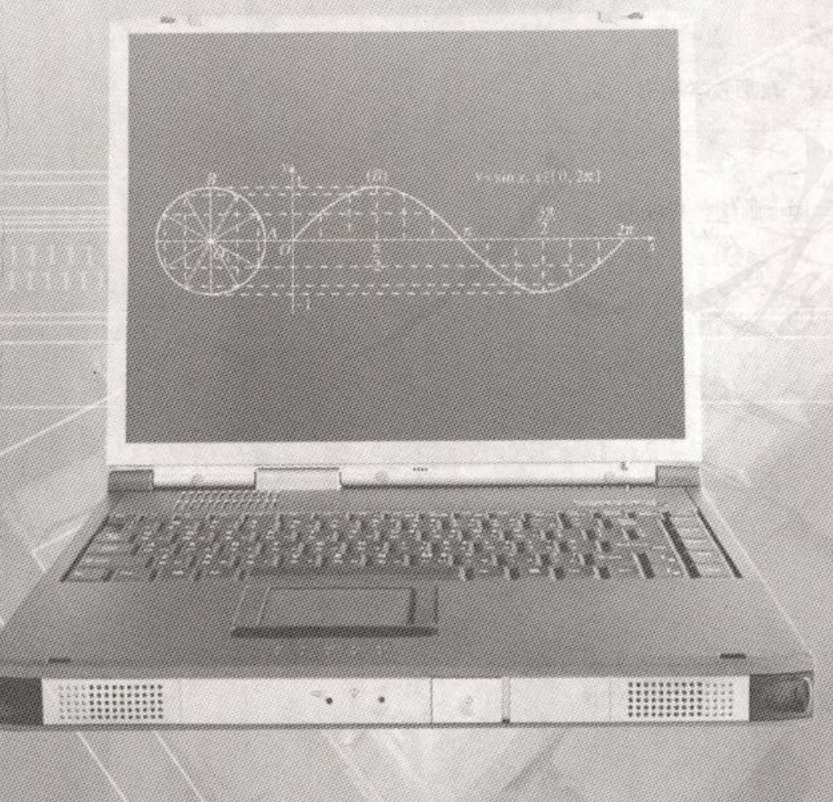
普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书 数学 4 必修（A版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著.—2版.—北京：人民教育出版社，2007. 4（2019.7重印）

ISBN 978-7-107-18073-6

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… ②课… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G633.063

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033725 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 4 必修 A版 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 北京新华印刷有限公司
版 次 2007 年 4 月第 2 版
印 次 2019 年 7 月第 28 次印刷
开 本 890 毫米 ×1 240 毫米 1/16
印 张 9.5
字 数 241 千字
定 价 30.00 元

如发现内容质量问题、印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：章建跃
主要编者：章建跃　白涛　张劲松　桂思铭　蒋佩锦
责任编辑：章建跃　刘长明
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1．作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

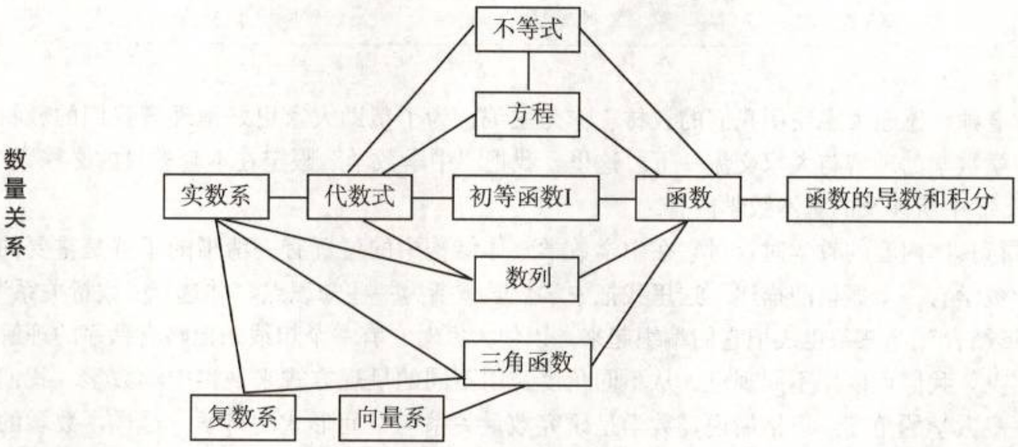
2．概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对（x，y），而空间中向量的坐标是三实数组（x，y，z）. 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数（$a+b\mathrm{i}$）曾被推广到四元数（$a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$），而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“=”换成实数系所特有的“>”（或“<”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “>”的性质比“=”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数 I 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

数列　数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数　描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

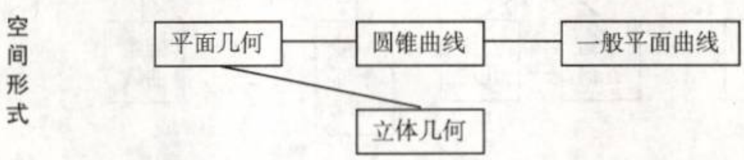
函数　函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分　虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何　讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线　在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何　线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线　虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

“数形结合”

用三角函数解三角形　参看三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

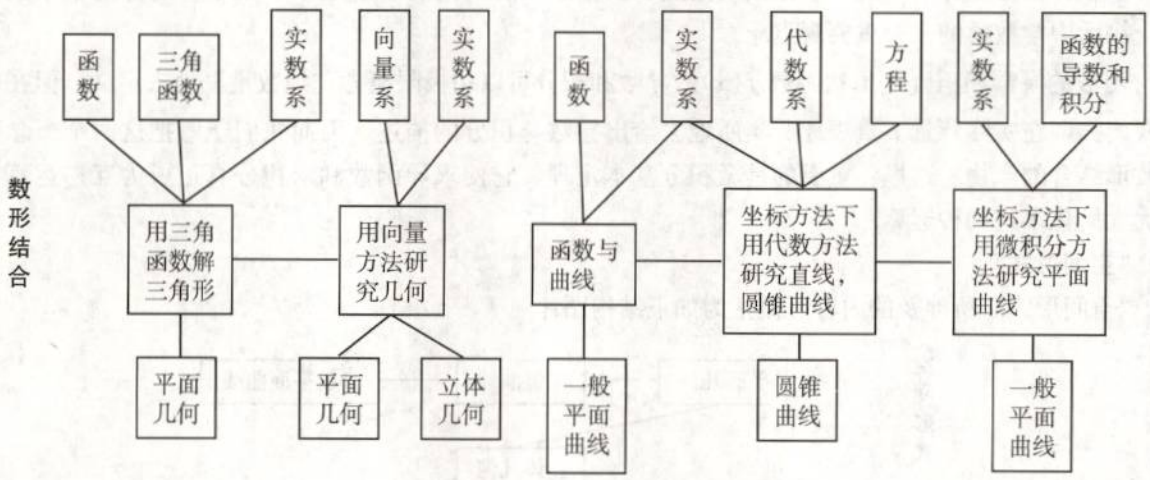
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

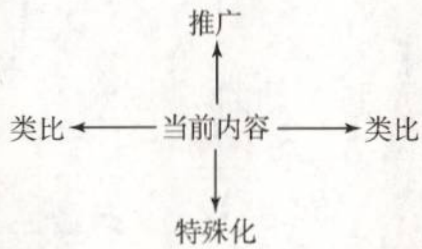
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

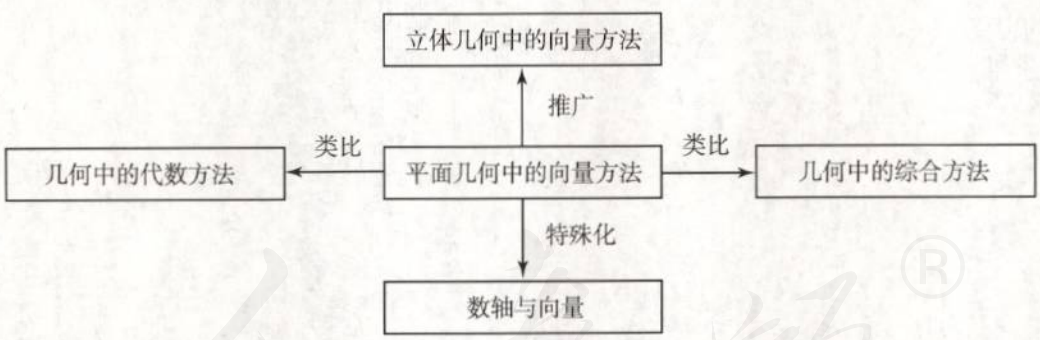
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

刘绍学

说 明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容. 本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1. “亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情.

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习.

2. “问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

3. “科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{array}{ccc} & \text{推广} & \\ & \uparrow & \\ \text{类比} \longleftarrow & \text{当前内容} & \longrightarrow \text{类比} \\ & \downarrow & \\ & \text{特殊化} & \end{array}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”

属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. “时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识.

5. “联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写意图与教学建议等.

(1) 本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

(3) 难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(4) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学

习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网上下载.

本书是必修课程数学 4 的教师教学用书，包含三角函数，平面向量，三角恒等变换等三章内容. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第 1 章　三角函数	约 16 课时
第 2 章　平面向量	约 12 课时
第 3 章　函数的应用	约 8 课时

参加本书编写的有章建跃、白涛、张劲松、桂思铭、蒋佩锦等，责任编辑章建跃.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目 录

第一章
三角函数

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章学习的内容主要是三角函数的定义、图象、性质及应用.

三角函数是基本初等函数，它是描述周期现象的重要数学模型，在数学和其他领域中都具有重要的作用. 在本章中，学生将通过实例，学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决具有周期变化规律问题中的作用.

2. 学习目标

(1) 任意角、弧度.

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与度的互化.

(2) 三角函数.

① 借助单位圆理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.

② 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式($\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\pi\pm\alpha$ 的正弦、余弦、正切)，能画出 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性.

③ 借助图象理解正弦函数、余弦函数在$[0，2\pi]$，正切函数在$\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$上的性质(如单调性、最大和最小值、图象与 x 轴交点等).

④ 理解同角三角函数的基本关系式：

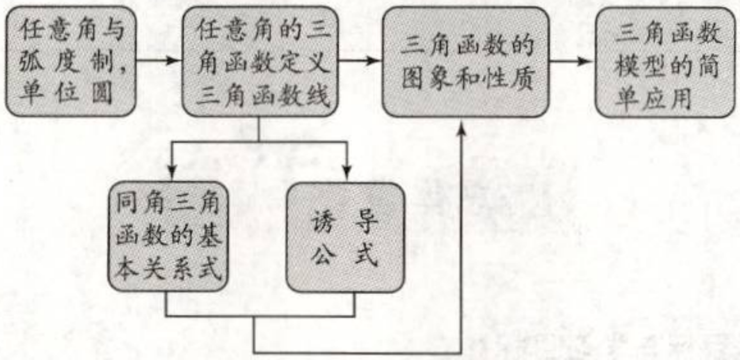
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1，\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

⑤ 结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；能借助计算器或计算机画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，观察参数 A，ω，φ 对函数图象变化的影响.

⑥ 会用三角函数解决一些简单实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

二、内容安排

1. 本章知识框图



2. 对知识框图的说明

（1）本章学习的认知基础主要是几何中圆的性质、相似形的有关知识，在数学 1 中建立的函数概念，以及指数函数、对数函数的研究经验. 主要的学习内容是三角函数的概念，图象与性质，以及三角函数模型的简单应用. 单位圆是研究三角函数的重要工具，借助它的直观，可以使学生更好地理解三角函数的概念和性质，因此三角函数的学习可以帮助学生更好地体会数形结合思想. 三角函数作为描述周期现象的重要数学模型，与其他学科(特别是物理学、地理学)有紧密联系，因此本章的学习可以培养学生的数学应用能力.

（2）为了加强三角函数学习的目的性，本章采用月相变化图和简谐振动图的组合作为章头图，并以“大到宇宙天体运行，小到质点的运动，现实世界中具有周期性变化的现象无处不在”为开篇语，再在章前引言中明确提出“三角函数是刻画周期性变化规律的数学模型”. 这样的安排使得三角函数的作用体现得更加清楚，也能使学生更加明确学习三角函数的意义.

（3）任意角的三角函数可以有不同的定义方法，而且各种定义都有自己的特点. 过去习惯于用角的终边上点的坐标的“比值”来定义，这种定义方法能够表现出从锐角三角函数到任意角的三角函数的推广，有利于引导学生从自己已有认知基础出发学习三角函数，但它对准确把握三角函数的本质有一定的不利影响. “从角的集合到比值的集合”的对应关系与学生熟悉的一般函数概念中的“数集到数集”的对应关系有冲突，而且“比值”需要通过运算才能得到，这与函数值是一个确定的实数也有不同，这些都会影响学生对三角函数概念的理解.

本章利用单位圆上点的坐标定义任意角的正弦函数、余弦函数.

如图 1-1，设 α 是任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$，那么

y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha = y;$$

x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即

$$\cos\alpha = x.$$

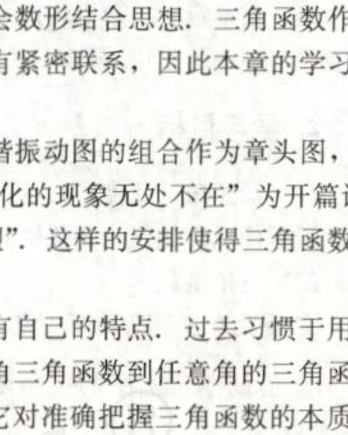


图 1-1

这个定义清楚地表明了正弦函数、余弦函数中从自变量到函数值之间的对应关系，也表明了这两个函数之间的关系. 另外，如果 α 是

弧度数，即$\angle xOP=\alpha$ rad，那么正弦函数、余弦函数就是关于任意实数α的函数，这时的自变量和函数值都是实数，这就与数学1中给出的一般函数概念完全一致了．事实上，在弧度制(这是一种用半径来度量角的方法)下，角度和长度的单位是统一的，正是这种单位的统一，使得我们可以这样来描述这两个函数的对应关系：

把实数轴想象为一条柔软的细线，原点固定在单位点$A(1,\ 0)$，数轴的正半轴逆时针缠绕在单位圆上，负半轴顺时针缠绕在单位圆上，那么数轴上的任意一个实数(点)t被缠绕到单位圆上的点$P(\cos t,\ \sin t)$．

基于上述理由，我们认为这样的定义可以更好地反映三角函数的本质，也正是三角函数的这种形式决定了它们在数学(特别是应用数学)中的重要性．事实上，后续的内容，特别是在微积分中，最常用的是弧度制以及弧度制下的三角函数．

另外，这样的定义使得三角函数所反映的数与形的关系更加直接，数形结合更加紧密，这就为后续内容的学习带来方便，也使三角函数更加好用了．例如从定义可以方便地推导同角三角函数的关系式、诱导公式、和(差)角公式，而且为公式的记忆提供了图形支持；单位圆为讨论三角函数的性质提供了很好的直观载体，我们可以借助单位圆，直接从定义出发讨论三角函数的性质……

当然，这个定义与人们熟悉的用角的终边上点的坐标的“比值”来定义是等价的，这正是教科书在1.2.1中安排例2的原因．

(4) 三角函数的诱导公式过去是从求三角函数值引入的，把$180°\pm\alpha$，$-\alpha$，$360°-\alpha$，$90°-\alpha$的三角函数与α的三角函数关系作为诱导公式，并且把关于$90°-\alpha$的诱导公式作为和(差)角公式的推论给出．本教科书改变了这种做法．教科书借助单位圆，先引导学生讨论了这些角的终边与角α的终边之间的对称关系，然后根据三角函数定义导出所有诱导公式．这样，既能很好地反映诱导公式的本质(圆的对称性的代数表示)，又使它们成了一个有机的整体．另外，去掉了关于$360°-\alpha$的诱导公式(因为它与$-\alpha$的诱导公式等价)，增加了$\frac{\pi}{2}+\alpha$的诱导公式．为了使学生尽快熟悉并形成使用弧度制的习惯，在诱导公式中全部采用了弧度制．

(5) 正弦、余弦函数按照从函数的定义到作函数图象再到讨论函数性质最后到函数模型应用的顺序展开，三角恒等变换不再穿插其中，这一顺序与研究其他函数的顺序一致，使得三角函数的研究更加简洁．另外，把周期性作为第一条性质，目的是为了体现它的重要性．正切函数先利用诱导公式、单位圆讨论性质，然后再利用性质作图象，这样做的目的是为了使学生体会可以从不同角度讨论函数性质．

(6) 对函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的研究，由于涉及的参数有3个，因此本章采取先讨论某个参数对图象的影响(其余参数相对固定)，再整合成完整的问题解决的方法安排内容，具体线索如下：

① 探索φ对$y=\sin(x+\varphi)$的图象的影响；

② 探索ω对$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响；

③ 探索A对$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响；

④ 上述三个过程的合成．

在对上述四个方面的具体讨论中，先让学生对参数赋值，形成对图象变化的具体认识，然后再推广到一般情形．

这样安排既分散了难点，又使学生形成清晰的讨论线索，从中能使学生学习到如何将复杂问题分解为简单问题并“各个击破”，然后整合为整个问题的解决的思想方法，培养有条理地思考的习惯，有利于培养学生的逻辑思维能力．

(7)“三角函数模型的简单应用”是一个新增内容，主要以举例的方式说明三角函数模型的应用方法．选择的问题包括：

① 用已知的三角函数模型解决问题；

② 将复杂的函数模型转化为 $y=\sin x$ 等基本初等函数解决问题；

③ 根据问题情景建立精确的三角函数模型解决问题；

④ 通过数学建模，利用数据建立拟合函数解决实际问题.

安排本节内容的目的是要让学生感受到三角函数在解决具有周期变化规律的问题中的作用，体验三角函数与日常生活和其他学科的联系，以使学生体会三角函数的价值和作用，增强应用意识，同时还要使学生加深理解有关知识. 在安排内容时，特别注意了数学应用过程的完整性，加强了对问题情景和解题思路的分析，以及解题后的反思这两个环节. 这样做可以保持数学应用中的数学思维水平，提高学生对相应的思想方法的认知层次，培养学生良好的解题习惯.

三、课时安排

本章教学时间约需16课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 任意角和弧度制	约2课时
1.2 任意角的三角函数	约3课时
1.3 三角函数的诱导公式	约2课时
1.4 三角函数的图象与性质	约4课时
1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	约2课时
1.6 三角函数模型的简单应用	约2课时
小结与复习	约1课时

II 教科书分析

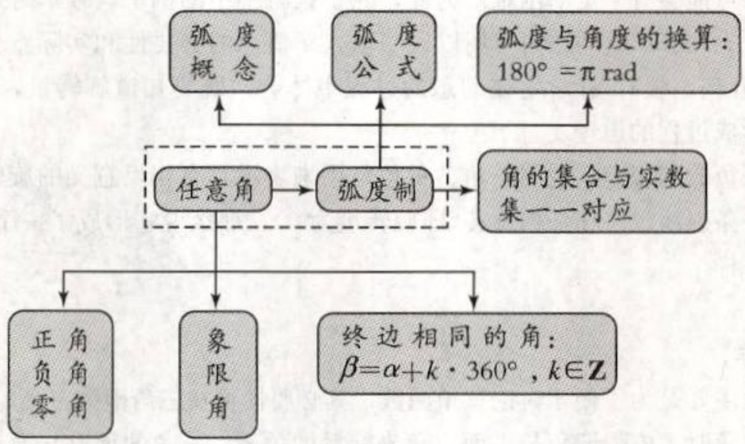
章引言及章头图介绍

1. 教科书在章头配置了两幅图，一幅是天体运动的图形，另一幅是单摆做简谐运动的图形. 由于三角学的起源、发展与天文学密不可分，所以选择了一幅月亮围绕地球运转的图形，物理中单摆做简谐运动是学生熟悉的，可以引导学生感受周期变化现象的普遍性.

2. 教科书在章头引言中列举了大量现实中存在的周期变化现象，并提出了与本章内容相关的一些问题，以引起学生的兴趣. 教学时，可以让学生围绕这些问题展开讨论，通过思考，让学生知道三角函数可以刻画这些周期变化规律，从而激发学生的求知欲.

1.1 任意角和弧度制

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：将 0°～360°范围的角推广到任意角，了解弧度制，并能进行弧度与度的换算.

2. 难点：弧度的概念，用集合来表示终边相同的角.

三、编写意图与教学建议

本章在锐角三角函数的基础上，利用单位圆进一步研究任意角的三角函数，并用集合与对应的语言来刻画. 这样，在研究三角函数之前，就有必要先将角的概念推广，并引入弧度制，从而建立角的集合与实数集之间的对应关系.

利用几何直观有利于抽象概念的理解. 教科书充分结合角和单位圆来引导学生了解任意角及弧度制概念，同时，还利用直角坐标系建立象限角的概念，使得任意角的讨论有了一个统一的载体. 教学中，要特别注意利用单位圆、直角坐标系等工具，引导学生用数形结合的思想方法来认识问题.

使用信息技术可以动态表现角的终边旋转的过程，有利于学生观察到角的变化与终边位置的关系，进而更好地了解任意角和弧度的概念，因此有条件时应当尽可能使用信息技术.

1.1.1 任意角

教科书首先通过实际问题(拨手表、体操中的转体、齿轮旋转等)引出角的概念的推广问题，引发学生的认知冲突，然后用具体例子，将初中学过的角的概念推广到任意角，在此基础上引出终边相同的角的集合的概念. 这样可以使学生在自己已有经验(生活经验、数学学习经验)的基础上，更好地认识任意角、象限角、终边相同的角等概念.

1. 任意角的概念

（1）教科书通过“思考”提出拨手表指针问题，引导学生感受推广角的概念的必要性，使他们明确要正确地表达“校准”手表的过程，需要同时说明分针的旋转量和旋转方向．教学时，可以先让学生自己描述“校准”过程，然后引导学生体会仅用 $0°\sim360°$ 的角已经难以回答当前的问题，进而引出学习课题．

（2）由于学生过去接触的角都在 $0°\sim360°$，在对角的认识上已形成一定的思维定势，所以在本小节要将角的概念推广可能会有一定的困难．为此，除了教科书中的例子，教学时还可以再举一些实际例子，并表示出 $750°$，$-150°$这样的角，用以说明引入新概念的必要性和实际意义．同时，还可以借助信息技术工具(如几何画板)，让学生在动态的过程中体会“既要知道旋转量，又要知道旋转方向”才能准确刻画角的形成过程的道理．

另外，可类比正负数的规定，说明正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量，其正、负规定是出于习惯．如果一条射线没有作任何旋转(即旋转量为 0)，那么说它形成了一个零角；零角无正负，就像实数 0 无正负一样．

2. 象限角的教学

（1）引入象限角主要是为了便于讨论三角函数，其必要性可在三角函数定义的教学中体会．

（2）在学习象限角时，应强调角与平面直角坐标系的关系——角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合．在这个统一前提下，才能对象限角进行定义．终边落在坐标轴上是一种“边界”状态，因此规定它不属于任何一个象限更方便．

（3）教科书提出了这样的问题，“你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗?”这一问题是为了提醒学生，在同一“参照系”下，可以使角的讨论得到简化，由此还能有效地表现出角的终边位置“周而复始”的现象．

3. 终边相同的角

（1）用集合和符号来表示终边相同的角，涉及任意角、象限角、终边相同的角等新概念，所以这是本小节学习的主要难点．为了突破这一难点，教科书设置了“探究”，并通过让学生填空等方式，使学生经历由具体数值到一般 k 值的抽象的过程．教学中应当让学生先通过自己的活动解决“探究”，以形成对“终边相同的角相差 $360°$的整数倍”的直观感知．

（2）教学时，可以利用信息技术，在平面内建立适当的坐标系，画出任意角，并测出角的大小，同时，旋转角的终边，观察角的变化规律，从而将数、形联系起来，使角的几何表示和集合表示相结合．

为了使学生更好地归纳一般形式，教科书以 $-32°$为例，安排了详细的过程．教学中应在这个过程上多用些时间，让学生进行操作与思考．应当引导学生认识：① $k\in\mathbf{Z}$；② α 是任意角；③ 终边相同的角不一定相等，终边相同的角有无限多个，它们相差 $360°$的整数倍．

4. 例题

（1）例 1 的要求是使学生能在 $0°\sim360°$范围内，找出与已知角终边相同的角，并判定其为第几象限角，为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数的值等奠定基础．

教学中，教师可引导学生先估计 $-950°12'$ 大致是 $360°$的几倍，然后再具体求解．

（2）例 2 是让学生理解终边在坐标轴上的角的表示．教学中，应引导学生体会用集合表示终边相同的角时，表示方式不唯一，要注意采用简约的形式．

（3）例 3 是让学生表示终边在已知直线的角，巩固终边相同的角的表示．例 3 也是与集合知识之

间的联系，其中涉及集合的并运算．为了使学生顺利完成这一运算，可以先让学生用日常语言描述一下集合的特征，即“集合中的元素相差180°的整数倍”，然后再用数学符号表示．

1.1.2　弧度制

教科书首先通过类比引出弧度制，给出1弧度的定义，然后通过探究得到弧度数的绝对值公式，并得出弧度与角度的换算方法．在此基础上，通过具体例子，巩固所学概念和公式，进一步认识引入弧度制的必要性．这样可以尽量自然地引入弧度制，并让学生在探究和解决问题的过程中，更好地形成弧度概念，建立角的集合与实数集的一一对应关系，为学习任意角的三角函数奠定基础．

1. 弧度制

(1) 教科书通过类比长度、重量的不同度量制，使学生体会一个量可以用不同的单位制来度量，从而引出弧度制．

(2) 弄清1弧度的角的含义，是了解弧度制，并能进行弧度与角度换算的关键．在引进弧度制后，可以引导学生建立弧与圆心角的联系——弧的度数等于圆心角的度数．随着角的概念的推广，圆心角与弧的概念也随之推广：从“形”上说，圆心角有正角、零角、负角，相应的，弧也就有正弧、零弧、负弧；从“数”上讲，圆心角与弧的度数有正数、0、负数．圆心角、弧的正负实际上表示了“角的不同的方向”，就像三角函数值的正负可以用三角函数线(有向线段)的方向来表示一样．每一个圆心角都有一条弧与它对应，并且不同的圆心角对应着不同的弧，反之亦然．圆心角与弧是一一对应的．

(3) 学生可能会提出以下问题：为什么可以用等于半径的弧所对的圆心角作为角的度量单位呢？这个弧度数是否与圆半径的大小有关？为了解决这些问题，教科书作了一定的解释，教学中还可以从直观上作一些解释．如图1-2(1)，先用计算器或计算机画一个圆，并在圆上截取$\overset{\frown}{AB}$等于半径OA，再作射线OB，便得到一个圆心角$\angle AOB$，这个角就是1弧度的角．按此方法再画一个与上述圆半径不同的圆(图1-2(2))，同样可得到另一个圆心角$\angle COD$．经测量，$\angle AOB=\angle COD$．

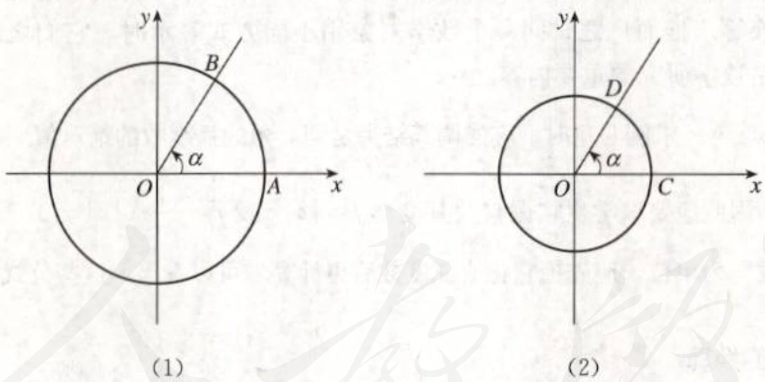


图1-2

又如分别在图1-2的两个圆内取两个同样大小的圆心角，可测得它们所对的弧与各自半径的比值相等．这就说明，当圆心角一定时，它所对弧长与半径的比值是一定的，与所取圆的半径大小无关．因此，用圆心角所对弧长与半径的比值来度量这个圆心角是合理的．这样，教学时就可以引入单位圆，让学生直观地认识到，在单位圆中可以用等于1的弧所对的圆心角作为角的度量单位．

(4) 引入弧度制后，应与角度制进行对比，使学生明确：第一，弧度制是以“弧度”为单位来度量角的单位制，角度制是以“度”为单位来度量角的单位制；第二，1弧度是等于半径长的弧所对的圆心角(或这条弧)的大小，而1°的角是周角的$\frac{1}{360}$；第三，无论是以“弧度”还是以“度”为单位，角的大小都是一个与半径大小无关的定值．为了让学生习惯使用弧度制，本教科书在后续内容中尽量采

用弧度制.

(6) 学完弧度制后，写出与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)时，要根据角 α 的单位来决定后一项的单位. 也就是说，两项所采用的单位制必须一致，防止出现 $\frac{\pi}{3}+k\cdot 360^\circ$ 或 $60^\circ+2k\pi$ 一类写法.

2. 弧度数的绝对值公式

(1) 教科书首先设置了“探究”，其意图是先根据所给图象对一些特殊角填表，然后概括出一般情况. 表中结果如下：

$\overset{\frown}{AB}$的长	OB 旋转的方向	$\angle AOB$ 的弧度数	$\angle AOB$ 的度数
πr	逆时针方向	π	180°
$2\pi r$	逆时针方向	2π	360°
r	逆时针方向	1	57.3°
$2r$	顺时针方向	-2	-114.6°
πr	顺时针方向	$-\pi$	-180°
0	未旋转	0	0°
πr	逆时针方向	π	180°
$2\pi r$	逆时针方向	2π	360°

由上表可知，如果一个半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长是 l，那么 α 的弧度数的绝对值是 $\frac{l}{r}$. 这里，应当注意从数学思想的高度引导学生认识“换算”问题，即弧度制、角度制都是角的度量制，那么它们一定可以换算. 推而广之，同一个数学对象用不同方式表示时，它们之间一定有内在联系，认识这种联系性也是数学研究的重要内容之一.

(2) 在用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应强调其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 在物理学中计算角速度时经常要用到它，因此应要求学生掌握它及其变形 $l=|\alpha|r$ 及 $r=\frac{l}{|\alpha|}$ $(|\alpha|\neq 0)$. 运用这两个公式时，如果已知的角以“度”为单位，应先把它化成弧度数后再计算. 可以看出，这些公式各有各的用处.

3. 弧度与角度的换算

(1) 在学生“探究”的基础上，教科书抓住

$$180^\circ=\pi\ \text{rad}$$

这个关键，推导出了换算公式. 教学中可以引导学生通过写出 30°，45°，60°，90°，270° 等特殊角的弧度数，来熟悉度与弧度的换算公式，但不必记住具体的数字，只要记住 $180^\circ=\pi$ rad 就可以了.

(2) 角的概念推广后，无论用角度制还是弧度制，都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一一对应关系，即“每个角都有唯一的实数与它对应”，同时“每个实数也都有唯一的一个角与它对应”. 由于弧度制的单位与实数单位是一致的，所以能给研究问题带来方便.

(3) 度量角的单位制，除了角度制、弧度制外，军事上还常用密位制. 密位制的单位是“密位”. 1 密位就是圆的 $\frac{1}{6\ 000}$ 所对的圆心角(或这条弧)的大小. 因为 $360^\circ=6\ 000$ 密位，所以

$$1^{\circ}=\frac{6\,000\text{密位}}{360}\approx 16.7\text{ 密位},$$

$$1\text{ 密位}=\frac{360^{\circ}}{6\,000}=0.06^{\circ}=3.6'=216''.$$

密位的写法是在百位上的数与十位上的数之间画一条短线，例如 7 密位写成 0－07，读作“零，零七”，478 密位写成 4－78，读作“四，七八”.

密位不属于我国法定计量单位，所以不必在课内介绍.

4. 例题

（1）例 1 和例 2 都是角度与弧度的换算. 在教学时，“度”的单位“°，′，″”不能省略. 刚开始，“弧度”的单位“rad”暂不要省略，并且不要用“rad”的中文名称“弧度”作单位写在数据的后面.

这两题在角度与弧度转化之后，都使用计算器进行了计算. 在学生熟悉了弧度与角度的换算后，一般可以让学生直接用计算器来完成换算.

例 2 后面列出的对应表，不仅要求学生会换算，而且要让学生记住这些特殊角的度数与弧度数的对应值.

（2）例 3 表明，弧度制下的扇形弧长、面积公式非常简单. 旁白指出，这是引入弧度制的一个理由.

四、教学设计案例

1.1.1 任意角

1. 教学任务分析

（1）结合具体实例，认识角的概念推广的必要性；

（2）初步学会在平面直角坐标系中讨论任意角，并能熟练写出与已知角终边相同的角的集合.

2. 教学重点、难点

重点：将 0°～360°的角的概念推广到任意角.

难点：角的概念的推广；终边相同的角的表示.

3. 教学基本流程

0°～360° 的角

↓

任意角：正角、负角和零角

↓

象限角

↓

终边相同的角的表示

4. 教学情景设计

问 题	设计意图	师生活动
1. 手表慢了 5 分钟，如何校准？手表快了 1.25 小时，又如何校准？校准后，分针转了几度？	创设问题情景，让学生在问题解决的过程中感知任意角.	教师组织学生进行讨论，然后让学生对不同的回答进行评价，教师应让学生关注旋转的方向、旋转量这两个要点.
2. 过去我们是如何定义一个角的？角的范围是什么？	回顾已有知识.	教师提出问题，学生回答.
3. 举出不在 $0°\sim360°$ 的角的实例，并加以说明.	结合具体实例，感受角的概念推广的必要性.	学生自己举例、讨论，再说明所举的角为什么不在 $0°\sim360°$.
4. 刻画这些角的关键是什么？	引发学生的认知冲突，认识到刻画这些角，不仅要用旋转量，还要用旋转方向.	学生进行讨论. 教师注意引导学生从旋转方向、旋转量这两个关键进行思考.
5. 给出任意角的概念，并引导学生通过类比数的正负，定义角的正、负和零角的概念.		
6. 请用任意角的概念解释校正表的问题和大家所举的例子.	利用新概念重新认识问题，并在解决问题的过程中加深了解任意角概念.	学生回答教师提出的问题.
7. 能否以同一条射线为始边作出下列角吗？ $210°$，$-150°$，$-660°$	让学生感受没有统一的参照系时，角的表示的不方便.	教师可以先画出一个不在 $0°\sim360°$ 的角，如 $750°$ 的角，再让学生画这三个角.
8. 给出象限角的概念.	为了讨论问题的方便，在直角坐标系中研究角，并给出象限角的概念，同时也为下一步研究三角函数奠定基础.	教师给出象限角概念，并说明在同一个参照系下讨论角的好处. 然后通过具体例子使学生熟悉概念.
9. 在直角坐标系内标出 $210°$，$-150°$ 角的终边，你有什么发现？它们有怎样的数量关系？$328°$，$-32°$，$-392°$ 角的终边及数量关系呢？	从具体问题入手，了解终边相同的角的关系.	在学生思考每组角的数量关系时，教师可引导学生用含其中一个角的关系式来表示另外的角. 注意引导学生建立终边位置和数量关系的联系.
10. 直角坐标系内，角 α 对应了唯一一条射线(终边). 那么是否存在与角 α 终边相同的角？如果存在，如何表示？	由具体到一般，认识终边相同的角的关系及其表示.	教师可制作相应的课件，让学生利用计算机或计算器在旋转终边的过程中发现终边相同的角的关系，并用集合表示出来.
11. 例题，练习，小结.	使学生能够熟练写出终边相同的角的集合.	师生共同完成例题，然后由学生独立完成练习，教师进行点评.

5. 几点说明

（1）在列举不在 $0°\sim360°$ 的角时，应注意所有的角在同一个平面内，且终边在旋转的过程中，角的顶点不动；

（2）给出象限角的概念后，可让学生讨论在直角坐标系内研究角的好处；

（3）在利用信息技术来帮助学生认识终边相同的角的关系时，教师可事先做好课件，在课堂上演示给学生；有条件的学校，可让学生自己利用计算机或计算器进行探究；

（4）在研究终边相同的两个角的关系时，k 的正确取值是关键，应让学生独立思考；

(5) 在写出终边相同的角的集合时，可根据具体问题，对相应的集合内容进行复习.

(6) 通过对终边相同的角的研究，应引导学生体会角的“周而复始”的变化规律，为研究三角函数的周期性奠定基础.

五、习题解答

练习（第 5 页）

1. 锐角是第一象限角，第一象限角不一定是锐角；直角不属于任何一个象限，不属于任何一个象限的角不一定是直角；钝角是第二象限角，第二象限角不一定是钝角.

说明 认识“锐角”、“直角”、“钝角”和“象限角”的区别与联系.

2. 三，三，五.

说明 本题的目的是将终边相同的角的符号表示应用到其他周期性问题上. 题目联系实际，把教科书中的除数 360 换成每个星期的天数 7，利用了“同余”(这里余数是 3)来确定 $7k$ 天后、$7k$ 天前也都是星期三，这样的练习不难，可以口答.

3. (1) 第一象限角；(2) 第四象限角；(3) 第二象限角；(4) 第三象限角.

说明 能作出给定的角，并判定是第几象限角. 图略.

4. (1) $305°42'$，第四象限角；(2) $35°8'$，第一象限角；(3) $249°30'$，第三象限角.

说明 能在给定范围内找出与指定的角终边相同的角，并判定是第几象限角.

5. (1) $\{\beta \mid \beta=1\,303°18'+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-496°42'$，$-136°42'$，$223°18'$；

(2) $\{\beta \mid \beta=-225°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-585°$，$-225°$，$135°$.

说明 用集合表示法和符号语言写出与指定角终边相同的角的集合，并在给定范围内找出与指定的角终边相同的角.

练习（第 9 页）

1. (1) $\frac{\pi}{8}$；　(2) $-\frac{7\pi}{6}$；　(3) $\frac{20\pi}{3}$.

说明 能进行度与弧度的换算.

2. (1) $15°$；　(2) $-240°$；　(3) $54°$.

说明 能进行弧度与度的换算.

3. (1) $\{\alpha \mid \alpha=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；　(2) $\left\{\alpha \mid \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

说明 用弧度制表示终边分别在 x 轴和 y 轴上的角的集合.

4. (1) $\cos 0.75° > \cos 0.75$；　(2) $\tan 1.2° < \tan 1.2$.

说明 体会同数值不同单位的角对应的三角函数值可能不同，并进一步认识两种单位制. 注意在用计算器求三角函数值之前，要先对计算器中角的模式进行设置. 如求 $\cos 0.75°$ 之前，要将角模式设置为 DEG(角度制)；求 $\cos 0.75$ 之前，要将角模式设置为 RAD(弧度制).

5. $\frac{\pi}{3}$ m.

说明 通过分别运用角度制和弧度制下的弧长公式，体会引入弧度制的必要性.

6. 弧度数为 1.2.

说明 进一步认识弧度数的绝对值公式.

习题 1.1（第 9 页）

A 组

1. (1) 95°，第二象限；(2) 80°，第一象限；(3) $236^\circ50'$，第三象限；(4) 300°，第四象限.

说明 能在给定范围内找出与指定的角终边相同的角，并判定是第几象限角.

2. $S=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

说明 将终边相同的角用集合表示.

3. (1) $\{\beta \mid \beta=60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-300^\circ$，$60^\circ$；

(2) $\{\beta \mid \beta=-75^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-75^\circ$，$285^\circ$；

(3) $\{\beta \mid \beta=-824^\circ30'+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-104^\circ30'$，$255^\circ30'$；

(4) $\{\beta \mid \beta=475^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-245^\circ$，$115^\circ$；

(5) $\{\beta \mid \beta=90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-270^\circ$，$90^\circ$；

(6) $\{\beta \mid \beta=270^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-90^\circ$，$270^\circ$；

(7) $\{\beta \mid \beta=180^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-180^\circ$，$180^\circ$；

(8) $\{\beta \mid \beta=k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-360^\circ$，$0^\circ$.

说明 用集合表示法和符号语言写出与指定角终边相同的角的集合，并在给定范围内找出与指定的角终边相同的角.

4.

象限	角度制	弧度制
一	$\{\beta \mid k\cdot 360^\circ<\beta<90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\beta \mid 2k\pi<\beta<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$
二	$\{\beta \mid 90^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<180^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\beta \mid \frac{\pi}{2}+2k\pi<\beta<\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$
三	$\{\beta \mid 180^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<270^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\beta \mid \pi+2k\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$
四	$\{\beta \mid 270^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<360^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$	$\{\beta \mid \frac{3\pi}{2}+2k\pi<\beta<2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

说明 用角度制和弧度制写出各象限角的集合.

5. (1) C.

说明 因为 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，所以 $0^\circ<2\alpha<180^\circ$.

(2) D.

说明 因为 $k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<45^\circ+k\cdot 180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角；当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角.

6. 不等于 1 弧度. 这是因为等于半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度，而等于半径长的弦所对的弧比半径长.

说明 了解弧度的概念.

7. (1) $\frac{\pi}{5}$； (2) $-\frac{5\pi}{6}$； (3) $\frac{73\pi}{12}$； (4) 8π.

说明 能进行度与弧度的换算.

8. (1) $-210°$； (2) $-600°$； (3) $80.21°$； (4) $38.2°$.

说明 能进行弧度与度的换算.

9. $64°$.

说明 可以先运用弧度制下的弧长公式求出圆心角的弧度数，再将弧度换算为度，也可以直接运用角度制下的弧长公式.

10. 14 cm.

说明 可以先将度换算为弧度，再运用弧度制下的弧长公式，也可以直接运用角度制下的弧长公式.

B 组

1. (1)（略）

(2) 设扇子的圆心角为 θ，由

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}r^2\theta}{\frac{1}{2}r^2(2\pi-\theta)}=0.618,$$

可得

$$\theta=0.618(2\pi-\theta),$$

则

$$\theta=0.764\pi\approx140°.$$

说明 本题是一个数学实践活动. 题目对“美观的扇子”并没有给出标准，目的是让学生先去体验，然后再运用所学知识发现，大多数扇子之所以“美观”是因为基本都满足 $\frac{S_1}{S_2}=0.618$（黄金分割比）的道理.

