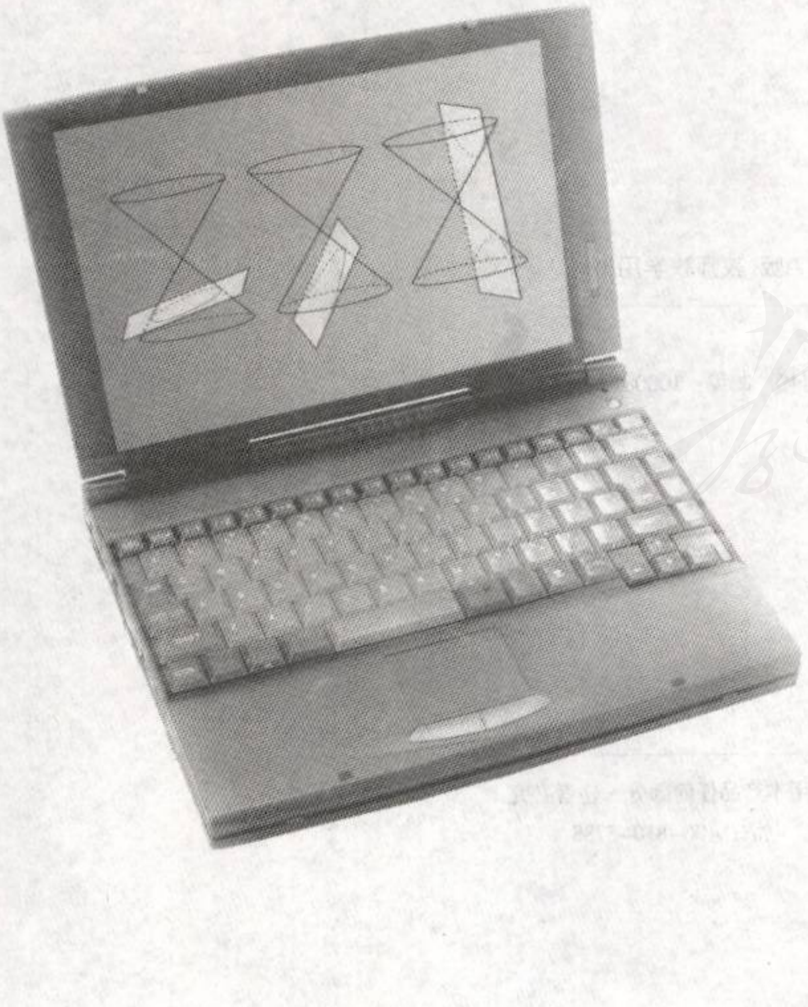
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 1–1

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修1—1（A版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—2版．—北京：人民教育出版社，2007.5（2019.7重印）

ISBN 978-7-107-18947-0

Ⅰ．①普… Ⅱ．①人… ②课… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第031309号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 1-1 A版 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 保定市中画美凯印刷有限公司
版 次 2007年5月第2版
印 次 2019年7月第21次印刷
开 本 890毫米×1240毫米 1/16
印 张 7.25
字 数 190千字
定 价 15.70元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：章建跃
主要编者：俞求是　胡永建　陶维林　张劲松　王　嵘
责任编辑：王　嵘
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材. 作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下. 这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容.

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述. 这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解.

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学. 我们这里选择恩格斯观察数学的角度. 恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学. 这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”. 概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中. 但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军. 考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意.

集合 只要研究问题，就有研究对象. 这些研究对象都是数学中的元素. 把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合. 因而元素、集合是处处存在的. 另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义. 在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合. 这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用.

统计 统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论. 统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法. 在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等.

概率 概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础. 在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具. 概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小. 这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似. 但是两种度量之间存在如下区别：

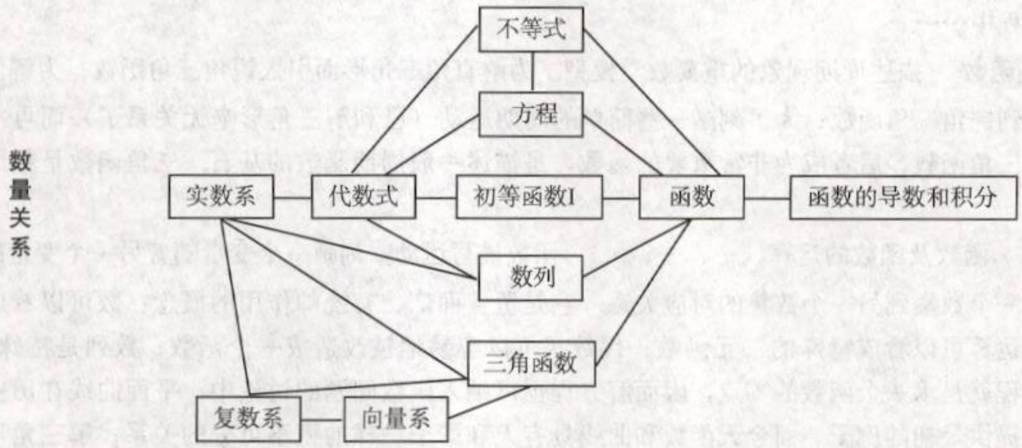
1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制.
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形.

算法 实现具体计算数量关系的手段. 机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程. 在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数).

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对（x，y），而空间中向量的坐标是三实数组（x，y，z）. 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数（$a+bi$）曾被推广到四元数（$a+xi+yj+zk$），而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等).

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数系 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的“＝”换成实数系所特有的“＞”（或“＜”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “＞”的性质比“＝”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数I 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

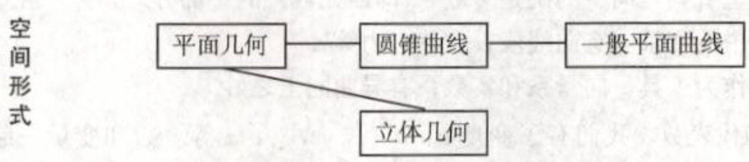
函数 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分的关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看 三角函数．把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

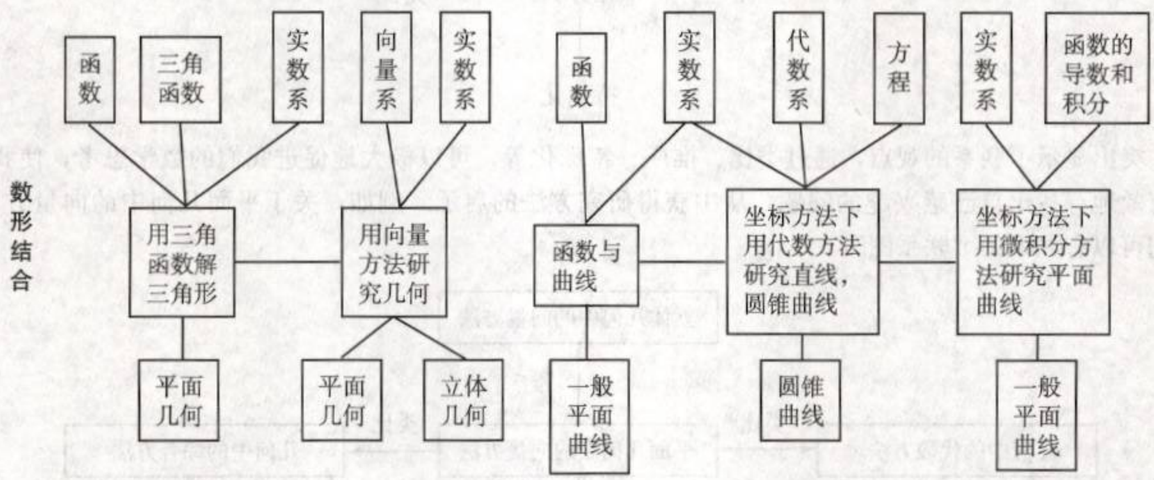
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具．用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具．用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法．它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了．

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵．让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感．

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点．参看函数．

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等．

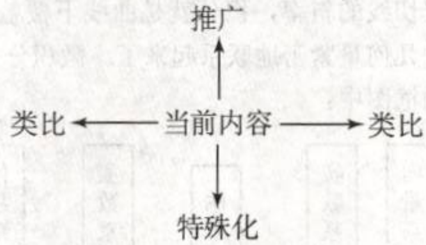
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形．直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来；曲线的切线斜率用导数表示出来；等等．一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了．

5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质．这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等．

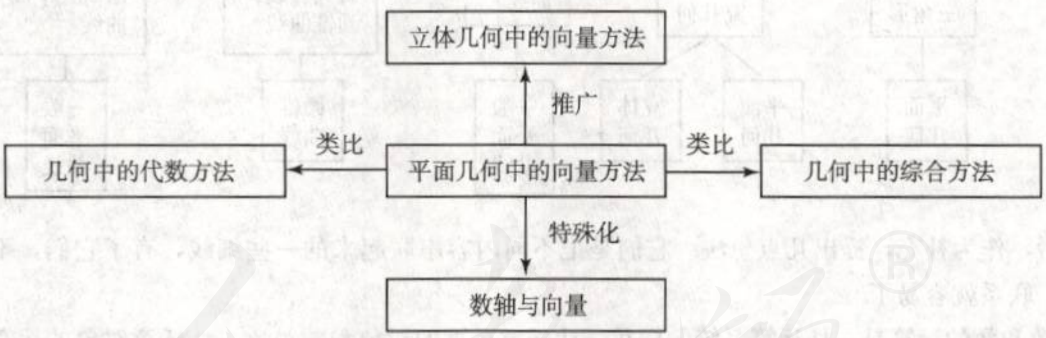
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质，后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律；等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性等**，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学概念和结论，数学思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3．“科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{推广} & \\
 & \uparrow & \\
\text{类比} \longleftarrow & \text{当前内容} & \longrightarrow \text{类比} \\
 & \downarrow & \\
 & \text{特殊化} &
\end{array}
$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”

属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. “时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识.

5. “联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标与学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

(3) 难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(4) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴涵的

数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(3) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题所具备的巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需要的可以从人教网上下载.

本书是选修课程数学 1-1 的教师教学用书，包含常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用三章内容，它们是学习后继必修系列和选修系列的基础. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

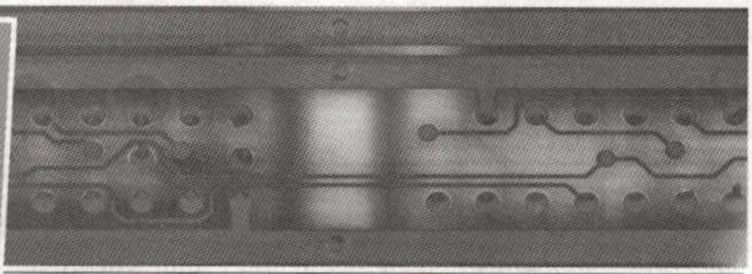
第 1 章	常用逻辑用语	约 8 课时
第 2 章	圆锥曲线与方程	约 12 课时
第 3 章	导数及其应用	约 16 课时

除已列出的主要编写者外，参加本书讨论的还有：王申怀、蒋佩锦.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

第一章 常用逻辑用语



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质. 无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维. 在本章中，学生将在义务教育阶段的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，从而更好地进行交流.

2. 学习目标

(1) 命题及其关系

①了解命题的逆命题、否命题与逆否命题，会分析四种命题的相互关系.

②理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

(2) 简单的逻辑联结词

通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.

(3) 全称量词与存在量词

①通过生活和数学中的实例，理解全称量词与存在量词的意义.

②能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图

2. 对内容安排的说明

本章共分4节：1.1 命题及其关系；1.2 充要条件；1.3 逻辑联结词；1.4 全称量词与存在量词.

逻辑是研究思维规律的学科，本章中要学习的是数学中常用的逻辑用语. 逻辑用语在数学中具有重要的作用，学习数学需要全面准确地理解概念，正确地进行表述、判断和推理，这些都离开不对逻辑知识的掌握和运用. 进一步，在日常生活中，为了使我们的语言表达和信息的传递更加准确、清楚，常常要用一些逻辑用语、基本的逻辑知识，常用逻辑用语是认识问题、研究问题不可缺少的工具.

教科书在章引言中简要阐述了学习常用逻辑用语的意义. 接着，在各节中介绍了命题、真命题、假命题、命题的条件和结论的基本概念，以及原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念，归纳了四种命题之间的关系，借助于互为逆否命题具有相同的真假性判断命题的真假. 教科书还简明扼要地介绍了充分条件、必要条件和充要条件. 对于简单的逻辑联结词“且”“或”“非”，规定了判断由它们联结得到的新命题真假的法则. 最后，简要介绍了全称量词、存在量词以及含有一个量词的命题的否定.

三、课时安排

本章约需8课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 命题及其关系	约2课时
1.2 充分条件与必要条件	约2课时
1.3 逻辑联结词	约2课时
1.4 全称量词与存在量词	约2课时

II 教科书分析

章引言简要地介绍了学习常用逻辑用语的意义. 一方面，常用逻辑用语被广泛用于日常生活，是语言表达的工具、信息交流的工具；另一方面，常用逻辑用语是数学语言的组成部分，是数学描述、判断、推理的工具，学习数学离不开常用逻辑用语.

1.1 命题及其关系

一、本节知识结构

二、教学重点与难点

本节的教学重点是了解命题的逆命题、否命题、逆否命题，教学难点是分析四种命题的相互关系以及四种命题的真假性之间的关系.

三、编写意图与教学建议

本节约需 2 课时.

命题、四种命题及其相互关系是逻辑学的基本知识．数学学科包含了大量的命题，了解命题的基本知识，认识命题的相互关系，对于掌握具体的数学学科知识很有帮助.

1.1.1 命题

1. 关于命题

本节首先引入命题以及真命题、假命题的概念，要求学生能判断语句是否为命题．本节涉及的命题多具有“若 p，则 q”的形式，某些命题则可以经过改写成为这种形式．这样，命题的条件和结论就很清楚了，其中 p 是命题的条件，q 是命题的结论．“若 p，则 q”形式的命题，也经常写成“如果 p，那么 q”的形式.

命题陈述了我们所思考的对象具有某种属性，或者不具有某种属性．它总是肯定什么，或者否定什么．教科书规定“可以判断真假的陈述句叫做命题”，使我们对于一个语句是否为命题的判断更加简单，根据这样的规定，如果一个语句不是陈述句（比如是疑问句，祈使句，感叹句等），那么这个语句就一定不是命题．命题是否正确，要看它是否与客观事实相符合，也就是要用实践来检验．因而，命题可分为真命题和假命题．在一个命题系统中，一个命题的真实性已经为人类实践所证实而被认为不需要证明，并作为证明其他命题的依据，这样的真命题就是公理．如果命题的真实性是根据公理或其他已知的真命题经过符合逻辑的推理证明出来的，这样的真命题就是定理.

例 1 的目的是引导学生学习判断一个语句是否为命题，以及判断一个命题的真假的方法.

2. 关于命题形式

数学中的命题大多可以表示成以下形式：如果某个对象具有某个性质 p，那么这个对象也具有性质 q，或者，更简单些：若 p，则 q．这里，p 是命题的条件，q 是命题的结论.

有些命题的叙述，如“对顶角相等”，其中条件、结论并非那么分明，但我们可以把它改写成上述形式：若两个角是对顶角，则这两个角相等．本章的讨论中，应该要求学生能够分清命题的条件和结论是什么．教科书中也出现类似这样的命题，实际上是一些命题简缩的写法.

例 2 和例 3 的目的是对于命题中的条件与结论作判断，以及改写命题的形式.

1.1.2 四种命题

本节依次介绍了四种命题，即原命题、逆命题、否命题和逆否命题.

命题“若 p，则 q”反映了条件 p 对于 q 的因果关系．人们为了更深入地掌握 p 与 q 之间的关系，往往不仅研究原命题“若 p，则 q”，而且还要研究它的各种形变.

1. 把“若 p，则 q”的条件和结论换位，即“若 q，则 p”，考察 q 对于 p 的因果关系，称这个命题为原命题的逆命题.

2. 把“若 p，则 q”的条件和结论分别否定，即“若 $\neg p$，则 $\neg q$”，考察 $\neg p$ 对于 $\neg q$ 的因果关系，称这个由命题的条件、结论同时换质得到的命题为原命题的否命题.

3. 把“若 p，则 q”的条件和结论换位后再分别否定，或分别换质后再换位，得到“若 $\neg q$，则 $\neg p$”，考察 $\neg q$ 对于 $\neg p$ 的因果关系，称命题“若 $\neg q$，则 $\neg p$”为原命题的逆否命题.

要注意的是，对于一个一般的数学命题，由于命题的条件和结论可能未清楚地给出，制作其逆命题就是一个容易混淆的问题. 在此，只要求考虑明确地给出条件和结论的命题.

以下的例题可以供教学时参考.

例　写出以下命题的逆命题、否命题和逆否命题.

(1) 如果直线垂直于平面内的两条相交直线，那么这条直线垂直于平面.

(2) 如果 $x>10$，那么 $x>0$.

解：(1) 逆命题：如果直线垂直于平面，那么这条直线垂直于平面内的两条相交直线；

否命题：如果直线不垂直于平面内的两条相交直线，那么这条直线不垂直于平面；

逆否命题：如果直线不垂直于平面，那么这条直线不垂直于平面内的两条相交直线.

(2) 逆命题：如果 $x>0$，那么 $x>10$；

否命题：如果 $x\leqslant 10$，那么 $x\leqslant 0$；

逆否命题：如果 $x\leqslant 0$，那么 $x\leqslant 10$.

1.1.3　四种命题间的相互关系

本段内容介绍四种命题的相互关系，互为逆否命题具有相同的真假性.

由于“逆”“否”“逆否”等关系是对称的，所以有四种命题的关系图 1.1-1（教科书第 7 页）.

关于原命题与逆否命题具有相同的真假性要经过学生对于一些具体命题的讨论后归纳得到. 以下命题可供参考.

如果一个数列中各项都相等，那么这个数列是等差数列. 它是一个真命题.

此命题的逆命题是：如果一个数列是等差数列，那么这个数列中各项都相等. 它是一个假命题.

此命题的否命题是：如果一个数列中各项不都相等，那么这个数列不是等差数列. 它是一个假命题.

此命题的逆否命题是：如果一个数列不是等差数列，那么这个数列中各项不都相等. 这是一个真命题.

关于命题之间等价性的证明有不同的方法，这里借助于真值表加以说明. 对于四种命题有如下真值表.

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to\neg q$	$\neg q\to\neg p$
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见

$$p\to q\equiv\neg q\to\neg p,$$
$$q\to p\equiv\neg p\to\neg q.$$

即，原命题与逆否命题逻辑等价，逆命题与否命题逻辑等价. 不过教学中不要求借助真值表表述逆否命题之间的等价性.

由于原命题和它的逆否命题等价，即具有相同的真假性，在直接证明原命题有困难时，可以考虑证明与它等价的逆否命题，这种方法是间接证明命题的方法，是反证法的一种，教科书的例 4 就是这种证法的一个例子. 下面的例子也可作为教学时的参考.

例　已知 $p^3+q^3=2$，求证：$p+q\leqslant 2$.

分析：此题不易从已知推导出求证的结论. 我们考虑是否能够比较容易地证明命题的逆否命题：如果 $p+q>2$，那么 $p^3+q^3\neq 2$.

证明：假设 $p+q>2$，那么

$$q>2-p,$$

根据幂函数 $y=x^3$ 的单调性，得

$$q^3>(2-p)^3,$$

即

$$q^3>8-12p+6p^2-p^3,$$

$$p^3+q^3>8-12p+6p^2=6(p-1)^2+2,$$

所以

$$p^3+q^3>2.$$

所以

$$p^3+q^3\neq 2.$$

这说明，原命题的逆否命题为真命题，从而原命题为真命题.

四、教学设计案例

1.1　命题及其关系

1. 教学任务分析

使学生了解命题的概念；了解命题的逆命题、否命题与逆否命题；会分析四种命题的相互关系.

