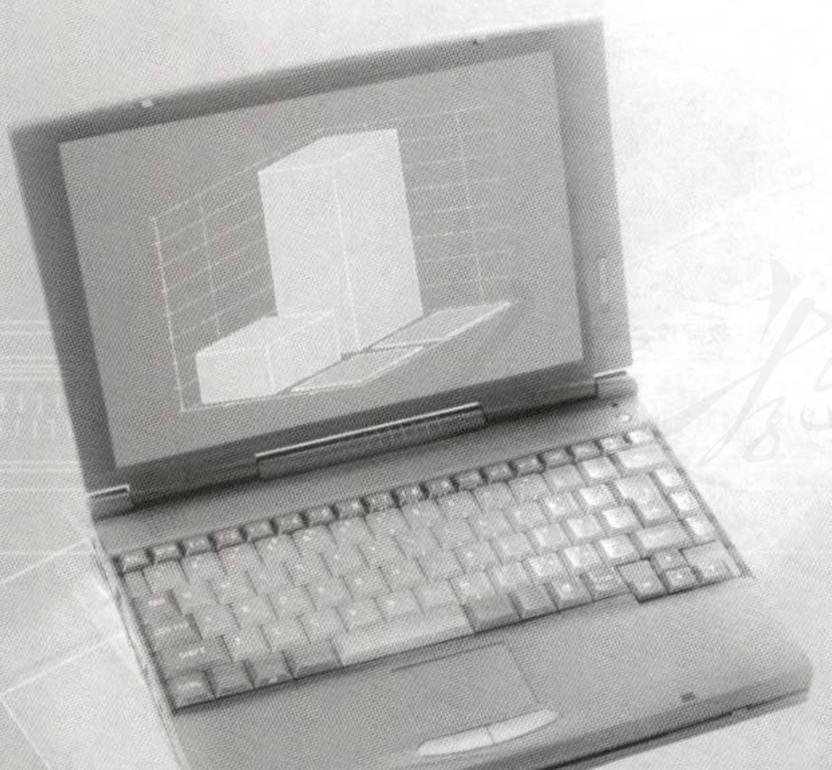
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 1–2

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 1—2（A 版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—2 版．—北京：人民教育出版社，2007.1（2019.7 重印）

ISBN 978-7-107-19110-7

Ⅰ．①普…　Ⅱ．①人…　②课…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033880 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修　1-2　A 版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网　　址　http://www.pep.com.cn

经　　销　全国新华书店

印　　刷　人民教育出版社印刷厂

版　　次　2007 年 1 月第 2 版

印　　次　2019 年 7 月第 26 次印刷

开　　本　890 毫米 × 1 240 毫米　1/16

印　　张　6.5

字　　数　170 千字

定　　价　14.30 元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：李　勇　张淑梅　章建跃　宋莉莉　李龙才　蒋佩锦
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、独立性检验思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

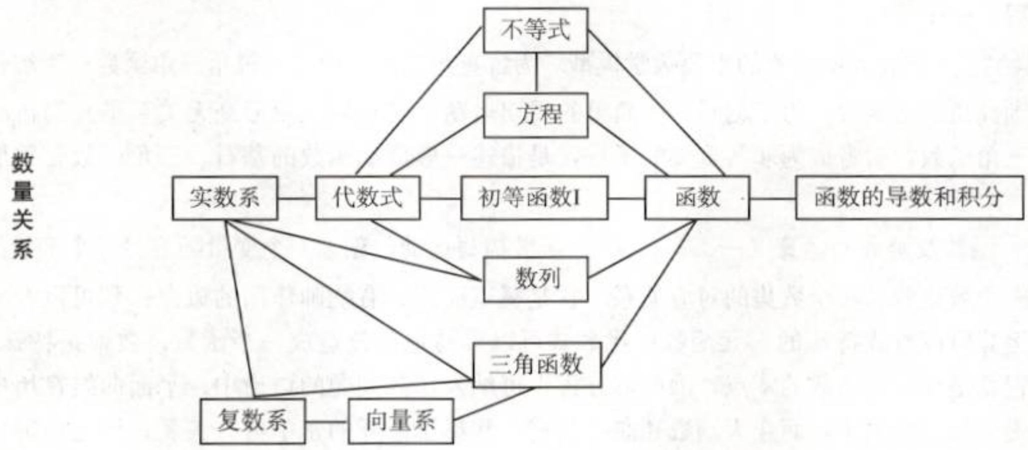
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})$，而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“$=$”换成实数系所特有的“$>$”（或“$<$”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “$>$”的性质比“$=$”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数Ⅰ 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数（即对数函数）.

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

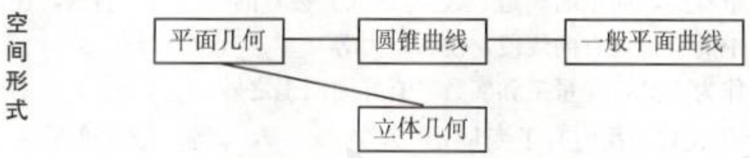
函数 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

“数形结合”

用三角函数解三角形　参看 三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

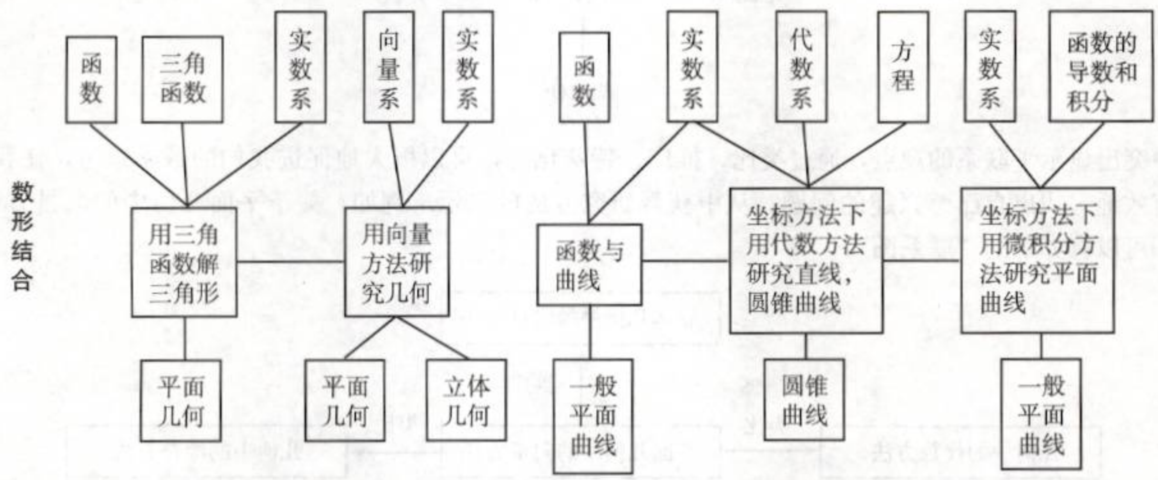
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

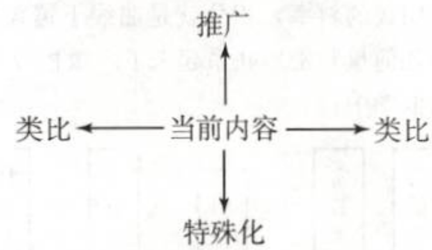
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法，等等.

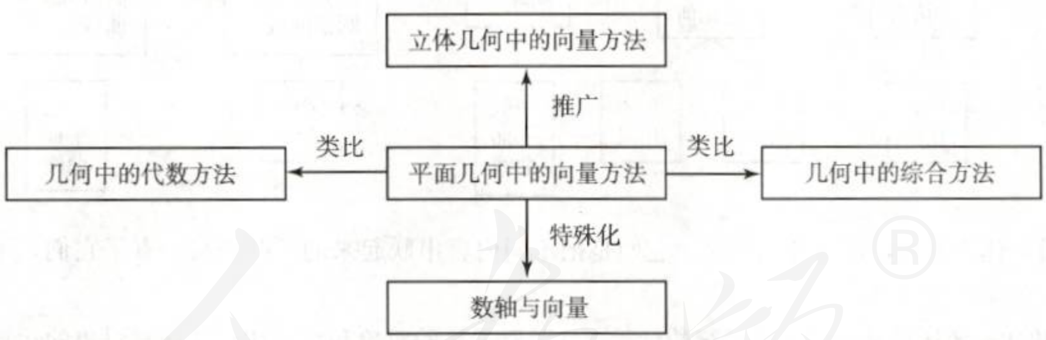
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

刘绍学

说 明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

提问是创新的开始．“看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神．

3．“思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括．

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”．

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

（1）课程目标与学习目标　说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）本章知识结构框图　展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）内容安排说明　按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

（4）课时安排建议　根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写的意图与教学建议等.

(1) 本节知识结构　讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点　不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

(3) 难点　说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(4) 编写意图与教学建议　主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

(5) 教学设计案例　选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

①教学任务分析　重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

②教学重点、难点　表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

③教学基本流程　以框图的形式表示出教学的基本进程；

④教学情境设计　以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

(6) 习题解答　不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题在巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等方面的功能.

3. 自我检测题提供了每章的自我检测题目，目的是检测学生掌握本章知识内容的情况. 教学时，教师可直接使用.

4. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网下载.

本书是选修课程数学 1-2 的教师教学用书，包含统计案例、推理与证明、数系的扩充与复数的引入和框图共四章内容，全书共 30 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第 1 章 统计案例 约 10 课时
第 2 章 推理与证明 约 10 课时
第 3 章 数系的扩充与复数的引入 约 4 课时
第 4 章 框图 约 6 课时

参加本书编写的有李勇、张淑梅、章建跃、宋莉莉、李龙才、蒋佩锦等，责任编辑为宋莉莉.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

第一章
统 计 案 例

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在《数学 3（必修）》概率统计内容的基础上，通过典型案例进一步介绍回归分析的基本思想、方法及其初步应用；通过典型案例介绍独立性检验的基本思想、方法及其初步应用，使学生认识统计方法在决策中的作用.

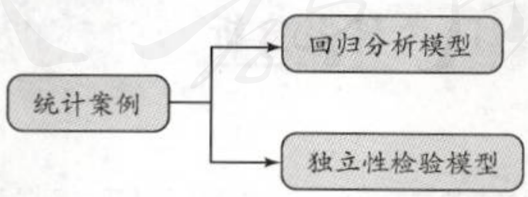
2. 学习目标

(1) 通过典型案例的探究，进一步了解回归分析的基本思想、方法及其初步应用.

(2) 通过典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及其初步应用.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 2 节：1.1 回归分析的基本思想及其初步应用，1.2 独立性检验的基本思想及其初步应用.

(1) 回归分析的部分内容在《数学 3（必修）》中已出现过，比如画散点图、最小二乘估计的基本思想、最小二乘估计的计算公式、建立回归方程并进行预报等. 在此基础上，本章通过典型案例“女大学生身高和体重的关系”引入一元线性回归模型，分析模型中随机误差产生的原因，使学生理解函

数模型与回归模型的区别.

教科书从残差分析的角度解释了 R^2 的统计含义：R^2 越大，模型的拟合效果越好. 另外，教科书还从残差分析和 R^2 的角度讨论了模型选择问题，引导学生初步体会模型诊断的思想. 为提高学生解决应用问题的能力，教科书还强调了用解释变量（自变量）估计预报变量（因变量）时需要注意的问题，总结建立回归模型的基本步骤.

作为线性回归模型的一个应用，教科书还给出了一个处理非线性相关关系的例子，并通过 R^2 比较不同模型对同一样本数据集的拟合效果. 这里所涉及的非线性相关关系可以通过变换转化成线性相关关系，从而可以用线性回归模型进行研究. 这个例子没有增加难度，但能开阔学生的思路，使学生了解虽然任何数据对都可以用线性回归模型来拟合，但其拟合的效果并不一定最好. 通过此例，还可以使学生体会到：对于需要解决的实际问题而言，没有一个正确的模型来描述它，任何数学模型只能近似描述实际问题，统计学追求的是根据实际问题的背景知识寻求描述效果更好的模型.

(2) 在独立性检验中，教科书通过典型案例“吸烟是否与患肺癌有关系”的研究，介绍了独立性检验的基本思想、方法和初步应用. 独立性检验的步骤是固定的，仿照教科书的例题，学生不难完成习题，但独立性检验的思想对学生来说是比较难理解的，教学中如何结合例题介绍独立性检验的思想是值得重点考虑的. 独立性检验的基本思想与反证法类似，它们都是假设结论不成立，但反证法是在推出矛盾后得证结论成立，而独立性检验是在结论不成立时推出有利于结论成立的小概率事件发生. 我们知道通常小概率事件在一次试验中是不会发生的，小概率事件的出现为支持结论提供了有力的证据.

教科书在这部分设置了两个例题，例 1 为学生提供了通过等高条形图定性直观判断两个分类变量是否有关系的方法，也演示了独立性检验的一般步骤；例 2 为学生提供了利用独立性检验的思想解决实际问题的案例. 以加深学生对独立性检验思想本质的理解.

三、课时分配

全章共安排了 2 个小节，教学约需 10 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

1.1 回归分析的基本思想及其初步应用	约 4 课时
1.2 独立性检验的基本思想及其初步应用	约 3 课时
实习作业	约 2 课时
小结	约 1 课时

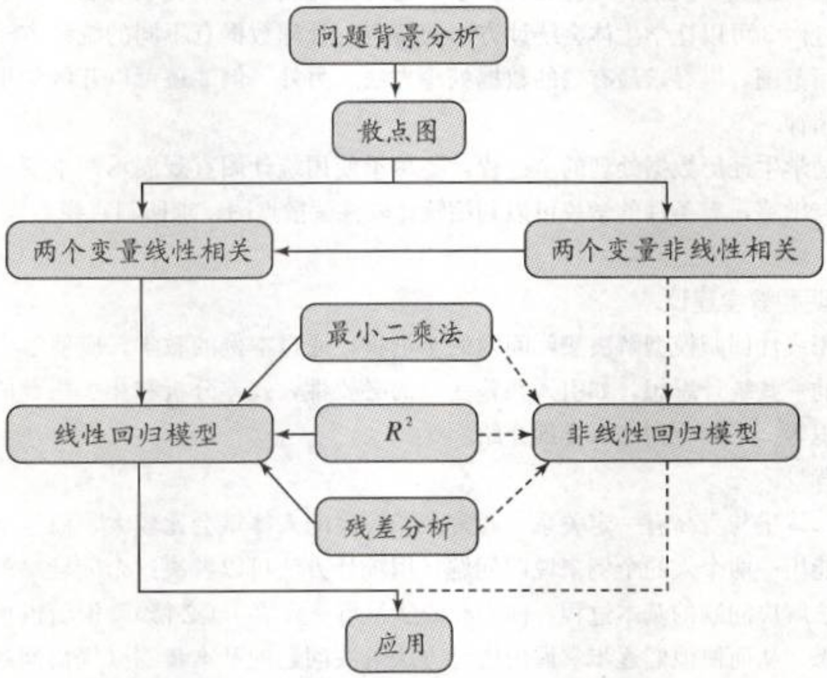
II 教科书分析

章引言首先提出了现实中经常遇到的问题，比如身高和体重之间是否存在线性相关关系，吸烟与患肺癌是否有关系，等等. 现实中类似的问题大量存在，如何得到准确的推断，这就需要科学的方法，统计方法就是其中一种常用的方法.

在介绍背景的基础上，章引言给出了用统计方法解决这些实际问题的思路，即确定总体、选择合适的变量、用适当的抽样方法收集数据、最后选择恰当的统计方法分析整理数据以得到最可靠的结论，意在让学生经历统计解决问题的全过程. 最后引出本章要学习的两种统计方法——回归分析和独立性检验.

1.1 回归分析的基本思想及其初步应用

一、本节知识结构



在上面的知识结构图中，虚线表示高中阶段不涉及的关系.

二、教学重点与难点

重点：

1. 了解回归模型与函数模型的区别.
2. 了解任何模型只能近似描述实际问题.
3. 了解模型拟合效果的分析工具——残差分析和 R^2.

难点：

1. 解释、分析残差变量.
2. 理解 R^2 的含义.

三、编写意图与教学建议

在《数学 3（必修）》的“统计”一章中，学生已学习了两个变量之间的相关关系，包括画散点图、求回归直线方程、利用回归直线方程进行预报等内容，本节在此基础上进一步介绍回归模型的基本思想及其初步应用. 通过案例“女大学生的身高与体重的关系”介绍了线性回归模型的数学表达式，说明了线性回归模型与学生熟悉的函数关系的不同之处，解释了随机误差项产生的原因，使学生能正

确理解回归方程的预报结果.

从 R^2 和残差分析等角度可以探讨回归模型拟合的效果，模型拟合效果越好，相应的分析预报结果的精度就越高，因此只有在模型拟合效果比较好的情况下才能利用所建立的回归模型进行预报. 教科书借助身高预报体重的例子，说明在利用所建立的回归模型进行预报时需要注意的问题. 为让学生更好地掌握利用回归模型的方法解决实际问题，教科书中给出了建立回归模型的基本步骤.

实际问题中的两个变量不一定都是线性相关关系，它们可能是指数、对数等非线性相关关系. 在某些情况下可以借助函数变换把非线性相关关系问题转化为线性相关关系来研究，教科书中的例 2 就是一个例子. 通过例 2 可以让学生体会统计方法的特点：处理数据有不同的统计方法，统计学关心各种不同方法的适用范围，以寻求最有效的数据处理方法. 另外，例 2 还可以开阔学生的思路，培养学生的探索和创新精神.

教学中应鼓励学生经历数据处理的全过程，要尽量使用统计图直观展示两个变量的关系，培养学生对数据的直觉与敏感，有条件的学校可以利用统计软件画散点图、求回归直线方程并画出回归直线.

1. 例 1 的说明和教学建议.

例 1 包含了用线性回归模型解决实际问题的全过程，通过本例的教学，应使学生进一步了解与线性回归模型有关的一些统计思想，如引入残差变量的必要性，残差分析和相关指数的作用，对模型预报结果的正确认识等. 下面分别加以详细介绍.

(1) 讲实际背景.

一般情况下，体重与身高有一定关系. 通常个子较高的人体重会比较大，而这个结论的正确性需要验证. 当然不能用一两个人的个例来说明问题，用统计方法可以解决这个问题. 教学时，可以先让学生回忆统计方法解决问题的基本过程，使当前的学习与《数学 3（必修）》中随机抽样和样本估计总体的知识联系起来，从而使他们逐步掌握用统计方法解决问题的基本步骤（提出问题、收集数据、分析整理数据、进行预测或决策）；然后，给出教科书中的数据表.

(2) 画散点图.

散点图可以形象地展示两个变量的关系，所以先把数据用散点图表示出来，可以帮助我们直观了解两个变量的关系. 通常用横坐标表示解释变量，用纵坐标表示预报变量. 这里要用身高预测体重，所以以身高为解释变量（自变量），体重为预报变量（因变量）画散点图. 有条件的学校可以用多媒体展示散点图，还可以让学生用某种软件（如 Excel、几何画板等）画散点图.

(3) 建立回归方程.

复习《数学 3（必修）》“统计”一章中的最小二乘估计的思想及计算公式，从而得到线性回归方程.

(4) 解释线性回归模型与一次函数的不同.

在散点图上画（可利用多媒体或黑板）回归直线，展示回归直线与原始数据拟合的情况，使学生能直观感觉回归直线和散点之间的关系. 通过复习满足线性函数模型的散点图的特点，从图象上考察女大学生的体重 y 和身高 x 之间的关系是否可以用一次函数

$$y=bx+a$$

来严格刻画（因为所有的样本点不共线，所以线性函数模型只能近似地刻画身高和体重之间的关系）. 在数据表中身高为 165 cm 的 3 名女大学生的体重分别为 48 kg、57 kg 和 61 kg，如果用一次函数来描述体重与身高的关系，那么身高为 165 cm 的 3 名女大学生的体重应相同. 这就说明体重不仅受身高的影响还受其他因素的影响，把这种影响的结果 e（即残差变量或随机误差）引入到线性函数模型中，得到线性回归模型

$$y=bx+a+e,$$

其中残差变量 e 中包含体重不能由身高的线性函数解释的所有部分. e 是一个随机变量，一般假定它的均值为 0，即 $Ey=bx+a$，也就是 y 的期望值是 x 的一次函数. 在实际问题中，线性回归模型适用的范围要比一次函数大得多. 当残差变量恒等于 0 时，线性回归模型就变成一次函数模型. 因此一次函数模型是线性回归模型的特殊形式，线性回归模型是一次函数模型的一般形式.

(5) 残差变量 e 的主要来源.

① 用线性回归模型近似真实模型（真实模型是客观存在的，通常我们并不知道真实模型到底是什么）所引起的误差. 可能存在非线性的函数能够更好地描述 y 与 x 之间的关系，但是现在却用线性函数来表述这种关系，结果会产生误差. 这种由模型近似所引起的误差包含在 e 中.

② 忽略了某些因素的影响. 影响变量 y 的因素不只变量 x，可能还包括其他许多因素（例如在描述身高和体重关系的模型中，体重不仅受身高的影响，还会受遗传基因、饮食习惯、生长环境等其他因素的影响），它们的影响都体现在 e 中.

③ 观测误差. 由于测量工具等原因，导致 y 的观测值产生误差（比如一个人的体重是确定的数，不同的秤可能会得到不同的观测值，与真值之间存在误差），这样的误差也包含在 e 中.

上面三项误差越小，说明回归模型的拟合效果越好.

(6) 利用回归方程进行预测.

获得回归方程不是我们的最终目的，如果建立的回归模型是有效的，我们希望用它进行预测或决策. 利用回归方程

$$\hat{y}=0.849x-85.712$$

预测身高为 172 cm 的女大学生的体重，只要把 $x=172$ 代入方程中即可得到体重的预测值 60.316 kg.

教科书在这里让学生探究："身高为 172 cm 的女大学生的体重一定是 60.316 kg 吗?" 如果不是，引起误差的原因是什么? 其目的是让学生正确理解用（线性）回归方程预测结果的含义. 该问题的答案是否定的. 实际上 60.316 kg 是身高为 172 cm 的女大学生的平均体重的估计值，而不一定是某位身高为 172 cm 的女大学生的真实体重. 也就是说，身高为 172 cm 的女大学生的平均体重大约是 60.316 kg，并且大部分 172cm 的女大学生的体重在 60.316 kg 附近. 也就是说，用这个回归方程不能给出每个身高为 172 cm 的女大学生的体重的预测值，只能给出她们平均体重的预测值.

(7) 在含有一个解释变量的线性回归模型中，R^2 恰好等于相关系数 r 的平方，推导如下：

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i+\hat{a}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i+\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}\cdot x_i-\hat{b}\cdot\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\frac{\hat{b}^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=r^2.$$

进一步地，由上式以及线性相关系数的性质知：在线性回归模型中有 $0\leqslant R^2\leqslant 1$. 因此，在一元线性回归模型中，$R^2$ 和两个变量的相关系数都能刻画用线性回归模型拟合数据的效果. 相关系数的绝对值越大，R^2 就越大，用线性回归模型拟合数据的效果就越好.

当 $r=\pm 0.8$ 时，$R^2=0.64$；当 $r=\pm 0.9$ 时，$R^2=0.81$. 通常当 $R^2>0.80$ 时，认为线性回归模型对该组数据是很有效的，这时两个变量的相关系数的绝对值几乎超过 0.9. 教科书中例 1 的计算结果是 $R^2\approx 0.64$，此时两个变量的相关系数的绝对值近似为 0.8，所以认为该组数据用线性回归模型拟合是比较有效的.

(8) R^2 的含义.

在表达式

$$R^2=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

中，残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 从整体上描述了用估计量近似预报变量的效果，$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 越小，说明模型的拟合效果越好；而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ 仅与样本数据有关，与所选用的模型无关. 因此，R^2 可以作为衡量模型拟合效果的一个指标，R^2 越大，说明模型拟合的效果越好.

另外，我们还可以从残差平方和分解的角度解释线性回归模型中 e 的含义. 教科书没有从这个角度展开，有兴趣的教师可以参阅拓展资源中的相关内容.

(9) 残差分析.

在回归模型中，残差变量是一个不能被观测的量，即在实际问题中无法得到残差变量的观测值. 因此，不能希望通过某种方法获取残差变量的值以提高预报变量的估计精度，但却能估计预报变量观测值中所包含的残差变量，这种估计对于查找样本数据中的错误和模型的评价极为有用. 残差分析是回归诊断的一种方法. 最简单的残差分析是通过观测残差图，以发现观测数据中可能出现的错误以及所选用的回归模型是否恰当. 利用残差图进行残差分析的具体步骤如下.

① 计算每组观测数据的残差 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，即残差等于观测值减预测值. 如教科书中的表 1-2，表示预报变量（也称为因变量）中不能由回归方程解释的部分. 当残差比较小时，说明回归模型拟合数据较好.

② 画残差图. 残差图的纵坐标为残差，横坐标通常可以是观测样本的编号、自变量 x、或因变量的预测值等，残差图是一种散点图，如教科书中的图 1.1-3.

③ 分析残差图. 几种常见的残差图如下所示.

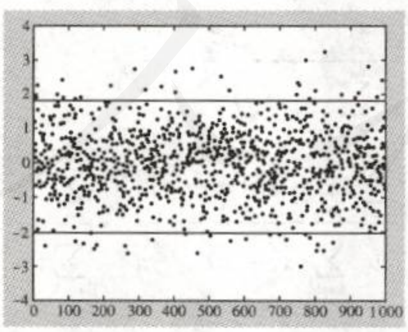


图 1

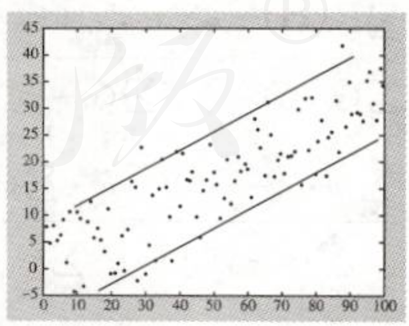


图 2

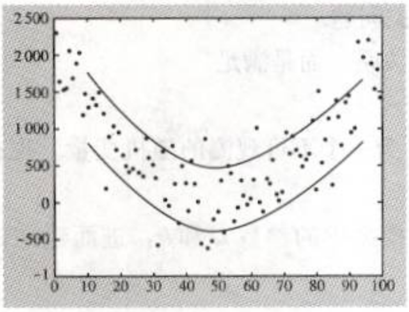


图 3

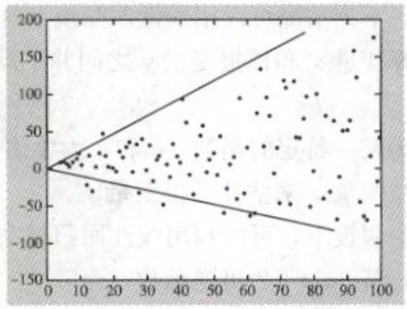


图 4

下面分别说明这些典型残差图所给出的关于模型诊断的信息.

图 1：残差散点图中的点分布在以原点为中心的水平带形区域上，并且沿水平方向的分布规律相同，说明残差是随机的，所选择的回归模型建模是合理的.

图 2：残差散点图中的点分布在一条倾斜的带形区域上，并且沿带形区域方向的分布规律相同，说明残差与其横坐标有线性关系，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

图 3：残差散点图中的点分布在一条二次曲线形的弯曲带形区域上，说明残差与其横坐标有二次关系，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

图 4：残差散点图中的点的分布范围随着横坐标的增加而增加，说明残差的方差与其横坐标有关，不是一个常数，此时所选用的回归模型的效果不是最好的，有改进的余地.

④ 查找异常样本数据（此时常以数据编号为横坐标，以方便查找异常数据）. 根据计算的残差值和残差图，观察是否存在残差特别大的点，即远离横坐标轴的点. 如果存在远离坐标轴的点，就要研究它出现的原因，如是否在数据收集和录入中发生了错误，如果有错误，改正后重新建立回归模型.

(10) 预报时需要注意的问题.

以例 1 为例，教科书较详细地说明了用线性回归模型进行预报时应注意的 4 个方面. 用一句话概括，就是要注意模型的适用范围. 这一点是十分重要的，否则可能会出现严重的错误，或十分可笑的结果. 应用非线性回归模型解决实际问题也同样需要注意这些方面.

① 样本数据来自哪个总体，预报时也仅适用这个总体. 例如用由女大学生的数据所建立起的模型预测一名男大学生的身高是不恰当的，所得的分析结果可能存在很大误差.

② 模型的时效性. 利用不同时间段的样本数据建立的模型，只能用来对那段时间范围的数据进行预报. 例如把 1900 年建立的身高与体重的模型用于预测 2005 年的情况是不恰当的，这样预测的结果可能产生很大的误差（原因是基因的进化、生活条件等的变化可能引起身高与体重之间关系的变化）.

③ 建立模型时自变量的取值范围决定了预报时模型的适用范围，通常不能超出太多. 比如例 1 中建立模型时自变量身高的取值范围为[155, 175]，可以利用例 1 建立的模型预报身高为 176 cm 的女大学生的平均体重，但用该模型预报身高为 190 cm 的女大学生的平均体重会出现较大的误差.

④ 在回归模型中，因变量的值不能由自变量的值完全确定. 正如前面已经指出的，某个女大学生的身高为 172 cm，我们不能利用所建立的模型预测她的体重，只能给出身高为 172 cm 的女大学生的平均体重的预测值.

2. 非线性相关问题.

在大量的实际问题中，研究的两个变量不一定都呈线性相关关系，它们之间可能呈指数关系或对数关系等非线性关系. 在某些情况下可以借助线性回归模型研究呈非线性关系的两个变量之间的关系，教科书中的例 2 就是一个例子.

一般地，下列情况可以用线性回归模型解决非线性相关问题.

(1) 解释变量 x 和预报变量 y 之间并不满足线性相关关系，而是满足

$$y=f(bx+a+e), \qquad (*)$$

其中 $f(\cdot)$ 为某一特定的函数，a 和 b 为要估计的参数，e 为一个不可观测的随机变量. 现在的问题是如何通过解释变量 x 来估计预报变量 y.

在一定的假设下，可以利用线性回归模型来估计上述模型中的参数 a 和 b，进而建立估计 y 的公式. 事实上，若 $f(\cdot)$ 为可逆函数，令

$$z=f^{-1}(y),$$

则有

$$z=bx+a+e,$$

即 x 和 z 之间满足线性回归模型. 利用线性回归模型的理论，通过上式可以得到参数 a 和 b 的最小二乘估计量 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$. 将估计量带入 $(*)$，并忽略 e 的影响，得到预报变量的估计值

$$\hat{y}=f(\hat{b}x+\hat{a}),$$

利用这个式子可以解决很多实际问题.