2. (1) 时针转了 $-120°$，等于 $-\frac{2\pi}{3}$ 弧度；分针转了 $-1\,440°$，等于 -8π 弧度.

(2) 设经过 t min 分针就与时针重合，n 为两针重合的次数.

因为分针旋转的角速度为

$$\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}\ (\text{rad/min}),$$

时针旋转的角速度为

$$\frac{2\pi}{12\times60}=\frac{\pi}{360}\ (\text{rad/min}),$$

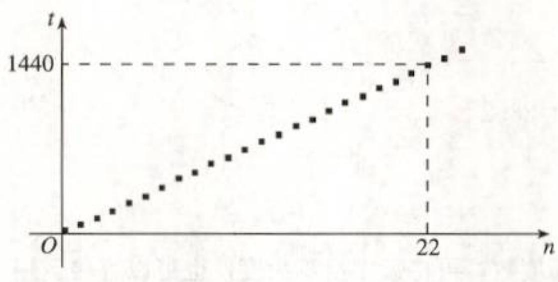
所以

$$\left(\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{360}\right)t=2\pi n,$$

即

$$t=\frac{720}{11}n.$$

用计算机或计算器作出函数 $t=\frac{720}{11}n$ 的图象（如下页图）或表格，从中可清楚地看到时针与分针每次重合所需的时间.



第 2 题

n	ul				
15.	981.82				
16.	1047.3				
17.	1112.7				
18.	1178.2				
19.	1243.6				
20.	1309.1				
21.	1374.5				
22.	1440.				

因为时针旋转一天所需的时间为 $24\times 60=1\,440$(min)，所以

$$\frac{720}{11}n\leqslant 1\,440,$$

于是

$$n\leqslant 22.$$

故时针与分针一天内只会重合 22 次.

说明 通过时针与分针的旋转问题进一步地认识弧度的概念，并将问题引向深入，用函数思想进行分析. 在研究时针与分针一天的重合次数时，可利用计算器或计算机，从模拟的图形、表格中的数据、函数的解析式或图象等角度，不难得到正确的结论.

3. $864°$，$\frac{24\pi}{5}$，151.2π cm.

说明 通过齿轮的转动问题进一步地认识弧度的概念和弧长公式. 当大齿轮转动一周时，小齿轮转动的角是

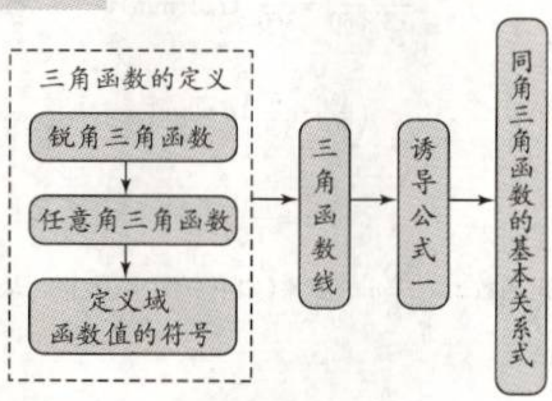
$$\frac{48}{20}\times 360°=864°=\frac{24\pi}{5}\text{rad}.$$

由于大齿轮的转速为 3 r/s，所以小齿轮周上一点每 1 s 转过的弧长是

$$\frac{48}{20}\times 3\times 2\pi\times 10.5=151.2\pi(\text{cm}).$$

1.2 任意角的三角函数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：任意角的正弦、余弦、正切的定义，同角三角函数的基本关系.

2. 难点：用角的终边上的点的坐标来刻画三角函数；三角函数符号；利用与单位圆有关的有向线段，将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值用几何形式表示.

三、编写意图与教学建议

学生已经学过锐角三角函数，它是用直角三角形边长的比来刻画的. 锐角三角函数的引入与“解三角形”有直接关系. 任意角的三角函数是刻画周期变化现象的数学模型，它与“解三角形”已经没有什么关系了. 因此，与学习其他基本初等函数一样，学习任意角的三角函数，关键是要使学生理解三角函数的概念、图象和性质，并能用三角函数描述一些简单的周期变化规律，解决简单的实际问题.

本节以锐角三角函数为引子，利用单位圆上点的坐标定义三角函数. 由于三角函数与单位圆之间的这种紧密的内部联系，使得我们在讨论三角函数的问题时，对于研究哪些问题以及用什么方法研究这些问题等，都可以从圆的性质(特别是对称性)中得到启发. 三角函数的研究中，数形结合思想起着非常重要的作用.

利用信息技术，可以很容易地建立角的终边和单位圆的交点坐标、单位圆中的三角函数线之间的联系，并在角的变化过程中，将这种联系直观地体现出来. 所以，信息技术可以帮助学生更好地理解三角函数的本质.

1.2.1 任意角的三角函数

教科书首先介绍了用单位圆上点的坐标表示锐角三角函数的思想，在此基础上定义任意角的三角函数，并直接用定义研究了三角函数的定义域、函数值的符号、诱导公式一以及同角三角函数的基本关系.

1. 任意角三角函数的定义

(1) 教科书通过“思考”，提出用直角坐标系中角的终边上点的坐标表示锐角三角函数的问题，以引导学生回忆锐角三角函数概念，体会引进象限角概念后，用角的终边上点的坐标比表示锐角三角函数的意义，从而为定义任意角的三角函数奠定基础. 教科书在定义任意角的三角函数之前，作了如下铺垫：

直角三角形为载体的锐角三角函数⟶象限角为载体的锐角三角函数
⟶单位圆上点的坐标表示的锐角三角函数

教学中需要注意的是，尽管我们从锐角三角函数出发来引导学生学习任意角的三角函数，但任意角的三角函数与锐角三角函数之间并没有一般与特殊的关系. 教学中应当使学生体会到，用单位圆上点的坐标表示锐角三角函数，不仅简单、方便，而且反映本质.

(2) 任意角的正弦、余弦、正切的定义是本节教学的重点. 用单位圆上点的坐标表示任意角的三角函数，与学生在锐角三角函数学习中建立的已有经验有一定的距离，与学生在数学 1 的学习中建立起来的经验也有距离. 学生熟悉的函数 $y=f(x)$ 是实数到实数的对应，而这里给出的函数首先是实数(弧度数)到点的坐标的对应，然后才是实数(弧度数)到实数(横坐标或纵坐标)的对应，这就会给学生的理解造成一定困难. 因此，教学中可以根据教科书的安排，在学生对锐角三角函数已有的几何直观

认识的基础上，先建立直角三角形的锐角与第一象限角的联系，在直角坐标系中考察锐角三角函数，得出用角终边上点的坐标(比值)表示锐角三角函数的结论，然后再“特殊化”引出用单位圆上点的坐标表示锐角三角函数的结论. 在此基础上，再定义任意角的三角函数.

教学中应当向学生指出，“设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$，那么 y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$……”中，α 是一个任意角，同时它也是一个实数(弧度数)；“它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$”，实际上给出了两个对应关系，即

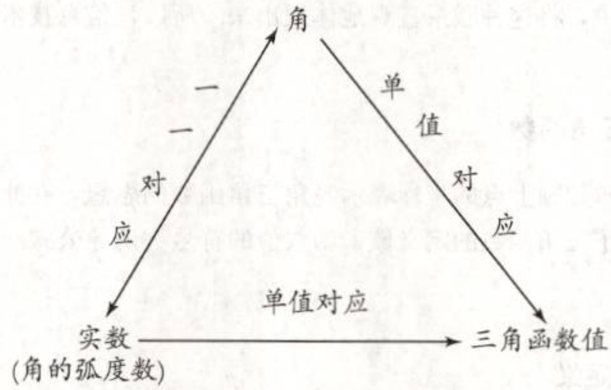
实数 α（弧度）对应于点 P 的纵坐标 y——正弦，

实数 α（弧度）对应于点 P 的横坐标 x——余弦，

认识清楚上述对应关系，是理解三角函数定义的关键.

(3) 用单位圆上点的坐标定义三角函数有许多优点. 其中最主要的是使正弦函数、余弦函数从自变量(角的弧度数)到函数值(单位圆上点的横、纵坐标)之间的对应关系更清楚、简单，突出了三角函数的本质，有利于学生利用已有的函数概念来理解三角函数；其次是使三角函数反映的数形关系更直接，为后面讨论其他问题奠定基础. 例如单位圆中的三角函数线与定义的联系更明显；更有利于我们数形结合地讨论三角函数的定义域、函数值符号的变化规律、同角三角函数的基本关系式、诱导公式、周期性、单调性、最大值、最小值等.

(4) 由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数就可以看成以实数为自变量的函数. 例如，当采用弧度制来度量角时，每一个确定的角有唯一确定的弧度数，这是一个实数，所以三角函数可以看成以实数为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，即



一般地，我们把三角函数看成以角的弧度数为自变量的函数. 我们同样可以把三角函数看成以角度数为自变量的函数.

(5) 教学时，要使学生明确：$\sin\alpha$ 是一个整体，不是 sin 与 α 的乘积，它是“正弦函数”的一个记号，就如 $f(x)$ 表示自变量为 x 的函数一样. 离开自变量的“sin”“cos”“tan”等是没有意义的. sin，cos，tan 分别是英语单词 sine[sain]，cosine[ˈkosain]，tangent[ˈtændʒənt] 的缩写.

2. 三角函数定义域和函数值

(1) 在给出了三角函数的定义后，教科书没有直接给出它们的定义域和函数值的正负，而是设置了“探究”，留给学生主动学习的空间，引导学生通过自己的思维活动得出结论. 这个“探究”不难，可以由学生独立完成，教学中只要提醒学生注意角的终边与 y 轴重合时，终边上所有点的横坐标为 0，因此正切函数的定义域不包括终边与 y 轴重合的角. 而对于三角函数值的符号，只要根据定义以及单位圆上点的位置(在哪个象限)，就可以容易地得出结论. 教学时，应当先对函数值的正负进行讨论，然后再将三个函数在各象限的符号填入教科书的图中，并注意提醒学生把图 1.2-6 与三角函数的定义联系起来.

(2) 由于过去只研究锐角的三角函数，其值都为正，而随着角的概念的推广，三角函数值的符号也有正有负了．在求一个角的三角函数值时，常常要根据它的终边所在位置对符号进行讨论．因此教学中应提醒学生根据问题的具体条件决定三角函数值的符号．

3. 诱导公式一

(1) 教科书根据三角函数的定义得到公式一．教学可分两个阶段：先引导学生由定义得到“终边相同的角的同一三角函数的值相等”，再让学生将“终边相同的角的同一三角函数的值相等”符号化得到公式．

(2) 利用公式一，可以把求任意角的三角函数值，转化为求 $0\sim2\pi$ 内角的三角函数值．更重要的是，公式一从代数的角度揭示了三角函数值的周期变化规律，即“角的终边绕原点每转动一周，函数值都重复出现”．为此，教科书作出了提示，教学时也要提醒学生思考．

4. 单位圆中的三角函数线

(1) 在“数”的角度认识任意角的三角函数的基础上，还可以从图形角度考察任意角的三角函数，即用有向线段表示三角函数值，这是三角函数与其他基本初等函数不同的地方．

如图 1-3，设 $P(x,\ y)$ 是任意角 α 与单位圆的交点，则

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x,$$

而且

$$|MP|=|y|,\ |OM|=|x|.$$

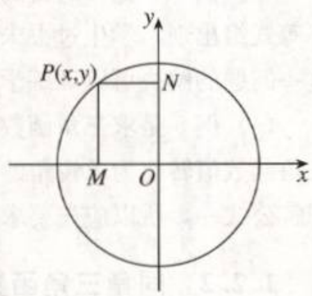


图 1-3

在数形结合思想的指导下，为了实现“以形表示数”，用上述的线段 MP、OM 来表示 y、x 是非常自然的想法，只要规定一下它们的符号就可以了．显然，使 MP、OM 的符号与 y、x 保持一致是最理想的，于是以坐标轴的方向为标准，引进“有向线段”的概念，用有向线段表示三角函数的值，是非常自然的．上述思想可以看成是引进三角函数线的一种理由，而这实际上是数学研究中非常重要的“联系”的观点．教学中可以对上述思想进行适当介绍，其中特别要注意引导学生思考如何使“有向线段”的符号与坐标轴的方向联系起来，并建立有向线段(的数量)与三角函数值之间的对应．

(2) 正弦线、余弦线、正切线分别是正弦、余弦、正切函数的一种几何表示．它们都是与单位圆有关的平行于坐标轴的有向线段．一条线段有两个端点，如果规定其中一个端点为起点，另一个为终点，这条线段就被看作带有方向，于是把它叫做有向线段．表示有向线段时，要先写起点的字母，后写终点的字母．当有向线段与数轴平行时，我们可根据此线段的方向(从起点向终点)与数轴的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，就是此有向线段的数值，它是一个实数．

这里，正切线的引入需要构造一个 $\mathrm{Rt}\triangle OAT$，这是一个难点．突破难点的关键还是要引导学生从定义出发，得出

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}$$

后，再思考如何将上述有向线段的数量比转化为一条有向线段表示．显然，单位圆的半径为 1，把上述比与单位圆联系起来，再利用 $\mathrm{Rt}\triangle OMP$，就能比较容易地构造出 $\mathrm{Rt}\triangle OAT$．

5. 例题

(1) 例 1 是根据定义求一个角的三角函数值．需要先求出这个角的终边与单位圆的交点坐标，再由定义得解．这道题的目的是为了巩固任意角三角函数的定义．

（2）例 2 是已知角 α 终边上一点的坐标，求角 α 的三角函数值．可以先根据三角形相似将这一问题化归到单位圆上，再由定义得解．通过这道题的求解，可以使学生认识到，只要知道角的终边上的任意一点，就可以得出相应的三角函数值，于是用角的终边上任一点的坐标的“比值”来定义三角函数与利用单位圆上点的坐标定义三角函数是等价的．教学中可以引导学生思考这种“等价性”的原因，并让学生自己给出新的定义：

如图 1-4，设 α 是一个任意角，$P(x, y)$ 是 α 终边上任意一点，点 P 与原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，那么：

① $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

② $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

③ $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$（$x\neq0$）.

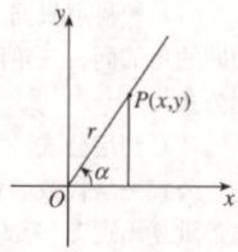


图 1-4

这样定义三角函数，突出了点 P 的任意性，说明任意角 α 的三角函数值只与 α 有关，而与点 P 在角的终边上的位置无关．关于教科书给出的定义，已在前面阐述．

（3）例 3 和例 4 的目的都是认识不同位置的角对应的三角函数值的符号．其中例 3 的条件以一个不等式组出现，学生过去未曾接触，在教学时要让学生把问题的条件、结论弄清楚，然后再给出证明．这一问题的解决可以训练学生的数学语言表达能力．

（4）例 5 是求三角函数值，由于还未学习其他诱导公式，这里仅限于能运用公式一把求这些角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值．这类题目虽然可以用计算器直接求出结果，但本题的目的是理解公式一，所以应先要求学生运用公式一先转化成锐角三角函数求值，然后再利用计算器验证．

1.2.2 同角三角函数的基本关系

从定义出发，用联系的观点提出问题，获得研究思路，这是数学研究中的常用思想．因此，与圆的几何性质建立联系，从中获得研究三角函数的问题与思路，是学习三角函数的重要思想方法．教科书设置“探究”的目的，正是为了引导学生联系圆的基本性质，把单位圆的一些几何关系用坐标表示出来，进而获得一些三角函数的基本关系．

1. 同角三角函数的基本关系式

（1）在“探究”的引导下，以单位圆中的三角函数线作为认知基础，在单位圆中构造出以任意角的正弦线、余弦线为直角边的直角三角形是得出同角三角函数基本关系的关键．教学中可以引导学生先作出第 21 页的图 1.2-8，然后启发他们思考其中的几何关系．应当说，有了图 1.2-8，从勾股定理中得出同角三角函数的“平方关系”是容易的．另外，教科书根据三角函数的定义得出了“商的关系”，教学时也可以引导学生结合正切线，利用相似三角形的性质对关系式 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 作出解释．总之，讨论同角三角函数的基本关系时，数形结合思想起着非常重要的作用．

这里，“同角”有两层含义，一是“角相同”，二是对“任意”一个角（在使得函数有意义的前提下）关系式都成立．

（2）$\sin^2\alpha$ 是 $(\sin\alpha)^2$ 的简写，读作“$\sin\alpha$ 的平方”，不能将 $\sin^2\alpha$ 写成 $\sin\alpha^2$，前者是 α 的正弦的平方，后者是 α 的平方的正弦，两者是不同的．教学时应使学生弄清它们的区别，并能正确书写．

（3）公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 的应用极为广泛，它们还有如下等价形式：

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha,\qquad \cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.$$

2. 例题

(1) 例 6 是根据一个角的某个三角函数值求其余两个三角函数值(可简称“知一求二”). 这道题的目的是让学生进一步熟悉同角三角函数的基本关系式. 解决这类问题时，要先判断角是第几象限的，进而确定所求三角函数值的符号，然后再具体求解.

① 如果已知某个角的三角函数值，且角所在的象限是确定的，那么只有一种结果. 例如已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，并且 α 是第三象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

对于例 6 的结果，要让学生知道，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ 中的负号来自 α 是第四象限角，这时 $\sin\alpha$ 取负值，$\cos\alpha$ 取正值，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 也取负值. 可能有的学生会认为，“因为 α 是第四象限角，所以 $\tan\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$”，这就错了.

② 如果只给了某个角的三角函数值，那么要按角所在的象限进行讨论，分别写出答案，这时一般有两组结果. 例 6 就是这种情况.

另外，$\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的结果都要用分情况叙述的形式表达出来，而不要用

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},\ \sin\alpha=\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\qquad (*)$$

的书写形式，这是因为 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的符号受着限制，不是无条件的，这不同于“由 $x^2=1$ 可以推出 $x=\pm1$”这种情形. 再说，采用了(*)式后，$\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的取值发生了“+、+”“+、−”“−、+”“−、−”四种搭配方式，这样就会产生四种不同结果.

(2) 例 7 是恒等式的证明. 这道题的目的是让学生通过三角恒等式的证明进一步理解同角三角函数的基本关系. 证明恒等式常用以下方法：从一边开始证明它等于另一边(如例 7 的证法 1)，一般由繁到简；先证明另一个式子成立，从而推出原式成立，这“另一个式子”可考虑选取与原式等价的式子(如例 7 的证法 2)；证明左、右两边等于同一个式子. 显然，第一种方法的依据是相等关系的传递性“$a=b$，$b=c$，则 $a=c$”；第三种方法的依据是“等于同量的两个量相等”即“$a=c$，$b=c$，则 $a=b$”，它可由相等关系的传递性及对称性“$a=b$，则 $b=a$”推出.

对于第二种方法，它的依据是等价转化思想，即“$a=b$ 等价于 $c=d$，所以 $a=b$ 成立的充要条件是 $c=d$ 成立”. 这样就产生了两种思维过程，并对应着两种证明方法. 假设要证明的式子是 $a=b$，那么：

综合法：先证 $c=d$ 成立，再证 $c=d$ 与 $a=b$ 等价，由此可知 $a=b$ 成立(如例 7 的证法 2).

分析法：要证 $a=b$，只要证(与它等价的)$c=d$. 因为 $c=d$ 成立，可知 $a=b$ 成立.

注意，等价转化可以使用综合法或分析法. 反过来，使用分析法或综合法时，却不一定要求等价转化. 对于初学三角恒等式证明的学生，运用等价转化可以使他们的思路更清楚一些.

值得注意的是，用同角三角函数的基本关系证明三角恒等式的要求已经降低，像“已知 $\sin\alpha=m$，求 α 的其他三角函数值”之类的题目都不作基本要求. 教学中不必作太多的拓展、补充.

四、教学设计案例

1.2.1 任意角的三角函数（第1课时）

1. 教学任务分析

(1) 借助单位圆理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义；

(2) 从任意角三角函数的定义认识其定义域、函数值的符号；

(3) 根据定义理解公式一；

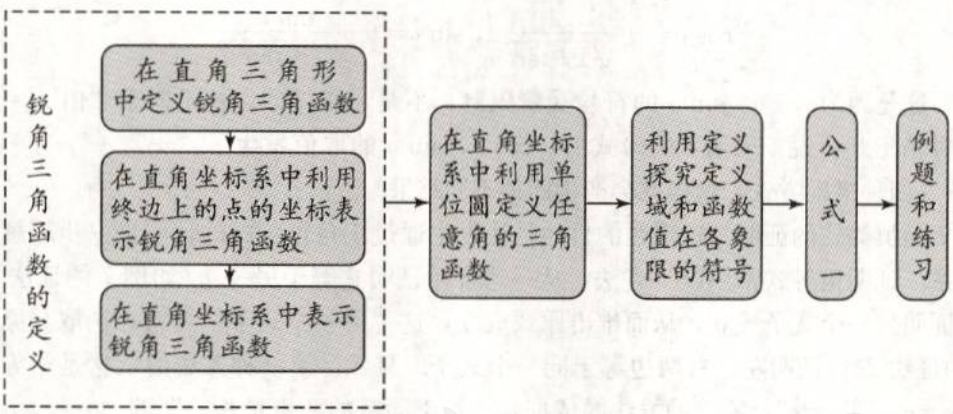
(4) 能初步应用定义分析和解决与三角函数值有关的一些简单问题.

2. 教学重点、难点

重点：任意角三角函数的定义.

难点：用单位圆上点的坐标刻画三角函数. 学生熟悉的函数 $y=f(x)$ 是实数到实数的对应，而这里给出的函数首先是实数(弧度数)到点的坐标的对应，然后才是实数(弧度数)到实数（横坐标或纵坐标）的对应，这就会给学生的理解造成一定困难.

3. 教学基本流程



4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 你能回忆一下锐角三角函数的定义吗？	从原有的认知基础出发，来认识任意角的三角函数的定义.	教师提出问题，学生口头回答. 然后教师画出直角三角形.
2. 你能用直角坐标系中角的终边上的点的坐标来表示锐角三角函数吗？	引导学生用坐标法来研究锐角三角函数.	教师在直角三角形所在平面上建立适当的坐标系，画出角 α 的终边；学生给出相应点的坐标，并用坐标表示锐角三角函数.
3. 改变终边上的点的位置，这三个比值会改变吗？为什么？	说明这三个比值与终边上点的位置无关.	先由学生回答教师的问题，教师再引导学生选几个点，计算比值，获得具体认识，并由相似三角形的性质证明.

续表

问题	设计意图	师生活动
4. 能否通过取适当点而将表达式简化?	体现简约思想，并为引出单位圆奠定基础.	教师引导学生进行对比，学生通过对比发现取到原点的距离为1的点可以使表达式简化.
5. 定义单位圆.		
6. 给出任意角三角函数的定义.		
7. 你能解释一下定义中的对应关系吗?	通过对对应关系的分析，深化对定义的理解.	教师引导学生分析三角函数定义中的自变量是什么，对应关系有什么特点，函数值是什么. 特别注意 α 既表示一个角，又是一个实数(弧度数); "它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$"包含两个对应关系.
8. 例1的教学. 将 $\frac{5\pi}{3}$ 变为 $\frac{6\pi}{7}$ 呢? (练习1)	通过例题和练习加深对定义的理解.	先通过讨论确定利用定义解题的思路，然后由学生自主完成例1及练习第1题.
9. 例2的教学. 如果点 P_0 为 $(-12, 5)$ 呢? (练习2)	通过例题和练习进一步加深对定义的理解.	先通过讨论，确定将任意点转化到单位圆上的点的解题思路，再完成例2及练习第2题.
10. 通过例2的学习，你有什么体会?	通过比较两种定义，让学生体会利用单位圆定义不仅简洁且有一般意义.	教师留给学生一定的时间，学生独立思考并回答. 明确可以用角 α 终边上任意一点的坐标来定义任意角的三角函数，但用单位圆上点的坐标来定义，既不失一般性，而且简单，更容易看清对应关系.
11. 引进一个新的函数，一般可以对哪些问题进行讨论?	明确研究思路.	教师提出问题，并引导学生回顾数学1中关于函数学习的经验，得出需要对定义域、值域、单调性……进行讨论.
12. 请你完成第13页的"探究".	初步学习从定义出发研究三角函数的有关问题的思想方法.	教师注意引导学生从定义出发，利用坐标平面内点的坐标的特征得出定义域、函数值的符号等结论.
13. 三个函数在坐标轴上的取值情况怎样? (练习3)	对特殊情形进行研究，体会数形结合的思想方法.	教师提出问题，学生自主探究. 教师特别应向学生指出，研究特殊情形对认识三角函数的意义.
14. 例3，练习6.	通过例题和练习巩固对三角函数概念的理解.	先分析思路，由学生作出解答，师生共同对解答进行反思，纠正差错，再由学生独立完成练习.
15. 我们知道，终边相同的角相差 2π 的整数倍，那么这些角的同一三角函数值有何关系? 为什么?	发现和证明公式一，并从中体会三角函数值有"周而复始"的变化规律.	教师引导学生从角的终边的关系到角之间的关系再到函数值之间的关系进行讨论，然后再用三角函数的定义证明.
16. 例4、5，练习4、5、7.	通过例题和练习巩固公式一的理解.	先由学生独立完成例题、练习，教师作适当指导.

续表

问　题	设计意图	师生活动
17. 小结与作业.	对学习过程进行反思，对讨论问题的思想方法进行总结.	先让学生自己总结. 教师在学生总结的基础上进行再概括时，应当注意思想性，例如在得出用单位圆上点的坐标定义三角函数的过程中体现的化归思想，用一般的函数概念指导三角函数研究的思想，等等.

5. 几点说明

（1）给出三角函数定义需要经历一个逐步化归的过程，即由直角三角形中边的比到直角坐标系中坐标的比再到用单位圆上点的坐标定义三角函数，教学过程的设计应当充分考虑到这一点，这样才能使学生的学习建立在已有认知经验基础上，对任意角的三角函数的定义的理解才能全面、深刻. 另外，对于定义本身一定要注意认真剖析，特别要细致分析对应关系.

（2）有条件的学校，应当尽量使用信息技术进行教学，例如，展示上述逐步化归的过程，对对应关系的形象化的过程展示，对用单位圆上点的坐标定义三角函数与用终边上任意一点的坐标的比值定义三角函数的等价性的认识等，都可以用信息技术来帮助认识.

五、习题解答

练习（第 15 页）

1. $\sin\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

说明 根据定义求某个特殊角的三角函数值.

2. $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$.

说明 已知角 α 终边上一点的坐标，由定义求角 α 的三角函数值.

3.

角 α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
角 α 的弧度数	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

说明 熟悉特殊角的三角函数值，并进一步地理解公式一.

4. 当 α 为钝角时，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 取负值.

说明 认识与三角形内角有关的三角函数值的符号.

5. （1）正；（2）负；（3）零；（4）负；（5）正；（6）正.

说明 认识不同位置的角对应的三角函数值的符号.

6. (1) ①③或①⑤或③⑤；　(2) ①④或①⑥或④⑥；
(3) ②④或②⑤或④⑤；　(4) ②③或②⑥或③⑥.

说明　认识不同象限的角对应的三角函数值的符号.

7. (1) 0.874 6；　(2) $\sqrt{3}$；　(3) 0.5；　(4) 1.

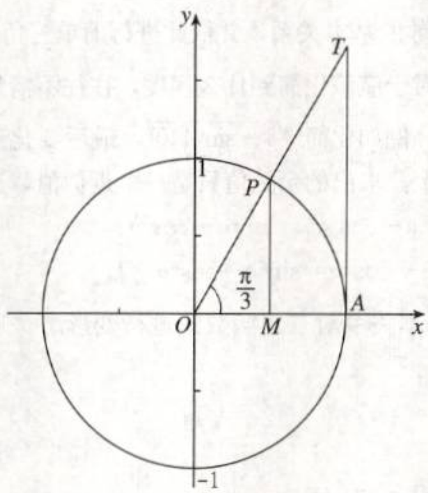
说明　求三角函数值，并进一步地认识三角函数的定义及公式一.

练习（第 17 页）

1. 终边在不同位置的角对应的三角函数值的情况，包括三角函数值的符号情况，终边相同的角的同一三角函数的值相等.

说明　利用单位圆中的三角函数线认识三角函数的性质. 对未学性质的认识不作统一要求.

2. (1) 如图所示；



第 2 (1) 题

(2)、(3)、(4) 略.

说明　作已知角的三角函数线.

3. 225°角的正弦、余弦、正切线的长分别为 3.5 cm，3.5 cm，5 cm；330°角的正弦、余弦、正切线的长分别为 2.5 cm，4.3 cm，2.9 cm，其中 5，2.5 是准确数，其余都是近似数(图略).

$\sin 225°=-\frac{3.5}{5}=-0.7$，$\cos 225°=-\frac{3.5}{5}=-0.7$，$\tan 225°=1$；

$\sin 330°=-0.5$，$\cos 330°=\frac{4.3}{5}=0.86$，$\tan 330°=-\frac{2.9}{5}=-0.58$.

说明　进一步认识单位圆中的三角函数线.

4. 三角函数线是三角函数的几何表示，它直观地刻画了三角函数的概念. 与三角函数的定义结合起来，可以从数和形两方面认识三角函数的定义，并使得对三角函数的定义域、函数值符号的变化规律、公式一等的理解容易了.

说明　反思单位圆中的三角函数线对认识三角函数概念的作用.

练习（第 20 页）

1. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

说明　已知角 α 的余弦值求角 α 的其他两个函数值. 解决这类问题时，要注意角 α 是第几象限角.

2. 当 φ 为第二象限角时，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\varphi=-\frac{1}{2}$；

当 φ 为第四象限角时，$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\varphi=\frac{1}{2}$.

说明 已知角 α 的正切值求角 α 的其他两个函数值. 解决这类问题时，同样要注意角 α 是第几象限角.

3. 当 θ 为第一象限角时，$\cos\theta\approx0.94$，$\tan\theta\approx0.37$.
当 θ 为第二象限角时，$\cos\theta\approx-0.94$，$\tan\theta\approx-0.37$.

说明 已知角 α 的正弦值求角 α 的其他两个函数值. 解决这类问题时，要根据角 α 所在象限进行讨论.

4. (1) $\sin\theta$；(2) 1.

说明 进一步理解同角三角函数的基本关系，并依此进行简单三角函数式的化简. 化简实际上是一种不指定答案的恒等变形，学生对于应该化简到什么程度，往往不清楚. 教学时，应结合具体问题说明，化简一定要尽量化成最简形式. 例如化简 $\sqrt{1-\sin^2 440^\circ}$，最后要化到 $\cos 80^\circ$. 由于 80° 角不是特殊角，一般无须求出其余弦值（实际上，求出的余弦值只是一个近似值，这不符合恒等变形的要求）.

5. (1) 左边 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；
(2) 左边 $=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

说明 根据同角三角函数的基本关系对三角函数式进行变形.

习题 1.2（第 20 页）

A 组

1. (1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$；

(2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=1$；

(3) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

说明 先利用公式一变形，再根据定义求值，非特殊角的三角函数值用计算器求.

2. 当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$；当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

说明 根据定义求三角函数值.

3. (1) -10；　(2) 15；　(3) $-\frac{3}{2}$；　(4) $-\frac{9}{4}$.

说明 求特殊角的三角函数值.

4. (1) 0；　(2) $(p-q)^2$；　(3) $(a-b)^2$；　(4) 0.

说明 利用特殊角的三角函数值化简.

5. (1) -2；　(2) 2.

说明 转化为特殊角的三角函数的求值问题.

6. (1) 负；　(2) 负；　(3) 负；　(4) 正；　(5) 负；　(6) 负.

说明　认识不同位置的角对应的三角函数值的符号.

7. (1) 正；　(2) 负；　(3) 负；　(4) 正.

说明　认识不同位置的角对应的三角函数值的符号.

8. (1) 0.965 9；　(2) 1；　(3) 0.785 7；　(4) 1.045.

说明　可先运用公式一转化成锐角三角函数，然后再求出三角函数值.

9. (1) 先证如果角 θ 为第二或第三象限角，那么 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$.

当角 θ 为第二象限角时，$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$，则 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$；

当角 θ 为第三象限角时，$\sin\theta<0$，$\tan\theta>0$，则 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，

所以如果角 θ 为第二或第三象限角，那么 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$.

再证如果 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，那么角 θ 为第二或第三象限角.

因为 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，即 $\sin\theta>0$ 且 $\tan\theta<0$，或 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，

当 $\sin\theta>0$ 且 $\tan\theta<0$ 时，角 θ 为第二象限角；

当 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$ 时，角 θ 为第三象限角，

所以如果 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，那么角 θ 为第二或第三象限角.

综上所述，原命题成立.

(其他小题略)

说明　以证明命题的形式，认识位于不同象限的角对应的三角函数值的符号.

10. (1) $\dfrac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$；　(2) $\dfrac{12}{13}$，$-\dfrac{12}{5}$；

(3) 当 α 为第二象限角时，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，

当 α 为第四象限角时，$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$；

(4) 当 α 为第一象限角时，$\sin\alpha=0.73$，$\tan\alpha=1.1$，

当 α 为第四象限角时，$\sin\alpha=-0.73$，$\tan\alpha=-1.1$.

说明　要注意角 α 是第几象限角.

11. 当 x 为第三象限角时，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

当 x 为第四象限角时，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

说明　要分别对 x 是第三象限角和第四象限角进行讨论.

12. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

说明　角 α 是特殊角.

13. (1) 左边 $=\dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$；

(2) 左边 $=\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\sin^2 x\cdot\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x\cdot\tan^2 x$；

(3) 左边 $=1-2\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\beta=2-2\cos\beta$；

(4) 左边 $=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

说明 还可以从右边变为左边，或对左右同时变形. 可提倡一题多解，然后逐渐学会选择较为简单的方法.

B 组

1. 1.

说明 根据同角三角函数的基本关系，将原三角函数式转化为正余弦函数式.

2. $-2\tan\alpha$.

说明 先变形，再根据同角三角函数的基本关系进行化简.

3. 3.

说明 先转化为正切函数式.

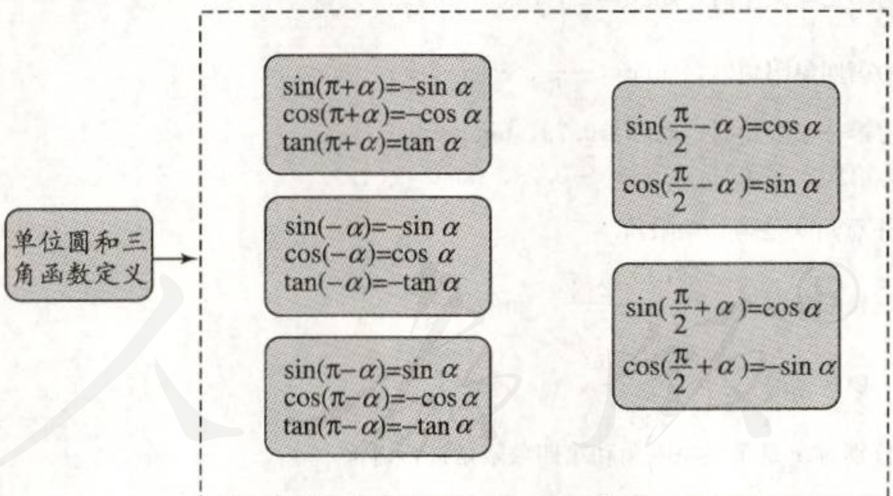
4. 又如 $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ 也是 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 的一个变形；

$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ 是 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 和 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ 的变形；等等.

说明 本题要求学生至少能写出每个同角关系式的一个变形.

1.3 三角函数的诱导公式

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：诱导公式的探究，运用诱导公式进行简单三角函数式的求值、化简与恒等式的证明，提高对数学内部联系的认识.

2. 难点：发现圆的几何性质(特别是对称性)与三角函数性质的联系，特别是直角坐标系内关于直线 $y=x$ 对称的点的性质与 $\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ 的诱导公式的关系.

三、编写意图与教学建议

三角函数的诱导公式是圆的对称性的"代数表示"，因此，用数形结合的思想，从单位圆关于坐标轴、直线 $y=x$、原点等的对称性出发研究诱导公式，是一个自然的思路. 教科书以"思考"和"探究"为引导，利用单位圆的对称性，让学生自主发现终边分别关于原点或坐标轴对称的角的三角函数值之间的关系，使得诱导公式(数)与单位圆(形)得到紧密结合，成为一个整体，不仅大大简化了诱导公式的推导过程，缩减了认识、理解诱导公式的时间，而且还有利于学生对公式的记忆，减轻了学生的记忆负担.

1. 诱导公式二～四

(1) 这部分内容共设置了两个"思考"、一个"探究"，目的是让学生通过自主思维活动，形成利用单位圆的对称性讨论三角函数性质的思想方法，进而发现和证明诱导公式. 由于诱导公式的具体证明并不困难，难的是用联系的观点看问题，从单位圆的对称性发现三角函数的诱导公式，因此教科书通过"思考"、"探究"来启发学生的思维，引导他们利用单位圆的对称性，通过对单位圆上对称点的坐标的关系的探究而发现诱导公式，并在具体推导过程中给学生留出了较多的自主活动空间. 因此，教学中应利用教科书的"探究"和"思考"，紧扣其中的问题，让学生从中心对称图形和轴对称图形这两个重要的几何性质出发，认识"角 $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于原点对称"等图形特征，从而得出它们的终边与单位圆的交点关于原点对称等数量关系. 然后，利用关于 x 轴、y 轴、原点对称的两点其坐标间关系而写出点 P_1，P_2 的坐标，最后用三角函数的定义得出相应的正弦值、余弦值之间的关系.

(2) 诱导公式应当在理解的基础上记忆，而且应当使学生学会利用单位圆帮助记忆. 教科书对诱导公式的特点进行了概括，教学中要留有时间让学生思考、讨论、归纳，引导学生建立各组公式与相应图形的联系，并对各个公式的异同进行比较，以此加深理解公式.

2. 诱导公式五～六

与公式二～四的一样，教科书也是从对称性出发，根据三角函数的定义得到公式五～六. 公式五的推导比前几组公式的推导困难些，其原因有两个：

第一，直角坐标系中关于直线 $y=x$ 对称的两个点之间的关系，即点 $P_1(x, y)$与点 $P_2(y, x)$关于直线 $y=x$ 对称是学生不太熟悉的，要自觉地用于推导诱导公式则更困难；

第二，角 α 的终边与角 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，那么

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

的结论也是学生不知道的.

鉴于上述两个难点，教学时应根据学生的实际情况加强引导，必要时也可以进行直接讲解. 在学生理解了以后，再让学生用同样的方法推导公式六(有别于书本的另一种方法). 下面给出这一方法：

如图 1-5，设任意角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(x, y)$，则 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与单位圆的交点坐标为 $P_1(y, x)$. 又 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边关于 y 轴对称，因此 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边与单位圆交点的坐标为 $P_2(-y, x)$. 于是有：

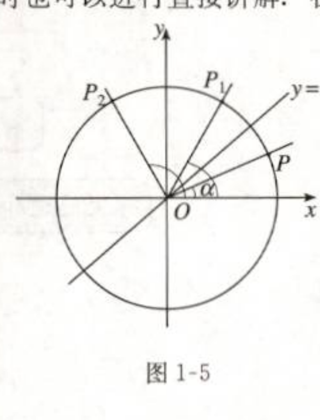


图 1-5

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-y=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x=\cos\alpha.$$

3. 例题

本节的例题有求值、化简、证明三种形式，主要是运用诱导公式进行变形．由于三角函数式的变形灵活多样，所以合理地运用诱导公式进行三角函数式的变形，对初学诱导公式的学生来说有一定的困难．教学中要注意控制难度，立足教科书的问题进行变式训练．还要提醒学生对下列问题引起注意：

（1）将任意负角的三角函数值化为任意正角的三角函数值，如果运用的是公式一，那么应先将这个负角写成$\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$（或$\alpha+k\cdot360°$）的形式，其中角$\alpha$是“$0\sim2\pi$”（或“$0°\sim360°$”）的角，然后根据公式一写出结果．例如：

$$\sin(-1\ 000°)=\sin(80°-3\times360°)=\sin 80°,$$

$$\tan\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{4\pi}{3}-4\times2\pi\right)=\tan\frac{4\pi}{3}.$$

（2）教科书中给出的把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的步骤，可以引导学生自己进行归纳．

四、教学设计案例

1.3 三角函数的诱导公式

1. 教学任务分析

（1）借助单位圆推导诱导公式，特别是学习从单位圆的对称性与任意角终边的对称性中，发现问题（任意角α的三角函数值与$\pi-\alpha$，$\pi+\alpha$等的三角函数值之间有内在联系），提出研究方法（利用坐标的对称性，从三角函数定义得出相应的关系式）；

（2）能正确运用诱导公式求任意角的三角函数值，以及进行简单三角函数式的化简与恒等式证明，并从中体会未知到已知、复杂到简单的转化过程．

2. 教学重点与难点

重点：用联系的观点，发现并证明诱导公式，体会把未知问题化归为已知问题的思想方法．

难点：如何引导学生从单位圆的对称性与任意角终边的对称性中，发现问题，提出研究方法．

3. 教学基本流程

寻找终边与角α的终边对称的角

↓

探究终边和角α的终边对称的角与α的数量关系

↓

探究终边和角α的终边对称的角的三角函数与α的三角函数的关系

↓

证明诱导公式

↓

诱导公式的应用

4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 阅读教科书第 23 页的“思考”，你能说说从圆的对称性可以得到哪些三角函数的性质吗？	引导学生建立圆的性质与三角函数的诱导公式之间的联系.	教师先画出单位圆和任意角 α. 然后让学生从圆的对称性出发，思考并回答可以研究哪些性质. 教师注意引导学生从圆的对称性出发思考相应的角的关系，再进一步思考相应的三角函数值的关系.
2. 阅读教科书第 23 页的“探究”，并以问题（1）为例，说明你的探究结果.	将“思考”中的问题具体化，进一步明确探究的方向.	教师引导学生思考终边与 α 的终边关于原点对称的角与 α 的数量关系，以及与单位圆交点的关系，然后得出三角函数值之间的关系.
3. 你能说明自己探究的结果为什么成立吗？	引导学生利用三角函数的定义证明公式二.	教师提出对探究结果证明的要求，并留给学生一定的思考时间. 学生利用定义进行证明. 教师提醒学生注意使用前面的探究结果.
4. 用类似的方法，探究终边分别与角 α 的终边关于 x 轴、y 轴对称的角与 α 的数量关系？它们的三角函数间又有什么关系？能否证明？	让学生加深理解利用单位圆的对称性研究三角函数性质的思想方法.	教师引导学生用上述同样的思路研究诱导公式三、四，学生独立思考并自主探究和给出证明.
5. 你能概括一下探究公式二～四的思想方法吗？	及时概括思想方法，提高学习活动中的思想性.	教师引导学生概括得出： 圆的对称性——角的终边的对称性 ↓ 对称点的数量关系　↓ 角之间的数量关系 ↘ 诱导公式 ↙
6. 请你概括一下公式一～四的特点及其作用.	深化对公式的理解.	教师提醒学生注意公式两边的角的共同点，学生讨论并作出概括和说明.
7. 例 1～2，练习第 1～3 题.	通过公式的应用，加深对公式的理解.	例 1、2 与练习 1、2、3 搭配. 先由师生共同完成例题，再由学生完成练习，并作适当的评价.
8. 借助单位圆探究终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称的角与 α 有何数量关系？它们的正弦、余弦函数间有何关系？能否证明？	根据公式二～四的探究经验，引导学生独立探究公式五.	教师提出问题，并留有一定的时间让学生进行探究. 注意从终边关于直线 $y=x$ 对称的两个角的数量关系、关于直线 $y=x$ 对称的两个点的坐标之间的关系进行引导.
9. 能否用已有公式得出 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的正弦、余弦与 α 的正弦、余弦之间的关系式？	引导学生用演绎的方法来得到公式六.	教师可根据实际情况，引导学生将 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 转化为 $\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. 学生在教师的引导下，利用公式四、五推导公式六.