命题、四种命题及其相互关系是逻辑学的基本知识. 数学学科包含了大量的命题，了解命题的基本知识，认识命题的相互关系，对于掌握具体的数学学科知识很有帮助.

2. 教学重点、难点

教学重点是命题的概念和四种命题的关系.

教学难点是四种命题的关系.

3. 教学基本流程

(1) 全章内容的引入：为什么要学习常用逻辑用语；本章基本内容的概述.

(2) 命题概念的教学，“若 p，则 q” 形式命题的条件与结论. 第 4 页练习.

(3) 四种命题的关系的教学.

4. 教学情境设计

问题 1：我们在初中已经学过许多数学命题，什么叫做命题？你能举出一些数学命题的例子吗？

设计意图：命题是一个基本而常用的概念，学生应该了解这个概念，可以通过一些数学命题的例子加深对于命题概念的理解，并为引入“若 p ，则 q” 形式的数学命题，以及这种形式的数学命题的

条件和结论作准备.

师生活动：举例说明数学命题，分析命题的概念.

问题2：分析第4页中的“思考”，你还能写出具有类似的条件和结论关系的四个命题吗？

设计意图：教科书第4页中的“思考”给出了典型的具有互逆、互否、互为逆否关系的四个命题，学生通过观察，对于四种命题有一个初步的认识，有利于后续内容的学习.

师生活动：制作具有四种命题关系的命题.

问题3：对于某一个命题，写出它的逆命题、否命题、逆否命题．它们之间有什么关系呢？它们的真假性之间有什么关系呢？它们的真假性之间有什么必然联系吗？

设计意图：原命题、逆命题、否命题与逆否命题两两之间的关系并不显然，而对于互为逆否命题具有相同的真假性结论，在教学中应该让学生通过具体的命题，经过归纳，以及初步的解释说明来学习和体会这些知识.

师生活动：学生构造四种命题的具体例子，分析归纳得到四种命题的关系，以及真假性的联系.

五、习题解答

练习（第4页）

1. 略.
2. (1) 真；(2) 假；(3) 真；(4) 真.
3. (1) 若三角形是等腰三角形，则三角形两腰上的中线相等．这是真命题.
   (2) 若函数是偶函数，则函数的图象关于 y 轴对称．这是真命题.
   (3) 若两个平面垂直于同一平面，则这两个平面互相平行．这是假命题.

练习（第6页）

(1) 逆命题：若一个整数能被5整除，则这个整数的末位数是0．这是假命题.
否命题：若一个整数的末位数不是0，则这个整数不能被5整除．这是假命题.
逆否命题：若一个整数不能被5整除，则这个整数的末位数不是0．这是真命题.

(2) 逆命题：若一个三角形有两个角相等，则这个三角形有两条边相等．这是真命题.
否命题：若一个三角形有两条边不相等，则这个三角形有两个角不相等．这是真命题.
逆否命题：若一个三角形有两个角不相等，则这个三角形有两条边不相等．这是真命题.

(3) 逆命题：图象关于原点对称的函数是奇函数．这是真命题.
否命题：不是奇函数的函数的图象不关于原点对称．这是真命题.
逆否命题：图象不关于原点对称的函数不是奇函数．这是真命题.

练习（第8页）

证明：若 $a-b=1$，则

$$\begin{aligned}&a^2-b^2+2a-4b-3\\=&(a+b)(a-b)+2(a-b)-2b-3\\=&a-b-1\\=&0.\end{aligned}$$

所以，原命题的逆否命题是真命题，从而原命题也是真命题.

习题1.1（第8页）

A组

1. (1) 是命题；(2) 是命题；(3) 不是命题；(4) 不是命题.

2. (1) 逆命题：若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 是偶数，则 a，b 都是偶数．这是假命题．

否命题：若两个整数 a，b 不都是偶数，则 $a+b$ 不是偶数．这是假命题．

逆否命题：若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 不是偶数，则 a，b 不都是偶数．这是真命题．

(2) 逆命题：若方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$．这是假命题．

否命题：若 $m\leqslant 0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根．这是假命题．

逆否命题：若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 $m\leqslant 0$．这是真命题．

3. (1) 命题可以改写成：若一个点在线段的垂直平分线上，则这个点到线段的两个端点的距离相等．

逆命题：若一个点到线段的两个端点的距离相等，则这个点在线段的垂直平分线上．这是真命题．

否命题：若一个点不在线段的垂直平分线上，则这个点到线段的两个端点的距离不相等．这是真命题．

逆否命题：若一个点到线段的两个端点的距离不相等，则这个点不在线段的垂直平分线上．这是真命题．

(2) 命题可以改写成：若一个四边形是矩形，则四边形的对角线相等．

逆命题：若四边形的对角线相等，则这个四边形是矩形．这是假命题．

否命题：若一个四边形不是矩形，则四边形的对角线不相等．这是假命题．

逆否命题：若四边形的对角线不相等，则这个四边形不是矩形．这是真命题．

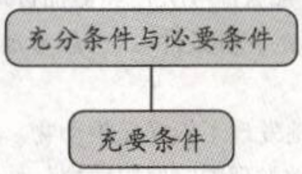
4. 证明：如果一个三角形的两边所对的角相等，则根据等腰三角形的判定定理，这个三角形是等腰三角形，且这两条边是等腰三角形的两条腰，也就是说这两条边相等．这就证明了原命题的逆否命题真．所以，原命题也是真命题．

B组

证明：要证的命题可以改写成以下的“若 p，则 q”的形式：若圆的两条弦不是直径，则它们不能互相平分．此命题的逆否命题是：若圆的两条相交弦互相平分，则这两条相交弦是圆的两条直径．可以先证明此逆否命题：设 AB，CD 是 $\odot O$ 的两条互相平分的相交弦，交点是 E，若 E 和圆心 O 重合，则 AB，CD 是经过圆心 O 的弦，AB，CD 是两条直径．若 E 和 O 不重合，连接 AO，BO，CO 和 DO，则 OE 是等腰 $\triangle AOB$，$\triangle COD$ 的底边上中线，所以，$OE\perp AB$，$OE\perp CD$．AB 和 CD 都经过点 E，且与 OE 垂直，这是不可能的．所以，E 和 O 必然重合，即 AB 和 CD 是圆的两条直径．原命题的逆否命题得证，由互为逆否命题的相同真假性，知原命题是真命题．

1.2 充分条件与必要条件

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节教学重点是充分条件与必要条件，教学难点是对必要条件概念的理解.

三、编写意图与教学建议

本节约需 2 课时，建议充分条件与必要条件 1 课时，充要条件 1 课时.

充分条件、必要条件和充要条件是基本的数学用语，数学学科中大量的命题用它们来叙述.

1.2.1 充分条件与必要条件

教科书结合“若 p，则 q”形式的命题给出了充分条件与必要条件的概念，并引入推断符号“$\Rightarrow$”，通过教学，要使学生理解充分条件、必要条件的意义.

学生对于充分条件和必要条件的理解，需要经过一定时间的体会，为了帮助学生理解概念，教学中可以适当举一些数学命题的例子，结合具体的数学命题来学习. 数学上的充分条件和必要条件的概念，与日常生活中的“充分”“必要”的意义相近，教学中可以适当地借助于日常生活中“充分条件”“必要条件”的例子，帮助学生理解充分条件和必要条件.

下面的例子供教学中选用：

(1) 如果函数是一次函数 $y=x$，那么它是增函数. 所以，“函数是一次函数 $y=x$”是“函数是增函数”的充分条件，“函数是增函数”是“函数是一次函数 $y=x$”的必要条件.

(2) 如果曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$，那么曲线 C 是一个圆. 所以，“曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$”是“曲线 C 是一个圆”的充分条件，“曲线 C 是一个圆”是“曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=1$”的必要条件.

(3) 如果数列的通项公式是 $a_n=n$，那么数列是等差数列. 所以，“数列的通项公式是 $a_n=n$”是“数列是等差数列”的充分条件，“数列是等差数列”是“数列的通项公式是 $a_n=n$”的必要条件.

(4) 如果几何体是球，那么几何体的主视图是圆. 所以，“几何体是球”是“几何体的主视图是圆”的充分条件，“几何体的主视图是圆”是“几何体是球”的必要条件.

(5) 如果 $x=y$，那么 $x^2=y^2$. 所以“$x=y$”是“$x^2=y^2$”的充分条件，“$x^2=y^2$”是“$x=y$”的必要条件.

(6) 如果两个三角形全等，那么这两个三角形的面积相等. 所以，“两个三角形全等”是“这两个三角形的面积相等”的充分条件，“两个三角形的面积相等”是“这两个三角形全等”的必要条件.

(7) 当集合 $A\subseteq B$ 时，如果 $x\in A$，那么 $x\in B$. 所以，“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要条件.

(8) 若 $x>1$，则 $x^2>1$. 所以，“$x>1$”是“$x^2>1$”的充分条件，“$x^2>1$”是“$x>1$”的必要条件.

(9) 如果今天某同学已经踢足球，那么他今天已经参加过球类活动. 所以“今天某同学已经踢足球”是“他今天已经参加过球类活动”的充分条件，“已经参加过球类活动”是“他今天已经踢足球”的必要条件.

(10) 如果某地发现了老虎，则某地发现了国家保护动物. 所以，“某地发现了老虎”是“某地发现了国家保护动物”的充分条件，“某地发现国家保护动物”是“某地发现老虎”的必要条件.

充分条件、必要条件与命题的四种形式有密切关系. 如果原命题成立，但它的逆命题不成立，则

原命题的条件对于结论的成立是充分的但不必要；如果原命题不成立而逆命题成立，则原命题的条件对于结论的成立是必要的但不充分；如是原命题成立，它的逆命题也成立，则原命题的条件对其结论是既充分又必要的．当然，在教学中没有必要对学生提以上的学习要求．

必要条件的理解是学生学习中的一个难点，通常可以借助于原命题与逆否命题的等价性，帮助理解必要条件．若原命题是“$p\Rightarrow q$”，则它的逆否命题是“$\neg q\Rightarrow \neg p$”，从而意味着 q 成立对于 p 成立是必要的．教科书在边框中引入与不等式有关的例子，帮助学生从原命题与逆否命题的等价性角度去理解必要条件，在具体教学中建议作以下的分析．

命题

“如果 $x>a^2+b^2$，那么 $x>2ab$”

是真命题（因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，利用不等式的传递性可以得到以上的结论）．根据四种命题之间的关系，它的逆否命题

“如果 $x>2ab$ 不成立，那么 $x>a^2+b^2$ 不成立”

也是真命题．这就是说，要使 $x>a^2+b^2$ 成立，就必须使 $x>2ab$ 成立．所以，我们说“$x>2ab$”是“$x>a^2+b^2$”的必要条件．

一般地，如果从 p 可以推出 q，即 $p\Rightarrow q$，根据四种命题之间的关系，命题

“$p\Rightarrow q$”

的逆否命题也是真命题．这就是说，如果 q 不成立，则 p 也不成立．如果 p 成立，则 q 必须成立．所以，我们说，q 是 p 的必要条件．

例题 1、2 意于通过具体的例子理解充分条件与必要条件．

1.2.2 充要条件

在学生学习充分条件和必要条件之后安排充要条件的内容，在教学中是顺理成章的．在教学中，要让学生掌握，若 p 是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，则 p 是 q 的充要条件，同时 q 也是 p 的充要条件．

对于充要条件的学习也应该通过讨论一些数学命题逐步体会，通过实际例子来学习和理解．以下的例题供教学时参考：

(1) 如果 $b=0$，则函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数；如果函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数，那么 $b=0$．所以，“$b=0$”是“函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数”的充分必要条件．也可以说，“函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数”的充分必要条件是“$b=0$”．

(2) 如果三角形的两个角相等，那么三角形是等腰三角形；如果三角形是等腰三角形，那么三角形的两个角相等．所以，“三角形的两个角相等”是“三角形是等腰三角形”的充分必要条件．

在数学学科中，形如“p 是 q 的充要条件”的命题是相当普遍的，教科书安排的例 4 就是这种类型的例题．要证明命题的条件是充要条件，就既要证明原命题，又要证明命题的逆命题．证明原命题即证明命题条件的充分性，证明原命题的逆命题，即证明命题条件的必要性．当然，也可以证明与原命题和逆命题等价的逆否命题与否命题．

通过本节教学，应该让学生了解在形如“若 p，则 q”的命题中，存在以下四种关系：

(1) p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件．

例如，p：曲线 C 的方程是 $x^2+y^2=r^2$，q：曲线 C 是半径为 r 的圆．p 是 q 的充分不必要条件．

(2) p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件．

例如，p：$(x-1)(x-2)=0$，q：$x=1$．p 是 q 的必要不充分条件．

(3) p 是 q 的充分必要条件．

例如，p：直线 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 与直线 l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交，q：方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 有唯一解. p 是 q 的充分必要条件.

(4) p 是 q 的既非充分又非必要的条件.

例如，p：$y=ax^3+bx+c$ 是奇函数，q：$a=0$. p 既非 q 的充分条件也非 q 的必要条件.

四、教学设计案例

1.2　充分条件与必要条件（2 课时）

1. 教学任务分析

通过本节教学，应使学生理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

充分条件、必要条件和充要条件是常用的逻辑用语，在数学中有着广泛的应用，对于学生理解数学有很大的帮助. 在此引入概念，对于这几个概念的准确理解需要一定时间的体会和思考，对于这些概念的运用和掌握有赖于后续的学习，教学中不要急于求成，而应该在后续的教学中经常借助于这些概念去表达、阐述和分析.

2. 教学重点、难点

教学重点是充分条件、必要条件、充要条件的概念. 难点是必要条件的概念学习.

3. 教学基本流程

第 1 课时　充分条件和必要条件

(1) 引入课题.

(2) 充分条件和必要条件概念的引入和教学.

(3) 例 1 和例 2 的教学.

(4) 练习.

第 2 课时　充要条件

(1) 充要条件的概念.

(2) 例 3 和例 4 的教学.

(3) 讨论“若 p，则 q”形式的命题的条件与结论的关系，得到四种可能的情况.

4. 教学情境设计

第 1 课时　充分条件与必要条件

问题 1：前面我们讨论了“若 p，则 q”形式的命题，其中有的命题是真命题，有的命题是假命题，你能分别举出一些这样的命题的例子吗？

设计意图：对于充分条件和必要条件概念的学习涉及命题的真假，通过具体的命题，有助于学生对于这两个概念的理解.

师生活动：分析具体命题“若 p，则 q”中 p 对于 q 是否“充分”，q 对于 p 是否“必要”，引入充

分条件和必要条件的概念．也可以引入一些生活中或其他学科中“若 p，则 q”形式的命题来帮助学生理解充分条件和必要条件的概念．

问题 2：第 1.1 节讨论了四种命题，对于“若 p，则 q”形式的命题，能否分析一下原命题、逆命题真假的不同情形下，命题的条件 p 分别是命题结论 q 的什么条件？

设计意图：以上问题的讨论，沟通了充分条件、必要条件与四种命题之间的关系，可以帮助学生进一步理解充分条件和必要条件，也为以后的充要条件的学习作准备．

师生活动：学生举出几种不同情况下的命题，总结归纳，得到不同情况下的结论．讨论中应该特别注意：如果“若 p，则 q”形式的命题是真命题，则它的逆否命题也是真命题，这意味着，若 q 不成立，则 p 也不成立，从而 q 对于 p 的成立是必要的．可以用一些简明的实例加以说明：若 $x>3$，则 $x>2$，从而若 $x>2$ 不成立，则 $x>3$ 也不成立，从而 $x>2$ 是 $x>3$ 的必要条件．

第 2 课时　充要条件

问题 1：举出原命题和逆命题都是真命题的一些“若 p，则 q”形式的命题的例子．

设计意图：充要条件的概念与原命题和逆命题都是真命题且具有以上形式的命题是分不开的，充要条件的概念应该结合具体的命题来引入，并加深理解．

师生活动：分析命题中 p，q 之间充分性和必要性的关系，引入充要条件的概念．

问题 2：例 4 中要求证明 $d=r$ 是直线 l 与 $\odot O$ 相切的充要条件，怎么理解这个要求？

设计意图：在数学学科中，形如“p 是 q 的充要条件”的命题是相当普遍的，教科书安排的例 4 就是这种类型的例题．要证明命题的条件是充要条件，就既要证明原命题，又要证明原命题的逆命题．证明原命题即证明命题条件的充分性，证明原命题的逆命题，即证明命题条件的必要性．关键在于要让学生弄清命题的要求是什么．

师生活动：分析例题的要求，得到例题的解答．

问题 3：在“若 p，则 q”形式的命题中，有的 p 是 q 的充分条件，有的是必要条件，有的既是充分条件，又是必要条件，能否对于存在的各种情况作分类？对于存在的各种情况能否举例说明？

设计意图：通过以上这些问题的讨论，可以让学生进一步理解充分条件、必要条件、充要条件．

师生活动：讨论数学命题的分类，分析总结得到以下四种情况：

(1) p 是 q 的充分但不必要条件；

(2) p 是 q 的必要但不充分条件；

(3) p 是 q 的充分必要条件；

(4) p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件．

五、习题解答

练习（第 10 页）

1. (1) $\nRightarrow$；(2) $\Rightarrow$；(3) $\Rightarrow$；(4) $\nRightarrow$.
2. (1).
3. (1).
4. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真.

练习（第 12 页）

1. (1) 原命题和它的逆命题都是真命题，p 是 q 的充要条件；

(2) 原命题和它的逆命题都是真命题，p 是 q 的充要条件；

(3) 原命题是假命题，逆命题是真命题，p 是 q 的必要条件.

2. (1) p 是 q 的必要条件；

(2) p 是 q 的充分条件；

(3) p 是 q 的充要条件；

(4) p 是 q 的充要条件.

习题 1.2（第 12 页）

A 组

1. 略.

2. (1) 假；(2) 真；(3) 真.

3. (1) 充分条件，或充分不必要条件；

(2) 充要条件；

(3) 既不是充分条件，也不是必要条件；

(4) 充分条件，或充分不必要条件.

4. 充要条件是 $a^2+b^2=r^2$.

B 组

1. (1) 充分条件；(2) 必要条件；(3) 充要条件.

2. 证明：(1) 充分性：如果 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0,$$

所以

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0,$$

所以

$$a-b=0,\ a-c=0,\ b-c=0.$$

即

$$a=b=c.$$

所以，$\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) 必要性：如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则

$$a=b=c,$$

所以

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0,$$

所以

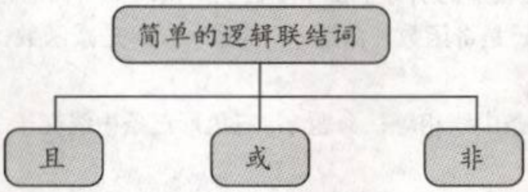
$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0,$$

所以

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc.$$

1.3 简单的逻辑联结词

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是通过数学实例，了解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义，使学生能正确地表述相关数学内容.

教科书中用逻辑联结词“且”“或”“非”联结得到的新命题“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”的真假性是直接规定的，如何让学生理解和接受这些规定是教学中的一个难点. 另外，如何使学生简洁、准确地表述新命题“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”是教学中的另一个难点.

三、编写意图与教学建议

根据《普通高中数学课程标准（实验）》的规定，教科书对逻辑联结词“且”“或”“非”的含义和用法的介绍，都是通过学生熟悉的数学实例来进行. 这样做能给学生提供更多的机会从实际问题中学习“且”“或”“非”的用法，体会运用逻辑用语表述数学内容的准确性和简洁性，避免学生对这三个常用逻辑联结词的含义和用法的机械记忆和抽象解释.

1.3.1 且

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第 14 页“思考”. 其中选取的三个数学命题是学生非常熟悉的，命题(3)与命题(1)(2)之间的关系也容易观察出，目的是引出逻辑联结词“且”，让学生较轻松地感受到用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题. 同时，激发学生学习和研究新命题的兴趣.