(2) x 和 y 之间满足

$$y=bg(x)+a+e,$$

其中 $g(\cdot)$ 为一个已知的函数，a 和 b 为未知参数，e 为残差变量. 令

$$t=g(x),$$

则 t 与 y 之间满足线性回归模型

$$y=bt+a+e,$$

从而可以对上式利用最小二乘法得到参数 a 和 b 的估计量 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$，进而得到解释变量 y 的估计公式

$$\hat{y}=\hat{b}g(x)+\hat{a}.$$

(3) 在更复杂的情况下，解释变量 x 和预报变量 y 之间满足关系

$$y=f(bg(x)+a+e), \qquad (**)$$

其中 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 都是已知的函数，a 和 b 是未知参数，e 是不可观测的随机变量. 当 $f(\cdot)$ 为可逆函数时，令

$$z=f^{-1}(y),\ t=g(x),$$

由 $(**)$ 式得

$$z=bt+a+e,$$

即 t 和 z 之间满足线性回归模型. 对于上式应用最小二乘法，得到参数 a 和 b 的最小二乘估计量 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$. 将参数的估计值代入 $(**)$，并忽略随机变量 e 的影响，可以得到预报变量 y 的估计公式

$$y=f(\hat{b}g(x)+\hat{a}).$$

在前面列出的三种情形中，关键是如何确定函数 $f(\cdot)$ 或 $g(\cdot)$ 的具体形式. 对于这个问题，需要针对具体的数据进行分析，没有一个普遍适用的方法. 可以利用散点图和函数曲线的知识，选取一个或几个合适的函数，然后通过观察变换后数据的散点图、计算相关指数等确定一个合适的函数形式. 在例 2 中，我们尝试用指数函数的形式或平方函数的形式，分别建立模型，再通过 R^2 等从中确定一个满意的模型.

比较而言，情形 (3) 更加复杂，这里要同时确定两个函数的形式，教科书中没有涉及这方面的内容.

3. 例 2 的教学建议.

教科书设置本例的目的是要让学生体会统计方法的特点. 处理数据有不同的统计方法（回归模型），统计学关心各种不同方法（模型）的适用范围，并要从中寻求最有效的数据处理方法. 教学中可以按教科书给出的建立回归模型的步骤来完成本例的建模过程，使学生逐渐熟悉探究更有效的回归模型的步骤. 通过本例还应该使学生了解：对于样本数据，人们不可能知道这些数据来自于什么模型，即不知道正确的模型是什么. 人们只能根据问题的背景和已经掌握的数学知识建立模型来近似这个正确的模型，统计学的任务是建立近似效果更好的模型. 对于理解力强的学生，还可以鼓励他们利用本例的数据尝试建立不同的非线性模型，通过残差图和相关指数比较各个模型的拟合效果.

本例可按下面的思路组织教学.

（1）确定变量. 根据已给出的背景分析的结果，即红铃虫的产卵数 y 和温度 x 有关，要通过所给出的观测数据研究这种关系，把温度 x 作为解释变量，红铃虫的产卵数 y 作为预报变量.

（2）画散点图. 从散点图中可以看到随着自变量 x 的增加，因变量 y 有增加的趋势，但它们明显不是线性关系. 此处，应该让学生体会画散点图的目的是确定回归模型的形式，其方法和确定拟合这些数据的函数模型一样，通过已有的函数图象形状的知识确定回归模型的形式.

（3）分析回归模型的类型. 根据散点分布情况，确定回归模型的类型，研究是否可以通过线性回归模型估计未知参数. 在本例中，散点似乎分布在指数函数(即 $y=e^{bx+a}$)或二次函数曲线(即 $g(x)=bx^2+a$)的周围，因此可以考虑对原始数据进行相应的变换（即对解释变量的对数变化或平方变换），把非线性问题转化为线性问题. 这里，应该使学生体会变换的目的是使变换后的数据散点分布在一条直线的周围，以便借助线性回归模型解决问题. 一个好的变换应该使变换后的数据的散点图呈现线性相关的特点，即散点集中在一条直线的附近.

（4）分析拟合效果. 本例中同时考虑了利用线性回归模型、指数模型和二次模型拟合原始模型，并从变换后数据的散点图、残差平方和以及相关指数的角度分析 3 个模型对数据的适用性，比较模型的拟合效果.

（5）小结. 在完成本例的教学后，可以让学生深入体会统计方法的特点：人们所知的模型仅能近似描述产生样本数据的真实模型，寻求近似效果更好的模型是人们不断追求的目标，统计学关心的是寻求最有效的数据处理方法. 对于本例中的数据，教科书列举了3 种不同的拟合模型，它们分别是

$$y=bx+a+\varepsilon,\ y=e^{bx+a+\varepsilon},\ y=bx^2+a+\varepsilon.$$

统计理论关心的是上述 3 个模型中的哪一个能够更好地拟合数据，是不是还有更好的拟合模型. 教师还可以鼓励学生提出其他的拟合模型，并通过 R^2 来比较所提出的模型的拟合效果.

本例的教学之后，可引导学生总结利用观测数据建立回归模型的步骤.

四、教学设计案例

例 2 的教学（约 2 课时）

1. 教学任务分析

（1）回归模型的选择. 虽然两个变量的观测数据都可以用线性回归模型来拟合，但不能保证这种模型对数据的拟合效果最好. 为更好地刻画两个变量之间的关系，要根据观测数据的特点来选择回归模型.

（2）通过探究使学生体会，有些非线性模型通过变换可以转化为线性回归模型，即借助于线性回归模型研究呈非线性关系的两个变量之间的关系：

① 如果散点图中的点分布在一个直线状带形区域，可以选用线性回归模型来建模；

② 如果散点图中的点分布在一个曲线状带形区域，要先对变量作适当的变换，再利用线性回归模型来建模.

利用散点图可以看出两个变量之间的关系有时不能用线性回归模型描述，判断它们之间的关系是否近似于某种非线性关系，如 $y=c_1e^{c_2x}$，$y=c_1x^2+c_2$. 若通过观察发现，它们经过变换可以转化为线性回归模型，如在 $y=c_1x^2+c_2$ 中，令 $t=x^2$，这时 y 与 t 是线性关系，可以利用线性回归模型的知识建立 y 与 t 的模型，然后再把 $t=x^2$ 代入，即得 y 与 x 的关系.

(3) 初步体会不同模型拟合数据的效果. 计算不同模型的 R^2，通过比较 R^2 的大小来比较不同模型的拟合效果. 这只是模型比较的一种方法，当然还有很多种其他方法.

(4) 体会数学模型的作用：用来近似产生样本数据的真实模型.

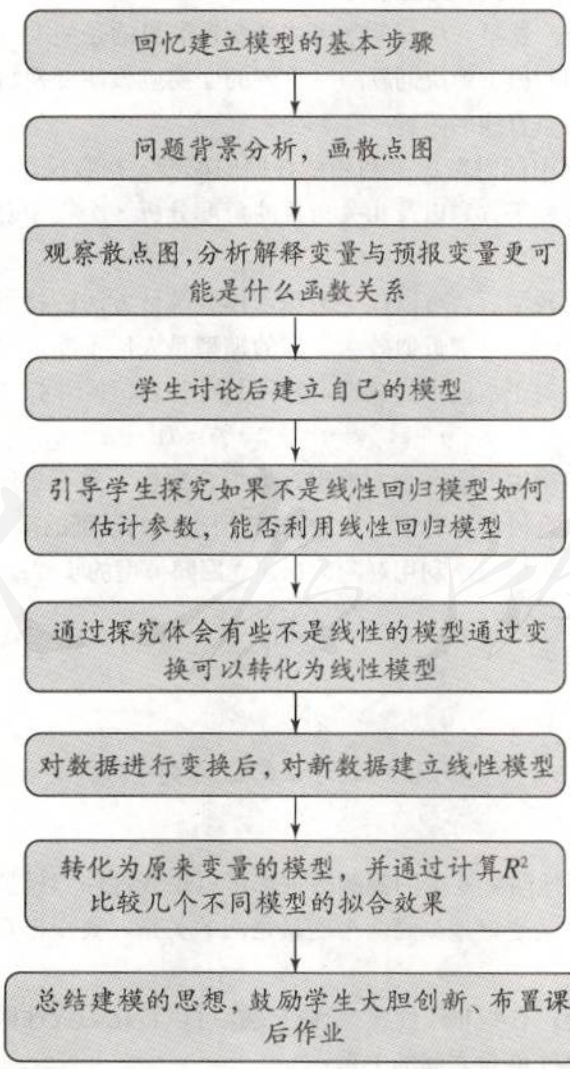
(5) 体会统计学的一个目标：寻找近似效果更好的模型.

2. 教学重点与难点

重点：通过探究使学生体会有些非线性模型通过变换可以转化为线性回归模型，了解在解决实际问题的过程中寻找更好的模型的方法.

难点：理解数学模型的作用，以及统计学在建模时追求的目标.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
(1) 你能回忆一下建立回归模型的基本步骤吗？	复习建立线性回归模型的基本步骤.	师：提出问题，引导学生回忆建立回归模型的基本步骤（选变量、画散点图、选模型、估计参数、分析与预测）. 生：回忆、叙述建立回归模型的基本步骤.
(2) 思考例 2 中如何选择解释变量与预报变量？	引导学生分析哪个变量作自变量，哪个变量作因变量.	师：读例 2 的要求，引导学生理解例题含义. 生：思考、讨论、叙述自己的理解. 形成把温度 x 作自变量，红铃虫的产卵数 y 作因变量的共识.
(3) 观察图 1.1-4 中的散点图，红铃虫的产卵数 y 与温度 x 具有线性关系吗？除线性关系外，还学过哪些常见的函数关系？	引导学生根据散点图判断两个变量的关系，使学生了解不是任何两个变量都一定是线性关系.	师：绘制散点图 1.1-4，引导学生观察散点图的特点：随着自变量的增加，因变量也随之增加. 引导学生探究红铃虫的产卵数 y 与温度 x 更可能是什么关系，选择几个模型，比如线性回归模型、二次函数模型、指数函数模型. 生：讨论、回忆一些常见函数图象的特点，判断红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的可能关系.
(4) 两个变量是线性关系时利用最小二乘法得到了两个参数的估计公式，当模型不是线性回归模型时如何估计模型中的参数？	使学生了解非线性回归模型也有最小二乘估计，但不能给出统一的公式，多数情况下用数值计算的方法.	教师提出问题，并指出：最小二乘法的思想同样适用于非线性模型，但不能给出统一的公式，多数情况下用数值计算的方法.
(5) 对模型 $y=c_1x^2+c_2$ 是否有办法求参数 c_1 和 c_2 的最小二乘估计？	让学生知道有时因变量与自变量的非线性关系经过变换可以转化为两个新变量间的线性关系.	师：从简单的模型入手，逐步引导学生思考把原来两个变量的非线性关系转化为另外两个变量的线性关系. 生：观察模型，探究变换的方法并发表自己的意见. 最后给出具体的方法.
(6) 请学生思考能否把模型 $y=c_1e^{c_2x}$ 经过变换转化为另外两个变量的线性关系？	使学生进一步体会把因变量与自变量的非线性关系经过变换转化为另外两个变量的线性关系的方法.	师：提出问题，引导学生寻找变换的方法，在学生讨论后给出具体的方法. 生：思考、讨论、解释.
(7) 经过变换这几个模型都转化为线性回归模型，你如何得到这几个线性回归模型的参数估计？	使学生熟悉线性回归模型的参数估计的方法.	师：提出问题，引导学生分组讨论，启发学生把原变量的观测数据转化为新变量的数据，然后让学生给出每种线性回归模型的参数估计. 生：以组为单位进行数据变换，求参数的最小二乘估计（可以用计算器）.
(8) 我们的目标是建立红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型，如何使得到的线性回归模型再变回红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型？	得出红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型.	师：提出问题. 生：进行变换，每组得到红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的模型.

续表

问　题	问题设计意图	师生活动
(9) 上述模型中哪个能更好地刻画红铃虫的产卵数 y 与温度 x 的关系？	引导学生尝试进行不同模型的比较.	师：提出问题，引导学生回忆评价线性回归模型拟合好坏的标准（相关指数、残差平方和），进一步引导学生探讨如何进行不同模型的比较，介绍计算模型相关指数和残差平方和的方法，说明一般在参数个数一定的条件下，相关指数越大或残差平方和越小说明模型拟合得越好. 生：讨论，提出自己的想法. 计算每个模型的相关指数，并进行模型的比较.
(10) 小结：我们希望找到两个变量的关系，如何发现它们之间的关系？如何比较不同模型的拟合效果？	让学生整理解决本例的思路，鼓励学生探究建立更好的模型.	师：强调要借助散点图的直观性、联想已学过的基本函数图象、以及知识间的联系，鼓励学生在建模中大胆尝试. 生：独立思考，总结从该例中获得的启发.
(11) 我们知道红铃虫的产卵数与温度的样本数据来自什么模型吗？对于实际问题，应该基于什么想法选择模型？	引导学生思考模型的作用，体会建模追求的目标.	师：提出问题. 生：独立思考，回答问题. 教师总结，归纳出一般的结论：模型只能用来近似产生样本数据的真实模型；建模追求的目标是建立效果最好的（在已知模型的范围内）或更好的（比已知的模型）模型.
(12) 课后作业： 练习 第1，2题；习题1.1 第1题.		

5. 几点说明

(1) 有条件的学校老师在课堂上可以演示用计算机软件计算参数的最小二乘估计、相关指数、残差平方和和画残差图等.

(2) 在教学中应鼓励学生多思考，遇到不同的实际问题应考虑原来的统计方法是否仍然适用，在不能适用的情况下要探索新的统计方法，从而体会统计方法的有效性、局限性和可改进性的特点.

五、习题解答

练习（第8页）

1. 画散点图的目的是通过变量的散点图判断两个变量更近似于什么样的函数关系，以确定是否直接用线性回归模型来拟合原始数据.

　说明　学生在对常用的函数图象比较了解的情况下，通过观察散点图可以判断两个变量的关系更近似于哪种函数.

2. 分析残差可以帮助我们解决以下两个问题：

　(1) 寻找异常点，就是残差特别大的点，考察相应的样本数据是否有错；

　(2) 分析残差图可以发现模型选择是否合适.

　说明　分析残差是回归诊断的一部分，可以帮助我们发现样本数据中的错误，分析模型选择是否合适，是否有其他变量需要加入到模型中，模型的假设是否正确等. 本题只要求学生能回答上面两

点即可，主要让学生体会残差和残差图可以用于判断模型的拟合效果.

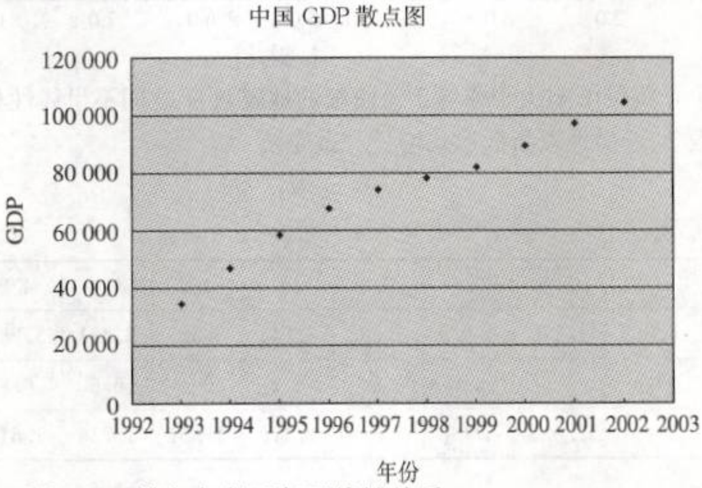
3. (1) 解释变量和预报变量的关系是线性函数关系.

(2) $R^2=1$.

说明 如果所有的样本点都在一条直线上，建立的线性回归模型一定是该直线，所以每个样本点的残差均为 0，残差平方和也为 0，即此时的模型为 $y=bx+a$，没有随机误差项，是严格的一次函数关系. 通过计算可得 $R^2=1$.

习题 1.1（第 9 页）

1. (1) 由表中数据制作的散点图如下：



从散点图中可以看出 GDP 值与年份近似呈线性关系.

(2) 用 y_t 表示 GDP 值，t 表示年份. 根据截距和斜率的最小二乘计算公式，得

$$\hat{a}\approx-14\ 292\ 537.729,\ \hat{b}\approx7\ 191.969,$$

从而得线性回归方程

$$\hat{y}=7\ 191.969\,t-14\ 292\ 537.729.$$

残差计算结果见下表.

GDP 值与年份线性拟合残差表

年份	1993	1994	1995	1996	1997
残差	−6 422.269	−1 489.238	3 037.493	5 252.024	4 638.055
年份	1998	1999	2000	2001	2002
残差	1 328.685	−2 140.984	−1 932.353	−1 277.622	−993.791

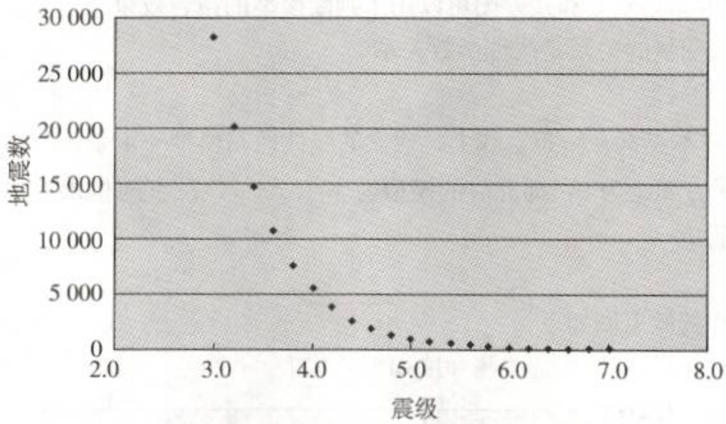
(3) 2003 年的 GDP 预报值为 112 976.360，根据国家统计局 2004 年的统计，2003 年实际 GDP 值为 117 251.9，所以预报与实际相差−4 275.540.

(4) 上面建立的回归方程的 $R^2=0.974$，说明年份能够解释约 97% 的 GDP 值变化，因此所建立的模型能够很好地刻画 GDP 和年份的关系.

说明 关于 2003 年的 GDP 值的来源，不同的渠道可能会有所不同.

2. **说明** 本题的结果与具体的数据有关，所以答案不唯一.

3. 由表中数据得散点图如下：



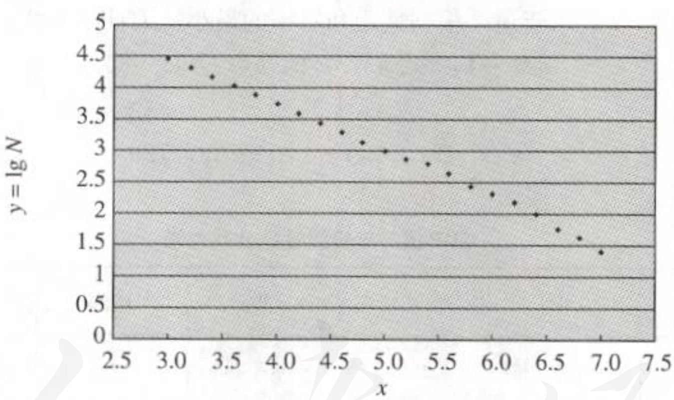
从散点图中可以看出，震级 x 与大于或等于该震级的地震数 N 之间不呈线性相关关系，随着 x 的减少，所考察的地震数 N 近似地以指数形式增长．做变换

$$y=\lg N,$$

得到的数据如下表所示．

x	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
y	4.453	4.309	4.170	4.029	3.883	3.741	3.585	3.431	3.283	3.132	2.988
x	5.2	5.4	5.6	5.8	6	6.2	6.4	6.6	6.8	7	
y	2.873	2.781	2.638	2.438	2.314	2.170	1.991	1.756	1.613	1.398	

x 和 y 的散点图如下：



从这个散点图中可以看出 x 和 y 之间有很强的线性相关性，因此可以用线性回归模型拟合它们之间的关系．根据截距和斜率的最小二乘计算公式，得

$$\hat{a}\approx 6.704,\ \hat{b}\approx -0.741,$$

故线性回归方程为

$$\hat{y}=-0.741x+6.704.$$

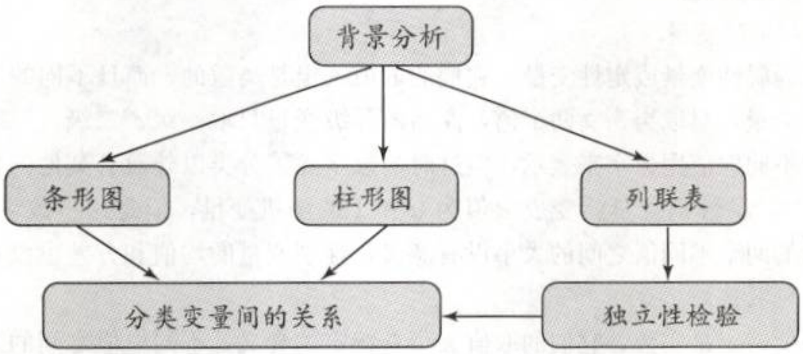
$R^2\approx 0.997$，说明 x 可以解释 y 的 99.7%的变化．因此，可以用回归方程

$$\hat{N}=10^{-0.741x+6.704}$$

描述 x 和 N 之间的关系．

1.2 独立性检验的基本思想及其初步应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：理解独立性检验的基本思想及实施步骤.

难点：

(1) 了解独立性检验的基本思想.

(2) 了解随机变量 K^2 的含义.

三、编写意图与教学建议

教科书通过探究“吸烟是否与患肺癌有关系”引出了独立性检验的问题，并借助样本数据的列联表、等高条形图展示在吸烟者中患肺癌的比例比不吸烟者中患肺癌的比例高，使学生直观感觉到吸烟和患肺癌可能有关系.“吸烟与患肺癌有关”这一直觉来自于观测数据，即样本. 问题是这种来自于样本的印象能够在多大程度上代表总体，即来自于样本的结论“吸烟与患肺癌有关”能够推广到总体吗？为了回答这个问题，就必须借助于统计理论来分析.

在统计学中，独立性检验就是检验两个分类变量是否有关系的一种统计方法. 教科书借助于用字母表示的吸烟与患肺癌的列联表，构造了一个随机变量 K^2，若吸烟与患肺癌没有关系，K^2 应该很小；否则，K^2 应该很大. 也就是说 K^2 越大，说明吸烟与患肺癌的关系的可能性越大. 教科书在检验吸烟与患肺癌的关系的基础上，给出了两个分类变量独立性检验的一般步骤，同时给出了 K^2 的临界值表. 最后通过例 1 和例 2 使学生进一步体会独立性检验的基本思想、方法和初步应用.

在讨论两个分类变量关系时，要把重点放在独立性检验的统计学原理上，使学生掌握独立性检验的基本步骤，体会独立性检验的基本思想. 独立性检验的步骤是相对固定的，仿照教科书的例题，学生不难完成书后的习题，但独立性检验的统计思想对学生来说是比较难理解的，所以在教学中结合例题介绍独立性检验的思想是十分重要的.

独立性检验的思想来自于统计学的假设检验思想，它与反证法类似. 假设检验和反证法都是先假设结论不成立，然后根据是否能够推出“矛盾”来断定结论是否成立. 但二者“矛盾”的含义不同，反证法中的“矛盾”是指不符合逻辑的事件的发生；而假设检验中的“矛盾”是指不符合逻辑的小概

率事件的发生，即在结论不成立的假设下推出有利于结论成立的小概率事件的发生.

我们知道小概率事件在一次试验中通常是不会发生的，所以认为结论在很大的程度上是成立的. 若在实际中这个事件发生了，说明保证这个事件为小概率事件的条件有问题，即应该认为结论成立. 在教学中可以把假设检验的方法与反证法对比，以加深学生对独立性检验的思想的理解.

在画等高条形图时，有条件的学校可以利用信息技术，借助于计算机（器）制作图形，以节省作图时间和成本.

1. 与列联表相关的概念.

(1) 分类变量与定量变量.

分类变量也称为属性变量或定性变量，它们的取值一定是离散的，而且不同的取值仅表示个体所属的类别，如性别变量，只取男、女两个值，商品的等级变量只取一级、二级、三级，等等. 有时也可以把分类变量的不同取值用数字来表示，但这时的数字除了分类以外没有其他的含义. 例如用 0 表示“男”，1 表示“女”，性别变量就变成取值为 0 和 1 的随机变量，但是这些数字没有其他的含义. 此时比较性别变量的两个不同值之间的大小没有意义，性别变量的均值和方差也没有意义（随机变量均值和方差的概念见《选修 2-3》).

定量变量的取值一定是实数，它们的取值大小有特定的含义，不同取值之间的运算也有特定的含义. 例如身高、体重、考试成绩等，张明的身高是 180 cm，李立的身高是 175 cm，说明张明比李立高 $180-175=5$(cm). 定量变量的数字特征，如均值和方差都有实际意义.

本节研究的是两个分类变量的独立性检验问题.

(2) 列联表.

列联表一般为两个以上分类变量的汇总统计表，教科书中仅限于研究两个分类变量的列联表，并且每个分类变量只取两个值，这样的列联表称为 2×2 的列联表（一般的独立性检验并不要求每个分类变量只取两个值，但这时检验统计量的构造更复杂一些，可以参阅大学的统计教科书).

在教学中不要求给出这些概念的严格定义，只要给出描述性的说明即可.

2. 独立性检验的基本思想.

假设检验的方法是统计学中一个很重要的方法，也是很常用的方法. 独立性检验仅是假设检验的一个特例. 因为中学生接触的统计知识不多，没有一些常用分布的概念，所以教科书中没有使用统计量的概念及卡方分布的概念，而是尽量用形象直观的语言解释独立性检验的基本思想. 为了帮助教师更好地理解这部分内容，我们这里给出假设检验的一般步骤以便于教师比较.

(1) 提出假设检验问题.

这里包括原假设和备择假设. 原假设用 H_0 表示，备择假设用 H_1 表示. 一个假设检验问题可以表达为

$$H_0 \ \leftrightarrow \ H_1.$$

比如，在吸烟与患肺癌是否有关系的独立性检验问题中，原假设 H_0 为“吸烟与患肺癌没有关系”，备择假设 H_1 为“吸烟与患肺癌有关系”. 这个假设检验问题可以表述为

$$H_0\text{：吸烟与患肺癌没有关系}\leftrightarrow H_1\text{：吸烟与患肺癌有关系.} \qquad (*)$$

(2) 选择检验的指标.

选择适当的样本的函数 $T(X)$（不含有任何未知参数的样本的函数，统计学上称之为检验统计量）作为检验指标，使得 $T(X)$越小，原假设 H_0 成立的可能性越大；$T(X)$越大，备择假设 H_1 成立的可能性越大.

如对于假设检验问题(*)，选择的检验指标为

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

它越小，原假设

H_0：吸烟与患肺癌没有关系

成立的可能性越大；它越大，备择假设

H_1：吸烟与患肺癌有关系

成立的可能性越大.

(3) 根据检验指标的含义确定拒绝域的构造.

当检验指标越小，原假设成立的可能性越大时，拒绝域的构造为

$$D=\{T\,|\,T=T(x)>t\},$$

其中 t 是待定常数. 我们称拒绝域的边界值 t 为临界值. 构造拒绝域是为了确定是否应该断定备择假设 H_1 成立. 具体做法是，若由观测数据计算得到的观测指标 $T(x)$ 落在拒绝域 D 中，就应该断定备择假设 H_1 成立.

例如，对于假设检验问题（∗），拒绝域的构造为

$$D=\left\{K^2\,\middle|\,K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}>k\right\},$$

这里 k 为临界值. 因为由观测数据计算得到的观测指标 K^2 落在拒绝域 D 中，即 $K^2>k$ 时，所以应该断定备择假设 H_1 成立.

(4) 确定拒绝域中的临界值.

预先给定很小的正数 α，确定临界值 t_α，使得在 H_0 成立的假设下检验统计量大于该临界值的概率不超过 α，即

$$P(D_\alpha)\leqslant\alpha,$$

其中

$$D_\alpha=\{T\,|\,T=T(X)>t_\alpha\},$$

称这里的 α 为显著水平，称 D_α 为对应于显著水平 α 的拒绝域，常用的显著水平为 0.1，0.05 或 0.01.

例如，对于假设检验问题(∗)，统计学家证明了当 H_0 成立时，即当"吸烟与患肺癌没有关系"成立时，检验统计量

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

应该近似地服从卡方分布(样本容量越大，近似的程度越高). 因此，临界值 k_α 应该满足下式

$$P(K^2>k_\alpha)\leqslant\alpha.$$

由概率的单调性，即对于任何实数 $x_1\leqslant x_2$，有

$$P(K^2\geqslant x_2)\leqslant P(K^2>x_1),$$

所以可选择满足条件

$$P(K^2\geqslant k_\alpha)=\alpha$$

的 k_α 作为拒绝域的临界值.

因此，要确定拒绝域的临界值，就必须知道随机变量 K^2 的概率分布. 但是在独立性检验中，K^2 的概率分布不容易计算，所以用卡方分布来近似. 这样，当取显著水平 $\alpha=0.01$ 时，临界值 $k_\alpha\approx$ 6.635，拒绝域

$$D_{0.01}=\{K^2\,|\,K^2>6.635\}.$$

(5) 给出推断结果及其解释.

根据样本数据计算检验统计量的值，如果该值在拒绝域中，就拒绝原假设成立；否则，就接受原

假设成立. 拒绝原假设的结论解释为：在犯错误的概率不超过 α 的前提下认为 H_1 成立. 接受原假设的结论解释为：没有发现样本数据与 H_0 矛盾.

例如，对于假设检验问题(*)，取显著水平 $\alpha=0.01$ 时，临界值 $k_\alpha\approx6.635$，而由教科书上的数据计算得到检验统计量 K^2 的观测值约为56.632，它落在拒绝域中，因此要拒绝原假设 H_0 成立，即在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为吸烟与患肺癌有关系.

(6) 假设检验方法的特点与结果的解释.

① 假设检验具有保护原假设的倾向，即容易接受原假设.

② 要特别注意，接受原假设仅意味着没有发现样本数据与 H_0 矛盾，这不足以说明原假设一定正确.

③ 若在显著水平 α 下拒绝原假设，则说明在此种情况下错误地拒绝原假设的可能性至多为 α. 此时断言“备择假设成立”出错的可能性为 α.

④ 若在显著水平 α 下接受原假设，则说明没有发现充分的证据反对原假设 H_0. 显著水平越小，越容易产生接受原假设的结论.

(7) 应用假设检验方法解决实际问题的注意事项.

① 对于所考虑的实际问题，显著水平 α 要事先确定，即在获取观测数据之前确定，而不能根据观测数据的结果确定显著水平.

② 确定原假设和备择假设的原则是把需要证明的新结论作为备择假设，或把如果不成立会造成重大损失的结论作为备择假设，把由大量历史经验和数据证实的结论作为原假设.