续表

问　题	设计意图	师生活动
10. 例 3、例 4，练习第 7 题	加深对公式的理解.	例题可以让学生自己完成后进行课堂讲解.
11. 你能概括一下公式五、六的研究思路吗？	引导学生学习概括，逐步养成反思数学思想方法的习惯.	学生先概括，教师讲评、补充.
12. 公式一～六都叫诱导公式. 通过本节的学习，谈谈你对研究诱导公式的思想方法的认识.	通过进一步的概括活动，提高数学思维能力.	教师先组织学生进行讨论并发表意见，然后再进行总结.

5. 几点说明

（1）本节的教学，除了让学生理解公式的来龙去脉、推导过程外，最主要的是要使学生学会用联系的观点，把单位圆的性质与三角函数联系起来，数形结合地研究诱导公式，要注意引导学生思考“可以研究什么问题，用什么方法研究这些问题”，把数学思想方法的学习渗透其中.

（2）教师要给学生一定的时间从事思考、探究活动. 在学生进行探究的过程中，教师要关注学生的思维过程，并及时进行引导和评价；

（3）学生在信息技术的帮助下，动态地演示角 α 的终边的旋转过程，通过观察可以看到，随着角 α 的终边位置的变化，对称关系以及所得到的公式依然成立.

五、习题解答

练习（第 27 页）

1.（1）$-\cos\dfrac{4}{9}\pi$；　（2）$-\sin 1$；　（3）$-\sin\dfrac{\pi}{5}$；　（4）$\cos 70°6'$.

说明　利用诱导公式转化为锐角三角函数.

2.（1）$\dfrac{1}{2}$；　（2）$\dfrac{1}{2}$；　（3）0.642 8；　（4）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

说明　先利用诱导公式转化为锐角三角函数，再求值.

3.（1）$-\sin^2\alpha\cos\alpha$；　（2）$\sin^4\alpha$.

说明　先利用诱导公式变形为角 α 的三角函数，再进一步化简.

4.

α	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

说明　先利用诱导公式转化为特殊角的三角函数，再求值.

5.（1）$-\tan\dfrac{2}{5}\pi$；（2）$-\tan 79°39'$；（3）$-\tan\dfrac{5}{36}\pi$；（4）$-\tan 35°28'$.

说明 利用诱导公式转化为锐角三角函数.

6. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$； (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$； (3) -0.2116；

(4) -0.7587； (5) $\sqrt{3}$； (6) -0.6475.

说明 先利用诱导公式转化为锐角三角函数，再求值.

7. (1) $\sin^2\alpha$； (2) $\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$.

说明 先利用诱导公式转化为角 α 的三角函数，再进一步化简.

习题 1.3（第 29 页）

A 组

1. (1) $-\cos 30^\circ$； (2) $-\sin 83^\circ 42'$； (3) $\cos\frac{\pi}{6}$； (4) $\sin\frac{\pi}{3}$；

(5) $-\cos\frac{2\pi}{9}$； (6) $-\cos 75^\circ 34'$； (7) $-\tan 87^\circ 36'$； (8) $-\tan\frac{\pi}{6}$.

说明 利用诱导公式转化为锐角三角函数.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$； (2) -0.7193； (3) -0.0151；

(4) 0.6639； (5) -0.9964； (6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

说明 先利用诱导公式转化为锐角三角函数，再求值.

3. (1) 0； (2) $-\cos^2\alpha$

说明 先利用诱导公式转化为角 α 的三角函数，再进一步化简.

4. (1) $\sin(360^\circ-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$；

(2) 略； (3) 略.

说明 有的书也将这组恒等式列入诱导公式，但根据公式一可知，它和公式三等价，所以本教科书未将其列入诱导公式.

B 组

1. (1) 1； (2) 0； (3) 0.

说明 先利用诱导公式转化为锐角三角函数，再求值.

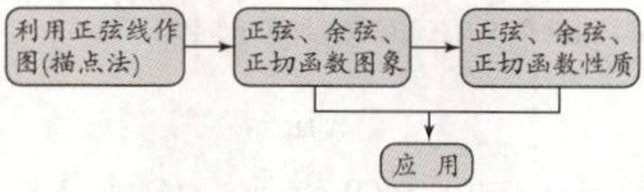
2. (1) $\frac{1}{2}$； (2) $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{当 } \alpha \text{ 为第一象限角,} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{当 } \alpha \text{ 为第二象限角;}\end{cases}$

(3) $-\frac{1}{2}$； (4) $\begin{cases}\sqrt{3}, \text{当 } \alpha \text{ 为第一象限角,} \\ -\sqrt{3}, \text{当 } \alpha \text{ 为第二象限角.}\end{cases}$

说明 先用诱导公式将已知式和待求式都转化为角 α 的三角函数，然后再根据同角三角函数的基本关系得解.

1.4　三角函数的图象与性质

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：正弦、余弦、正切函数的图象及其主要性质(包括周期性、单调性、奇偶性、最值或值域)；深化研究函数性质的思想方法.

2. 难点：正弦函数和余弦函数图象间关系、图象变换，以及周期函数、(最小正)周期的意义.

三、编写意图与教学建议

教科书在回顾三角函数定义的基础上，用集合对应的语言给出了正弦函数和余弦函数的完整定义，然后利用正弦线画出正弦曲线，利用图象考察了正弦函数、余弦函数的性质，其中穿插了从图象变换的观点画函数图象，用变量代换的观点讨论复合函数的性质等. 本节教学的关键，是让学生熟练把握三角函数图象的形状特征，并能在图象直观下研究函数的性质.

数形结合的思想方法贯穿了本节内容的始终，利用图象研究性质，反过来再根据性质进一步地认识函数的图象，充分体现了数形结合的思想方法. 所以，教学中应充分体现数形结合的思想.

利用信息技术工具，可以快捷地作出三角函数的图象，利用动态演示功能，可以帮助学生发现图象的特点，观察函数变化过程，这对学生认识三角函数的性质很有好处. 因此，有条件时应当积极地使用信息技术.

1.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

1. 问题的引入

为了使学生对研究的问题和方法先有一个概括的认识，教科书在本节开头用了一段引导性语言. 教学中应当对这段话给予充分重视，可以先引导学生回顾数学 1 中研究过哪些函数性质，然后说明可以在过去研究函数的经验的指导下研究三角函数的性质，并要特别注意思考三角函数的特殊性——周而复始的变化规律.

为了使学生对三角函数图象有一个直观的认识，教科书利用单摆做简谐振动的实验引出正弦函数、余弦函数的图象. 教学中，可以让学生亲自动手做实验，也可以由教师做演示实验，只要学生能够对正弦曲线、余弦曲线有一个直观的印象就算达到目的. 另外，由于受实验条件及操作过程的影响，得到的图象很可能是不标准的.

2. 正弦函数的图象

(1) 在简谐振动试验的基础上，教科书先介绍用正弦线作比较精确的正弦函数图象的方法，然后引导学生观察图象，确定出五个关键点，从而得到在精确度要求不太高时常用的“五点法”. 为什么不直接用描点法甚至是“五点法”作图呢？实际上，在没有利用正弦线作出正弦曲线之前，我们断定某些点是关键点缺乏根据，也很难确定应该先描出哪些点作为代表，只有用某种方法作出了图象，才能从图象上观察到某些点是“关键点”. 因此，虽然借助正弦线作图比较麻烦，而且也不太容易理解，但是在开始时用这种方法作图是必须的. 教学中应当注意让学生充分理解这种作图法的意义.

(2) 在用正弦线画正弦函数图象时，正弦函数的自变量一般用弧度制度量，这样，自变量的取值范围就是 $\mathbf{R}$.

教科书将画正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象分为两步：第一步，利用正弦线画出它在$[0, 2\pi]$上的图象；第二步，根据“终边相同的角有相同的函数值”，得出在区间$[2k\pi, 2(k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0$ 上的函数图象与在区间$[0, 2\pi]$上的图象完全一致，从而只要把区间$[0, 2\pi]$上的函数图象向左、右连续地平行移动(每次 2π 个单位长度)，就得到完整的正弦曲线. 教学时可以引导学生思考如何才能更快地画出正弦曲线的问题，启发学生从正弦线的变化规律、诱导公式一等得出结论.

(3) 在讲解“五点法”时，教科书先通过“思考”提出“作正弦函数图象时应当抓住哪些关键点”的问题，然后引导学生观察图象，得出五个关键点，并说明描出这五个点后，函数图象就大致确定了. 这样，在精确度要求不太高时，用“五点法”作图是方便、有效的. “五点法”作图应要求学生熟练掌握.

3. 余弦函数图象

(1) 由于利用余弦线作余弦函数图象比较复杂，因此教科书采取了在作出正弦曲线的基础上，利用诱导公式六，通过图象变换得出余弦曲线的方法. 这样处理，一方面是为了降低难度，另一方面也可以加强正弦函数与余弦函数的联系，给学生提供通过图象变换作出函数图象的机会，渗透数形结合思想.

(2) 为了给学生学习更大的自主空间，教科书通过两个“探究”，引导学生利用正弦函数与余弦函数的联系，在正弦曲线的基础上，通过图象变换作出余弦曲线. 教学中应当认真落实教科书的上述意图，放手让学生独立思考，自主活动，通过自己的探究得出余弦曲线. 实际上，只要学生能够想到正弦函数、余弦函数之间的内在联系，即

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

通过图象变换，由正弦曲线得出余弦曲线的方法是比较容易想到的.

4. 例题

“五点法”是画正弦函数、余弦函数简图的基本方法，其他方法都是由此变化而来的. 例 1 是最简单的变化，其主要目的是让学生熟悉“五点法”.

紧接着例 1 的“思考”，让学生从另一个角度熟悉函数作图，即以函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象为基础，通过函数图象变换(将图象上的每一个点都向上平移一个单位)，得到函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象；以函数 $y=\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象为基础，通过作它关于 x 轴对称的图象，得到函数 $y=-\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象.

教学时可以先让学生动手作图，然后再让他们阅读“思考”，观察图 1.4-5、图 1.4-6，并回答如何通过图象变换得出要画的图象.

1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

对于函数性质的研究，学生已经有些经验．其中，通过观察函数的图象，从图象的特征获得函数的性质是一个基本方法，这也是数形结合思想的应用．由于三角函数是刻画周期变化现象的数学模型，这也是三角函数不同于其他类型函数的最重要的地方，而且对于周期函数，我们只要认识清楚它在一个周期的区间上的性质，那么它的性质也就是完全清楚了，因此，教科书把对周期性的研究放在了首位．另外，教科书通过“旁白”，指出研究三角函数性质“就是要研究这类函数具有的共同特点”，这是对数学思考方向的一种引导．

1. 周期性

（1）教科书从数、形两个方面指出正弦函数值具有“周而复始”的变化规律．教学中，可以先让学生观察正弦线的变化规律，再让他们描述这种规律如何体现在正弦函数的图象上，即描述正弦函数图象是如何体现这种“周而复始”的变化规律的，最后再让学生思考诱导公式

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x$$

又是怎样反映函数值的“周而复始”的变化的(用日常语言叙述公式)．通过对图象的特点、函数解析式的特点的描述，使学生建立比较牢固的理解周期性的认知基础，然后再引导学生了解“周而复始”的变化规律的代数刻画，给出周期性的概念．

（2）对周期性的定义，关键是怎样对“周而复始”的变化规律作出代数描述．在引出正式定义之前，可以引导学生先从不同角度进行描述．例如：对于函数 $f(x)$，自变量每增加或减少一个定值(这样的定值可以有很多个)，函数值就重复出现，那么这个函数就叫做周期函数．例如，

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$．这表明，正弦函数、余弦函数在定义域内自变量每增加($k>0$ 时)或减少($k<0$ 时)一个定值 $2k\pi$，它的函数值就重复出现，所以正弦函数、余弦函数都是周期函数．

教学中，还可以通过概括奇函数、偶函数、周期函数的研究方法来加深理解周期性概念．

如果函数 $f(x)$对于其定义域内的每一个值，都有：

$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$叫做奇函数；

$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$叫做偶函数；

$f(x+T)=f(x)$，其中 T 是非零常数，那么 $f(x)$叫做周期函数．

从上述定义可以看到，函数的性质是对函数的一种整体考察结果，反映了同一类函数的共同特点，它们可以从代数角度得到统一刻画．另外，这种共同特点还可以从函数的图象(如果能够作出图象的话)上得到反映．

（3）在引导学生学习周期性概念时，可以强调以下几点．

①对周期函数与周期定义中的“当 x 取定义域内每一个值时”，要特别注意“每一个值”的要求．如果只是对某些 x 有 $f(x+T)=f(x)$，那么 T 就不是 $f(x)$的周期．例如，分别取 $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，$x_2=\frac{\pi}{6}$，则由

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\frac{\pi}{6},$$

可知$\frac{\pi}{2}$虽然正弦函数对 $2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$都有

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right),$$

但由于它不是对“每一个”自变量都有 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$，所以$\frac{\pi}{2}$不是正弦函数的周期.

②周期函数的周期不唯一. 例如 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0)$都是正弦函数的周期. 这一点可以从周期函数的图象上得到反映，也可以从代数上证明：设 T 是函数 $f(x)$的周期，那么对于任意的 $k\in\mathbf{Z}$，$k\neq 0$，kT 也是函数 $f(x)$的周期.

③周期函数不一定存在最小正周期. 例如，对于常数函数 $f(x)=c$(c 为常数，$x\in\mathbf{R}$)，所有非零实数 T 都是它的周期，而最小正数是不存在的，所以常数函数没有最小正周期. 又如，函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\ 当\ x\ 是有理数,\\ 0,\ 当\ x\ 是无理数,\end{cases}$$

设 r 是任意一个有理数，那么，当 x 是有理数时，$x+r$ 也是有理数，而当 x 是无理数时，$x+r$ 也是无理数，即 $D(x)$与 $D(x+r)$或者都等于 1，或者都等于 0，因此在两种情况下都有

$$D(x+r)=D(x).$$

所以 $D(x)$是周期函数，任何非零有理数 r 都是它的周期. 而最小正有理数不存在，所以 $D(x)$也没有最小正周期.

④ 如果不加特别说明，教科书提到的周期，一般都是指最小正周期.

下面证明正弦函数的最小正周期是 2π.

由于 2π 是它的一个周期，所以只需证明任意一个小于 2π 的正数都不是它的周期. 用反证法证明如下：

设 T 是正弦函数的周期，且 $0<T<2\pi$，那么根据周期函数的定义，当 x 取定义域内的每一个值时，都有

$$\sin(x+T)=\sin x.$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，代入上式，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

但 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\cos T$，于是有

$$\cos T=1.$$

根据余弦函数的定义，当 $T\in(0,\ 2\pi)$时，$\cos T<1$. 这说明上述 $\cos T=1$ 是不可能的. 于是 T 必须等于 2π，即正弦函数的最小正周期是 2π.

同理可证，余弦函数的最小正周期是 2π.

关于正弦、余弦函数的周期与最小正周期，一般只要弄清定义，并根据正弦、余弦曲线观察出结果就可以了. 对于学有余力的学生，可以让他们尝试证明正弦、余弦函数的最小正周期是 2π.

2. 其他性质

与研究周期性的方法一样，根据正弦函数、余弦函数图象及函数解析式，同样可以直观地看出这两个函数的奇偶性、单调性、最大(小)值等性质. 值得注意的是，对于周期函数性质的讨论，只要认识清楚它在一个周期内的性质，就可以得到它在整个定义域内的性质.

(1) 正弦函数、余弦函数的奇偶性，无论是由图象观察，还是由诱导公式进行证明，都很容易. 所以，这一性质的研究可以交给学生自主完成.

(2) 正弦函数、余弦函数的单调性，只要求由图象观察，不要求证明. 教学中要注意引导学生根

据函数图象以及《数学 1》中给出的增（减）函数定义进行描述．具体的，可以先选择一个恰当的区间（这个区间长为一个周期，且仅有一个单增区间和一个单减区间），对正弦函数在这个区间上的单调性进行描述；然后利用正弦函数的周期性说明在其他区间上的单调性．对于余弦函数的单调性，可让学生类比正弦函数的单调性自己描述．另外，从一个周期的区间推广到整个定义域上去时，学生会有些不习惯，教学中要留给学生一定的思考时间，由他们自己归纳出正弦函数、余弦函数的单调区间的一般形式．

正弦函数、余弦函数的最大值和最小值可以作为单调性的一个推论．由于问题比较简单，所以可以由学生自己去研究．同样的，对于取最大（小）值时的自变量 x 的一般形式，也要注意引导学生利用周期性进行正确归纳．

3. 教科书在这部分内容的最后设置了一个“探究与发现”，要求利用单位圆中的三角函数线研究正弦函数、余弦函数的性质．这既是对利用三角函数的图象研究其性质的一个补充，又为下一小节的研究，在方法上作铺垫．教科书再次突出了单位圆在研究三角函数时的重要性，拓宽了研究三角函数性质的视野．

4. 例题

（1）例 2 的教学中，关键是要使学生认识到，$f(x+T)=f(x)$ 中，T 是相对于自变量 x 而言的．如果要求的是“最小正周期”，那就要多加小心．例如，本题第(2)小题，虽然

$$f(x)=\sin 2x=\sin(2x+2\pi),$$

但它的最小正周期并不是 2π．实际上，还必须进一步变形成为

$$\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)=f(x+\pi),$$

即 $f(x)$ 中的 x 以 $x+\pi$ 代替后，函数值不变，从而 $\sin 2x$ 的最小正周期是 π．

对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，可以按照如下的方法求它的周期：

$$y=A\sin(\omega x+\varphi+2\pi)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=A\sin(\omega x+\varphi),$$

于是有

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=f(x),$$

所以其周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$．例如在第(3)小题，$y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 中 $\omega=\frac{1}{2}$，所以其周期是 4π．由上述解法可以看到，思考的基本依据还是 $y=\sin x$ 的周期为 2π．

在例 2 之后，教科书设置了一个“思考”，让学生归纳一下正弦型和余弦型函数的周期与解析式中的哪些量有关．并在练习后面的“探究与发现”里，给出了代数解释，并提出一个“思考”，引导学生将在三角函数中得到的结论推广到一般函数．

（2）求解例 3 的基本依据是正弦函数、余弦函数的最大（小）值．对于形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的函数，一般通过变量代换（如设 $z=\omega x+\varphi$）化归为 $y=A\sin z+B$ 的形式，然后进行求解．这种思想对于利用正弦函数、余弦函数的其他性质解决问题时也适用．

（3）例 4 是利用三角函数的单调性比较两个三角函数值的大小．解决这类问题的关键是利用诱导公式等将它们转化到同一单调区间上研究．在此要提醒学生，解决问题要注重前后知识的联系．

（4）例 5 的求解也是用了化归思想，即利用正弦函数的单调性，得出一个关于 x 的不等式，然后通过求集合的交集得到所求的单调区间．

本例的旁白中提出了思考题“如何求函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$，$x\in[-2\pi,2\pi]$ 的单调增区间”，它

主要是为了使学生对求复合函数单调区间的问题有一个完整的认识．实际上，无论 x 的系数是正还是负，其求解的思路是一致的：

令 $z=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x$．由于 z 是 x 的减函数，即 x 增加时 z 减小，要使 x 增加时 y 也增加，则 z 减小时 y 要增加．于是函数 $y=\sin z$ 的减区间就是原函数的增区间．函数 $y=\sin z$ 的单调递减区间是

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right].$$

由

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,$$

得

$$-\frac{7\pi}{3}-4k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}-4k\pi.$$

设

$$A=[-2\pi,\ 2\pi],$$
$$B=\left\{x\ \middle|\ -\frac{7\pi}{3}-4k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}-4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\},$$

由图 1-6 易知

$$A\cap B=\left[-2\pi,\ -\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right].$$

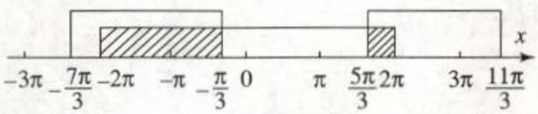


图 1-6

因此，函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$，$x\in[-2\pi,\ 2\pi]$的单调递增区间是$\left[-2\pi,\ -\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right]$．

1.4.3　正切函数的图象与性质

由于学生已经有了研究正弦函数、余弦函数的图象与性质的经验，这种经验完全可以迁移到对正切函数性质的研究中，因此，教科书通过“探究”提出问题，引导学生根据前面的经验研究正切函数的性质．

一般来说，对函数性质的研究总是先作图象，通过观察图象获得对函数性质的直观认识，然后再从代数的角度对性质作出严格表述．但对正切函数，教科书采取了先根据已有的知识(如正切函数的定义、诱导公式、正切线等)研究性质，然后再根据性质研究正切函数的图象．这样处理，主要是为了给学生提供研究数学问题更多的视角，在性质的指导下可以更加有效地作图、研究图象，加强了理性思考的成分，并使数形结合的思想体现得更加全面．

1. 需要注意的几个问题

在教学中除了要注意上一小节提到的类似问题外，还要注意：

(1) 对正切函数的周期性，教科书是分步骤完成的．先由诱导公式说明，正切函数是周期为 π 的周期函数．然后在研究了它的图象之后，再从图象上观察出这一结论．关于证明，可让学有余力的学生课外完成．

(2) 由于研究正切函数的性质时，学生还没有学习正切函数的图象，所以教科书采取了用单位圆

上的正切线来研究单调性和值域．这可以让学生再次体会单位圆在研究三角函数时的作用．

(3) 由于学生已经有了利用单位圆中的正弦线作正弦函数图象的经验，所以教科书要求学生类比正弦函数图象的作法画出正切函数的图象．教学中，还可鼓励学生利用信息技术工具画出正切函数的图象(见本节的“信息技术应用”)．

(4) 学生在初次接触正切函数的图象时，对它是由被互相平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 所隔开的无数多支曲线组成，以及直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 是图象的渐近线等的认识可能有困难．教学时应当引导学生利用正切函数的性质(例如定义域必须去掉 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 各点，值域无最大值、最小值，周期是 π，单调性表现为在每一单调区间内只增不减等)对图象的特征作出解释．

(5) 教学中，应引导学生在认识正切函数图象特征的前提下，学会画正切函数简图．正切曲线按照开区间

$$\cdots，\left(-\frac{3\pi}{2}，-\frac{\pi}{2}\right)，\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)，\left(\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2}\right)，\cdots$$

分段，这些开区间的长度都等于 π 个单位．在每一个开区间(例如$\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$)上，都有一支曲线与 x 轴交于一点(如(0，0))，且与渐近线(如 $x=\pm\frac{\pi}{2}$)无限接近但永不相交．与 x 轴的交点以及渐近线在确定图象的形状时起着关键作用，只要将它们画出后，这个开区间中的图象形状就基本确定了．所以这是用纸笔作图的一种简便方法．

2. 例题

对于例 6，用的是换元法．由于在研究正弦、余弦函数的类似问题时，已用过换元法，所以在这里就没有再介绍换元法，而是直接将$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}$作为一个整体来处理．

四、教学设计案例

1.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

1. 教学任务分析

(1) 函数性质的研究常常以图象直观为基础．正弦函数、余弦函数的教学也是如此，先研究它们的图象，在此基础上再利用图象来研究它们的性质．显然，加强数形结合是深入研究函数性质的基本要求．

(2) 由于正弦线、余弦线已经从“形”的角度描述了三角函数，因此，利用单位圆中的三角函数线画正弦函数图象是一个自然的想法．当然，我们还可以通过三角函数的定义、三角函数值之间的内在联系性等来作图，从画出的图形中观察得出五个关键点，得到“五点法”画正弦函数、余弦函数的简图．

2. 教学重点、难点

重点：正弦函数、余弦函数的图象．

难点：将单位圆中的正弦线通过平移转化为正弦函数图象上的点；正弦函数与余弦函数图象间的关系．

3. 教学基本流程

由简谐运动实验得到正弦函数与余弦函数图象的直观印象

↓

利用单位圆中的正弦线作函数$y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象

↓

由函数$y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象得到函数$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$的图象

↓

由正弦函数的图象得到余弦函数的图象

↓

用“五点法”作正弦函数和余弦函数的图象

4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 遇到一个新的函数，画出它的图象，通过观察图象获得对它的性质的直观认识，是研究函数的基本方法．为了获得正弦函数和余弦函数的图象，我们先做一个简谐振动实验，请注意观察它的图形特点．	明确研究思想；利用简谐振动图象引进正弦曲线、余弦曲线．	教师说明基本思路，指导学生做单摆简谐振动的实验，并观察漏斗中的细沙落在纸板上所形成曲线的形状．
2. 通过上述实验我们对正弦函数、余弦函数图象有了直观印象．但如何画出精确图象呢？我们可以用单位圆中的三角函数线来刻画三角函数，是否可以用它来帮助作三角函数的图象呢？	建立单位圆中的三角函数线与三角函数图象之间的联系，引出利用正弦线作正弦函数图象的方法．	教师讲解利用单位圆中的正弦线作正弦函数图象的方法．应注意引导学生思考如何得到图象上的一个点，即对于自变量x，如何利用正弦线确定它所对应的y值．
3. 正弦线有周而复始的变化规律，因此可以先在区间$[0,\ 2\pi]$上作出图象．那么，应当如何利用正弦线描出正弦函数图象上的一些点呢？	进一步明确如何利用单位圆中的正弦线画正弦函数的图象．	学生在教师的指导下，思考如何利用正弦线描出一些图象上的有代表性的点．教师要注意引导学生分析图象上的点$(x,\ y)$与单位圆中的圆心角x及其对应的正弦线y之间的关系．
4. 为什么要从单位圆与x轴交点A开始，将单位圆分成12等份？	使学生认识这样可以把正弦函数有代表性的取值都包含在内，以便较准确地作出图象．	学生在教师的指导下，讨论、分析正弦线的特殊位置，说明这样做的理由．
5. 请按照教科书叙述的步骤，描出12个点，作出函数$y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象．	培养学生的动手操作能力，形成对正弦函数图象的感知．	学生动手作图．
6. 如何作出$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$的图象？	引导学生利用正弦函数“周而复始”的变化规律作图．	教师提示学生从正弦线的“周而复始”的变化规律进行思考．

续表

问　题	设计意图	师生活动
7. 如何画出余弦函数的图象？你能从正弦函数与余弦函数的关系出发，利用正弦函数图象得到余弦函数图象吗？	使学生从函数解析式之间的关系思考函数图象之间的关系，进而学习通过图象变换画余弦函数图象的方法.	教师引导学生思考，学生利用诱导公式，回答两个函数之间的关系，再用坐标变换作出余弦函数图象.
8. 观察正弦函数的图象，你认为哪些点是关键性的？	从对图象的整体观察入手，引出“五点法”.	教师提出思考问题，学生通过观察图象，确定在$[0, 2\pi]$上起关键作用的五个点，并通过描五个点作图象.
9. 你能确定余弦函数图象的关键点，并作出它在$[0, 2\pi]$上的图象吗？	类比正弦函数，学会“五点法”作余弦函数的简图.	教师提出探究问题，学生通过类比，确定余弦函数图象的五个关键点，并作出在$[0, 2\pi]$上的图象.
10. 例1、练习1.	巩固“五点法”.	师生共同用“五点法”画出例1的图象，然后由学生独立完成练习1，并总结图象的作法.
11. 你能给出第33页“思考”的回答吗？	使学生从图象变换的角度认识函数之间的关系.	教师提出思考问题，学生独立完成.
12. 小结：你能谈谈作正弦函数图象的基本思路吗？	反思学习过程，对研究正弦函数、余弦函数图象的方法进行概括，深化认识.	先由学生思考回答，教师再补充完善. 特别注意总结单位圆中圆心角的弧度数与相应的正弦线的数量组成图象上点的坐标；12等分圆心角的理由；利用“周而复始”的特点，把区间$[0, 2\pi]$上的图象扩展到整个定义域；利用图象变换从正弦曲线得到余弦曲线；等等.

5. 几点说明

（1）单摆简谐振动的图象是正弦曲线，这是学生熟悉的，因而可作为学习正弦函数图象的出发点. 教学中应当充分用好这个背景知识，教师可以在课堂上演示一下这个实验.

（2）有条件的学校，可由师生共同使用信息技术进行本小节的教学. 借助信息技术，可以较方便地利用单位圆中的三角函数线作出三角函数的图象. 另外，还可以帮助学生寻找关键点，对所作的图象进行验证，了解不同函数图象间的关系.

（3）在利用单位圆中的正弦线画正弦函数的图象时，将单位圆分成12等份，则正好对应着12个特殊角. 教学中应当让学生亲自动手画一画，并引导学生思考将单位圆分成12等份的好处.

（4）本小节设置了较多的“探究”“思考”，还提供了“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目. 教学时，应留给学生一定的时间思考、探究这些问题.

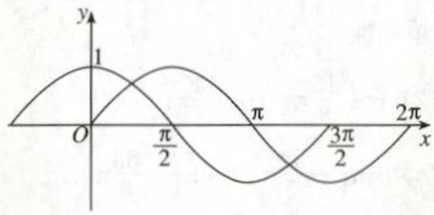
五、习题解答

练习（第34页）

1. 可以用单位圆中的三角函数线作出它们的图象，也可以用“五点法”作出它们的图象，还可以用图形

计算器或计算机直接作出它们的图象．两条曲线形状相同，位置不同，例如函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象，可以通过将函数 $y=\cos x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$的图象向右平行移动$\frac{\pi}{2}$个单位长度而得到．

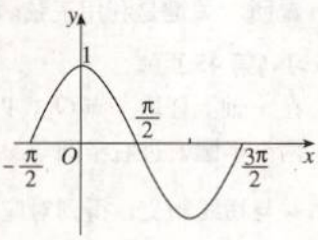
说明 在同一个直角坐标系中画出两个函数图象，利于对它们进行对比．



第1题

2. 两个函数的图象相同．

说明 先用“五点法”画出余弦函数的图象，再通过对比函数解析式发现另一函数图象的变化规律，最后变换余弦曲线得到另一函数的图象．



第2题

练习（第36页）

1. 成立．但不能说 $120°$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 的一个周期，因为此等式不是对 x 的一切值都成立，例如

$$\sin(20°+120°)\neq\sin 20°.$$

说明 理解周期函数的概念．

2. (1) $\frac{8\pi}{3}$；　(2) $\frac{\pi}{2}$；　(3) 2π；　(4) 6π.

说明 利用周期函数的图象和定义求周期，体会周期与自变量 x 的系数有关．

3. 可以先在一个周期的区间上研究函数的其他性质，再利用函数的周期性，将所研究的性质扩展到整个定义域．

说明 了解如何利用函数的周期性来认识周期函数的其他性质．可让学生课堂讨论，然后归纳总结．

练习（第40页）

1. (1) $(2k\pi,(2k+1)\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$；　(2) $((2k-1)\pi,2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$；

(3) $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；　(4) $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 只需根据正弦曲线、余弦曲线写出结果，不要求解三角不等式．

2. (1) 不成立．因为余弦函数的最大值是1，而 $\cos x=\frac{3}{2}>1$.

(2) 成立．因为 $\sin^2 x=0.5$，即 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，而正弦函数的值域是$[-1,1]$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$.

说明 理解正弦、余弦函数的最大值、最小值性质．

3. (1) 当 $x\in\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$时，函数取得最大值2；当 $x\in\left\{x\,|\,x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$时，函数取得最小值$-2$.

（2）当 $x\in\{x|x=6k\pi+3\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，函数取得最大值 3；当 $x\in\{x|x=6k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，函数取得最小值 1.

说明 利用正弦、余弦函数的最大值、最小值性质，研究所给函数的最大值、最小值性质.

4. B.

说明 数形结合地认识函数的单调性.

5. （1）$\sin 250°>\sin 260°$；（2）$\cos\frac{15}{8}\pi>\cos\frac{14}{9}\pi$；

（3）$\cos 515°>\cos 530°$；（4）$\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)>\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$.

说明 解决这类问题的关键是利用诱导公式将它们转化到同一单调区间上研究.

6. $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},\ k\pi+\frac{5\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 关键是利用正弦函数的单调性得到关于 x 的不等式，通过解不等式得解.

练习（第 45 页）

1. 在 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心，单位长为半径作圆. 作垂直于 x 轴的直径，将$\odot O_1$ 分成左右两个半圆，过右半圆与 x 轴的交点作$\odot O_1$ 的切线，然后从圆心 O_1 引 7 条射线把右半圆分成 8 等份，并与切线相交，得到对应于 $-\frac{3\pi}{8}$，$-\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{8}$，0，$\frac{\pi}{8}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{8}$等角的正切线. 相应地，再把 x 轴上从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 这一段分成 8 等份. 把角 x 的正切线向右平行移动，使它的起点与 x 轴上的点 x 重合，再把这些正切线的终点用光滑的曲线连接起来，就得到函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的图象.

说明 可类比正弦函数图象的作法.

2. （1）$\left\{x\middle|k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；（2）$\{x|x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

（3）$\left\{x\middle|-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

说明 只需根据正切曲线写出结果，并不要求解三角方程或三角不等式.

3. $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 可用换元法.

4. （1）$\frac{\pi}{2}$；（2）2π.

说明 可根据函数图象得解，也可直接由函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ 的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$ 得解. 关于函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$，可由学生课余探究.

5. （1）不是. 例如 $0<\pi$，但 $\tan 0=\tan\pi=0$.

（2）不会. 因为对于任何区间 A 来说，如果 A 不含有$\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$这样的数，那么函数 $y=\tan x$，$x\in A$ 是增函数；如果 A 至少含有一个$\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$这样的数，那么在直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 两侧的图象都是上升的(随自变量由小到大).

说明 理解正切函数的单调性.

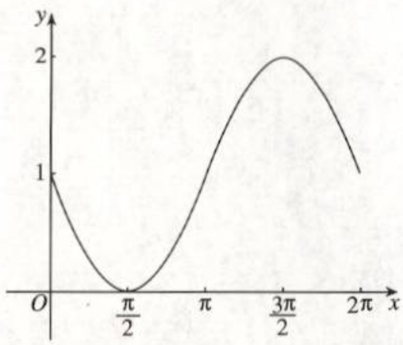
6. (1) $\tan 138° < \tan 143°$； (2) $\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right) > \tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$.

说明 解决这类问题的关键是利用诱导公式将它们转化到同一单调区间上研究.

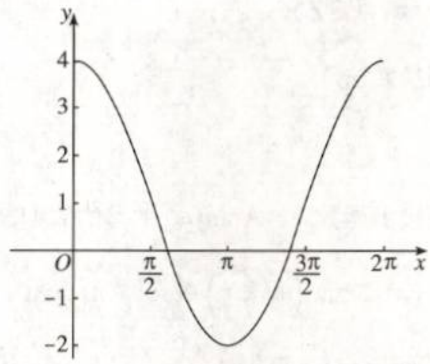
习题 1.4（第 46 页）

A 组

1. (1)



(2)



说明 可以直接用“五点法”作出两个函数的图象；也可以先用“五点法”作出正弦、余弦函数的图象，再通过变换得到这两个函数的图象.

2. (1) 使 y 取得最大值的集合是 $\{x \mid x=6k+3,\ k\in\mathbf{Z}\}$，最大值是 $\frac{3}{2}$；

使 y 取得最小值的集合是 $\{x \mid x=6k,\ k\in\mathbf{Z}\}$，最小值是 $\frac{1}{2}$；

(2) 使 y 取得最大值的集合是 $\left\{x \mid x=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最大值是 3；

使 y 取得最小值的集合是 $\left\{x \mid x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最小值是 -3；

(3) 使 y 取得最大值的集合是 $\left\{x \mid x=2(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最大值是 $\frac{3}{2}$；

使 y 取得最小值的集合是 $\left\{x \mid x=\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最小值是 $-\frac{3}{2}$；

(4) 使 y 取得最大值的集合是 $\left\{x \mid x=\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最大值是 $\frac{1}{2}$；

使 y 取得最小值的集合是 $\left\{x \mid x=-\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，最小值是 $-\frac{1}{2}$.

说明 利用正弦、余弦函数的最大值、最小值性质，研究所给函数的最大值、最小值性质.

3. (1) 3π； (2) $\frac{\pi}{2}$.

说明 可直接由函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 得解.

4. (1) $\sin 103°15' > \sin 164°30'$； (2) $\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right) > \cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$；

(3) $\sin 508° < \sin 144°$； (4) $\cos 760° > \cos(-770°)$.

说明 解决这类问题的关键是利用诱导公式将它们转化到同一单调区间上研究.

5. (1) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y=1+\sin x$ 是增函数；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y=1+\sin x$ 是减函数.

(2) 当 $x\in[(2k-1)\pi, 2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y=-\cos x$ 是减函数；

当 $x\in[2k\pi, (2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y=-\cos x$ 是增函数.

说明 利用正弦、余弦函数的单调性研究所给函数的单调性.

6. $\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

说明 可用换元法.

7. $\frac{\pi}{2}$.

说明 可直接由函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$ 得解.

8. (1) $\tan\left(-\frac{1}{5}\pi\right)>\tan\left(-\frac{3}{7}\pi\right)$； (2) $\tan 1\,519^\circ>\tan 1\,493^\circ$；

(3) $\tan 6\frac{9}{11}\pi>\tan\left(-5\frac{3}{11}\pi\right)$； (4) $\tan\frac{7\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{6}$.

说明 解决这类问题的关键是利用诱导公式将它们转化到同一单调区间上研究.

9. (1) $\left\{x \mid -\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2) $\left\{x \mid \frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

说明 只需根据正切曲线写出结果，并不要求解三角方程或三角不等式.

10. 由于 $f(x)$ 以 2 为最小正周期，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)=f(x)$. 于是：

$$f(3)=f(1+2)=f(1)=(1-1)^2=0;$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+2\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2=\frac{1}{4}.$$

说明 利用周期函数的性质，将其他区间上的求值问题转化到区间[0, 2]上的求值问题.

11. 由正弦函数的周期性可知，除原点外，正弦曲线还有其他对称中心，其对称中心坐标为 $(k\pi, 0)$，$k\in\mathbf{Z}$. 正弦曲线是轴对称图形，其对称轴的方程是 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

由余弦函数和正切的周期性可知，余弦曲线的对称中心坐标为 $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，对称轴的方程是 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；正切曲线的对称中心坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，正切曲线不是轴对称图形.

说明 利用三角函数的图象和周期性研究其对称性.

B 组

1. (1) $\left\{x \mid \frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2) $\left\{x \mid -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

说明 变形后直接根据正弦函数、余弦函数的图象写出结果，并不要求解三角方程或三角不等式.

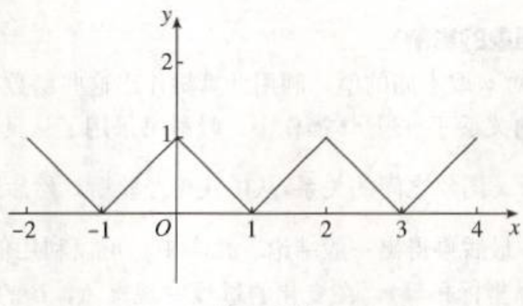
2. 单调递减区间$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 利用正切函数的单调区间求所给函数的单调区间.

3. (1) 2；

(2) $y=f(x+1)$的图象如下；

(3) $y=|x-2k|$，$x\in[2k-1, 2k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$.

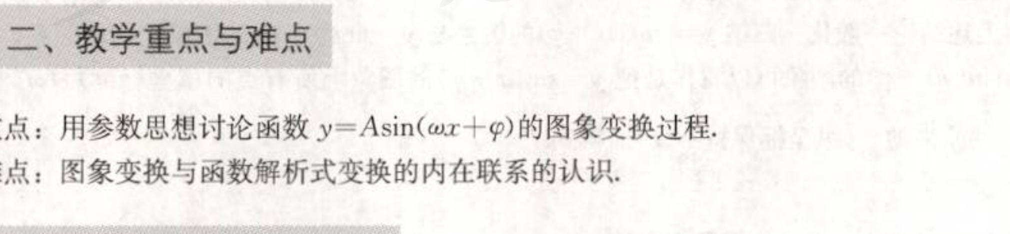


第 3(2)题

说明 可直接由函数 $y=f(x)$的图象得到其周期. 将函数 $y=f(x)$的图象向左平行移动 1 个单位长度，就得到函数 $y=f(x+1)$的图象. 求函数 $y=f(x)$的解析式难度较高，需要较强的抽象思维能力. 可先求出定义域为一个周期的函数 $y=f(x)$，$x\in[-1, 1]$的解析式为 $y=|x|$，$x\in[-1, 1]$，再根据函数 $y=f(x)$的图象和周期性，得到函数 $y=f(x)$的解析式为 $y=|x-2k|$，$x\in[2k-1, 2k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$.