为了加深学生对用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，教师可引导学生列举数学中其他方面的例子. 例如，引导学生回顾平面几何中菱形的对角线的性质，有如下两个命题：

p：菱形的对角线互相垂直；

q：菱形的对角线互相平分.

上面的两条性质可简单地表述为下面的命题：

r：菱形的对角线互相垂直且平分.

在学生对用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识后，我们引出新命题的记号“$p\wedge q$”和读法，进而提出问题让学生思考：命题 $p\wedge q$ 的真假如何确定呢？命题 $p\wedge q$ 的真假与命题 p 和 q 的真假之间有什么关系？

2. 通过实例，归纳出命题 $p \wedge q$ 的真假的一般规律

教科书中关于命题 $p \wedge q$ 的真假是直接规定的，并且在旁白中指出可以从串联电路去理解命题 $p \wedge q$ 的真假的规定. 这样处理的好处是简洁、清晰，具体教学时，教师可根据学生的实际情况，灵活选择教学方法.

例如，教学时教师可以引导学生对大量的实例进行分析，从中概括出命题 $p \wedge q$ 的真假的一般规律. 实例应包含命题 p，q 真假性的所有可能情况（共四种），并且根据每个命题表达的内容，学生容易确定真假性. 这些实例可在教师的引导下由学生自主给出. 如下面的三个例子：

例 1 命题 p：函数 $y=x^3$ 是奇函数；命题 q：函数 $y=x^3$ 是减函数；命题 $p \wedge q$：函数 $y=x^3$ 是奇函数且是减函数.

例 2 命题 p：三角形三条中线相等；命题 q：三角形三条中线交于一点；命题 $p \wedge q$：三角形三条中线相等且交于一点.

例 3 命题 p：相似三角形的面积相等；命题 q：相似三角形的周长相等；命题 $p \wedge q$：相似三角形的面积相等且周长相等.

教师引导学生分析“思考”和上面三个例子中每个命题的真假性，从中观察命题 $p \wedge q$ 的真假和命题 p，q 的真假之间有什么关系.

需要指出的是，此时命题 $p \wedge q$ 的真假性是根据其表达的内容是否符合客观实际来确定的. 如果内容符合客观实际，它就是真命题，否则它是假命题. 例如，“思考”中命题(3)，“12 能被 3 整除且能被 4 整除”是符合客观实际的，所以它是真命题. 当然，这里命题 p 和 q 都是真命题.

通过分析，学生不难发现：上面的

例 1 中命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，命题 $p \wedge q$ 是假命题；

例 2 中命题 p 是假命题，命题 q 是真命题，命题 $p \wedge q$ 是假命题；

例 3 中命题 p，q 和命题 $p \wedge q$ 都是假命题.

如果需要，可再分析一些数学中学生熟悉的例子，然后引导学生整理、归纳上面通过分析得到的结论，便可得到命题 $p \wedge q$ 的真假与命题 p，q 真假性之间的关系的一般规律：

当命题 p，q 之一为假命题时，命题 $p \wedge q$ 是假命题；当命题 p，q 都为真命题时，命题 $p \wedge q$ 是真命题.

命题 $p \wedge q$ 的真假还可以用下表表示.

表 1

命题 p	命题 q	命题 $p \wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

我们把这种表示命题真假的表叫做真值表. 需要指出的是，《普通高中数学课程标准（实验）》中不要求使用真值表.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例 1 是介绍如何用“且”联结两个命题得到新命题，并判断新命题的真假. 通过这个例子是想达到下面的目的：

(1) 使学生会用“且”联结两个命题 p 与 q，并会用语言简洁、准确地表述新命题 $p \wedge q$.

例如，对教科书上例1(2)中的命题 p 与 q，学生开始学习时，容易受命题 $p\wedge q$ 的读法“p 且 q”的影响，将命题 $p\wedge q$ 表述为“菱形的对角线互相垂直且菱形的对角线互相平分”，非常冗长．教学时，需要教师引导学生将其简洁地表述为“菱形的对角线互相垂直且平分”．

(2) 使学生体会用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性．

例如，上面用逻辑联结词“且”将菱形对角线的两个重要特征（命题 p 与命题 q）用一句话（命题 $p\wedge q$）准确、简洁地表达出来了．数学中还有许多这样的例子．

(3) 使学生会根据“且”的含义，确定命题 $p\wedge q$ 的真假．

根据“且”的含义，确定命题 $p\wedge q$ 的真假是本小节的教学重点之一．学生利用表1，通过确定命题 p 与 q 的真假，来确定形式较复杂的命题 $p\wedge q$ 的真假．这样一来，将确定一个较复杂命题的真假归结为确定两个简单命题的真假．

教科书上例2是介绍如何用“且”改写一些数学命题，并确定其真假．通过这个例子是让学生认识到，数学中有些命题可以改写成命题 $p\wedge q$ 的形式，从而原命题的真假性可以通过命题 p 与 q 的真假性来确定．

需要指出的是，在能用“且”改写成 $p\wedge q$ 形式的数学命题中，通常有“……和……”“……与……”“既……，又……”等词语．

教科书第17页练习的第1题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，让学生在课堂上完成．习题1.3A组第1题中的(2)(4)可在课堂上选作练习，第2题中的(1)与习题1.3B组中的(2)(4)可供课后作业选用．

1.3.2 或

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第15页“思考”．如同前一小节，我们在“思考”中选取了三个学生非常熟悉的数学命题，其中命题(3)与命题(1)(2)之间的关系也容易发现．我们的目的是引出逻辑联结词“或”，让学生感受到用联结词“或”联结两个命题也可以得到一个新命题，同时，激发学生学习和研究这个新命题的兴趣．

同样地，具体教学时为了加深学生对用“或”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，教师可补充数学中其他方面的一些例子．例如，引导学生回顾两个三角形相似的条件，有如下两个命题：

p：三边对应成比例的两个三角形相似；

q：三角对应相等的两个三角形相似．

上面的两个条件可用一个命题简单地表述出来：

r：三边对应成比例或三角对应相等的两个三角形相似．

在学生对用联结词“或”联结两个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识后，我们引出新命题的记号“$p\vee q$”和读法，进而提出问题：命题 $p\vee q$ 的真假如何确定呢？命题 $p\vee q$ 的真假与命题 p 和 q 的真假之间有什么关系？

教师引导学生仿照命题 $p\wedge q$ 的真假的确定方法，来确定命题 $p\vee q$ 的真假性．

2. 通过实例，归纳出命题 $p\vee q$ 的真假的一般规律

类似于前一节，教科书中对命题 $p\vee q$ 的真假是直接规定的，并且在旁白中指出可以从并联电路去理解命题 $p\vee q$ 的真假的这个规定．同样地，这样做的好处是非常简洁、清晰，同时留给教师发挥的空间．具体教学时，教师可选择适当的教学方法．

教学时，教师尽可能采用一些学生容易理解和接受的方法．例如，教师在课堂上可以引导学生对

大量的实例进行分析，从中归纳出命题 $p \vee q$ 的真假性的一般规律．这里要求所选实例应包含命题 p，q 真假性的所有可能情况（共四种），并且对实例中的每个命题，学生容易确定其真假．这些实例同样可在教师的引导下由学生自主给出．为了节省课堂教学时间，同样可选用我们在前面给出的例子：

例4　命题 p：三边对应成比例的两个三角形相似；命题 q：三角对应相等的两个三角形相似．那么命题 $p \vee q$：三边对应成比例或三角对应相等的两个三角形相似．

例5　命题 p，q 同前面例1．那么命题 $p \vee q$：函数 $y=x^3$ 是奇函数或是减函数．

例6　命题 p，q 同前面例3．那么命题 $p \vee q$：相似三角形的面积相等或周长相等．

教师引导学生分析"思考"和上面三个例子中命题 $p \vee q$ 的真假性，从中观察命题 $p \vee q$ 的真假和命题 p，q 的真假之间的关系．

同样地，这里命题 $p \vee q$ 的真假性是根据其表达的内容是否符合客观实际来确定的．如果内容符合客观实际，它就是真命题，否则它是假命题．

例如，"思考"中命题(3)，"27是7的倍数或是9的倍数"是符合客观实际的，所以它是真命题．其中命题 p 是假命题，而命题 q 是真命题．

进一步通过分析，学生不难发现：上面的

例4中命题 p，q 与命题 $p \vee q$ 都是真命题；

例5中命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，命题 $p \vee q$ 是真命题；

例3中命题 p，q 与命题 $p \vee q$ 都是假命题．

如果需要的话，可引导学生再分析一些数学中学生熟悉的例子，如教科书上前一小节例1中的例子（用联结词联结命题 p，q 可得到命题 $p \vee q$）；然后引导学生整理、归纳经分析得到的结论，便得到命题 $p \vee q$ 的真假与命题 p，q 真假性之间的关系的一般规律：

当命题 p，q 之一为真命题时，命题 $p \vee q$ 是真命题；当命题 p，q 都为假命题时，命题 $p \vee q$ 是假命题．

命题 $p \vee q$ 的真假也可用下面的真值表表示．

表2

命题 p	命题 q	命题 $p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

同样地，《普通高中数学课程标准（实验）》中关于命题 $p \vee q$ 的真假不要求使用真值表．

观察、比较表1和表2中命题 $p \wedge q$ 与命题 $p \vee q$ 的真假性，可以得到下面的结果：如果命题 $p \wedge q$ 为真命题，那么命题 $p \vee q$ 一定是真命题；反过来，如果命题 $p \vee q$ 是真命题，那么命题 $p \wedge q$ 不一定是真命题．这就回答了本小节最后的思考题．

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例3是介绍如何判定用"或"联结两个命题后得到的新命题 $p \vee q$ 的真假．安排这个例子的目的是使学生会根据"或"的含义，确定新命题 $p \vee q$ 的真假．

根据"或"的含义，确定命题 $p \vee q$ 的真假是这一小节的教学重点之一．利用表2，学生可以通过确定命题 p 与命题 q 的真假，来确定形式较复杂的命题 $p \vee q$ 的真假．这样一来，我们将一个较复杂命题的真假的确定归结为两个简单命题的真假的确定．

教科书第 17 页练习的第 2 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，教师应该让学生在课堂上完成. 习题 1.3A 组第 1 题中的(1)(3)可在课堂上选作练习，第 2 题中的(2)(3)与习题 1.3B 组中的(1)(3)可供课后作业选用.

4. 需要注意的问题

本小节例题中没有安排用逻辑联结词“或”联结两个命题得到新命题 $p\vee q$，并用语言表述新命题 $p\vee q$ 的内容. 主要是考虑到课时较少，而且在教科书前一小节关于逻辑联结词“且”安排了相应的内容.

需要注意的是，学生用语言表述命题 $p\vee q$ 比用语言表述命题 $p\wedge q$ 更容易出现逻辑错误. 看下面的例子：

例 7　已知如下两个命题：

p：能被 5 整除的整数的个位数一定为 5；

q：能被 5 整除的整数的个位数一定为 0.

有些学生把命题 $p\vee q$ 表述为“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或 0”. 这是不对的，这一点可以从命题的真假性方面判断出来：命题 p，q 都是假命题，所以命题 $p\vee q$ 也是假命题，而命题“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或 0”是一个真命题. 事实上，命题 $p\vee q$ 正确的表述为“能被 5 整除的整数的个位数一定为 5 或一定为 0”.

1.3.3　非

1. 创设情境，提出问题

引导学生思考、讨论教科书第 16 页“思考”. 我们在“思考”中选取了两个非常简单的数学命题，其中命题(2)是对命题(1)的全盘否定. 我们的目的是引出逻辑联结词“非”，让学生感受到对一个命题全盘否定可以得到一个新命题，激发学生学习和研究这个新命题的兴趣.

为了加深学生对全盘否定一个命题可以得到一个新命题的认识，教师可以补充数学中其他方面的一些例子. 例如，命题

p：方程 $x^2+x+1=0$ 有实数根.

对命题 p 全盘否定得如下命题：

q：方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根.

我们在学生对全盘否定一个命题可以得到一个新命题的事实有了清楚的认识后，引出新命题的记号“$\neg p$”和读法，进而提出问题：命题 $\neg p$ 的真假如何确定呢？它与命题 p 的真假之间有什么关系？

2. 通过实例，确定命题 $\neg p$ 的真假

确定命题 $\neg p$ 的真假性比确定前两小节中命题 $p\wedge q$ 与命题 $p\vee q$ 的真假性容易一些. 因为命题 $\neg p$ 是 p 的否定，所以它们不可能同时为真命题，也不能同时为假命题，从而只能一个为真命题，一个为假命题.

具体教学时，教师也可引导学生分析一些数学实例，归纳得出命题 $\neg p$ 的真假性的一般规律. 如分析教科书上第 16 页“思考”中命题(1)(2)的真假性与前面命题 p，q（即 $\neg p$）的真假性，引导学生整理、归纳得到命题 p 的真假性与命题 $\neg p$ 的真假性之间的关系的一般规律：

当命题 p 为真命题时，命题 $\neg p$ 为假命题；当命题 p 为假命题时，命题 $\neg p$ 为真命题.

命题 $\neg p$ 的真假也可用下面的真值表表示.

表 3

命题 p	命题 $\neg p$
真	假
假	真

3. 例题和习题的教学分析

教科书上的例 4 是介绍如何写出一个命题的否定，并判断其真假. 通过这个例子是想达到下面的两个目的：

(1) 使学生会写出一个已知命题的否定，掌握一些基本规律；

(2) 使学生会根据表 3 确定一个命题的否定的真假性.

表 3 表明，要确定命题 $\neg p$ 的真假，只需确定出命题 p 的真假即可.

事实上，在实际应用中，如果确定一个命题 p 的真假比较困难时，我们可以去尝试确定命题 $\neg p$ 的真假. 一旦命题 $\neg p$ 的真假确定了，那么命题 p 的真假性也就确定了. 关于这一点，我们将在下一节学习全称量词和存在量词时看到.

教科书第 17 页练习的第 3 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成. 习题 1.3A 组第 3 题中部分可在课堂上选作练习，余下作课后作业选用.

4. 需要注意的问题

(1) 具体教学时，不要求写出 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 形式的命题的否定. 有关 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 形式的命题的否定，以及它们与命题 $\neg p$，$\neg q$ 之间的联系，我们将在本章的拓展资源部分加以介绍.

(2) 一个命题的否定与它的否命题是有区别的. 因为一个命题与它的否命题可以同时为真命题，也可以同时为假命题，而一个命题与它的否定只能一真一假.

四、教学设计案例

1.3.1 且（第 1 课时）

1. 教学任务分析

(1) 了解联结词“且”的含义.

通过数学实例，认识用联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题；

会用语言简洁、准确地表述新命题，知道新命题的记号和读法；

通过分析一些数学实例，归纳出联结词“且”的含义.

(2) 会用联结词“且”联结两个命题或改写某些数学命题，并判断新命题的真假.

会用联结词“且”联结两个命题，会根据逻辑联结词“且”的含义判断新命题的真假；

会用联结词“且”改写某些数学命题，根据改写后的命题判断原先命题的真假.

在数学语言中经常使用一些逻辑联结词，学习并掌握它的最好方法是使用. 注意在引导学生使用逻辑联结词的过程中，掌握逻辑联结词的用法，纠正出现的错误，避免对逻辑联结词含义的机械记忆和抽象解释.

2. **教学重点与难点**

重点：通过数学实例，了解逻辑联结词“且”的含义.

难点：判断用逻辑联结词“且”联结两个命题后得到的新命题的真假.

3. **教学基本流程**

创设情境，通过具体数学实例引入新课

↓

给出“且”联结得到的命题的表述形式、记号和读法，引出判定新命题的真假问题

↓

通过一些数学例子，归纳出“且”的含义

↓

学习用“且”联结命题，并判断真假

↓

学习用“且”改写命题，并判断真假

↓

课堂练习、小结与课后作业

4. **教学情境设计**

问题 1：你能发现“思考”中三个命题之间的关系吗？

设计意图：使学生明白用逻辑联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题，启发学生对新命题的思考和探究的兴趣.

师：让学生观察教科书上“思考”中的三个命题，引导学生发现这三个命题在形式上的联系.

生：观察、思考、交流并发表自己的看法.

问题 2：教师再列举几组命题，让学生观察每组中三个命题之间的联系.

设计意图：加深学生对用逻辑联结词“且”联结两个命题可以得到一个新命题的认识，概括出一般特征. 同时，学习如何简洁、准确地表述用“且”联结得到的新命题.

师：让学生再观察几组命题，引导学生发现每组三个命题在形式上的联系，加深对“且”联结两个命题可以得到的新命题的认识.

生：观察、思考、交流并发表自己的看法.

问题 3：给出用逻辑联结词“且”联结得到的新命题的记号“$p\wedge q$”和读法.

问题 4：你能确定命题 $p\wedge q$ 的真假吗？命题 $p\wedge q$ 的真假和命题 p，q 的真假之间有什么关系？

设计意图：引导学生通过一些数学实例分析命题 p，q 以及命题 $p\wedge q$ 的真假性，概括出这三个命题的真假性之间的关系的一般规律，培养学生的抽象概括能力.

师：引导学生分析前面例子中命题 p，q 以及命题 $p\wedge q$ 的真假性；让学生自己举出一些例子进行分析，总结出结论.

生：分析每个例子中命题 p，q 以及 $p\wedge q$ 的真假性（可列表表示），概括出它们真假性之间的联系.

问题 5：对于教科书上例 1 中每组命题 p，q，你能写出命题 $p\wedge q$，并判断它们的真假吗？

设计意图：学习使用逻辑联结词“且”联结两个命题，根据“且”的含义判断“且”联结成的新命题的真假.

师：引导学生阅读教科书上例 1 中每组命题 p，q，让学生尝试写出命题 $p\wedge q$，判定它们的真假，纠正可能出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例 1，尝试写出命题 $p\wedge q$，然后判定真假.

问题 6：对于教科书上例 2 中的每个命题，你能将其改写为命题 $p\wedge q$ 的形式，并判断它们的真假吗？

设计意图：学习使用逻辑联结词“且”改写一些数学命题，根据“且”的含义判断原先的命题的真假.

师：引导学生阅读教科书上例 2 中的每个命题，让学生尝试将其改写成命题 $p\wedge q$ 的形式，判定它们的真假，纠正可能出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例 2，尝试写出命题 $p\wedge q$，然后判定真假.

问题 7：通过学习，你能解决教科书第 17 页练习中的哪些问题？

设计意图：反馈学生掌握逻辑联结词“且”的用法和含义的情况，巩固本小节所学的基本知识.

生：独立思考，解决教科书第 17 页练习第 1 题和习题 1.3A 组第 1 题(2)(4).

师：先让学生讲述解答情况，再作出评判，给出正确解答.

问题 8：小结：为什么学习逻辑联结词“且”？如何判断用“且”联结两个命题得到新命题的真假？

设计意图：归纳整理本节课所学知识.

师：引导学生思考、概括.

生：思考、整理、表述概括的结果.

课后作业：习题 1.3A 组第 2 题(1)；习题 1.3B 组(2)(4).

5. 几点说明

(1) 本节课是学生第一次系统地学习逻辑联结词的含义和用法，在教学中选用的例子应是学生比较熟悉的数学例子，且命题的真假性容易判断.

(2) 教科书上关于“且”的含义的规定，学生理解和接受起来可能比较困难，教学中注意引导学生通过大量的熟悉的数学实例，自主分析、思考、交流、讨论，概括出一般规律.

(3) 教学中，应引导学生简洁、准确地表述用逻辑联结词“且”联结成的新命题，纠正出现的逻辑错误.

五、习题解答

练习（第 17 页）

1. (1) 真；(2) 假.
2. (1) 真；(2) 假.
3. (1) $2+2\neq 5$，真命题；

   (2) 3 不是方程 $x^2-9=0$ 的根，假命题；

   (3) $\sqrt{(-1)^2}\neq -1$，真命题.

习题 1.3（第 18 页）

A 组

1. (1) $4\in\{2, 3\}$或$2\in\{2, 3\}$，真命题；

   (2) $4\in\{2, 3\}$且$2\in\{2, 3\}$，假命题；

   (3) 2 是偶数或 3 不是素数，真命题；

   (4) 2 是偶数且 3 不是素数，假命题.