教科书中仅通过吸烟与患肺癌之间的关系的讨论过程体现了假设检验的思想，并没有一般地给出实施假设检验的具体步骤，其目的仅是让学生通过实例初步体会一下假设检验的思想.

可以从反证法的思想解释上面介绍的假设检验原理，下表列出了二者的对应关系：

反证法	假设检验
要证明结论 A	备择假设 H_1
在 A 不成立的前提下进行推理	在 H_1 不成立的条件下，即 H_0 成立的条件下进行推理
推出矛盾，意味着结论 A 成立	推出有利于 H_1 成立的小概率事件(概率不超过 α 的事件)发生，意味着 H_1 成立的可能性很大
没有找到矛盾，不能对 A 下任何结论，即反证法不成功	推出有利于 H_1 成立的小概率事件不发生，接受原假设

从上述对比中可以看出，假设检验的思想方法和反证法类似，不同之处有二，其一是假设检验中用有利于 H_1 的小概率事件的发生代替了反证法中的矛盾；其二是假设检验中接受原假设的结论相当于反证法中没有找到矛盾.

把假设检验的基本思想具体到独立性检验问题中，得到两个分类变量独立性检验的基本思想如下：在假设“两个分类变量没有关系”的前提下，构造一个有利于“两个分类变量有关系”的小概率事件(即概率不超过 α 的事件). 如果样本观测数据使得这个小概率事件发生，就可以在犯错误的概率不超过 α 的前提下认为“两个分类变量有关系”.

在探究中，通过随机变量 K^2 来构造这类小概率事件 $\{K^2\geqslant k_0\}$，其中临界值 k_0 满足条件 $P(K^2\geqslant k_0)\leqslant\alpha$，这里的概率计算要以“两个分类变量没有关系”为前提条件. 在实际应用中，人们总是喜欢用随机变量 K^2 解决两个分类变量的独立性检验问题. 在例2中，教科书给出了通过 K^2 来构造这类小概率事件的方法.

3. 教学中要特别强调检验的必要性.

为什么不能只凭列联表的数据和图形下结论？原因是列联表中的数据是样本数据，它只是总体的代表，具有随机性，因此需要用列联表检验的方法提供所得结论犯错误概率的信息.

4. 教学中对教科书第 12 页“(2)”式的解释应该注意的问题.

(1) 该式成立的前提是“两个变量（吸烟与患肺癌）没有关系”，如果这个前提不成立，“(2)”式就不成立.

(2)“(2)”式中的概率近似地等于 0.01，当样本容量 $n=a+b+c+d$ 越大时，近似的程度越高. 为保证近似的效果，在实际应用中要求 4 个数 a，b，c 和 d 都超过 5.

(3) 可以向学生解释“(2)”式的推导需要很多概率统计知识，感兴趣的学生可以在大学阶段进一步学习这方面的知识，这里只需要了解结果. 关于“(2)”式的推导可以查阅大学的统计教科书.

5. 对犯错误的概率的解释.

在吸烟与患肺癌的例子中，由 $k\approx 56.632\geqslant 6.635$ 得结论“吸烟与患肺癌有关系”，并且这个结论犯错误的概率不会超过 0.01. 另一方面，由教科书中的表 1-11 可知

$$P(K^2\geqslant 10.828)\approx 0.001,$$

因此由 $k\approx 56.632\geqslant 10.828$ 也可得结论“吸烟与患肺癌有关系”，并且这个结论犯错误的概率不会超过 0.001.

这里用的是同样的数据，得到的是相同的结论，为什么会得到不同的犯错误概率的上界估计？两个估计中哪一个正确？

实际上这两种说法都正确，0.01 和 0.001 是在不同的判别规则下把“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率的上界.

规则一：如果 $K^2\geqslant 6.635$，就认为“吸烟与患肺癌有关系”；否则，就认为“吸烟与患肺癌没有关系”.

规则二：如果 $K^2\geqslant 10.828$，就认为“吸烟与患肺癌有关系”；否则，就认为“吸烟与患肺癌没有关系”.

规则一将“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率不会超过 0.01（而不是 0.001）；规则二将“吸烟与患肺癌没有关系”错判成“吸烟与患肺癌有关系”的概率不会超过 0.001. 因此，结论“吸烟与患肺癌有关系”犯错误的概率上界由临界值确定，不同的临界值对应于不同的上界估计.

6. 用 Excel 软件制作等高条形图的步骤.

下面以教科书中的吸烟与患肺癌列联表(表 1-7)中的数据为例，给出用 Excel 软件制作等高条形图的步骤.

(1) 如图 5，在 Excel 软件中输入列联表中的数据：在 A2 位置输入“不吸烟”，A3 位置输入“吸烟”；B1 位置输入“不患肺癌”，B2 位置输入“7775”，B3 位置输入“2099”；C1 位置输入“患肺癌”，C2 位置输入“42”，C3 位置输入“49”. 选中键入数据的表格，即选中 A1～A3，B1～B3，C1～C3.

	A	B	C
1		不患肺癌	患肺癌
2	不吸烟	7775	42
3	吸烟	2099	49

图 5

(2) 单击工具栏上的“图表向导”按钮，进入“图表向导-4 步骤之 1-图表类型”对话框. 选择“标准类型”中的“柱形图”后，再选择“子图表类型”中的“百分比堆积柱形图”，单击“完成”按钮. 经过上面的操作可以得到如下的图形(图 6)：

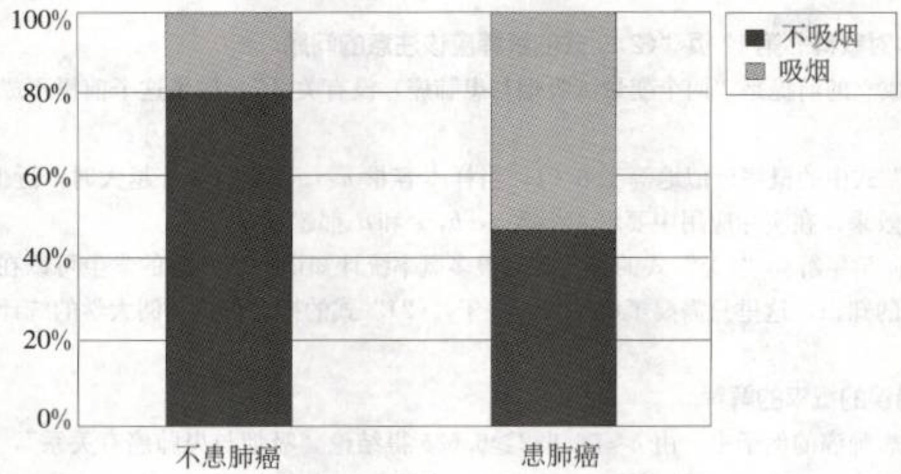


图 6

(3) 为了对比吸烟人群和不吸烟人群中患肺癌的比例，可单击工具栏上的“切换行/列”按钮，得到如下的图形(图 7)：

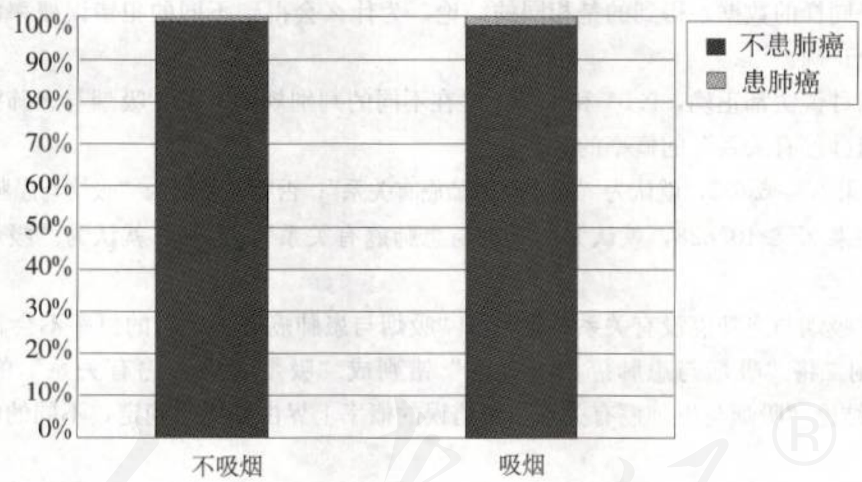


图 7

7. 例 1 的教学建议.

教学中要先直观后计算，主要是为了解释独立性检验的基本思想，要注意引导学生运用已经学过的统计知识解决问题.

(1) 解答中给出列联表，目的是复习列联表的制作.

(2) 在学生利用图形判断秃顶与患心脏病是否有关系后，向学生强调这种判断的不足之处，使他们进一步体会独立性检验的重要性.

(3) 在得到独立性检验的结论之后，要通过上下文向学生解释这里“犯错误的概率”是指将“秃顶与患心脏病没有关系”错判成“秃顶与患心脏病有关系”的概率.

(4) 讲完例题解答后，需要向学生说明：在熟悉独立性检验的基本原理后，可以通过直接计算 K^2

的观测值（不画等高条形图）来解决两个分类变量的独立性检验问题. 但是，借助于图形可以更直观地向非专业人士解释所得到的统计分析结果.

(5) 注意解释贴示中的内容，这里的结论只适用于该院的住院病人群体，不适用于其他群体.

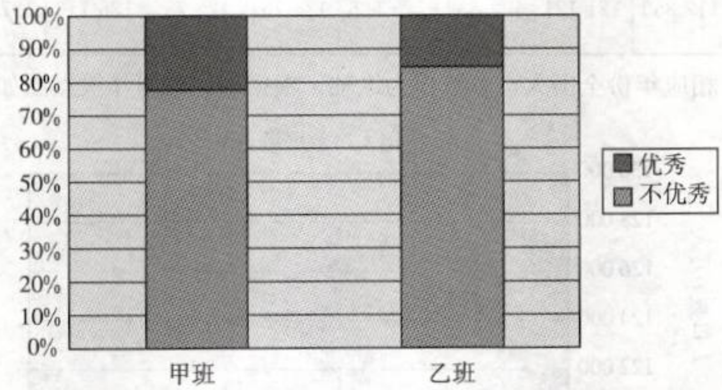
8. 14 页和 15 页的两个思考栏目的教学建议.

设置这两个思考问题的目的是给学生提供一个重温独立性检验基本思想的机会，在完成思考的解答后，可再次引导学生总结独立性检验的基本思想.

四、习题解答

练习（第 15 页）

列联表的条形图如图所示.



由图及表直观判断，好像"成绩优秀与班级有关系". 因为 K^2 的观测值 $k\approx 0.653<6.635$，由教科书中表 1-11 可知，在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下，不能认为"成绩与班级有关系".

说明 (1) 教师应要求学生画出等高条形图后，从图形上判断两个分类变量之间是否有关系. 这里通过图形的直观感觉的结果可能会出错.

(2) 本题与例题不同，本题计算得到的 K^2 的观测值比较小，所以没有理由说明"成绩优秀与班级有关系". 这与反证法也有类似的地方，在使用反证法证明结论时，假设结论不成立的条件下如果没有推出矛盾，并不能说明结论成立也不能说明结论不成立. 在独立性检验中，没有推出小概率事件发生类似于反证法中没有推出矛盾.

习题 1. 2（第 16 页）

1. 假设"服药与患病之间没有关系"，则 K^2 的值应该比较小；如果 K^2 的值很大，则说明很可能"服药与患病之间有关系". 由列联表中数据可得 K^2 的观测值 $k\approx 6.110>5.024$，而由教科书中表 1-11，得 $P(K^2\geqslant 5.024)\approx 0.025$，所以在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下可以认为"服药与患病之间有关系". 又因为服药群体中患病的频率 0.182 小于没有服药群体中患病的频率 0.400，所以"服药与患病之间有关系"可以解释为药物对于疾病有预防作用. 因此在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下，可以认为药物有效.

   说明 仿照例 1，学生很容易完成此题，但希望学生能理解独立性检验在这里的具体含义，即"服药与患病之间有关系"可以解释为"药物对于疾病有预防作用".

2. 如果"性别与读营养说明之间没有关系"，由题目中所给数据计算，得 K^2 的观测值为 $k\approx 8.416$，而

由教科书中表 1-11 知 $P(K^2\geqslant 7.879)\approx 0.005$，所以在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为“性别与读营养说明之间有关系”.

3. **说明** 需要收集数据，所以没有统一答案. 第一步，要求学生收集并整理数据后得到列联表；第二步，类似上面的习题做出推断.

4. **说明** 需要从媒体上收集数据，学生关心的问题不同，收集的数据会不同. 第一步，要求学生收集并整理数据后得到列联表；第二步，类似上面的习题做出推断.

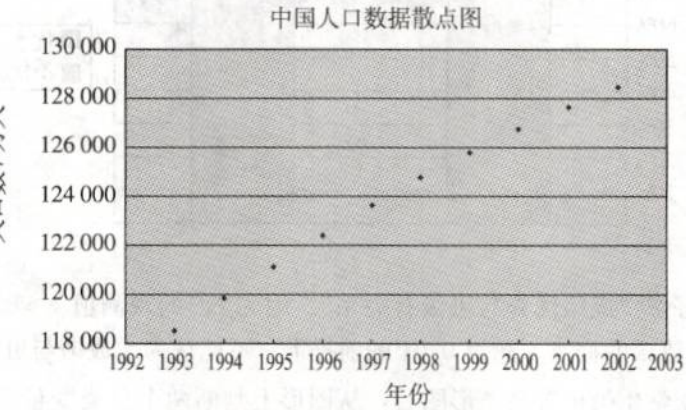
复习参考题（第 19 页）

A 组

1. 1993～2002 年中国人口总数如下表：

年份	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
$\dfrac{\text{年末人数}}{\text{万人}}$	118 517	119 850	121 121	122 389	123 626	124 761	125 786	126 743	127 627	128 453

将年份作为横轴，相应年份全国人口总数作为纵轴，根据表中数据作散点图如下：



根据散点图，可以认为中国人口总数与年份呈现很强的线性相关关系，因此选用线性回归模型建立回归方程.

由最小二乘法的计算公式，得

$$a\approx -2\ 095\ 141.503,\ b\approx 1\ 110.903,$$

则线性回归方程为

$$\hat{y}=1\ 110.903x-2\ 095\ 141.503.$$

由 R^2 的计算公式，得

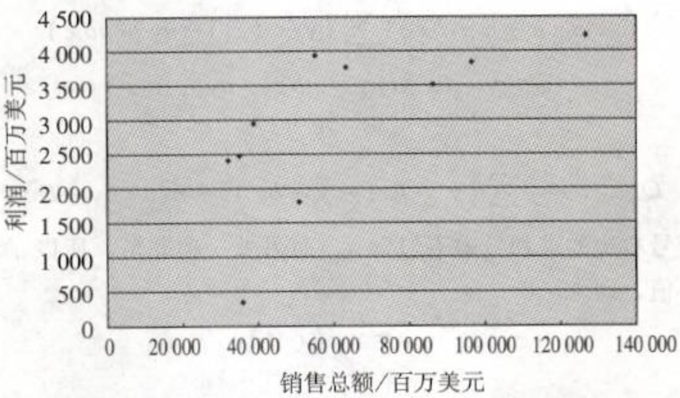
$$R^2\approx 0.994,$$

说明线性回归模型对数据的拟合效果很好.

根据回归方程，预计 2003 年末中国人口总数约为 129 997 万人，而实际情况为 129 227 万人，预测误差为 770 万人；预计 2004 年末中国人口总数约为 131 108 万人，而实际情况为 129 988 万人，预测误差为1 120万人.

说明 数据来源为《中国统计年鉴》(2003). 由于人数为整数，所以预测的数据经过四舍五入的取整运算.

2. (1) 将销售总额作为横轴，利润作为纵轴，根据表中数据绘制散点图如下页：



由于散点图中的样本点基本上在一个带形区域内分布，猜想销售总额与利润之间呈现线性相关关系.

(2) 由最小二乘法的计算公式，得

$$\hat{a}\approx 1\ 334.5,\ \hat{b}\approx 0.026,$$

则线性回归方程为

$$\hat{y}=0.026x+1\ 334.5.$$

其残差值计算结果见下表：

销售总额	126 974	96 933	86 656	63 438	55 264	50 976	39 069	36 156	35 209	32 416
利润	4 224	3 835	3 510	3 758	3 939	1 809	2 946	359	2 480	2 413
残差	−361.034	19.015	−42.894	799.487	1 189.742	−830.486	611.334	−1 901.09	244.150	248.650

(3) 对于(2)中所建立的线性回归方程，$R^2\approx 0.457$，说明在线性回归模型中销售总额只能解释利润变化的 46%，所以线性回归模型不能很好地刻画销售总额和利润之间的关系.

说明 此题也可以建立对数模型或二次回归模型等，只要计算和分析合理，就算正确.

3. 由所给数据计算得 K^2 的观测值为 $k\approx 3.689$，而由教科书中表 1-11 知

$$P(K^2\geqslant 2.706)=0.10,$$

所以在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为“婴儿的性别与出生的时间有关系”.

B组

1. 因为

$$\begin{aligned}Q(a,b)&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}((y_i-bx_i-\bar{y}+b\bar{x})-(a-\bar{y}+b\bar{x}))^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-\bar{y}+b\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(a-\bar{y}+b\bar{x})^2\\&\quad-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-\bar{y}+b\bar{x})(a-\bar{y}+b\bar{x}),\end{aligned}$$

并且

$$\sum_{i=1}^{n}(a-\bar{y}+b\bar{x})^2=n(a-\bar{y}+b\bar{x})^2,$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-\bar{y}+b\bar{x})(a-\bar{y}+b\bar{x})$$

$$=(a-\bar{y}+b\bar{x})\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i)-n\bar{y}+nb\bar{x}\right)$$
$$=(a-\bar{y}+b\bar{x})(n\bar{y}-nb\bar{x}-n\bar{y}+nb\bar{x})=0,$$

所以

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-\bar{y}+b\bar{x})^2+n(a-\bar{y}+b\bar{x})^2.$$

考察上面的等式，等号右边的求和号中不包含 a，而另外一项非负，所以 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 必然使得等号右边的最后一项达到最小值，即

$$\hat{a}-\bar{y}+\hat{b}\bar{x}=0,$$

即

$$\bar{y}=\hat{a}+\hat{b}\bar{x}.$$

2. 总偏差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ 表示总的效应，即因变量的变化效应；残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 表示随机误差的效应，即随机误差的变化效应；回归平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$ 表示解释变量的效应，即自变量的变化效应．等式

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

表示因变量的变化总效应等于随机误差的变化效应与自变量的变化效应之和.

3. **说明** 该题主要是考察学生应用回归分析模型解决实际问题的能力，解答应该包括如何获取数据，如何根据散点图寻找合适的模型去拟合数据，以及所得结果的解释三方面的内容.

III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. 在画两个变量的散点图时，下面哪个叙述是正确的（　　）.

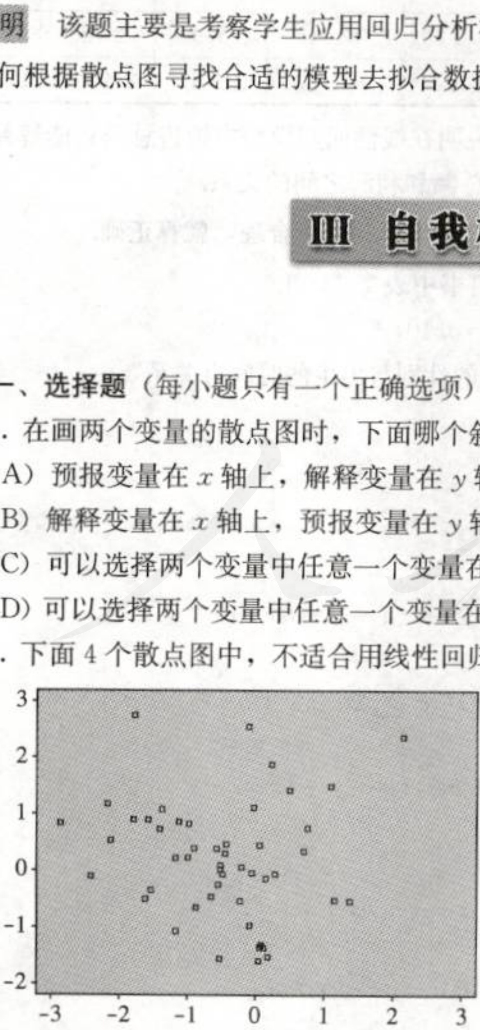
(A) 预报变量在 x 轴上，解释变量在 y 轴上

(B) 解释变量在 x 轴上，预报变量在 y 轴上

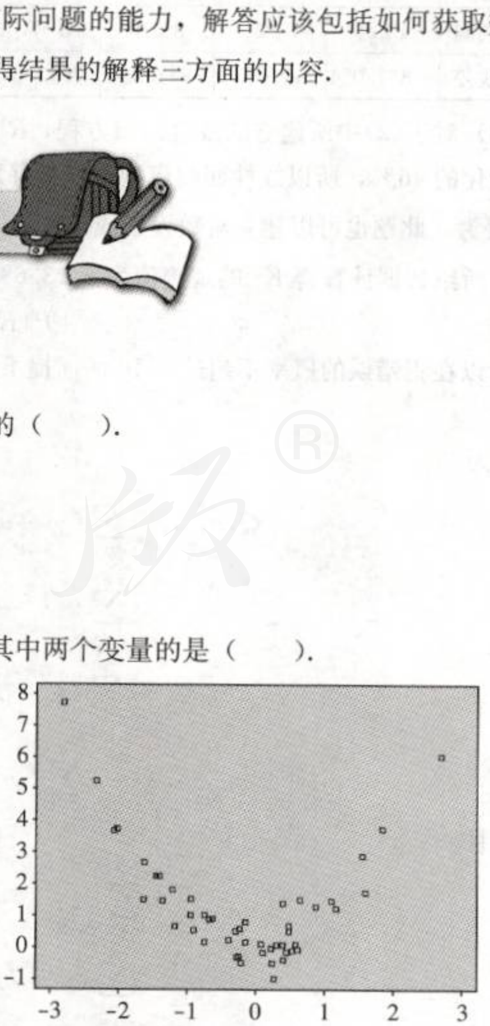
(C) 可以选择两个变量中任意一个变量在 x 轴上

(D) 可以选择两个变量中任意一个变量在 y 轴上

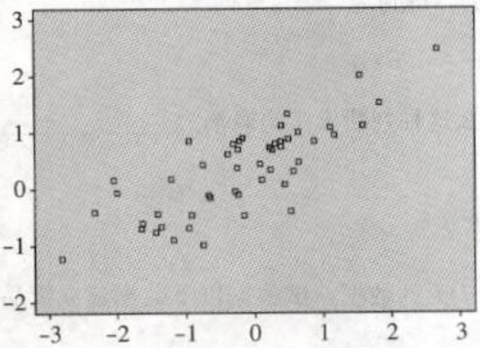
2. 下面 4 个散点图中，不适合用线性回归模型拟合其中两个变量的是（　　）.



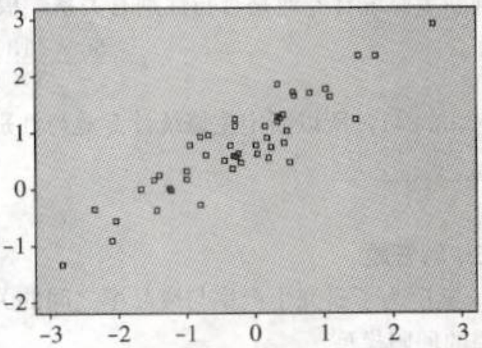
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 一位母亲记录了儿子 3～9 岁的身高，数据如下表．由此建立的身高与年龄的回归模型为 $y=7.19x+73.93$．用这个模型预测这个孩子 10 岁时的身高，则正确的叙述是（　　）．

年龄/岁	3	4	5	6	7	8	9
身高/cm	94.8	104.2	108.7	117.8	124.3	130.8	139.0

(A) 身高一定是 145.83 cm

(B) 身高在 145.83 cm 以上

(C) 身高在 145.83 cm 左右

(D) 身高在 145.83 cm 以下

4. 在两个变量 y 与 x 的回归模型中，分别选择了 4 个不同模型，它们的 R^2 如下，其中拟合效果最好的模型是（　　）．

(A) 模型 1 的 R^2 为 0.98

(B) 模型 2 的 R^2 为 0.80

(C) 模型 3 的 R^2 为 0.50

(D) 模型 4 的 R^2 为 0.25

二、填空题

5. 作两个变量的散点图的主要目的是____________．

6. 许多因素都会影响贫穷，教育也许是其中之一．在研究这两个因素的关系时，收集了美国 50 个州的成年人受过 9 年或更少教育的百分比(x)和收入低于官方规定的贫困线的人数占本州人数的百分比(y)的数据，建立的回归直线方程如下

$$y=0.8x+4.6.$$

斜率的估计等于 0.8 说明____________，成年人受过 9 年或更少教育的百分比（x）和收入低于官方的贫困线的人数占本州人数的百分比(y)之间的相关系数____________（填充“大于 0”或“小于 0”）．

7. 某大学要研究性别与职称之间是否有关系，你认为应该收集哪些数据？________________________．

8. 某高校“统计初步”课程的教师随机调查了选该课的一些学生情况，具体数据如下表．

专业 性别	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

为了判断主修统计专业是否与性别有关系，根据表中的数据，得到

$$k=\frac{50\times(13\times20-10\times7)^2}{23\times27\times20\times30}\approx4.844.$$

因为 $k>3.841$，所以断定主修统计专业与性别有关系，那么这种判断出错的概率为________________.

三、解答题

9. 某厂为了研究生产率与废品率之间的关系，记录了 7 天的数据，试根据以下数据建立废品率与生产率的回归模型.

生产率/个·周$^{-1}$	1 000	2 000	3 000	3 500	4 000	4 500	5 000
废品率/%	5.2	6.5	6.8	8.1	10.2	10.3	13

10. 在对人们的休闲方式的一次调查中，共调查了 124 人，其中女性 70 人，男性 54 人. 女性中有 43 人主要的休闲方式是看电视，另外 27 人主要的休闲方式是运动；男性中有 21 人主要的休闲方式是看电视，另外 33 人主要的休闲方式是运动.

(1) 根据以上数据建立一个 2×2 的列联表；

(2) 能否在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下，认为性别与休闲方式有关系？

参考答案

1. B.　2. A.　3. C.　4. A.

5. 直观了解两个变量的关系.

6. 一个地区受过 9 年或更少教育的百分比每增加 1%，收入低于官方规定的贫困线的人数占本州人数的百分比将增加 0.8%左右，大于 0.

7. 女教授的人数，男教授的人数，女副教授的人数，男副教授的人数（或高级职称中女性的人数，高级职称中男性的人数，中级职称中女性的人数，中级职称中男性的人数）.

8. 0.05.

9. 用 y 表示废品率，x 表示生产率，则 $y=0.002\,x+2.628$.

10. (1) 2×2 列联表为

休闲方式 / 性别	看电视	运动	合计
女	43	27	70
男	21	33	54
合计	64	60	124

(2) 假设“休闲方式与性别无关”，计算

$$k=\frac{124\times(43\times33-27\times21)^2}{70\times54\times64\times60}\approx6.201.$$

因为 $k>5.024$，所以在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“休闲方式与性别有关”.

Ⅳ 拓展资源

一、偏差平方和分解与 R^2.

教科书结合例 1 给出了总偏差平方和、回归平方和、残差平方和的概念，这些概念与偏差平方和分解有关. 偏差平方和分解指如下的公式（简称为平方和分解公式）：

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2,$$

其中

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

称为总偏差平方和，

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

称为回归平方和，

$$SS_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

称为残差平方和.

偏差平方和分解公式也可以表示为：

总的偏差平方和＝回归平方和＋残差平方和，

或

$$SS_T=SS_R+SS_E.$$

1. 偏差平方和分解公式的推导.

假设观测数据为(x_i,y_i)，$i=1$，2，…，n，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i+\hat{y}_i-\bar{y})^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i),\end{aligned}\qquad (*)$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i)&=\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}x_i-\hat{b}\bar{x})(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}\hat{b}(x_i-\bar{x})\big((y_i-\hat{a}-\hat{b}\bar{x}-\hat{b}(x_i-\bar{x})\big)\\&=\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\big((y_i-\bar{y})-\hat{b}(x_i-\bar{x})\big)\\&=\hat{b}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\Big)=0,\end{aligned}$$

代入($*$)式可得偏差平方和分解公式.

2. 有关总偏差平方和、回归平方和、残差平方和以及相关指数概念的说明.

（1）教科书用比较形象的语言分析了这三个平方和的关系，给出了每个平方和的含义，并对例1的数据给出了具体的计算结果．事实上，总偏差平方和

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

刻画了预报变量 y 的变化程度．在回归平方和

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

中，所有预测值的平均值也等于 $\bar{y}$，推导如下：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{b}x_i+\hat{a})=\hat{b}\cdot\bar{x}+\hat{a}=\hat{b}\cdot\bar{x}+\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=\bar{y}.$$

所以回归平方和又可以写成

$$SS_R=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_j\right)^2,$$

它刻画了估计量 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 的变化程度．因为估计量由解释变量 x 决定，所以回归平方和刻画了预报变量的变化中由解释变量通过线性回归模型所引起的那一部分变化程度．残差平方和

$$SS_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

刻画了残差变量变化的程度．

因此，可以把平方和分解公式解释为：预报变量的变化程度可以分解为由解释变量引起的变化程度与残差变量的变化程度之和．

（2）由平方和分解公式，可得

$$1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2},\qquad(**)$$

这意味着在线性回归模型中，预报变量的1个单位的变化，需要由解释变量贡献 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，由残差变量贡献 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$．因此，在线性回归模型中，预报变量 y 的变化中的 $100\times\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}\%$ 是由解释变量 x 引起的，或者说解释变量 x 可以解释预报变量 y 的 $100\times\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}\%$ 的变化．

（3）由表达式（**）移项得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=R^2,$$

即

$$R^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}.$$

上式说明了在线性回归模型中 R^2 与平方和分解公式之间的关系.

由(2)知在线性回归模型中，可以说预报变量 y 的变化中的 $100R^2\%$ 是由解释变量 x 引起的，或者说解释变量 x 可以解释预报变量 y 的 $100R^2\%$ 的变化. 因此，R^2 越大，模型的拟合效果越好；R^2 越小，模型的拟合效果越差.

二、下面的内容是关于“假设检验的基本思想及其初步应用”的，可以作为选学内容介绍给学生.

数学家庞加莱每天都从一家面包店买一块 1 000 g 的面包，并记录下买回的面包的实际质量. 一年后，这位数学家发现，所记录数据的频率分布折线近似于一条均值为 950 g 的正态分布密度曲线. 于是庞加莱以此为证据，向警察控告这家面包店的面包分量不足. 警察要求面包师改正克扣分量的行为.