1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：用参数思想讨论函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换过程.
2. 难点：图象变换与函数解析式变换的内在联系的认识.

三、编写意图与教学建议

为了画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图，需要认识清楚参数 φ，ω，A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影

响．所以，教科书重点介绍了参数 φ，ω，A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响．

本节内容从一个物理问题引入，根据从具体到抽象的原则，通过参数赋值，从具体函数的讨论开始，把从函数 $y=\sin x$ 的图象到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的变换过程，分解为先分别考察参数 φ、ω、A 对函数图象的影响，然后整合为对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的整体考察．鉴于作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象有一定的复杂性，因此教科书给出了利用计算机作图的提示．实际上，计算机可以动态地演示参数 A、ω、φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响，这对学生认识函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象特点非常有好处．

1. φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响

教科书首先指出，“可以对 φ 取不同的值，利用计算机作出这些函数在同一坐标系中的图象，观察它们与 $y=\sin x$ 的图象之间的关系．”在具体操作中，教科书采用了从具体到抽象的做法，先引导学生讨论 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\sin x$ 图象之间的关系，从中获得经验后，然后通过“旁白”提示学生再观察几个 φ 值对函数图象的影响，最后再得出一般结论．教学中，可以利用信息技术，使教科书的图 1.5-2 中 A，B 两点动起来(保持纵坐标相等)，在变化的过程中观察 A，B 的坐标、x_B-x_A、$|AB|$ 的变化情况，这将有力地促进学生归纳出 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响．

2. ω 对 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

(1) 这里的探索思路与前面的完全一致．因为这时的变量是 ω，而 φ 相对固定，为了作图方便，教科书取 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，从而使 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 在 ω 变化过程中的比较对象固定为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$．具体过程是：

① 以 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 为参照，把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象作比较，发现规律：把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标缩到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标保持不变，就得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．教学中应当非常认真地对待这个过程，引导学生在自己独立思考的基础上得出规律．

② 取 $\omega=\frac{1}{2}$，让学生自己比较 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象．教学中可以让学生通过作图、观察和比较图象、讨论等活动，得出结论：把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)就得到 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．

③ 取 ω 为其他值，观察相应的函数图象与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的关系，得出类似的结论．一般地，这一步应当利用信息技术来完成．

④ 将上述结论一般化：归纳 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象之间的关系，得出结论“函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象可以看作是把 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的 $\frac{1}{\omega}$(纵坐标保持不变)而得到．”

3. A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

教科书安排的探索 A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响的过程，与探索 ω、φ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响完全一致，教学处理也可以用同样的思路．不过，这时可以主要让学生独立完成．

4. 作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图

教科书介绍的作图方法是先变相位，再变周期，最后变振幅．也可以改变顺序，先变周期，再变振幅，最后变相位．例如，要得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，先把正弦曲线上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；再使曲线上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；最后把曲线上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍（横坐标不变），就可以得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．

另外，还可以按照这样的顺序作图象变换：把正弦曲线上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象；再把后者所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍（横坐标不变），得到函数 $y=3\sin 2x$ 的图象；再把所得图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$（因为 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以不是向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$）个单位长度，得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象．不过，学生容易在这一顺序的第三步出错，教学时应引起注意．

教科书在总结由函数 $y=\sin x$ 的图象变为函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的步骤时，特意将中间步骤留空，目的是让学生提出多种思路．

5. 信息技术工具的使用

除了教科书中介绍的利用信息技术工具进行研究的方法外，教学时，还可以利用信息技术工具，从整体上研究参数 φ，ω，A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象整体变化的影响．一种做法是，作出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，改变 φ，ω，A 的值，观察图象的变化；另一种做法是，取 φ，ω，A 的多组值，分别作出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，然后对比各个图象的异同．

6. 例题

例 1 中，教科书介绍了两种画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 简图的方法．用“五点法”作图要强调：这五个点应该是使函数取最大值、最小值以及曲线与 x 轴相交的点．找出它们的方法是先作变量代换，设 $X=\omega x+\varphi$，再用方程思想由 X 取 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，2π 来确定对应的 x 值．另一种方法是通过图象变换作图，即利用 A、ω、φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响，通过“平移”“伸缩”等得到图象．

例 2 是根据简谐运动的图象求解析式．在此之前，教科书介绍了 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数 A、ω、φ 的物理意义，教学中可以引导学生回忆物理中学过的相关知识．在解决例 2 时，要提醒学生注意思考 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的参数 A、ω、φ 在图象上是怎样反映的．另外，本题的解答可以使学生体会数形结合思想的作用．

四、教学设计案例

1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

1. 教学任务分析

（1）能借助计算机画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，并观察参数 φ，ω，A 对函数图象变化的影

响，同时结合具体函数图象的变化，领会由简单到复杂、特殊到一般的化归思想；

（2）结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义.

2. 教学重点、难点

重点：将考察参数 φ，ω，A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响的问题进行分解，从而学习如何将一个复杂问题分解为若干简单问题的方法.

难点：ω 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响规律的概括.

3. 教学基本流程

探索 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响

↓

探索 ω 对 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

↓

探索 A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

↓

将 $y=\sin x$ 的图象变为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的方法

↓

简谐运动的振幅、周期、频率、相位、初相与 A、ω、φ 的关系

4. 教学情景设计

问 题	设计意图	师生活动
1. 观察交流电电流随时间变化的图象，它与正弦曲线有何关系？	创设问题情景，建立函数 $y=\sin x$ 的图象与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的联系.	学生阅读教科书第 56 页开头一段，并思考、回答问题.
2. 你认为可以怎样讨论参数 φ，ω，A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响？	引导学生思考研究问题的方法.	教师提问，学生讨论、回答. 最后应当总结出：先分别讨论参数 φ，ω，A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响，然后再整合.
3. 分别在 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=\sin x$ 的图象上各恰当地选取一个纵坐标相同的点，同时移动这两点并观察其横坐标的变化，你能否从中发现 φ 对图象有怎样的影响？	引导学生观察 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上点的坐标和 $y=\sin x$ 的图象上点的坐标的关系，获得 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响的具体认识.	教师用计算机作出函数图象，动态演示变换过程，引导学生观察变化过程中的不变量，得出它们的横坐标总是相差 $\frac{\pi}{3}$ 的结论.
4. 对 φ 任取不同的值，作出 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象，看看与 $y=\sin x$ 的图象是否有类似的关系？	引导学生获得更多的关于 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响的经验.	由学生作出 φ 取不同值时，函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象，并探究它与 $y=\sin x$ 的图象的关系，看看是否仍有上述结论.
5. 请你概括一下如何从正弦曲线出发，经过图象变换得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象.	引导学生通过自己的概括认识 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响.	学生思考、讨论并给出回答，教师补充，并让学生阅读教科书相关段落.

续表

问　题	设计意图	师生活动
6. 你能用上述研究方法，讨论一下参数 ω 对函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的影响吗？	让学生根据已有经验独立研究 ω 对 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的影响，进一步熟悉研究方法.	学生独立或小组合作进行研究，教师作适当指导. 注意提醒学生按照从具体到一般的思路得出结论，并与教科书相关段落对照.
7. 类似的，你能讨论一下参数 A 对 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的影响吗？	巩固已有经验，认识参数 A 对 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的影响.	学生作出 A 取不同值时，函数 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，并发现与 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的关系. 概括参数 A 对 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的影响规律.
8. 例 1，练习 1、2.	用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象并从图象变换角度认识函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的关系.	师生共同完成例 1，学生独立完成练习 1，并口答练习 2.
9. 除了教科书给出的经过图象变换，从函数 $y=\sin x$ 的图象得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象外，你还有别的方法吗？	进一步认识由 $y=\sin x$ 经图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的方法，并体会由简单到复杂、特殊到一般的化归思想.	教师组织学生进行讨论，学生通过自己作图(有条件的要尽量使用计算机)，验证思路，然后汇报不同的方法.
10. 你能回忆一下物理中描述简谐运动的函数关系吗？振幅、周期、频率、相位、初相等概念与 A、ω、φ 有何关系？	建立与物理知识的联系，了解常数 A、ω、φ 与简谐运动的某些物理量的关系.	学生回顾相关的物理知识，解释振幅、周期、频率、相位、初相等概念与 A、ω、φ 的关系.
11. 你认为，要解决例 2，关键要抓住什么？请你给出解答.	明确解题思路，学会数形结合地处理问题.	师生共同讨论，明确解题的关键是搞清 A、ω、φ 等参数在图象上如何得到反映的，并由“形”到“数”地解决问题. 学生口答练习 3、4.
12. 你能归纳一下本节讨论问题的思想方法吗？	引导学生反思学习过程，概括出研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的思想方法.	学生思考、讨论，派代表阐述思想方法. 教师作适当点评、补充.

5. 几点说明

(1) 教学中，可以对讨论方法先作一个概括的描述，特别应当指出，一个问题中涉及几个参数时，一般采取先“各个击破”，然后“归纳整合”的方法.

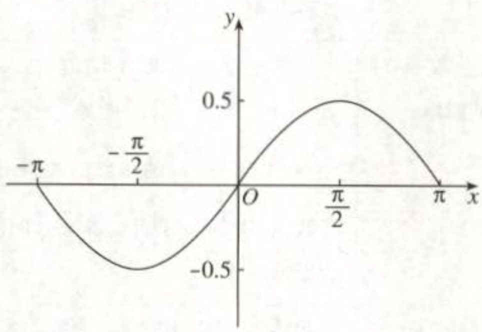
(2) 在分别讨论 A、ω、φ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响时，一般采取从具体到一般的思路，即对参数赋值，观察具体函数图象的特点，获得对变化规律的具体认识，然后让参数“动起来”，看看是否还保持了这个规律. 教学中应当尽量使用计算机帮助学生更好地观察规律.

(3) 从 $y=\sin x$ 的图象出发，经过图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，其变换途径不唯一，教学中可以提出寻找不同变换途径的问题，让学生自己去独立研究.

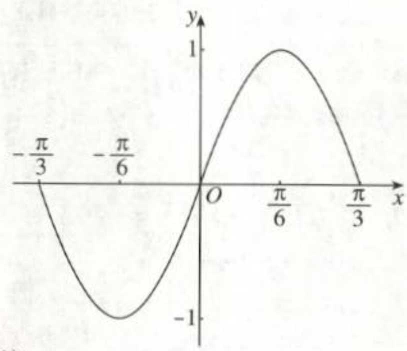
五、习题解答

练习（第55页）

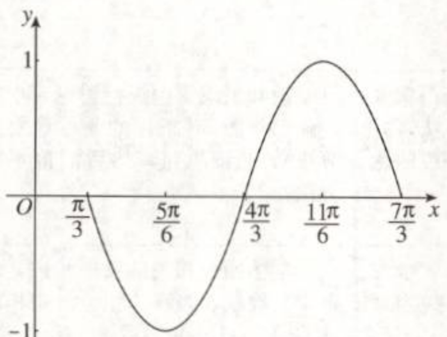
1.（1）



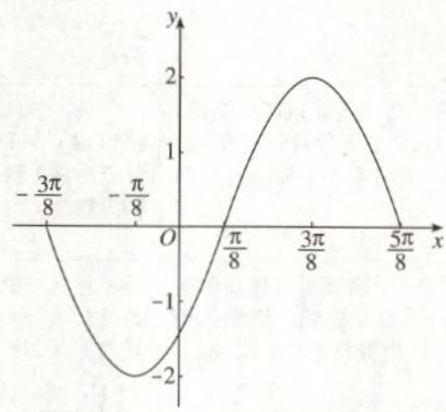
（2）



（3）



（4）



说明 第（1）、（2）、（3）小题分别研究了参数 A、ω、φ 对函数图象的影响，第（4）小题则综合研究了这三个参数对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响.

2.（1）C；（2）B；（3）C.

说明 判定函数 $y_1=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)$ 与 $y_2=A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$ 的图象间的关系. 为了降低难度，在 A_1 与 A_2、ω_1 与 ω_2、φ_1 与 φ_2 中，每题只有一对数值不同.

3. 振幅为$\frac{2}{3}$，周期为 4π，频率为$\frac{1}{4\pi}$；先将正弦曲线上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再在纵坐标保持不变的情况下将各点的横坐标伸长到原来的2倍，最后在横坐标保持不变的情况下将各点的纵坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$倍.

说明 了解简谐振动的物理量与函数解析式的关系，并认识函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

4. $\frac{\pi}{12}$. 把正弦曲线在区间$\left[\frac{\pi}{12},+\infty\right)$的部分向左平行移动$\frac{\pi}{12}$个单位长度，就可得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，$x\in[0,+\infty)$的图象.

说明 了解简谐振动的物理量与函数解析式的关系，并认识函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

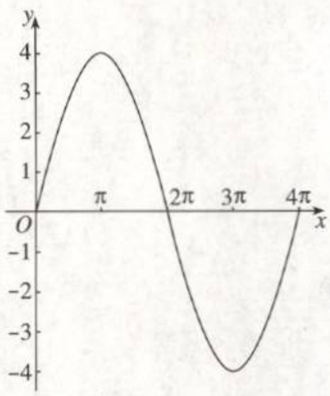
习题 1.5（第 57 页）

A 组

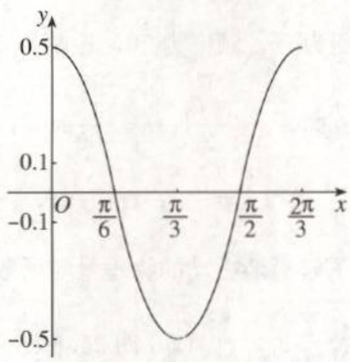
1. （1）C；（2）A；（3）D.

2.

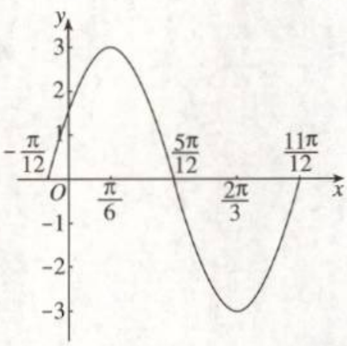
（1）



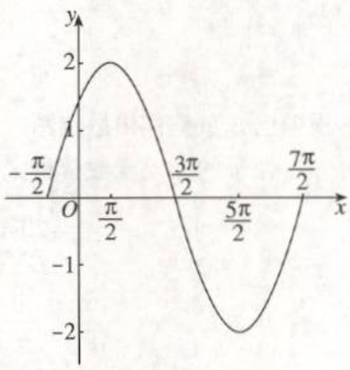
（2）



（3）



（4）



说明　研究了参数 A、ω、φ 对函数图象的影响.

3. （1）振幅是 8，周期是 8π，初相是 $-\frac{\pi}{8}$.

先把正弦曲线向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $y_1=\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把函数 y_1 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 4 倍（纵坐标不变），得到函数 $y_2=\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把函数 y_2 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 8 倍（横坐标不变），得到函数 $y_3=8\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；最后把函数 y_3 的图象在 y 轴左侧的部分抹去，就得到函数 $y=8\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$，$x\in[0,+\infty)$ 的图象.

（2）振幅是 $\frac{1}{3}$，周期是 $\frac{2\pi}{3}$，初相是 $\frac{\pi}{7}$.

先把正弦曲线向左平行移动 $\frac{\pi}{7}$ 个单位长度，得到函数 $y_1=\sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把函数 y_1 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y_2=\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把函数 y_2 的图象上所有点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍（横坐标不变），得到函

数 $y_3=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；最后把函数 y_3 的图象在 y 轴左侧的部分抹去，就得到函数 $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$，$x\in[0,+\infty)$的图象.

说明 了解简谐振动的物理量与函数解析式的关系，并认识函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与正弦曲线的关系.

4.（1）周期为$\frac{1}{50}$，频率为 50，振幅为 5，初相为$\frac{\pi}{3}$.

（2）$t=0$ 时，$i=\frac{5\sqrt{3}}{2}$；$t=\frac{1}{600}$时，$i=5$；$t=\frac{1}{150}$时，$i=0$；

$t=\frac{7}{600}$时，$i=-5$；$t=\frac{1}{60}$时，$i=0$.

说明 了解简谐振动的物理量与函数解析式的关系，并求函数值.

5.（1）$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$；　　（2）约 24.8 cm.

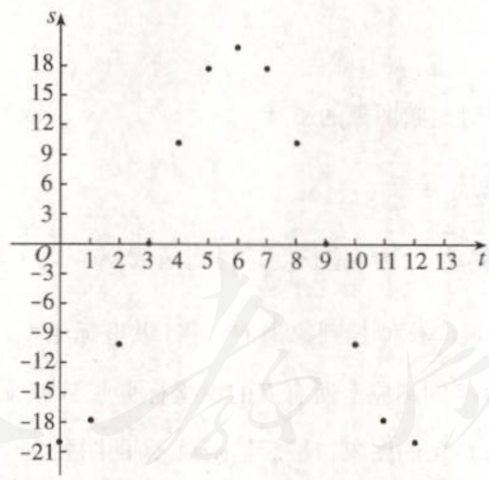
说明 了解简谐振动的周期.

B 组

1. 如图所示，根据已知数据作出散点图.

由散点图可知，振子的振动函数解析式为

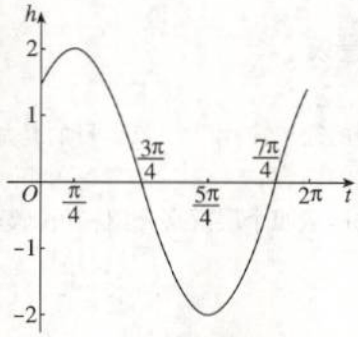
$$y=20\sin\left(\frac{\pi x}{6t_0}-\frac{\pi}{2}\right),\ x\in[0,+\infty).$$



第 1 题

说明 作出已知数据的散点图，然后选择一个函数模型来描述，并根据已知数据求出该函数模型.

2. 函数 $h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$在$[0,2\pi]$上的图象为



第 2 题

(1) 小球在开始振动时的位置在$(0, \sqrt{2})$；

(2) 最高点和最低点与平衡位置的距离都是 2；

(3) 经过 2π 秒小球往复运动一次；

(4) 每秒钟小球能往复振动$\frac{1}{2\pi}$次.

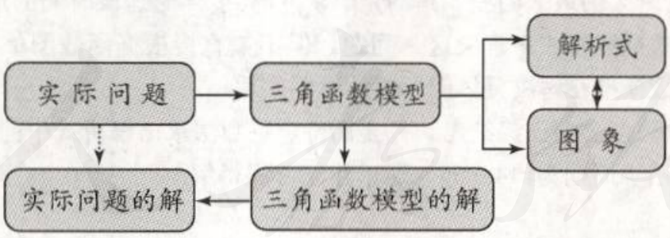
说明 结合具体问题，了解解析式中各常数的实际意义.

3. 点 P 的纵坐标关于时间 t 的函数关系式为 $y=r\sin(\omega t+\varphi)$，$t\in[0, +\infty)$；点 P 的运动周期和频率分别为$\frac{2\pi}{\omega}$和$\frac{\omega}{2\pi}$.

说明 应用函数模型 $y=r\sin(\omega t+\varphi)$解决实际问题.

1.6 三角函数模型的简单应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：用三角函数模型解决一些具有周期变化规律的实际问题.
2. 难点：将某些实际问题抽象为三角函数模型.

三、编写意图与教学建议

教科书专门设置“三角函数模型的简单应用”一节，目的是加强用三角函数模型刻画周期变化现象的学习．这是以往教学中不太注意的内容．

本节选择了4个例题，循序渐进地从四个层次来介绍三角函数模型的应用：

根据图象建立解析式；

根据解析式作出图象；

将实际问题抽象为与三角函数有关的简单函数模型；

利用收集到的数据作出散点图，并根据散点图进行函数拟合，从而得到函数模型．

教科书在素材的选择上注意了广泛性、真实性和新颖性，同时又关注到三角函数性质（特别是周期性）的应用，引导学生通过解决有一定综合性和思考水平的问题，培养他们综合应用数学和其他学科的知识解决问题的能力．

由于实际问题常常涉及一些复杂数据，因此要鼓励学生利用计算机或计算器处理数据，包括建立有关数据的散点图，根据散点图进行函数拟合等．

1. 教学重点和难点

（1）本节学习的重点是用三角函数模型解决一些具有周期变化规律的实际问题，引导学生学习从实际问题中发现周期变化的规律，并将所发现的规律抽象为恰当的三角函数模型．

（2）从实际问题中抽象出三角函数模型的过程中，由于陌生的背景、复杂的数据处理等，学生会感到困难．教学中应当注意帮助学生分析问题中的数量关系，通过作散点图等，引导学生从图的特点来发现各个量之间的关系或它们的变化规律．

2. 例1的教学

例1是研究温度随时间呈周期性变化的问题．题目给出了某个时间段的温度变化曲线，要求这一天的最大温差，并写出曲线的函数解析式．其实就是利用函数的模型（函数图象）解决问题（求一天的最大温差），并根据图象建立解析式．

第（1）小题“求这一天的最大温差”指的是“求6时到14时这段时间的最大温差”．虽然也可以先求出函数解析式，再根据解析式来解决这一问题，但不如直接根据函数图象看出结果方便．本小题要让学生体会不同的函数模型在解决具体问题时的不同作用．

第（2）小题的函数模型类型已经给出，只要用待定系数法求出解析式中的未知参数，从而确定其解析式．其中求 ω 是利用半周期为 $(14-6)$，通过建立方程得解．

3. 例2的教学

例2研究的是与正弦函数有关的简单函数 $y=|\sin x|$ 的图象及其周期性．其实就是根据解析式模型建立图象模型，并根据图象认识性质．

画函数 $y=|\sin x|$ 的图象，可先画与之有关的正弦曲线，再根据因变量的非负性，作出 x 轴下方的图象关于 x 轴对称的图象，然后去掉 x 轴下方的图象，就得到需要的图象．教学中，可将这个函数的作图方法与函数 $y=|x|$ 的作图方法作类比．

4. 例3的教学

例3是研究楼高与楼在地面的投影长的关系问题，是将实际问题直接抽象为与三角函数有关的简

单函数模型，然后根据所得的函数模型解决问题.

要直接根据教科书的图 1.6-3 来建立函数模型，学生会有一定困难，而解决这一困难的关键是由图 1.6-3 画出图 1.6-4，然后由图建立函数模型.

这道题的结论有一定的实际应用价值. 教学中，教师可以在这道题的基础上再提出一些问题，例如，“如果前面的楼房距你家要买的楼房 15 m，两幢楼的高都是 21 m，每层楼高 3 m，为了使正午的太阳全年不被遮挡，你应该挑选哪几层的房子”?

5. 例 4 的教学

例 4 是研究港口海水深度随时间呈周期性变化的问题. 题目只给出了时间与水深的关系表，要想由此表直接得到函数模型是很困难的.

教学中，可以引导学生将表中的数据输入计算器或计算机，画出它的散点图，然后观察散点图，选择恰当的函数模型.

需要说明的是，建立数学模型解决实际问题，所得的模型是近似的，并且得到的解也是近似的. 这就需要根据实际背景对问题的解进行具体分析. 本题的解答中，给出货船的进、出港时间，一方面要注意利用周期性以及问题的条件，另一方面还要注意考虑实际意义. 例如，由模型解出的凌晨进港时间约等于 0.384 6 时，如果考虑到安全因素，在稍后的 0.5 时，即 0 时 30 分进港是合适的. 正因为有这个考虑，所以教科书在第 64 页给了“思考”. 实际上，在货船的安全水深正好与港口水深相等时停止卸货将船驶向较深水域是不行的，因为这样不能保证货船有足够的时间发动螺旋桨.

四、教学设计案例

货船进出港时间问题

1. 教学任务分析

能正确分析收集到的数据，选择恰当的三角函数模型刻画数据所蕴含的规律，能根据问题的实际意义，利用模型解释有关实际问题，为决策提供依据.

2. 教学重点、难点

重点：用三角函数模型刻画潮汐变化规律，用函数思想解决具有周期变化规律的实际问题.

难点：对问题实际意义的数学解释，从实际问题中抽象出三角函数模型.

3. 教学基本流程

给出港口水深数据，提出问题

↓

求三角函数模型

↓

利用模型解决问题

↓

反思解题过程，总结思想方法

4. 教学情景设计

问 题	设计意图	师生活动
1. 观察例4表格中的数据，你发现了什么规律？	从所给数据中发现周期性变化规律.	教师提出问题，学生观察数据，发现规律.
2. 根据数据作出散点图. 观察图形，你认为可以用怎样的函数模型来刻画其中的规律？	引导学生根据散点图的特点选择函数模型.	教师引导学生作散点图，再根据散点图的形状特点，选择函数模型. 注意引导学生与“五点法”相联系.
3. 你能否求出这个函数模型？	引导学生根据散点图及有关数据求函数解析式.	教师提出问题，学生独立完成.
4. 根据所得的函数模型，求出整点时的水深.		
5. 请根据所得的函数模型，求解本例中的（2）.	利用函数模型解决实际问题.	在教师引导下，学生利用计算器进行计算求解. 注意引导学生正确理解题意，一天中有两个时间段可以进港.
6. 所求出的进港时间是否符合实际情况？如果不符合，应该如何修改？	使学生懂得从函数模型中得出的答案，还需要检验它是否与实际意义相符.	教师引导学生根据问题的实际意义，对答案的合理性做出解释.
7. 在本例问题（3）中，应保持港口的水深不小于船的安全水深，那么如何刻画船的安全水深呢？	引导学生用函数模型刻画货船安全水深与时间的关系.	教师引导学生思考，把问题（3）中的条件翻译成为函数模型.
8. 求货船停止卸货、将船驶向深水域的时间的含义是什么？	引导学生将实际问题的意义转化为数学解释.	教师引导学生思考，提醒学生注意货船的安全水深、港口的水深同时在变，停止卸货的时间应当在安全水深接近于港口水深的时候.
9. 在船的安全水深正好等于港口水深时停止卸货行吗？为什么？正确结论是什么？	引导学生根据问题的实际意义，对所求结果进行检验.	在教师引导下，学生独立思考、讨论，然后给出回答.
10. 完成练习3.	巩固通过建立三角函数模型解决具有周期性规律的问题的思想方法.	学生独立完成，然后汇报，再由教师组织学生评价.
11. 你能概括出建立三角函数模型解决实际问题的基本步骤吗？	反思学习过程，体会三角函数在描述周期变化现象时的作用.	教师组织学生讨论，归纳概括出基本步骤.

5. 几点说明

（1）恰当选择函数模型是解决问题的关键，而对问题作出合理的数学解释，进而把实际问题转化为数学问题是需要培养的能力. 如果学生中选择了不同的函数模型，教师应组织学生进行交流，或让学生根据自己选择的模型进行求解，然后再根据所求结果与实际情况的差异进行评价.

（2）本题的解答中可以使用信息技术的地方较多，例如：作散点图；已知正弦函数值，求角；观察港口水深函数与货船安全水深函数的变化规律；等等. 教学时应当积极引导学生利用信息技术处理画图、求函数值、利用计算机的动态演示功能观察函数变化情况等，以使他们有更多的时间用于对问题本质的理解.

五、习题解答

练习（第 65 页）

1. 乙点的位置将移至它关于 x 轴的对称点处.

说明 因为波从乙点传到戊点正好是一个周期，经过$\frac{1}{2}$周期，波正好从乙点传到丁点，又因为在波的传播过程中，绳上各点只是上下振动，纵坐标在变，横坐标不变，所以经过$\frac{1}{2}$周期，乙点位置将移至它关于 x 轴的对称点处，即横坐标不变，纵坐标与图中的丁点相同.

2. 如 CCTV-1 新闻联播节目播出的周期是 1 天.

说明 了解实际生活中发生的周期变化现象.

3. 可以上网下载有关人体节律的软件，利用软件就能方便地作出自己某一时间段的三条人体节律曲线，它们都是正弦型函数图象. 根据曲线不难回答题中的问题.

说明 通过解决可用三角函数模型描述的自身问题，让学生增强学习三角函数的兴趣，并进一步体会三角函数是描述周期性变化现象的重要模型.

习题 1.6（第 65 页）

A 组

1. (1) $30°$或$150°$； (2) $135°$； (3) $45°$； (4) $150°$.

说明 由角 A 是$\triangle ABC$ 的内角，可知 $A\in(0°, 180°)$.

2. (1) $\frac{4\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}$； (2) $\frac{3\pi}{2}$； (3) $\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$； (4) $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$.

说明 可让学生再变换角 x 的取值范围求解.

3. 5.5 天；约 3.7 等星；约 4.4 等星.

说明 每个周期的图象不一定完全相同，表示视星等的坐标是由大到小.

4. 先收集每天的用电数据，然后作出用电量随时间变化的图象，根据图象制定“消峰平谷”的电价方案.

说明 建立周期变化的模型解决实际问题.

B 组

1. 略.

说明 建立周期变化的函数模型，根据模型解决实际问题.

2. 略.

说明 收集数据，建立周期变化的函数模型，根据模型提出个人意见. 然后采取上网、查阅资料或走访专业人士的形式，获取这方面的信息，以此来说明自己的结论.

复习参考题（第 69 页）

A 组

1. (1) $\left\{\beta \mid \beta=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$-\frac{7\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{9\pi}{4}$；

（2）$\left\{\beta|\beta=-\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$-\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{10}{3}\pi$；

（3）$\left\{\beta|\beta=\dfrac{12}{5}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$-\dfrac{8}{5}\pi$，$\dfrac{2}{5}\pi$，$\dfrac{12}{5}\pi$；

（4）$\{\beta|\beta=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$-2\pi$，$0$，$2\pi$.

说明 用集合表示法和符号语言写出与指定角终边相同的角的集合，并在给定范围内找出与指定的角终边相同的角.

2. 周长约 44 cm，面积约 1.1×10^2 cm².

说明 可先将角度转化为弧度，再利用弧度制下的弧长和面积公式求解.

3. （1）负； （2）正； （3）负； （4）正.

说明 将角的弧度数转化为含 π 的形式或度，再进行判断.

4. 当 φ 为第一象限角时，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\varphi=\sqrt{15}$；

当 φ 为第四象限角时，$\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\varphi=-\sqrt{15}$.

说明 先求 $\sin\varphi$ 的值，再求 $\tan\varphi$ 的值.

5. 当 x 为第一象限角时，$\tan x=2$，$\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；

当 x 为第三象限角时，$\tan x=2$，$\cos x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

说明 先求 $\tan x$ 的值，再求另外两个函数的值.

6. $\cos^4\alpha$.

说明 先将原式变形为 $\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\cos^2\alpha$，再用同角三角函数的基本关系变形.

7. （1）左边 $=2-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=$ 右边.

（2）左边 $=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\beta$

$=1=$ 右边.

说明 第（1）题可先将左右两边展开，再用同角三角函数的基本关系变形.

8. （1）$\dfrac{5}{7}$； （2）$\dfrac{3}{10}$； （3）$\dfrac{8}{5}$.

说明 第（2）题可由 $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha=9$，得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\tan\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{3}{10}$.

或 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{3}{3^2+1}=\dfrac{3}{10}$.

9. （1）0； （2）1.077 1.

说明 先根据各个角的位置比较它们的三角函数值的大小，再估计结果的符号.

10. （1）当 α 为第一象限角时，$\cos(2\pi-\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当 α 为第二象限角时，$\cos(2\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）当 α 为第一象限角时，$\tan(\alpha-7\pi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当 α 为第二象限角时，$\tan(\alpha-7\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

说明 先用诱导公式转化为 α 的三角函数，再用同角三角函数的基本关系计算.

11. （1）$\tan 1\,111°=0.601$，$\sin 378°21'=0.315$，$\cos 642.5°=0.216$；

（2）$\sin(-879°)=-0.358$，$\tan\left(-\frac{33\pi}{8}\right)=-0.414$，$\cos\left(-\frac{13\pi}{10}\right)=-0.588$；

（3）$\sin 3=0.141$，$\cos(\sin 2)=0.614$.

说明 本题的要求是先估计各三角函数值的大小，再求值验证.

12.

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

说明 熟悉各特殊角的三角函数值.

13. （1）因为 $\cos x=\sqrt{1.5}$，或 $\cos x=-\sqrt{1.5}$，而 $\sqrt{1.5}>1$，$-\sqrt{1.5}<-1$，所以原式不能成立；

（2）因为 $\sin x=\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}}$，而 $\left|\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}}\right|<1$，所以原式有可能成立.

说明 利用正弦和余弦函数的最大值和最小值性质进行判断.

14. （1）最大值为 $\sqrt{2}+\frac{1}{\pi}$，此时 x 的集合为 $\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{\pi}$，此时 x 的集合为 $\left\{x\,|\,x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

（2）最大值为 5，此时 x 的集合为 $\{x\,|\,x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；
最小值为 1，此时 x 的集合为 $\{x\,|\,x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

说明 利用正弦、余弦函数的最大值和最小值性质，研究所给函数的最大值和最小值性质.

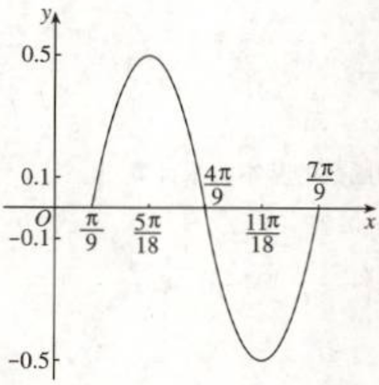
15. （1）$\left\{x\,|\,\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi\right\}$；（2）$\left\{x\,|\,\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\right\}$；

（3）$\left\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$；（4）$\left\{x\,|\,\pi\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$.

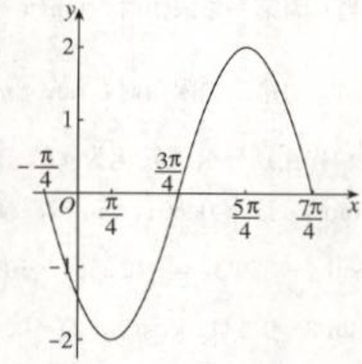
说明 利用函数图象分析.

16.

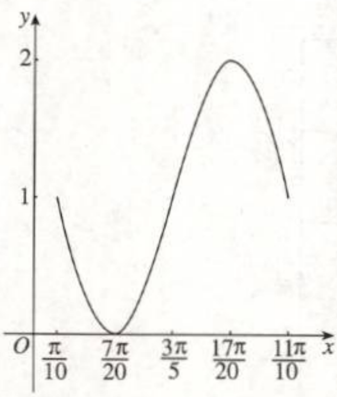
（1）



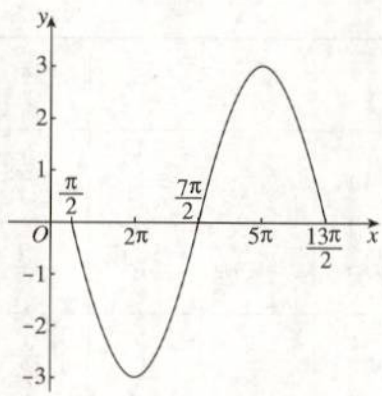
（2）



（3）



（4）

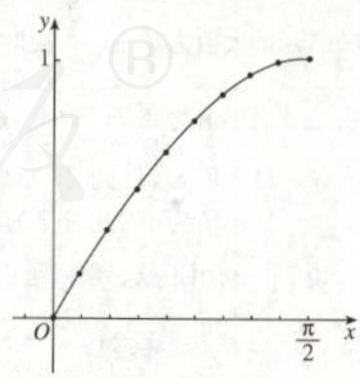


说明 可要求学生在作出图象后，用计算机或计算器验证.

17.（1）

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

（2）由 $\sin(\pi-x)=\sin x$，可知函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\pi]$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，据此可得函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$的图象；又由 $\sin(2\pi-x)=-\sin x$，可知函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象关于点$(\pi,0)$对称，据此可得出函数 $y=\sin x$，$x\in[\pi,2\pi]$的图象.



（3）先把 y 轴向右（当 $\varphi>0$ 时）或向左（当 $\varphi<0$ 时）平行移动$|\varphi|$个单位长度，再把 x 轴向下（当 $k>0$ 时）或向上（当$k<0$时）平行移动$|k|$个单位长度，最后将图象向左或向右平行移动 2π 个单位长度，并擦去$[0,2\pi]$之外的部分，便得出函数 $y=\sin(x+\varphi)+k$，$x\in[0,2\pi]$的图象.

说明 学会用不同的方法作函数图象.

18.（1）振幅是 1，周期是$\frac{2\pi}{5}$，初相是$\frac{\pi}{6}$.

把正弦曲线向左平行移动$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可以得函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{5}$倍(纵坐标不变)，就可得出函数 $y=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$的图象.

(2) 振幅是 2，周期是 12π，初相是 0.

把正弦曲线上所有点的横坐标伸长到原来的 6 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin\frac{1}{6}x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象；再把所得图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，就可得到函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{6}x\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的图象.

说明 会根据解析式求各物理量，并理解如何由正弦曲线通过变换得到正弦型函数的图象.

B组

1. (1) $\frac{3\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<(k+1)\pi$，所以$\frac{\alpha}{2}$的终边在第二或第四象限；

(2) $90°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<30°+90°+k\cdot120°$，所以$\frac{\alpha}{3}$的终边在第二、第三或第四象限；

(3) $(4k+3)\pi<2\alpha<(4k+4)\pi$，所以 2α 的终边在第三或第四象限，也可在 y 轴的负半轴上.

说明 不要求探索 α 分别为各象限角时，$\frac{\alpha}{n}$和 $n\alpha$ 的终边所在位置的规律.

2. 约 $143°$.

说明 先用弧度制下的扇形面积公式求出半径，再求出中心角的弧度数，然后将弧度数化为角度数.

3. 提示：原式$=\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}+\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

$$=\cos\alpha\left(-\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

说明 根据同角三角函数的基本关系将被开方式变形，并根据 α 的终边位置确定符号是关键.

4. (1) $\frac{5}{16}$；　(2) $\frac{10}{3}$.

说明 根据同角三角函数的基本关系将原式变形为只含 $\tan\alpha$ 的关系式.

5. 左边$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\text{右边}.$$

说明 把左边分子中的 1 变成 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 是关键.

6. 将已知条件代入左边，得

左边$=\frac{a^2}{a^2\cos^2\theta}-\frac{b^2\tan^2\theta}{b^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1.$

说明 将已知条件代入左边消去 θ 是关键.

7. 将已知条件代入左边，得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=[(\tan\theta+\sin\theta)^2-(\tan\theta-\sin\theta)^2]^2\\&=16\tan^2\theta\cdot\sin^2\theta,\end{aligned}$$

再将已知条件代入右边，得

$$\begin{aligned}\text{右边}&=16(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)\\&=16(\tan^2\theta-\sin^2\theta)\\&=16\times\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\&=16\times\frac{\sin^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\&=16\tan^2\theta\cdot\sin^2\theta,\end{aligned}$$

所以，左边＝右边.

说明 还可以利用 $\tan\theta=\dfrac{a+b}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{a-b}{2}$ 及 $(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)=\tan^2\theta\cdot\sin^2\theta$.

8. (1) $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；　(2) $\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 利用正弦、余弦函数的单调区间求所给函数的单调区间.

9. (1) 表示以原点为圆心，r 为半径的圆.

(2) 表示以 $(a,\ b)$ 为圆心，r 为半径的圆.

说明 本题只作同角三角函数关系式的应用训练，不必补充参数方程的有关知识. 另外，如果没有学习《数学 2》，也可不做此题.

III 自我检测题

一、选择题：本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项的字母填在题后的括号内.

1. 如果 $\cos(\pi+A)=-\dfrac{1}{2}$，那么 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)$ 的值是　（　　）.

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 如果角 θ 的终边经过点 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，那么 $\tan\theta$ 的值是　（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. 函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期、振幅、初相分别是　（　　）.

A. $\dfrac{\pi}{4}$，2，$\dfrac{\pi}{4}$　　B. 4π，-2，$-\dfrac{\pi}{4}$　　C. 4π，2，$\dfrac{\pi}{4}$　　D. 2π，2，$\dfrac{\pi}{4}$

4. 函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的一个单调增区间是　(　　).

A. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$　B. $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$　C. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$　D. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

5. 函数 $y=1-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的最小值、最大值分别是　(　　).

A. 最小值-1，最大值 3　B. 最小值-1，最大值 1

C. 最小值 0，最大值 3　D. 最小值 0，最大值 1

6. 如果点 $P(\sin\theta\cos\theta, 2\cos\theta)$ 位于第三象限，那么角 θ 所在的象限是　(　　).

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分．把答案填在题中的横线上．

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\sqrt{3}\sin A$，则$\angle A$ 的取值集合是________.

8. 函数 $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可以先由 $y=\cos x$ 的图象向______平移______个单位，然后把所得的图象上所有点的横坐标______为原来的______倍(纵坐标不变)而得到.

9. 化简 $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha=$______.

10. 若函数 $f(x)=2\sin\omega x(0<\omega<1)$ 在闭区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，则 ω 的值为______.

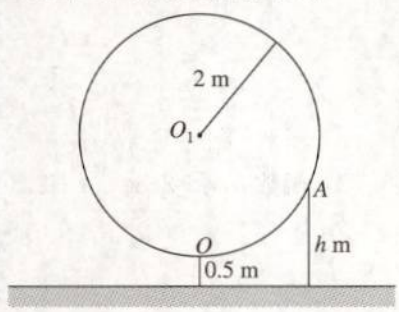
三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 17 分，共 34 分．解答应写出文字说明或演算步骤．

11. 求证：$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

12. 如图，某大风车的半径为 2 m，每 12 s 旋转一周，它的最低点 O 离地面 0.5 m．风车圆周上一点 A 从最低点 O 开始，运动 t(s)后与地面的距离为 h(m).

(1) 求函数 $h=f(t)$ 的关系式；

(2) 画出函数 $h=f(t)$ 的图象.



第 12 题

参考解答及说明

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算能力．每小题 7 分，满分 42 分.

1	2	3	4	5	6
B	D	C	A	A	B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算的能力．每小题 6 分，满分 24 分.

7. $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.　8. 左，$\frac{\pi}{3}$；缩短，$\frac{1}{3}$.　9. 1.　10. $\frac{3}{4}$.

三、解答题：每小题 17 分，满分 34 分.