2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 假命题.

3. (1) $\sqrt{2}$不是有理数，真命题；

   (2) 5 是 15 的约数，真命题；

   (3) $2\geqslant 3$，假命题；

   (4) $8+7=15$，真命题.

B 组

(1) 真命题. 因为 p 为真命题，q 为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题；

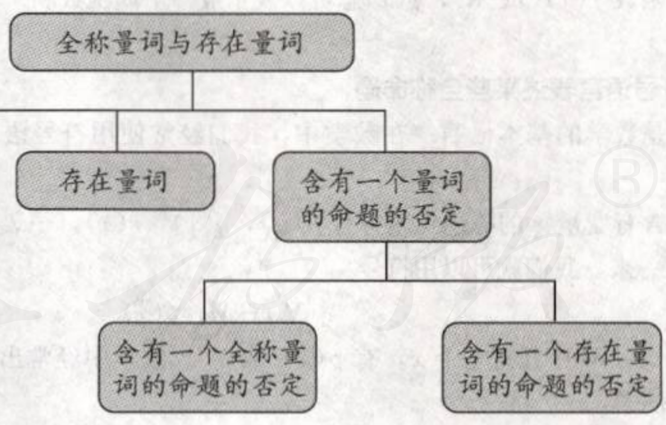
(2) 真命题. 因为 p 为真命题，q 为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题；

(3) 假命题. 因为 p 为假命题，q 为假命题，所以 $p\vee q$ 为假命题；

(4) 假命题. 因为 p 为假命题，q 为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

1.4 全称量词与存在量词

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词和存在量词的意义，能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

难点：全称命题和特称命题的真假的判定，以及写出含有一个量词的命题的否定.

三、编写意图与教学建议

本节内容安排在学生学习了命题及命题的否定之后，旨在通过丰富的实例，使学生了解生活和数学中经常使用的两类量词（即全称量词和存在量词）的含义，会判断含有一个量词的全称命题和一个量词的特称命题的真假，会正确地写出这两类命题的否定，认识到含有一个量词的全称命题的否定是特称命题，含有一个量词的特称命题的否定是全称命题的规律.

教科书每一小节均由“思考”引入. 对于量词，重在理解它们的含义，不要求追求它们的形式化定义.

1.4.1 全称量词

1. 创设情境，引入基本概念

引导学生回顾命题的概念，然后思考、讨论教科书第 21 页的“思考”. “思考”中选取了四个含有变量的陈述句，其中(3)(4)分别是在(1)(2)的基础上加了一个短语“对所有的”“对任意一个”对变量进行限定. 学生根据命题的概念容易判断出，(1)(2)不是命题，而(3)(4) 是命题. 通过对比，激发学生对这类短语的兴趣，由此引出全称量词的概念、符号以及全称命题的概念.

全称量词有许多种表述形式，除了“思考”中出现的两种外，我们在教科书的旁白中列举了其他常用的几种表述形式.

具体教学时，教师可以引导学生寻找其他的数学例子，以加深学生对全称量词的认识. 如下面的例子：

例 1 （1）每一个三角形都存在外接圆；

（2）所有的实数都有算术平方根；

（3）对一切无理数 x，$3x+2$ 还是无理数；

（4）任给函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$，$f(x)$总可以表示成一个偶函数和一个奇函数的和.

2. 运用符号语言表述某些全称命题

符号语言是数学的基本语言. 在数学中，我们经常使用符号语言简洁、准确地表达数学的一些内容.

教科书将含有变量 x 的陈述句用符号 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，…表示，将变量 x 的取值范围用符号 M 表示. 这样一来，我们就可以用符号

$$\forall x\in M,\ p(x)$$

表示全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”. 数学中经常出现这种用符号语言表达的全称命题. 如下面的例子：

例 2 （1）$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin 2x=2\sin x\cos x$；

（2）$\forall n\in\mathbf{N}$，$4n+2\neq m^2$，其中 $m\in\mathbf{N}$.

在教学过程中，教师应鼓励学生适当使用符号语言来表达数学的一些内容. 在教科书例 1 中，我们有意安排了一个用符号表达的全称命题，看上去比文字语言叙述这个全称命题简洁多了.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例 1 是通过几个数学实例介绍全称命题真假的判断方法，通过这个例子是想达到下面的

两个目的.

(1) 使学生理解全称量词的意义，会判定一个全称命题的真假.

通过丰富的生活和数学中的实例理解全称量词的意义是本小节的教学重点，而判定全称命题的真假则是本小节的教学难点. 教师在介绍完全称命题的概念和符号表示之后，可提出如下问题让学生思考：对给定的全称命题，如何判断它的真假呢?

引导学生阅读例 1 中的三个全称命题，理解全称量词的意义，然后思考回答. 为了便于学生理解和接受，教师最好不要先给出判定全称命题的真假的一般方法，而是针对具体的全称命题进行分析，最后引导学生自主总结出一般方法.

例如，对于例 1 中的全称命题(1)“所有的素数是奇数”，如何判定它的真假呢? 这里，变量 x 的变化范围 M：全体素数组成的集合；$p(x)$：x 为奇数. 如果要说明(1)为真命题，那么需要说明对任意 $x\in M$，x 为奇数. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非对所有的 $x\in M$，x 为奇数，也就是要找出素数 $x_0\in M$，x_0 为偶数. 我们发现，2 是素数，同时也是偶数. 所以全称命题(1)是假命题.

又如，例 1 中的全称命题(2)“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+1\geqslant 1$”，其中变量 x 的变化范围 $\mathbf{R}$：全体实数组成的集合；$p(x)$：$x^2+1\geqslant 1$. 如果要说明(2)为真命题，那么需要说明 $\forall x\in \mathbf{R}$，不等式 $x^2+1\geqslant 1$ 成立. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非 $\forall x\in \mathbf{R}$，不等式 $x^2+1\geqslant 1$ 成立，也就是要找出某个 $x_0\in \mathbf{R}$，不等式 ${x_0}^2+1\geqslant 1$ 不成立，即 ${x_0}^2+1\leqslant 1$. 注意到，$\forall x\in \mathbf{R}$，总有 $x^2\geqslant 0$，从而有 $x^2+1\geqslant 1$. 所以全称命题(2)为真命题.

在分析了例 1 中三个全称命题后，引导学生总结判定全称命题真假的一般方法.

(2) 使学生体会用符号语言表达一些全称命题的准确性、简洁性.

在例 1(2)中，我们用符号语言将这个全称命题表达出来，既准确，又简洁，其目的是让学生体会符号语言表达数学内容的准确性、简洁性，引导学生在今后的数学学习中，自觉地运用符号语言表达一些数学内容.

教科书第 23 页练习的第 1 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成. 习题 1.4A 组第 1 题可供课后作业选用.

1.4.2 存在量词

1. 创设情境，引入基本概念

与前一小节类似，教科书首先通过“思考”引入本小节的基本概念. 其中选取了四个含有变量 x 的陈述句，(3)(4)是在(1)(2)的基础上分别加了一个短语“存在一个”“至少有一个”. 学生根据命题的概念容易判断出，(1)(2)不是命题，因为在(1)(2)中不知道变量 x 代表什么，无法判断真假. 而(3)(4)是命题，因为在(3)(4)中对变量 x 的取值范围进行了限定，从而可以判断它们的真假.

通过对比，激发学生对“存在一个”“至少有一个”这类短语的兴趣，由此引出存在量词的概念、符号，以及特称命题的概念.

存在量词也有许多种表述形式，除了这里出现的两种表述形式外，我们在教科书的边框中列举了其他几种常用的表述形式“有一个”“有的”“有些”“对某个”等.

具体教学时，教师可引导学生寻找其他的数学例子，以加深学生对这些存在量词的认识. 如下面的例子：

例 1 (1) 有一个四边形没有外接圆；

(2) 对某个实数 x_0，它的算术平方根为 0；

(3) 有的无理数的平方还是无理数；

(4) 有些奇函数的图象不过原点.

2. 运用符号语言表述某些特称命题

在上一节中，我们将含有变量 x 的陈述句用符号 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，…表示，将变量 x 的取值范围用符号 M 表示. 利用这些符号，我们就可以用符号

$$\exists x_0\in M,\ p(x_0)$$

表示特称命题"存在一个 $x_0\in M$，有 $p(x_0)$成立". 某些特称命题可以用符号语言准确、简洁地表示出来，在数学中经常出现这种用符号语言表达的特称命题. 如下面的例子：

例2 (1) $\exists$直线 l_0，点 $P\in l_0$ 且 $l_0\perp$平面 π；

(2) $\exists x_0$，y_0，$z_0\in\mathbf{N}_+$，$x_0^2+y_0^2=z_0^2$.

在今后的数学学习中，学生经常会遇到用符号语言表述的数学命题，其主要原因是这种表述既准确，又简洁. 具体教学时，教师应鼓励学生适当使用符号语言来表达数学的一些内容. 在教科书例2中，我们也有意安排了一个用符号语言表达的特称命题，让学生体会用符号语言表述某些特称命题比用文字语言更简洁.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例2是通过几个数学实例介绍特称命题真假的判别方法，通过这个例子使学生理解特称量词的意义，会判定一个特称命题的真假.

通过丰富的生活和数学中的实例理解特称量词的意义是本小节的教学重点，判定特称命题的真假是本小节的一个教学难点. 与前一小节类似，教师在介绍完特称命题的概念和符号表示之后，可提出如下问题让学生思考：对给定的一个特称命题，如何判断它的真假呢？

教师先引导学生阅读例2中的三个全称命题，然后思考回答这三个命题的真假. 同样地，为了便于学生理解和接受，教师最好先不要给出判定特称命题的真假的一般方法，而是针对具体的特称命题进行分析，引导学生总结归纳出一般方法.

例如，对于例2中的特称命题(1)"有一个实数 x_0，使 $x_0^2+2x_0+3=0$"，如何判定它的真假呢？这里，变量 x_0 的变化范围是实数集 $\mathbf{R}$；$p(x)$：$x_0^2+2x_0+3=0$. 如果要说明(1)为真命题，那么只需找到某个实数 x_0，使得 $p(x_0)$成立，即 $x_0^2+2x_0+3=0$. 反过来，如果要说明(1)为假命题，那么要说明并非存在实数 x_0，使得 $x_0^2+2x_0+3=0$，也就是说，对一切实数 x，$x^2+2x+3\neq0$. 我们发现，对一切实数 x，$x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant2$. 因此，使 $p(x_0)$成立的实数 x_0 不存在. 所以特称命题(1)是假命题.

这表明，要说明特称命题"$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$"是假命题，需要说明在集合 M 中，使 $p(x_0)$成立的变量 x_0 不存在.

又如，对例2中的特称命题(3)"有些整数只有两个正因数"，其中变量 x 的变化范围为整数集 $\mathbf{Z}$；$p(x)$：x 有两个正因数. 如果要说明(2)为真命题，那么需要找到某个整数 x_0，使得 x_0 只有两个正因数. 反过来，如果要说明(2)为假命题，那么要说明并非有些整数只有两个正因数，根据存在量词"有些"的含义，这就是说，整数集 $\mathbf{Z}$ 中不存在只有两个正因数的整数. 注意到，整数2恰好只有两个正因数：1，2，所以特称命题(2)为真命题.

这又表明，要说明特称命题"$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$"是真命题，需要说明在集合 M 中存在某个 x_0，使得 $p(x_0)$ 成立.

教师在分析完例2中三个特称命题后，引导学生总结归纳出判定一个特称命题真假的一般

方法.

教科书第 23 页练习的第 2 题是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，可以让学生在课堂上完成. 对于第 2 题中特称命题(1)与(3)，我们选用符号语言将这个特称命题表达出来，其目的是让学生体会符号语言表达数学内容的准确性、简洁性，引导学生在今后的数学学习中，自觉地运用符号语言表达一些数学内容. 习题 1.4A 组第 2 题可供课后作业选用.

1.4.3 含有一个量词的命题的否定

1. 问题的引入

本小节介绍含有一个量词的命题的否定，它包含两块内容：其一是含有一个全称量词的命题的否定，其二是含有一个存在量词的命题的否定.

首先让学生回顾什么是一个命题的否定，它与否命题之间有什么差别，然后引导学生探究教科书第 24 页和第 25 页“探究”中命题的否定，并观察原先的命题与它们的否定在形式上有什么变化，由此引入本小节要考察的问题.

在两个“探究”中，我们各选取一个命题用符号语言表示出来，主要有如下两个目的：

(1) 使学生进一步熟悉用符号语言表达全称命题和特称命题；

(2) 通过观察原先的命题与它们的否定在形式上的变化，使学生更容易得到全称命题的否定是特称命题，以及特称命题的否定是全称命题的结论.

2. “探究”中命题的教学分析

教科书在分析“探究”中全称命题和特称命题时，并没有直接给出这些命题的否定的最终表述形式，而是根据全称量词和存在量词的含义，直接对原先的命题进行全盘否定，得到这些命题的否定的一种表述形式，但需要强调的是这些表述过于形式化，不自然也不符合日常语言表达的习惯，所以最后进一步将这些表述改写成常用的表述形式. 为此，教科书上在“探究”后的分析中，先后用了六个“也就是说”. 这样处理一方面让学生体会如何用简洁、自然的语言表达数学内容；另一方面，通过这些命题的否定的最后表述，学生很容易观察出原先的命题和它们的否定在形式上的变化，从而降低了学生的认知难度.

例如，对第一个“探究”中的全称命题(1)“所有的矩形都是平行四边形”，根据全称量词“所有的”的含义，它的否定为“并非所有的矩形都是平行四边形”. 这种表述有些“绕”，我们换一种说法为“存在一个矩形不是平行四边形”.

如果直接从命题(1)到最后它的否定的表述，学生会觉得太突然，理解和接受起来有困难. 但最后的表述是很有必要的，由此可以观察出命题(1)的否定为一个特称命题. 再通过分析其他的全称命题的否定，便可归纳出含一个全称量词的命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定的一般形式为“$\exists x_0\in M$，$\neg p(x_0)$”.

3. 例题和习题的教学分析

教科书上例 3 是介绍如何写出含一个全称量词的命题的否定，例 4 是介绍如何写出含一个存在量词的命题的否定，分别安排在两个探究完成之后，其目的是让学生了解如何运用前面通过探究得到的结论，正确地对含一个量词的命题进行否定. 同时，加深学生对全称命题的否定是特称命题和特称命题的否定是全称命题这个事实的认识.

教科书第 26 页练习的第 1 题和第 2 题分别选取数学中的一些较简单的全称命题和特称命题，让学

生写出它们的否定，其目的是为了巩固学生在本小节所学的基本知识，教师可以让学生在课堂上完成. 习题 1.4A 组第 3 题，习题 1.4B 组中的(1)(2)(3)(4)可供课后作业选用.

4. 需要注意的问题

在探究含有一个量词的命题的否定时，学生常常会出现一些逻辑错误，如认为第一个“探究”中命题(1)的否定为“所有的矩形都不是平行四边形”. 为此，我们在教科书第 24 页的旁白中也指明了它和命题“并非所有的矩形是平行四边形”的差别. 其实，这两个命题之间的差别还可以由它们的真假性看出，前者是假命题，而后者是真命题.

学生在写出第二个“探究”中命题的否定时，也会犯类似的错误. 如认为其中命题(2)的否定为“某些平行四边形不是菱形”，这是不对的. 我们知道，命题(2)为真命题，而它的否定应为假命题，而命题“某些平行四边形不是菱形”是真命题.

总之，要正确地对含有一个量词的全称命题或特称命题进行否定，我们一方面要充分理解量词的含义，另一方面应充分利用原先的命题与它的否定在形式上的联系.

四、教学设计案例

1.4.3 含有一个量词的命题的否定（第 2 课时）

1. 教学任务分析

(1) 通过探究数学中一些实例，使学生归纳总结出含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

在探究的过程中，教师应引导学生根据全称量词和存在量词的含义，用简洁、自然的语言表述含有一个量词的命题的否定，而不是机械地在原先的命题前加“非”“并非”“不”等得到它的否定. 这样便于学生通过观察，归纳总结出含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

(2) 通过例题和习题的教学，使学生能够根据含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律，正确地对含有一个量词的命题进行否定.

教科书中选用的例子都是数学中的具体例子.《普通高中数学课程标准（实验）》中提出“通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词和存在量词的意义”，但具体教学时，教师应尽可能不用生活中的例子，避免一些不必要的麻烦. 生活中的例子如果把握不好，就容易出现问题，如“所有的数学家都聪明”是全称命题吗？又如“有些女孩子胆小”是特称命题吗？

(3) 使学生体会从具体到一般的认知过程，培养学生抽象、概括的能力.

2. 教学重点与难点

重点：通过探究，了解含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律，会正确地对含有一个量词的命题进行否定.

难点：正确地对含有一个量词的命题进行否定.

3. 教学基本流程

回顾前面所学知识（命题的否定、量词、全称命题与特称命题），引入课题

探究含一个量词的全称命题和它们的否定在形式上的变化规律

介绍含一个全称量词的命题的否定

探究含一个量词的特称命题和它们的否定在形式上的变化规律

介绍含一个存在量词的命题的否定

课堂练习、小结与课后作业

4. 教学情境设计

问题 1：我们在上一节中学习过逻辑联结词“非”．对给定的命题 p，如何得到命题 p 的否定（或非 p），它们的真假性之间有何联系？

设计意图：回顾旧知，为问题的引入做准备．对逻辑联结词“非”的含义和用法的回顾，有助于本节课所研究问题的顺利解决．

师：让学生回顾逻辑联结词“非”的含义和用法．

生：回顾，并叙述自己的看法．

问题 2：你能写出含有一个量词的命题的否定吗？

设计意图：引入本节课要讨论的内容，激发学生探究新知的兴趣．

师：教师提出问题，引导学生分析具体的数学实例，从具体到一般，通过观察、分析，抽象概括出一般规律．

生：学生思考，分组交流、讨论老师提出的问题．

问题 3：你能写出教科书第 24 页“探究”中三个全称命题的否定吗？

设计意图：通过分析数学实例，使学生能根据全称量词的含义，写出这三个全称命题的否定，并把它们用简洁、自然的语言表述出来．

师：引导学生分析教科书第 24 页“探究”中的三个全称命题，注意提示学生的语言表述要简洁、自然，不能机械地根据逻辑联结词“非”的含义和用法．

生：学生思考，小组讨论，推举代表叙述结论，其他同学可以补充．

问题 4：你能发现含一个全称量词的命题与它们的否定在形式上有什么变化？

设计意图：通过观察，使学生归纳总结出含一个全称量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律．

师：让学生观察上述三个全称命题和它们的否定在形式上的变化，尤其注意观察量词的变化，引导学生进行归纳、总结．

生：学生观察、归纳、概括、发表自己的看法.

问题5：给出含有一个量词的全称命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定为特称命题“$\exists x_0\in M$，$\neg p(x_0)$”.

问题6：对于教科书上例3中的每个全称命题，你能写出它们的否定吗?

设计意图：根据前面探究得到的含一个量词的全称命题与它们的否定在形式上的变化规律，学习对含有一个量词的全称命题进行否定.

师：引导学生阅读教科书上例3中的每个全称命题，让学生尝试写出这些全称命题的否定，纠正出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例3，尝试写出每个全称命题的否定.

问题7：你能写出教科书第25页“探究”中三个特称命题的否定吗?

设计意图：通过分析数学实例，使学生能根据存在量词的含义，写出这三个特称命题的否定，并把它们用简洁、自然的语言表述出来.

师：引导学生分析教科书第25页“探究”中的三个全称命题，注意提示学生的语言表述要简洁、自然.

生：学生思考，小组讨论，推举代表叙述结论，其他同学可以补充.

问题8：你能发现含一个存在量词的命题与它们的否定在形式上有什么变化?