又过了一年，庞加莱向警察报告面包师没有悔改. 当警察再次要求面包师改正欺骗行为时，面包师想：“庞加莱怎么知道我总是给他大面包呢?”原来，庞加莱向警察展示了他这一年记录下的面包质量频率分布折线图，这是一条具有均值为 950 g，但左边被切去的钟形曲线.

你想知道庞加莱是怎样推断出面包师没有悔改的吗？这就需要了解假设检验的基本原理.

探究：某地区的羊患某种病的概率是 0.4，且每只羊是否患病是彼此独立的. 今研制一种新的预防药，任选 6 只羊做试验，结果 6 只羊服用此药后均未患病. 你认为这种药是否有效?

初看起来，大家会认为这种药一定有效，因为服药的羊均未患病. 但由于羊患病的概率是 0.4，因此大部分羊不服药也不会患病. 也就是说，很难断定这 6 只羊是因为服药才未患病的. 究竟应该怎样下结论呢?

我们可以这样来考虑：在“药无效”这个前提下，考察“6 只羊都不患病”这个事件发生的可能性的大小. 如果能够确定这个事件发生的概率很小，而现在这件事确实发生了，那么就说明“药无效”这个前提不应该成立，即应该是药有效. 因此我们需要在“药无效”这个前提下，计算 6 只羊都不患病的概率大小.

思考：你能总结一下上述想法的依据吗?

现假设“药无效”，则事件“6 只羊都不患病”发生的概率为

$$(1-0.4)^6 \approx 0.047, \tag{1}$$

这是一个小概率事件. 这个小概率事件的发生，说明“药无效”的假设不合理，应该认为药是有效的.

这里的小概率事件通常指概率小于 α（常取 $\alpha=0.01$，0.05 或 0.10）的事件，我们称 α 为显著水平. 显著水平 α 是“药有效”这个结论可能犯错误的概率. 显著水平 α 越小，“药有效”这个结论越可靠.

思考：你认为“药有效”这个结论一定可靠吗?

做出“药有效”的结论时有可能犯错误，不过犯错误的概率很小，不超过 0.05.

思考：在“药无效”的假设下，事件 $A=\{6$ 只实验羊全患病$\}$ 的概率为 $0.4^6 \approx 0.004$，也是一个小概率事件. 如果事件 A 发生了，能够说明药有效吗？为什么?

总结上述过程，其基本思想是：

1. 要说明新药有效，先假设它无效，然后构造一个有利于“药有效”的小概率事件（此处是“6 只羊都不患病”）. 若这个小概率事件发生了，就否定了“假设”，即认为新药有效.

2. 探究中的概率计算公式(1)以“药无效”为前提条件，这个条件相当于说“羊患某种病的概率是 0.4”. 如果没有这个前提条件，“6 只羊都不患病”的概率就不等于 $(1-0.4)^6$，并且无法计算出这个概率.

以上就是假设检验的基本思想，即在论述 H 不成立的前提下，有利于 H 的小概率事件发生，就

推断 H 成立.

思考：你能指出反证法与假设检验的基本思想有什么类似的地方吗？它们的不同之处是什么？

探究：在一次试验中，如果 6 只试验羊中有 m 只患病，我们能断定“药有效”吗？

患病羊的只数 T 是随机的，m 是 T 在一次试验中的观测值. T 越小，越有利于“药有效”的假设. 因此要在假设“药无效”的前提下考察事件 $\{T\leqslant m\}$ 发生的概率. 这个概率越小，“药有效”这一结论成立的可信程度越高，我们称这个概率为 p-值. 如果 p-值小于 0.01，就有 99%的把握认为“药有效”；如果 p-值小于 0.05，就有 95%的把握认为“药有效”；如果 p-值小于 0.10，就有 90%的把握认为“药有效”.

假设“药无效”意味着试验中的每一只羊患病的概率都是 0.4，这样 6 只羊中至多 m 只患病的概率为：

$$P(T\leqslant m)=\sum_{i=0}^{m}C_6^m 0.4^m(1-0.4)^{(6-m)}\ ,\ 0\leqslant m\leqslant 6.$$

列出计算结果：

m	0	1	2	3	4	5	6
$P(T\leqslant m)$	0.047	0.233	0.544	0.821	0.959	0.996	1

从表中可以看出，当 $m=0$ 时，约有 95%的把握认为“药有效”；当 $m=1$ 时，约有 75%的把握认为“药有效”；当 $m=2$ 时，仅有 45%的把握认为“药有效”……

一般地，利用假设检验的基本思想推断某论述 H 成立的步骤如下：

1. 根据问题的实际含义构造一个用于检验的随机变量 T；
2. 分析检验 T 的取值和论述 H 之间的关系，找出有利于 H 成立的事件 A；
3. 在 H 不成立的假设下，根据试验结果计算或估计 p-值，即 $P(A)$；
4. 做出判断：若 p-值不超过 0.01，则有 99%的把握认为 H 成立；若 p-值不超过 0.05，则有 95%的把握认为 H 成立；若 p-值不超过 0.10，则有 90%的把握认为 H 成立……

在实际应用中，若 p-值超过显著水平 α，则认为在试验结果中还没有找到支持论述 H 的有力证据.

例 1 某工厂生产的产品的合格率一直稳定在 99%以上. 今有一批新产品，从中随机抽取 10 件产品检验，发现有 1 件次品. 能够以多大把握认为该批产品的合格率小于 99%？

解：用 p 表示这批产品的合格率，T 为样本中的次品件数. 现在要判断的论述为

$$H：p<0.99.$$

若 H 成立，则 T 应该比较大；而当 H 不成立时，$p\geqslant 0.99$，因此 p-值

$$P(T\geqslant 1)=1-P(T=0)=1-p^{10}\leqslant 1-0.99^{10}\approx 0.095\ 6<0.10,$$

因此有 90%的把握认为这批产品的合格率小于 99%.

例 1 在 H 不成立的条件下，产品合格率的变化区间为 $[0.99,\ 1]$. 因此在这个条件下无法精确地计算出 p-值，只能采用估计的方法来进行判断.

例 2 某车间生产一种电阻. 在正常的生产状态下，车间所生产出的电阻阻值都服从正态分布 $N(80,\ 1)$. 为监控生产状态，每隔 15 分钟抽取一个电阻进行检测. 如果在连续检测的 18 个电阻中至少有 1 个电阻的阻值落在区间 $[77,\ 83]$ 外，那么能以多大的把握认为此时的生产状态不正常？

解：要判断的论述为

H：此时的生产状态不正常.

用 T 表示连续取出的 18 个电阻中阻值落在区间 $[77,\ 83]$ 外的个数. 若 H 成立，则 T 应该比较大.

在 H 不成立的条件下，根据正态分布的 3σ 原则，电阻的值落在区间[77，83]的概率为 $p\approx0.997$，从而 p-值为

$$P(T\geqslant1)=1-0.997^{18}\approx0.053<0.10.$$

因此约有 90％的把握认为此时的生产状态不正常.

探究：庞加莱是怎样得出面包师没有悔改的结论的？

现在要推断的结论为

H：面包师没有悔改，且总给庞加莱大面包.

在 H 不成立的条件下（即面包师已经悔改），面包的质量分布的总体密度曲线应该是均值为1 000 g的完整的钟形曲线，现在庞加莱发现面包的质量频率分布折线近似于一条具有均值为 950 g，但左边被切去的钟形曲线. 在面包师已经悔改的情况下，这是一个小概率事件，因此断定 H 成立，即断定面包师没有悔改.

事实上，面包师向警察承认了自己总是挑质量大的面包给庞加莱.

三、参考书目

G. R. Iversen，M. Gergen. 统计学——基本概念和方法. 吴喜之，等译. 北京：高等教育出版社，2000.

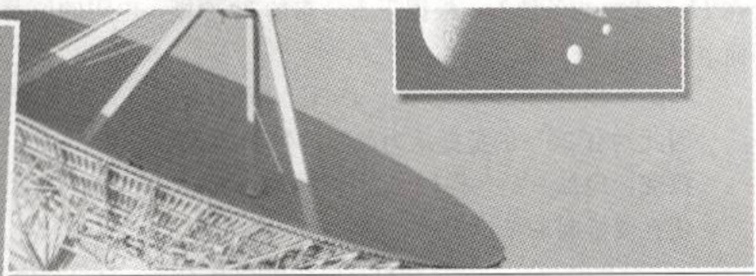
吴喜之. 统计学——从数据到结论. 北京：中国统计出版社，2004.

廖昭懋，杨文礼. 概率论与数理统计. 北京：北京师范大学出版社，1990.

茆诗松，王静龙. 数理统计. 上海：华东师范大学出版社，2000.

第二章

推理与证明



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 本章的课程目标是，结合已学过的生活实例和数学实例，让学生了解合情推理和演绎推理的含义，以及它们之间的联系与差异；利用合情推理去猜测和发现一些结论，探索和提供解决一些问题的思路和方向，利用演绎推理去进行一些简单的推理，证明一些数学结论；结合已学过的数学实例，让学生了解证明的两类基本方法——直接证明和间接证明，以及它们的思考过程和特点.

2. 学习目标

(1) 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

(2) 结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本方法，并能运用它们进行一些简单推理.

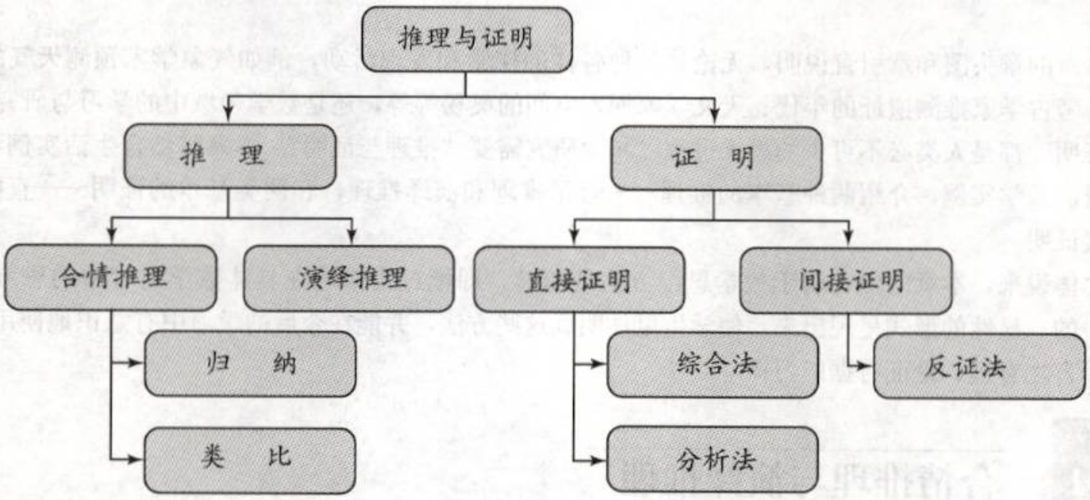
(3) 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

(4) 结合已学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.

(5) 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 2 节：2.1 合情推理与演绎推理，2.2 直接证明与间接证明.

(1) 归纳推理和类比推理是合情推理常用的思维方法，前者是由部分到整体、个别到一般的推理，后者是由特殊到特殊的推理. 教科书以提出歌德巴赫猜想的思维过程为背景，从中概括出归纳推理的含义，然后借助例题说明应用归纳推理的一般步骤以及归纳推理的作用；从提出猜想“火星上可能有生命存在”的思维过程和圆与球的类比的思维过程中，总结出类比推理的含义，然后借助例题说明应用类比推理的一般步骤以及类比推理的作用. 合情推理的结论未必可靠，教科书结合例题对此进行了说明.

(2) 演绎推理是由一般到特殊的推理，“三段论”是演绎推理的一般模式. 教科书首先从证明问题的思维过程中提炼出演绎推理的含义，然后以学生熟悉的证明题为例，详细分析证明过程中包含的演绎推理过程. 演绎推理只要前提正确，推理的形式正确，推理所得的结论就一定是正确的. 教科书以探究的形式说明了演绎推理可能犯错的情况.

(3) 数学结论的正确性必须通过逻辑推理的方式加以证明才能得到确认，这是数学区别于其他学科的显著特点. 教科书结合学生已经学过的数学知识，通过数学实例介绍两类基本的数学证明方法：直接证明与间接证明，让学生了解这些证明方法的思考过程与特点. 这部分内容也是对学生已经学习过的基本证明方法的总结.

三、课时分配

全章共安排了 2 个小节，教学时间约需 10 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

2.1 合情推理与演绎推理	约 5 课时
2.2 直接证明与间接证明	约 4 课时
小结	约 1 课时

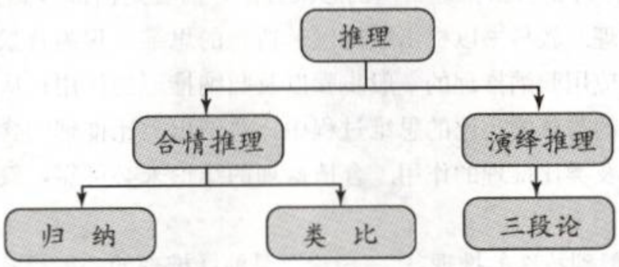
II 教科书分析

本章的章头图和章引言说明，无论是各种各样的探索和发现活动，例如气象学家预测天气的可能状态、考古学家推测遗址的年代、天文学家探索空间的奥秘等等，还是数学领域中的学习与研究，“推理与证明”都是人类必不可少的思维过程．科学研究需要“推理与证明”．本章将结合生活实例和学生已学过的数学实例，介绍两种基本的推理——合情推理和演绎推理，和两类基本的证明——直接证明和间接证明．

总体说来，本章的内容属于数学思维方法的范畴，即把过去渗透在具体数学内容中的思维方法，以集中的、显性的形式呈现出来，使学生更加明确这些方法，并能在今后的学习中有意识地使用它们，以培养言之有理、论证有据的习惯．

2.1 合情推理与演绎推理

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：了解合情推理的含义，能利用归纳和类比进行简单的推理；了解演绎推理的含义，能利用“三段论”进行简单的推理．

难点：用归纳和类比进行推理，做出猜想；用“三段论”进行简单的推理．

三、编写意图与教学建议

推理一般包括合情推理和演绎推理，它们都是日常学习和生活中经常应用的思维方法．教科书尽量结合学生已学过的数学实例和生活中的实例，从中挖掘、提炼出合情推理和演绎推理的含义和推理方法，同时纠正推理过程中可能犯的典型错误，帮助学生了解合情推理和演绎推理的含义，为学生应用这两种推理解决问题做出示范．

2.1.1 合情推理

数学发现的过程往往包含合情推理的成分，在人类发明、创造活动中，合情推理也扮演了重要角色. 因此，分析合情推理的过程，对于了解数学发现或其他发现的过程是非常重要的. 归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 教科书以学生熟悉的例子为载体，引导他们提炼、概括归纳和类比的含义和推理方法，并借助例题具体说明在数学发现的过程中应用归纳和类比的过程.

1. 归纳推理的含义.

教科书以数学史上著名的哥德巴赫猜想为背景引入归纳推理. 哥德巴赫猜想的提出过程是一个典型的运用归纳推理的过程，教科书详细分析了猜想的提出过程，同时分析了其中的思维方法，并从这个过程中提炼出归纳推理的含义.

教学中，在分析哥德巴赫猜想的提出过程时，可以引导学生认识以下几点：

第一，“猜想”有一定的偶然性，但这与哥德巴赫对数有极其浓厚的兴趣有关；

第二，数学研究中，有时对研究对象进行一些形式上的改变有利于发现规律，例如把 $3+7=10$，$3+17=20$…改写为 $10=3+7$，$20=3+17$…；

第三，在猜想提出的过程中，特例的验证是必须的；

第四，由于特例的属性可能有许多（例如 10，20，30…的属性就有偶数、10 的倍数等），所以，特例也要尽量选得具有“一般性”；

第五，猜想是从具体实例中概括出来的，因此对每一个具体实例的不同方面的特征进行细致分析很重要，这样才有利于概括出不同实例的共同特征，进而作出猜想.

2. 归纳推理的特点.

下面，我们将归纳推理的特点作一个小结，以供教师参考.

(1) 归纳推理是由部分到整体、由个别到一般的推理；

(2) 归纳推理的前提是部分的、个别的事实，因此归纳推理的结论超出了前提所界定的范围，其前提和结论之间的联系不是必然性的，而是或然性的，所以“前提真而结论假”的情况是有可能发生的（如教科书第 29 页所述的费马的猜想）；

(3) 人们在进行归纳推理的时候，总是先搜集一定的事实材料，有了个别性的、特殊性的事实作为前提，然后才能进行归纳推理，因此归纳推理要在观察和实验的基础上进行；

(4) 归纳推理能够发现新事实、获得新结论，是做出科学发现的重要手段.

在进行归纳推理时，一般步骤是：首先，对有限的资料进行观察、分析、归纳整理；然后，在此基础上提出带有规律性的结论，即猜想；最后，检验这个猜想. 教科书的例 1 和例 2 就是按照这个过程进行归纳推理的. 教学中也要让学生进行简单的归纳推理的练习.

3. 例 1 和例 2 的编写意图和教学建议.

例 1 和例 2 都是应用归纳推理，发现新事实、获得新结论的例子.

例 1 的教学中，在学生观察图 2.1-1 和下列等式

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

呈现出的规律时，可做如下引导：

第一，所谓“规律”，是指“项数”与它们的“和”之间的关系，因此要努力把“和”与“项数”联系起来；

第二，数学符号语言、图形语言、日常语言等相互转换，有利于发现规律．本例解答中，把数学式子用日常语言表述出来就是这个目的．

例 2 是应用归纳推理，发现新事实、获得新结论的例子．本例比较简单，教学中可以先让学生用递推公式自己计算出数列的前几项，观察其中的规律，并说出第 n 项与序号 n 之间的关系，再由此猜想该数列的通项公式．另外，还要注意引导学生体会基础知识在得出猜想过程中的作用．在本例的解答中，用“求通项公式就是求函数的解析式 $a_n=f(n)$”指引学生从数列的前几项作出猜想．

4. 类比推理的含义．

与归纳推理类似，教科书对类比推理的引入也是先分析具体例子所反映的思维过程，从中提炼出类比推理的一般过程，然后再概括出类比推理的含义．教科书列出的两个引例是科学家将火星与地球作类比的例子和数学上将空间中的球与平面上的圆作类比的例子．第 1 个引例的思维过程是：先把火星与地球作类比，发现火星存在一些与地球类似的特征，然后从地球的一个已知特征（有生命存在）出发，猜测火星也可能具有这个特征．教师可以用表格的形式将这个过程明确表示出来（表 2-1）．

表 2-1

地　球	火　星
行星、围绕太阳运行、绕轴自转	行星、围绕太阳运行、绕轴自转
有大气层	有大气层
一年中有季节的变更	一年中有季节的变更
温度适合生物的生存	大部分时间的温度适合地球上某些已知生物的生存
有生命存在	可能有生命存在

第 2 个引例的思维过程是：将球与圆作类比，发现球存在一些与圆类似的特征（如都具有完美的对称性，都是到定点的距离等于定长的点的集合），而已经知道圆的一些已知特征，由此可以推测球的类似特征．由于圆是平面内的基本图形，而球是空间中的基本图形，所以在将圆的基本特征推广为球的类似特征时，要将涉及到的平面元素推广为相应的空间元素．教科书第 25 页的探究栏目的参考解答如下（表 2-2）：

表 2-2

圆的概念和性质	球的类似概念和性质
圆的周长	球的表面积
圆的面积	球的体积
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦	球心与截面圆（不经过球心的截面圆）圆心的连线垂直于截面圆
与圆心距离相等的两弦相等；与圆心距离不等的两弦不等，距圆心较近的弦较长	与球心距离相等的两个截面圆面积相等；与球心距离不等的两个截面圆面积不等，距球心较近的截面圆面积较大
以点 $P(x_0,\ y_0)$为圆心，r 为半径的圆的方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	以点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$为球心，r 为半径的球的方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

教学中要充分分析这两个例子所反映的思维过程，从中挖掘出类比推理的过程，然后再给出类比推理的含义.

5. 类比推理的特点.

(1) 类比推理是从特殊到特殊的推理；

(2) 类比推理是从人们已经掌握了的事物的特征，推测正在被研究中的事物的特征，所以类比推理的结果具有猜测性，不一定可靠；

(3) 类比推理以旧的知识作基础，推测新的结果，具有发现的功能. 类比在数学发现中有重要作用，例如，通过空间与平面、向量与数、无限与有限、不等与相等的类比，可以从熟悉的知识（平面、数、有限、相等）中得到启发，发现可以研究的问题及其研究方法；

(4) 由于类比推理的前提是两类对象之间具有某些可以清楚定义的类似特征，所以进行类比推理的关键是明确地指出两类对象在某些方面的类似特征.

在进行类比推理时，一般步骤是：首先，找出两类对象之间可以确切表述的相似特征；然后，用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想；最后，检验这个猜想. 教科书的例 4 就是按照这个过程进行类比推理的. 教学中也要让学生进行简单的类比推理的练习.

6. 例 3 和例 4 的教学建议.

(1) 例 3 的教学可以分为两个层次. 首先，由上所述，进行类比推理的前提是明确类比关系. 因此，本例的设计意图之一就是让学生通过类比，将实数的加法和乘法的相似运算性质明确地表示出来. 尽管实数的加法和乘法都是学生熟悉的运算，但是从什么角度进行类比和怎样明确地表示二者的相似性，对学生来说并不容易，不同的学生可能有不同的答案. 实际上，本例解答中的 4 个类比角度就是刻画“交换群”的运算的 4 个方面. 教师教学时可以先让学生尽可能多地选取不同的角度进行类比，明确地说出二者的相似性，然后进行总结（表 2-3）：

表 2-3

类比角度	实数的加法	实数的乘法
运算结果	若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $a+b\in\mathbf{R}$	若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $ab\in\mathbf{R}$
运算律 （交换律和结合律）	$a+b=b+a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$	$ab=ba$ $(ab)c=a(bc)$
逆运算	加法的逆运算是减法，使得方程 $a+x=0$ 有唯一解 $x=-a$	乘法的逆运算是除法，使得方程 $ax=1$ 有唯一解 $x=\frac{1}{a}$
单位元	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$

其次，应用类比推理是可以做出新发现的. 在得到实数的加法和乘法的相似运算性质之后，教师可以简单介绍数学史上法国数学家伽罗瓦提出“群”理论的过程. 伽罗瓦正是通过类比不同的集合及其运算性质，从中归纳出共同的结构，从而提出了“群”的理论. 在这个过程中，伽罗瓦不仅用到了类比，而且用到了归纳. 教师还可以结合这个例子向学生说明，数学学习和研究从不满足于特殊情况的结果，而是通过类比、归纳等方法去探索、研究各种对象的一般规律，寻求解决问题的一般方法.

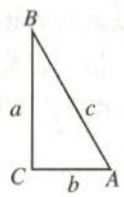
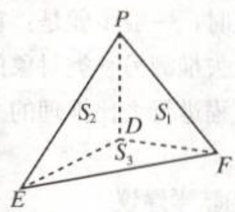
(2) 进行类比推理时，合理地确定类比对象是非常重要的，否则会使类比成为“乱比”. 为此，在例 4 之前，教科书以寻找四面体的类比对象为例，说明了确定类比对象的基本原则. 教学中可以让学生从不同角度选择类比对象，但要强调类比的原则是根据当前问题的需要，选择恰当的类比对象. 教

学中还可以列举其他例子说明这一问题．例如，从长方形的每一边都与对边平行，而与其他边垂直，长方体的每一面都与对面平行，而与其他面垂直的角度考虑，可以把长方形作为长方体的类比对象；从质量是物体大小的度量，概率是可能性大小的度量的角度考虑，可以把质量作为概率的类比对象；等等．

由于确定类比对象对学生的要求过高，因此教科书的例题和习题一般都直接给出了进行类比的两类对象．

为了降低难度，例 4 将三角形的类比对象确定为四面体，所以学生只需给直角三角形选择一种四面体作为类比对象．例 4 的教学重点是按照类比推理的一般步骤进行推理，因此在教学中，要让学生充分感受和体验类比推理的过程．首先，要分析和明确两个类比对象的相似特征，可以画出表格将其列举出来（表 2-4）；然后，类比勾股定理的结构，猜想得到等式 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$．这个结论的正确性可以让学生在学完 2.2 节之后再自己证明．

表 2-4

 直角三角形	 3 个面两两垂直的四面体
$\angle C=90^\circ$ 3 条边的长度 a，b，c 2 条直角边 a，b 和 1 条斜边 c	$\angle PDF=\angle PDE=\angle EDF=90^\circ$ 4 个面的面积 S_1，S_2，S_3 和 S 3 个"直角面" S_1，S_2，S_3 和 1 个"斜面" S

7. 合情推理的含义和特点.

归纳和类比是合情推理常用的思维方法，教科书从归纳和类比的推理过程中概括出合情推理的描述性定义．教学中可以先引导学生回顾例 1～例 4 的推理过程，然后总结出合情推理的含义．同时，还可以向学生说明，由合情推理的过程可以看出，合情推理的结论往往超越了前提所包容的范围，带有猜想的成分，因此推理所得的结论未必正确；但是，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供证明的思路和方向的作用．

8. 例 5 的教学建议.

例 5 的解答需要同时应用归纳推理和类比推理，即由移动 2 个金属片的情形，到移动 3 个金属片的情形，再到移动 4 个金属片的情形，需要类比推理；而由移动 1，2，3，4 个金属片的简单情形，到移动 n 个金属片的情形，需要归纳推理．

本例的教学可以参考下面的顺序：

首先，分析移动金属片的规则，然后从移动 2 个金属片的情形入手，画简图表示移动的方法；

接着，让学生用类比推理猜想移动 3 个金属片的方法和次数，这里类比的关键是把上面两个金属片作为一个整体，把问题归结为移动 2 个金属片的情形，而对于上面两个金属片的移动也可以归结为移动 2 个金属片的情形，然后让学生画简图或动手实验验证猜想；

类似地，让学生用类比推理猜想移动 4 个金属片的方法和次数，这里类比的关键是把当前的情形（移动 4 个金属片）归结为前一种情形（移动 3 个金属片），这里也要让学生画简图或动手实验验证猜想；

最后，让学生从移动 1，2，3，4 个金属片所需的次数中总结规律，归纳出移动 n 个金属片所需次数的通项公式. 显然，归纳出通项公式时，将 1，3，7，15 改写为 2^1-1，2^2-1，2^3-1，2^4-1 是关键，这不仅需要有较强的观察能力，而且需要有对数的敏感性.

本例的解答过程不仅获得了移动 1，2，3，4 个金属片所需的次数，还获得了移动它们的方法. 因此，例 5 之后探究栏目的设计意图是，让学生从移动 1，2，3，4 个金属片的方法中总结规律，归纳对 n 个金属片都适用的移动方法，并且从中获得移动 n 个金属片所需次数的递推公式. 从这个递推公式出发，用数学归纳法可证例 5 中获得的移动 n 个金属片所需次数的通项公式是正确的.

2.1.2 演绎推理

与合情推理一样，演绎推理也是学生在学习和生活中经常使用的一种推理形式. 特别地，数学证明主要通过演绎推理来进行. 学生对演绎推理并不陌生，这里学习演绎推理的目的，除了了解演绎推理在证明中的应用外，主要是为了了解演绎推理的含义、基本方法及其与合情推理的区别与联系.

1. 演绎推理的含义和“三段论”.

教科书以 5 个生活、数学中的例子概括出了演绎推理的含义. 教学中可以让学生分析这 5 个例子的推理过程，明确每一个例子的推理形式，从中概括出演绎推理的推理过程.

教学中，应该让学生结合具体例子体会演绎推理是由一般到特殊的推理，这也决定了演绎推理的结论不会超出前提所界定的范围，所以其前提和结论之间的联系是必然的. 因此，演绎推理只要前提和推理形式正确，结论就必然正确.

“三段论”是演绎推理的一般模式. 教科书以“三段论”来说明演绎推理的特点、作用以及推理过程中可能犯的典型错误. 教学中要先结合具体例子明确说明“三段论”中“大前提”“小前提”和“结论”的含义，以及“三段论”的推理过程，再结合例 6 和例 7 具体分析应用“三段论”解决问题的思路. 在应用“三段论”进行推理的过程中，大前提、小前提或推理形式之一错误，都可能导致结论错误. 例 7 之后的思考栏目就是一个这样的反例，教师还可以举一些学生作业中的推理错误，让学生自己分析错误的原因，以进一步说明这个问题.

2. 例 6 和例 7 的编写意图和教学建议.

例 6 和例 7 都是学生熟悉的证明题，教科书的编写意图是挖掘其中所包含的推理思路，使学生明确演绎推理的基本过程，突出演绎推理中的“大前提”“小前提”和“结论”. 事实上，许多学生能写出证明过程但不一定非常清楚证明的逻辑规则，因此他们在表述证明过程时，往往显得随心所欲、杂乱无章. 通过这两个例子的教学，应当使这种状况得到改善. 教学中，可以先让学生自己写出证明过程，再标明相应的大前提、小前提和结论. 另外，对什么时候可以省略大前提也要有一个交待.

教学中可以视需要适当补充一些证明题，要求学生给出证明，并写出其中的大前提、小前提和结论.

3. 合情推理与演绎推理的区别与联系.

在合情推理和演绎推理的教学之后，应对这两种推理的区别与联系进行总结，使学生进一步认识它们各自的特点和相互关系.

总体来说，从推理形式和推理所得结论的正确性上讲，二者有区别；从二者在认识事物的过程中所发挥的作用的角度考虑，它们又是紧密联系，相辅相成的. 合情推理的结论需要演绎推理的验证，而演绎推理的思路一般是通过合情推理获得的. 正如波利亚所说的：“论证推理（即演绎推理）是可靠

的、无疑的和终决的．合情推理是冒险的、有争议的和暂时的．它们相互之间并不矛盾，而是相互补充的．”

对于数学学习来说，演绎推理可以验证合情推理的结论的正确性，合情推理可以为演绎推理提供方向和思路．波利亚认为：“一个对数学有抱负的学生，不管他将来的兴趣如何，都应该力求学习两种推理——论证推理（演绎推理）和合情推理．前者是他专业也是他从事的那门科学的特殊标志，后者则是他取得真正的成就所必不可少的．”因此，通过本节的学习，要让学生不仅学会证明，也要学会猜想．

4. 阅读与思考“科学发现中的推理”的教学建议．

教科书通过科学史上的著名例子说明，在科学家做出科学发现的一般过程中，合情推理和演绎推理都扮演了重要角色．一般来说，科学家们提出假说都要应用合情推理，而对假说的验证，既可以通过进一步收集资料，支持假说或者否定、修正假说，也可以通过演绎推理验证假说的真伪．另外，演绎推理也可以做出预测．教学过程中，可以发掘科学探索中其他的例子，说明合情推理和演绎推理的作用．

四、习题解答

练习（第 30 页）

1. 由 $a_1=a_2=a_3=a_4=1$，猜想 $a_n=1$．

2. 相邻两行数之间的关系是：每一行首尾的数都是 1，其他的数都等于上一行中与之相邻的两个数的和．

3. 设 $V_{O\text{-}P_1Q_1R_1}$ 和 $V_{O\text{-}P_2Q_2R_2}$ 分别是四面体 $O\text{-}P_1Q_1R_1$ 和 $O\text{-}P_2Q_2R_2$ 的体积，则 $\dfrac{V_{O\text{-}P_1Q_1R_1}}{V_{O\text{-}P_2Q_2R_2}}=\dfrac{OP_1}{OP_2}\cdot\dfrac{OQ_1}{OQ_2}\cdot\dfrac{OR_1}{OR_2}$.