11. 本小题主要考查利用同角三角函数关系式进行三角恒等变换以及运算能力.

证明：$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

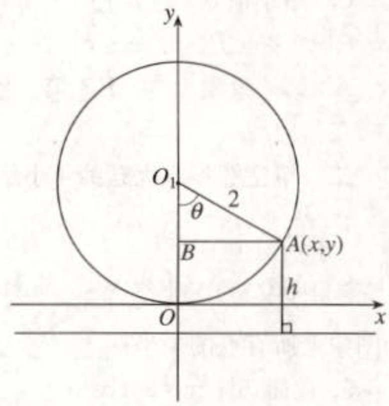
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

12. 本小题主要考查三角函数的图象和性质及恒等变换知识，以及由数到形的转化思想和作图技能；考查运算能力和解决实际问题的能力.

解：如图，以 O 为原点，过点 O 的圆的切线为 x 轴，建立直角坐标系.



设点 A 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$h=y+0.5.$$

设 $\angle OO_1A=\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{2-y}{2},$$

$$y=-2\cos\theta+2.$$

又

$$\theta=\frac{2\pi}{12}\times t,$$

即

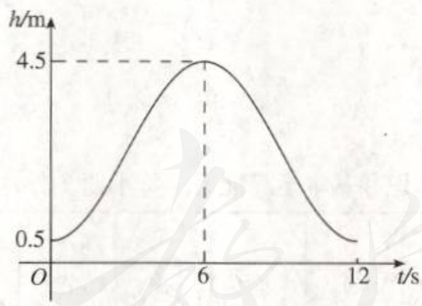
$$\theta=\frac{\pi}{6}t,$$

所以

$$y=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2,$$

$$h=f(t)=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5.$$

(2) 函数 $h=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5$ 的图象如下



Ⅳ 拓展资源

中国古代的三角学

我国古代对三角早有研究. 早在先秦时期，出了一本有名的手工艺专著《考工记》，书中记载了几种特殊角的名称，90°角叫做“矩”，45°角叫做“宣”，135°角叫做“磬折”等.

在公元前 100 多年的《周髀算经》里，已记载了平面测量的内容，例如在它的首章中，“周公曰，大哉言数，请问用矩之道．商高曰，平矩以正绳、偃矩以望高、复矩以测深、卧矩以知远．”（商高说的矩就是现在工人用的两边互相垂直的曲尺，商高说的大意是将曲尺置于不同的位置可以测目标物的高度、深度与广度．）

公元 1 世纪时的《九章算术》中有专门研究测量问题的篇章．

公元 3 世纪我国著名数学家刘徽所著的《海岛算经》中记载有“重差术”，它通过多次观察来解决不可达的高度与距离的测量．他还在计算单位圆的内接正六边形等图形的边长时，求得了某些特殊角的正弦值．

在我国古代历法书中关于根据竿的不同影长来确定季节和时令的方法的记载，实际上已构成了一份余切值表．

16 世纪，外国的三角知识传入我国，那时已有正弦、余弦、正切、余切、正割、余割及正矢、余矢等八个名称，总称八线．

17 世纪，第一部中文的平面三角学(邓玉函等编译的《大测》2 卷）和球面三角学(徐光启等编译的《测量全义》10 卷）相继问世．

欧拉与三角学

欧拉（Lēonhard Euler，1707 —1783）是瑞士数学家．近代三角学是从欧拉的《无穷分析引论》开始的．他首先研究了三角函数．这使三角学从原先静态研究三角形的解法中解脱出来，成为反映现实世界中某些运动变化的一门具有现代数学特征的学科．

是欧拉首先在直角坐标系中定义了单位圆，以函数线与半径的比值定义了三角函数，并彻底解决了三角函数在四个象限中的符号问题，同时还引进了弧度制值．而在他以前一直以线段的长作为定义的．欧拉的定义使三角学跳出只研究三角表这个圈子．欧拉对整个三角学作了分析性的研究．在这以前，每个公式仅从图中推出，大部分以叙述的方式进行表达．欧拉却从最初几个公式解析地推导出了全部三角公式，还获得了许多新的公式．欧拉用 a 、b 、c 表示三角形的三条边，用 A、B、C 表示 a、b、c 所对的角，从而使叙述得到了大大的简化．使三角学从研究三角形解法进一步转化为研究三角函数及其应用，成为一个比较完整的数学分支学科．更可贵的是他发现了著名的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

把原来人们认为互不相关的三角函数和指数函数联系起来了，为三角学增添了新的活力．

在普及教育和科研中，欧拉意识到符号的简化和规则化既有助于学生的学习，又有助于数学的发展，所以欧拉创立了许多新的符号．如用 sin、cos 等表示三角函数，用 e 表示自然对数的底，用 $f(x)$ 表示函数，用$\sum$表示求和，用 i 表示虚数单位等．圆周率 π 虽然不是欧拉首创，但却是经过欧拉的倡导才得以广泛流行．欧拉在研究级数时还引入了欧拉常数 C，这是继 e、π 之后的又一个重要的常数．

第二章 平面向量

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，有着极其丰富的实际背景．本章中，学生将了解向量丰富的实际背景，理解平面向量及其运算的意义，能用向量语言和方法表述和解决数学和物理中的一些问题，发展运算能力和解决实际问题的能力．

2. 学习目标

(1) 通过力和力的分析等实例，了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义，理解向量的几何表示．

(2) 通过实例，掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义．

(3) 通过实例，掌握向量数乘运算，并理解其几何意义，以及两个向量共线的含义．

(4) 了解向量的线性运算性质及其几何意义．

(5) 了解平面向量的基本定理及其意义．

(6) 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示．

(7) 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算．

(8) 理解用坐标表示的平面向量共线的条件．

(9) 通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的含义及其物理意义．

(10) 体会平面向量的数量积与向量投影的关系．

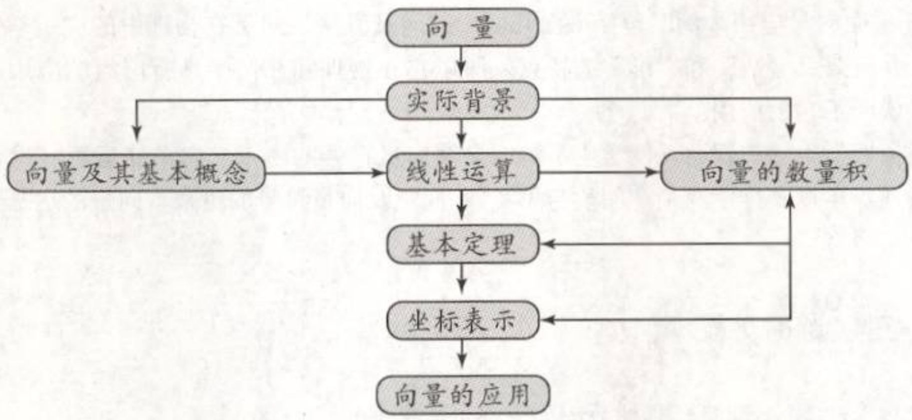
(11) 掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算．

(12) 能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系．

(13) 经历用向量方法解决某些简单的平面几何问题、力学问题与其他一些实际问题的过程，体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具，发展运算能力和解决实际问题的能力．

二、内容安排

1. 本章知识框图



2. 对知识框图的说明

向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，有深刻的几何背景，是解决几何问题的有力工具. 向量概念引入后，全等和平行（平移）、相似、垂直、勾股定理就可转化为向量的加（减）法、数乘向量、数量积等运算（运算律），从而把图形的基本性质转化为向量的运算体系.

向量数量积的概念要用到三角函数的概念，利用向量数量积可以推导第三章中两角差的余弦公式，同时在解决两条直线的平行、夹角、距离等问题中具有广泛的应用.

本章有 5 节内容：平面向量的实际背景及基本概念、向量的线性运算、平面向量的基本定理及坐标表示、平面向量的数量积、向量的应用.

“2.1 平面向量的实际背景及基本概念”包括向量的物理背景与概念、向量的几何表示、相等向量与共线向量.

教科书以位移、力等物理量为背景，抽象出既有大小、又有方向的量——向量，并说明向量与数量的区别. 然后介绍了向量的几何表示、向量的长度（模）、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等基本概念.

“2.2 平面向量的线性运算”包括向量加法运算及其几何意义、向量减法运算及其几何意义、向量数乘运算及其几何意义.

教科书先讲了向量的加法、加法的几何意义、加法运算律；再用相反向量与向量的加法定义向量的减法，把向量的减法与加法统一起来，并给出向量减法的几何意义；然后通过向量的加法引入向量的数乘运算，并给出了相应的运算律；最后介绍了两个向量共线的条件和向量线性运算的运算法则.

“2.3 平面向量的基本定理及坐标表示”包括平面向量基本定理、平面向量的正交分解及坐标表示、平面向量的坐标运算、平面向量共线的坐标表示.

平面向量基本定理是平面向量正交分解及坐标表示的基础. 教科书首先通过一个具体的例子给出平面向量基本定理，同时介绍了基底、夹角、两个向量垂直的概念；然后在平面向量基本定理的基础上，给出了平面向量的正交分解及坐标表示，向量加、减、数乘的坐标运算和向量坐标的概念，最后给出平面向量共线的坐标表示. 坐标表示使平面中的向量与它的坐标建立起了一一对应的关系，这为通过“数”的运算处理“形”的问题搭起了桥梁.

“2.4 平面向量的数量积”包括平面向量数量积的物理背景及其含义、平面向量数量积的坐标表示、模、夹角.

教科书从学生熟知的功的概念出发，引出了平面向量数量积的概念及其几何意义，接着介绍了向量数量积的性质、运算律及坐标表示. 向量数量积把向量的长度和三角函数联系了起来，这样为解决有关的几何问题提供了方便，特别能有效地解决线段的垂直问题.

“2.5 平面向量应用举例”包括平面几何中的向量方法、向量在物理中的应用举例. 由于向量来源于物理，并且兼具“数”和“形”的特点，所以它在物理和几何中具有广泛的应用. 本节通过几个具体的例子说明了它的应用.

为了拓展学生的知识面，使学生了解向量及向量符号的由来，向量的运算（运算律）与几何图形形式的关系，本章安排了两个“阅读与思考”：向量及向量符号的由来，向量的运算（运算律）与图形性质.

三、课时分配

本章教学约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 平面向量的实际背景及基本概念	2 课时
2.2 平面向量的线性运算	2 课时
2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	2 课时
2.4 平面向量的数量积	2 课时
2.5 平面向量应用举例	2 课时
小结	2 课时

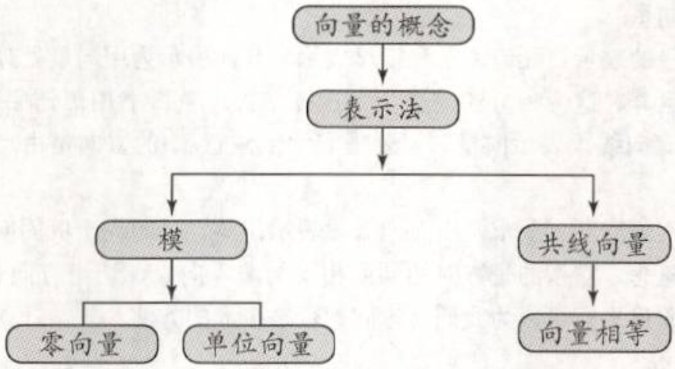
II 教科书分析

章引言及章头图介绍

章头图中，道路、路标体现了向量与位移、速度、力等物理量之间的联系，体现了向量有着丰富的实际背景，图中直角坐标系及有向线段表现了向量方法研究几何内容. 章引言说明了向量的研究对象及研究方法，揭示了向量与几何、代数之间的关系，运用向量方法可将几何性质的研究转化为向量的运算，使几何问题通过向量运算得到解决，从而拓展了几何的研究空间，它就像图中的高速公路一样，是一条解决几何问题的高速路.

2.1　平面向量的实际背景及基本概念

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：向量的概念，相等向量的概念，向量的几何表示等.
2. 难点：向量的概念和共线向量的概念.

三、编写意图与教学建议

2.1.1　向量的物理背景与概念

位移是物理中的基本量之一，也是几何研究的重要对象. 几何中常用点表示位置，研究如何由一点的位置确定另外一点的位置. 位移简明地表示了点的位置之间的相对关系，它是向量的重要的物理模型. 力是常见的物理量，重力、浮力、弹力等都是既有大小又有方向的量. 物理中还有其他力，教科书在边空中给学生提出问题，让学生举出物理学中力的其他一些实例，目的是要建立物理课中学过的位移、力及矢量等概念与向量之间的联系，以此更加自然地引入向量概念，并建立学习向量的认知基础.

在类比数量的抽象过程而引出向量的概念后，为了使学生更好地理解向量概念，教科书采用了与数量概念比较的方法，引导学生认识年龄、身高、长度、面积、体积、质量等量是“只有大小，没有方向的量”，同时通过“旁白”给出“时间、路程、功是向量吗？速度、加速度是向量吗”的思考题. 通过这样的比较，可以使学生在区分相似概念的过程中更深刻地把握向量概念.

本节的教学应当特别注意从向量的物理背景、几何背景入手，从学生熟悉的矢量概念引出向量概念，还可以要求学生自己举出一些“既有大小，又有方向的量”，从而使学生更好地把握向量的特点.

2.1.2　向量的几何表示

实数与数轴上的点是一一对应的，数量常常用数轴上的一个点表示. 教科书通过类比实数在数轴

上的表示，给出了向量的几何表示——用有向线段表示向量.

用有向线段表示向量，赋予了向量一定的几何意义. 有向线段使向量的“方向”得到了表示，那么，向量的大小又该如何表示呢？一个自然的想法是用有向线段的长度来表示. 教科书接着给出了向量的模、零向量及单位向量的概念. 教学中应当注意引导学生将数量与向量的模进行比较，数量有大小而没有方向，其大小有正、负和 0 之分，可进行运算，并可比较大小；向量的模是正数或 0，也可以比较大小. 由于方向不能比较大小，像 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 就没有意义，而 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 有意义. 这里，零向量是一个特殊的向量，它不同于数字 0. 引入零向量为我们讨论问题带来极大的方便. 例如两个向量的差运算的定义就要用到零向量.

本节介绍了两种向量的表示：几何表示和字母表示. 几何表示为用向量处理几何问题打下了基础，而字母表示则利于向量运算，这两种方法需要学生熟练掌握. 教科书用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，在手写时可用 $\vec{a}$ 表示. 用有向线段表示向量时，要提醒学生注意$\overrightarrow{AB}$的方向是由点 A 指向点 B，点 A 是向量的起点.

例 1 是一个简单的实际问题. 要求画出有向线段表示位移，目的在于巩固向量概念及其几何表示.

平行向量是重要的概念，它指的是方向相同或相反的非零向量，切记方向相反的向量也是平行向量. 规定零向量与任意向量平行可以为我们讨论问题带来很大的方便.

2.1.3 相等向量与共线向量

数学中，引进一个新的量后，首先要考虑的是如何规定它的“相等”，这是讨论这个量的基础. 如何规定“相等向量”呢？由于向量涉及大小和方向，因此把“长度相等且方向相同的向量”规定为相等向量是非常自然的. 由向量相等的定义可以知道，对于一个向量，只要不改变它的方向和大小，就可以任意平行移动. 因此，用有向线段表示向量时，可以任意选取有向线段的起点，这为用向量处理几何问题带来方便，并使平面上的向量与向量的坐标得以一一对应. 教学时可结合例题、习题说明这种思想.

相等向量是长度相等且方向相同的向量，相等向量是一类向量的集合.

任何一组平行向量都可以移动到同一直线上，因此平行向量与共线向量是等价的，这一点值得特别注意. 还要注意平行向量与平行线段的区别.

共线向量和平行向量是研究向量的基础，由此可以将一组平行向量平移（不改变大小和方向）到一条直线上，这给问题的研究带来方便. 教学中，要使学生体会两个共线向量并不一定要在一条直线上，只要两个向量平行就是共线向量，当然，在同一直线上的向量也是平行向量. 要避免向量的平行、共线与平面几何中直线、线段的平行和共线相混淆，教学中可以通过对具体例子的辨析来正确掌握概念.

教学中，可以借助信息技术，通过向量的平移来说明向量的相等与起点无关. 边空中要求学生辨析“向量就是有向线段，有向线段就是向量”的说法是否正确，目的是引导学生体会向量只与方向及模的大小有关而与起点的位置无关，但有向线段不仅与方向、长度有关，也与起点的位置有关.

例 2 是结合正六边形的一些几何性质，让学生巩固相等向量和平行向量的概念. 正六边形是边长等于半径并且对边互相平行的正多边形，它既是轴对称图形，又是中心对称图形，具有丰富的几何性质. 边空中要求学生判断$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{AF}$是否相等，是要通过长度相等方向相反的两个向量的不等，让学生从反面认识向量相等的概念.

四、补充例题

1. 如图 2-1，四边形 $ABCD$ 和四边形 $CDFE$ 均为平行四边形，

试问图中哪些向量分别与向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{DC}$相等.

解：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$.

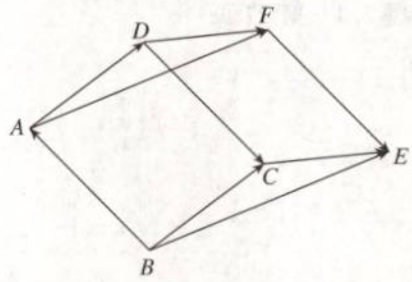


图 2-1

说明　这是为学习困难的学生提供的一个例题，它比例 2 更为简单，目的是要学生在找出相等向量的同时，能辨析出线段 BA、DC 虽然平行且长度相等，但方向相反，所以它们不相等.

2. 如图 2-2，某人想要从点 A 出发绕阴影部分走一圈，他可按图中提供的向量行走，则将这些向量顺序的排列为____________.

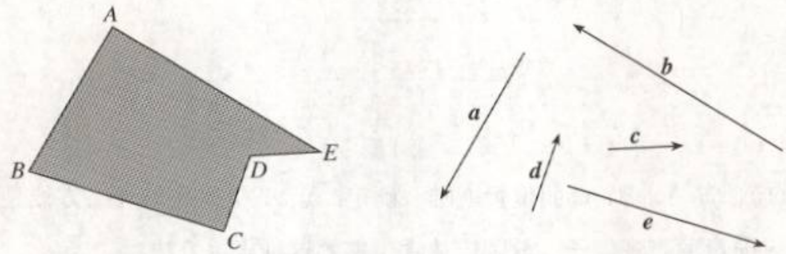


图 2-2

解：这些向量的排列顺序为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$.

说明　本题借助有一定实际背景的问题，帮助学生体会向量的大小、方向，以及相等向量.

五、习题解答

练习（第 77 页）

1. 略.

说明　通过具体的例子，让学生动手画两个方向不同、大小不等的力（向量）.

2. $|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{BA}|$.

这两个向量的长度相等，但它们不等.

说明　向量是既有大小，又有方向的量. 长度相等的两个向量未必是两个相等的向量.

3. $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{CD}|=2.5$，$|\overrightarrow{EF}|=3$，$|\overrightarrow{GH}|=2\sqrt{2}$.

说明　方格纸是学生学习几何、向量等内容的好工具. 在方格纸中，长度和角度非常容易表现. 建议在向量内容的学习中把方格纸作为重要的学具.

4. (1) 它们的终点相同；

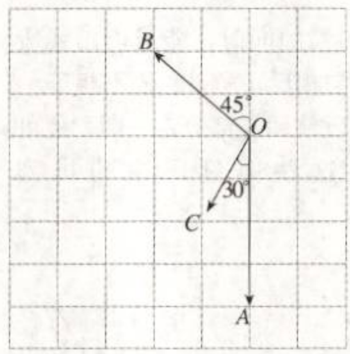
(2) 它们的终点不同.

说明　方向相同的两个向量，如果它们的起点相同，它们的终点只与长度有关.

习题 2.1（第 77 页）

A 组

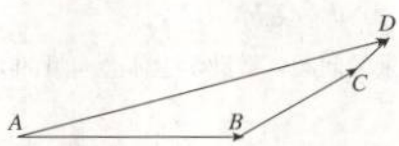
1.



第 1 题

说明　选定点 O 后，点 A，B，C 的位置就唯一确定．点 A 在点 B 的什么方位是向量中经常会涉及的问题，也是引入向量的直观例子．教师应让学生熟悉这种表示方法．

2.



第 2 题

说明　位移是物理学中的基本量．在数学中可以用有向线段表示位移，要表示出点 A、D 之间的位移，就需要表示出点 A、B，点 B、C，点 C、D 之间的位移．让学生通过实例，感受向量与生活紧密相关．

3. 与$\overrightarrow{DE}$相等的向量有：$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{FC}$；
与$\overrightarrow{EF}$相等的向量有：$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DA}$；
与$\overrightarrow{FD}$相等的向量有：$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{EB}$．

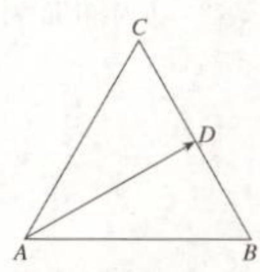
说明　主要考查三角形及其中位线的性质与向量之间的联系．向量是形与数之间的桥梁，学习向量时，一定要注意密切联系图形的几何性质，特别是相等和平行方面的性质．

4. 与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{QP}$，$\overrightarrow{SR}$；
与 $\boldsymbol{b}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{DO}$；
与 $\boldsymbol{c}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{RQ}$，$\overrightarrow{ST}$．

说明　平行四边形的对边平行且相等，对角线互相平分．有条件的也可以运用几何作图软件作图，通过平移，加深学生对相等向量的认识．

5. $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

说明　等边三角形具有许多性质，如三边相等，三边的高线、中线、角平分线三线合一等．向量是联系代数与几何的有力工具，在解题时应引导学生根据题意作图反映几何特性．



第 5 题

6. (1) ×.

说明 单位向量的长度都是 1，但方向可能不同.

(2) √.

说明 作用力和反作用力作用在不同的物体上，其大小相同，方向相反，是一对共线向量.

(3) √.

说明 方向为南偏西 60°的向量与北偏东 60°的向量方向相反，它们是共线向量.

(4) ×.

说明 x 轴，y 轴只有方向，没有大小，因而不是向量.

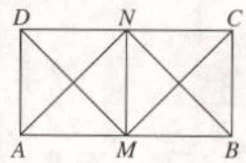
B 组

1. 海拔和高度都不是向量.

说明 海拔不是向量，它只有大小，没有方向. 讲海拔时，通常不从向量的角度去讲，海平面以上的高度用正数表示，海平面以下的高度用负数表示. 同样，温度、角度也不是向量.

2. 相等的向量共有 24 对.

模为 1 的向量有 18 对. 其中与$\overrightarrow{AM}$同向的共有 6 对，与$\overrightarrow{AM}$反向的也有 6 对；与$\overrightarrow{AD}$同向的共有 3 对，与$\overrightarrow{AD}$反向的也有 3 对；模为$\sqrt{2}$的向量共有 4 对；模为 2 的向量有 2 对.



第 2 题

说明 相等向量是大小相等、方向相同的向量. 学生应熟悉矩形的性质：有一个角是直角、对边平行. 在解题中，要确定一个分类的原则，计算各类中相等向量的对数. 这里是以向量模的大小分类，然后考虑各类中有几种不同的方向，最后研究各个方向上各有几对相等的向量.

阅读材料 向量及向量符号的由来

第一段主要介绍向量与物理学科的关系. 向量最初被应用于物理学，称为矢量. 但向量一词来源于“有向线段”，用有向线段表示向量.

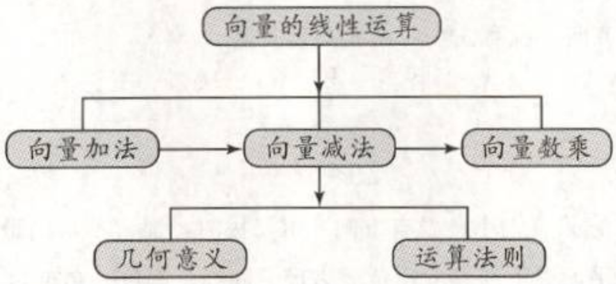
第二段主要介绍向量的表示方法. 历史上许多数学家对向量的表示作出了重要贡献.

第三段主要介绍向量是如何进入数学并得到发展的. 向量进入数学与复数的几何表示紧密相关.

本阅读材料的主要目的是让学生了解向量的历史背景及其符号的来源，从历史的角度认识向量及其符号.

2.2 平面向量的线性运算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：向量加法的运算（三角形法则、平行四边形法则）、向量的减法运算及其几何意义、向量的数乘运算及其几何意义.

2. 难点：对向量加法法则和减法的定义的理解，特别是向量减法定义的理解.

三、编写意图与教学建议

本节引言首先从数及数的运算谈起，有了数只能进行计数，只有引入了运算，数的威力才得以充分展现. 类比数的运算，向量也能够进行运算. 运算引入后，向量的工具作用才能得到充分发挥. 实际上，引入一个新的量后，考察它的运算及运算律，是数学研究中的基本问题. 教学中，教师应引导学生体会考察一个量的运算问题，最主要的是认清运算的定义及其运算律，这样才能正确、方便地实施运算.

平面向量的线性运算包括：向量加法、向量减法、向量数乘运算，以及它们之间的混合运算. 平面向量的线性运算中，加法运算是最基本、最重要的运算，减法运算、数乘向量运算都以加法运算为基础，减法运算、数乘向量运算都可以归结为加法运算.

向量的加法运算是通过类比数的加法，以位移的合成、力的合力等两个物理模型为背景引入的. 这样做的主要目的是使加法运算的学习建立在学生已有的认知基础上，同时还可以提醒学生注意，由于向量有方向，因此在进行向量运算时，就不但要考虑大小问题，而且要考虑方向问题，从而使学生体会向量运算与数的运算的联系与区别. 这样做，有利于学生更好地把握向量加法的特点.

类比数的减法（减去一个数等于加上这个数的相反数），教科书先引进相反向量的概念，然后引入向量的减法（减去一个向量，等于加上这个向量的相反向量）. 类似的，通过类比数的乘法，教科书从相同向量的连加引入向量数乘运算.

由上所述可知，与数的运算的类比，是学习向量的线性运算的重要方法.

向量的线性运算的另一个特点是它有深刻的物理背景和几何意义，因此在引进一种向量运算后，总是要考察一下它的几何意义. 正因为向量运算的几何意义，使得向量在解决几何问题时可以发挥很

好的作用.

2.2.1 向量的加法运算及其几何意义

前已指出，向量不但有大小，而且有方向，因此向量能否相加？如果能，那么两个向量相加后所得向量的大小、方向应该怎样定义？教科书以学生熟悉的位移的合成和力的合成为背景，通过“探究”引导学生进行实验，使学生形成如下感知：“既有大小，又有方向”的量可以相加，并且可以依据“三角形法则”来进行．在此基础上，教科书给出了向量加法的定义．教学中，应当让学生认真回忆物理中关于位移合成、力的合成的知识，并给以适当的操作机会，使学生形成对向量加法运算的充分感知.

向量加法运算主要是向量加法的三角形法则和平行四边形法则．教科书从几何角度具体给出了通过三角形法则或平行四边形法则作两个向量和的方法．教学中要注意向量加法的三角形法则和平行四边形法则所对应的物理模型，另外，使学生体会两种加法法则在本质上是一致的.

对任意向量与零向量相加，教科书中给出了规定.

例 1 通过具体的例子，分别用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作两个向量的和向量．在向量加法的作图中，要让学生体会作法中在平面内任取一点 O 的依据——它体现了向量起点的任意性．在向量作图时，一般都需要进行向量的平移，用平行四边形法则作图时应强调向量的起点放在一起，而用三角形法则作图则要求首尾相连.

为了使学生认识数的加法与向量加法的联系及区别，教科书安排了有关向量加法中的模大小关系的“思考”、“探究”．第 82 页“思考”的目的是让学生体会当在数轴上表示两个向量（两个共线向量）时，它们的加法与数的加法是类似的．只不过两个数相加其结果是一个数，对应于数轴上的一个点；在数轴上的两个向量相加，它们的和仍是一个向量，对应于数轴上的一条有向线段.

解决了“思考”中的问题后，稍作推广就可以解决“探究”中的问题：当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 处于什么位置时，

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$（或 $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$）.

容易知道：

(1) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，且同向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(2) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，且反向时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$（或 $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$），其中当向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度大于向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；当向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度小于向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

因为三角形中两边之和大于第三边，由向量加法的几何意义不难知道，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，恒有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，即两个向量和的长度小于两个向量长度的和．在一般情况下，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

教学中还可以借助信息技术来探究不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．通过改变 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的位置（共线且同向，共线且反向，不共线），动态演示 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的关系，可以加强学生对不等式的认识和理解.

学生知道，数的运算满足一定的运算律，运算律可以有效地简化运算，与数的运算律类比，提出“向量加法是否也有运算律？”的问题是很自然的．教科书通过“探究”引导学生自己类比数的加法交换律和结合律，通过画图验证向量加法的交换律和结合律．具体教学可以参考后面的教学案例.

例 2 结合一个实际问题说明向量加法在实际生活中的应用．这样的问题在物理中已有涉及，这里是要学生能把它抽象为向量的加法运算，体会其中应解决的问题是向量模的大小及向量的方向（与某

一方向所成角的大小）．本题的教学难点在于怎样帮助学生正确理解题意，将实际问题反映在向量作图上，从而与初中学过的解直角三角形建立联系．

2.2.2 向量减法运算及其几何意义

类比数的运算，由向量的加法运算自然想到向量的减法运算．与数的减法运算是数的加法运算的逆运算一样，向量的减法也是向量加法的逆运算．

关于向量的减法，在向量代数中，常有两种定义方法．第一种是将向量的减法定义为向量加法的逆运算，也就是，如果 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{x}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．这样，作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 时，可先在平面内任取一点 O，再作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 2-3）．

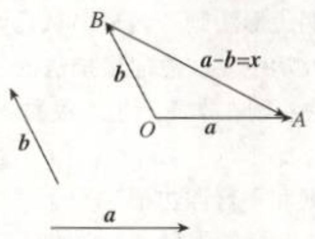


图 2-3

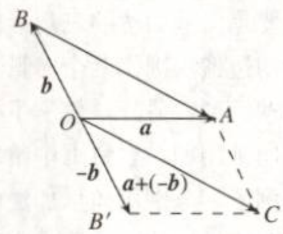


图 2-4

第二种方法是在相反向量的基础上，通过向量加法定义向量减法，即定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$．在这种定义下，作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 时，可先在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OB'}=-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$（图 2-4），则由向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，由于 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

教学实验表明，用第一种方法定义向量减法，学生较难理解定义本身，但很容易作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．用第二种方法定义，通过类比有理数的减法，学生容易接受 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，但作图比较繁．

实际上，这两种定义方法没有本质区别．由 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，可知图中四边形也是平行四边形，因此为了便于学生接受，降低理论要求，教科书先定义了相反向量，然后把 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，并探索了在此定义下作两个向量差的方法以及向量减法的几何意义．

含有向量的等式叫做向量等式，在向量等式的两边同时加上或减去一个相同的向量，仍得到向量等式，移项法则对向量等式也是适用的．对这些性质，教科书未作专门介绍，实际上通过作图很容易验证．教学时，可不专门讲这些内容，需要时能正确运用就行了．

向量减法的几何意义主要是结合平行四边形和三角形来进行讲述的，两种作图方法各有千秋，第一种作法结合向量减法的定义，第二种作法结合向量加法的平行四边形法则，直接做出从同一点出发的两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量．第二种作图方法比较简捷．

本小节中有两个例题．例 3 是作两个向量的差，教学时要结合向量减法的几何意义，注意差向量的方向，也就是箭头不要搞错了，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的箭头要指向向量 $\boldsymbol{a}$，如果指向向量 $\boldsymbol{b}$，则表示 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．例 4 是用两个向量表示几何图形中的其他向量，这是用向量证明几何问题的基础．教学中要注意这方面的训练，特别要掌握用向量表示平行四边形的四条边与两条对角线的关系．

2.2.3 向量数乘运算及其几何意义

在学生掌握向量加法的基础上，学习实数与向量的积的运算已无多大困难．教科书通过“探究”，引导学生先作出几个相同向量的和，再讨论它们的几何意义，从而得到向量数乘运算的直观感知，然后再过渡到一般的向量数乘运算的定义．教学时要强调：$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量；$\lambda\boldsymbol{a}$ 也有长度和方向，其长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向与 λ 的符号有关，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，

$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

引入向量数乘运算后，考察这种运算的运算律是一个自然的问题．与实数乘法的运算律类似，数乘向量也有“结合律”“分配律”，只是要注意其中的因子.

为了降低难度，教科书不要求对三个运算律作出证明，只要求学生会用就行了，而对于基础较好的学生可介绍证明方法.

向量等式证明的依据是相等向量的定义，即要证明等式两边的向量的模相等，且方向相同．为了证明这些运算律在任何情况下都成立，还需对各种可能的情况进行讨论．下面的证明供教师参考.

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为任意向量，λ、μ为任意实数，则有

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$; ①

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; ②

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. ③

证明：(1) 如果$\lambda=0$或$\mu=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则①式显然成立.

如果$\lambda\neq0$，$\mu\neq0$且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则根据向量数乘的定义有

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$

$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以
$$|(\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|.$$

如果λ、μ同号，则①式两边向量的方向都与$\boldsymbol{a}$同向；如果λ、μ异号，则①式两边向量的方向都与$\boldsymbol{a}$反向.

因此，向量$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$与$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$有相等的模和相同的方向，所以这两个向量相等.

(2) 如果$\lambda=0$或$\mu=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则②式显然成立.

如果$\lambda\neq0$，$\mu\neq0$且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，可分如下两种情况：

当λ、μ同号时，则$\lambda\boldsymbol{a}$和$\mu\boldsymbol{a}$同向，所以

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|.$$

即有
$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|.$$

由λ、μ同号，知②式两边向量的方向或都与$\boldsymbol{a}$同向，或都与$\boldsymbol{a}$反向，即②式两边向量的方向相同.

综上所述，②式成立.

如果λ、μ异号，当$\lambda>\mu$时，②式两边向量的方向都与$\lambda\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda<\mu$时，②式两边向量的方向都与$\mu\boldsymbol{a}$的方向相同.

还可证$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$，因此②式也成立.

(3) 当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$中至少有一个成立，或$\lambda=0$，$\lambda=1$时，③式显然成立.

当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$且$\lambda\neq0$，$\lambda\neq1$时，可分如下两种情况：

当$\lambda>0$且$\lambda\neq1$时，如图 2-5，在平面内任取一点O作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA_1}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\boldsymbol{b}$．则

$$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OB_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

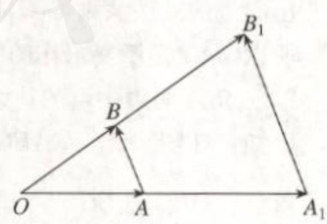


图 2-5

由作法知$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A_1B_1}$，有$\angle OAB=\angle OA_1B_1$，$|\overrightarrow{A_1B_1}|=\lambda|\overrightarrow{AB}|$.

所以$\dfrac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\lambda$.

所以$\triangle AOB\backsim\triangle A_1OB_1$.

所以$\dfrac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\lambda$，$\angle AOB=\angle A_1OB_1$.

因此 O、B、B_1 在同一条直线上，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\lambda\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OB_1}$与$\lambda\overrightarrow{OB}$的方向也相同.

所以 $$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时，由图 2-6 可类似证明 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

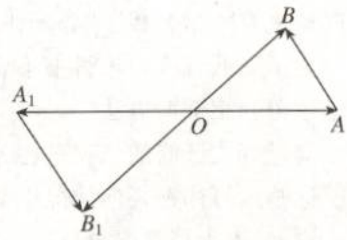


图 2-6

所以③式也成立.

例 5 要求学生熟练运用向量数乘运算的运算律. 教学中，不能让学生将本题简单地看作字母的代数运算，可以让他们在代数运算的同时说出其几何意义，使学生明确向量数乘运算的特点.

引入向量的数乘运算后，可以发现数乘向量与原向量是共线的，据此可以判断两个向量共线.

向量共线的条件实际上是由向量数乘运算推出的，它可以判断几何中三点共线和两直线平行的问题. 但向量平行与直线平行是有区别的，直线平行不包括重合的情况.

例 6 给出了利用向量共线判断三点共线的方法，这是判断三点共线常用的方法. 教学中可以先让学生作图，通过观察图形得到 A，B，C 三点共线的猜想，再将平面几何中判断三点共线的方法转化为用向量共线证明三点共线. 本题只要引导学生理清思路，具体过程可由学生自己完成. 另外，本题是一个很好的与信息技术整合的题材，教学中可以通过计算机作图，进行动态演示，揭示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 变化过程中，A，B，C 三点始终在同一条直线上的规律.

例 7 的解答要用到平行四边形的性质. 另外，用向量表示几何元素（点、线段等）是用向量方法证明几何问题的重要步骤，教学中可以给学生明确指出这一点.

向量的加法、减法及数乘向量统称为向量的线性运算. 有了向量的线性运算，平面中的点、线段（直线）就可以得到向量表示，这就为用向量法解决几何问题奠定了基础.

四、补充例题

1. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，求作向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

作法：如图 2-7，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

由向量加法的平行四边形法则得$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

由向量的减法法则得$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

所以$\overrightarrow{CD}$就是所要求作的向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

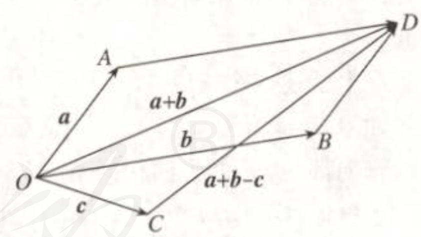


图 2-7

2. 三角形两边中点的连线平行于第三边并且等于第三边的一半.

已知：如图 2-8，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点.

求证：$DE\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}BC$.

证明：因为 D、E 分别为 AB、AC 的中点，故

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

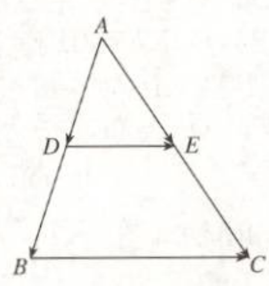


图 2-8

而 D、B 不重合，

所以 $DE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$.

3. 如图 2-9，$\square OACB$ 中，$BD=\frac{1}{3}BC$，OD 与 BA 相交于 E，求证：$BE=\frac{1}{4}BA$.

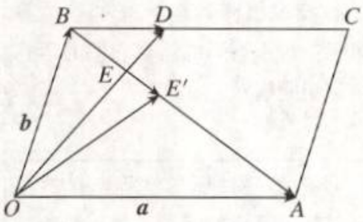


图 2-9

证明：设 E' 是线段 BA 上的一点，且 $BE'=\frac{1}{4}BA$，只要证 E、E' 重合即可.

设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

而 $\overrightarrow{BE'}=\overrightarrow{OE'}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{E'A}=\boldsymbol{a}-\overrightarrow{OE'}$，$3\,\overrightarrow{BE'}=\overrightarrow{E'A}$，

所以 $3\left(\overrightarrow{OE'}-\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{a}-\overrightarrow{OE'}$，

于是 $\overrightarrow{OE'}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=\frac{3}{4}\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)$.

而 O、E'、D 三点共线，

所以 $BE=\frac{1}{4}BA$.

五、教学设计案例

对向量加法运算律的“探究”

1. 教学任务分析

通过这个“探究”活动，学生能由数的加法运算的交换律和结合律类比向量的加法运算也具有相似的运算律，并通过作图来验证结论. 教科书在这个栏目后面对这个“探究”活动已作了回应，结合图形验证了加法的交换律，并要求学生就给出的图形验证向量加法的结合律. 在实际的教学中，教师可以让学生通过自主活动而得出结论，强化学生对知识形成过程的认识，正确表述探究得到的结果.

2. 教学重点、难点

重点：通过作图，探究向量加法的运算律.

难点：形成研究方案，构造必要的图形.

3. 教学基本流程

作图探索 → 形成方案 → 比较反思 → 验证结论

4. 教学情景设计

问　　题	设计意图	师生活动
1. 你能说出实数运算有哪些运算律吗？对于不同的运算它们的运算律都相同吗？	体会研究运算律的重要性，不同运算的运算律不尽相同，向量运算的运算律应有其自身的特点，需要研究．	学生思考回答．然后教师说明运算律的重要性和研究的必要性．
2. 定义了一种新的运算，自然要研究其运算律的问题．类比数的加法的运算律，你认为向量的加法是否也有运算律？有哪些运算律？	使学生明确研究向量加法运算律的途径．	教师提问，学生思考回答，必要时，教师可指出探究的途径应该是利用加法法则作图研究，但不要给出图形．
3. 请你探究一下向量加法的交换律是否成立．	以向量加法交换律的探究为代表，获得研究运算律的经验．	要求学生独立完成，然后小组交流结论，明确结论获得的方法．对有些学生用三角形法则证明可能有困难，教师可加以指导，请他用平行四边形法则试试．
4. 请若干同学叙述探究思路，板书结果，并相互交流．	通过学生的独立思考，相互交流，验证交换律的正确性．	使学生明确用加法法则作图验证是有效的途径，并且作图需要设计，选择理想的方法，清晰表述验证过程．请学生点评，教师也可以适当地小结．
5. 类比向量加法的交换律，你认为验证结合律的关键是什么呢？	类比向量加法交换律，由学生自己得出作图、验证的方法．	教师引导学生通过作图证明，并理解作图方法的多样性． 教师要及时发现不同的构作图形的方法，要求学生明确作图是验证的有效途径，而作图需要构造． 有的学生可能不会构造图形，可通过交流合作完成．
6. 请说出你作图的思路，画出图形．	让学生交流思路．	交流中，教师可以引导学生观察不同的构图方法．
7. 比较各种构图方法，选择一种方法验证结论．	完成作图验证．	教师观察学生的解题情况，请学生板演．
8. 阅读教科书内容，请将你的方法与书上方法作一比较．	总结探究过程．	教师最后总结一下解题过程．让学生有一个完整的认识．

5. 几点说明

（1）探究活动要切实的让学生动起来，在这过程中，教师的作用在于通过问题适时引导学生思考．本探究中两个运算律的验证，难度不同，教师可让学生在验证交换律的过程中体会解题关键．完成验证后，教师应组织学生反思探究过程，总结验证的关键．

（2）学生在验证向量加法交换律时，也可能用三角形法则，这时可以用如图 2-10 的方法，但在教学中教师要引导学生比较两个做法的异同，要求学生优化证明过程，使学生认识到选择适当的作图方法的意义．

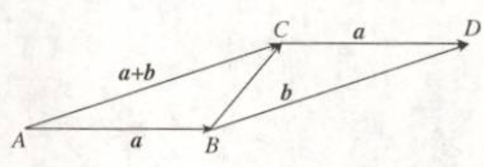


图 2-10

（3）在验证加法交换律时，也可能有学生用平行四边

形法则，图 2-11 提供了一个验证思路. 如果用几何软件作图，学生也能将思路看得很清晰.