设计意图：通过观察，使学生归纳总结出含一个存在量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

师：让学生观察上述三个特称命题和它们的否定在形式上的变化，尤其注意观察量词的变化，引导学生进行归纳、总结.

生：学生观察、归纳、概括、发表自己的看法.

问题9：给出含有一个量词的特称命题“$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$”的否定为全称命题“$\forall x\in M$，$\neg p(x)$”.

问题10：对于教科书上例4中的每个特称命题，你能写出它们的否定吗?

设计意图：根据前面探究得到的含一个量词的特称命题与它们的否定在形式上的变化规律，学习对含有一个量词的特称命题进行否定.

师：引导学生阅读教科书上例4中的每个特称命题，让学生尝试写出这些特称命题的否定，纠正出现的逻辑错误.

生：阅读教科书例4，尝试写出每个特称命题的否定.

问题11：通过学习，你能解决教科书第26页练习中的问题吗?

设计意图：反馈学生掌握逻辑联结词“且”的用法和含义的情况，巩固本小节所学的基本知识.

生：独立思考，解决教科书第26页练习第1题和第2题.

师：先让学生讲述解答情况，再作出评判，给出正确解答.

问题12：小结：如何写出含有一个量词的命题的否定，原先的命题与它的否定在形式上有什么变化?

设计意图：归纳整理本节课所学知识.

师：引导学生思考，概括.

生：思考、整理、表述概括的结果.

课后作业：习题1.4A组第3题；习题1.3B组(1)(2)(3)(4).

5. 几点说明

(1) 虽然《普通高中数学课程标准（实验）》中提出用数学和生活中的丰富实例，但在具体的教学过程中，教师应尽量不选用生活中的例子，因为许多生活例子的讨论会超出本教科书的范围. 如“所有的学生考得很好”“有一个学生的年龄很大”等.

(2) 在探究的过程中，教师应注意引导学生用简洁、自然的语言表述含一个量词的命题的否定，避免学生对逻辑联结词“非”的含义和用法的机械记忆，降低探究的难度.

(3) 全称命题“所有的矩形都是平行四边形”的否定是命题“并非所有的矩形都是平行四边形”，而不是命题“所有的矩形都不是平行四边形”，要注意它们的区别. 类似地，还有特称命题“某些平行四边形是菱形”的否定是“没有一个平行四边形是菱形”，而不是命题“某些平行四边形不是菱形”.

(4) 在例 3 和例 4 的教学过程中，在已经完成这些全称命题和特称命题的否定后，可进一步判定它们的真假，巩固学生在前一节所学的知识.

五、习题解答

练习（第 23 页）

1. (1) 真命题；(2) 假命题；(3) 假命题.
2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题.

练习（第 26 页）

1. (1) $\exists n_0 \in \mathbf{Z}$，$n_0 \notin \mathbf{Q}$；
   (2) 存在一个素数，它不是奇数；
   (3) 存在一个指数函数，它不是单调函数.
2. (1) 所有三角形都不是直角三角形；
   (2) 每个梯形都不是等腰梯形；
   (3) 所有实数的绝对值都是正数.

习题 1.4（第 26 页）

A 组

1. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题；(4) 假命题.
2. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题.
3. (1) $\exists x_0 \in \mathbf{N}$，$x_0^3 \leqslant x_0^2$；
   (2) 存在一个可以被 5 整除的整数，末位数字不是 0；
   (3) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 - x + 1 > 0$；
   (4) 对于任意一个四边形，它的对角线不互相垂直.

B 组

(1) 假命题；存在一条直线，它在 y 轴上没有截距；
(2) 假命题；存在一个二次函数，它的图象与 x 轴不相交；
(3) 假命题；每个三角形的内角和都不小于 $180°$；
(4) 真命题；每个四边形都有外接圆.

III 自我检测题

一、选择题

1. 命题“如果 $x\geqslant a^2+b^2$，那么 $x\geqslant 2ab$”的逆否命题是（　　）.

(A) 如果 $x<a^2+b^2$，那么 $x<2ab$

(B) 如果 $x\geqslant 2ab$，那么 $x\geqslant a^2+b^2$

(C) 如果 $x<2ab$，那么 $x<a^2+b^2$

(D) 如果 $x\geqslant a^2+b^2$，那么 $x<2ab$

2. 三角形全等是三角形面积相等的（　　）.

(A) 充分但不必要条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分又不必要条件

3. 下列四个命题中，真命题是（　　）.

(A) $\sqrt{2}$是偶数且是无理数

(B) $8\geqslant 10$

(C) 有些梯形内接于圆

(D) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3-x+1\neq 0$

4. 命题“所有奇数的立方是奇数”的否定是（　　）.

(A) 所有奇数的立方不是奇数

(B) 不存在一个奇数，它的立方是偶数

(C) 存在一个奇数，它的立方是偶数

(D) 不存在一个奇数，它的立方是奇数

二、填空题

5. 命题“如果 $a=-1$，则 $a^2=1$”的逆否命题是：________________.

6. $b=0$ 是函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为偶函数的________________条件.

7. 全称命题“$\forall a\in\mathbf{Z}$, a 有一个正因数”的否定是：________________.

8. 特称命题“有些三角形的三条中线相等”的否定是：________________.

三、解答题

9. 证明：$a+2b=0$ 是直线 $ax+2y+3=0$ 和直线 $x+by+2=0$ 互相垂直的充要条件.

参考答案

一、选择题

1. C.　2. A.　3. C.　4. C.

二、填空题

5. 如果 $a^2\neq 1$，那么 $a\neq -1$.

6. 充分必要.

7. $\exists a_0\in \mathbf{Z}$，$a_0$ 没有正因数.

8. 每一个三角形的三条中线都不相等.

三、解答题

9. 证明：充分性：当 $b=0$ 时，如果 $a+2b=0$，则 $a=0$，此时直线 $ax+2y+3=0$ 平行于 x 轴，直线 $x+by+2=0$ 平行于 y 轴，它们互相垂直；当 $b\neq 0$ 时，直线 $ax+2y+3=0$ 的斜率是 $k_1=-\dfrac{a}{2}$，直线 $x+by+2=0$ 的斜率 $k_2=-\dfrac{1}{b}$，如果 $a+2b=0$，则 $k_1\times k_2=\left(-\dfrac{a}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{b}\right)=-1$，两直线互相垂直.

必要性：如果两条直线互相垂直且斜率都存在，则 $k_1\times k_2=\left(-\dfrac{a}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{b}\right)=-1$，所以 $a+2b=0$；若两直线中有直线的斜率不存在，且互相垂直，则 $b=0$，且 $a=0$，所以，$a+2b=0$.

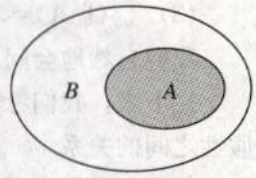
Ⅳ 拓展资源

一、知识内容的拓广延伸

1. 充分条件、必要条件、充要条件与集合之间的关系

设 A，B 为两个集合．集合 $A\subseteq B$ 是指

$$x\in A\Rightarrow x\in B. \qquad (*)$$

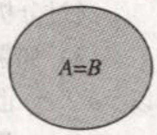


这就是说，“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要条件.

反过来，如果“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，那么$(*)$式成立，从而有集合 $A\subseteq B$.

设 A，B 为两个集合，集合 $A=B$ 是指

$$x\in A\Leftrightarrow x\in B. \qquad (**)$$



这就是说，“$x\in A$”与“$x\in B$”互为充要条件.

反过来，如果“$x\in A$”与“$x\in B$”互为充要条件，那么$(**)$式成立，从而集合 $A=B$.

设 p，q 为含有变量 x 的语句，我们引入如下两个集合：

$$A=\{x\mid p\text{ 成立}\},$$
$$B=\{x\mid q\text{ 成立}\}.$$

如果集合 $A\subseteq B$，那么每个使 p 成立的变量 x 也使得 q 成立．也就是说，若 p 成立，则 q 也成立，即 $p\Rightarrow q$，从而 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

反过来，如果 p 是 q 的充分条件，那么由 p 成立可以推出 q 成立．也就是说，若 $x\in A$，则一定有 $x\in B$，从而集合 $A\subseteq B$.

这样一来，判断 p 是否为 q 的充分条件，或等价地，判断 q 是否为 p 的必要条件，我们只需判断集合 $A\subseteq B$ 是否成立即可.

类似地，我们还可以得到：判断 p 与 q 是否互为充要条件，我们只需判断集合 $A=B$ 是否成立即可.

接下来，我们用前面的分析处理一些具体的问题.

看下面的例子.

例 在“若 p，则 q”形式的命题中，p 是 q 的什么条件?

(1) 若 $x^2=y^2$，则 $x=y$；

(2) 若 $x=1$，则 $x^2-4x+3=0$；

(3) 若 a 是无理数，则 $a+1$ 也是无理数.

解：在命题 (1) 中，p 与 q 均为含有变量 x，y 的语句，其中集合 $A=\{(x,y)\mid x^2=y^2\}$，$B=\{(x,y)\mid x=y\}$. 容易发现，集合 A，B 表示直角坐标平面上的两个点集，其中 A 表示位于第一、三象限的角平分线上的点和第二、四象限的角平分线上的点的集合，而 B 表示位于第一、三象限的角平分线上的点的集合，所以集合 $B\subseteq A$. 这表明，命题(1)中 q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

在命题(2)中，p 与 q 均为含有变量 x 的语句，其中集合 $A=\{x\mid x=1\}=\{1\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$. 容易发现，集合 $A\subseteq B$. 这表明，命题(2)中 p 是 q 的充分条件.

在命题(3)中，p 与 q 均为含有变量 a 的语句，其中集合 $A=\{a\mid a$ 为无理数$\}$，$B=\{a\mid a+1$ 为无理数$\}$. 容易发现，集合 $A=B$. 这表明，命题(3)中 p 是 q 的充要条件.

2. 命题的逻辑等价

在本章“阅读与思考”中，我们发现，逻辑联结词“且”“或”“非”如同集合的基本运算“交”“并”“补”一样，也可以看作是对命题的一种“运算”. 命题经过这种“运算”后，结果仍然是一个命题.

我们知道，集合的“交”“并”“补”运算满足如下运算性质：

(1) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；

(2) $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U C$；

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

我们自然地会问：对于命题的运算“且”“或”“非”，是否也有类似的运算性质呢?

接下来，我们考察命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$，命题 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 以及命题 $\neg(\neg p)$ 与 p 的真假性之间的关系.

首先，我们来考察命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 的真假性之间的关系.

通过分析命题的真假性，我们发现：

(1) 如果 p 和 q 都是真命题，则命题 $p\wedge q$ 是真命题，$\neg(p\wedge q)$ 是假命题，$\neg p$ 和 $\neg q$ 是假命题，所以 $\neg p\vee\neg q$ 也是假命题；

(2) 如果 p 和 q 都是假命题，则命题 $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$\neg(p\wedge q)$ 是真命题，$\neg p\vee\neg q$ 是真命题；

(3) 如果 p 和 q 为一真一假，则命题 $\neg p$ 和 $\neg q$ 也是一真一假. 所以，$p\wedge q$ 是假命题，$\neg(p\wedge q)$ 是真命题，$\neg p\vee\neg q$ 也是真命题.

于是可以得到下表：

表 1

	命题 $\neg(p\wedge q)$	命题 $\neg p\vee\neg q$
p，q 都是真命题	假	假
p，q 都是假命题	真	真
p，q 为一真一假	真	真

从表 1 可以看出，无论命题 p，q 的真假如何，命题 $\neg(p\wedge q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 的真假性完全一致，我们称这样的两个命题为逻辑等价，记作

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q. \quad (*)$$

我们再来考察命题$\neg(p \lor q)$与$\neg p \land \neg q$的真假性之间的关系.

仿照前面的讨论，我们发现，命题$\neg(p \lor q)$与命题$\neg p \land \neg q$的真假性如下表所示：

表 2

	命题$\neg(p \lor q)$	命题$\neg p \land \neg q$
p，q都是真命题	假	假
p，q都是假命题	真	真
p，q为一真一假	假	假

从表 2 可以看出，无论命题p，q的真假如何，命题$\neg(p \lor q)$与$\neg p \land \neg q$的真假性完全一致. 所以，命题$\neg(p \lor q)$与$\neg p \land \neg q$是逻辑等价的，即

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q. \quad (**)$$

最后，我们考察命题$\neg(\neg p)$与p的真假性之间的关系.

根据命题p的真假性，我们分如下两种情形讨论：

(1) 如果p为真命题，那么命题$\neg p$为假命题，而命题$\neg(\neg p)$为真命题；

(2) 如果p为假命题，那么命题$\neg p$为真命题，而命题$\neg(\neg p)$为假命题.

于是得到下表：

表 3

	命题$\neg(\neg p)$
p是真命题	真
p是假命题	假

从表 3 可以看出，无论命题p的真假如何，命题$\neg(\neg p)$与p的真假性完全一致. 所以，命题$\neg(\neg p)$与p是逻辑等价的，即

$$\neg(\neg p) \equiv p. \quad (***)$$

与集合的“交”“并”“补”的运算性质(1)(2)和(3)相对应，上面的式子(*)(**)和(***)可以看作命题的“且”“或”“非”的运算性质.

二、相关知识简介

数理逻辑

数理逻辑又称符号逻辑，是用数学的方法研究推理过程的一门学问. 它是把数学上的形式化的方法应用到逻辑领域的结果.

数理逻辑的创始人，一般认为是德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz）. 他曾经提出创建一种“普遍的符号语言”，可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论. 由于当时的社会条件，他的想法并没有实现，但是这种思想是现代数理逻辑部分内容的萌芽.

英国数学家布尔（G. Boole）建立了“布尔代数”，并创造出一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念. 他还建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础. 19 世纪末 20 世纪初，数理逻辑有了较大的发展.

1884 年，德国数学家弗雷格（G. Frege）出版了《算术基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备. 此外，美国人皮尔斯在他的著作中引入了新的逻辑符号，把关系逻

辑组成为一个关系演算.

至此，现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，并成为一门独立的学科.

“命题演算”和“谓词演算”是数理逻辑的两个最基本的，也是最重要的组成部分.

命题演算是研究关于命题如何通过一些逻辑联结词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法. 如果我们把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑联结词看作运算符号，就像代数中的“加、减、乘、除”那样，那么由一些简单的命题组成复杂的命题的过程，就可以当作逻辑运算的过程，也就是命题的演算.

谓词演算是把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式，由含有变项的逻辑公式、逻辑联结词和量词构成命题，然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系.

数理逻辑这门学科建立以后，发展比较迅速，促进它发展的因素也是多方面的. 主要原因是这门学科对于数学其他分支如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大的影响，特别是对新近形成的计算机科学的发展起了推动作用. 反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展.

数理逻辑新近还发展了许多新的分支，如递归论、模型论等. 递归论主要研究可计算性的理论，它和计算机的发展与应用有密切的关系. 模型论主要是研究形式系统和数学模型之间的关系.

由于数理逻辑是一门新近兴起而又发展很快的学科，所以它本身仍存在许多问题有待于深入研究.

复习参考题（第 28 页）解答

A 组

1. 原命题可以写为：若一个三角形是等边三角形，则此三角形的三个内角相等.

逆命题：若一个三角形的三个内角相等，则此三角形是等边三角形，是真命题；

否命题：若一个三角形不是等边三角形，则此三角形的三个内角不全相等，是真命题；

逆否命题：若一个三角形的三个内角不全相等，则此三角形不是等边三角形，是真命题.

2. 略.

3. (1) 假；(2) 假；(3) 假；(4) 假.

4. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真；(5) 真.

5. (1) $\forall n\in \mathbf{N}_+$，$n^2>0$；

(2) $\forall P\in\{P|P$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上$\}$，$|OP|=r$(O 为圆心)；

(3) $\exists(x_0,\ y_0)\in\{(x,\ y)\mid x,\ y$ 是整数$\}$，$2x_0+4y_0=3$；

(4) $\exists x_0\in\{$无理数$\}$，$x_0^3\in\{$有理数$\}$.

6. (1) $3\neq 2$；

(2) $5\leqslant 4$；

(3) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0\leqslant 0$；

(4) 存在一个正方形，它不是平行四边形.

B 组

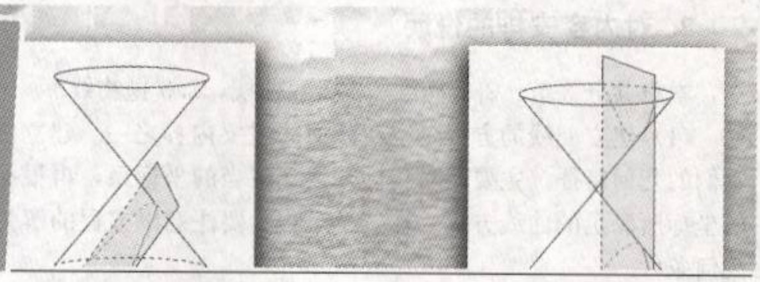
1. (1) $p\wedge q$；

(2) $(\neg p)\wedge(\neg q)$，或 $\neg(p\vee q)$.

2. (1) $\forall\,\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对应的边分别是 a，b，c，则 $c^2=a^2+b^2$；

(2) $\forall\triangle ABC$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对应的边分别是 a，b，c，则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

第二章 圆锥曲线与方程



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在必修课程学习平面解析几何初步的基础上，在本模块中，学生将学习圆锥曲线与方程，了解圆锥曲线与二次方程的关系，掌握圆锥曲线的基本几何性质，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，进一步体会数形结合的思想.

2. 学习目标

（1）了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

（2）经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

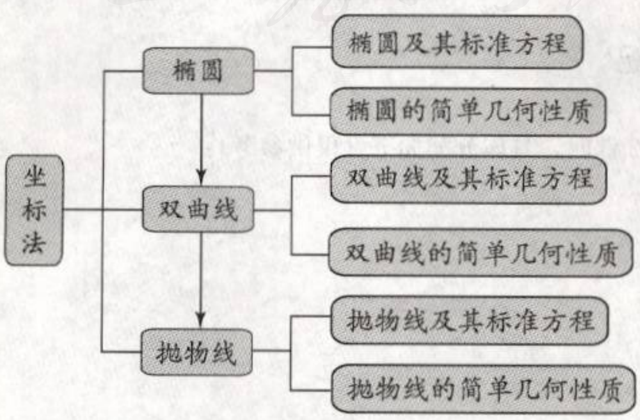
（3）了解抛物线、双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它们的简单几何性质.

（4）通过圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数形结合的思想.

（5）了解圆锥曲线的简单应用.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 3 节：2.1 椭圆；2.2 双曲线；2.3 抛物线.

(1) 建立曲线的方程是解析几何的主要内容之一. 建立椭圆、双曲线、抛物线的方程，就是根据它们的几何特征（主要是对称性）建立适当的坐标系，再根据曲线上的点所满足的几何条件，求出点的坐标所满足的曲线方程. 在这个过程中要注意以方程的解为坐标的点是否在曲线上，即是否满足该几何条件.

通过研究方程来研究曲线的性质是解析几何的另一个主要内容，这就是解析几何通过代数方法研究几何图形性质的特点，也就是坐标法. 这一思想应该贯穿于整个解析几何的教学.

直线与圆锥曲线位置关系的问题，反映在代数上是它们的方程组成的方程组有无实数解的问题. 方程组有几组解，直线与圆锥曲线就有几个公共点；方程组没有实数解，直线与圆锥曲线就没有公共点.

(2) 坐标法是研究几何问题的重要方法，在教学过程中，应始终贯穿坐标法这一重要思想，不怕重复. 通过坐标系，把点和坐标、曲线和方程联系起来，实现形和数的统一.