4. 略．

练习（第 33 页）

1. 略．

2. 因为通项公式为 a_n 的数列 $\{a_n\}$，若 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$，p 是非零常数，则 $\{a_n\}$ 是等比数列；………… 大前提

又因为 $cq\neq0$，则 q 是非零常数，且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{cq^{n+1}}{cq^n}=q$；…………………………………………………… 小前提

所以通项公式为 $a_n=cq^n$ $(cq\neq0)$ 的数列 $\{a_n\}$ 是等比数列．………………………………………… 结论

3. 由 $AD>BD$，得到 $\angle ACD>\angle BCD$ 的推理是错误的．因为这个推理的大前提是“在同一个三角形中，大边对大角”，小前提是“$AD>BD$”，而 AD 与 BD 不在同一个三角形中．

4. 略．

习题 2.1（第 35 页）

A 组

1. (n^2-1)（n 是质数，且 $n\geqslant5$）是 24 的倍数．

2. $a_n=\dfrac{2}{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$．

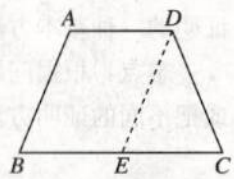
3. $F+V=E+2$．

4. 当 $n\leqslant 6$ 时，$2^{n-1}<(n+1)^2$；当 $n=7$ 时，$2^{n-1}=(n+1)^2$；当 $n=8$ 时，$2^{n-1}>(n+1)^2$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

5. $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_n}\geqslant\frac{n^2}{(n-2)\pi}$（$n>2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）.

6. $b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_{17-n}$（$n<17$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）.

7. 如图，作 $DE/\!/AB$ 交 BC 于 E.



（第 7 题）

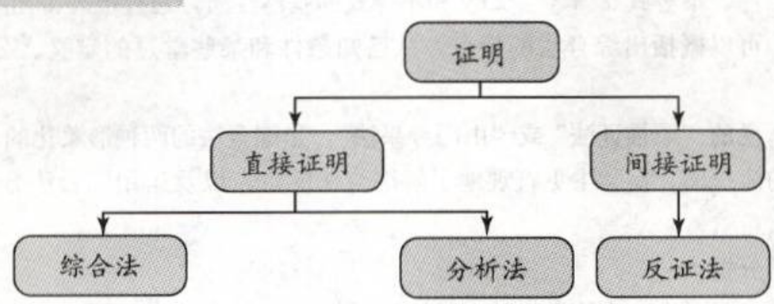
因为两组对边分别平行的四边形是平行四边形，
又因为 $AD/\!/BE$，$AB/\!/DE$，
所以 $ABED$ 是平行四边形.
因为平行四边形的对边相等，
又因为 $ABED$ 是平行四边形，
所以 $AB=DE$.
因为与同一条线段等长的两条线段的长度相等，
又因为 $AB=DE$，$AB=DC$，
所以 $DE=DC$.
因为等腰三角形的两底角是相等的，
又因为 $\triangle DEC$ 是等腰三角形，
所以 $\angle DEC=\angle C$.
因为平行线的同位角相等，
又因为 $\angle DEC$ 与 $\angle B$ 是平行线 AB 和 DE 的同位角，
所以 $\angle DEC=\angle B$.
因为等于同角的两个角是相等的，
又因为 $\angle DEC=\angle C$，$\angle DEC=\angle B$，
所以 $\angle B=\angle C$.

B 组

1. 由 $S_1=-\frac{2}{3}$，$S_2=-\frac{3}{4}$，$S_3=-\frac{4}{5}$，$S_4=-\frac{5}{6}$，$S_5=-\frac{6}{7}$，猜想 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$.
2. 略.
3. 略.

2.2 直接证明与间接证明

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——综合法和分析法，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解综合法、分析法和反证法的思考过程、特点.

难点：根据问题的特点，结合综合法、分析法和反证法的思考过程、特点，选择适当的证明方法或把不同的证明方法结合使用.

三、编写意图与教学建议

在以前的学习中，学生已经能应用综合法、分析法和反证法证明数学命题，但他们对这些证明方法的内涵和特点不一定非常清楚. 本节结合学生已学过的数学知识，通过实例引导学生分析这些基本证明方法的思考过程与特点，并归纳出操作流程框图，使他们在以后的学习和生活中，能自觉地、有意识地运用这些方法进行数学证明，养成言之有理、论证有据的习惯.

2.2.1 综合法和分析法

分析法和综合法，是直接证明中最基本的两种证明方法，也是解决数学问题时常用的思维方式.

1. **综合法.**

在以前的学习中，学生积累了较多的用综合法证明数学命题的经验，但这些经验是零散的、不系统的，他们也没有进行过综合法这一知识的较系统的学习. 由此，教科书借助学生熟悉的数学实例，引导学生归纳和总结综合法的特点，促使他们形成对综合法的较完整的认识.

(1) 通过实例，概括综合法的特点.

教科书借助"已知 a，$b>0$，求证 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc$"这一简单而又典型的数学问题，引导学生分析综合法的特点. 教学中，可以先让学生独立分析，再进行讨论，从而明确教科书中给出的证法的特点.

首先，分析待证不等式的特点. 不等式的右端是 3 个数 a，b，c 乘积的 4 倍，左端为两项之和，其中每一项都是一个数与另两个数的平方和之积. 据此，只要把两个数的平方和转化为这两个数的积的形式，就能使不等式左、右两端具有相同形式.

其次，寻找转化的依据及证明中要用的其他知识. 本例应用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 就能实现转化，不等式的基本性质是证明的依据.

最后，给出具体证明. 由 $b^2+c^2\geqslant 2bc$ 及条件 $a>0$，根据不等式的基本性质得 $a(b^2+c^2)\geqslant 2abc$；类似地，得 $b(c^2+a^2)\geqslant 2abc$. 从而有 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc$.

这样，从已知条件、不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 和不等式的基本性质，通过推理得出结论成立.

通过上述分析，可以概括出综合法的特点：从已知条件和某些学过的定义、公理、定理等出发，通过推理得出结论.

教科书中旁白所说的"顺推证法"或"由因导果法"，是综合法的两种形象化的说法.

教科书中给出的流程图，使学生更直观地了解综合法的特点以及运用综合法分析问题、解决问题的思考过程.

(2) 例题的教学分析.

通过例题的教学，可以进一步使学生体会综合法的思考过程和特点，同时为学生用综合法证明数

学命题起示范作用．教学中，应强调分析过程和思考过程，使学生明白为什么采用综合法，以及运用综合法进行证明的过程．

例 1 是一个立体几何问题．立体几何是高中学习的难点，本例在使学生熟悉综合法的同时，对空间线面关系也是一个复习．教学中，可以先引导学生回顾证明空间三点共线的基本方法，再根据已知条件，分析 P，Q，R 三点的位置特征，即它们既在平面 α 内，又在平面 ABC 内，从而它们是两个平面的公共点，再利用两个相交平面的公理就能推出结论．

例 2 是一个涉及平面向量、解三角形等多方面知识的问题．教学中可以先引导学生回顾命题中涉及的知识，如向量、向量的模、两个向量的数量积、同角三角函数的关系、解三角形（三角形面积公式、正弦定理、余弦定理）等，然后分析已知条件与欲证的结论之间的联系，使他们发现：利用向量的数量积公式、三角形的面积公式就可以证出结论．当然，从分析过程可以看出，本例也可运用分析法进行证明．

例 3 是一个三角、几何、数列的综合题．在证明数学命题时，经常需要把已知条件进行语言转换，如把文字语言转换成符号语言，或把符号语言转换成图形语言等，还要把命题中的隐含条件显性化．本例中，首先把已知条件进行语言转换，即将 A，B，C 成等差数列转化为 $2B=A+C$，将 a，b，c 成等比数列转化为 $b^2=ac$；接着把隐含条件显性化，将 A，B，C 为 $\triangle ABC$ 的内角明确表示为 $A+B+C=\pi$；然后再寻找条件与结论的联系，利用余弦定理把边和角联系起来，建立边和角之间的关系，进而判断三角形的形状．这样，就可以尝试直接从已知条件和余弦定理出发，运用综合法来推导结论．

另外，学生在应用综合法证明时，经常出现因果关系不清晰、逻辑表达混乱的情况．为了帮助学生正确使用综合法，在例题教学中，可以采取让学生先独立分析、证明，再集体讨论，纠正不正确的表达，给出因果关系明确、简洁而正确的表达方法，让学生在修正自己的证明过程中学会规范化表达．

2. 分析法．

这部分的编写方式与综合法基本类似．

（1）通过实例，概括分析法的特点．

教科书借助基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$ 的证明过程，引导学生理解分析法的特点．教学中可以先让学生回顾用分析法证明这一不等式的过程，再让他们总结这类证法的特点：要证明结论成立，逐步寻求推证过程中，使每一步结论成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止．

教科书中旁白所说的“逆推证法”或“执果索因法”，是分析法的两种形象化的说法．

与综合法类似，教科书中给出了分析法的流程图，使学生更直观地了解分析法的特点以及运用分析法分析问题、解决问题的思考过程．

（2）例题的教学分析．

当已知条件与结论之间的联系不够明显、直接，证明中需要用哪些知识不太明确具体时，往往采用从结论出发，结合已知条件，逐步反推，寻求使当前命题成立的充分条件的方法．其中，既有一般数学思想方法的作用，也有条件和已有相关知识的指引．

例 4 求证一个不等式是否成立．由于本例不易发现证明的出发点，所以用综合法直接证明比较困难．因此，本例从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题．如果能够肯定这些充分条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立．教学中，应引导学生体验分析法的特点：从结论出发，逐步寻求一个明显成立的充分条件．

例 5 是一个关于空间线面关系的命题．在本例中，在“把证明两条直线互相垂直的问题转化为证明直线与平面垂直的问题”这一思想方法的指引下，从结论出发逐步向已知条件靠近，在每一步中寻

找使之成立的充分条件，并最终证出结论．由于立体几何证明是学生的学习难点，再加上充分条件往往不唯一，因此学生在分析过程中会产生一些困难，另外，用分析法证题时，往往容易出现“充分条件不充分”的问题．为此，本例教学仍然可以采取让学生先自己独立完成分析过程，再集体讨论，纠正错误，最后得出正确表达的方法．

一般地，对于数学思想方法的教学，都应当采取先让学生自己独立思考、实践，再讨论、归纳、概括的方法进行，因为思想方法不能靠讲解、灌输、记忆而学会，只能通过在实践基础上的领悟而掌握．

3．例 6 的教学建议．

本例是为了说明综合法和分析法结合使用而设置的．

从学生的学习经历看，他们对两种方法结合使用是非常熟悉的．因此，本例的教学可以采取与前面例题同样的处理方法，即先让学生自己给出证明，说明证明中使用的方法，再总结归纳，概括出两种方法结合使用的思维特点．

本例中，从条件出发得出 $4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$ 后，再继续向结论转化，虽然可以成功，但有一定困难，它比从结论出发得到 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$ 要复杂得多，技巧性也强得多．所以，在使用综合法出现困难时，及时调整思路，分析一下要证明结论需要怎样的充分条件是明智之举．这种思想可以形象地描述为：发展条件、转化结论、寻找联系．教学中要注意引导学生充分体会本例中渗透的这一思想，必要时可以适当补充一些典型例题．另外还要使学生明确，牢固掌握基础知识是灵活应用两种方法证明问题的前提，本例中，和差角的三角公式、“切化弦”的基本方法以及代数变换的基本技能等都发挥着重要作用．

2.2.2 反证法

学生从初中开始就对反证法有所接触．反证法的逻辑规则并不复杂，但用反证法证明数学命题却是学生学习的一个难点．究其原因，主要是反证法的应用需要逆向思维，但在中小学阶段，逆向思维的训练和发展都是不充分的．

1．通过实例概括反证法的特点．

教科书通过“思考”引出反证法．这个问题可以直接证明，但需要分成多种情形进行分类讨论，然后归纳出结论，这样做比较麻烦．用反证法证明这个问题的关键是将问题“数学化”，从基本的数量关系导出矛盾．“数量关系分析”是学生不习惯的，教学中应当进行适当引导．教学中可以引导学生用列举的方法直接给出证明，并比较两种证明方法的各自特点，从中体验反证法的思考过程和特点：先假设要证的命题不成立，以此为出发点，结合已知条件，经过正确的推理，得出矛盾，由此说明假设错误，从而得到原命题成立．

使用反证法进行证明的关键是在正确的推理下得出矛盾．这个矛盾可以是与已知条件矛盾，或与假设矛盾，或与定义、公理、定理、事实等矛盾．教学时可以结合例题讲解引导学生认识这一证明的关键步骤．

反证法主要适用于以下两种情形：

（1）要证的结论与条件之间的联系不明显，直接由条件推出结论的线索不够清晰；

（2）如果从正面证明，需要分成多种情形进行分类讨论，而从反面进行证明，只要研究一种或很少的几种情形．

2．例题的教学建议．

例 7 是一个代数问题，证明唯一性是学习中的一个难点，对中学生而言更是如此．由于很难发现

要证的结论与已知条件之间的联系，因而学生往往不知从何处入手解决问题．教学中可向学生指出，解决某些结论与已知条件之间的联系不明显、直接由条件推出结论的线索不够清晰的问题，特别是证明唯一性问题时，往往采用反证法．本例先假设结论不成立，即假设方程 $ax=b$ 不止一个根，不妨设 x_1，x_2 是它的两个不同的根，以此为出发点，推出 $a=0$——一个与已知条件 $a\neq 0$ 矛盾的结论，由此说明假设错误，从而得到原结论成立．

用反证法证明例 8 的难点是如何由假设推出矛盾．教学中可以先让学生根据反证法的基本规则思考这样的问题：在 $a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a/\!/b$ 的条件下，若假设 a 与 α 有公共点，可以推出什么矛盾，如何推出矛盾呢？然后再引导学生思考：如果我们想推出与已知条件“$a/\!/b$”矛盾，应该如何做呢？由空间中两条直线的位置关系可知，只要推出“a 与 b 成异面直线”或“a 与 b 相交”即可．教科书利用构造平面的方法推出“a 与 b 相交”．教学中还可以让学生思考其他的方法．例如，可以先引导学生回忆直线与平面的位置关系有且只有三种：直线在平面内、直线与平面相交和直线与平面平行，然后由假设“a 与 α 有公共点”，可得 a 与 α 相交于一点．设 $a\cap\alpha=P$，若 $P\in b$，则 $a\cap b=P$，与 $a/\!/b$ 矛盾；若 $P\notin b$，则 a 与 b 成异面直线，也与 $a/\!/b$ 矛盾．

由于学生对反证法不太熟悉，因此教学中要多给学生练习的机会，使学生在动手证明的过程中逐步体会这种证明方法的内涵，建立应用反证法的感觉．下面的问题可作为课堂补充例题．

补充例题　已知 x，$y>0$，且 $x+y>2$．试证：$\dfrac{1+x}{y}$，$\dfrac{1+y}{x}$ 中至少有一个小于 2．

四、教学设计案例

分析法（约 1 课时）

1. 教学任务分析

学生在过去的学习中经常使用分析法，但他们对分析法的认识是经验型的、不充分的．本节课要结合已经学过的数学实例，引导他们了解分析法的思考过程和特点，使他们对分析法有一个较完整的认识．

2. 教学重点与难点

重点：

（1）了解分析法的思考过程和特点；

（2）运用分析法证明数学命题．

难点：

对分析法的思考过程和特点的概括．

3. 教学基本流程

通过实例，概括分析法的思考过程、特点

↓

总结分析法的操作流程框图

↓

用分析法证明数学命题举例

4. 教学情境设计

问 题	问题设计意图	师生活动
(1) 你能回顾一下基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的证明过程吗？	给出分析法的实例，为分析其思考过程和特点作准备．	学生回顾、写出证明过程．
(2) 你能分析一下这个证明的思考过程和特点吗？	引导学生概括分析法的特点．	教师引导学生总结、交流，得出分析法的特点．让学生阅读教科书第40页“分析法”的开篇语．
(3) 你能用框图表示分析法的思考过程、特点吗？	使分析法的思考过程和特点得到形象表示，以便于学生掌握．	师生共同完成．
(4) 例4，5的教学．	加深学生对分析法的认识，提高他们根据条件、结论的特点寻找证明方法的能力．	教师引导学生分析问题的特点，由学生自己写出分析过程和证明过程，然后再进行交流．教师要注意引导学生思考分析的方向．
(5) 小结．	进一步明确分析法的思考过程和特点．	教师引导学生总结分析法的思考过程和特点，要关注用分析法证题时可能出现的错误（充分条件不充分）．

五、习题解答

练习（第42页）

1. 因为$\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\cos 2\theta$，

   所以，命题得证．

2. 要证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，只需证$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，即证$13+2\sqrt{42}>13+4\sqrt{10}$，即证$\sqrt{42}>2\sqrt{10}$，只需证$(\sqrt{42})^2>(2\sqrt{10})^2$，即证$42>40$，这是显然成立的．

   所以，原命题得证．

3. 因为

$$(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2=(2\sin\alpha)^2(2\tan\alpha)^2=16\sin^2\alpha\tan^2\alpha,$$

   又因为

$$16ab=16(\tan\alpha+\sin\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)=16\,\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$
$$=16\,\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=16\,\frac{\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=16\sin^2\alpha\tan^2\alpha,$$

   从而$(a^2-b^2)^2=16ab$．

   所以，命题成立．

说明 进一步熟悉运用综合法、分析法证明数学命题的思考过程与特点．

练习（第43页）

1. 假设$\angle B$不是锐角，则$\angle B\geqslant 90^\circ$．因此$\angle C+\angle B\geqslant 90^\circ+90^\circ=180^\circ$．这与三角形的内角和等于$180^\circ$

矛盾. 所以，假设不成立.

从而，$\angle B$ 一定是锐角.

2. 假设$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$成等差数列，则 $2\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. 所以$(2\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，化简得 $5=2\sqrt{10}$，从而 $5^2=(2\sqrt{10})^2$，即 $25=40$，这是不可能的. 所以，假设不成立.

从而，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$不可能成等差数列.

说明 进一步熟悉运用反证法证明数学命题的思考过程与特点.

习题 2.2（第 44 页）

A 组

1. 因为

$$(1+\tan A)(1+\tan B)=2,$$

展开得

$$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2,$$

即

$$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B. \qquad ①$$

假设 $1-\tan A\tan B=0$，则$\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=0$，即$\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}=0$，所以 $\cos(A+B)=0$.

因为 A，B 都是锐角，所以 $0<A+B<\pi$，从而 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，与已知矛盾. 因此 $1-\tan A\tan B\neq 0$.

① 式变形得

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$$

即

$$\tan(A+B)=1.$$

又因为 $0<A+B<\pi$，所以 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$.

说明 本题也可以把综合法和分析法综合使用完成证明.

2. 因为 $PD\perp$平面 ABC，
所以 $PD\perp AB$.
因为 $AC=BC$，
所以$\triangle ABC$ 是等腰三角形.
因此$\triangle ABC$ 底边上的中线 CD 也是底边上的高，
因而 $CD\perp AB$.
所以 $AB\perp$平面 PDC.
因此 $AB\perp PC$.

3. 因为 a，b，c 的倒数成等差数列，所以

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

假设 $B<\dfrac{\pi}{2}$不成立，即 $B\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，则 B 是$\triangle ABC$ 的最大内角，所以 $b>a$，$b>c$（在三角形中，大角对大边），从而

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}>\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}.$$

这与$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$矛盾．所以，假设不成立．

因此，$B<\frac{\pi}{2}$．

B组

1. 因为

$$\frac{1-\tan\alpha}{2+\tan\alpha}=1,$$

所以

$$1+2\tan\alpha=0,$$

从而

$$2\sin\alpha+\cos\alpha=0.$$

另一方面，要证

$$3\sin 2\alpha=-4\cos 2\alpha,$$

只要证

$$6\sin\alpha\cos\alpha=-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

即证

$$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0,$$

即证

$$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0.$$

由 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 可得，$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0$，于是命题得证．

说明 本题可以单独使用综合法或分析法进行证明，但把综合法和分析法结合使用进行证明的思路更清晰．

2. 由已知条件得

$$b^2=ac, \tag{①}$$

$$2x=a+b,\ 2y=b+c. \tag{②}$$

要证

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2,$$

只要证

$$ay+cx=2xy,$$

只要证

$$2ay+2cx=4xy.$$

由①②，得

$$2ay+2cx=a(b+c)+c(a+b)=ab+2ac+bc,$$

$$4xy=(a+b)(b+c)=ab+b^2+ac+bc=ab+2ac+bc,$$

所以，$2ay+2cx=4xy$，于是命题得证．

复习参考题（第 46 页）

A组

1. 图略，共有 $n(n-1)+1$（$n\in\mathbf{N}^*$）个圆圈．

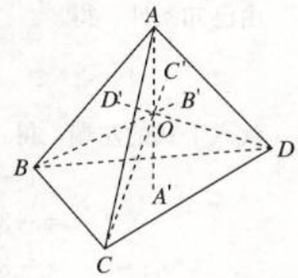
2. $\overbrace{33\cdots3}^{n个}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

3. 因为 $f(2)=f(1)^2=4$,所以 $f(1)=2$,$f(3)=f(2)f(1)=8$,$f(4)=f(3)f(1)=16$……

猜想 $f(n)=2^n$.

4. 如图，设 O 是四面体 $A\text{-}BCD$ 内任意一点，连结 AO，BO，CO，DO 并延长交对面于 A'，B'，C'，D'，则

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$



(第 4 题)

用“体积法”证明：

$$\begin{aligned}&\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}\\&=\frac{V_{O\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}+\frac{V_{O\text{-}CDA}}{V_{B\text{-}CDA}}+\frac{V_{O\text{-}DAB}}{V_{C\text{-}DAB}}+\frac{V_{O\text{-}ABC}}{V_{D\text{-}ABC}}=\frac{V_{A\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}=1.\end{aligned}$$

5. 要证

$$(1+\tan A)(1+\tan B)=2,$$

只需证

$$1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B=2,$$

即证

$$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B. \qquad ①$$

由 $A+B=\frac{5}{4}\pi$，得 $\tan(A+B)=1$. 又因为 A，$B\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，所以

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1,$$

变形即得①式.

所以，命题得证.

B 组

1. (1) 25 条线段，16 部分；(2) n^2 条线段；(3) $\frac{n^2+n+2}{2}$ 部分.

2. 因为$\angle BSC=90°$，所以$\triangle BSC$ 是直角三角形. 在 $\text{Rt}\triangle BSC$ 中，有

$$BC^2=SB^2+SC^2.$$

类似地，得

$$AC^2=SA^2+SC^2,\ AB^2=SB^2+SA^2.$$

在$\triangle ABC$ 中，根据余弦定理得

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{SA^2}{AB\cdot AC}>0;$$

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{SB^2}{AB\cdot BC}>0;$$

$$\cos C=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{SC^2}{BC\cdot AC}>0.$$

因此，A，B，C 均为锐角，从而$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

3. 要证

$$\cos 4\beta-\cos 4\alpha=3,$$

因为

$$\begin{aligned}&\cos 4\beta-4\cos 4\alpha=\cos(2\times 2\beta)-4\cos(2\times 2\alpha)\\&=1-2\sin^2 2\beta-4\times(1-2\sin^2 2\alpha)\\&=1-8\sin^2\beta\cos^2\beta-4\times(1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\\&=1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4\times[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)],\end{aligned}$$

只需证

$$1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4\times[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]=3.$$

由已知条件，得

$$\sin\alpha=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2},\ \sin^2\beta=\sin\theta\cos\theta,$$

代入上式的左端，得

$$\begin{aligned}&1-8\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)-4\times[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta\cos\theta)+32\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta+2(1+2\sin\theta\cos\theta)(3-2\sin\theta\cos\theta)\\&=-3-8\sin\theta\cos\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta+6-8\sin^2\theta\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta\\&=3,\end{aligned}$$

因此，$\cos 4\beta-\cos 4\alpha=3$.

III 自我检测题

1. 设 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$，若 $x+x^{-1}=3$，猜想 $x^{2^n}+x^{-2^n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的个位数字是多少？

2. 当 $n=1$ 时，有 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$；

当 $n=2$ 时，有 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

当 $n=3$ 时，有 $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$；

当 $n=4$ 时，有 $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$.

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，你能得到什么结论？

3. 平面内的 1 条直线把平面分成两部分，2 条相交直线把平面分成 4 部分，3 条相交但不共点的直线把平面分成 7 部分，n 条彼此相交而无三条共点的直线，把平面分成多少部分？

4. 用综合法或分析法证明：

(1) 如果 a，$b>0$，则 $\lg\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{\lg a+\lg b}{2}$；

(2) 求证 $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

5. 用反证法证明：如果 $x>\dfrac{1}{2}$，那么 $x^2+2x-1\neq0$.

参考答案

1. 当 $n=1$ 时，有 $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=3^2-2=7$；

当 $n=2$ 时，有 $x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=7^2-2=47$；

当 $n=3$ 时，有 $x^8+x^{-8}=(x^4+x^{-4})^2-2=47^2-2=2\ 207$；

当 $n=4$ 时，有 $x^{16}+x^{-16}=(x^8+x^{-8})^2-2=2\ 207^2-2=4\ 870\ 847$；

据此猜想，得 $x^{2^n}+x^{-2^n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的个位数字是 7.

2. $(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$.

3. 设平面被 n 条直线分成 S_n 部分，则

当 $n=1$ 时，$S_1=1+1=2$；

当 $n=2$ 时，$S_2=1+1+2=4$；

当 $n=3$ 时，$S_3=1+1+2+3=7$；

当 $n=4$ 时，$S_4=1+1+2+3+4=11$.

据此猜想，得 $S_n=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$.

4. (1) 当 a，$b>0$ 时，有

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

上式两端取对数，得

$$\lg\frac{a+b}{2}\geqslant\lg\sqrt{ab},$$

从而

$$\lg\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{\lg(ab)}{2}=\frac{\lg a+\lg b}{2}.$$

所以，命题得证.

(2) 要证 $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，只需证 $(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，即 $2\sqrt{42}>2\sqrt{40}$，这是显然成立的. 所以，原不等式成立.

5. 假设 $x^2+2x-1=0$，则 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

容易看出 $-1-\sqrt{2}<\frac{1}{2}$，下面证明 $-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$.

因为 $8<9$，所以 $\sqrt{8}<\sqrt{9}$，即 $2\sqrt{2}<3$，从而 $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，变形得 $-1+\sqrt{2}<\frac{1}{2}$. 综上得 $x<\frac{1}{2}$，这与已知条件 $x>\frac{1}{2}$ 矛盾.

因此，假设不成立，即原命题成立.

第三章 数系的扩充与复数的引入

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章学习的主要内容是数系的扩充和复数的概念，复数代数形式的四则运算.

复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充，这不仅可以使学生对于数的概念有一个初步的、完整的认识，也为学生进一步学习数学打下了基础. 通过本章的学习，要使学生在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性，学习复数的一些基本知识，体会人类理性思维在数系扩充中的作用.

2. 学习目标

（1）在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

（2）理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件.

（3）了解复数的代数表示法及其几何意义.

（4）能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图

数系扩充复数引入 → 复数的概念 → 复数代数形式的四则运算

2. 对内容安排的说明

本章内容分为 2 节：3.1 数系的扩充和复数的概念，3.2 复数代数形式的四则运算.

（1）复数系是在实数系的基础上扩充而得到的. 为了帮助学生了解引入复数的必要性，了解实际需求和数学内部的矛盾在数系扩充中的作用，本章从一个思考问题开始，在问题情境中简单介绍了由实数系扩充到复数系的过程，这样不仅可以激发学生学习复数的欲望，而且也可以比较自然地进入复

数的学习之中.

复数的概念是整个复数内容的基础. 复数的有关概念都是围绕复数的代数表示形式展开的. 虚数单位、实部、虚部的命名，复数相等的充要条件，以及虚数、纯虚数等概念的理解，都应促进对复数实质的理解，即复数实际上是一有序实数对.

类比实数可以用数轴上的点表示，把复数在直角坐标系中表示出来，就得到了复数的几何表示. 用复平面内的点或平面向量表示复数，不仅使抽象的复数有了直观形象的表示，而且也使数和形得到了有机的结合.

(2) 复数代数形式的四则运算，即复数代数形式的加法、减法、乘法和除法，重点是加法和乘法. 复数加法和乘法的法则是规定的，其合理性表现在这种规定与实数加法、乘法的法则是一致的，而且实数加法、乘法的有关运算律在这里仍然成立. 由减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算的规定，可以得到复数减法、除法的运算法则. 复数代数形式的四则运算可以类比代数式运算中的“合并同类项”“分母有理化”等，利用 $i^2=-1$，将它们归结为实数的四则运算.

复数的加法、减法运算还可以通过向量加法、减法的平行四边形或三角形法则来进行，这不仅又一次看到了向量这一工具的功能，也把复数及其加、减运算与向量及其加、减运算完美地统一起来.

(3) 与传统教科书的复数内容相比，这里的复数内容有了比较多的删减，教学中应严格执行《普通高中数学课程标准（实验）》的要求，不宜过多补充和延伸，也应该注意避免繁琐的计算与技巧的训练.

三、课时分配

本章教学时间约 4 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1	数系的扩充和复数的概念	约 2 课时
3.2	复数代数形式的四则运算	约 2 课时

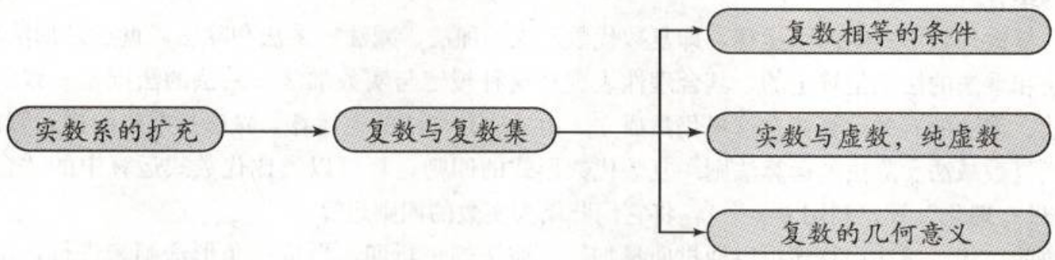
II 教科书分析

章引言通过问题情境：“在实数集内，像 $x^2+1=0$ 这样的方程是没有根的. 因此在研究代数方程的过程中，如果限于实数系，有些问题就无法解决.”怎么使问题变得可以解决呢？引发学生对于扩充实数系的需求，同时使学生初步认识学习复数的意义. 章头图中通过两幅图提示学生，将要学习的复数与直角坐标系中的点、平面向量是密切联系的，还用火箭升空的画面显示了人类进入太空，实现了对宇宙认识的飞跃，用以比喻学习复数，将会对数的认识实现一次飞跃.