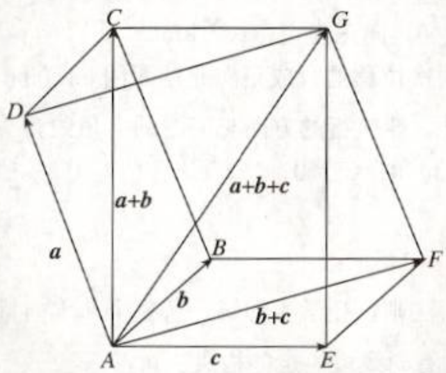


图 2-11

六、习题解答

练习（第 84 页）

1. 图略.
2. 图略.
3. (1) $\overrightarrow{DA}$；(2) $\overrightarrow{CB}$.

说明 在向量的加法中要注意向量箭头的方向.

4. (1) $\boldsymbol{c}$；(2) $\boldsymbol{f}$；(3) $\boldsymbol{f}$；(4) $\boldsymbol{g}$.

说明 通过填空，使学生得出首尾相接的几个向量的求和规律.

练习（第 87 页）

1. 图略.
2. $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BA}$.

说明 解题中可以将减法变成加法运算，如$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$，这样计算比较简便.

3. 略.

练习（第 90 页）

1. 图略.
2. $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

说明 本题可先画一个示意图，根据图形容易得出正确答案. 值得注意的是$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AB}$反向.

3. (1) $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$；(2) $\boldsymbol{b}=-\frac{7}{4}\boldsymbol{a}$；(3) $\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$；(4) $\boldsymbol{b}=\frac{8}{9}\boldsymbol{a}$.
4. (1) 共线；(2) 共线.
5. (1) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；(2) $-\frac{11}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$；(3) $2y\boldsymbol{a}$.
6. 图略.

习题 2.2（第 91 页）

A 组

1. (1) 向东走 20 km；　(2) 向东走 5 km；

（3）向东北走 $10\sqrt{2}$ km；（4）向西南走 $5\sqrt{2}$ km；

（5）向西北走 $10\sqrt{2}$ km；（6）向东南走 $10\sqrt{2}$ km.

2. 飞机飞行的路程为 700 km；两次位移的合成是向北偏西约 53°方向飞行 500 km.

3. 实际航行的速度是 $2\sqrt{17}$ km/h，船航行的方向与河岸的夹角约为 76°.

4. （1）$\mathbf{0}$；（2）$\overrightarrow{AB}$；（3）$\overrightarrow{BA}$；（4）$\mathbf{0}$；（5）$\mathbf{0}$；（6）$\overrightarrow{CB}$；（7）$\mathbf{0}$.

5. 略.

6. 不一定构成三角形.

说明　结合向量加法的三角形法则，让学生理解，若三个非零向量的和为零向量，且这三个向量不共线时，则表示这三个向量的有向线段一定能构成三角形.

7. 略.

8. （1）略；

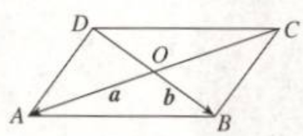
（2）当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

说明　（2）的结论可以启发学生结合向量加法的平行四边形法则解释，其实质是对角线相等的平行四边形是矩形.

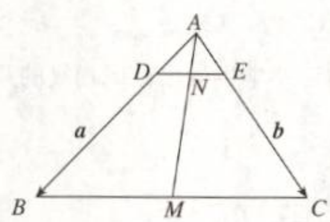
9. （1）$-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；（2）$10\boldsymbol{a}-22\boldsymbol{b}+10\boldsymbol{c}$；（3）$3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；（4）$2(x-y)\boldsymbol{b}$.

10. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2$.

11. 如图所示，$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



第 11 题



第 12 题

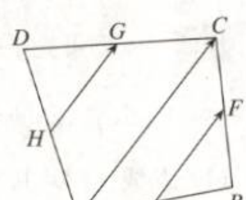
12. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{DB}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

说明　本题用到平行线分线段成比例的有关性质及平行四边形的性质.

13. 证明：在△ABC 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点，所以 $EF/\!/AC$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC$，即$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；

同理，$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

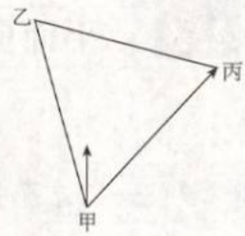


第 13 题

说明　本题主要目的是让学生应用三角形中位线定理，体会向量与几何的联系.

B 组

1. 丙地在甲地的北偏东 45°方向，距甲地 1 400 km.



第 1 题

2. 不一定相等，可以验证在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时它们不相等.
3. 证明：因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$，

而 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

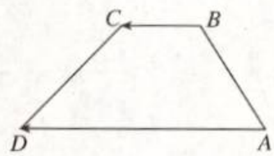
4. (1) 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，证略；

(2) 四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明：因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $AD/\!/BC$，且 $AD\neq BC$，

所以四边形 $ABCD$ 为梯形.



第 4 题 (2)

(3) 四边形 $ABCD$ 为菱形.

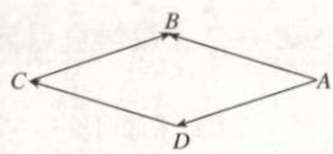
证明：因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

所以 $AB/\!/DC$，$AB=DC$.

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，

所以四边形 $ABCD$ 为菱形.



第 4 题 (3)

说明　本题是用向量的性质判断图形的几何性质.

5. (1) 通过作图可以发现四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

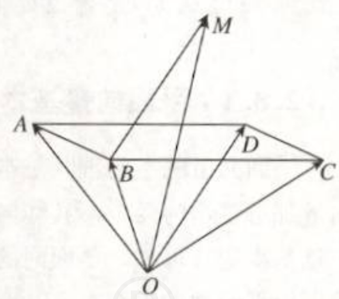
证明：因为$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$，

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$，

而$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，

所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，

所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，即 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$. 因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形.



第 5 题

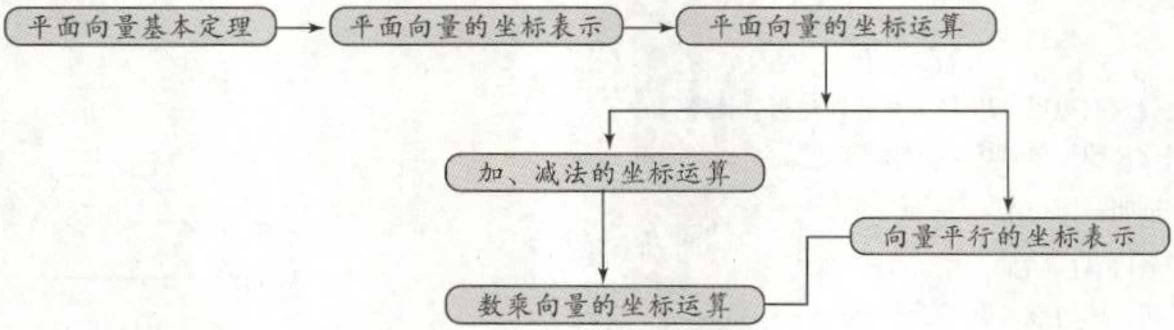
说明　本题需要先根据题意分析作图方法. 实际上，这个图中三个顶点的位置是任意的，而第四个顶点的位置是由给出的条件确定的.

所以在作图时，可先作向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$（如图），然后作$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$及$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，最后只需将$\overrightarrow{BM}$平移至$\overrightarrow{OD}$，连接 A、B、C、D 四点得出四边形 $ABCD$.

本题如能利用计算机软件作图，效果会更好，学生可以动态地观察图形，帮助思考.

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：平面向量基本定理.
2. 难点：平面向量基本定理.

三、编写意图与教学建议

2.3.1 平面向量基本定理

平面向量基本定理既是本节的重点又是本节的难点．平面向量基本定理告诉我们同一平面内任一向量都可表示为两个不共线向量的线性组合，这样，如果将平面内向量的始点放在一起，那么由平面向量基本定理可知，平面内的任意一个点都可以通过两个不共线的向量得到表示，也就是平面内的点可以由平面内的一个点及两个不共线的向量来表示．这是引进平面向量基本定理的一个原因．下面对其中的思想作一概述（不必完全告诉学生）．

用向量表示几何元素是容易的，并且很直接．选一个定点，那么，任何一个点都可以用一个向量来表示．对于一条直线 l，如果我们的兴趣只在于它的方向，那么用一个与 l 平行的（非 0）向量 $\boldsymbol{a}$ 就行了；如果想确定该直线的位置，则还要在 l 上任选一点．这样，一个点 A，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 就在原则上确定了直线 l．这是对直线 l 的一种定性刻画．如果想具体地表示 l 上的每一个点，我们需要实数 k 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘法 $k\boldsymbol{a}$．这时，l 上的任意一点 X 都可以通过点 A 和某个 $k\boldsymbol{a}$ 来表示（如图 2-12）．希望在“实际”上控制直线 l，可以看作是引入 $k\boldsymbol{a}$ 的一个原因．

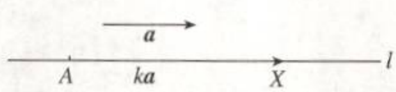


图 2-12

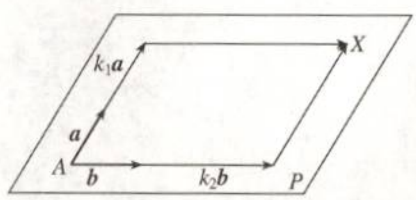


图 2-13

现在来看平面．两条相交直线确定一个平面 P，因而一个定点，两个不平行的（非 0）向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 便在“原则”上确定了平面 P．这是对平面的一种定性刻画．但在讨论几何问题时，常常涉及平面 P 上的某一点 X，为了具体地表示它，我们需要引入向量的加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．这时，平面 P 上的点 X 就可以表示为 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$(以及定点 A)，而成为可操纵的对象了（如图 2-13）．在解决几何问题时，这种表示能发挥很重要的作用．虽然向量的加法、数乘向量有非常坚实的物理背景，但当我们舍弃了这种背景而只从纯粹数学的角度来看问题的话，上述考虑可使我们看到引进相应的向量运算的理由，这可以使我们更容易接受并喜爱向量运算．

这样，一个定点，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 以及数乘向量 $k\boldsymbol{a}$ 便给出直线 l 的“坐标系”；而一个定点，两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以及数乘向量和向量加法这两个运算，就给出了平面 P 的一个“坐标系”．类似的，空间的一个“坐标系”可以由一个定点，三个不共面的向量，以及数乘向量和向量加法这两个运算来给出．在这样的“坐标系”中，几何元素及其关系不但可以得到定性刻画，而且还能定量地表示．另外，我们可以根据面临问题的具体条件，根据解决问题的需要（自由地）选择“坐标系”，并且还可以在同一个平面上选择多个“坐标系”．

教科书首先通过“思考”：给定平面内任意两个向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，让学生作出向量 $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，进而让学生思考给定平面内任意两个向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，平面内的任一向量是否都可以用形如 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的向量表示，然后通过作图给出肯定的回答（没有给出详细的证明过程）．教学中可以先让学生分析向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 可能的位置关系，区分出共线、不共线两种情况，然后作出这两种情况下的 $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$．在此基础上，再进一步思考“平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 是否都可以用形如 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的向量表示”，通过作图验证共线时不能，不共线时总能的结论．通过这样的活动，引导学生自主得出平面向量基本定理．

另外，为了使学生更好地理解平面向量的基本定理，教学中还可以按教科书给出的方法，用几何软件作图，然后改变向量的方向及模的大小，引导学生观察发现 λ_1，λ_2 取不同值时的图形特征．图 2-14 中的两种情形供大家参考．

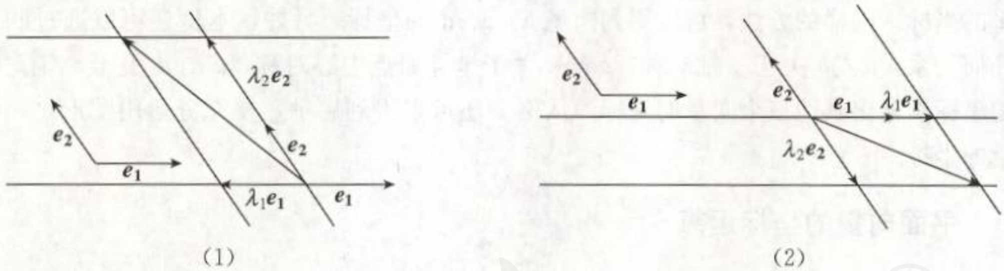


图 2-14

通过作图可以发现，平面上任一向量都可以由这个平面内两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 表示出来，这就是平面向量基本定理．平面向量基本定理为向量的坐标表示奠定了基础．

教科书的“旁白”指出，同一平面可以有许多基底，只要两个向量不共线，它们就可以作为平面内所有向量的一组基底．基底的不唯一性可以让学生通过作图来体会．

为了研究问题的方便，教科书提前引进了向量夹角的概念．两个非零向量的夹角在区间$[0°, 180°]$上．两个向量的夹角中，垂直是一种特殊情形．

例 1 是平面向量基本定理的简单运用．教科书用平行四边形法则作出了向量 $-2.5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$．另外，它还可以用三角形法则作图．

2.3.2　平面向量的正交分解及坐标表示

本节所讨论的问题是上一小节所讨论问题的深入，同时为平面向量的坐标表示奠定理论基础．教科书通过学生熟悉的力的分解问题，引出了本节的主题，由此可以使学生感受到向量的正交分解

与现实的紧密联系．任意一个向量可以分解为两个不共线的向量，实际上是平面向量基本定理的一个应用．

在不共线的两个向量中，垂直是一种重要的特殊情形．向量的正交分解是向量分解中常用且重要的一种分解，因为在平面上，如果选取互相垂直的向量作为基底时，会给问题的研究带来方便．

“思考”中，通过类比平面直角坐标系中点用有序实数对表示，提示学生思考在直角坐标系中表示一个平面向量的方法．联系平面向量基本定理和向量的正交分解，由点在直角坐标系中的表示得到启发，要在平面直角坐标系中表示一个向量，最方便的是分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 作为基底，这时，对于平面直角坐标系内的一个向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x、y，使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}. \qquad ①$$

于是，平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由 x、y 唯一确定，而有序数对 (x, y) 正好是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的坐标，这样的“巧合”使平面直角坐标系内的向量与坐标建立起一一映射，从而实现向量的“量化”表示，使我们在使用向量工具时得以实现“有效能算”的思想．

教学中，可结合图 2-15 介绍向量坐标的意义．图中 $\overrightarrow{AB}$ 是表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段，A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $x=x_2-x_1$，$y=y_2-y_1$，即 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (x_2-x_1, y_2-y_1)．由此可以知道，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标与表示该向量的有向线段的起点、终点的具体位置没有关系，只与其相对位置有关系．

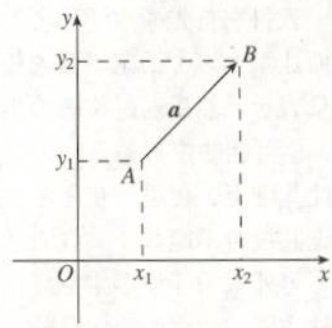


图 2-15

例 2 要求学生用基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，其关键是把 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 表示为基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 的线性组合．一种方法是把 $\boldsymbol{a}$ 正交分解，看 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴上的分向量的大小，把向量 $\boldsymbol{a}$ 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示出来，进而得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．另一种方法是把向量 $\boldsymbol{a}$ 移到坐标原点，则向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的坐标就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．同样的方法，可以得到向量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 的坐标．另外，本例还可以通过四个向量之间位置的几何关系：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 关于 y 轴对称，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 关于坐标原点中心对称，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 关于 x 轴对称等，由一个向量的坐标推导出其他三个向量的坐标．从例 2 还可以得到启示，要充分运用图形之间的几何关系，求向量的坐标．

2.3.3 平面向量的坐标运算

向量的坐标表示，实际是向量的代数表示．引入向量的坐标表示可使向量运算完全代数化，将数与形紧密结合起来，这就可以使很多几何问题的解答转化为学生熟知的数量运算．

本小节主要是运用向量线性运算的交换律、结合律、分配律，推导两个向量的和的坐标、差的坐标、以及数乘的坐标运算．推导的关键是灵活运用向量线性运算的交换律、结合律和分配律．

例 3 通过向量的减法运算，说明向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标等于表示它的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的终点 B 的坐标减去始点 A 的坐标．由此不但可以建立向量的坐标与点的坐标之间的联系，而且对本题稍作推广，就可以通过求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模而得到直角坐标系内的两点间距离公式．

例 4 是平面向量坐标运算的常规题，包括加法、减法、线性运算，目的是熟悉向量的坐标运算公式．

例 5 的目的仍然是让学生熟悉平面向量的坐标运算．教科书给出了两种解法：解法 1 利用“两个向量相等，则它们的坐标相等”，解题过程中应用了方程思想；解法 2 利用向量加法的平行四边形法则求得向量 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标，进而得到点 D 的坐标．解题过程中，关键是充分利用图形中各线段的位置关系（主要是平行关系），数形结合地思考，将顶点 D 的坐标表示为已知点的坐标．

平行四边形的性质很多，利用不同的性质就可以得到本题的不同解法，如利用平行四边形对角线互相平分就可以得到又一种解法．教学中可以对此作出适当点评．

2.3.4 平面向量共线的坐标表示

引进向量的坐标表示后，向量的线性运算可以通过坐标运算来实现，一个自然的想法是向量的某些关系，特别是向量的平行、垂直，是否也能通过坐标来研究呢？前面已经找出两个向量共线的条件（如果存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线），本节则进一步地把向量共线的条件转化为坐标表示．这种转化是比较容易的，只要将向量用坐标表示出来，再运用向量相等的条件就可以得出平面向量共线的坐标表示．要注意的是，向量的共线与向量的平行是一致的．

例 7 的解答给出了判断三点共线的一种常用方法，其实质是从同一点出发的两个向量共线，则这两个向量的三个顶点共线．这是从平面几何中判断三点共线的方法移植过来的．

例 8 实际上给出了线段的中点坐标公式，线段的三等分点坐标公式．在此基础上，教科书通过“探究”，要求学生推导线段的定比分点公式．利用向量共线的坐标表示求线段的定比分点坐标公式，只要通过简单的向量线性运算就可实现，这是向量的坐标运算所带来的优越性．

在解决本例中的（2）时，要注意三等分点有两种可能的位置．教学时可以先让学生自己思考，出现不全面的解答后再引导他们讨论和补充．

下面给出“探究”的参考解答．

如图 2-16，设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，$P(x,\ y)$．那么

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}),$$

于是 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}$，

即 $(1+\lambda)(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+\lambda(x_2,\ y_2)$，

于是，点 P 的坐标 $(x,\ y)=\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$．

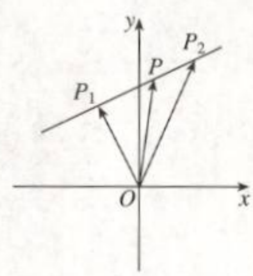


图 2-16

四、补充例题

已知圆 C：$(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 及点 $A(1,\ 1)$，M 为圆 C 上的任意一点，点 N 在线段 NA 的延长线上，且 $MA=2AN$，求点 N 的轨迹方程．

解：设 $M(x_0,\ y_0)$，$N(x,\ y)$，

由 $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AN}$，得 $(x_0-1,\ y_0-1)=2(1-x,\ 1-y)$．

所以 $\begin{cases} x_0=-2x+3, \\ y_0=-2y+3. \end{cases}$

代入方程 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$，整理得 $x^2+y^2=1$．

所以，所求的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$．

说明 本题是向量在解析几何中的应用．用向量计算图形放缩问题比较简便．在解题过程中，学生可以体会向量运算的威力．

五、教学设计案例

平面向量的坐标表示的应用（片段）

1. 教学任务分析

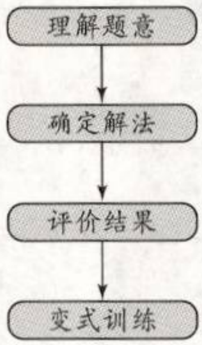
例 5 是平面向量坐标运算的一个应用，这个例题的教学有助于加强点的坐标与向量间的联系，加深理解向量坐标的意义，同时也使学生对怎样运用向量坐标进行运算有一个基本的了解．解题过程中，数形结合思想可以得到训练，向量与代数、几何的联系也能得到加强．

2. 教学重点、难点

重点：理解向量坐标的意义，运用向量的坐标运算解题，加强数形结合思想．

难点：正确求解，评价各种不同的解题方法．

3. 教学基本流程



4. 教学情景设计

问　　题	设计意图	师生活动
1. 板书例 5．请同学们根据已知条件作平行四边形，思考用哪些向量的运算可以求得点 D 的坐标．	本题的解题方法比较多，请学生根据所学的知识自己设计解题方法．作图的目的是希望学生根据图形特征建立数式与图形间的联系．	教师鼓励学生用不同的方法解题．学生作图，思考与点 D 的坐标有关的向量之间的关系．
2. 你能说说自己的解题思路吗？	通过交流，加深对问题的认识，不同思路之间得到相互启发．	教师可以指导学生比较各种解题思路的异同．这里只要求学生谈解题思路，不必书写完整的解题过程．
3. 选择不同思路的学生板书解题过程，其他学生各自解题，完成后与教科书上的解答进行比较．	写出规范化的解答过程，便于交流．	学生板书或自行解答，教师巡视．
4. 你能说说各种解法的特点吗？不同解法中体现了哪些数学思想？	对解题方法进行比较，总结思想方法．	可请学生点评，教师也可以适当地小结．本题的解法只有两类，解法 1 用方程思想，解法 2 直接通过向量加法运算．
5. “变式训练”．	让学生熟练向量的坐标运算．	可以引导学生通过改变本题的条件，进行变式训练．

5. 几点说明

(1) 解题中要使学生明确坐标向量的意义，要求点 D 的坐标应该求$\overrightarrow{OD}$的坐标，体会点与向量的一一对应关系．必要时，教师也可以让学生求$\overrightarrow{DC}$的坐标，并在直角坐标系内作出这一坐标所对应的向量．

(2) 在评价结果的过程中，要使学生明确解题的方法可分两类：直接用向量的加（减）法得出$\overrightarrow{OD}$的坐标；通过设点 D 的坐标，再利用向量等式列方程求解．实际上，利用平行四边形的不同性质，就可以得到求$\overrightarrow{OD}$坐标的不同方法，如利用平行四边形的对角线互相平分也能求解．

(3) 在“变式训练”中，教师可这样改变条件：在原题的条件中，将点 C 的坐标去掉，加上平行四边形对角线的交点坐标为$\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$，求解点 C 及 D 的坐标．

六、习题解答

练习（第 100 页）

1. (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\ 6)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-7,\ 2)$；

   (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\ 11)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(7,\ -5)$；

   (3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,\ 0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,\ 6)$；

   (4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\ 4)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,\ -4)$．

2. $-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(-6,\ -8)$，$4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(12,\ 5)$．

3. (1) $\overrightarrow{AB}=(3,\ 4)$，$\overrightarrow{BA}=(-3,\ -4)$；

   (2) $\overrightarrow{AB}=(9,\ -1)$，$\overrightarrow{BA}=(-9,\ 1)$；

   (3) $\overrightarrow{AB}=(0,\ 2)$，$\overrightarrow{BA}=(0,\ -2)$；

   (4) $\overrightarrow{AB}=(5,\ 0)$，$\overrightarrow{BA}=(-5,\ 0)$．

4. $AB /\!/ CD$．

   证明：$\overrightarrow{AB}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\ -1)$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$．所以 $AB /\!/ CD$．

   说明 本题有两个要求：一是判断，二是证明．通过作图发现规律，提出猜想，然后再证明结论，是一个让学生经历数学化的过程．

5. (1) $(3,\ 2)$；(2) $(1,\ 4)$；(3) $(4,\ -5)$．

6. $\left(\frac{10}{3},\ 1\right)$或$\left(\frac{14}{3},\ -1\right)$．

7. 解：设 $P(x,\ y)$，由点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$，得

$$(x-2,\ y-3)=\frac{3}{2}(x-4,\ y+3),$$

即

$$\begin{cases}2x-4=3x-12,\\ 2y-6=3y+9.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=8,\\ y=-15.\end{cases}$

所以点 P 的坐标为$(8,\ -15)$．

说明 本题希望通过向量方法求解，培养学生应用向量的意识．

习题 2.3（第 101 页）

A 组

1. (1) $(-2, 1)$；(2) $(0, 8)$；(3) $(1, 2)$.

说明　解题时可设 $B(x, y)$，利用向量坐标的定义解题.

2. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8, 0)$.

3. 解法一：$\overrightarrow{OA}=(-1, -2)$，$\overrightarrow{BC}=(5-3, 6-(-1))=(2, 7)$，

而 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=(1, 5)$.

所以点 D 的坐标为$(1, 5)$.

解法二：设 $D(x, y)$，则

$$\overrightarrow{AD}=(x-(-1), y-(-2))=(x+1, y+2),$$
$$\overrightarrow{BC}=(5-3, 6-(-1))=(2, 7).$$

由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$可得

$$\begin{cases}x+1=2,\\ y+2=7.\end{cases}$$

解得点 D 的坐标为$(1, 5)$.

说明　本题也可利用平行四边形的对角线互相平分，用 A、C 和 B、D 的中点重合来解题. 教师可启发学生通过多种途径解题.

4. 解：$\overrightarrow{OA}=(1, 1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2, 4)$.

$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-1, 2)$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}=(-4, 8)$，$\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1, -2)$.

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(0, 3)$，所以，点 C 的坐标为$(0, 3)$；

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-3, 9)$，所以，点 D 的坐标为$(-3, 9)$；

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=(2, -1)$，所以，点 E 的坐标为$(2, -1)$.

说明　要使学生理解向量的坐标的意义，能利用向量的坐标确定一个点的坐标.

5. 由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线得$(2, 3)=\lambda(x, -6)$，

所以$\frac{2}{x}=\frac{3}{-6}$，解得 $x=-4$.

说明　要让学生通过此类习题的练习，体会两个共线向量的坐标之间的关系，理解为什么可以通过比例来求解. 这也是培养学生归纳能力的一个途径.

6. $\overrightarrow{AB}=(4, 4)$，$\overrightarrow{CD}=(-8, -8)$，$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线.

7. $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}=(2, 4)$，所以点 A' 的坐标为$(2, 4)$；

$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}=(-3, 9)$，所以点 B' 的坐标为$(-3, 9)$；

向量$\overrightarrow{A'B'}=(-5, 5)$.

B 组

1. $\overrightarrow{OA}=(1, 2)$，$\overrightarrow{AB}=(3, 3)$.

当 $t=1$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=(4, 5)$，所以 $P(4, 5)$；

当 $t=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1, 2)+\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$，所以 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$；

当 $t=-2$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{AB}=(1, 2)-(6, 6)=(-5, -4)$，所以 $P(-5, -4)$；

当 $t=2$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)+(6,\ 6)=(7,\ 8)$，所以 $P(7,\ 8)$.

2. (1) 因为$\overrightarrow{AB}=(-4,\ -6)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 1.5)$，所以$\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{AC}$，所以 A、B、C 三点共线；

   (2) 因为$\overrightarrow{PQ}=(1.5,\ -2)$，$\overrightarrow{PR}=(6,\ -8)$，所以$\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$，所以 P、Q、R 三点共线；

   (3) 因为$\overrightarrow{EF}=(-8,\ -4)$，$\overrightarrow{EG}=(-1,\ -0.5)$，所以$\overrightarrow{EF}=8\overrightarrow{EG}$，所以 E、F、G 三点共线.

3. **证明**：假设 $\lambda_1\neq 0$，则由 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{e}_1=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{e}_2$.

   所以 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是共线向量，与已知 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内的一组基底矛盾.

   因此假设错误，$\lambda_1=0$.

   同理 $\lambda_2=0$.

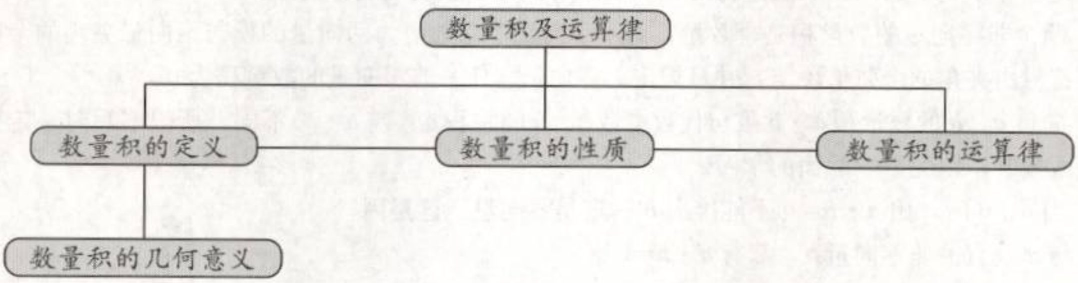
   综上，$\lambda_1=\lambda_2=0$.

4. (1) $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$.

   (2) 对于任意向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，$x$，$y$ 都是唯一确定的，所以本题中向量的坐标的规定合理.

2.4 平面向量的数量积

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

1. 重点：平面向量数量积的概念，用平面向量的数量积表示向量的模及向量的夹角.
2. 难点：平面向量数量积的定义及运算律的理解，平面向量数量积的应用.

三、编写意图与教学建议

前面已经看到，向量的线性运算有非常明确的几何意义，因此利用向量运算可以讨论一些几何元素的位置关系. 既然向量可以进行加减运算，一个自然的想法是两个向量能否做乘法运算呢？如果能，运算结果应该是什么呢？另外，距离和角是刻画几何元素（点、线、面）之间度量关系的基本量. 我们需要一个向量运算来反映向量的长度和两个向量间夹角的关系. 众所周知，向量概念的引入与物理学的研究密切相关，物理学家很早就知道，如果一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$（如图 2-17），那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

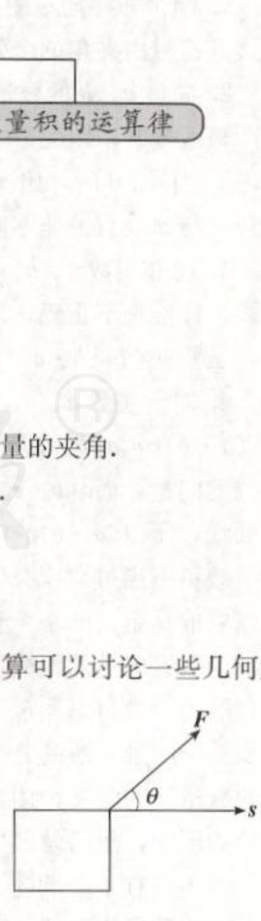


图 2-17

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta.$$

功 W 是一个数量，其中既涉及“长度”，也涉及“角”，而且只与向量 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{s}$ 有关．熟悉的数的运算启发我们把上式解释为两个向量的运算，从而引进向量的数量积的定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta.$$

这是一个好定义，它不仅满足人们熟悉的运算律（如交换律、分配律等），而且还可以用它来更加简洁地表述几何中的许多结果．例如：

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$(长度，由此可导出两点间距离公式)；

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$(直线垂直条件)，等等．

向量的数量积是一种新的向量运算，与向量的加法、减法、数乘运算一样，它也有明显的物理意义、几何意义．但与向量的线性运算不同的是，它的运算结果不是向量而是数量．

2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其意义

教科书以物体受力做功为背景，引出向量数量积的概念．功是一个标量，它用力和位移两个向量来定义．反映在数学上就是向量的数量积．

这里把 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影，由于 θ 的范围在 $[0,\pi]$，因此“投影”有正、负和 0 之分．教学中，可以结合“探究”，让学生用平面向量的数量积定义，从数与形两个角度进行探索．

向量的数量积是过去学习中没有遇到过的一种新的乘法，与数的乘法既有区别又有联系．教学中可以通过引导学生对这两种乘法进行对比．经过对比使学生明确以下几点：

1. 两个非零向量的数量积是个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定，并且规定，零向量与任一非零向量的数量积为 0．

2. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 虽与代数中数 a、b 的乘积 ab(或 $a\cdot b$)不同，所以书写时一定要把它们严格区分开，以免影响后面的学习．

3. 当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能推出 $\boldsymbol{b}$ 一定是零向量．这是因为任一与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

4. 已知实数 a、b、$c(b\neq 0)$，则 $ab=bc\Rightarrow a=c$．但对向量的数量积，该推理不正确，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$．由图 2-18 很容易看出，虽然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$．

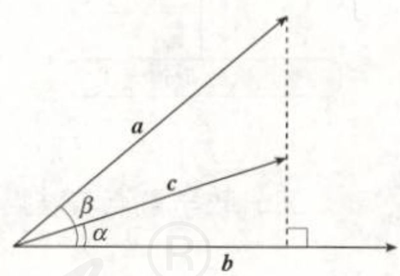


图 2-18

5. 对于实数 a、b、c 有 $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$；但对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立．这是因为 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 表示一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定共线，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立．

教科书通过“探究”（第 117 页），要求学生自己利用向量的数量积定义推导有关结论．这些结论可以看成是定义的一个直接推论，教学中应当让学生独立完成．

与引进向量的线性运算时的想法一致，引进向量的数量积以后，考察一下这种运算的运算律是非常自然的．教科书通过“探究”，让学生探索相应的“交换律”、“结合律”及“分配律”．其中向量数量积关于向量加法的分配律是特别重要的，教科书给出了详细证明．这一运算律的证明，只要根据向量的数量积的定义，用几何方法将有关量表示出来就可以得到．教学中应当先让学生独立完成三个运算律的证明，然后教师作适当点评．

本小节有 4 个例题，它们都是为了巩固对向量数量积的定义及其运算律的理解而设置的．在例 2 中，应用数量积的“分配律”推导出了 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$，这个结

论与代数中的结论类似．解答例 4 的关键是用向量的数量积把向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直用运算的形式表示出来，其中所用的基本思想是向量问题“实数化”．这里实际上就是用向量表示平面上的两条直线，然后将它们的垂直关系的讨论转化成为向量的运算（需要用向量数量积的运算律）．

2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

有了平面向量的坐标表示以及坐标运算的经验，在引进平面向量的数量积后，自然要考虑它的坐标表示问题．另一方面，由于平面向量数量积涉及了向量的模、夹角，因此在实现向量数量积的坐标表示后，向量的模、夹角也都可以与向量的坐标联系起来．

把向量的数量积与两向量的坐标运算联系起来，可以得到如下重要结论：

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2; \qquad ①$$

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2={x_1}^2+{y_1}^2; \qquad ②$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}; \qquad ③$$

特别地，设 A、B 两点的坐标分别为$(x_A,\ y_A)$，$(x_B,\ y_B)$，则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}, \qquad ④$$

这就是平面上两点间的距离公式；

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}; \qquad ⑤$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0. \qquad ⑥$$

这些结论都可以容易地从平面向量数量积的定义以及向量的坐标表示中推导出来．

本节有两个例题．例 5 是直接用两个向量垂直时它们的坐标之间的关系解题．教学中可引导学生通过作图发现三角形中有一个直角，然后用向量的方法证明．本题的“旁白”指出，我们经常用向量的数量积是否为零来判断垂直问题，这是通过代数运算证明几何关系思想的运用．

四、补充例题

设 I 为$\triangle ABC$ 的内心，$AB=AC=5$，$BC=6$，$\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$，求 m 和 n 的值．

解：如图 2-19，建立坐标系．由题意知

$A(0,\ 4)$，$B(-3,\ 0)$，$C(3,\ 0)$．

因为 I 为$\triangle ABC$ 的内心，$AB=AC$，所以点 I 在 y 轴上，设其坐标为 $I(0,\ k)$．

又$\overrightarrow{AB}=(-3,\ -4)$，$\overrightarrow{BC}=(6,\ 0)$，

因为点 I 在$\angle ABC$ 的平分线上，所以$\overrightarrow{BI}$与$\overrightarrow{BA}$及$\overrightarrow{BC}$的单位向量的和向量共线．设这个和向量为$\boldsymbol{u}$，

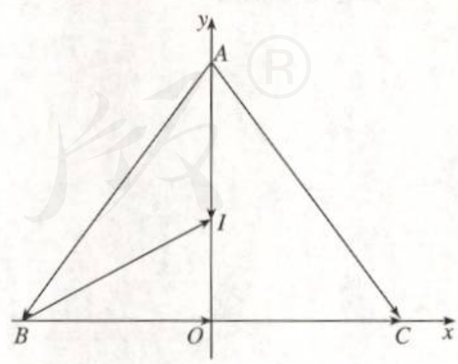


图 2-19

则$\boldsymbol{u}=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)+(1,\ 0)=\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$．

$\boldsymbol{u}$的单位向量 $\boldsymbol{u}_0=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$，它与$\overrightarrow{BI}$的单位向量相等，

$\overrightarrow{BI}=(3,\ k)$，由此得方程

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{9+k^2}}.$$

解方程得 $k=\frac{3}{2}$（另一负根不合题意，舍去）.

所以，$\overrightarrow{AI}=\left(0,\ \frac{3}{2}-4\right)=\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$.

又 $\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$，

故 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)=m(-3,\ -4)+n(6,\ 0)$，即

$$\begin{cases}-3m+6n=0, \\ -4m=-\frac{5}{2}.\end{cases}$$

解得 $m=\frac{5}{8}$，$n=\frac{5}{16}$.

五、教学设计案例

平面向量数量积的物理背景及其含义

1. 教学任务分析

前面已学了向量的概念及向量的线性运算，这里引入一种新的向量运算——向量数量积. 教科书以物体受力作功为背景引入向量数量积的概念，既使向量数量积运算与学生已有知识建立了联系，又使学生看到向量数量积与向量模的大小及夹角有关，同时与前面的向量运算不同，其计算结果不是向量而是数量.

在定义了数量积的概念后，进一步探究了两个向量的夹角对数量积符号的影响；两个向量的位置与数量积之间的关系；并“探究”研究了运算律.

2. 教学重点、难点

重点：平面向量数量积的概念，用平面向量的数量积表示向量的模及向量的夹角.

难点：平面向量数量积的定义及运算律的理解，平面向量数量积的应用.

3. 教学基本流程

4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 回忆一下物理中“功”的计算，功的大小与哪些量有关？结合向量的学习你有什么想法？	认识向量的数量积的实际背景，为引出数量积运算作铺垫.	教师引导学生认识功这个物理量所涉及的物理量，注意引导学生从“向量相乘”的角度进行分析.
2. 定义向量数量积运算. 定义中涉及哪些量？它们有怎样的关系？运算结果是数量还是向量？	使学生在形式上认识数量积的定义.	教师引导学生认清向量数量积运算定义中既涉及向量模的大小，又涉及向量的交角，运算结果是数量.
3. 你能确定两个非零向量的数量积的值何时为正，何时为负吗？它能等于零吗？	引导学生从细节上进一步理解向量数量积的定义.	教师可在学生回答的基础上进一步归纳夹角对投影的正、负情况的影响，加深学生对投影的认识. 另外，从定义可以直接推出当两个非零向量的夹角为90°时，数量积为0.
4. 两个向量的夹角决定了它们的数量积的符号. 那么，它们共线或垂直时，数量积有什么特殊性呢？	对两个向量的特殊位置关系（垂直、共线）下的数量积进行研究，从细节上认识定义.	教师引导学生自主研究，提醒学生要有序地思考（夹角从0°～180°有序变化），然后得出所有关系.
5. 例1.	通过计算巩固对定义的理解.	由学生独立计算完成. 教师可以进一步引导学生对$\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|$和$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$的大小关系进行一般的研究.
6. 阅读教科书的内容，并对本节内容及研究方法作一小结.	培养学生的阅读和及时总结的习惯.	学生自主阅读、总结，并发表自己的看法，教师可对学生进行点拨，指出对学习过程反思的重要性.
7. 对一种运算的研究自然会涉及运算律，回忆过去研究过的运算律，向量的积应有怎样的运算律.	要求学生通过对过去所学过的运算律回顾，类比得出数量积的运算律，体会不同运算的运算律不尽相同，需要研究.	可让学生自己写运算律，可能学生的答案有遗漏或错误，教师可以此强调运算律学习的重要性.
8. 你能证明向量数量积的运算律吗？	主要是利用定义证明“探究”中的（1），（2）两条运算律.	教师应强调运用定义证明的重要性，（3）的证明学生可能有困难，教师可根据学生的情况加以指导.
9. 例2、例3的教学	要学生体会解题中运算律的作用，比较向量运算与数运算的异同.	教师可将例题内容与代数运算进行比较.
10. 例4的教学.	学会利用数量积来解决垂直问题，体会算法带来的优越性.	让学生体会用数量积将几何问题转化为方程求解. 体现向量的工具性.
11. 课堂小结.	对知识内容和学习过程作一个回顾总结.	可让学生讨论总结，教师进行点评补充.

5. 几点说明

1. 本节内容主要是概念法则的学习，不要让学生的学习变成机械的记忆，要充分利用“功”这个物理概念，使教学贴近学生的认知，使学习变得富有意义.

2. 要使学生体会力和位移是两个向量，而得到的功是一个数，功的大小与力、位移的大小及夹角有关，即与向量的模的大小及夹角有关，为后面让学生体会数量积的定义及它的适用范围作一个充分的准备.

3. 在这一节的教学中，教材从具体的功的概念出发引出向量的数量积，通过思考探究让学生理解概念，研究特殊情形（共线、垂直）下的数量积，这反映了从特殊到一般，再由一般到特殊的一种认知规律，在弄清了这一运算后很自然地要研究这种运算的运算律，然后是结合概念运算律解决问题要使学生体会概念法则的学习过程，反思怎样进行学习.