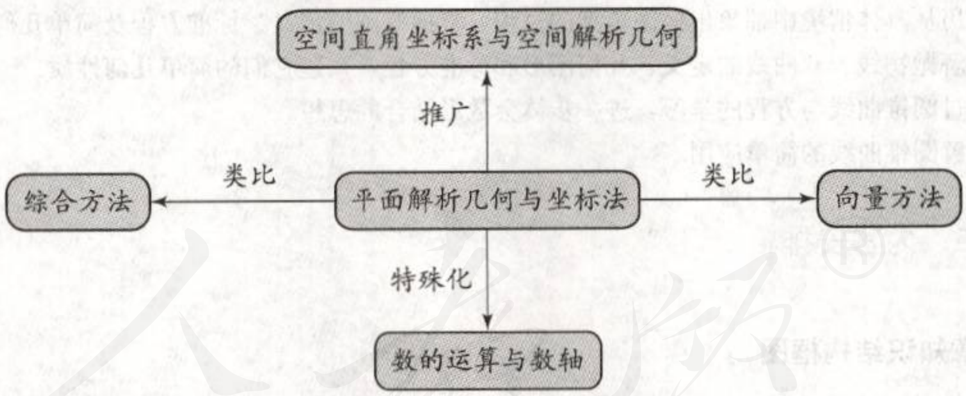
用坐标法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何对象，然后对坐标和方程进行代数讨论；最后再把代数运算结果“翻译”成相应的几何结论. 这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论.

(3) 坐标法还可以与平面几何中的综合法、向量方法建立联系，也可以推广到空间，解决立体几何问题. 这种联系可以用以下框图表示.



三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 椭圆	约 4 课时
2.2 双曲线	约 3 课时
2.3 抛物线	约 3 课时
小结	约 2 课时

II 教科书分析

章引言主要分成三部分.

第一部分，从欧氏几何角度介绍圆锥曲线产生的过程. 当一个平面垂直于圆锥的轴线时截口曲线是圆，改变平面与圆锥轴线的夹角，当截面与圆锥轴线夹角不同时可以产生椭圆、抛物线、双曲线. 由于这些曲线是截圆锥而来，所以，称它们是圆锥曲线.

有些书上把圆作为椭圆的特例，作为圆锥曲线的一种，统一放在圆锥曲线中. 在《数学 2》中，对圆已经单独进行了讨论，本章讲的圆锥曲线不再包括圆. 教学时可向学生作适当说明.

第二部分，说明圆锥曲线与科研、生产以及日常生活的密切关系. 比如，人造卫星和彗星运行的轨道、探照灯、手电筒、卫星接收天线、电影放映机的灯泡以及 GPS（Global Positioning System，全球定位系统）等等，它们的工作原理都与圆锥曲线的性质有关. 通过简单介绍圆锥曲线与生产、生活的关系可以提高学生学习圆锥曲线的兴趣.

第三部分，教科书简要阐述了人类研究圆锥曲线的历史，并提出了本章的学习目标. 这样，不仅渗透了数学史与数学文化，使学生了解可以有不同的研究圆锥曲线的方法，了解“坐标法”的意义，而且可以使学生明确本章的学习任务，引发学生学习本章知识的欲望.

2.1 椭圆

一、本节知识结构

实际背景

↓

椭圆的定义

↓

椭圆的标准方程

↓

椭圆的简单几何性质

二、教学重点与难点

重点：椭圆的标准方程；坐标法的基本思想.

难点：椭圆标准方程的推导与化简；坐标法的应用.

三、编写意图与教学建议

2.1.1 椭圆及其标准方程

1. 椭圆的定义

椭圆是常见的曲线，通过引言及日常生活的体验，学生对椭圆已有一定的认识．为了使学生掌握椭圆的本质特征，得到椭圆的定义，教科书介绍了一种画椭圆的方法，通过画图的过程揭示椭圆的几何特征．

在定义椭圆时，对“常数”加上了一个条件，即常数要大于$|F_1F_2|$．这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即轨迹为一条线段或无轨迹．对于这两种情况，教学中应及时加以说明，使学生理解为什么“常数要大于$|F_1F_2|$”．另一方面，还可以通过在$\triangle MF_1F_2$中，两边之和大于第三边来理解．当然这样做的弊端是忽略特殊情形，即点M位于椭圆长轴端点的情形．

在椭圆定义的教学中，一定要仔细地展示椭圆产生的过程，并引导学生分析椭圆上的点所满足的几何条件，使学生建立充分的关于椭圆几何特征的直观基础，为选择坐标系、建立椭圆的标准方程创造条件．

2. 椭圆标准方程的建立

首先要建立坐标系．曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不同，为了使方程简单，必须注意坐标系的选择要恰当．怎样选择恰当的坐标系，需要根据具体情况来确定．一般情况下，应注意使已知点的坐标和直线（曲线）的方程尽可能简单，这就需要充分利用图形（曲线）的几何特点．在建立椭圆的标准方程时，注意到图形的对称性，不难想到x轴应该经过两个定点F_1，F_2，并且使坐标原点与线段F_1F_2的中点重合，这样，两个定点的坐标比较简单，便于推导方程．

在求方程时，设椭圆的焦距为$2c$（$c>0$），椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为$2a$（$a>0$，$a>c$）．这是为了使焦点及长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以使导出的椭圆方程形式简单．

教科书在推出方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$以后，设置了“思考”（第 33 页），目的在于说明为什么令$b^2=a^2-c^2$，让学生感受这一做法的合理性．这样，不仅方程具有对称性，而且b有明确的几何意义．

带根式的方程的化简是学生感到困难的，也是教学的难点．特别是由M适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非 0 常数的形式，化简时要进行两次平方，方程中字母超过 3 个，且次数高、项数多，由于初中代数学习中这方面的知识准备不够充分，所以教学时，要注意引导学生分析这类方程化简的方法．一般来说，

(1) 方程中只有一个根式时，需将它单独留在方程的一边，把其他各项移到另一边；

(2) 方程中有两个根式时，需将它们分散，放在方程的两边，使其中一边只有一个根式．

求得椭圆的方程②（指$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$））以后，教科书指出“从上述过程可以看到，椭圆上的任意一点的坐标都满足方程②，以方程②的解$(x，y)$为坐标的点到椭圆的两个焦点$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$的距离之和为$2a$，即以方程②的解为坐标的点都在椭圆上”．这是在按照曲线方程的定义，说明所求得的方程确是椭圆的方程．让学生对此有所体会即可，不要作过多要求．后面在求出双曲线、抛物线方程之后也有类似的说明，都可以这样处理，不再赘述．

在求出椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）后，教科书设置了一个“思考”（第 34 页）．稍加思

考，学生不难发现，应该在方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中把$x$，$y$对换得到椭圆的另一个标准方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）. 这样一来，椭圆的标准方程有两个. 这是需要强调的.

3. 三个例题的处理

例1、练习3以及习题2.1A组中的习题1、7都是为巩固对椭圆定义的理解而设置的.

例题1的边空提出"你还能用其他方法求它的方程吗……"，这里的"其他方法"指待定系数法，解法如下：

由题意，椭圆的两个焦点在x轴上，因此，可以设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，$c=2$，所以，$a^2-b^2=4$. ①

又由已知，得$\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1$. ②

联立①②解方程组，得$a^2=10$，$b^2=6$.

因此，所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$.

这也是为了让学生学会利用椭圆的标准方程解决问题.

例2（以及习题2.1B组中的第1题）有三个作用：第一，又一次引导学生体会利用中间变量求点的轨迹的方法；第二，向学生说明，如果求得的点的轨迹的方程形式与椭圆的标准方程相同，那么这个轨迹是椭圆；第三，使学生知道，一个圆按某一个方向作伸缩变换可以得到椭圆，体会椭圆与圆之间的关系.

例3既给出了生成椭圆的另一种方法：一个动点到两个定点连线的斜率之积是一个负常数，又能使学生体会椭圆几何特征的各种表现形式. 另外，这里第一次提出了求动点轨迹方程时，应当注意以方程的解为坐标的点是否在曲线上的问题，实际上这是在强调正确理解"曲线的方程""方程的曲线"的概念. 当然，在教学中只要点到为止，不必深究.

4. 注意信息技术的运用

信息技术在给出动点满足的几何条件之后探究曲线的形状有着特殊的作用. 有条件的学校，应该注意发挥它的作用. 比如演示平面切割圆锥面的过程、演示椭圆形成的过程，等等.

2.1.2 椭圆的简单几何性质

1. 如何研究几何图形的性质

根据曲线的方程研究曲线的几何性质，并正确地画出它的图形，是解析几何的基本问题之一.

根据几何条件求出曲线方程，然后利用曲线的方程研究它的性质、画图，是解析几何的基本方法.

本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几个几何性质，掌握标准方程中a，b以及c，e的几何意义，a，b，c，e之间的相互关系；同时，要通过讨论椭圆的标准方程，使学生了解在解析几何中是怎样用代数方法研究曲线性质的. 正如引言中已经指出的，圆锥曲线的性质可以从综合几何（欧氏几何）的角度进行研究，但是需要比较多的知识准备，而且要有较强的逻辑推理能力；用代数方法研究圆锥曲线的性质，是将复杂的几何关系的考察转化为对曲线方程特点的考察，而代数方法有可以程序化地进行运算、操作的特点，所以，可以使研究过程更有规律

可循.

在利用方程研究椭圆的性质之前，可以引导学生观察椭圆——几何直观，想一想我们应该关注椭圆哪些方面的性质，研究哪些问题，如何研究，引导学生首先从整体上把握几何图形，这就是范围、对称性；其次是研究它的顶点（与坐标轴的交点）、扁平程度（离心率），等等；然后考虑方程的各种特征对应着椭圆的哪些性质，逐渐让学生掌握利用方程研究几何图形性质的方法.

2. 椭圆的简单几何性质

为了有序地讨论性质，可以先引导学生分析得出如下结论：

变量 x，y 的取值范围 ⟶ 曲线的范围

方程的对称性 ⟶ 曲线的对称性

$x=0$ 或 $y=0$ 时方程的解 ⟶ 曲线的顶点

特征数 a，b，c ⟶ 曲线的几何形状

教科书以标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$为例讨论椭圆的几何性质. 把方程写成$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$，利用$\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$得到关于 x 的不等式，解出 x 的范围. 这个方法具有普遍性. 实际上，这与利用一元二次方程有实数解的条件，即根的判别式 $\Delta\geqslant 0$ 得到系数的有关不等式是一致的.

不等式组$\begin{cases}|x|\leqslant a,\\|y|\leqslant b\end{cases}$的解集表示的区域，就是平面内四个不等式 $x\geqslant -a$，$x\leqslant a$，$y\geqslant -b$，$y\leqslant b$ 所表示的区域的交集，即直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围成的矩形区域.

确定曲线范围的另一个目的，是用描点法画曲线时就可以不取曲线范围以外的点了.

在讨论椭圆的对称性之前，可以先复习已经学习过的对称的概念，关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系. 然后说明“以 $-x$ 代 x，方程不变，则曲线关于 y 轴对称；以 $-y$ 代 y，方程不变，则曲线关于 x 轴对称；同时以 $-x$ 代 x、以 $-y$ 代 y，方程也不变，则曲线关于原点对称”.

容易证明，如果曲线具有上述三种对称性中的任意两种，那么它一定还具有另一种对称性. 例如，如果曲线关于 x 轴和原点对称，那么它一定关于 y 轴对称. 事实上，设点 $P(x, y)$ 在曲线上，因为曲线关于 x 轴对称，所以点 $P_1(x, -y)$ 必在曲线上. 因为曲线关于原点对称，所以 P_1 关于原点的对称点 $P_2(-x, y)$ 必在曲线上. 因为 $P(x, y)$，$P_2(-x, y)$ 都在曲线上，所以曲线关于 y 轴对称.

必须让学生明白：图形对称性的本质是构成图形的点的对称性. 抓住了点的对称性就可以抓住图形的对称性.

用解析法研究图形的性质是通过对方程的讨论进行的，方程是建立在坐标系的基础上. 同一曲线由于选取的坐标系不同，方程的形式也不同，但是，最后得出图形的性质是一致的，即与坐标系的选取无关. 那些与坐标系的选择有关的“性质”不是图形的本质特征. 教学时，可以向学生讲清图形本身的性质，把曲线不同位置的特殊性质与图形本身的性质区别开来.

3. 关于椭圆的离心率

离心率的作用是什么？离心率是用来刻画椭圆什么性质的？教科书设置了一个“思考”（第 39 页）. 答案当然可以是$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$，等等.

离心率的概念比较抽象，为了形象地加以说明，教科书在边空增加了“椭圆的离心率可以形象地

理解为，在椭圆的长轴长不变的前提下，两个焦点离开中心的程度”这个说明.

有条件的学校，可以借助信息技术改变 c 的大小，演示在 a 不变的情况下椭圆扁平程度的动态变化，加深对离心率的认识.

4. 圆与椭圆的关系问题

实际上，分类方法不同就可能形成不同的答案.

教科书中，“当且仅当 $a=b$ 时，$c=0$，这时两个焦点重合，图形变为圆，它的方程为$x^2+y^2=a^2$” 并不意味着圆是特殊的椭圆. 在椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，有 $a>b>0$ 的限制.

为了教学方便，本教科书中规定椭圆与圆是两种不同的曲线，因此椭圆的离心率满足不等式

$$0<e<1.$$

5. “探究”（第 40 页）的解答

如图 2-1，在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_2O$ 中，$\cos\angle BF_2O=\frac{c}{a}$，$\frac{c}{a}$越大，$\angle BF_2O$ 越小，椭圆越扁；$\frac{c}{a}$越小，$\angle BF_2O$ 越大，椭圆越圆.

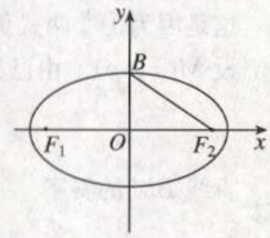


图 2-1

6. 关于例题与习题

例 4 的目的是为巩固椭圆的简单几何性质.

例 5 介绍了椭圆应用的一个例子.

例 6 通过一个具体的例子使学生感受椭圆的另外一种定义方式，但注意不要作过多拓展，不要对学生提出建立圆锥曲线统一方程的要求.

习题 2.1A 组的第 8 题涉及到 “近日点”“远日点” 两个概念，可以稍加说明.

要说明近日点、远日点、太阳中心（椭圆轨道的焦点）在同一条直线上. 这个问题可以用坐标法来证明，即可以证明椭圆上到焦点的距离最大和最小的点，恰是椭圆长轴的两个端点.

我们用椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 来证明.

如图 2-2，设点 $P(x_0, y_0)$是椭圆上任意一点，r 为点 P 与椭圆左焦点 $F_1(-c, 0)$的距离，则

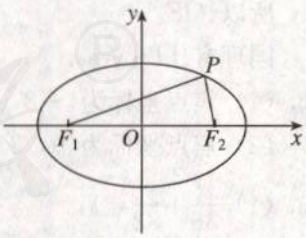


图 2-2

$$\begin{aligned} r^2 &=(x_0+c)^2+y_0^2 \\ &=x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2 \\ &=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2+2cx_0+c^2+b^2 \\ &=\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2 \\ &=\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2. \end{aligned}$$

因为 $r>0$，所以 $r=\frac{c}{a}x_0+a$. 又 $-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以，当 $x_0=a$ 时，r 最大，$x=-a$ 时，r 最小，即点$(a, 0)$，$(-a, 0)$到焦点 F_1 的距离，分别是椭圆上的点与焦点 F_1 的最大距离和最小距离.

四、习题解答

练习（第36页）

1. 根据椭圆的定义，$|PF_1|+|PF_2|=20$，因为$|PF_1|=6$，所以$|PF_2|=14$.

2. (1) $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$；　　(2) $\dfrac{y^2}{16}+x^2=1$；　　(3) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$或$\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{x^2}{16}=1$.

3. 由已知，$a=5$，$b=4$，所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

(1) $\triangle AF_1B$的周长$=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|$. ①

由椭圆的定义，得

$$|AF_1|+|AF_2|=2a，|BF_1|+|BF_2|=2a， \quad ②$$

所以，$\triangle AF_1B$的周长$=4a=20$.

(2) 如果AB不垂直于x轴，$\triangle AF_1B$的周长不变化.

这是因为①②两式仍然成立，$\triangle AF_1B$的周长$=4a$，这是定值.

4. 设$M(x,\ y)$. 由已知，得直线AM的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+1}(x\neq-1)；$$

直线BM的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-1}(x\neq1).$$

由题意，得$\dfrac{k_{AM}}{k_{BM}}=2$，所以，$\dfrac{y}{x+1}=2\times\dfrac{y}{x-1}$ $(x\neq\pm1,\ y\neq0)$.

化简，得$x=-3(y\neq0)$.

点M的轨迹是直线$x=-3$，并去掉一点$(-3,\ 0)$.

练习（第41页）

1. 以点B_2(或B_1)为圆心，以线段OA_2或OA_1为半径画圆，并作出与x轴的两个交点F_1，F_2，F_1，F_2就是椭圆的两个焦点. 这是因为，在$\mathrm{Rt}\triangle B_2OF_2$中，

$$|OB_2|=b，|B_2F_2|=|OA_2|=a，$$

所以$|OF_2|=c$.

同理有$|OF_1|=c$.

2. (1) 焦点坐标为$(-8,\ 0)$，$(8,\ 0)$；

(2) 焦点坐标为$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$.

3. (1) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1$；　　(2) $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{16}=1$.

4. (1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$或$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$.

5. (1) 椭圆$9x^2+y^2=36$的离心率是$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的离心率是$\dfrac{1}{2}$.

因为$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}>\dfrac{1}{2}$，所以，椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$更圆，椭圆$9x^2+y^2=36$更扁.

(2) 椭圆$x^2+9y^2=36$的离心率是$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{10}=1$的离心率是$\dfrac{1}{5}\sqrt{10}$.

因为$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}>\dfrac{1}{5}\sqrt{10}$，所以，椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{10}=1$更圆，椭圆$x^2+9y^2=36$更扁.

习题 2.1（第 42 页）

A 组

1. 由点 $M(x, y)$ 满足的关系式 $\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$ 以及椭圆的定义得，点 M 的轨迹是以 $F_1(0, -3)$，$F_2(0, 3)$ 为焦点，长轴长为 10 的椭圆．它的方程是 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.

2. (1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$；　(2) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$；　(3) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$ 或 $\frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{40}=1$.

3. (1) 不等式 $-2\leqslant x\leqslant 2$，$-4\leqslant y\leqslant 4$ 表示的区域的公共部分；

   (2) 不等式 $-2\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{5}$，$-\frac{10}{3}\leqslant y\leqslant\frac{10}{3}$ 表示的区域的公共部分.

   图略.

4. (1) 长轴长 $2a=8$，短轴长 $2b=4$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标分别是 $(-2\sqrt{3}, 0)$，$(2\sqrt{3}, 0)$，顶点坐标分别是 $(-4, 0)$，$(4, 0)$，$(0, -2)$，$(0, 2)$.

   (2) 长轴长 $2a=18$，短轴长 $2b=6$，离心率 $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，焦点坐标是 $(0, -6\sqrt{2})$，$(0, 6\sqrt{2})$，顶点坐标分别是 $(0, -9)$，$(0, 9)$，$(-3, 0)$，$(3, 0)$.

5. (1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$；　(2) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$；　(3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

6. 由已知，椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2$.

   因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 1，所以 $\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_P|=1$，解得 $|y_P|=1$.

   代入椭圆的方程，得 $\frac{x^2}{5}+\frac{1}{4}=1$，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

   所以，点 P 的坐标是 $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, \pm 1\right)$．共有 4 点.

7. 连接 QA.

   由已知得 $|QA|=|QP|$.

   所以 $|QO|+|QA|=|QO|+|QP|=|OP|=r$.

   又因为点 A 在圆内，所以 $|OA|<|OP|$，根据椭圆的定义，点 Q 的轨迹是以 O，A 为焦点，r 为长轴长的椭圆.

8. $\frac{x^2}{3.525^2}+\frac{y^2}{2.875^2}=1$.

9. 地球到太阳的最大距离为 $1.528\,8\times10^8$ km，最小距离为 $1.471\,2\times10^8$ km.