章引言中还简略介绍了复数的由来，复数在数学和其他学科中的应用，以及在进一步学习数学中的基础作用. 最后明确了本章学习的基本要求.

3.1 数系的扩充和复数的概念

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：复数的概念，复数的代数形式，复数的向量表示.

难点：复数相等的条件，复数的向量表示.

三、编写意图与教学建议

3.1.1 数系的扩充和复数的概念

1. 数系的扩充.

在数学中，数系的扩充必须遵循有关的原则，但把这些原则都介绍给中学生，不仅没有必要，也不会有好的效果. 教科书中只对实数系扩充到复数系的过程作了粗略的阐述. 为了承前启后，自然地引入复数，教科书首先提出了一个思考问题（用什么方法解决方程 $x^2+1=0$ 在实数集中无解的问题），目的是为了引发学生的认知冲突，激发学生把实数系进一步扩充的欲望. 然后通过回顾，提出扩充后的新数集应该怎样规定的设想.

回顾，即回顾从自然数集逐步扩充到实数系的过程，这不仅为实数系的扩充提供了类比对象，而且也为怎样扩充实数系指明了方向.

希望和设想分两个方面：

(1) 由希望 $x^2+1=0$ 这样的方程有解，设想引入一个新数 i，使 i 是方程 $x^2+1=0$ 的根，即 $i^2=i\cdot i=-1$.

(2) 由希望实数和新引入的数 i，要能像实数系那样进行加法、乘法运算，并希望运算时，原有的加法、乘法的运算律仍然成立，就设想依此把实数和 i 去进行运算，从而得到把实数集扩充后的新数集应该是 $\{a+bi \mid a, b\in \mathbf{R}\}$，这就是复数集.

由于学生对数系扩充的知识并不熟悉，教学中教师还需多作引导.

2. 复数的概念.

(1) 引入复数后，对形如 $a+bi$ $(a, b\in \mathbf{R})$ 形式的数，规定了虚数单位、复数的代数形式、实部、虚部等名称. 应注意 b 称为虚部而不称为虚部系数.

(2) 当 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$ 时，两个复数 $a+bi$，$c+di$ 相等的充要条件实际上就是两个复数相等的定义. 由此可得到，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，

$$a+bi=0\Leftrightarrow a=0 \text{ 且 } b=0.$$

教学中还应使学生明确，这里不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求复数值的依据，即利用复数相等的条件，可以得到关于实数的方程（组），通过解方程得到 a，b 的值.

(3) 需要指出的是，“一般说来，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小”. 即：两个复数都是实数，则可以比较大小；否则，不能比较大小. 教学中不必予以展开. 因为中学生很难理解以下的原则，即不论怎样定义两个复数之间的一个关系“$<$”，都不能使这种关系同时满足实数集中大小关系的下述四条性质：

① 对于任意实数 a，b，$a<b$，$a=b$，$b<a$ 这三种情况有且只有一种成立；

② 如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

③ 如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

④ 如果 $a<b$，$c>0$，那么 $ac<bc$.

(4) 虚数、纯虚数的概念是在研究复数集与实数集的关系时引入的概念，它们与对复数的实部、虚部是否为零的讨论相联系，又揭示了复数的分类.

3. 例题的教学建议.

这是一道巩固复数概念的题目，首先要在变化中认识复数代数形式的结构，正确判断这里复数 z 的实部是 $m+1$，虚部是 $m-1$；然后依据复数是实数、虚数、纯虚数的条件，用列方程（或不等式）的方法求出相应的 m 取值.

3.1.2 复数的几何意义

1. 教科书开始给出一个思考问题，要求学生类比实数的几何意义，思考复数的几何意义是什么. 只要注意到复数的实质是一有序实数对，再运用学习代数、解析几何的经验，学生自己回答“复数的几何意义是平面上的点”是不难的.

2. 引入复平面时，不强调复平面与一般坐标平面的区别. 规定了 y 轴叫做虚轴，但在说明虚轴上的点都表示纯虚数时，仍然要指出“除原点外”. 原点表示实数 0.

3. 复数 $z=a+bi$ 用复平面内的点 $Z(a, b)$表示. 复平面内的点 Z 的坐标是(a, b)，而不是(a, bi)，也就是说，复平面内的纵坐标轴上的单位长度是 1，而不是 i.

4. 由于已经学过平面向量及其几何表示、坐标表示，得到用平面向量来表示复数就比较容易了.

这里复数的模是通过向量的模来定义的，学生只作了解即可. 这段内容未放在正文而只放在边空中，教学中不要再作扩展.

5. 在学习复数的几何意义时，除了要使学生明确复数有两种几何意义外，还应强调，任何一个复数 $z=a+bi$ 与复平面内的一点 $Z(a, b)$对应，复平面内任意一点 $Z(a, b)$又可以与以原点为起点，点 $Z(a, b)$为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$对应. 这些对应都是一一对应，即

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & z=a+bi \arrow[dl, leftrightarrow, "一一对应"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "一一对应"] & \\ Z(a,b) \arrow[rr, leftrightarrow, "一一对应"'] & & \overrightarrow{OZ} \end{tikzcd}$$

这样，讨论复数的运算、性质和应用时，就可以在复平面内，用向量方法进行.

四、教学设计案例

3.1.1 数系的扩充和复数的概念（第1课时）

1. 教学任务分析

（1）在问题的情境中让学生了解把实数系扩充到复数系的过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

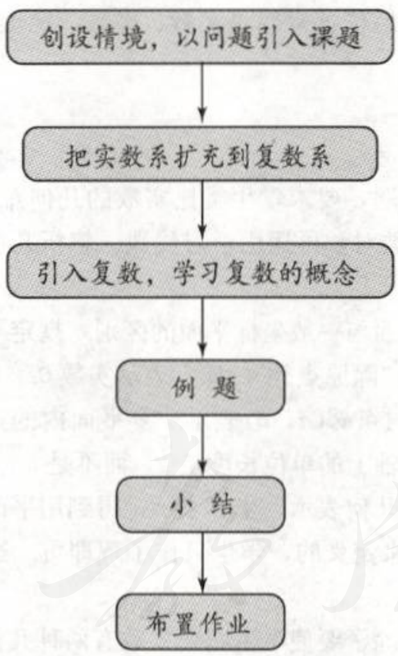
（2）理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件.

2. 教学重点与难点

重点：对引入复数的必要性的认识，理解复数的基本概念.

难点：由于学生对数系扩充的知识不熟悉，对了解实数系扩充到复数系的过程有困难. 由于理解复数是一对有序实数不习惯，对于复数概念理解也有一定困难.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
（1）方程 $x^2+1=0$ 在实数集中无解. 联系从自然数系到实数系的扩充过程，你能设想一种方法，使这个方程有解吗？	创设问题情境，使学生明确这里要解决什么问题，联系旧知识，了解解决问题的大致方向.	教师提出问题，学生思考回答，教师再评价、引导.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
(2) 类比引进$\sqrt{2}$，就可以解决方程 $x^2-2=0$ 在有理数集中无解的问题，怎么解决 $x^2+1=0$ 在实数集中无解的问题?	通过类比，使学生了解扩充数系要从引入新数开始.	教师提问，学生回答.
(3) 把实数和新引入的数 i 像实数那样进行加法、乘法运算，并希望运算时有关的运算律仍成立，你得到了什么样的数?	使学生感受为什么把集合$\{a+bi\mid a, b\in \mathbf{R}\}$作为实数集扩充后的新数集.	由学生自己动手试做，然后讨论. 最后统一认识.
(4) 给出复数、虚数单位，实部、虚部、复数的代数形式的意义.	认识复数的代数结构，熟悉有关名称.	不仅给出名称，还应结合实例，以求掌握.
(5) 你认为应该怎样定义两个复数相等?	由学生按自己理解，试给两复数的相等关系下定义.	学生回答、教师点评，还可让学生自己适当练习.
(6) 复数 $z=a+bi$ 在什么条件下是实数?	引出复数的分类，并搞清复数集和实数集的关系.	学生自己经历对 $z=a+bi$ 中，a，b 是否为零的讨论的全过程.
(7) 例 1.	巩固复数概念.	学生自己完成，教师点评.
(8) 小结.	对于数系扩充过程方面以及对复数实质理解方面的收获进行小结.	可课堂交流，也可写在自己的笔记本上.
(9) 作业　练习 1，2，3.		

五、习题解答

练习（第 52 页）

1. 实部分别是-2，$\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，0，0；

   虚部分别是$\frac{1}{3}$，1，0，$-\sqrt{3}$，1，0.

2. $2+\sqrt{7}$，0.618，0，i^2 是实数；

   $\frac{2}{7}i$，i，$5i+8$，$3-9\sqrt{2}i$，$i(1-\sqrt{3})$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ 是虚数；

   $\frac{2}{7}i$，i，$i(1-\sqrt{3})$是纯虚数.

3. 由$\begin{cases}x+y=2x+3y,\\ y-1=2y+1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\ y=-2.\end{cases}$

练习（第 54 页）

1. A：$4+3i$，B：$3-3i$，C：$-3+2i$，D：$-\frac{5}{2}-3i$，E：$\frac{11}{2}$，F：-2，G：$5i$，H：$-5i$.

2. 略.

3. 略.

习题 3.1（第 55 页）

A 组

1. (1) 由$\begin{cases}3x+2y=17,\\5x-y=-2,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=1,\\y=7.\end{cases}$

(2) 由$\begin{cases}x+y-3=0,\\x-4=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$

2. (1) 当 $m^2-3m=0$，即 $m=0$ 或 $m=3$ 时，所给复数是实数.

(2) 当 $m^2-3m\neq0$，即 $m\neq0$ 且 $m\neq3$ 时，所给复数是虚数.

(3) 当$\begin{cases}m^2-5m+6=0,\\m^2-3m\neq0,\end{cases}$即 $m=2$ 时，所给复数是纯虚数.

3. (1) 存在，例如 $-\sqrt{2}+\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$，等等.

(2) 存在，例如 $1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，等等.

(3) 存在，只能是 $-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

4. (1) 点 P 在第一象限.

(2) 点 P 在第二象限.

(3) 点 P 位于原点或虚轴的下半轴上.

(4) 点 P 位于实轴下方.

5. (1) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$ 即 $-2<m<3$ 或 $5<m<7$ 时，复数 z 对应的点位于第四象限.

(2) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14>0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}m^2-8m+15<0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$即 $m<-2$ 或 $3<m<5$ 或 $m>7$ 时，复数 z 对应的点位于第一、三象限.

(3) 当 $m^2-8m+15=m^2-5m-14$，即 $m=\frac{29}{3}$时，复数 z 对应的点位于直线 $y=x$ 上.

B 组

1. (1) $2-\mathrm{i}$；　　(2) $-2-\mathrm{i}$.

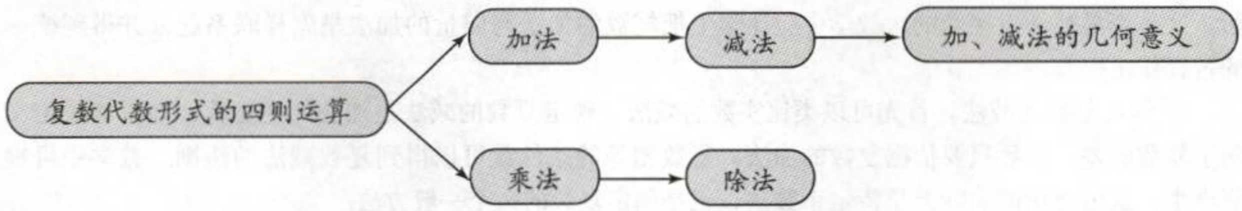
2. 因为

$$|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_3|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5},$$
$$|z_4|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5},$$

所以，Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 都在以原点为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆上.

3.2 复数代数形式的四则运算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则、运算律，以及复数加、减运算的几何意义.

难点：复数减法、除法的运算法则.

三、编写意图与教学建议

3.2.1 复数代数形式的加减运算及其几何意义

1. 在复数代数形式的加法和减法中，重点是加法. 教科书首先规定了加法的运算法则，这个规定的合理性可从下面两方面认识：

(1) 当 $b=0$，$d=0$ 时，与实数加法法则一致；

(2) 实数加法的交换律、结合律在复数集 **C** 中仍然成立.

2. 复数加法满足交换律、结合律的证明如下.

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$.

(1) 因为

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i}) \\ &=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}, \\ z_2+z_1 &=(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i}) \\ &=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

又因为 $a_1+a_2=a_2+a_1$，$b_1+b_2=b_2+b_1$，

所以

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} &(z_1+z_2)+z_3 \\ =&[(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})]+(a_3+b_3\mathrm{i}) \\ =&[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}]+(a_3+b_3\mathrm{i}) \\ =&[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]\mathrm{i}, \\ &z_1+(z_2+z_3) \end{aligned}$$

$$=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]$$
$$=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]$$
$$=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]\mathrm{i},$$

又因为 $(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$，$(b_1+b_2)+b_3=b_1+(b_2+b_3)$，

所以

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. 复数加法的几何意义，就是复数的加法可以按照向量的加法来进行，在学习了平面向量的知识后，这是容易被学生接受的. 教学中应让学生把复数的加法与向量的加法是怎样联系起来并得到统一的过程作出探究.

4. 学习复数的减法，首先可以类比实数的减法，规定复数的减法是加法的逆运算，即用加法定义两个复数的差，然后只要依据复数的加法，复数相等的条件就可以得到复数减法的法则. 教学中可提醒学生，这里使用的实际上是待定系数法，也是确定复数的一个一般方法.

5. 例题.

本例是一道巩固复数加、减法运算法则的题目，且是一道加、减混合运算题.

通过本例应使学生看到，复数代数形式的加、减法，形式上与多项式的加、减法是类似的，这样既可不必记忆公式，还可以减少运算中的错误.

3.2.2 复数代数形式的乘除运算

1. 复数代数形式的乘法运算法则也是一种规定，与复数加、减法一样，可按与多项式相乘类似的办法进行，而不必记忆公式.

2. 复数的乘法运算满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律，证明如下.

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$.

(1) 因为

$$z_1z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i},$$
$$z_2z_1=(a_2+b_2\mathrm{i})(a_1+b_1\mathrm{i})$$
$$=(a_2a_1-b_2b_1)+(b_2a_1+a_2b_1)\mathrm{i},$$

又因为 $a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1$，$b_1a_2+a_1b_2=b_2a_1+a_2b_1$，

所以

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

(2) 因为

$$(z_1z_2)z_3$$
$$=[(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})](a_3+b_3\mathrm{i})$$
$$=[(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(b_1a_2+a_1b_2)b_3]+[(b_1a_2+a_1b_2)a_3+(a_1a_2-b_1b_2)b_3]\mathrm{i}$$
$$=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)\mathrm{i},$$

同理可得

$$z_1(z_2z_3)$$
$$=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3)+(b_1a_2a_3+a_1b_2a_3+a_1a_2b_3-b_1b_2b_3)\mathrm{i},$$

所以

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

(3) 因为

$$
\begin{aligned}
&z_1(z_2+z_3)\\
=&(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]\\
=&(a_1+b_1\mathrm{i})[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]\\
=&[a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)]+[b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3)]\mathrm{i}\\
=&(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i},\\
&z_1z_2+z_1z_3\\
=&(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})(a_3+b_3\mathrm{i})\\
=&(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)\mathrm{i}+(a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\
=&(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(b_1a_2+a_1b_2+b_1a_3+a_1b_3)\mathrm{i}\\
=&(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

所以

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

3. 例题.

(1) 例 2 要求把 3 个复数顺序相乘，目的是熟悉复数乘法的法则，特别要提醒其中$(-2\mathrm{i})\cdot 4\mathrm{i}=8$，而不是$-8$. 也可以先安排几个两个复数相乘的题目后，再做例 2.

(2) 例 3 依乘法法则计算也是可以的，但这里主要提醒学生实数系中的乘法公式在复数系中也是成立的，运用乘法公式可以简化运算过程.

本例也为引出共轭复数的概念提供了实例支持，并通过计算和思考，了解共轭复数的一些性质，为学习复数除法作点准备.

4. 教科书中要求学生类比实数的除法，联系复数减法法则的引入过程，探求复数除法的法则.

规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+d\mathrm{i})\ (x+y\mathrm{i})\ =a+b\mathrm{i}\ (c+d\mathrm{i}\neq 0)$$

的复数 $x+y\mathrm{i}$，叫做复数 $a+b\mathrm{i}$ 除以复数 $c+d\mathrm{i}$ 的商.

经计算可得

$$(cx-dy)+(dx+cy)\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}.$$

根据复数相等的定义，有

$$cx-dy=a,\ dx+cy=b.$$

由此

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

于是

$$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\ (c+d\mathrm{i}\neq 0).$$

这就是复数的除法法则.

5. 在实际进行复数除法运算时，每次都按做乘法的逆运算的办法来求商，这是十分麻烦的. 可以由学生设想解决的办法，还可引导学生类比根式的除法，从而得到简便的操作方法：先把两个复数相除写成分数形式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，使分母“实数化”，最后再化简.

6. 例题.

例 4 是复数除法的计算题，目的是让学生熟练操作上述作除法的简便过程.

四、习题解答

练习（第 58 页）

1. (1) 5；(2) $2-2i$；(3) $-2+2i$；(4) 0.

2. 略.

练习（第 60 页）

1. (1) $-18-21i$； (2) $6-17i$； (3) $-20-15i$.

2. (1) -5； (2) $-2i$； (3) 5.

3. (1) i； (2) $-i$； (3) $1-i$； (4) $-1-3i$.

习题 3.2（第 61 页）

A 组

1. (1) $9-3i$； (2) $-2+3i$；

(3) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}i$； (4) $0.3+0.2i$.

2. $\overrightarrow{AB}$对应的复数为 $(-3+4i)-(6+5i)=-9-i$.

$\overrightarrow{BA}$对应的复数为 $9+i$.

3. 向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数为 $(1+3i)-(-i)=1+4i$，

向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数为 $(2+i)-(-i)=2+2i$，

于是向量$\overrightarrow{BD}$对应的复数为 $(1+4i)+(2+2i)=3+6i$，点 D 对应的复数为 $(-i)+(3+6i)=3+5i$.

4. (1) $-21+24i$； (2) $-32-i$；

(3) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$； (4) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. (1) $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$； (2) $\frac{18}{65}-\frac{1}{65}i$；

(3) $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$； (4) $1-38i$.

B 组

由 $2(2i-3)^2+p(2i-3)+q=0$，得 $(10-3p+q)+(2p-24)i=0$.

于是，有 $\begin{cases}10-3p+q=0,\\2p-24=0,\end{cases}$ 解得 $p=12$，$q=26$.

复习参考题（第 63 页）

A 组

1. (1) A； (2) B； (3) D； (4) C.

2. 由已知，设 $z=bi(b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$；

则$(z+2)^2-8i=(bi+2)^2-8i=(4-b^2)+(4b-8)i$.

由$(z+2)^2-8i$ 是纯虚数，得$\begin{cases}4-b^2=0,\\4b-8\neq0,\end{cases}$ 解得 $b=-2$.

因此 $z=-2i$.

3. 由已知，可得 $z_1+z_2=8+6\mathrm{i}$，$z_1z_2=55+10\mathrm{i}$.

又因为 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}$，所以

$$z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{55+10\mathrm{i}}{8+6\mathrm{i}}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

B 组

1. 设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

由 $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$，得 $(1+2\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$，

化简，得 $(a+2b)+(2a-b)\mathrm{i}=4+3\mathrm{i}$.

根据复数相等的条件，有 $\begin{cases}a+2b=4,\\2a-b=3,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=1$.

于是 $z=2+\mathrm{i}$，$\bar{z}=2-\mathrm{i}$，$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

2. (1)

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-\mathrm{i}$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$	1

(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+4}=1$.

III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. $a=0$ 是复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件也非必要条件

2. 设 $z_1=3-4\mathrm{i}$，$z_2=-2+3\mathrm{i}$，则 z_1+z_2 在复平面内对应的点位于（　　）.

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 设 O 是原点，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3\mathrm{i}$，$-3+2\mathrm{i}$，那么向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是（　　）.

(A) $-5+5\mathrm{i}$　　(B) $-5-5\mathrm{i}$

(C) $5+5\mathrm{i}$　　(D) $5-5\mathrm{i}$

4. $(1-\mathrm{i})^2\cdot\mathrm{i}$ 等于（　　）.

(A) $2-2\mathrm{i}$　　(B) $2+2\mathrm{i}$

(C) -2　　(D) 2

5. 复数 $\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)^2$ 的值是（　　）.

(A) $2\mathrm{i}$　　(B) $-2\mathrm{i}$

(C) 2　　(D) -2

6. 如果复数 $\dfrac{2-b\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的实部和虚部互为相反数，那么实数 b 的值为（　　）.

(A) $\sqrt{2}$　　(B) -2

(C) $-\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$

二、填空题

7. 复数$\frac{2}{1+\mathrm{i}}$的实部为________，虚部为________.

8. $(15+8\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})$的值为________.

9. 若 $z=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$，则 z^2-2z 的值为________.

10. 若复数 z 满足$\frac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$，则 $|z+1|$ 的值为________.

三、解答题

11. 已知复数 $z=(2+\mathrm{i})m^2-\frac{6m}{1-\mathrm{i}}-2(1-\mathrm{i})$. 当实数 m 取什么值时，复数 z 是

(1) 零；

(2) 虚数；

(3) 纯虚数；

(4) 复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数.

12. 设 z_1 是虚数，$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}$是实数，且$-1\leqslant z_2\leqslant 1$.

(1) 求 $|z_1|$ 的值以及 z_1 的实部的取值范围；

(2) 若 $w=\frac{1-z_1}{1+z_1}$，求证 w 为纯虚数.

参考答案

1. B.　2. D.　3. D.　4. D.　5. B.　6. C.

7. 1，-1.　8. $1-38\mathrm{i}$.　9. -3.　10. $\sqrt{2}$.

说明　7. 计算$\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$. 要注意虚部不是$-\mathrm{i}$.

8. 计算时也可以先变成$-(15+8\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$，可减少符号出错.

9. 可先作变形：$z^2-2z=(z-1)^2-1=(\sqrt{2}\mathrm{i})^2-1=-3$.

10. 由$\frac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$，得$(1-z)=(1+z)\mathrm{i}$，$(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，于是有 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，从而得 $|z+1|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

11. 由于 $m\in\mathbf{R}$，复数 z 可以表示为

$$\begin{aligned} z&=(2+\mathrm{i})m^2-3m(1+\mathrm{i})-2(1-\mathrm{i})\\ &=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(1) 当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2=0,\end{cases}$即 $m=2$ 时，z 为零.

(2) 当 $m^2-3m+2\neq 0$，即 $m\neq 2$ 且 $m\neq 1$ 时，z 为虚数.

(3) 当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2\neq 0,\end{cases}$即 $m=-\frac{1}{2}$时，z 为纯虚数.

(4) 当 $2m^2-3m-2=-(m^2-3m+2)$，即 $m=0$ 或 $m=2$ 时，z 为复平面内第二、四象限角平分

线上的点对应的复数.

说明 本题考查复数的四则运算以及复数的概念，对于解方程组也有较高要求.

12. (1) 设 $z_1=a+bi$ (a，$b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq 0$)，则

$$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}$$
$$=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i}.$$

因为 z_2 是实数，$b\neq 0$，于是有 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant 1$，得 $-1\leqslant 2a\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$.

(2) $w=\dfrac{1-z_1}{1+z_1}=\dfrac{1-a-bi}{1+a+bi}=\dfrac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{i}.$

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，$b\neq 0$，所以 w 是纯虚数.

说明 本题对复数运算有较高要求，还考查模、实部等概念，并考查通过运算进行推理论证的能力.

第四章 框图

Ⅰ 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章的课程目标可以分为两个方面．一方面在知识内容上，让学生理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法；另一方面在思想方法上，帮助学生体验用框图表示数学问题解决过程以及事物发生、发展过程的优越性，提高抽象概括能力和逻辑思维能力，以及清晰地表达和交流的能力．

2. 学习目标

(1) 通过具体实例，进一步认识程序框图，了解工序流程图．

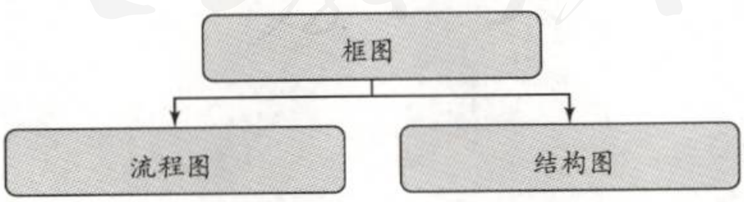
(2) 能绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用．

(3) 通过实例，了解结构图；运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息．

(4) 结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用．

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 2 节：4.1 流程图，4.2 结构图．

(1) 教科书在回顾和进一步认识程序框图，以及介绍生活中的流程图的基础上，描述了流程图的一般形式、特征和作用；然后结合具体例子，说明了画流程图和读流程图的一般方法；最后，教科书说明了流程图在表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤方面的应用．

(2) 教科书首先通过与流程图的比较，揭示出结构图的特征；然后通过对知识结构框图的认识，描述结构图的一般形式和作用，以及读结构图和画结构图的一般方法；接着通过具体实例介绍了组织结构图的特征和作用；最后，教科书说明了结构图在梳理已学过的知识方面的应用.

(3) 信息技术应用栏目介绍了用 Word2002 绘制流程图的基本方法，与专业的绘制框图的软件相比，这个工具更加简便、易学，而且能够满足一般的绘制框图的需要.

三、课时分配

本章教学时间约需 6 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1 流程图	约 3 课时
4.2 结构图	约 2 课时
小结	约 1 课时

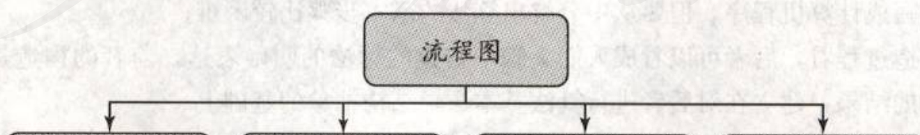
II 教科书分析

本章章头图的前景是工业生产流程的实景和描述零件加工流程的工序流程图，后景是各种形式的流程图和结构图，这样设计的目的是让学生体会框图在各个领域的广泛应用. 教学中可以让学生再举一些自己过去见过的框图实例，并说明它们的用途，也可以让学生回忆自己在什么情况下使用过框图，以及使用框图对表达自己想法的好处.

章引言在向学生展示框图在日常生活、学习、科研、生产等领域中的作用的同时，指出了本章要学习的主要内容. 框图包括两类——流程图和结构图，学生已经学过的程序框图和知识结构图分别属于这两类框图，教学中可以让学生回忆它们的特征、用途和使用它们的优越性.

4.1 流程图

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：学会绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用.

难点：绘制简单实际问题的流程图.

三、编写意图与教学建议

流程图是一种动态图示，通常用来描述一种过程性的活动．例如，流程图可以用来表示实际问题中的工序流程、数学计算与证明过程中的主要逻辑步骤等等．《数学3（必修）》“算法初步”一章介绍的程序框图就是流程图的一种．本节将进一步认识程序框图，并介绍工序流程图和其他实际问题的流程图．教学中要让学生通过模仿、操作、探索，掌握流程图的用法，体会流程图在表示数学问题解决过程以及事物发生发展过程中的优越性．

1. 进一步认识程序框图.

在“算法初步”一章中，学生了解了程序框图的常用图形符号，并用程序框图表达了一些问题的算法．一般来说，设计算法解决问题包括三个环节，首先用自然语言描述算法，然后画出程序框图表达算法，最后写出相应的计算机程序并上机实现算法．其中，用程序框图表达的算法比用自然语言描述的算法步骤更加直观、明确、清楚，而且容易转化为计算机程序．事实上，用程序框图表达算法的过程可以看成对算法步骤的细化过程．

本节用“算法初步”中出现过的一个例子，更加详细地说明了用程序框图表达算法步骤的过程．具体过程如下：

首先，回顾用自然语言描述的用二分法求方程 $x^2-2=0$ 的近似根的算法步骤；

其次，将每一个算法步骤细化，即将其分解为顺序结构（包括输入、输出和赋值）、条件结构、循环结构或这三种逻辑结构的组合；

再次，用相应的程序框图表示这些结构或组合；

最后，根据它们之间的关系用流程线连接起来．

这样，既使已有知识得到深化，又使学生了解了流程图的制作方法．教学中要先引导学生分析每一个算法步骤中包含的操作可以用什么逻辑结构来实现，然后再用相应的程序框图表示．例如，“第一步”可以分别用处理框和输入框来实现，二者构成了一个顺序结构；“第二步”中包含了赋值和判断，并根据判断的结果执行不同的操作，因此可以用一个处理框和一个条件结构来实现．有时还需要把几个步骤结合起来考虑，例如“第四步”和“第二步”“第三步”构成了一个循环结构．最后，让学生用合适的流程线连接各算法步骤的程序框图，就得到了整个算法的程序框图．

教科书还对程序框图描述的算法和自然语言描述的算法步骤进行了比较，教师可以从以下两个方面进行总结：

（1）从形式上看，前者可以看成后者的直观图示，它更加明确地展现了算法的三种基本逻辑结构，而且更容易改写成计算机程序，但要从中分解出算法的基本步骤比较困难；

（2）从构造过程看，后者可以看成人们头脑中构建的算法的明确表达，前者的构造是对后者进行深入细致分析的结果，建立在对后者进行算法基本逻辑结构抽象的基础上．

这里，第（1）方面主要说明了程序框图在表达算法时的优越性，第（2）方面解释了其中的原因．这种优越性的产生还在于程序框图是一种图示语言，它能更直观地表达问题解决的过程．这里只要求学生了解第（1）方面即可．

2. 介绍流程图.