4. 在运算律的研究中学生很可能得出 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，教师可通过学生的讨论纠错来理解不同的运算具有不同的运算律，看到数学的法则与法则间的相互联系与区别，体会法则学习研究的重要性.

5. 运算律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明的关键是要引导学生得出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影等于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影和. 为了说明这一点，可先证明 $\boldsymbol{c}$ 是单位向量，然后根据数量积的意义将问题引到投影上来. 这里再给出一个证明方案. 如图 2-20，关键在于证明有向线段 $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$，由图容易得出 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{B_1C_1}|$，利用这一等式学生能方便的证明结论. 在这个运算律的证明中难点是构造图形，教师在教学中可以帮助学生共同完成.

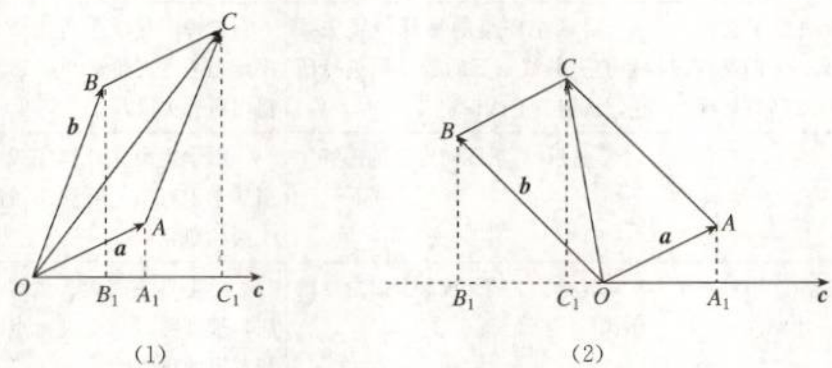


图 2-20

6. 教科书中的习题的处理，可根据学生的具体情况，灵活掌握，可以穿插在内容中，也可以在讲完内容后一并处理.

7. 课堂小结不仅要强调概念法则的理解与掌握，同时要使学生体会整个内容的研究学习过程，要使学生明白为什么要学这些内容，学了这些内容后可以做什么，我们的研究过程是怎样的，这对以后的学习有什么指导意义.

六、习题解答

练习（第 106 页）

1. $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=24$.
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时，$\triangle ABC$ 为钝角三角形；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形.
3. 投影分别为 $3\sqrt{2}$，0，$-3\sqrt{2}$. 图略.

练习（第 107 页）

1. $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-7$.
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-7$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=49$.
3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{74}$，$\theta\approx 88^\circ$.

习题 2.4（第 108 页）

A 组

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6\sqrt{3}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=25-12\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$.

2. $\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角为 120°，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-20$.

3. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{23}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{35}$.

4. 证法一：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

(1) 当 $\lambda=0$ 时，等式显然成立；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 θ，所以

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

所以，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 $180°-\theta$，则

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(180°-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos(180°-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

所以，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

综上所述，等式成立.

证法二：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，那么

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(x_1,\ y_1)\cdot(\lambda x_2,\ \lambda y_2)=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2.$$

所以$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

5. (1) 直角三角形，$\angle B$ 为直角.

证明：$\overrightarrow{BA}=(-6,\ -6)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,\ 2)$，由$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，得 $BC\perp BA$，$\angle B$ 为直角，$\triangle ABC$ 为直角三角形；

(2) 直角三角形，$\angle A$ 为直角.

证明：$\overrightarrow{AB}=(21,\ 7)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，同 (1) 可得结论；

(3) 直角三角形，$\angle B$ 为直角.

证明：$\overrightarrow{BA}=(-3,\ 3)$，$\overrightarrow{BC}=(5,\ 5)$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，同 (1) 可得结论 .

6. $\theta=135°$.

7. $\theta=120°$.

$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=61$，于是可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\theta=120°$.

8. $\cos\theta=\dfrac{23}{40}$，$\theta=55°$.

9. 证明：因为$\overrightarrow{AB}=(4,\ -2)$，$\overrightarrow{BC}=(3,\ 6)$，$\overrightarrow{DC}=(4,\ -2)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

所以 A，B，C，D 为顶点的四边形是矩形.

10. 解：设 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ x=\dfrac{y}{2}.\end{cases}\ \text{解得}\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\\ y=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\end{cases}\ \text{或}\begin{cases}x=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\\ y=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$或 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

说明 在解方程的过程中，要注意 x 与 y 同号.

11. 解：设与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}=(x,\ y)$，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\4x+2y=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{5},\\y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{5}}{5},\\y=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$$

$\boldsymbol{e}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，或 $\boldsymbol{e}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

说明 方程 $4x+2y=0$ 中隐含了条件：x 与 y 异号.

B 组

1. 证法一：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

证法二：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,\ y_3)$.

先证$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x_1x_3+y_1y_3$.

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 得

$$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_3+y_1y_3,$$

即

$$x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)=0.$$

而 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(x_2-x_3,\ y_2-y_3)$，

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0.$$

再证 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

由 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$ 得

$$x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)=0,$$

即

$$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_3+y_1y_3,$$

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

说明 这里给出了两种不同的证明方法，证法一是利用向量数量积的运算律进行证明，而证法二是利用向量的坐标运算进行证明. 实际上，学生学习了向量的坐标运算后，会遇到是否需要选用坐标进行证明的问题，教师在教学中需要对不同的问题加以分析引导，让学生体会两种不同方法的特点和方法.

2. $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

说明 本题是为后面章节中两角差的余弦公式的学习作准备，同时也让学生体会向量在三角中的运用.

3. **证明**：构造向量 $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{v}=(c,\ d)$.

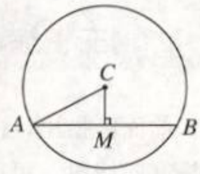
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$(其中 θ 为向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的夹角).

所以 $ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta$，

$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\cos^2\theta\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

说明　不等式中等号成立的条件是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 同向.

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值只与弦 AB 的长有关，与圆的半径无关.



第 4 题

证明：取 AB 的中点 M，连接 CM，则 $CM\perp AB$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC$，

而 $\cos\angle BAC=\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|}$，

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2.$$

5. (1) 勾股定理：$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则$|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$.

证明：因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，

所以$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{CB}^2-2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}^2$.

由$\angle C=90°$，有 $CA\perp CB$，于是$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

所以$|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$.

(2) 菱形 $ABCD$ 中，求证：$AC\perp BD$.

证明：因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2$.

因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=AD$，所以$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2=0$.

因此$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，所以 $AC\perp BD$.

(3) 长方形 $ABCD$ 中，求证：$AC=BD$.

证明：因为 $ABCD$ 是长方形，所以 $AB\perp AD$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

所以$\overrightarrow{AB}^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$.

所以$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2$.

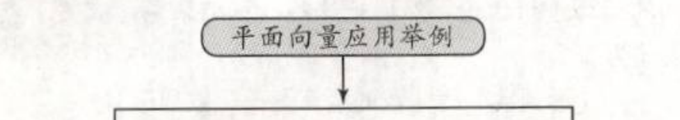
所以$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BD}|^2$.

所以 $AC=BD$.

(4) 正方形的对角线垂直平分. 综合以上 (2) (3) 的证明即可.

2.5　平面向量应用举例

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：用向量方法解决实际问题的基本方法；向量法解决几何问题的“三步曲”.

难点：实际问题转化为向量问题.

三、编写意图和教学建议

前面已指出，向量概念有明确的物理背景和几何背景，物理背景是力、速度、加速度等，几何背景是有向线段. 可以说向量概念是从物理背景、几何背景中抽象而来的，正因为如此，运用向量可以解决一些物理和几何问题. 例如利用向量计算力沿某方向所做的功，利用向量解决平面内两条直线平行、垂直位置关系的判定等问题.

2.5.1 平面几何中的向量方法

研究几何可以采取不同的方法. 这些方法包括：

综合方法——不使用其他工具，对几何元素及其关系直接进行讨论；

解析方法——以数（代数式）和数（代数式）的运算为工具，对几何元素及其关系进行讨论；

向量方法——以向量和向量的运算为工具，对几何元素及其关系进行讨论；

分析方法——以微积分为工具，对几何元素及其关系进行讨论，等等.

前三种方法都是中学数学中出现的内容，下面把它们做个比较.

综合法是欧几里得几何学所采用的研究方法，是最早用来研究几何的方法. 它不使用其他工具，只依据基本的逻辑原理（矛盾律、排中律等），从公理（基本事实）出发，通过演绎推理建立起几何体系. 应当说，综合法所给出的几何论证严谨且幽雅，但没有一般规律可循，存在较大的思考难度，往往对人的智力形成极大的挑战. 因此，寻求几何研究的工具，以更好地把握空间图形的性质和规律，推进几何研究的发展，就成为数学家们的一个理想.

解析几何的发明，为数学提供了一种新的工具，实现了数与形的相互转化，代数与几何从此相辅相成、相得益彰：几何概念用代数表示，几何问题用代数方法研究；反之，给代数语言以几何解释，可以直观地理解它们的意义，并能从中得到启示而提出新的结论. 研究工具的进步不但促进了几何与代数的大幅度进展，而且还为微积分的创建提供了强有力的手段.

解析几何体现了研究几何的代数方法. 这就是利用坐标系将点表示为有序数组，建立起空间点与有序数组之间的一一对应，由此可以将空间的线（直线、曲线）、面（平面、曲面）表示为一个方程，几何问题就归结为代数问题；然后借助于代数运算和变换，对这些数、代数式及方程之间的关系进行讨论；最后再把讨论的结果利用坐标系翻译成相应的几何结论. 这就是我们熟悉的三步曲：

翻译——代数讨论——翻译.

下面再看向量方法. 就思路而言，几何中的向量方法完全与几何中的代数方法一致，不同的只是用“向量和向量运算”来代替“数和数的运算”. 这就是把点、线、面等几何要素直接归结为向量，对这些向量借助于它们之间的运算进行讨论，然后把这些计算结果翻译成关于点、线、面的相应结果. 如果把代数方法简单地表述为

［形到数］——［数的运算］——［数到形］，

则向量方法可简单地表述为

［形到向量］——［向量的运算］——［向量和数到形］，

这就是教科书中给出的用向量方法解决几何问题的“三步曲”：

（1）建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

（2）通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；

（3）把运算结果“翻译”成几何关系.

另外，向量作为沟通代数、几何与三角函数的桥梁，在解决几何问题中的工具作用更显突出.

平行四边形是学生熟悉的重要的几何图形，在平面几何的学习中，学生得到过它的许多性质，但有些性质的得出比较麻烦. 例 1 中用向量方法推导了平行四边形的两条对角线与两条邻边之间的关系. 在用向量方法解决涉及长度、夹角的问题时，常常考虑用向量的数量积. 通过本例学生可以发现，由于向量能够运算，因此它在解决某些几何问题时具有优越性，它把一个思辨过程变成了一个算法过程，学生可按一定的程序进行运算操作，从而降低了思考问题的难度，同时也为计算机技术的运用提供了方便. 教学时应引导学生体会向量带来的优越性.

通过例 1 的学习，要使学生明确用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”. 教学时要引导学生自己进行总结，并要把它与数学 2 中用解析法解决几何问题的“三步曲”进行对照.

例 2 通过向量之间的关系判断线段之间的关系阐述了平面几何中的向量方法. 本例的解法中使用了待定系数法，即在第二步中，由$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AC}$共线而设$\boldsymbol{r}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$n\in\mathbf{R}$；由$\overrightarrow{ER}$与$\overrightarrow{EB}$共线而设$\overrightarrow{ER}=m\overrightarrow{EB}$，进而把$\boldsymbol{r}$表示为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的线性组合. 然后利用已知条件解出待定系数$m$，$n$，从而判断线段之间的关系. 值得注意的是，根据向量等式$(n-m)\boldsymbol{a}+\left(n+\frac{m-1}{2}\right)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$求$m$，$n$，需要用到

“如果向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，那么当且仅当$\lambda=\mu=0$时，有$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.”

这样，要使上式成立，必须

$$\begin{cases}n-m=0,\\ n+\dfrac{m-1}{2}=0.\end{cases}$$

值得注意的是，待定系数法是用向量方法证明平面几何问题的常用方法.

例 1、例 2 不是直接给出要求证明的结论，而是在一定的条件下，先探索猜想出某些结论，然后再通过严格的逻辑推理，证明猜想的正确性. 这样的问题具有一定的开放性.

在例 2 的“旁白”中，教科书提示学生使用信息技术探索AR、RT、TC的长度之间的关系，在探索的基础上，发现结论，提出猜想，然后再用向量方法证明结论. 教学中应当尽量引导学生使用信息技术来发现本题的结论.

2.5.2 向量在物理中的应用举例

向量在物理中的应用，实际上是把物理问题转化为向量问题，然后通过向量运算解决向量问题，最后再用所获得的结果解释物理现象. 教学中要让学生注意两个方面，一是通过实例，体会如何把物理问题转化成数学问题，即如何将物理量之间的关系抽象成数学模型，另一方面是如何利用数学模型的解来解释相应的物理现象.

例 3 是日常生活中经常遇到的问题，学生也会有两人共提一个旅行包以及在单杠上做引体向上运动的经验，要从数学角度进行解释，首先应当将实际现象抽象为数学模型，这就是教科书中“分析”所完成的事情. 得到模型后就可以发现，这是一个简单的向量问题.

本题还可以在信息技术的帮助下来观察$|\boldsymbol{F}|$，$|\boldsymbol{G}|$，θ之间在变化过程中所产生的相互影响. “探究”是例 3 的延续，可以由学生自己完成，还可以用信息技术来验证.

解决例 4 的关键在于对“行驶最短航程”的意义的解释，即“分析”中给出的船必须垂直于河

岸行驶，这时船的速度与水流速度的合速度应当垂直于河岸．分析清楚这种关系后，本例就容易解决了．

四、补充例题

1. 求证：直径上的圆周角为直角．

已知：如图 2-21，AC 为$\odot O$ 的一条直径，$\angle ABC$ 是圆周角．

求证$\angle ABC=90°$．

证明：设$\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$．

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$．

由此得 $\angle ABC=90°$．

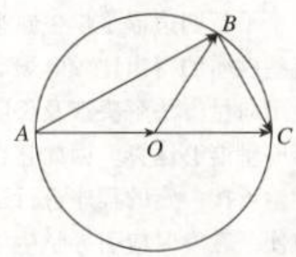


图 2-21

2. 如图 2-22，AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条高．

求证：AD、BE、CF 相交于一点．

证明：设 BE、CF 相交于 H，并设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{h}$，则$\overrightarrow{BH}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CH}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$．

因为 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，

所以 $(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}.$$

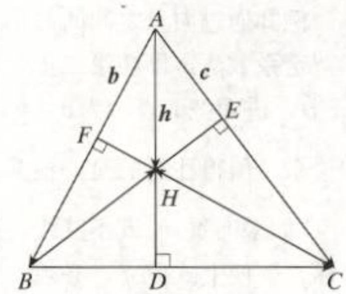


图 2-22

化简得

$$\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0.$$

所以$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$．所以 AH 与 AD 共线．

AD、BE、CF 相交于一点 H．

说明 在本题的证明中，学生首先遇到的问题是选择怎样的方法进行证明．如果采用解析法证明，虽然思路比较简单，但运算量比较大．这里采用的方法，学生最感困难的是对基底的选择．原则上讲，只要选择不共线的两个非零向量即可作为基底，但实际上基底的选择将直接影响证明的难易．学会恰当地选择基底需要较多的实践．

五、习题解答

习题 2.5（第 113 页）

A 组

1. 解：设 $P(x, y)$，$R(x_1, y_1)$，

则$\overrightarrow{RA}=(1-x_1, -y_1)$，$\overrightarrow{AP}=(x-1, y)$．

由$\overrightarrow{RA}=2\overrightarrow{AP}$得$(1-x_1, -y_1)=2(x-1, y)$，即$\begin{cases}x_1=-2x+3,\\ y_1=-2y.\end{cases}$

代入直线 l 的方程得 $y=2x$．

所以，点 P 的轨迹方程为 $y=2x$．

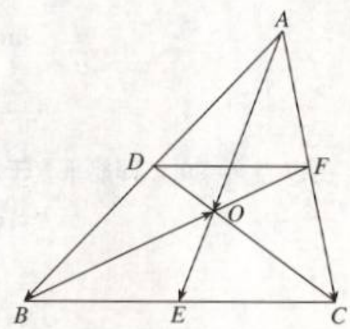
说明 本题实际上是利用向量进行图形变换，目的是加强学生的应用向量意识．

2. 解：(1) 易知，

$$\triangle OFD \backsim \triangle OBC，DF=\frac{1}{2}BC，$$

所以，$BO=\frac{2}{3}BF$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}&=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}+\boldsymbol{a}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)+\boldsymbol{a}\\&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$



第 2 题

(2) 因为$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

所以，$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. 因此 A、O、E 三点在同一直线上，而且

$\frac{AO}{OE}=2$.

同理可知 $\frac{BO}{OF}=2，\frac{CO}{OD}=2.$

所以$\frac{AO}{OE}=\frac{BO}{OF}=\frac{CO}{OD}=2$.

说明 本题的目的是要证明三角形的三条中线相交于一点．为了降低证明的难度，将问题分成了两个小题．教学中，可以通过本题让学生思考证明三线共点的证明方法：可以是先得出其中两条线的交点，然后证明第三条线经过这一点．本题也可以利用向量的坐标来求解.

3. 解：(1) $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_B-\boldsymbol{s}_A=(-2，7)$；

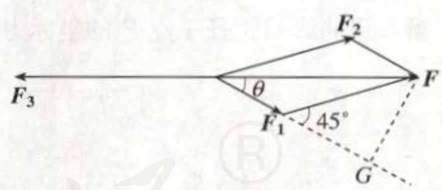
(2) $\boldsymbol{s}$ 在 $\boldsymbol{s}_A$ 方向上的投影为$\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A|}{|\boldsymbol{s}_A|}=\frac{13}{5}$.

4. 解：设 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 θ，则

$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3}+1$，$\theta=30°$；

$|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{3}+1$，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 150°.

说明 由于没有学习正弦定理、余弦定理，可用如图所示的方法添高求解.



第 4 题

B 组

1. 解：设$\boldsymbol{v}_0$在水平方向的速度大小为$\boldsymbol{v}_x$，竖直方向的速度的大小为$\boldsymbol{v}_y$，则

$$\boldsymbol{v}_x=|\boldsymbol{v}_0|\cos\theta，\boldsymbol{v}_y=|\boldsymbol{v}_0|\sin\theta.$$

设在时刻 t 时的上升高度为 h，抛掷距离为 s，则

$$\begin{cases}h=|\boldsymbol{v}_0|t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2,(g\text{ 为重力加速度})\\s=|\boldsymbol{v}_0|t\cos\theta.\end{cases}$$

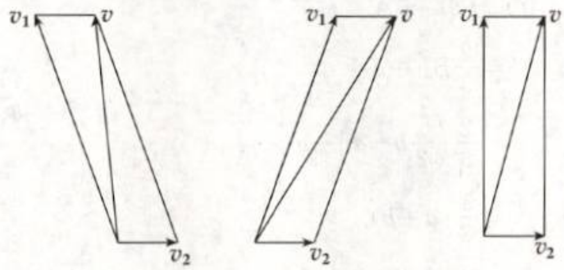
所以，最大高度为$\frac{|\boldsymbol{v}_0|^2\sin^2\theta}{2g}$，最大投掷距离为$\frac{2|\boldsymbol{v}_0|^2\sin\theta\cos\theta}{g}$.

2. 解：设$\boldsymbol{v}_1$与$\boldsymbol{v}_2$的夹角为 θ，合速度为$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_2$与$\boldsymbol{v}$的夹角为 α，行驶距离为 d，则

$$\sin\alpha=\frac{|\boldsymbol{v}_1|\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{10\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|},\ d=\frac{0.5}{\sin\alpha}=\frac{|\boldsymbol{v}|}{20\sin\theta}.$$

$$\frac{d}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{20\sin\theta}.$$

所以当 $\theta=90^\circ$，即船垂直于对岸行驶时所用时间最短.



第 2 题

说明 由于学生还没有学习正弦定理和余弦定理，所以要通过作高来求解.

3. (1) $(0,\ -1)$.

解：设 $P(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$. $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$.

将 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 到 $\overrightarrow{AP}$，相当于沿逆时针方向旋转 $\frac{7}{4}\pi$ 到 $\overrightarrow{AP}$，于是

$$\overrightarrow{AP}=\left(\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi+2\sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi,\ \sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi-2\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi\right)$$
$$=(-1,\ -3).$$

所以 $\begin{cases}x-1=-1,\\ y-2=-3.\end{cases}$

解得 $x=0,\ y=-1$.

(2) $y=-\frac{3}{2x}$.

解：设曲线 C 上任一点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，$\overrightarrow{OP}$ 绕 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后，点 P 的坐标为 $(x',\ y')$，则

$$\begin{cases}x'=x\cos\frac{\pi}{4}-y\sin\frac{\pi}{4},\\ y'=x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y).\end{cases}$$

又因为 $x'^2-y'^2=3$，所以

$$\frac{1}{2}(x-y)^2-\frac{1}{2}(x+y)^2=3.$$

化简得 $y=-\frac{3}{2x}$.

说明 本题希望学生能运用题目中给出的法则进行运算，同时也体现向量的作用.

复习参考题（第 118 页）

A 组

1. (1) (√)

$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是相反向量，它们的和为零向量.

(2) (√)

当第一个向量的终点是第二个向量的起点时，这两个向量的和等于第一个向量的起点指向第二向量的终点的向量.

(3) (×)

当两个向量有共同的起点时，那么这两个向量的差等于减向量的终点指向被减向量的终点的向量.

(4) (×)

实数 0 与任意向量的数乘结果是零向量，而不是实数 0.

2. (1) D;

说明 两个单位向量的长度是相等的，因而长度的平方也是相等的.

A 选项不正确是因为两个向量相等，必须长度相等，而且方向相同. 两个单位向量尽管长度相等，但方向不一定相同.

B 选项不正确. 两个单位向量的数量积只有当它们同向（或夹角为 0）时，它们的数量积才为 1.

C 选项不正确. 因为 $\boldsymbol{a}^2$、$\boldsymbol{b}^2$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度的平方，而$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以它们应该相等.

(2) B;

说明 可利用三角形两边之和与第三边的关系来解题.

(3) D;

说明 这是向量加法的平行四边形法则，它只能保证四边形 $ABCD$ 是平行四边形，不能保证它是矩形、菱形、正方形.

(4) C;

说明 当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

(5) D;

说明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$.

(6) B.

说明 两个不共线的非零向量构成一组基底.

3. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

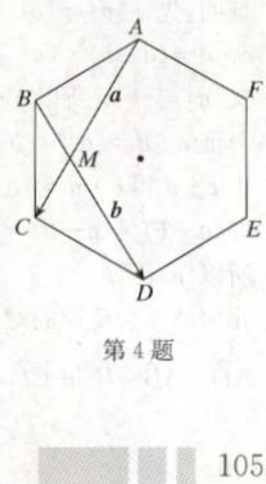
4. 略解：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



第 4 题

5. (1) $\overrightarrow{AB}=(8,\ -8)$，$|\overrightarrow{AB}|=8\sqrt{2}$；

(2) $\overrightarrow{OC}=(2,-16)$，$\overrightarrow{OD}=(-8,8)$；

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=33$.

6. $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线.

证明：因为$\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,-1)$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 所以$AB$与$CD$共线.

7. $D(-2,0)$.

8. $n=2$.

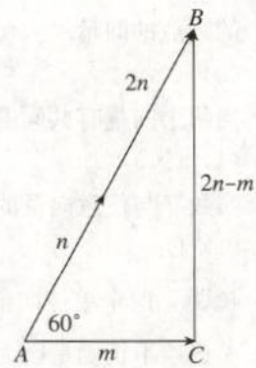
9. $\lambda=-1$，$\mu=0$.

10. $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=0$，$\cos C=\frac{4}{5}$.

11. 证明：$(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^2=2\cos 60°-1=0$，

所以，$(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\perp\boldsymbol{m}$.

几何意义如图所示.



第11题

12. $\lambda=-1$.

13. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$.

14. $\cos\theta=\frac{5}{8}$，$\cos\beta=\frac{19}{20}$.

B组

1. (1) A；(2) D；(3) B；(4) C；(5) C；(6) C；(7) D.

说明 (6)中向量的夹角可以是0或$\frac{2\pi}{3}$，(7)中若$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，则结论为$\frac{1}{2}$. 教师可以给出各种情况让学生思考，认清向量的夹角，防止机械地记忆答案.

2. 证明：先证$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$.

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

再证$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$，所以，由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，于是$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

几何意义是矩形的两条对角线相等.

3. 证明：先证$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，

又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$. 所以$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

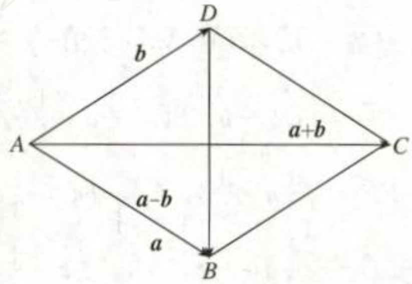
再证$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

由$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$得$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，

即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

几何意义为菱形的对角线互相垂直，如图所示.



第3题

4. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

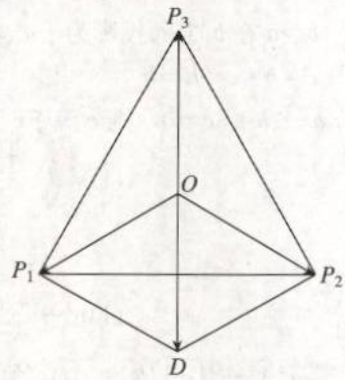
$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

而$\overrightarrow{EF}=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$，

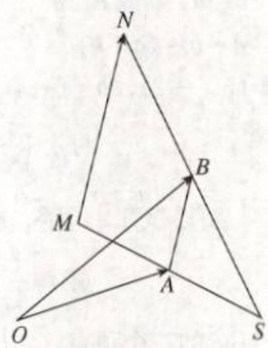
所以$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$

$=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

5. **证明**：如图所示，设$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$，由于
$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\boldsymbol{0}$，
所以$\overrightarrow{OP_3}=-\overrightarrow{OD}$，$|\overrightarrow{OD}|=1$.
所以$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{P_1D}|$.
所以$\angle OP_1P_2=30°$. 同理可得$\angle OP_1P_3=30°$.
所以$\angle P_3P_1P_2=60°$. 同理可得$\angle P_1P_2P_3=60°$，$\angle P_2P_3P_1=60°$.
所以，$\triangle P_2P_1P_3$ 为正三角形.



第 5 题



第 6 题

6. 连接 AB.
由对称性可知，AB 是$\triangle SMN$ 的中位线，

$$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}.$$

说明　本题可以运用信息技术观察$\overrightarrow{MN}$与点 M 的选取无关，进而引导学生发现向量$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{AB}$的关系.

7. (1) 实际前进速度大小为$\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8$(千米/时)，沿与水流方向成 60°的方向前进；
(2) 实际前进速度大小为 $4\sqrt{2}$千米/时，沿与水流方向成 $90°+\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$的方向前进.

8. 解：因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$，所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.
同理，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，所以点 O 为$\triangle ABC$ 的垂心.

9. (1) $a_2x-a_1y+a_1y_0-a_2x_0=0$；
(2) 垂直；
(3) 当 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 时，$l_1 \parallel l_2$；当 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 时，$l_1\perp l_2$. 夹角 θ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$；
(4) $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

III 自我检测题

（约 45 分钟）

一、选择题

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，则下列运算正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　(B) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　(C) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

2. 下面给出的关系式中正确的个数是（　　）.

①$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；⑤ $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 对于非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，下列命题中正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$　(B) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{a}|$

(C) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$　(D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\ -3)$，$\boldsymbol{c}=(x,\ y)$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{c}$ 等于（　　）.

(A) $(1,\ \frac{8}{3})$　(B) $\left(\frac{13}{3},\ \frac{8}{3}\right)$　(C) $\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3}\right)$　(D) $\left(-\frac{13}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

5. 若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BP}$，则 λ 的值为（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{4}{3}$　(D) $-\frac{4}{3}$

6. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 及平面内一点 P，若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则点 P 与$\triangle ABC$ 的位置关系是（　　）.

(A) P 在 AC 边上　(B) P 在 AB 边上或其延长线上

(C) P 在$\triangle ABC$ 外部　(D) P 在$\triangle ABC$ 内部

二、填空题

1. 若 $\boldsymbol{a}=(6,\ -8)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量是__________.

2. 已知向量 $|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是__________.

3. 设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为两个不共线的向量，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=-(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$ 共线，则 $\lambda=$__________.

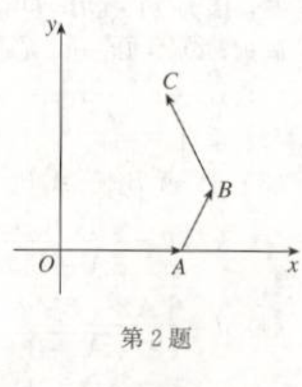
4. 若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为______.

三、解答题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1)$.

求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

2. 如图，$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|=2a$，$\angle OAB=\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，求点 B 与点 C 的坐标.



第 2 题

参考解答及说明

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	D	C	D	D	A

说明 1. 本题考查向量加减法的概念.

2. 本题考查数乘向量，向量的数量积等概念. 其中①正确，数 0 与任意向量的乘积为零向量，$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；②正确，向量的数量积有交换律；③正确；④错，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$的左右两边都是向量但它们方向可能不同；⑤错，由向量数量积的定义可知$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\geqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

3. 本题考查向量垂直、平行与向量数量积间的关系，可举反例. 其中(A)错，可以举反例$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$；(B) 错，可举反例$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向，则投影为$-|\boldsymbol{a}|$；(D) 错，可举反例$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，$\boldsymbol{c}=(0,1)$.

4. 考查向量的坐标运算.

5. 考查共线向量的有关概念. 由已知$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$，可知点 P 在线段 AB 上. 而$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BP}$反向，所以λ为负值，结果选(D).

6. 本题希望学生能通过作图探究结果.

二、填空题

1. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. 2. $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$，或$\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$. 3. $-\frac{3}{2}$. 4. $45°$.

说明

第 1 题考查单位向量的概念.

第 2 题考查向量的模向量垂直与向量坐标间的关系.

第 3 题考查共线向量，平面向量基本定理的有关知识.

第 4 题考查向量数量积的概念和运算.

三、解答题

1. (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$；(2) $\cos\theta=\frac{10\sqrt{221}}{221}$.

说明 本题考查向量的坐标表示，向量数量积等的基础知识.

2. $B\left(\frac{5a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$C\left(\frac{3a}{2},\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)$.

说明 本题考查向量知识的综合运用，考查学生对点的坐标与向量坐标间的关系的理解.

Ⅳ 拓展资源

1. 三点共线问题

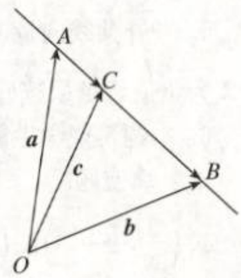
在本教科书里有一些用向量来证明平面几何的问题，第 127 页的习题 1 是证明三角形的三条中线交于一点的问题，这里给出用向量证明三点共线和三线共点的一般方法.

先看下面的定理.

定理 1 已知三点 A，B，C，如果它们对应的向量分别是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，那么这三点位于同一条直线上的充要条件是存在三个非零实数 α，β，γ，使得

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0,\ \alpha+\beta+\gamma=0. \tag{1}$$

证明（必要性）：若 A，B，C 三个不同的点在同一直线上，且有 $\alpha\overrightarrow{AC}=\beta\overrightarrow{CB}$，



则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AC}$，　　①

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\overrightarrow{CB}$.　　②

由①×α+②×β 得

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b},$$

所以 $\boldsymbol{c}=\dfrac{\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}}{\alpha+\beta}$.

令 $\gamma=-(\alpha+\beta)$，则得

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0,\text{ 且 }\alpha+\beta+\gamma=0.$$

（充分性）由条件(1)，可得

$$\boldsymbol{c}=\frac{\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}}{-\gamma}=\frac{\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}}{\alpha+\beta},$$

即　$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\dfrac{\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}}{\alpha+\beta}-\boldsymbol{a}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

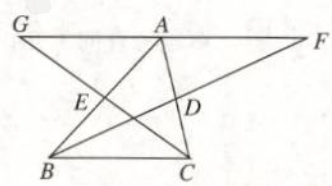
即　$\overrightarrow{AC}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

这个等式表明 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 平行且有公共始点 A，所以 A，B，C 三点在同一直线上.

下面运用这个定理来证明一个问题.

已知△ABC 中，D、E 分别是 AC、AB 的中点，延长 BD 至 F 使 $DF=BD$，延长 CE 至 G 使 $EG=CE$，求证 F，A，G 共线.

证明：设点 A，B，C，F，G 所对应的向量分别为



$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{b}&=\overrightarrow{BF}=2\,\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{f}&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}.\end{aligned} \tag{1}$$

又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c}&=\overrightarrow{CG}=2\,\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\\&=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\\\boldsymbol{g}&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.\end{aligned} \tag{2}$$

将(1)(2)两式相加，即得

$$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}-2\boldsymbol{a}=0，且\ 1+1-2=0.$$

所以 F，G，A 三点共线.

2. 向量的向量积

在物理学中，由于讨论像力矩以及刚体绕轴旋转时的角速度与线速度之间的关系等这类问题的需要，就必须引进两向量乘法的另一运算——向量的向量积. 定义如下.

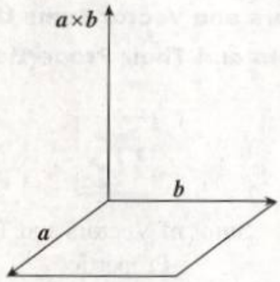
两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个新的向量 $\boldsymbol{c}$：

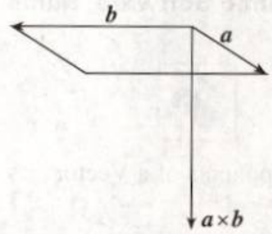
(1) $\boldsymbol{c}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 两个向量为边所作成的平行四边形的面积；

(2) $\boldsymbol{c}$ 垂直于平行四边形所在的平面；

(3) 其指向使 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三向量成右手系——设想一个人站在 $\boldsymbol{c}$ 处观看 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 按逆时针方向旋转一个小于 180°的角而达到 $\boldsymbol{b}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.





设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 两个向量的夹角为 θ，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

在上面的定义中已默认了 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，若这两个向量中至少有一个是零向量，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

向量的向量积服从以下运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

(3) $(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

3. 向量与重心问题

假如有两个质点 M_1，M_2，它们的质量分别是 m_1，m_2. 由物理学知识，这两个质点的重心 M 在线段 M_1M_2 上，并且分此线段为与质量成反比例的两部分，即

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m_2}{m_1}，或\ m_1\overrightarrow{M_1M}=m_2\overrightarrow{MM_2}.$$

现设点 M_1，M_2，M 对应的向量分别是 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}$，则上式可以写成

$$m_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=m_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}).$$

所以 $\boldsymbol{r}=\dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$，点 M 处的质量为 m_1+m_2.

现求三个质点的重心问题.

三个质点 M_1，M_2，M_3 的质量分别是 m_1，m_2，m_3，所对应的向量分别是 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$，我们可设 M_1，M_2 的重心在点 D 处，该处对应的向量为 $\boldsymbol{r}_D=\dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$，该点的质量为 m_1+m_2，然后求点 D 与点 M_3 的重心 M 所对应的向量 $\boldsymbol{r}$. 易得

$$\boldsymbol{r}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

网络资源

1. 在中国期刊网http://www.cnki.net/index.htm 上可以查阅国内的主要数学杂志上的文章．中国期刊网是一个收费网站，你要成为它的注册用户并下载专门的阅读器 CAJViewer 才能阅读．

2. 中小学网络资源索引http://www.6uc.com/ziyuan/newreference/index.html 进入网站后可以查找有关向量的内容，其中包括概念教学，例题，练习等．内容非常丰富．

3. 向量计算器http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~vector.en.html．在网络给出的向量计算器中，可方便地判断向量的共线，计算向量的数量积等．在 google 中搜索关键词 vector calculator 可找到各种形式的向量计算器．下列网址就是其中的一部分．

http://cstl-cst.semo.edu/venezian/PH230/vectors.htm

http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/vectorsplans/VectorsPlans_ang.html

4. 美国 NCTM 课程标准中的电子例题(E-Example)

http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.1/part2.htm

Learning about Properties of Vectors and Vector Sums Using Dynamic Software: Sums of Vectors and Their Properties

Components of a Vector

Sums of Vectors and Their Properties

通过动态几何演示的汽车运行及飞机飞行情况让学生理解向量及向量的加法．是一个很好的活动素材．

5. http://www.ies.co.jp/math/products/vector/menu.html 在这个网站上有大量交互式的教学软件供学生使用．这里涉及的是向量的内容包括如单位向量、向量的加法、数量积等许多内容，这些内容对于促进学生的主体活动及对向量知识的理解非常有利．

6. http://www.trac.sun.ac.za/newexp/activity15.PDF．这里提供了一个有关向量的活动方案，这一活动方案可用于 P91 的探究实践．在 google 中搜索 vector activity 还可以找到其他的活动方案．

7. 在 google 或 baidu 等搜索引擎中搜索有关“平面向量”“平面向量练习”“平面向量教案”等关键词，你会找到更多与平面向量相关的内容．

第三章 三角恒等变换

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

本章学习的主要内容是两角和与差的正弦、余弦和正切公式，以及运用这些公式进行简单的恒等变换.

三角恒等变换位于三角函数与数学变换的结合点上. 通过本章学习，要使学生在学习三角恒等变换的基本思想和方法的过程中，发展推理能力和运算能力，使学生体会三角恒等变换的工具性作用，学会它们在数学中的一些应用.

2. 学习目标

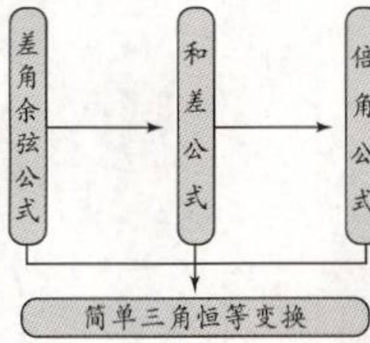
（1）经历用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量方法的作用.

（2）能以两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系.

（3）能运用上述公式进行简单的恒等变换，以引导学生推导半角公式，积化和差、和差化积公式（公式不要求记忆）作为基本训练，使学生进一步提高运用联系转化的观点去处理问题的自觉性，体会一般与特殊的思想，换元的思想，方程的思想等数学思想在三角恒等变换中的作用.

二、内容安排

1. 本章知识框图



2. 对知识框图的说明

本章内容分为 2 节："两角和与差的正弦、余弦和正切公式"，"简单的三角恒等变换".

(1) 三角恒等变换的学习以代数变换与同角三角函数式的变换的学习为基础，和其他数学变换一样，它包括变换的对象，变换的目标，以及变换的依据和方法等要素. 本章变换的对象要由只含一个角的三角函数式拓展为包含两个角的三角函数式，因此建立起一套包含两个角的三角函数式变换的公式就是本章的首要任务，也是 3.1 节的中心内容.

(2) 由于和、差、倍之间存在的关系，和角、差角、倍角的三角函数之间必然存在紧密的内在联系，因此我们可以不必孤立地去一一推导这些公式，而只要推导出一个公式作为基础，再利用这种联系性，用逻辑推理的方法就可以得到其他公式.

选择哪个公式作为基础呢？过去的教材曾经进行过许多探索，其基本出发点都是努力使公式的证明过程尽量简明易懂，易于被学生所接受. 这里由于向量工具已被引入，因此选择了两角差的余弦公式作为基础. 应当说，这样处理使得公式的得出成为一个纯粹的代数运算过程，大大降低了思考难度（尽管同时也失去了一些对学生进行数学思维训练的机会）.

另外，对于众多公式的推导顺序，也可以有多种不同安排. 本章中先探索出了两角差的余弦公式，然后以它为基础，推导出其他公式，具体过程如下：

$$C_{(\alpha-\beta)}\to C_{(\alpha+\beta)}\to S_{(\alpha\pm\beta)}\to T_{(\alpha\pm\beta)}\to C_{2\alpha}, S_{2\alpha}, T_{2\alpha}$$

实际教学中，教师可以根据学生情况，对公式的推导顺序作出自己的选择.

(3) 本章内容安排的一条明线是建立公式，学习变换，还有一条暗线就是发展推理能力和运算能力，并且发展能力的要求不仅体现在学习变换的过程之中，也体现在建立公式的过程之中. 因此在本章全部内容的安排中，特别注意恰时恰点地提出问题，引导学生用对比、联系、化归的观点去分析、处理问题，使他们能依据三角函数式的特点，逐渐明确三角恒等变换不仅包括式子的结构形式变换，还包括式子中的角的变换，以及不同三角函数之间的变换，引导学生逐渐拓广有关公式在变换过程中的作用，强化运用数学思想方法指导设计变换思路的意识，并且也注意了这种引导的渐进性和层次性.

(4) 本章内容安排贯彻"删减繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容"的理念，严格控制了三角恒等变换及其应用的繁、难程度，尤其注意了不以半角公式，积化和差公式以及和差化积公式作为变换的依据，而只把这些公式的推导作为变换的基本练习.

三、课时分配

本章教学时间约 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	约 4 课时
3.2	简单的三角恒等变换	约 3 课时
小结		约 1 课时

II 教科书分析

章引言、章头图介绍

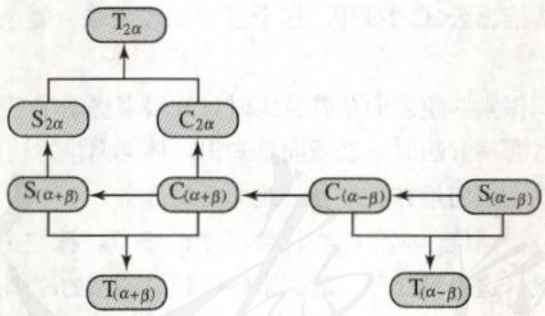
章头图呈现了这样一幅画面：风景如画的山顶有一座电视发射塔，它是为了配合本章引入中的“求电视发射塔高度”的问题而设置的. 章引言中，用联系的观点阐述了三角变换与代数变换之间的关系，还阐述了三角变换的实质、三角变换的目的、作用以及变换的基本方法. 这样做的目的在于为学生提供三角变换的实际背景，加强学生的应用意识，激发学生的学习兴趣，并使学生大致明确本章要研究的基本问题及学习方法.