B 组

1. 设点 M 的坐标为 (x, y)，点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则

$$x=x_0,\ y=\frac{3y_0}{2}.$$

   所以 $x_0=x$，$y_0=\frac{2}{3}y$. ①

   因为 $P(x_0, y_0)$ 在圆上，所以

$$x_0^2+y_0^2=4. \quad ②$$

   将①代入②，得点 M 的轨迹方程为

$$x^2+\frac{4}{9}y^2=4,$$

即

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

所以点 M 的轨迹是一个椭圆.

与例 2 相比，可以看出，将圆按照某个方向均匀地压缩或拉长，也可以得到椭圆.

2. 设 d 是点 P 到直线 $x=8$ 的距离，根据题意，所求轨迹就是集合

$$M=\left\{P\left|\frac{|PF|}{d}=\frac{1}{2}\right.\right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-2)+y^2}}{|8-x|}=\frac{1}{2}.$$

将上式两边平方，并化简，得

$$3x^2+4y^2=48,$$

即

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

所以，点 M 的轨迹是长轴、短轴长分别为 8、$4\sqrt{3}$的椭圆.

3. 以 O 为原点，HF 所在的直线为 x 轴，EG 所在的直线为 y 轴建立坐标系.

由已知，得 $E(0,\ -3)$，$F(4,\ 0)$，$G(0,\ 3)$，$H(-4,\ 0)$.

因为 R，S，T 是线段 OF 的四等分点，R'，S'，T' 是线段 CF 的四等分点，

所以，$R(1,\ 0)$，$S(2,\ 0)$，$T(3,\ 0)$；$R'\left(4,\ \frac{9}{4}\right)$，$S'\left(4,\ \frac{3}{2}\right)$，$T'\left(4,\ \frac{3}{4}\right)$.

直线 ER 的方程是 $y=3x-3$；直线 GR'的方程是 $y=-\frac{3}{16}x+3$.

联立这两个方程，解得 $x=\frac{32}{17}$，$y=\frac{45}{17}$.

所以，点 L 的坐标是$\left(\frac{32}{17},\ \frac{45}{17}\right)$.

同理，求出点 M 的坐标$\left(\frac{16}{5},\ \frac{9}{5}\right)$，点 N 的坐标$\left(\frac{96}{25},\ \frac{21}{25}\right)$.

可以设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,\ n>0)$. ①

把点 L，M 的坐标代入方程①，并解方程组，得

$$\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4^2},\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{3^2}.$$

所以经过点 L，M 的椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

把点 N 的坐标代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$，得

$$\frac{1}{16}\times\left(\frac{96}{25}\right)^2+\frac{1}{9}\times\left(\frac{21}{25}\right)^2=1,$$

所以点 N 在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上.

所以点 L，M，N 在同一个椭圆上.

2.2 双曲线

一、本节知识结构

双曲线的定义

↓

双曲线的标准方程

↓

双曲线的简单几何性质

二、教学重点与难点

重点：了解双曲线的标准方程及其几何性质，进一步体会坐标法.

难点：双曲线标准方程的推导与化简.

三、编写意图与教学建议

2.2.1 双曲线及其标准方程

1. 双曲线的定义

双曲线定义的教学可以与椭圆类比.

教学时可以从教科书中第 45 页的“思考”说起. 椭圆是平面上到两个定点距离之和为一个常数(大于两定点间的距离)的点的轨迹，很自然地提出问题：平面上到两个定点距离之差为一个常数的点的轨迹是什么曲线呢?

在讲解双曲线的定义前，要先画出曲线，通过画图加深对曲线上的点所满足的几何条件的认识，以便概括出双曲线的定义.

在定义双曲线时，要注意条件中对“常数”的约束：常数要小于$|F_1F_2|$. 这可以通过在$\triangle MF_1F_2$中，两边之差小于第三边来理解（当然这一说法忽略特殊点 M 位于双曲线实轴端点的情形). 对于“当$||MF_1|-|MF_2||$等于一个常数时，点 M 的轨迹是什么”可以让学生想一想. 学生不难发现是两条射线. 在条件中学生容易忽视的还有“绝对值”这个关键词. 同样可以让学生探究$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$时曲线会是什么样，也不难发现曲线将成为双曲线的一支.

如果条件许可，以上这些关于双曲线特征的认识可以在信息技术的帮助下进行，这样效果可能会更好些.

2. 双曲线的标准方程

双曲线标准方程的教学可以与椭圆类比，教科书的处理方法也是如此. 也就是说，本小节在数学思想方法上没有什么新增内容，因此，这一小节的教学可以参照 2.1.1 节进行. 教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，尤其是它们的不同点.

从双曲线的定义出发推导它的标准方程，推导过程说明，双曲线上任意一点的坐标都适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；但关于坐标适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的点都在双曲线上，同椭圆一样，教科书不作要求.

讲述双曲线的标准方程时，可与椭圆作如下比较：

(1)如教科书中图 2.2-2，设 $M(x, y)$为双曲线上任意一点，若点 M 在双曲线的右支上，则$|MF_1|>|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$；若 M 在双曲线的左支上，则$|MF_1|<|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=-2a$. 综上，得到$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$，这是与椭圆不同的.

(2) 当得到$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$后，可以与椭圆一样处理. 因为 $a<c$，所以 $c^2-a^2>0$，令 $c^2-a^2=b^2$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，这与椭圆不同.

教科书在边空提出“你能在 y 轴上找一点 B，使得$|OB|=b$吗”，因为有了处理椭圆的经验，联想勾股定理，点 B 是不难找到的.

(3) 通过比较两种不同形式的双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$$

向学生说明，如果 x^2项的系数是正的，那么焦点在 x 轴上；如果 y^2的系数是正的，那么焦点在 y 轴上. 对于双曲线，要强调 a 不一定大于 b，因此不能像椭圆那样通过比较分母的大小来判定焦点在哪一条坐标轴上.

(4) 在教学过程中，可抓住与椭圆标准方程的异同，在教师指导下由学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系.

椭　圆	双 曲 线
根据$\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$	根据$\|MF_1\|-\|MF_2\|=\pm 2a$
因为 $a>c>0$， 所以令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$	因为 $0<a<c$， 所以令 $c^2-a^2=b^2(b>0)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$， $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$， $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$　$\begin{pmatrix}a>0,\ b>0\\ a\text{ 不一定大于 }b\end{pmatrix}$

3. 关于例题与“探究”

本小节共设置了 2 个例题与一个“探究”.

例 1 是为熟悉双曲线的标准方程而设置的，也是用待定系数法求曲线的方程，当然这里的系数比较容易确定.

例 2 说明双曲线的一个应用，也是为了进一步熟悉双曲线的定义. 教科书在这个例题之后指出：如果再增设一个观察点 C，利用 B，C(或 A，C)两处测得的点 P 发出的信号的时间差，就可以求出另一个双曲线的方程，解这两个方程组成的方程组，就能确定点 P 的准确位置，这是双曲线的一个重要应用. GPS 就是根据这个原理. 有条件的学校可以让学生利用互联网查找这方面的资料，增长知识.

与椭圆 2.1.1 节的例 3 照应，在本节例 2 之后给出了一个“探究”：一个动点 M 到两个定点 F_1，F_2 连线的斜率之积是一个正常数，探究点 M 的轨迹. 这是双曲线的另一种产生方法. 因为有了 2.1.1 节的例 3 的经验，这个“探究”并不困难.

2.2.2　双曲线的简单几何性质

1. 双曲线的简单几何性质

双曲线的简单几何性质只要求学生“了解”即可.

双曲线的几何性质的教学，可以与椭圆的性质进行类比，让学生讨论、归纳. 这个过程能培养学生的观察、研究能力. 教师侧重指导与椭圆性质的不同之处，以及椭圆没有的几何性质的研究，比如渐近线.

(1)范围

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得$x^2\geqslant a^2$，当$|x|\geqslant a$时，$y$才有实数值；对于$y$的任何值，$x$都有实数值. 要讲清在直线$x=-a$，$x=a$之间没有图象. 当$x$的绝对值无限增大时，$y$的绝对值也无限增大，所以曲线是无限伸展的，不像椭圆那样是封闭的曲线.

(2) 对称性

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可以让学生回答双曲线具有的对称性，并说明理由.

(3) 顶点

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两个顶点$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，且只有两个顶点，而椭圆有四个顶点，这与椭圆不同.

令$x=0$时，方程$y^2=-b^2$无实数根，所以它与y轴无交点.

线段A_1A_2是双曲线的实轴，$2a$是双曲线的实轴长；线段B_1B_2是双曲线的虚轴，$2b$是双曲线的虚轴长.

因为学生没有学过共轭双曲线，所以对虚轴不好理解，往往把虚轴与椭圆的短轴混淆，教学中要提醒他们注意.

(4) 渐近线

对圆锥曲线来说，这是双曲线特有的性质. 利用双曲线的渐近线画双曲线特别方便，而且较为精确，只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线，就能画出它的近似图形.

在学习双曲线的渐近线前，教科书设置了一个“信息技术应用”. 要求在双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$位于第一象限的曲线上画一点$M$，测量点$M$的横坐标$x_M$以及它到直线$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$的距离$d$，向右拖动点$M$，观察$x_M$与$d$的大小关系. 这样做的目的在于让学生通过操作，直观感受在向右拖动点M时（x_M无限增大)，d逐渐减小，(无限）趋向于0. 教科书指出：利用信息技术，可以看到，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的各支向外延伸时，与两条直线逐渐接近，我们把这两条直线叫做双曲线的渐近线. 也就是说，双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

这里没有给出双曲线渐近线的严格定义，只是一种描述. 对于“无限接近”也只能是直观感受、操作确认.

教科书在本节末的“探究与发现”栏目中，解释了为什么$y=\pm\frac{b}{a}x$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线，供学生阅读.

(5) 离心率

与椭圆一样，比值$e=\frac{c}{a}$叫做双曲线的离心率，椭圆的离心率是描述椭圆扁平程度的一个重要数

值. 因为 $c>a$，所以双曲线的离心率 $e>1$. 双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数值. 由于 $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，当 e 的值从接近于 1 逐渐增大时，$\frac{b}{a}$ 的值就从接近于 0 逐渐增大，这时，双曲线的形状就由扁狭逐渐变得开阔. 就是说双曲线的“张口”逐渐增大.

借助信息技术的演示，会增强学生对“双曲线的离心率是如何影响双曲线‘张口’大小的”的认识.

2. 关于例题

本小节设置了 3 个例题(例 3～例 5). 例 3 是为了巩固双曲线的几何性质. 例 4 既表明了双曲线的应用，同时又说明如何根据条件确定双曲线标准方程中的 a，b，从而得到双曲线的标准方程. 与 2.1.2 节例 6 对应，例 5 是通过一个具体的例题说明双曲线的另一种定义. 这道例题的教学可以与椭圆的例 6 相联系.

四、教学设计案例

双曲线及其标准方程

1. 教学任务分析

(1) 学生已有的主要知识结构

学生已经学习过椭圆，了解椭圆的定义，经历了根据椭圆的特征，建立适当的直角坐标系，求椭圆标准方程的过程，也了解椭圆的简单几何性质.

(2) 建立新的知识结构

建立曲线方程的依据，是弄清曲线上的动点在运动时所满足的几何条件. 与椭圆类比，弄清双曲线上的点所满足的几何条件.

类似于建立椭圆的标准方程，建立双曲线的标准方程.

(3) 在这个过程中，注意与建立椭圆的标准方程相比较，尤其是不同的地方.

2. 教学重点、难点

重点：了解双曲线的定义.

难点：双曲线标准方程推导过程中的化简.

3. 教学基本流程

回忆椭圆的定义，与已有的知识联系

↓

提出类似的问题，引入双曲线的定义

↓

根据条件，建立双曲线的标准方程

↓

小结与布置作业

4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问题</th><th>设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>(1) 我们已经学习过椭圆. 椭圆是平面上一个动点到两个定点距离之和等于定长的点的轨迹. 当然这个定长要大于这两个定点之间的距离. 那么，平面上到两个定点距离的差等于定长的点的轨迹是什么呢?</td><td>数学教学应当从问题开始. 首先设疑，提出新的问题，打破知识结构的平衡，引发学习兴趣.</td><td>可以由学生动手实验. 如教科书图 2.2-1，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上，F_1 到 F_2 的长为 $2a(a>0)$. 把笔尖放在点 M 处，随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖所经过的点就画出一条曲线（图 2.2-1 中右边的曲线).</td></tr>
<tr><td>(2) 在运动中，这条曲线上的点所满足的几何条件是什么?</td><td>弄清曲线上的点所满足的几何条件是建立曲线方程的关键之一.</td><td>分析实验中的“变”与“不变”的条件. 在拉链未拉开时，$|MF_1|=|MF_2|$，拉开后，$|F_1F_2|$是定长，$|MF_1|$，$|MF_2|$都在变化，但是它们的差$|MF_1|-|MF_2|$不变.</td></tr>
<tr><td>(3) 能否说，这条曲线是平面上一个动点到两个定点的距离之差等于定长的点的轨迹呢?</td><td>如果是这样，还应该把固定在 F_1，F_2 处的图钉调换一下.</td><td>调换固定在 F_1，F_2 处的图钉再进行实验，出现双曲线的另一支.</td></tr>
<tr><td>(4) 应该如何描述动点 M 所满足的几何条件?</td><td>整理实验，归纳抽象成数学问题.</td><td>双曲线是平面上一个动点到两个定点距离之差的绝对值等于定长的点的轨迹.</td></tr>
<tr><td>(5) 还有其他约束条件吗?</td><td>这个“差”要小于这两定点之间的距离. $|F_1F_2|<2a$ 的来历，加深对概念的理解.</td><td>师生共同讨论，平面上一个动点到两个定点距离之差等于这两个定点间的距离的点的轨迹是什么.</td></tr>
<tr><td colspan="3">写出动点 M 所满足的几何条件的点的集合：$P=\{M||MF_1|-|MF_2|=2a\}$.
明确双曲线的定义：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线. 这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做双曲线的焦距.</td></tr>
<tr><td>(6) 我们是怎样建立坐标系求椭圆标准方程的? 怎样建立适当的坐标系，求双曲线的方程呢?</td><td>求曲线方程时，建立坐标系要适当.</td><td>所谓适当，应该分析曲线的某些特征（如对称性等)，使方程比较简单：以线段 F_1F_2 的中点为原点，以 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系.</td></tr>
<tr><td colspan="3">完成了“建系”. 设 $M(x, y)$是双曲线上任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，那么，焦点 F_1，F_2 的坐标分别是$(-c, 0)$，$(c, 0)$. 又设点 M 与 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$.
由定义可知，双曲线就是集合 $P=\{M|||MF_1|-|MF_2||=\pm 2a\}$.
因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，所以，$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$.</td></tr>
</table>

续表

问题	设计意图	师生活动
(7) 怎样化简方程 $\left\|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right\|=2a$?	与化简椭圆方程联系，运用化简椭圆方程的经验.	请3～4名学生板演化简方程. 教师在教室中走动，观察一些同学（尤其是有困难的学生）的化简过程.
让同座位的两位同学相互检查方程化简的过程，是否能得到正确结果？出现什么问题？		
教师引导学生评价板演情况. 肯定好的，如表达规范、运算简洁；如有失误，找出失误的原因.		
因为已有化简椭圆方程的经验，由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$，设 $c^2-a^2=b^2$，得到 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 学生并不会感到困难，只是对 b 的意义的认识不如椭圆那么容易，可以暂时放一放.		
(8) 你能在 y 轴上找一点 B，使得 $\|OB\|=b$ 吗？	学生对椭圆标准方程中 b 的认识已经很清楚. 这里对 a 的意义的认识也很容易，借助 $c^2-a^2=b^2$（形似勾股定理，找一条直角边，又指定要在 y 轴上找）找点 B，应该不困难.	以双曲线与 x 轴的交点 A 为圆心，以线段 OF_2（或 OF_1）为半径画圆交 y 轴于 B，B'.
(9) 椭圆有两个标准方程，双曲线也有两个吗？另一个是如何得到的？	反复与椭圆类比. 既加强与已有知识的联系，又找出与旧知识的不同之处（“同化”与“顺应”）.	有. 另一个是 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$. 把方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中的 x，y 对调.
教科书例1.	双曲线标准方程的应用.	请3～4名学生板演.
小结： (1) 提问：我们已经学习了双曲线，双曲线是怎样的点的轨迹？ (2) 双曲线的标准方程是怎样的？		
布置作业：教科书习题2.2A组1，2.		

5. 几点说明

(1) 在学习双曲线之前，学生已经学习过椭圆，对椭圆的定义、如何建立椭圆的标准方程都有所了解，因此，教学中要注意运用类比的方法，在与椭圆的联系与区别中建立有关双曲线的知识结构.

(2) 教学中，把教学内容编制成一系列问题，通过问题链、问题解决，形成新的知识结构.

(3) 学生能干的事让学生去干. 在教学中，可以运用板演、相互交流、相互检查等方式，让学生开展合作学习. 延迟判断，不要把结论抛给学生，注意学习过程中学生的主动研究.

五、习题解答

练习(第48页)

1. (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$； (2) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

(3) 解法1：因为双曲线的焦点在 y 轴上，所以，可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0).$$

将点(2，-5)代入方程，得$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$，即 $a^2b^2+4a^2-25b^2=0$.

又 $a^2+b^2=36$，解方程组

$$\begin{cases}a^2b^2+4a^2-25b^2=0,\\ a^2+b^2=36.\end{cases}$$

令 $m=a^2$，$n=b^2$，代入方程组，得

$$\begin{cases}mn+4m-25n=0,\\ m+n=36.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}m=20,\\ n=16;\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=45,\\ n=-9.\end{cases}$$

第二组不合题意，舍去，得 $a^2=20$，$b^2=16$.

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1.$$

解法 2：根据双曲线的定义，有

$$2a=|\sqrt{4+(-5+6)^2}-\sqrt{4+(-5-6)^2}|=|\sqrt{5}-5\sqrt{5}|=4\sqrt{5}.$$

所以 $a=2\sqrt{5}$.

又 $c=6$，所以 $b^2=36-20=16$.

已知双曲线的焦点在 y 轴上，所以，所求双曲线的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1.$$

2. 提示：根据椭圆中 $a^2-b^2=c^2$ 和双曲线中 $a^2+b^2=c^2$ 的关系式分别求出椭圆、双曲线的焦点坐标.

练习(第 53 页)

1. (1) 实轴长 $2a=8\sqrt{2}$，虚轴长 $2b=4$；顶点坐标为$(4\sqrt{2}, 0)$，$(-4\sqrt{2}, 0)$；焦点坐标为$(6, 0)$，$(-6, 0)$；离心率 $e=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

(2) 实轴长 $2a=6$，虚轴长 $2b=18$；顶点坐标为$(3, 0)$，$(-3, 0)$；焦点坐标为$(3\sqrt{10}, 0)$，$(-3\sqrt{10}, 0)$；离心率 $e=\sqrt{10}$.

(3) 实轴长 $2a=4$，虚轴长 $2b=4$；顶点坐标为$(0, 2)$，$(0, -2)$；焦点坐标为$(0, 2\sqrt{2})$，$(0, -2\sqrt{2})$；离心率 $e=\sqrt{2}$.

(4) 实轴长 $2a=10$，虚轴长 $2b=14$；顶点坐标为$(0, 5)$，$(0, -5)$；焦点坐标为$(0, \sqrt{74})$，$(0, -\sqrt{74})$；离心率 $e=\frac{\sqrt{74}}{5}$.

2. (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$；　　(2) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$.

3. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

4. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1$，渐近线方程为 $y=\pm x$.

习题 2.2（第 54 页）

A 组

1. 把方程化为标准方程，得$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{16}=1$. 因为 $a=8$，由双曲线定义可知点 P 到两焦点距离的差的绝对值等于 16. 因此 P 到另一个焦点的距离是 17.

2. (1) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$.

3. (1) 焦点坐标 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，离心率 $e=\frac{5}{3}$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$；

(2) 焦点坐标 $F_1(0, -5)$，$F_2(0, 5)$，离心率 $e=\frac{5}{4}$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

4. (1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$；

(3) 因为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，所以 $c^2=2a^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=2a^2-a^2=a^2$.