程序框图是数学或计算机领域中表达解决问题的过程的一种图示，生活中事物发生、发展的过程也可以用类似的图示来表达．教科书列举了图书馆中的“图书借阅流程图”和医院中的“诊病流

程图”，教学中可以让学生描述这两个流程图表示的流程，还可以让学生课前收集一些流程图，然后在课堂上进行交流．在此基础上，教师可以引导学生对流程图做一个总结，如可以提出下列 4 个问题：

(1) 流程图是由哪几部分构成的？（图形符号和文字说明．）

(2) 流程图的作用是什么？（表示一个动态过程或者描述一个过程性的活动，从而指导人们完成某一项任务或者用于交流．）

(3) 流程图有哪些特征？（通常会有一个“起点”，一个或多个“终点”．）

(4) 使用流程图有哪些优越性？（可以直观、明确地表示动态过程从开始到结束的全部步骤．）

在实际中，阅读流程图要理解流程图表示的流程，并根据这些流程完成某项任务．教科书除了在这里安排了阅读流程图的内容，还在例 3 之后设置了一个思考栏目，让学生通过阅读工序流程图理解工业生产的流程．

3. 绘制流程图．

为了让学生进一步认识流程图，教科书设置了绘制流程图的内容．绘制流程图是用图形符号等来描述事物发生、发展的过程，如绘制程序框图表示解决问题的过程等．关于绘制流程图，教科书的介绍分为下面 3 个部分．

(1) 通过例 2 说明绘制流程图的一般步骤．例 2 用自然语言描述了一个考试流程，要求画出流程图表示这个流程．教学中可以先让学生回忆绘制程序框图的一般步骤，再用类似的方法解题．

首先，需要分析自然语言描述的考试流程，将其分解为若干比较明确的步骤（这相当于获得了用自然语言描述的算法步骤）．这里的步骤包括：

第一步，咨询考试事宜；

第二步，新考生填写考生注册表并领取考生编号，老考生出示考生编号；

第三步，明确考试科目和时间；

第四步，缴纳考试费；

第五步，按规定时间参加考试；

第六步，领取成绩单；

第七步，领取证书．

其次，分析每一个步骤是否可以直接表达，或需要借助于逻辑结构来表达．这里的第二步需要用条件结构来表达，其他步骤可以直接表达．

再次，分析各步骤之间的关系．这里，各步骤间是顺序执行的关系．

最后，画出流程图表示整个流程．

例 2 之后，教科书对绘制实际生活中的流程图做了一些说明．一是按照人们的习惯，阅读和绘制流程图的一般顺序是从左到右、从上到下；二是绘制流程图时没有一定的规范和标准，可以使用不同的色彩、添加生动的图形元素；等等．教学时还要向学生说明，尽管实际生活中一些流程图的流程线没有用箭头表示流向，但一般都按照从左到右、从上到下的顺序来理解流程图的流向．

(2) 教科书通过例 3 介绍了工序流程图的绘制．绘制的方法与一般流程图类似，因此教科书直接根据自然语言描述的零件加工的过程画出了工序流程图．教学中可以将例 3 的解答作为课堂练习，让学生自己完成，同时提示学生：零件加工的过程包括三道工序，在每道工序之后都要对产品进行检验，然后根据检验的结果执行不同的工序，因此需要绘制三个条件结构．教科书将流程图画成了“横向”形式，还可以画成下面的“纵向”形式（图 4-1）：

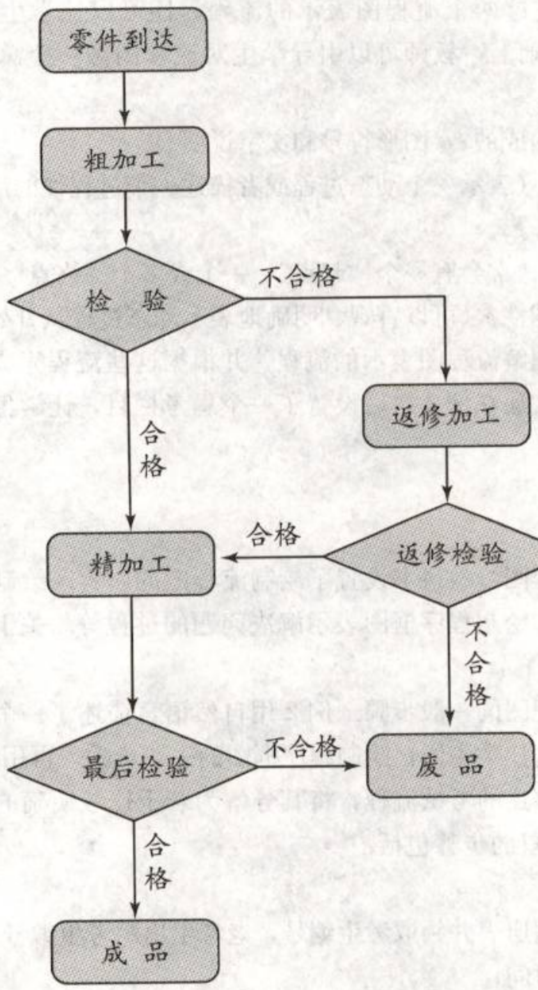


图 4-1

例 3 之后的思考栏目的答案是一件成品可能经过两道加工和检验的程序，即粗加工和检验、精加工和检验，也可能经过三道加工和检验的程序，即粗加工和检验、返修加工和返修检验，以及精加工和最后检验，其中返修加工和精加工都可能产生废品.

(3) 在上述绘制流程图的过程中，流程中的每一个明确的步骤构成了流程图的基本单元，基本单元之间通过流程线产生联系. 关于基本单元和流程线的确定，教科书结合具体实例做了说明.

首先，教科书说明了确定基本单元中内容的原则，即根据需要可详可略. 如教科书图 4.1-5 中的流程图包括“入库”“找书”“阅览”“借书”“出库”“还书” 6 个基本单元，这样的流程图可以帮助读者大致了解某图书馆的图书借阅流程，而习题 4.1 B 组第 2 题描述的图书借阅流程将上述流程图中的每一个基本单元细化，给读者提供了更明确、更方便的图书借阅指南. 画这样的流程图时，既可以在基本单元中具体说明，也可以为基本单元设置若干子单元. 如“找书”环节可以细化为(图 4-2)：

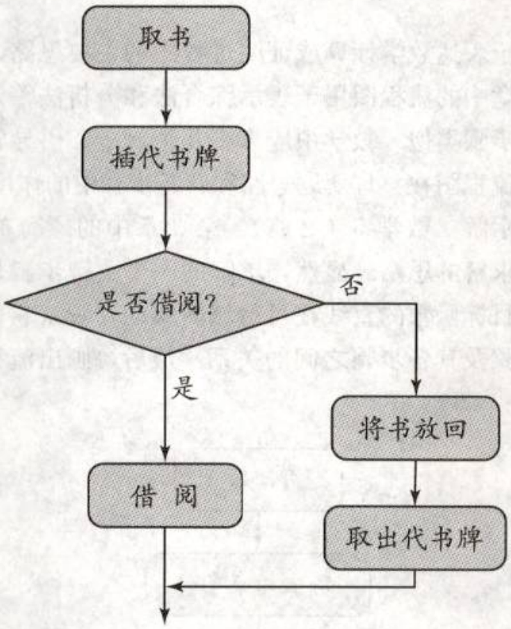


图 4-2

其次，教科书举例说明了流程中包含同时进行的两个或多个步骤的流程图的画法．例如，探究栏目中的亲子活动，接待儿童和接待家长的活动需要同时进行，在这种情况下，需要从同一个基本单元出发，引出两条流程线分别表示两个步骤．除此之外，当流程中的某个步骤之后有两种或多种选择时，也需要用两条或多条并行的流程线表示各种选择．例如，银行中办理房屋抵押贷款的流程图(图 4-3)、练习 2 中的电话银行代缴业务流程图都属于这种情形．

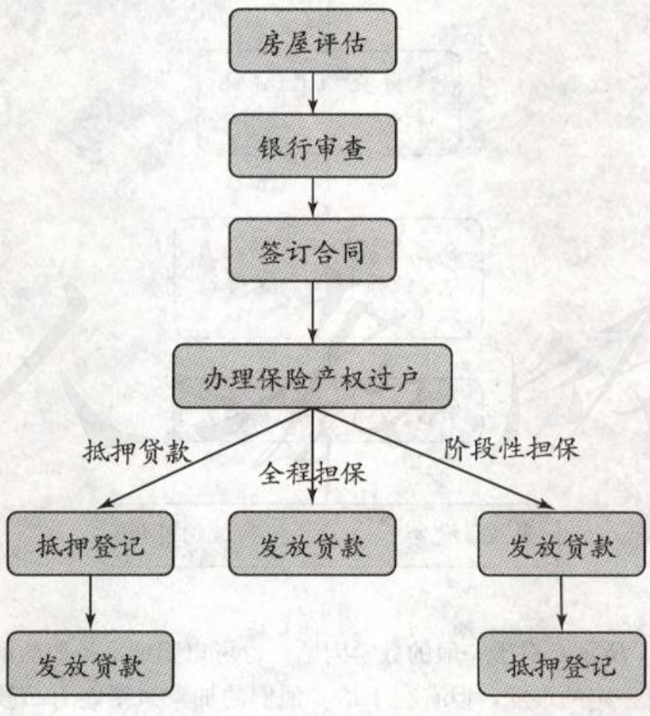


图 4-3

这些流程图的背景可能是学生不熟悉的，但是正确地阅读流程图也可以完成任务．教学中可以让学生阅读和绘制一些实际问题的流程图，帮助他们体会流程图在解决实际问题中的作用．

4. 流程图在数学中的应用.

在数学中，流程图主要用于表达数学计算或证明过程中的主要思路，例如程序框图用于表达算法步骤，本书“推理与证明”一章中的流程图用于表示综合法和分析法等证明方法的解题过程. 绘制这类流程图的步骤与前述的一般步骤类似. 教学中应多举几个例子，引导学生绘制流程图表示求解某类数学问题的过程，让他们体会流程图在整理解题思路和解题步骤中的作用.

例如，让学生画流程图表示解《数学 5（必修）》第 3 章中的“简单的线性规划问题”的一般步骤. 首先，让学生回忆并整理求解的思路. 显然，求解的一个关键步骤是作出约束条件所表示的平面区域，即可行域，然后使表示目标函数的直线在可行域内移动，观察它何时达到最大值或最小值. 接着，让学生明确每一个求解步骤及其各步骤之间的关系. 最后，画出流程图表示整个求解过程，如可以画成图 4-4 的形式.

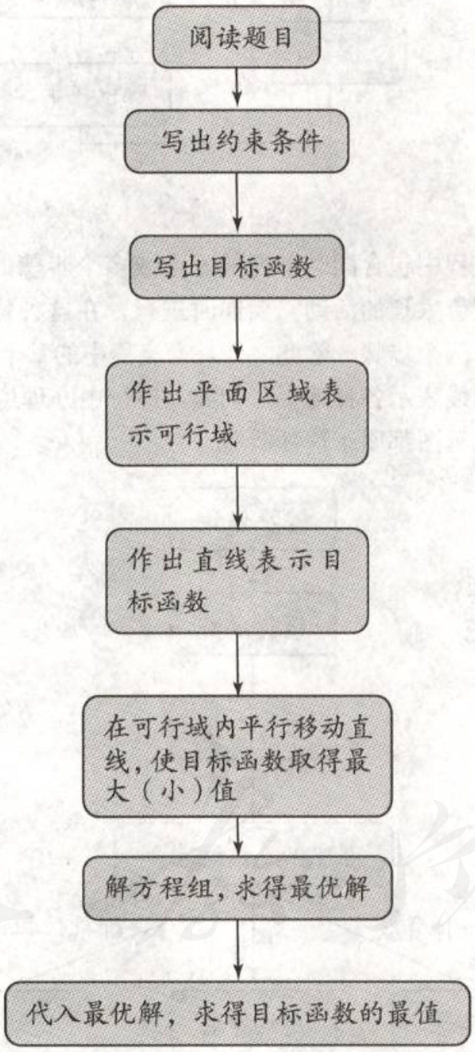


图 4-4

如教科书中图 4.1-11 所示，对于一般的数学问题，也可以归纳出类似的解题过程，并画出流程图表示. 这对于学生来说有一定的难度，但有利于培养他们的抽象概括能力. 教学时可以先引导学生分析几个问题的解决过程，然后总结规律，将其中类似的步骤明确地表述出来，并分析各步骤之间的关系，最后画出流程图表示解决一般数学问题的过程.

四、教学设计案例

4.1 流程图（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）通过具体实例，使学生进一步认识程序框图.

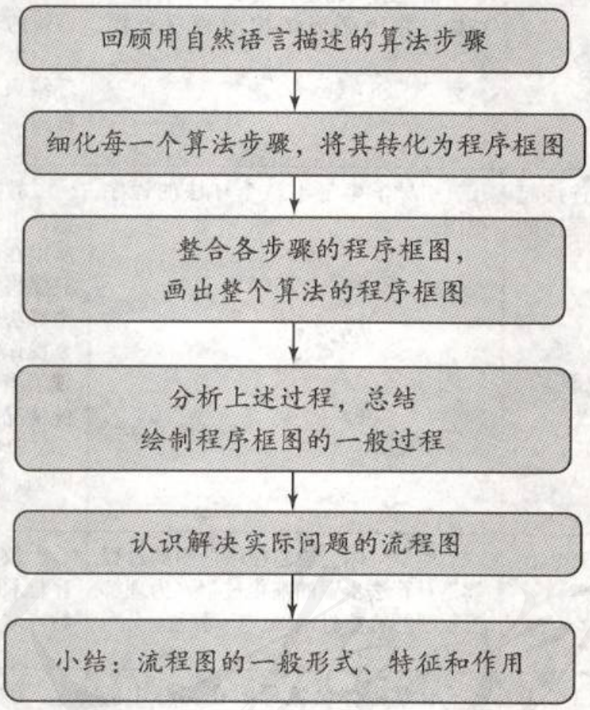
（2）通过绘制解决数学问题的程序框图和认识解决实际问题的流程图，使学生了解流程图的一般形式、特征和作用.

2. 教学重点与难点

重点：认识流程图的一般形式、特征和作用.

难点：总结绘制程序框图的一般过程，表达解决数学问题的过程.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问题	问题设计意图	师生活动
（1）你能回忆一下用自然语言描述的用二分法求方程 $x^2-2=0$ 的近似根的算法步骤吗？	联系程序框图的有关知识，建立问题情境.	师：提出问题，引导学生回忆“二分法”的“算理”. 生：回忆、叙述用二分法求方程 $x^2-2=0$ 近似根的算法步骤.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
(2) 怎样用程序框图来表达算法步骤中的第一步?	让学生用程序框图表达顺序结构的算法步骤.	师：提出问题，让学生先画出相应的程序框表达第一步中的两种操作，再用流程线连接为顺序结构的程序框图. 生：分别用处理框和输入框表达各操作，并用流程线连接.
(3) 第二步中有哪些操作? 其中包含了哪些逻辑结构? 怎样用程序框图来表达?	引导学生确定算法步骤中的条件结构，并用条件结构的程序框图来表达. 同时，用流程线与表达其他操作的流程框连接，整体构成一个顺序结构.	师：引导学生回忆算法的三种基本逻辑结构，并提出问题. 学生分析第二步中包含的操作及其需要使用的逻辑结构，画出相应的程序框图.
(4) 第三步是什么逻辑结构? 怎样用程序框图来表达?	让学生用条件结构的程序框图表达算法中的条件结构.	师：提出问题. 学生回答问题，并画出相应的程序框图.
(5) 第四步是什么逻辑结构? 怎样用程序框图来表达?	引导学生确定算法步骤中的循环结构，并用循环结构的程序框图表达.	师：提出问题，引导学生根据第四步的逻辑结构，画出程序框图. 生：分析这一步中的循环体、循环结束的条件，并画出相应的程序框图.
(6) 将各步骤的程序框图连接起来，是否就得到了整个算法的程序框图? 还有需要改进的地方吗?	引导学生得出整个算法的程序框图.	教师提出问题，并引导学生认识：由于各算法步骤是顺序执行的，所以在得到各步骤的程序框图之后，只要将它们顺序连接，就可以得到整个算法的程序框图，但也可能出现重复操作等不合理的地方. 本例中就出现了当 $f(m)=0$ 时，输出两次 m 值的情况. 学生整合并分析程序框图，发现问题，改进程序框图.
(7) 你能总结一下绘制程序框图的过程以及程序框图的特点吗?	使学生体会绘制程序框图的过程就是对算法步骤的细化过程，为理解流程图的特点打基础.	教师提出问题，师生共同归纳程序框图的绘制过程和程序框图的特点.
(8) 你能描述一下图 4.1-5 和 4.1-6 表示的过程吗? 它们有什么特点?	让学生体会流程图在实际中的应用.	师：让学生阅读教科书中图 4.1-5 和 4.1-6，并提出问题. 生：读图，回答问题.
(9) 请展示你课前收集的流程图，并向其他同学描述它们表达的过程. 你认为自己收集的流程图有哪些特点?	让学生进一步体会流程图在描述事物的发生、发展过程中的作用.	师：请几位学生展示课前收集的流程图，并描述这些流程图表达的过程以及它们的特点.
(10) 从上面的流程图实例中，你能概括一下流程图的一般形式、特点和作用吗?	引导学生归纳、概括流程图的一般形式、特征和作用.	教师提出问题，让学生分组讨论，再总结交流. 教师注意从图形的构成、构成图形的“零件”及其作用、与自然语言相比的优越性等方面进行引导.

续表

问题	问题设计意图	师生活动
（11）小结：你能说说绘制流程图的一般过程吗？	引导学生类比绘制程序框图的过程，得到绘制流程图的一般过程，为例 2 的教学做准备.	教师引导学生根据流程图的结构、特点和作用，概括绘制流程图的一般过程．特别要注意根据问题的特点，在分析的基础上将解决问题的整个过程分解成“子过程”，然后先画出相应的“子流程”，再整合为完整的流程图，并检验流程图的合理性.

5. 几点说明

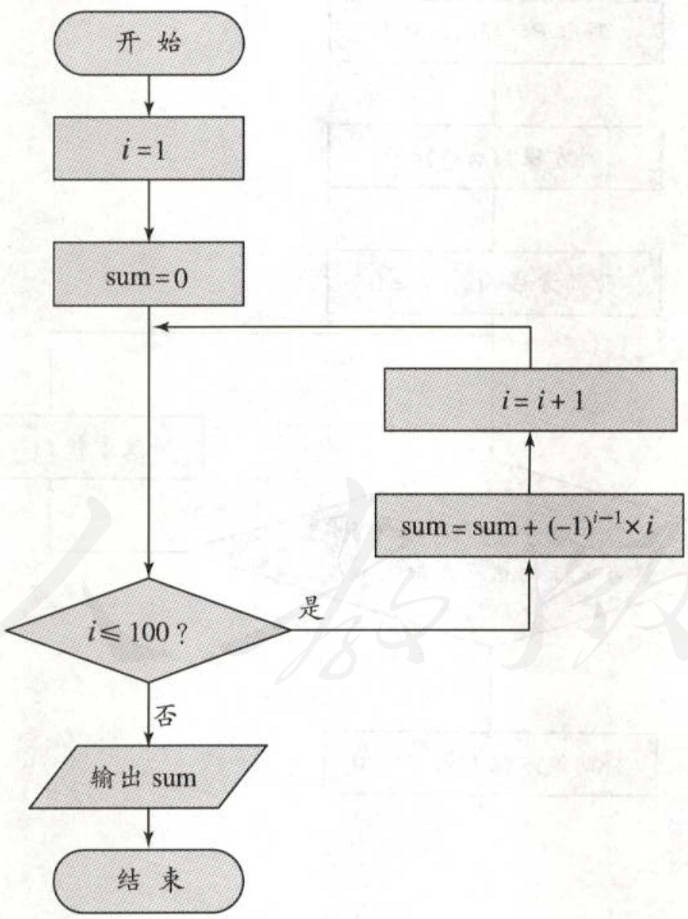
（1）请学生在课前复习《数学 3（必修）》“算法初步”中程序框图的相关知识以及“二分法”.

（2）请学生课前收集不同场合的流程图.

五、习题解答

练习（第 72 页）

1. 算法步骤略.



2. 交纳电费的操作步骤如下：

第 1 步，拨通 95599 电话.

第 2 步，按 1.

第3步，按5.

第4步，按1.

第5步，按2.

手机充值的操作步骤如下：

第1步，拨通95599电话.

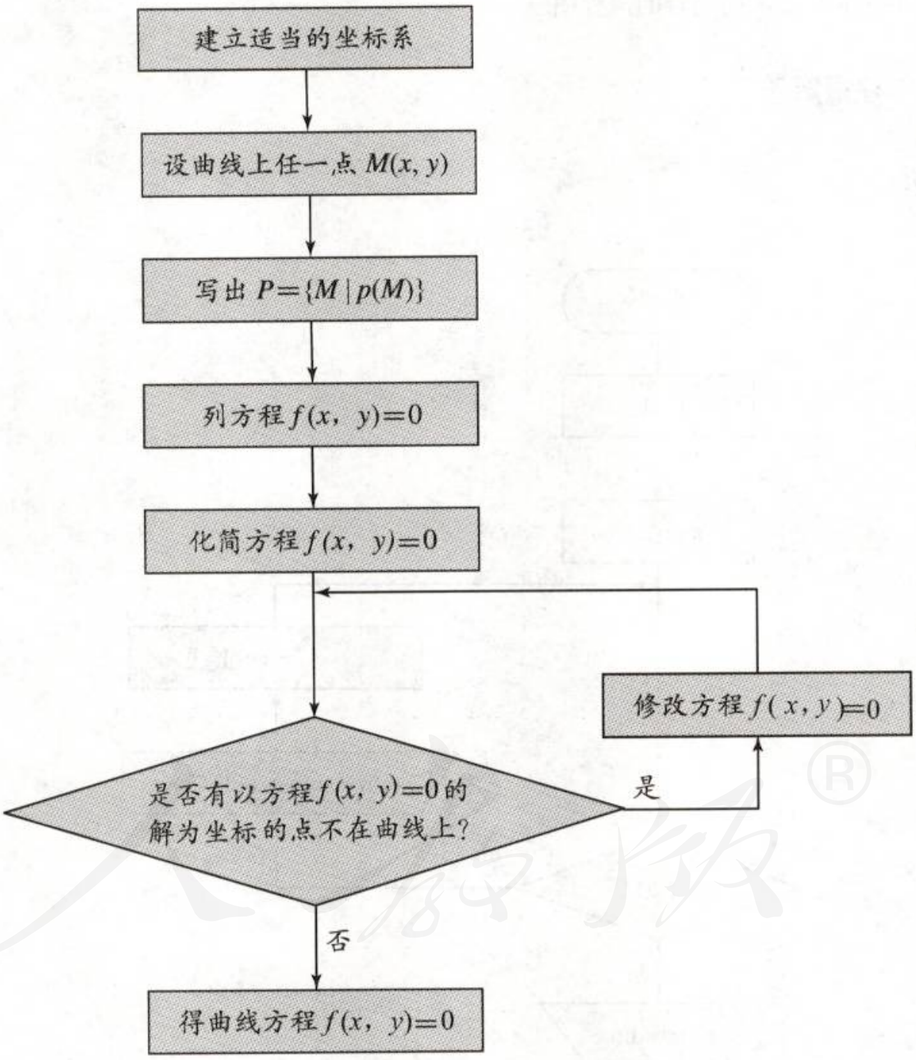
第2步，按1.

第3步，按5.

第4步，按2.

第5步，按1.

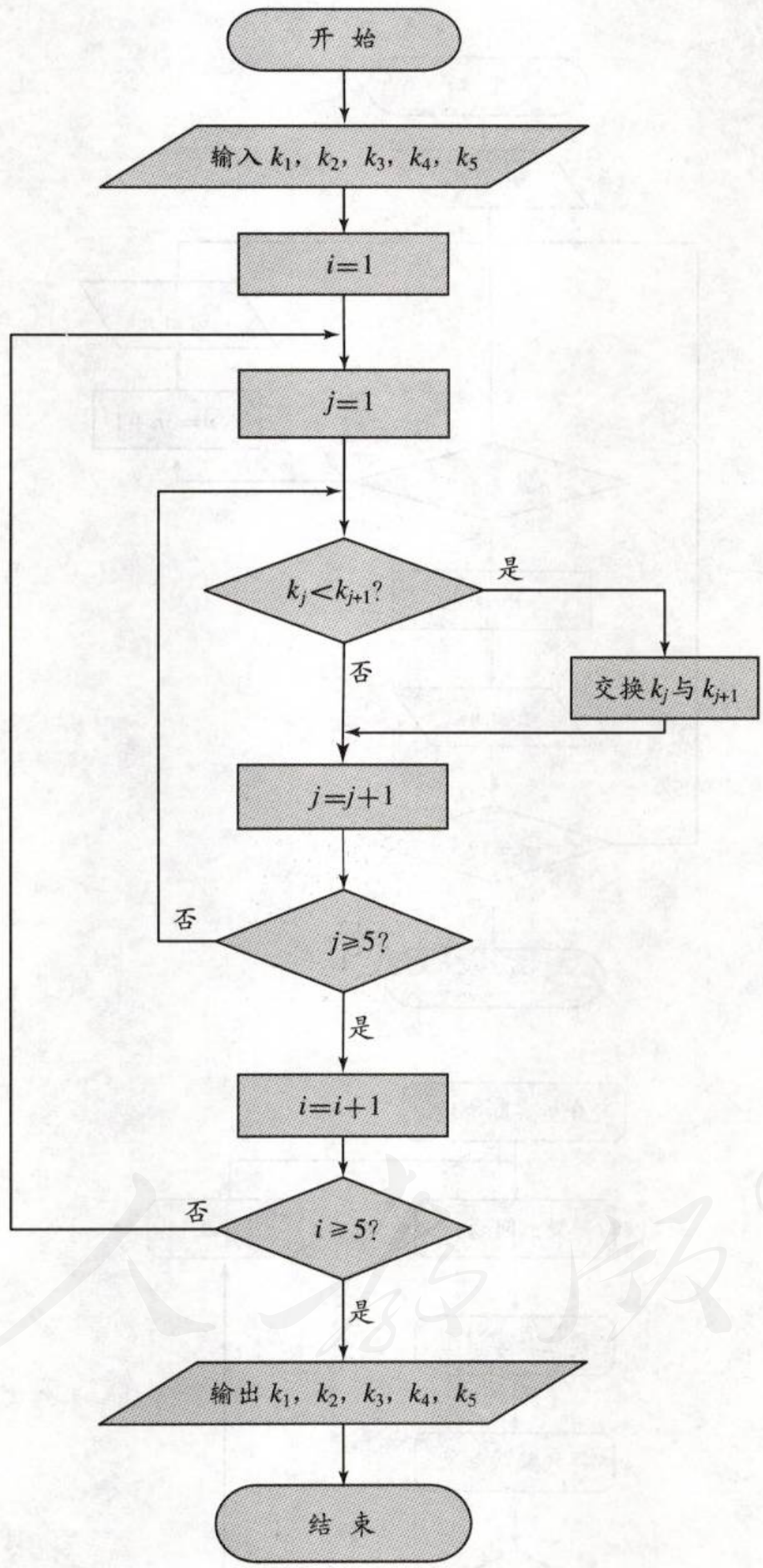
3.



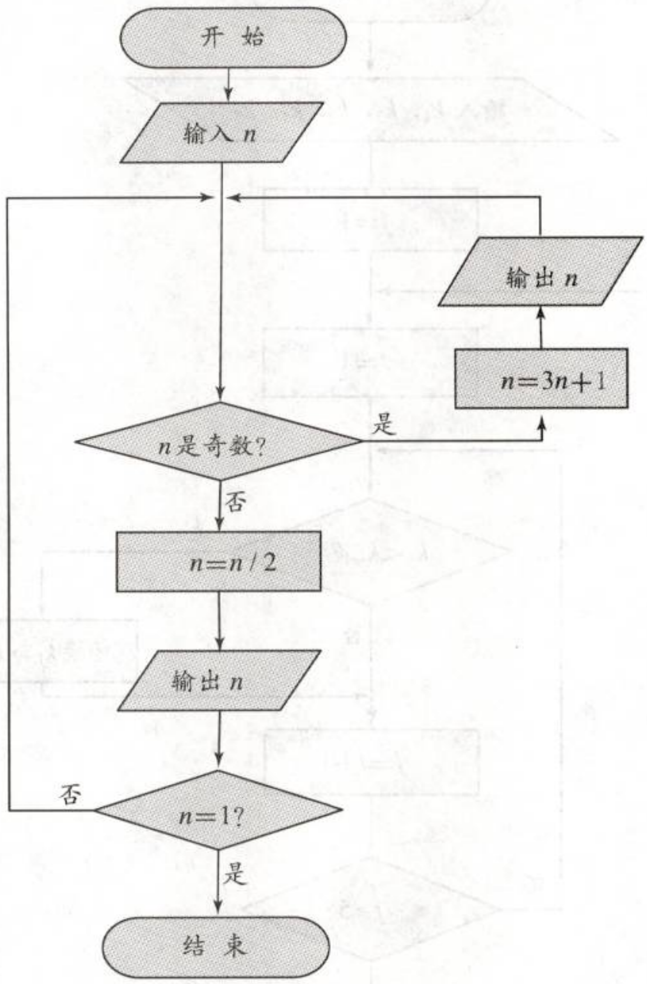
习题 4.1（第 73 页）

A 组

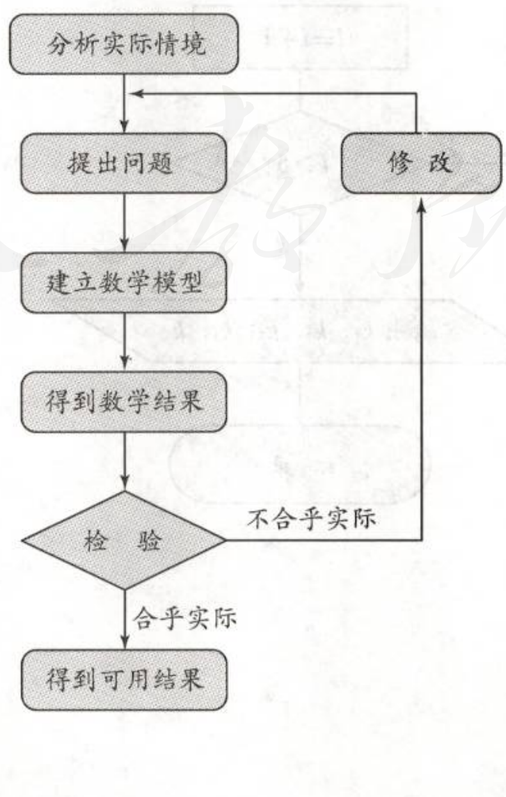
1. 算法步骤略.