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

一、本节知识结构

本节的中心内容是建立相关的十一个公式，通过探索、证明和初步应用，体会和认识公式的特征及功能.

本节的知识结构由十一个公式的逻辑联系决定，具体可为：



二、教学重点与难点

1. 重点：引导学生通过独立探索和讨论交流，导出两角和与差的三角函数的十一个公式，并了解它们的内在联系，为运用这些公式进行简单的恒等变换打好基础.

2. 难点：两角差的余弦公式的探索与证明.

三、编写意图与教学建议

本节内容可分为四部分，即引入，两角差的余弦公式的探索、证明及初步应用，和差公式的探索、证明和初步应用，倍角公式的探索、证明和初步应用.

1. 课题的引入

教科书以一个实际问题作为引子，目的在于从中提出问题，引入本章的研究课题. 在用方程的思想分析题意，用解直角三角形的知识布列方程的过程中，提出了两个问题：

(1) 实际问题中存在研究像 $\tan(45°+\alpha)$ 这样的包含两个角的三角函数的需要；

(2) 实际问题中存在研究像 $\sin\alpha$ 与 $\tan(45°+\alpha)$ 这样的包含两角和的三角函数与单角(α，45°)的三角函数的关系的需要.

在此基础上，再一般化而提出本章的研究课题.

2. 两角差的余弦公式的推导

两角差的余弦公式的推导是本节的重点，也是难点. 尤其是要引导学生通过主动参与，独立探索，自己得出结果更是难点.

教科书首先明确提出了探索课题：如何用任意角 α，β 的正弦、余弦值来表示 $\cos(\alpha-\beta)$ 呢？

凭直觉得出 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 是学生经常出现的错误，通过讨论可以知道它不是对任意角 α，β 都成立的（当然它也不是对任意角 α，β 都不成立的），从而进一步明确“恒等”的意义，统一对探索目标的认识，也为以此公式为基础去推导其他和差公式作了准备.

联系已经学过的三角函数知识探索有关三角函数的问题是很自然的. 鉴于学生独立地运用单位圆上的三角函数线进行探索存在一定的困难，教科书采用“夹叙夹议”的方式，把探索的过程写进教材，以便引导学生在感受教科书的探索过程中，对公式的结构特征进行直观感知，使他们对公式有一个基本了解，并引起寻求适当方法推出公式的欲望. 这个过程比较困难、复杂，教学中应适时作出必要的引导.

在引导学生用向量数量积探索两角差的余弦公式时，教科书提示了三个要点：

(1) 在回顾求角的余弦有哪些方法时，联系向量知识，体会向量方法的作用；

(2) 结合有关图形，完成运用向量方法推导公式的必要准备；

(3) 探索过程不应追求一步到位，应先不去理会其中的细节，抓住主要问题及其讨论线索进行探索，然后再作反思，予以完善（这也是处理一般探索性问题应遵循的原则）. 其中完善的过程既要运用分类讨论的思想，又要用到诱导公式.

3. 和（差）角公式的推导

以两角差的余弦公式为基础，推导其他十个公式的过程是一个逻辑推理的过程，也是一个认识三角函数式的特征，体会三角恒等变换特点的过程，教科书不仅重视对推出的公式的理解、应用，而且还重视推导过程的教育功能.

具体来说，在这些公式的推导中，教科书都把对照、比较有关的三角函数式，认清其区别，寻找其联系和联系的途径作为思维的起点.

例如，比较 $\cos(\alpha+\beta)$ 与 $\cos(\alpha-\beta)$，它们都是角的余弦，只是角的形式不同，但不同的角的形式从运算或换元的角度看都有内在联系，根据这种联系，教科书给出了从公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 到 $C_{(\alpha+\beta)}$ 的推理

过程.

又如，比较 $\sin(\alpha-\beta)$ 与 $\cos(\alpha-\beta)$，它们包含的角相同，但函数种类不同. 角的正弦与余弦能否建立联系呢？教学中往往在这里产生困难. 为此，教科书在两处作了铺垫，一是在例 1 求得 $\cos 15°$ 的值后，通过“思考”要求学生探索求 $\sin 75°$ 值的方法；二是在第 143 页的“探究”中，要求学生具体推导 $C_{(\alpha-\beta)}$ 之前，指出了实现正弦函数、余弦函数互化的公式（基础较好的地区，可以不必如此详细铺垫）. 一旦找到联系途径，推导就较容易了：

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]\\
&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\
&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

在探索和（差）角正切公式时，用以上思路作指导，以下过程是不难的：

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\
&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.
\end{aligned}
$$

依据要求，在把结果用 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 表示的过程中，一些同学不太容易想到分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$，教学中应该在同角三角函数关系部分认真地作些准备.

由于从 $C_{(\alpha-\beta)}$ 出发推导其他和（差）角公式难度不大，因此教科书采用了“留空”的方式处理这部分内容. 要求探索的有关结果是：

$$
\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\\
&\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\\
&\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\\
&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\\
&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\\
&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\\
&\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\\
&\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.
\end{aligned}
$$

4. 例题教学

本节例题的选择与安排，主要考虑了通过简单应用，使学生能逐步熟记公式，掌握公式的结构形式及其功能.

例 1 是指定方法求 $\cos 15°$ 的值，这样可以使学生把注意力集中到使用公式求值上. 本例说明差角余弦公式也适用于形式上不是差角，但可以拆分成两角差的情形. 实际上，由于公式对任意角 α，β 都成立，因此在使用公式时应当根据需要对角进行灵活表示.

例 2，例 3 都是运用和（差）角公式的基础题. 教科书安排这两个例题的主要目的是为了训练学生思维的有序性，逐步培养他们良好的思维习惯. 教学中应当有意识地对学生的思维习惯进行引导，例如在面对问题时，要注意先认真分析条件，明确要求，再思考应该联系什么公式，使用公式时要有什么准备，准备工作怎么进行等. 还要重视思维过程的表述，不能只看最后结果而不顾过程表述的准确

性、简洁性等．这些都是培养三角恒等变换能力所不能忽视的．

教学中，可以从两个方面对例 2，例 3 作适当延伸．一是例 3 后面的“思考”，提出了其中 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$与$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$的结果相同是否具有一般性的问题，要求学生思考与证明；二是对其中一部分条件作变式，如例 2 中删除条件 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，例 3 中去掉 α 是第四象限角的限制等，让学生考察对结果和求解过程会有什么影响．在上述延伸、变化中，不仅要求正确使用分类讨论的方法，在表述上也会有更高要求，教学中应当根据学生的具体情况作出适当的引导．

例 4 体现了对公式的全面理解上的要求，即要求学生能够从正（从左到右使用公式）、反（从右到左使用公式）两个角度使用公式．与正用相比，反用表现的是一种逆向思维，它不仅要求有一定的逆向思维意识，对思维的灵活性要求也高，而且对公式要有更全面、深刻的理解．

例 4 中的（1），（2）是最简单的公式反用，目的在于培养反用意识以及思维的灵活性；解决（3）时，要学生孤立地考虑反用有难度，教学中应充分注意教科书的处理方法．事实上，在例 3 中出现过求$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，在求解中有如下过程：

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}.$$

这个过程为解决例 4（3）作了铺垫．

例 5 是倍角公式的正用（反用安排到了练习中）．教科书没有安排简单套用倍角公式的例题．通过本例的解答，要求学生对“倍”的相对性有一定的认识．为此，教科书在“旁白”中进行了适当引导．另外，在三角变换中，换元思想起到很大作用，因此教科书在“旁白”中也作出了提示．事实上，灵活使用“倍”的变换、“换元”等都体现了思维的灵活性，对学生推理能力的发展能起到很好的推动作用．

例 6 是本节最后一个例题，具有一定的综合性，同时也是和（差）角公式的应用问题．由于对$2A+2B$与 A，B 之间关系的看法不同会产生不同的解题思路，所以教科书给出了两种解法．不过它们都是对倍角公式、和角公式的联合运用，本质上没有区别．列出两种解法是为了鼓励学生用不同思路去思考．值得注意的是在三角形的背景下研究问题，会带来一些隐含的条件，如 $0<A<\pi$，$A+B+C=180°$等，教学中可以在学生自己尝试解决问题后，引导他们进行适当的归纳总结．

基础较好的地区还可以把求 $\tan(2A+2B)$的值改为求 $\tan 2C$ 的值．

四、教学设计案例

两角差的余弦公式（第一课时）

1. 教学任务分析

本课时的中心任务是建立两角差的余弦公式．通过简单运用，使学生初步理解公式的结构及其功能，并为建立其他和（差）角公式打好基础．

从教科书的编写来看，有两个明显特点：

（1）从实例引入课题．以往的教科书一般从数学内部通过逻辑推理的方式引入课题，而本书则从一个背景素材引入，这有利于强调数学与实际的联系，增强学生的应用意识，激发学生学习的积极性．

（2）突出建立公式过程的探索性．教科书努力避免直接呈现逻辑推理过程，而是鼓励学生独立探索，这就要求教师在教学中既要提出能引起学生思维的问题，不能把结果过早地告诉学生，又要组织

学生探索，并对学生的探索活动作出适当的引导．把握其中的度是顺利完成教学任务的关键．

2. 教学重点、难点

重点：通过探索得到两角差的余弦公式．

难点：探索过程的组织和适当引导．这里不仅有学习积极性的问题，还有探索过程必用的基础知识是否已经具备的问题，运用已学知识和方法的能力问题，等等．

3. 教学基本流程

创设情景 以实例引入课题

↓

明确探索目标及途径

↓

组织学生自主探索

↓

通过例题、练习，加强对公式的理解

↓

小结

↓

布置作业

4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动	备　注
1. 教材中由章头图给出的问题．	由给出的情景素材，使学生感受实际问题中对研究和（差）角公式的需要．	（1）使学生经历把实际问题转化成数学问题的过程． （2）引导学生用方程的思想分析求解过程． （3）师生共同得出本节课题．	运用图片和动画展示从实际问题转化成数学问题的过程．
2. 你认为公式会是 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 吗？	（1）使学生明确常犯的直觉性错误为什么是错的． （2）统一对探究目标中“恒等”要求的认识．	让学生自己动脑，动手验证，从而认识要探索的公式在“恒等”方面要求的意义．	
3. 怎样联系单位圆上的三角函数线来探索公式？	（1）加强新旧知识的联系性． （2）使学生从直观角度加强对差角公式结构形式的认识．	让学生亲身经历探索过程： （1）怎样作出角 α，β，$\alpha-\beta$ 的终边； （2）怎样作出角 $\alpha-\beta$ 的余弦线（OM）以及角 α，β 的正弦线，余弦线． （3）怎样利用几何直观寻求 OM 的表示式．	设计一个动画课件把探索过程逐步展示出来．

续表

问　　题	设计意图	师生活动	备　注
4. 怎样联系向量的数量积去探索公式？	让学生经历用向量知识解出一个数学问题的过程，体会向量方法的作用.	让学生经历怎样用向量知识作出探索的过程： (1) 结合图形，明确应选择哪几个向量，它们怎么表示？ (2) 怎样利用向量数量积的概念和计算公式得到探索结果. (3) 对探索过程进一步严格化的思考和处理.	设计一个动画课件把探索过程逐步展示出来.
5. 例1.	这是通过应用理解公式最基础的练习. (1) 三角变换关注角的拆分，易于理解. (2) 由于是具体角，拆分过程容易进行. (3) 拆分的多样性，决定变换的多样性. (4) 思考问题，由 $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 求 $\sin 75^\circ$ 的值，为后面变换函数种类的思考作出铺垫.	(1) 求解过程可完全由学生独立进行. (2) 通过本例，学生应得到对三角变换的一般认识，教师应作适当点评.	
6. 例2.	这是通过应用、理解公式的基础练习. 与例1相比， (1) 它需要思考使用公式前应作出的必要准备. (2) 作出必要准备要运用同角三角函数的知识.	学生作答后教师应对表述的规范作出必要的点评和要求	基础较好的地区还可去掉条件“$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$”，再要求学生解答，让学生学习分类讨论的思想，提高表达能力.
7. 通过本节学习你有哪些收获？	让学生通过小结，反思学习过程，加深对公式及其推导过程的理解.	学生自己思考，小结可写在自己笔记本上，也可以口头交流. 教师可引导学生围绕以下方面小结： (1) 对公式的探索过程： 怎么联系有关知识？ 怎样进行探索？ 在探索方法方面的启示. (2) 利用差角余弦公式方面： 对公式结构和功能的认识； 三角式变换的特点； 表述变换过程. （这部分可结合 P142 的练习进行）	
作业　P151.　1—5.			

五、习题解答

练习（第 127 页）

1. 略.　2. $\frac{\sqrt{2}}{10}$.　3. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.　4. $\frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{12}$.

练习（第 131 页）

1. (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；　(3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；　(4) $2-\sqrt{3}$.

2. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

3. $\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$.

4. -2.

5. (1) 1；　(2) $\frac{1}{2}$；　(3) 1；　(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(5) 原式$=-(\cos 34^\circ\cos 26^\circ-\sin 34^\circ\sin 26^\circ)=-\cos(34^\circ+26^\circ)$
$=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$；

(6) 原式$=-\sin 20^\circ\cos 70^\circ-\cos 20^\circ\sin 70^\circ=-(\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\cos 20^\circ\sin 70^\circ)$
$=-\sin(20^\circ+70^\circ)=-\sin 90^\circ=-1$.

6. (1) 原式$=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$；

(2) 原式$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$；

(3) 原式$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$；

(4) 原式$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$
$=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.

7. 由已知得$\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{3}{5}$，即

$$\sin[(\alpha-\beta)-\alpha]=\frac{3}{5},$$

即
$$\sin(-\beta)=\frac{3}{5}.$$

所以　$\sin\beta=-\frac{3}{5}$. 又 β 是第三象限角，于是

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

因此，$\sin\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\beta\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\beta\sin\frac{5\pi}{4}$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

练习（第 135 页）

1. $\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{24}{25}$，$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{7}{25}$，$\tan\frac{\alpha}{4}=\frac{24}{7}$．注意$\frac{\alpha}{4}$是$\frac{\alpha}{8}$的 2 倍，由 $8\pi<\alpha<12\pi$ 可得 $\pi<\frac{\alpha}{8}<\frac{3\pi}{2}$.

2. $\frac{7}{25}$.

3. $-\sqrt{3}$.

   由已知可得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$，且 $\sin\alpha\neq0$. 于是有 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

4. $-3\pm\sqrt{10}$.

   由 $\tan2\alpha=\frac{1}{3}$ 得$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1}{3}$．这是一个关于 $\tan\alpha$ 的方程，解此方程可求得$\tan\alpha$的值. 体现方程思想的运用.

5. (1) $\frac{1}{4}$；　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；

   (3) 原式$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1}{2}\tan45^\circ=\frac{1}{2}$；

   (4) 原式$=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

习题 3.1（第 137 页）

A 组

1. 略.

2. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

3. $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$.

4. $\frac{1}{2}$.

5. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

6. (1) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；　　(2) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$；　　(3) $-2+\sqrt{3}$.

7. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$；　　$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{6+\sqrt{35}}{12}$.

8. $-\frac{16}{65}$. 注意 $0<A<\pi$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$\cos C=-\cos(A+B)$，$\cos A=\pm\frac{12}{13}$，$\sin B=\frac{4}{5}$. 当 $\cos A=-\frac{12}{13}$时，$A+B>\pi$，不合题意，舍去.

9. $\tan(\theta+\varphi)=-\frac{2}{11}$；　　$\tan(\theta-\varphi)=-2$.

10. $-\frac{1}{3}$. 这里 $\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{3}{2}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\frac{7}{2}$.

11. $\tan 2\alpha=-\frac{4}{7}$；$\tan 2\beta=-\frac{1}{8}$. 注意 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

12. 由题设有 $BD:AD=\frac{1}{3}$，$DC:AD=\frac{1}{2}$，设$\angle BAD=\alpha$，$\angle DAC=\beta$，则 $\tan\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{DC}{AD}=\frac{1}{2}$. 所以 $\tan\angle BAC=\tan(\alpha+\beta)=1$，又 $0°<\angle BAC<180°$，因此$\angle BAC=45°$.

13. (1) $6\sqrt{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$；

(3) $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$；　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}-x\right)$；

(5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(6) $\frac{1}{2}$；

(7) $\sin(\alpha+\gamma)$；　(8) $-\cos(\alpha-\gamma)$；

(9) $-\sqrt{3}$；　(10) $\tan(\beta-\alpha)$.

14. $\sin 2\alpha=0.96$；$\cos 2\alpha=-0.28$.

15. $\sin 2\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；$\cos 2\varphi=-\frac{1}{3}$；$\tan 2\varphi=-2\sqrt{2}$.

16. 由题意设 $\sin B=\sin C=\frac{5}{13}$，且 $0°<B<90°$，所以 $\cos B=\frac{12}{13}$. 因此 $\sin A=\sin(180°-2B)=\sin 2B=\frac{120}{169}$，同样有 $\cos A=-\frac{119}{169}$；$\tan A=-\frac{120}{119}$.

17. 先求得 $\tan 2\beta=\frac{3}{4}$. $\tan(\alpha+2\beta)=1$.

18. $\frac{8-7\sqrt{2}}{18}$. 由已知得　$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，于是有　$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$.

19. (1) $1+\sin 2\alpha$；　(2) $\cos 2\theta$；　(3) $\frac{1}{4}\sin 4x$；　(4) $\tan 2\theta$.

B组

1. 略.
2. 135°. 由 $\tan C=-1$ 且 $0°<C<180°$可得.
3. 反映一般规律的等式是（表述形式不唯一）：

$$\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30°)+\sin\alpha\cos(\alpha+30°)=\frac{3}{4}.$$

证明略.

本题是开放型问题，反映一般规律的等式的表述形式还可以是：

$$\sin^2(\alpha-30°)+\cos^2\alpha+\sin(\alpha-30°)\cos\alpha=\frac{3}{4};$$

$$\sin^2(\alpha-15°)+\cos^2(\alpha+15°)+\sin(\alpha-15°)\cos(\alpha+15°)=\frac{3}{4},$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin\alpha\cos\beta=\frac{3}{4}\text{，其中 }\beta-\alpha=30°\text{，等等.}$$

思考过程要求从角，三角函数种类，式子结构形式三个方面寻找共同特点，从而作出归纳. 对认识

三角函数式特点有帮助，证明过程也会促进推理能力、运算能力的提高.

4. 因为 $|PA|=|P_1P_2|$，则

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2,$$

即

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

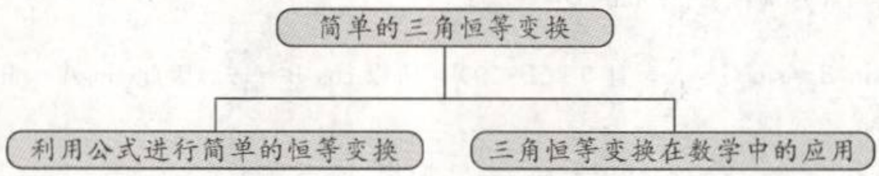
所以

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

说明 给出另一种和角公式推导方法.

3.2 简单的三角恒等变换

一、本节知识结构



二、教学重点、难点

1. 重点：引导学生以已有的十一个公式为依据，以推导积化和差、和差化积、半角公式作为基本训练，学习三角变换的内容、思路和方法，在与代数变换相比较中，体会三角变换的特点，提高推理、运算能力.

2. 难点：认识三角变换的特点，并能运用数学思想方法指导变换过程的设计，不断提高从整体上把握变换过程的能力.

三、编写意图与教学建议

1. 本节主要包括利用已有的十一个公式进行简单的恒等变换，以及三角恒等变换在数学中的应用. 本节的内容都是用例题来展现的. 通过例题的解答，引导学生对变换对象和变换目标进行对比、分析，促使学生形成对解题过程中如何选择公式，如何根据问题的条件进行公式变形，以及变换过程中体现的换元、逆向使用公式等数学思想方法的认识，从而加深理解变换思想，提高学生的推理能力. 教科书把三角恒等变换的应用放在三角变换与三角函数间的内在联系上，从而使三角函数性质的研究得到延伸.

2. 例1和例2并不看重例题所得的结果（结论不要求记忆），而看重得到结果的过程. 教科书中的两个例子尽管变换的内容不同，但希望学生从它们设计变换途径和方法的思考中，能够找到思维过程的共性.

对于例 1，要求以 $\cos\alpha$ 表示$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，教科书提出了“α 与$\dfrac{\alpha}{2}$有什么关系”的思考，这是为了引导学生从 α 与$\dfrac{\alpha}{2}$之间的关系出发思考 $\cos\alpha$ 与$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$之间的关系，通过对这种关系的思考而建立这两个三角式之间的联系．实际上，只要理解倍、半的相对性，就容易选择倍角公式($\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$)作为联系的纽带，然后再在方程思想、换元思想等的指导下，求得所要的结果就比较容易了．

例 1 后的“思考”，主要为了引导学生对“所包含的角，以及这些角的三角函数种类的差异”对三角变换的影响进行认识，从而使学生更好地把握三角恒等变换的特点．

例 2 要证明：(1) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

(2) $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

对于(1)，如果从其中右式出发，那么仅利用和（差）的正弦公式作展开、合并，也会得出左式，作为这道题目的证明当然也是对的．教科书提出了“这两个式子的左右两边在结构形式上有什么不同”的思考题，这是为了更好地发挥本例的教育功能．把两个三角式结构形式上的不同点作为思考的出发点，并在建立它们之间的联系进而消除不同点上下功夫，这样不仅有利于深化对和（差）角公式的理解，而且还有利于对本例两个小题内在联系的认识．

那么，哪些公式中包含 $\sin\alpha\cos\beta$ 呢？可以想到是和角正弦公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

从方程角度看这个等式，$\sin\alpha\cos\beta$ 看作一个未知数，$\sin(\alpha+\beta)$ 看作常数，那么 $\cos\alpha\sin\beta$ 应看作另一个未知数，二元方程要求得确定解，必须有两个方程，这就促使学生考虑还有没有其他包含 $\sin\alpha\cos\beta$ 的公式．

列出

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

后，解相应的以 $\sin\alpha\cos\beta$，$\cos\alpha\sin\beta$ 为未知数的二元一次方程组，就容易得到所要的结果．

由(1)得到以和的形式表示积的形式后，解决它的反问题，即用积的形式表示和的形式，在思路和方法上都与(1)没有什么区别．

积化和差公式、和差化积公式还有六个，它们都放在练习中．

从上述分析可以发现，教科书中出现的这两个例子，在分析题意，明确思维起点；选择公式，把握思维方向；实施变换，运用数学思想等方面存在着共同点，教学中应对此作出引导．

3. 例 3，例 4 是三角恒等变换在数学中应用的举例，它使三角函数中对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质研究得到延伸，体现了三角变换在化简三角函数式中的作用．这些在学习解三角形的知识后还会有一定的运用空间．

例 3 是一个简单、常见的先通过三角恒等变换化简函数表达式，然后再讨论有关性质的问题．这个问题的一般化，就是对 $y=a\sin x+b\cos x$ 性质的讨论．对于数学学习水平较高的学生，教学中可以再适当补充几个同类问题（非特殊角的），让学生进行讨论．

对于例 4，还可以去掉“记$\angle COP=\alpha$”，结论改成“求矩形 $ABCD$ 的最大面积”．这时，在建立函数模型时，对自变量可多一种选择，如设 $AD=x$，则 $S=x\left(\sqrt{1-x^2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)$．尽管对所得函数还暂时无法求其最大值，但能促进学生对函数模型多样性的理解，并能使学生感受到以角为自变量的优点．

四、习题解答

练习（第 142 页）

1. 略.　　2. 略.　　3. 略.

4. (1) $y=\frac{1}{2}\sin 4x$. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，递增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right]$ ($k\in\mathbf{Z}$)，最大值为$\frac{1}{2}$；

(2) $y=\cos x+2$. 最小正周期为 2π，递增区间为$[\pi+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi]$ ($k\in\mathbf{Z}$)，最大值为 3；

(3) $y=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right]$ ($k\in\mathbf{Z}$)，最大值为 2.

习题 3.2（第 143 页）

A 组

1. (1) 略；

(2) 提示：左式通分后分子分母同乘以 2；

(3) 略；

(4) 提示：用 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$ 代替 1，用 $2\sin\varphi\cos\varphi$ 代替 $\sin 2\varphi$；

(5) 略；

(6) 提示：用 $2\cos^2\theta$ 代替 $1+\cos 2\theta$；

(7) 提示：用 $2\sin^2\theta$ 代替 $1-\cos 2\theta$，用 $2\cos^2\theta$ 代替 $1+\cos 2\theta$；

(8) 略.

2. 由已知可有

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}, \qquad ①$$

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}. \qquad ②$$

(1) ②×3－①×2 可得 $\sin\alpha\cos\beta=5\cos\alpha\sin\beta$；

(2) 把(1)所得的两边同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 得 $\tan\alpha=5\tan\beta$.

注意，这里 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ 隐含于①、②之中.

3. 由已知可解得 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$. 于是 $\tan 2\theta=-\frac{4}{3}$，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$. 因此 $\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 由已知可解得 $x=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，于是 $x^2+y^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

5. $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，最小正周期是$\frac{\pi}{2}$，递减区间为$\left[\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right]$ ($k\in\mathbf{Z}$).

B 组

1. 略.

2. 由于 $76+2\times 7=90$，所以 $\sin 76^\circ=\sin(90^\circ-14^\circ)=\cos 14^\circ=m$，

即 $2\cos^2 7^\circ-1=m$，得 $\cos 7^\circ=\sqrt{\frac{m+1}{2}}$.

3. 设存在锐角 α，β 使 $\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3}$，所以$\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{3}$，$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sqrt{3}$，又 $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$，于是有 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta=3-\sqrt{3}$. 由此可解得 $\tan\beta=1$，$\beta=\frac{\pi}{4}$. 所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$. 经检验 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$ 是符合题意的两锐角.

4. 线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta),\ \frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\right)$. 过 M 作 MM_1 垂直于 x 轴，交 x 轴于 M_1. $\angle MOM_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

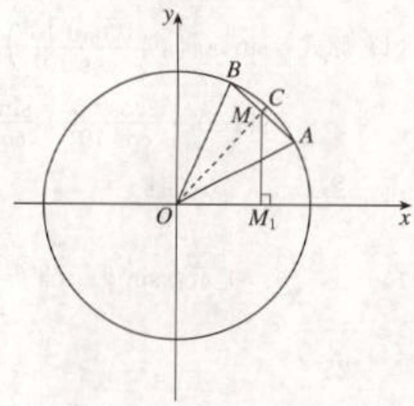
在 $\mathrm{Rt}\triangle OMA$ 中，$OM=OA\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OM_1M$ 中，$OM_1=OM\cos\angle MOM_1=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$$M_1M=OM\sin\angle MOM_1=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

于是有 $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.



第 4 题

5. 当 $x=2$ 时，$f(\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

当 $x=4$ 时，$f(\alpha)=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha，此时有\frac{1}{2}\leqslant f(\alpha)\leqslant 1；$$

当 $x=6$ 时，$f(\alpha)=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha，此时有\frac{1}{4}\leqslant f(\alpha)\leqslant 1.$$

由此猜想，当 $x=2k$，$k\in\mathbf{N}_+$ 时，$\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant f(\alpha)\leqslant 1$.

6. (1) $y=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)=5\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{3}{5}$，$\sin\varphi=\frac{4}{5}$.

所以，y 的最大值为 5，最小值为 -5；

(2) $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

所以，y 的最大值为 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值为 $-\sqrt{a^2+b^2}$.

复习参考题（第 146 页）

A 组

1. $\frac{16}{65}$. 提示：$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.

2. $\frac{56}{65}$. 提示：$\sin(\alpha+\beta)=-\sin[\pi+(\alpha+\beta)]=-\sin\left[\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

3. 1.

4. (1) 提示：把公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 变形；

(2) $\sqrt{3}$；　(3) 2；　(4) $-\sqrt{3}$.

提示：利用(1)的恒等式.

5. (1) 原式 $=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}=4$；

(2) 原式 $=\sin 40^\circ\left(\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}-\sqrt{3}\right)=\sin 40^\circ\cdot\frac{\sin 10^\circ-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{-2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{-\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=-1$；

（3）原式$=\tan 70^\circ\cos 10^\circ\left(\dfrac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}-1\right)=\tan 70^\circ\cos 10^\circ\cdot\dfrac{\sqrt{3}\sin 20^\circ-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}\cdot\cos 10^\circ\cdot\dfrac{-2\sin 10^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{-\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ}=-1$；

（4）原式$=\sin 50^\circ\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)=\sin 50^\circ\cdot\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\sin 50^\circ\cdot\dfrac{2\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}=1$.

6.（1）$\dfrac{9}{5}$；（2）$\dfrac{24}{25}$；

（3）$\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 提示：$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$；

（4）$\dfrac{17}{25}$.

7. 由已知可求得 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{2}{5}$，$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5}$. 于是有 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{1}{2}$.

8.（1）左式$=2\cos^2 2\alpha-1+4\cos 2\alpha+3=2(\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha+1)$

$=2(\cos 2\alpha+1)^2=2(2\cos^2\alpha)^2=8\cos^4\alpha=$右式；

（2）左式$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}$

$=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha+\dfrac{1}{2}=$右式；

（3）左式$=\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=$右式；

（4）左式$=\dfrac{3-4\cos 2A+2\cos^2 2A-1}{3+4\cos 2A+2\cos^2 2A-1}=\dfrac{2(\cos^2 2A-2\cos 2A+1)}{2(\cos^2 2A+2\cos 2A+1)}$

$=\dfrac{(1-\cos 2A)^2}{(1+\cos 2A)^2}=\dfrac{(2\sin^2 A)^2}{(2\cos^2 A)^2}=\tan^4 A=$右式.

9.（1）$y=1+\sin 2x+1+\cos 2x=\sin 2x+\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$. 递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$；

（2）最大值为$\sqrt{2}+2$，最小值为 $2-\sqrt{2}$.

10. $f(x)=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x$

$=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

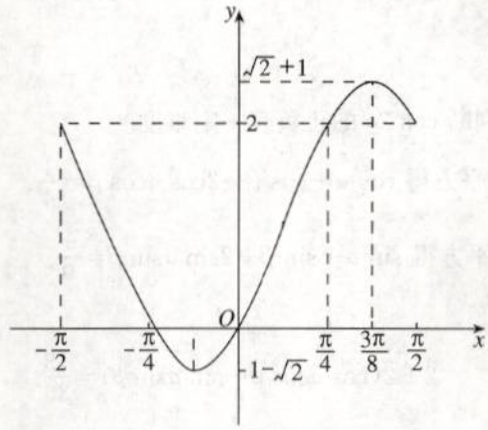
（1）最小正周期是 π；

（2）由 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$得 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}\right]$，所以当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$，即 $x=\dfrac{3\pi}{8}$时，$f(x)$的最小值为 $-\sqrt{2}$. $f(x)$取最小值时 x 的集合为$\left\{\dfrac{3\pi}{8}\right\}$.

11. $f(x)=2\sin^2 x+2\sin x\cos x=1-\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$.

(1) 最小正周期是 π，最大值为 $\sqrt{2}+1$；

(2) $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象如下图：



第 12 (2) 题

12. $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a$.

(1) 由 $2+a=1$ 得 $a=-1$；

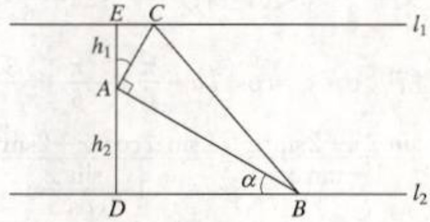
(2) $\left\{x \mid 2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

13. 如图，设 $\angle ABD=\alpha$，则 $\angle CAE=\alpha$，

$AB=\frac{h_2}{\sin\alpha}$，$AC=\frac{h_1}{\cos\alpha}$.

所以　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{h_1h_2}{\sin 2\alpha}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

当　$2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 的最小值为 h_1h_2.



第 14 题

B 组

1. 解法一：由 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$ 及 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，可解得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$. 所以 $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$，

$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

解法二：由 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$　得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{25}$，$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$. 所以 $\cos^2 2\alpha=\frac{49}{625}$.

又由　$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

因为　$\alpha\in[0,\ \pi]$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

而当　$\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right]$ 时，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$；

当 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$，即 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$.

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{31\sqrt{2}}{50}.$$

解法一运算较复杂，解法二判断 $\cos 2\alpha$ 的正负有一定难度.

2. 把 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ 两边分别平方得 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$.

把 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$ 两边分别平方得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{9}$.

把所得两式相加，得

$$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}.$$

即

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{36}.$$

所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}$.

3. 由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$ 可得 $\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

又 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，所以 $-\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$，于是 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

4. $$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=\frac{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$$

$$=\sin 2x\,\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\sin 2x\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

由 $\frac{17\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{4}$ 得 $\frac{5\pi}{3}<x+\frac{\pi}{4}<2\pi$，又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{4}{5}$，$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{4}{3}$.

$\cos x=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\sin x=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin 2x=\frac{7}{25}$.

所以 $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=-\frac{28}{75}$.

5. 把已知代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$ 中，得 $(2\sin\alpha)^2-2\sin^2\beta=1$. 变形得 $2(1-\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\beta)=1$，$2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$，$4\cos^2 2\alpha=4\cos^2 2\beta$.

本题从对比已知条件和所证等式开始，可发现应消去已知条件中含 θ 的三角函数. 考虑 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ 这两者又有什么关系呢？即得上解法.

5、6 两题上述解法称为消去法.

6. $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+1+\cos 2x+m=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+m+1$.

由 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right]$，于是有 $2+m+1=6$. 解得 $m=3$.

$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4(x\in\mathbf{R})$的最小值为$-2+4=2$，此时$x$的取值集合由$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$求得，为$\left\{x \mid x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

7. 设$AP=x$，$AQ=y$，$\angle BCP=\alpha$，$\angle DCQ=\beta$，则$\tan\alpha=1-x$，$\tan\beta=1-y$. 于是$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2-(x+y)}{(x+y)-xy}$.

又$\triangle APQ$的周长为2，即$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2$. 变形可得$xy=2(x+y)-2$.

于是$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2-(x+y)}{(x+y)-[2(x+y)-2]}=1$，又$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle PCQ=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)=\dfrac{\pi}{4}$.

8. (1) 由$\begin{cases}\sin\beta+\cos\beta=\dfrac{1}{5},\\ \sin^2\beta+\cos^2\beta=1\end{cases}$ 可得$25\sin^2\beta-5\sin\beta-12=0$.

解得 $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$或$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$(由$\beta\in(0,\pi)$，舍去).

所以 $\cos\beta=\dfrac{1}{5}-\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$.

于是 $\tan\beta=-\dfrac{4}{3}$.

(2) 根据所给条件，可求出仅由$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\tan\beta$表示的三角函数式的值. 例如，$\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\cos 2\beta+2$，$\dfrac{\sin\beta+\cos\beta}{2\tan\beta}$，$\dfrac{\sin\beta-\cos\beta}{3\sin\beta+2\cos\beta}$，等等.

III 自我检测题

(45分钟)

一、选择题：本大题共6小题，每小题6分，共36分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\cos 555°$的值为 ( ).

(A) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (B) $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2. 化简$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$得到 ( ).

(A) $\sin 2\alpha$ (B) $-\sin 2\alpha$ (C) $\cos 2\alpha$ (D) $-\cos 2\alpha$

3. 已知$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，那么角2α的终边所在的象限为 ( ).

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

4. 对于等式$\sin 3x=\sin 2x+\sin x$，下列说法中正确的是 ( ).

(A) 对于任意$x\in\mathbf{R}$，等式都成立 (B) 对于任意$x\in\mathbf{R}$，等式都不成立

(C) 存在无穷多个 $x\in\mathbf{R}$ 使等式成立　　(D) 等式只对有限个 $x\in\mathbf{R}$ 成立

5. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}$，那么 $\tan(\beta-2\alpha)$ 的值为　　(　　).

(A) $-\frac{3}{4}$　　(B) $-\frac{1}{12}$　　(C) $-\frac{9}{8}$　　(D) $\frac{9}{8}$

6. 函数 $y=\cos 2x\cos\frac{\pi}{5}-2\sin x\cos x\sin\frac{6\pi}{5}$ 的递增区间是　　(　　).

(A) $\left[k\pi+\frac{\pi}{10},\ k\pi+\frac{3\pi}{5}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$　　(B) $\left[k\pi-\frac{3\pi}{20},\ k\pi+\frac{7\pi}{20}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $\left[2k\pi+\frac{\pi}{10},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{5}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$　　(D) $\left[k\pi-\frac{2\pi}{5},\ k\pi+\frac{\pi}{10}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分．把答案填写在题中横线上．

7. 化简 $\frac{\sin(\alpha+30^\circ)+\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$ 得________.

8. 等腰三角形一个底角的余弦为 $\frac{2}{3}$，那么这个三角形顶角的正弦值为________.

9. 已知 $\cos 2\alpha=-\frac{1}{9}$，那么 $\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$ 的值为________.

10. 已知 $13\sin\alpha+5\cos\beta=9$，$13\cos\alpha+5\sin\beta=15$，那么 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值为________.

三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 20 分，共 40 分，解答应写出文字说明，证明过程及演算步骤．

11. 设 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，求 $\alpha-\beta$ 的值．

12. 已知 $f(x)=2\sin^4 x+2\cos^4 x+\cos^2 2x-3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[\frac{\pi}{16},\ \frac{3\pi}{16}\right]$ 上的最小值并求当 $f(x)$ 取最小值时，x 的取值．

参考解答及说明

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	A	D	C	B	D

说明　1. 本题主要考查两角差的余弦公式及诱导公式：$\cos 555^\circ=\cos 195^\circ=-\cos 15^\circ=-\cos(45^\circ-30^\circ)$．它是教材中例题的延伸．

2. 本题考查倍角公式及诱导公式，并且要用到换元思想．

原式 $=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

3. 本题考查确定角的终边在哪个象限的方法及倍角公式．前面已经学过确定一个角在哪个象限，必须知道该角的两种三角函数值的符号．这里无论选择角 2α 的哪两种三角函数，都要用到倍角公式，如由已知得 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha>0$.

4. 本题考查与“恒等”相关的一些表述的含义的理解. 判断时应注意 $x=0$，$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$显然都使得等式成立.

5. 本题考查利用和（差）的正切公式进行三角变换. 在寻找有关角之间联系时又要求作出适当微调. 对能力是一个考验. 角的联系可参考 $\beta-2\alpha=-[\alpha+(\alpha-\beta)]$或 $\beta-2\alpha=(\beta-\alpha)-\alpha$.

6. 本题是一道体现三角函数与三角变换相联系的小综合题，其中要反用倍角正弦、差角余弦公式. $y=\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{5}-\sin 2x\left(-\sin\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{5}+\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{5}=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$.

二、填空题

7. 1.　　8. $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.　　9. $\dfrac{25}{36}$.　　10. $\dfrac{56}{65}$.

说明　7. 本题考查利用和差公式的应用，题目对准确使用公式有一定干扰.

8. 本题是三角变换在几何问题中的简单应用. 设 A 是等腰$\triangle ABC$ 的顶角，则 $\cos B=\dfrac{2}{3}$. 所以 $\sin A=\sin(180^\circ-2B)=\sin 2B=2\sin B\cos B$.

9. 本题考查倍角公式的运用，由已知得 $1-2\sin^2\alpha=-\dfrac{1}{9}$后，用解方程的方法求得 $\sin^2\alpha=\dfrac{5}{9}$体现了方程思想的运用.

10. 本题把三角变换与代数变换综合于一体，关键在于怎样由已知得到 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. 采取了把已知两式两边平方再相加.

三、解答题

11. 解法一：由 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$，又　$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，

于是　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\times\dfrac{1}{3}}=1.$

又由 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$可得$-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

因此，$\alpha-\beta=\dfrac{5\pi}{4}$.

解法二：由 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$得　$\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

由　$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

所以　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又由　$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$可得$-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

因此，$\alpha-\beta=\dfrac{5\pi}{4}$.

说明　本题考查利用和（差）角公式进行三角恒等变换的技能，也体现了一定的应用性. 在高中，求角的大小问题，往往通过以下两步来实现：(1) 先求此角的某种三角函数值；(2) 依题设条件确定角的变化范围. 这里的三角变换就是围绕以上两步来设计的. 要注意解法二中若先求 $\cos(\alpha-\beta)$的值会麻烦些.

12. 先变换函数 $f(x)$ 的解析式：

方法一：$f(x)=2\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\cos^2 2x-3$

$$=\frac{1}{2}(2+2\cos^2 2x)+\cos^2 2x-3$$
$$=1+2\cos^2 2x-3$$
$$=1+\cos 4x-2$$
$$=\cos 4x-1.$$

方法二：$f(x)=2(\sin^4 x+\cos^4 x)+\cos^2 2x-3$

$$=2[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]+\cos^2 2x-3$$
$$=2-(2\sin x\cos x)^2+\cos^2 2x-3$$
$$=\cos^2 2x-\sin^2 2x-1$$
$$=\cos 4x-1.$$

(1) $f(x)$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) 由 $x\in\left[\dfrac{\pi}{16},\dfrac{3\pi}{16}\right]$ 得 $4x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

所以当 $4x=\dfrac{3\pi}{4}$ 即 $x=\dfrac{3\pi}{16}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $\cos\dfrac{3\pi}{4}-1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=-\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$.

说明 本题考查三角函数的基本性质以及三角恒等变换的知识. 化简三角函数式是这里的关键步骤. 化简变换的两种设计都以降低式中的次数为起点. 方法一采用三角依据，方法二采用代数依据. 另外求函数 $f(x)$ 的最小值时，要注意定义域的制约，不要认为这里的最小值是 $-1-1=-2$.