开始
输入 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5
$i=1$
$j=1$
$k_j<k_{j+1}$?
是
交换 k_j 与 k_{j+1}
否
$j=j+1$
$j\geqslant 5$?
否
是
$i=i+1$
$i\geqslant 5$?
否
是
输出 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5
结束

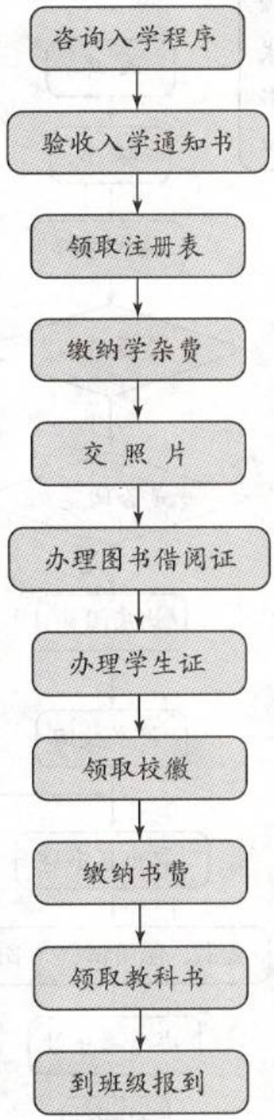
2.


开 始
输入 n
输出 n
n=3n+1
是
n是奇数?
否
n=n/2
输出 n
否
n=1?
是
结 束

3.


分析实际情境
提出问题
修 改
建立数学模型
得到数学结果
检 验
不合乎实际
合乎实际
得到可用结果

4. 例如，可用如下流程图表示入学的程序：

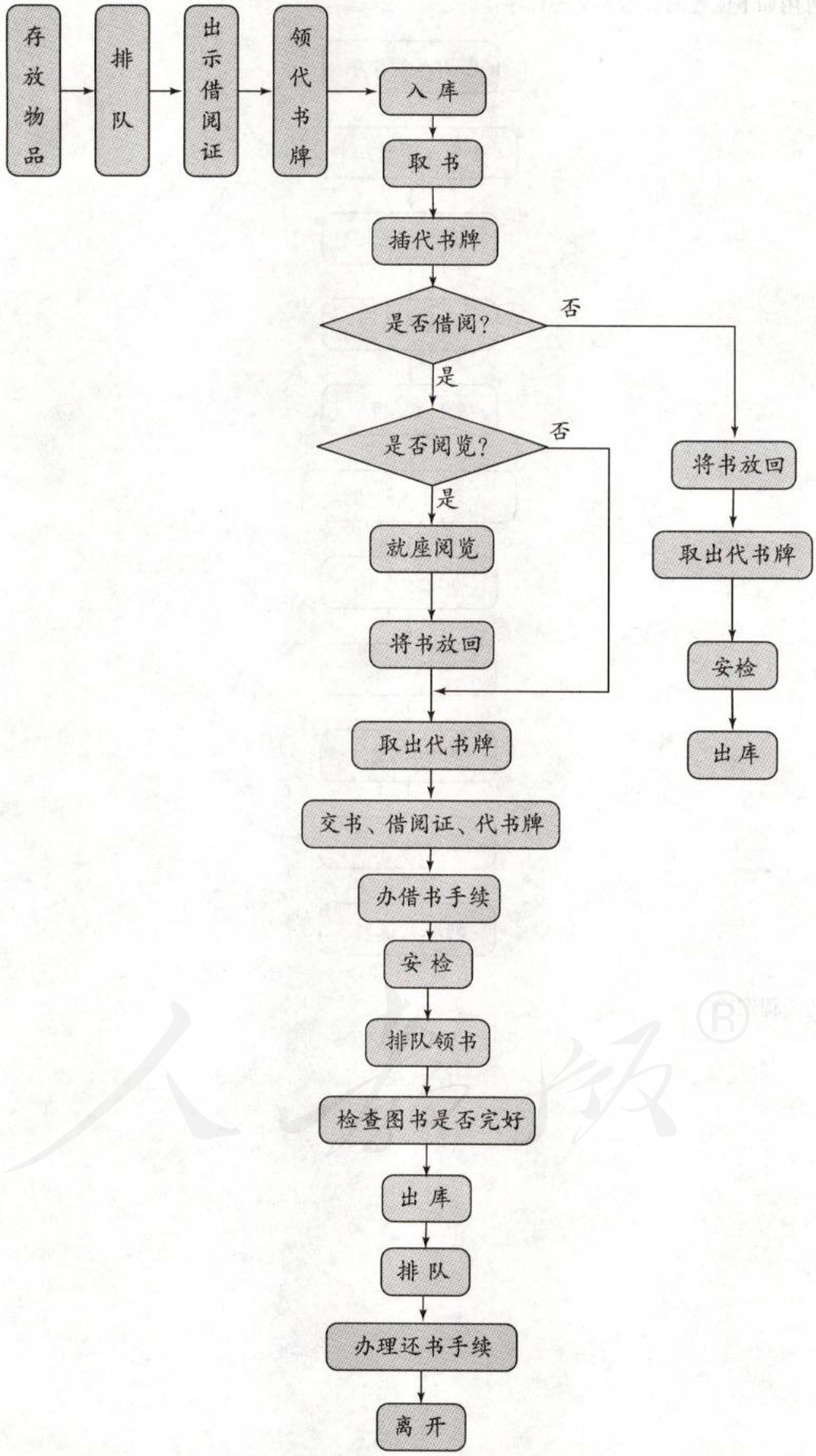


毕业离校的流程图略.

B 组

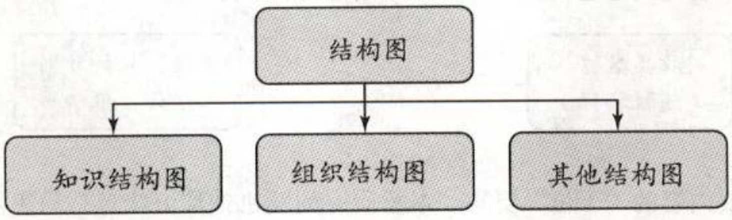
1. 略.

2.


存放物品
排队
出示借阅证
领代书牌
入库
取书
插代书牌
是否借阅?
否
是
是否阅览?
否
是
就座阅览
将书放回
取出代书牌
交书、借阅证、代书牌
办借书手续
安检
排队领书
检查图书是否完好
出库
排队
办理还书手续
离开
将书放回
取出代书牌
安检
出库

4.2 结构图

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息，体会结构图在揭示事物联系中的作用.

难点：运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息.

三、编写意图与教学建议

结构图是一种静态图示，通常用来描述一个系统各部分和各环节之间的关系. 例如，本套教科书各章之后的知识结构图就是结构图的一种. 本节主要介绍了知识结构图和组织结构图的相关知识，以及用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息的一般方法等.

1. 认识结构图.

教科书以《数学 1（必修）》第 2 章的知识结构图为例，介绍了结构图的一般特征. 结构图一般由构成系统的若干要素和表达各要素之间关系的连线构成. 一般用图框和文字说明表示系统的各要素，各图框之间用连线或方向箭头连结起来. 在阅读结构图时，一般根据系统各要素的具体内容，按照从上到下、从左到右的顺序或箭头所指的方向将各要素划分为从属关系或逻辑的先后关系.

教学中可以知识结构图为例，让学生阅读结构图说明各部分之间的关系. 例如，从图 4.2-1 的知识结构图中不仅可以看出本章的主要内容（即本章主要研究了指数、对数、指数函数和对数函数的相关知识），还能看出各主要内容之间的关系（即指数是学习指数函数的前提，对数是学习对数函数的前提，指数函数与对数函数之间、指数与对数之间都具有内在联系性）. 除此之外，还能看出与主要内容相关联的内容，以及这些内容与主要内容之间的关系和它们彼此之间的关系. 例如，与指数相关联的是“整数指数幂”“有理指数幂”“无理指数幂”，箭头表示它们与指数之间都是从属关系，而它们彼此之间是逻辑先后关系，反映了指数幂的推广过程；与指数函数相关联的是“定义”“图象与性质”，它们与指数函数之间是从属关系，说明本章研究了指数函数的定义以及图象与性质.

2. 绘制结构图.

绘制结构图的一般步骤与绘制流程图类似，先确定组成系统的基本要素，以及这些要素之间的关系，然后画出结构图表示整个系统. 对于包含从属关系的系统，由于其中至少包含一个“上位”或

“下位”要素，因此也可以先将系统的主体要素及其之间的关系表示出来，然后确定主体要素的下位要素（即从属于主体要素的要素），再逐步细化各层要素，直到将整个系统表示出来为止.

教科书设置了一个探究栏目，让学生重新绘制《数学 3（必修）》第 2 章的知识结构图，其目的是以学生熟悉的内容为载体，让他们通过对本章知识结构的重新梳理达到加深认识的效果，从而使他们体会学习本章内容的必要性. 教学中可以让学生自己完成下列绘制过程.

首先，概括本章主要内容. 本章主要研究的是用随机抽样的方法收集数据，以及整理和分析数据，并做出估计和推断，二者之间是逻辑先后关系，用结构图表示为（图 4-5）：

图 4-5

然后，确定各主要内容的“下位”要素. 本章研究的随机抽样方法包括简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，对总体的估计和推断包括用样本数据估计总体情况和对变量间的相关关系的研究，用结构图表示为（图 4-6）：

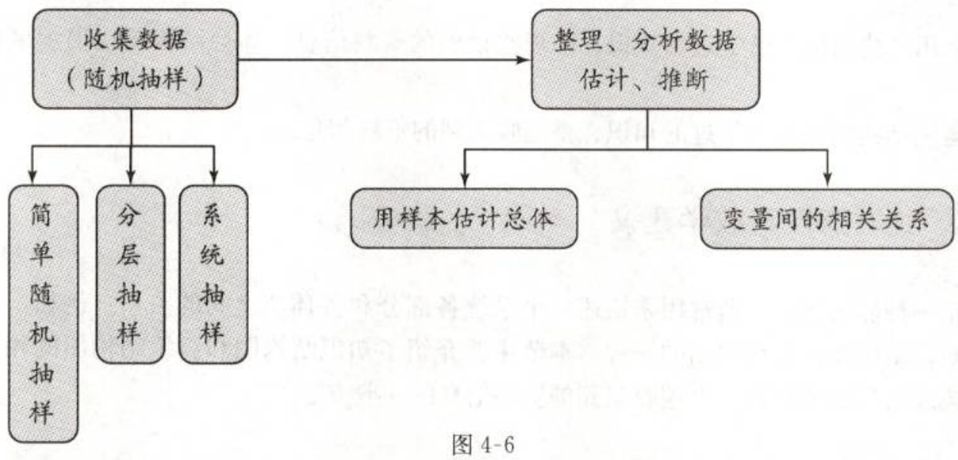


图 4-6

其中，“用样本估计总体”包括分别用样本的频率分布和数字特征估计总体的分布和数字特征，对变量间相关关系的研究采用的是线性回归分析的方法，用结构图表示为（图 4-7）：

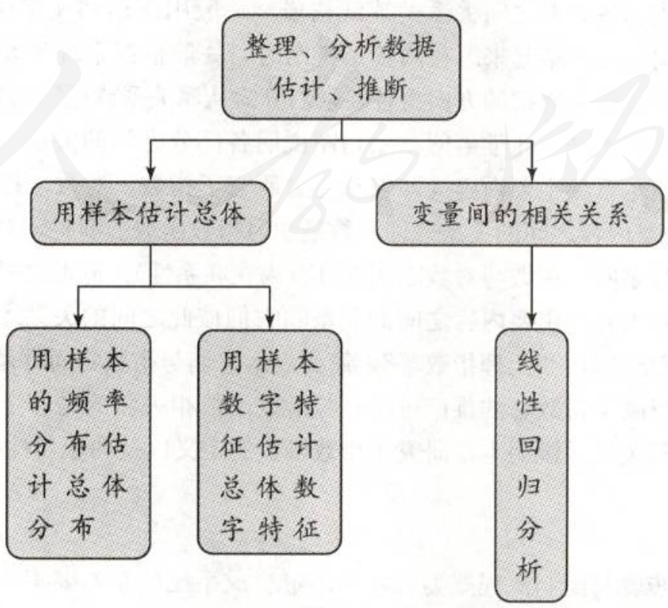


图 4-7

最后，将上述过程整合，就可以得到本章的知识结构图：

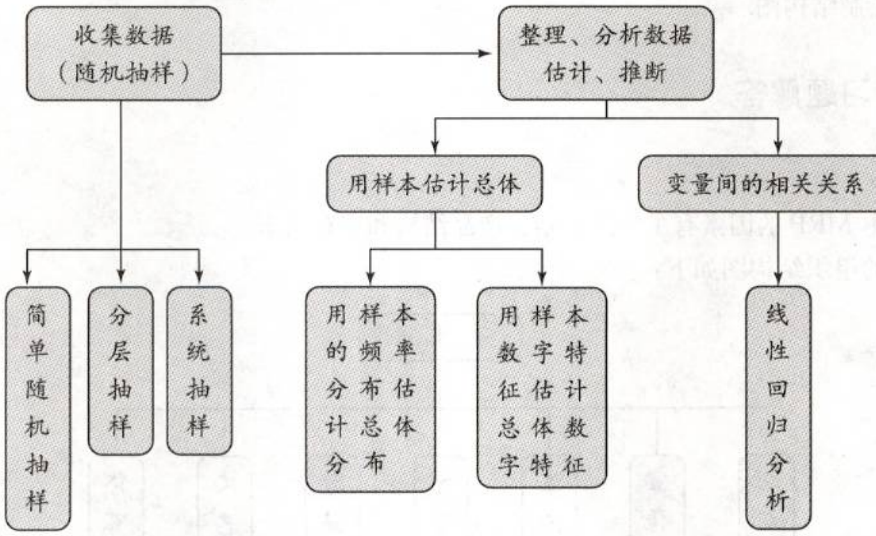


图 4-8

一般来说，包含从属关系的结构图呈“树”形结构，包含逻辑先后关系的结构图则可能呈“环”形结构．在绘制这类结构图时，可以先根据逻辑先后关系按照从左到右或从上到下的顺序画出各要素的图框，再用连线或方向箭头适当连结，如教科书的图 4.2-7.

教科书还举例说明了绘制结构图的详略原则，即根据具体需要来确定复杂程度．一般地，“下位”要素越多的结构图越复杂，而简洁的结构图有时能更好地反映主体要素之间的关系和系统的整体特点.

3. 认识组织结构图.

组织结构图与知识结构图类似，区别在于它所描述的对象是一个组织系统．教学中一方面要让学生体会组织结构图在直观、清晰地表示组织的部门构成时的优越性，另一方面要引导学生正确地阅读和绘制组织结构图.

一般来说，组织结构图呈“树”形结构，结构图中的各部门从上到下是从属关系．在绘制组织结构图时，首先要明确一个组织包括哪些部门，以及这些部门之间的关系．教学中可以先让学生描述一些自己熟悉的组织结构，例如本班班委会或学校学生会的组织构成，并画出结构图表示.

4. 结构图在整理信息中的应用.

当人们需要对收集到的资料进行整理时，也可以画出结构图表示整理的结果．与已学过的知识不同，收集到的资料可能是我们不熟悉的内容，或者资料本身不具有明确的体系结构（例如其中包含哪些相互关联的要素，彼此之间是什么关系，等等）．因此，往往需要先对资料进行分析归纳等，才能画出合理的结构图.

教科书给出了一个数列的多元联系结构图．绘制这样的结构图时，首先要思考可以从哪些角度认识数列，即在已学过的知识中，哪些是与数列相关联的，它们与数列之间有什么关系，它们彼此之间又有什么关系，然后将思考的结果表示出来．阅读这样的结构图，有利于学生建立起多个知识内容之间的横向联系，并从多种不同联系的角度理解某一知识内容.

5. 信息技术应用“用 Word2002 绘制流程图”的教学建议.

本章框图的绘制应以手工绘制为主．有条件的学校可以介绍用信息技术绘制框图的方法，并给学生适当练习的机会．教科书介绍了 Word2002 自带的流程图绘制工具，教学时可以结合绘制流程图的

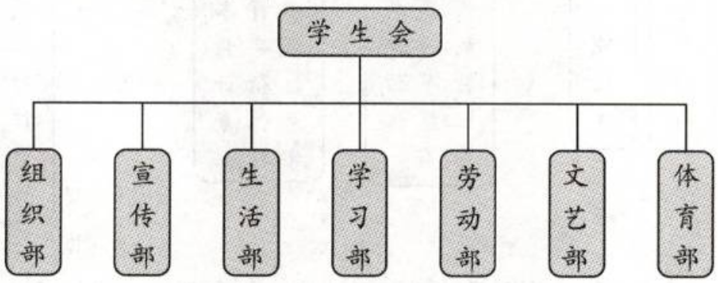
教学，用一个简单的例子（如绘制图 4.1-7 中的流程图）介绍用该工具绘制流程图的一般流程. 用这个工具也可以绘制结构图.

四、习题解答

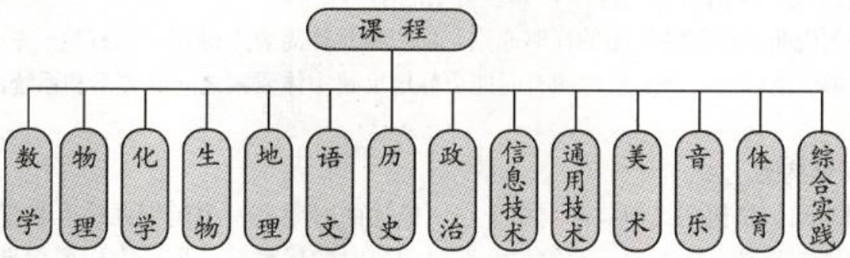
练习（第 78 页）

1. 直接影响基本 MRP 的因素有主生产计划、产品结构和库存状态.

2. 某校学生会的组织结构图如下：



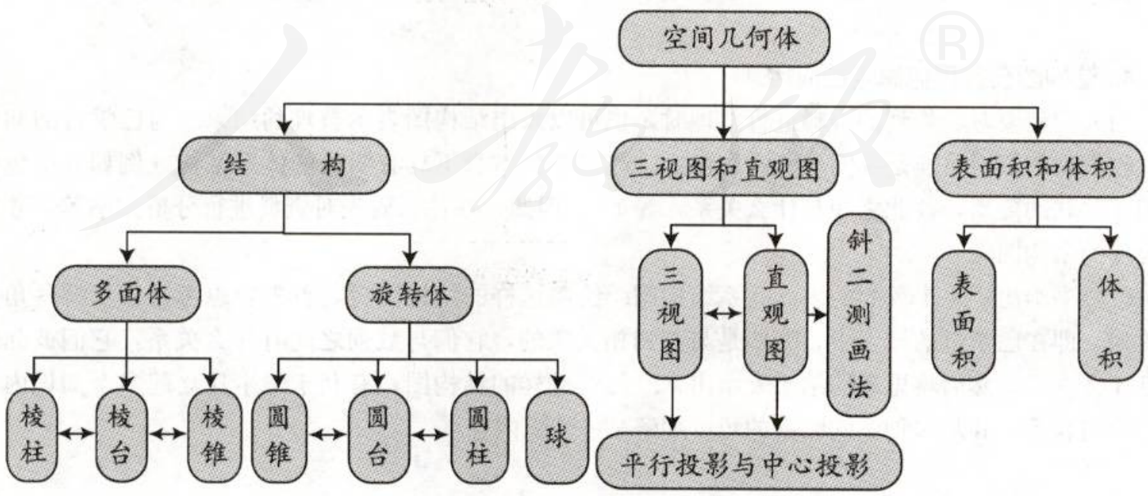
3. 某校的课程结构图如下：



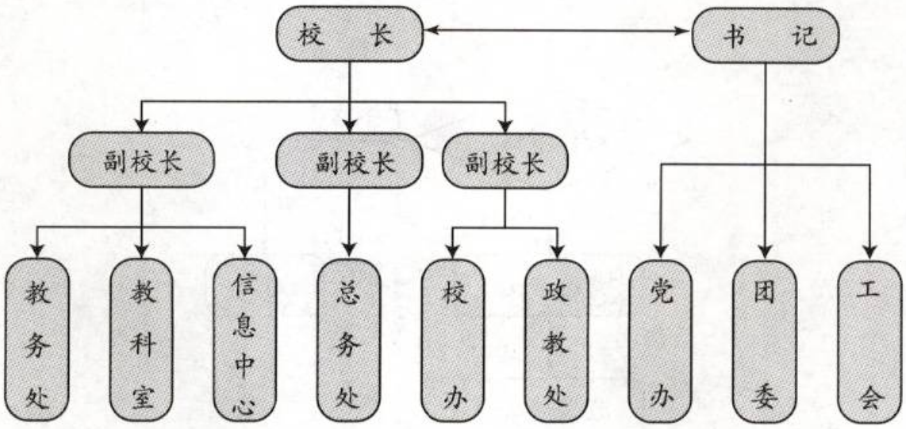
习题 4.2（第 81 页）

A 组

1.

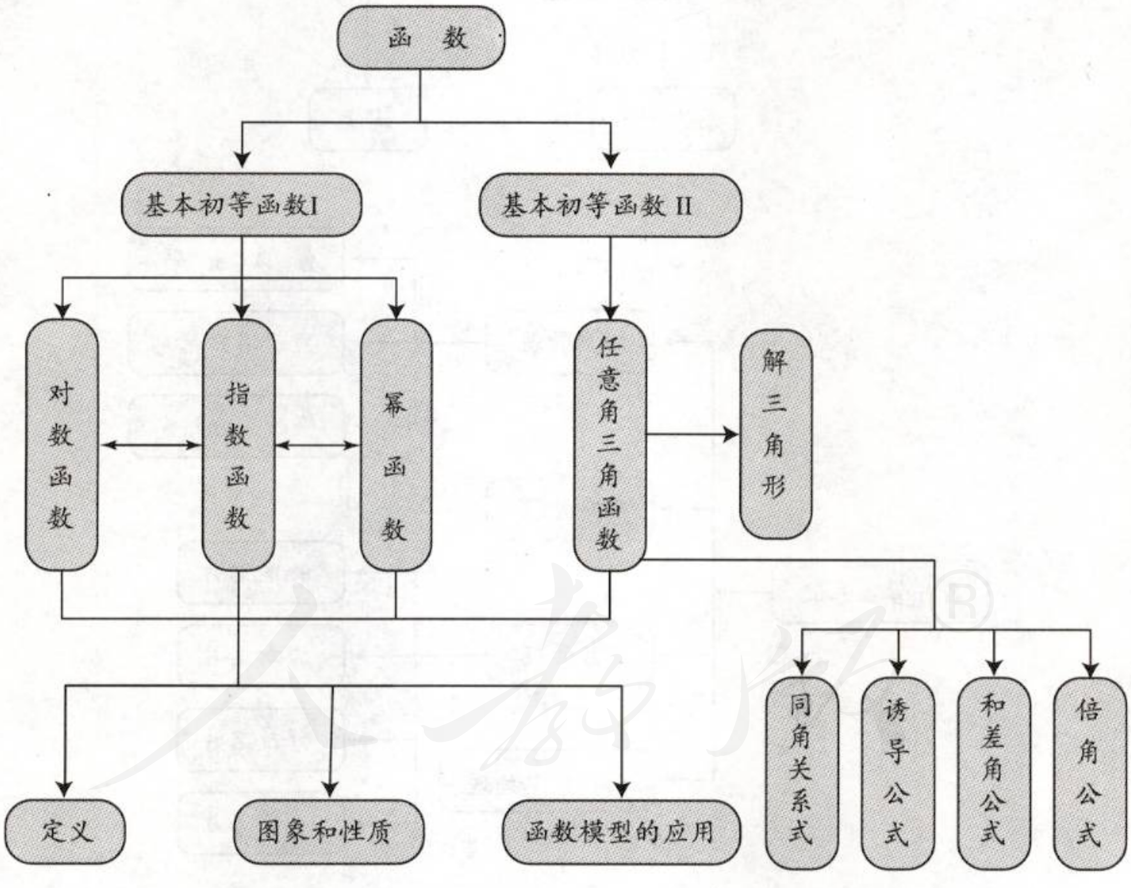


2. 某校的组织结构图如下：



B 组

1. 函数知识结构图如下：



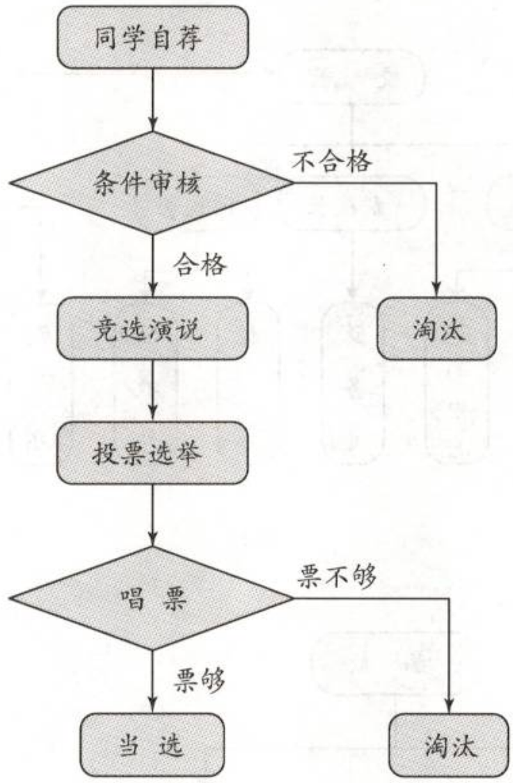
2. 略.

复习参考题（第 83 页）

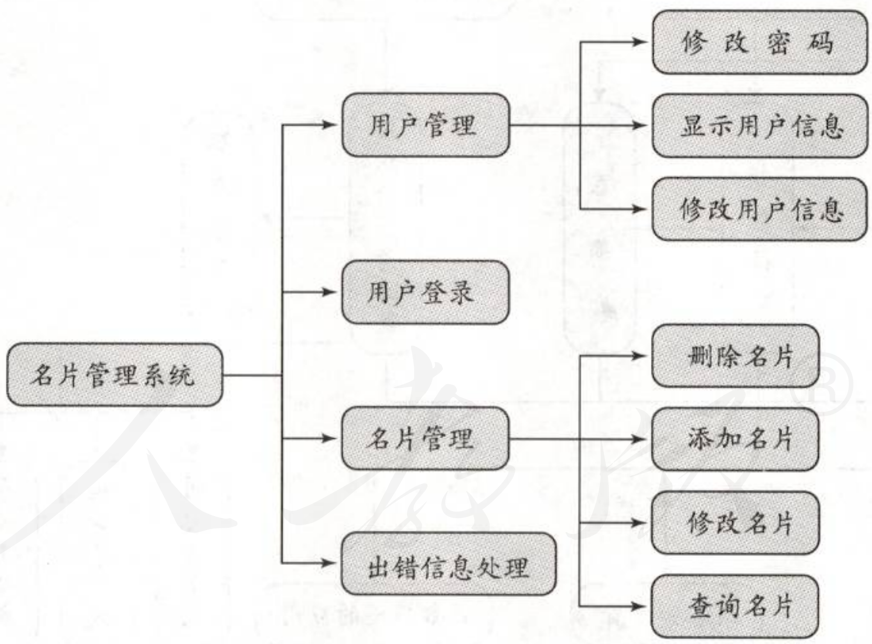
A 组

1. 略.

2. 某校选举学生会干部的流程图如下：

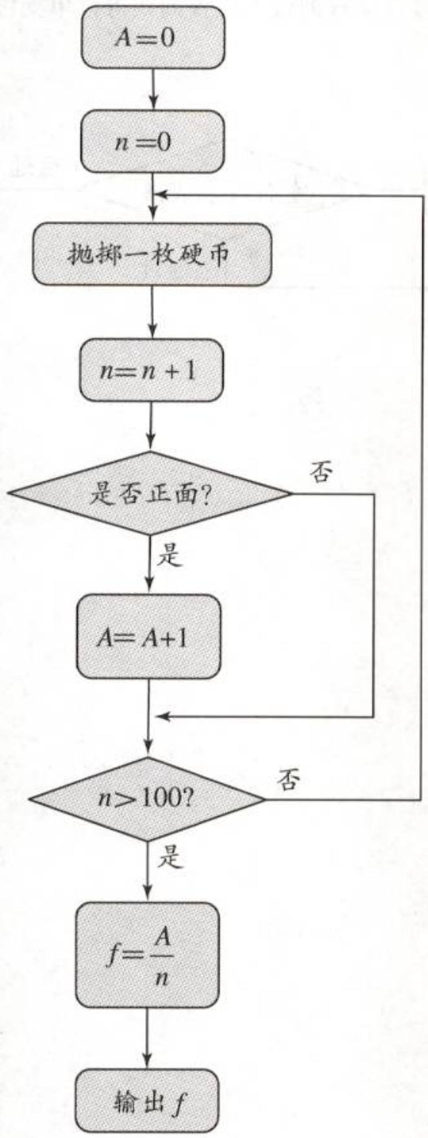


3.



B组

1. 问题：在抛掷硬币的试验中，将一枚硬币抛掷 100 次，计算正面向上的频率是多少？解决该问题的流程图如下：



2. (1) 作为消费者，完成一次这样的网上购物需要经过的步骤：

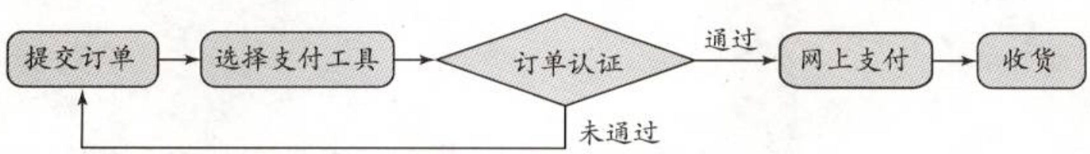
第 1 步，向商家网站提交订单.

第 2 步，在“X 支付平台”选择支付工具.

第 3 步，等待订单认证. 若认证通过，在发卡银行的网上银行进行网上支付；若没有通过，重新提交订单.

第 4 步，收货.

这个过程的流程图如下：



(2) 作为商家，完成一次这样的网上销售需要经过的步骤：

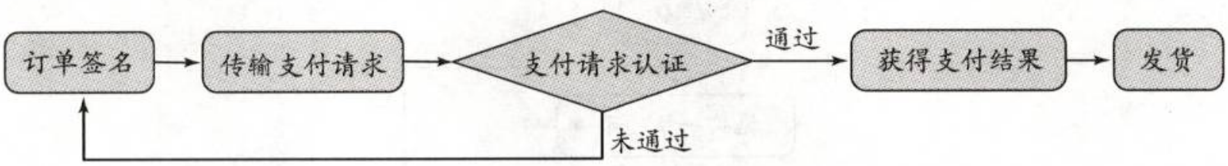
第 1 步，将订单签名.

第 2 步，将签名订单传输给“X 支付平台”认证.

第 3 步，在“X 支付平台”通过自动查询或人工查询获得订单支付结果.

第 4 步，发货.

这个过程的流程图如下：



3. 略.