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

将$(-5, 3)$代入上面的两个方程，得

$$\frac{25}{a^2}-\frac{9}{a^2}=1,\ \frac{9}{a^2}-\frac{25}{a^2}=1.$$

解得 $a^2=16$(后一个方程无解).

所以，所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

5. 连接 QA.

由已知，得$|QA|=|QP|$.

所以，$||QA|-|QO||=||QP|-|QO||=|OP|=r$.

又因为点 A 在圆外，所以$|OA|>|OP|$.

根据双曲线的定义，点 Q 的轨迹是以 O，A 为焦点，r 为实轴长的双曲线.

6. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

B 组

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2. 由声速及 A，B 两处听到爆炸声的时间差，可知 A，B 两处与爆炸点的距离的差，因此爆炸点应位于以 A，B 为焦点的双曲线上.

使 A，B 两点在 x 轴上，并且原点 O 与线段 AB 的中点重合，建立直角坐标系 xOy.

设爆炸点 P 的坐标为(x, y)，则

$$||PA|-|PB||=340\times3=1\ 020,$$

即 $2a=1\ 020$，$a=510$.

又$|AB|=1\ 400$，所以 $2c=1\ 400$，$c=700$，$b^2=c^2-a^2=229\ 900$.

所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{260\ 100}-\frac{y^2}{229\ 900}=1$.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$，这说明点 M 的轨迹是焦点为$(-c, 0)$，$(c, 0)$，实轴为 $2a$，虚轴为 $2\sqrt{c^2-a^2}$的双曲线.

2.3 抛物线

一、本节知识结构

抛物线的定义

↓

抛物线的标准方程

↓

抛物线的简单几何性质

二、教学重点与难点

了解抛物线的标准方程及其几何性质.

三、编写意图与教学建议

2.3.1 抛物线及其标准方程

1. 抛物线的定义

教科书从学生已经学习过的二次函数的图象是一条抛物线谈起，以引起学生的兴趣.

紧接着，教科书设置的“信息技术应用”栏目给出了抛物线生成的过程. 如果条件允许，通过几何画板的制作，学生可以从作法中了解曲线上的点所满足的几何条件，明确抛物线的定义：

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线.

2. 建立抛物线的标准方程

观察轨迹的形状，学生通过思考容易发现如何选择坐标系是适当的：直线 KF 是曲线的对称轴，取线段 KF 的中点为原点建立坐标系，得到的方程形式会比较简单.

在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离 $|KF|=p(p>0)$，这就是抛物线方程中参数 p 的几何意义. 因为抛物线的顶点是 KF 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$和准线 $x=-\frac{p}{2}$都可以用 p 表示.

与求椭圆、双曲线的标准方程类似，如果选取的坐标系不同，或者说抛物线在坐标平面内的位置不同，同一条抛物线的标准方程还有其他几种形式：

$$y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py,$$

其中 $p>0$.

教科书设置的“探究”（第 58 页），可以让学生试着写出抛物线标准方程的其他形式，填写教科书上的表格，掌握抛物线的标准方程.

为了加强与所学知识的联系，教科书安排了一个“思考”（第 58 页）. 要求学生把 $y=ax^2$ 写成标

准形式 $x^2=\frac{1}{a}y$，指出这个方程表示抛物线，它的焦点坐标是 $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$，准线方程是 $y=-\frac{1}{4a}$.

3. 认识 p 的意义

必须通过实例使学生认识：p 是抛物线的焦点到准线的距离，所以 p 的值永远大于0，让学生在抛物线标准方程的一次项系数为负时(这时抛物线在 y 轴左边，即张口向左)，也不至于弄错.

4. 关于例题

例 1 是为学生熟悉抛物线标准方程而设置的. 例 2 是说明抛物线的一个应用.

2.3.2 抛物线的简单几何性质

1. 抛物线的简单几何性质

抛物线的性质和椭圆、双曲线比较起来，差别比较大. 它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴、一条准线，它没有中心. 通常抛物线称为无心圆锥曲线，而椭圆和双曲线称为有心圆锥曲线.

已知抛物线的标准方程，求它的焦点坐标和准线方程时，首先要判断抛物线的对称轴和开口方向，一次项的变量如果为 x(或 y)，则 x 轴(或 y 轴)是抛物线的对称轴，一次项系数的符号决定开口方向. 例如抛物线的方程为 $x^2=-3y$，则 y 轴为对称轴，开口方向和 y 轴的正方向相反.

由已知条件求抛物线的标准方程时，首先要根据已知条件确定抛物线标准方程的类型，再求出方程中的参数 p.

2. 关于例题

例 4 是一个求抛物线焦点弦的长的题目. 其中的分析过程如下：

(1) 要充分利用抛物线的定义，把求斜线段的长转化为求与坐标轴平行的线段的长；

(2) 要求线段 AB 的长只要求出 x_1+x_2 就可以了. 其中 x_1，x_2 分别是 A，B 的横坐标，因此，并不需要求 A，B 的坐标.

本例的教学重点可以放在问题的分析上，具体求解过程让学生完成.

例 5 是直线与抛物线位置关系的研究. 直线与抛物线位置关系的研究比较简单，但是，它的研究过程体现了用坐标法研究直线与圆锥曲线位置关系的特点.

要使学生明白，直线与圆锥曲线有无公共点的问题就是由它们的方程组成的方程组有无实数解的问题. 方程组有几个实数解，它们就有几个公共点；方程组没有实数解，它们就没有公共点.

对于例 5，除了进行解析的研究之外，需要学生明确：直线与抛物线有一个公共点的情况有两种情形，一种是直线平行于抛物线的对称轴，另一种是直线与抛物线相切. 后一种反映在代数上是一元二次方程的两根相等(根的判别式 $\Delta=0$).

四、习题解答

练习(第 59 页)

1. (1) $y^2=12x$； (2) $y^2=x$； (3) $y^2=4x$，$y^2=-4x$，$x^2=4y$，$x^2=-4y$.

2. (1) 焦点坐标 $F(5,\ 0)$，准线方程 $x=-5$；

(2) 焦点坐标 $F\left(0,\ \frac{1}{8}\right)$，准线方程 $y=-\frac{1}{8}$；

(3) 焦点坐标 $F\left(-\frac{5}{8},\ 0\right)$，准线方程 $x=\frac{5}{8}$；

(4) 焦点坐标 $F(0,\ -2)$，准线方程 $y=2$.

3. (1) a，$a-\dfrac{p}{2}$.

(2) $(6,\ 6\sqrt{2})$，$(6,\ -6\sqrt{2})$.

提示：由抛物线的标准方程求出准线方程. 由抛物线的定义，点 M 到准线的距离等于 9，所以 $x+3=9$，$x=6$，$y=\pm 6\sqrt{2}$.

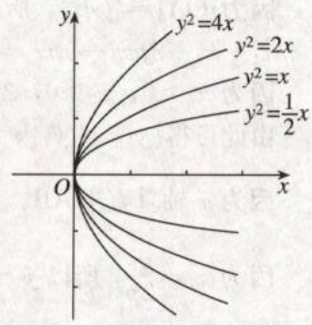
练习(第 63 页)

1. (1) $y^2=\dfrac{16}{5}x$；　　(2) $x^2=20y$；

(3) $y^2=-16x$；　　(4) $x^2=-32y$.

2. 图形见右. x 的系数越大，抛物线的开口越大.

3. $x^2=-1.1y$，$y\in[-1.1,\ 0]$.



(第 2 题)

习题 2.3(第 64 页)

A 组

1. B.

2. (1) 焦点坐标 $F\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，准线方程 $y=-\dfrac{1}{2}$；

(2) 焦点坐标 $F\left(0,\ -\dfrac{3}{16}\right)$，准线方程 $y=\dfrac{3}{16}$；

(3) 焦点坐标 $F\left(-\dfrac{1}{8},\ 0\right)$，准线方程 $x=\dfrac{1}{8}$；

(4) 焦点坐标 $F\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，准线方程 $x=-\dfrac{3}{2}$.

3. 由抛物线的方程 $y^2=2px(p>0)$，得它的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$.

根据抛物线的定义，由 $|MF|=2p$ 可知，点 M 到准线的距离为 $2p$.

设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$x+\frac{p}{2}=2p.$$

解得 $x=\dfrac{3p}{2}$.

将 $x=\dfrac{3p}{2}$ 代入 $y^2=2px$，得 $y=\pm\sqrt{3}p$.

点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{3p}{2},\ \sqrt{3}p\right)$ 或 $\left(\dfrac{3p}{2},\ -\sqrt{3}p\right)$.

4. (1) $y^2=24x$，$y^2=-24$；　　(2) $x^2=-12y$.

图略.

5. 这条抛物线的方程是 $x^2=17.5y$.

6. 设拱桥抛物线的方程为 $x^2=-2py$，因为拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m，所以

$$2^2=-2p(-2),\ p=1,$$

抛物线方程为 $x^2=-2y$.　　①

水面下降 1 m，则 $y=-3$，代入①式，得

$$x^2=-2(-3),\ x=\pm\sqrt{6}.$$

这时水面宽为 $2\sqrt{6}$ m.

B组

1. 设垂线段的中点坐标为(x, y)，抛物线上相应点的坐标为(x_1, y_1).

根据题意，$x_1=x$，$y_1=2y$. 代入$y_1^2=2px_1$，得轨迹方程为$y^2=\frac{1}{2}px$.

由方程可知轨迹是顶点在原点，焦点坐标为$\left(\frac{p}{8}, 0\right)$的抛物线.

2. 设正三角形OAB的顶点A，B在抛物线上，且坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则$y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$.

因为$|OA|=|OB|$，所以$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，即

$x_1^2-x_2^2+2px_1-2px_2=0\Rightarrow(x_1^2-x_2^2)+2p(x_1-x_2)=0\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0$.

因为$x_1>0$，$x_2>0$，$2p>0$，所以$x_1=x_2$.

由此可得$|y_1|=|y_2|$，即线段AB关于x轴对称.

因为x轴垂直于AB，且$\angle AOx=30^\circ$，所以$\frac{y_1}{x_1}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为$x_1=\frac{y_1^2}{2p}$，所以$y_1=2\sqrt{3}p$，所以$|AB|=2y_1=4\sqrt{3}p$.

3. 略.

小　结

目的在于回顾本章所学习的主要内容、重要的思想方法，使得学生形成系统的知识结构.

1. 本章知识结构

教科书已经以框图的形式整理给出. 教学中可以让学生回忆、整理而得到，使得学生对这一章的内容整体上有一个把握，做到主线清晰.

2. 圆锥曲线的应用

可以通过查阅资料（有条件的学校可以利用互联网），了解圆锥曲线的应用，使得学生感受到所学习的知识与实际生活有着紧密的联系. 比如，天体运行的轨道曲线是椭圆、双曲线、抛物线；奥运圣火的采集利用了抛物线的光学性质；GPS（全球卫星定位系统）利用了双曲线的几何性质；等等.

3. 圆锥曲线的意义

椭圆、双曲线、抛物线之所以称为圆锥曲线，是因为它们都是用平面截圆锥而来. 用平面截圆锥侧面，改变平面与圆锥轴线的夹角，得到的截线分别是椭圆、双曲线、抛物线.

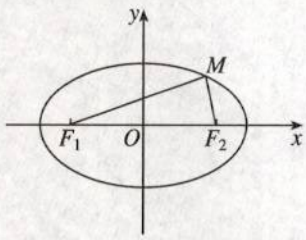
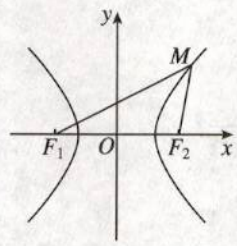
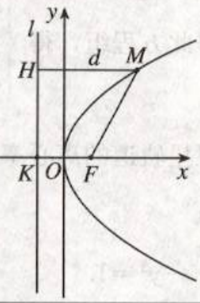
历史上，人们开始是用纯几何的方法来研究圆锥曲线的，得到了有关圆锥曲线的大量的性质，这些性质在天文学研究中得到了应用. 后来，笛卡儿创立解析几何，人们借助坐标系把数与形结合起来. 根据圆锥曲线的定义，选择适当的坐标系，建立圆锥曲线的方程，通过对方程的研究得到了圆锥曲线的几何性质，这就是用坐标法研究圆锥曲线，也是解析几何的核心思想. 可以让学生通过具体的例子来说明这一重要思想的运用.

4. 圆锥曲线的几何性质

研究椭圆、双曲线、抛物线这三种圆锥曲线的方法是一致的，这就是：定义、标准方程、简单性

质．而简单性质又有：范围、对称性、顶点、离心率．双曲线与椭圆、抛物线不同，还有渐近线．让学生对研究方法形成完整、系统的认识，便于掌握、理解所学习的知识．

在回顾的基础上，完成表格．

	椭圆	双曲线	抛物线
定义	$\{M\mid \lvert F_1M\rvert+\lvert F_2M\rvert=2a,2a>\lvert F_1F_2\rvert\}$，$F_1$，$F_2$ 是定点	$\{M\mid \lvert\,\lvert F_1M\rvert-\lvert F_2M\rvert\,\rvert=2a,2a<\lvert F_1F_2\rvert\}$，$F_1$，$F_2$ 是定点	$\{M\mid \lvert FM\rvert=d\}$，$d$ 是 M 到定直线 l 的距离，F 是定点
图形			
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，有 2 个	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，有 2 个	$y^2=2px$，有 4 个
顶点坐标	$A_1(a,\ 0)$，$A_2(-a,\ 0)$，$B_1(0,\ b)$，$B_2(0,\ -b)$，4 个	$A_1(a,\ 0)$，$A_2(-a,\ 0)$，2 个	$O(0,\ 0)$，1 个
焦点坐标	$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$	$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$	$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$
离心率	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$

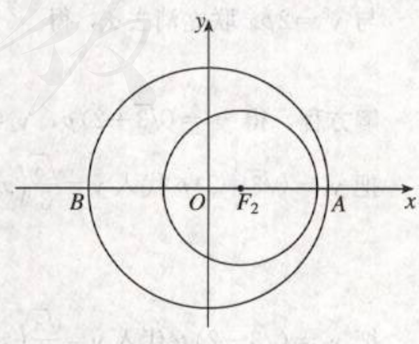
5. 重视信息技术在教学中的运用

信息技术在圆锥曲线的教学中可以发挥很好的作用．利用信息技术工具，可以让学生发现动点运动时所满足的几何条件、形成动点运动的原因，定点所形成的轨迹的形状，等等，使得学生学会研究问题，形成思想方法．因此，有条件的学校，可以让学生掌握信息技术，参与到教学中来，自己动手作图，开展数学实验、观察数学现象、发现数学结论，解决数学问题．

复习参考题(第 68 页)解答

A 组

1. 如图，建立直角坐标系，使点 A，B，F_2 在 x 轴上，F_2 为椭圆的右焦点（记 F_1 为左焦点）．



（第 1 题）

因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),$$

则
$$\begin{aligned}a-c&=\lvert OA\rvert-\lvert OF_2\rvert=\lvert F_2A\rvert\\&=6\ 371+439=6\ 810,\\a+c&=\lvert OB\rvert+\lvert OF_2\rvert=\lvert F_2B\rvert\\&=6\ 371+2\ 384=8\ 755,\end{aligned}$$

解得

$$a=7\ 782.5，c=8\ 755.$$

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{8\ 755\times 6\ 810}.$

用计算器求得 $b\approx 7\,722$.

因此，卫星的轨道方程是 $\dfrac{x^2}{7\,783^2}+\dfrac{y^2}{7\,722^2}=1$.

2. 由题意，得

$$\begin{cases}a-c=R+r_1,\\ a+c=R+r_2.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases}a=\dfrac{2R+r_1+r_2}{2},\\ c=\dfrac{r_2-r_1}{2}.\end{cases}$

卫星轨道的离心率 $e=\dfrac{r_2-r_1}{2R+r_1+r_2}$.

3. D.

4. $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$.

5. (1) $\alpha=0°$，方程表示圆.

(2) $0°<\alpha<90°$时，方程化成 $x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1$.

方程表示焦点在 y 轴上的椭圆.

(3) $\alpha=90°$时，$x^2=1$，即 $x=\pm 1$，方程表示平行于 y 轴的两条直线.

(4) $90°<\alpha\leqslant 180°$时，因为 $\cos\alpha<0$，所以方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示双曲线，其焦点在 x 轴上，而当 $\alpha=180°$时，方程表示等轴双曲线.

6. 提示：设抛物线方程为 $y^2=2px$，则点 B 的坐标为$\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$，点 C 的坐标为$\left(\dfrac{p}{2},\ -p\right)$，设点 P 的坐标为$(x,\ y)$，则点 Q 的坐标为$(x,\ 0)$.

因为$|PQ|=|y|=\sqrt{2px}$，$|BC|=2p$，$|OQ|=x$，所以$|PQ|^2=|BC|\,|OQ|$，即$|PQ|$是$|BC|$与$|OQ|$的比例中项.

7. 设正三角形的另外两个顶点分别是 A，B，其中点 A 在 x 轴上方.

直线 FA 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

与 $y^2=2px$ 联立消去 x，得

$$y^2-2\sqrt{3}py-p^2=0.$$

解方程，得 $y_1=(\sqrt{3}+2)p$，$y_2=(\sqrt{3}-2)p$.

把 $y_1=(\sqrt{3}+2)p$ 代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，得

$$x_1=\left(\frac{7}{2}+2\sqrt{3}\right)p.$$

把 $y_2=(\sqrt{3}-2)p$ 代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，得

$$x_2=\left(\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\right)p.$$

所以，满足条件的点 A 有两个：$A_1\left(\left(\dfrac{7}{2}+2\sqrt{3}\right)p,\ (\sqrt{3}+2)p\right)$，$A_2\left(\left(\dfrac{7}{2}-2\sqrt{3}\right)p,\ (\sqrt{3}-2)p\right)$.

根据图形的对称性，可得满足条件的点 B 也有两个：$B_1\left(\left(\frac{7}{2}+2\sqrt{3}\right)p,\ -(\sqrt{3}+2)p\right)$，$B_2\left(\left(\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\right)p,\ -(\sqrt{3}-2)p\right)$.

所以，正三角形的边长是 $|A_1B_1|=2(\sqrt{3}+2)p$，或者 $|A_2B_2|=2(2-\sqrt{3})p$.

B组

1. $S_{\triangle PF_1F_2}=24\sqrt{3}$.
2. 由题意，$PF_1\perp x$ 轴.

把 $x=-c$ 代入椭圆方程，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$.

所以，点 P 的坐标是 $\left(-c,\ \frac{b^2}{a}\right)$.

直线 OP 的斜率 $k_1=-\frac{b^2}{ac}$.

直线 AB 的斜率 $k_2=-\frac{b}{a}$.

由题意，得

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{b}{a}.$$

所以，$b=c$，$a=\sqrt{2}c$.

由已知及 $|F_1A|=a+c$，得

$$a+c=\sqrt{10}+\sqrt{5}.$$

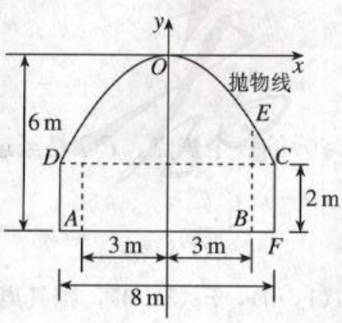
所以 $(1+\sqrt{2})c=\sqrt{10}+\sqrt{5}$.

解得 $c=\sqrt{5}$.

所以，$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{5}$.

因此，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$.

3. 如图，在隧道的横断面上，以拱顶为原点，拱高所在直线为 y 轴（向上），建立直角坐标系. 设隧道顶部所在抛物线的方程为 $x^2=-2py$.



（第 3 题）

因为点 $C(4,\ -4)$ 在抛物线上，所以有 $4^2=-2p(-4)$，解得，$p=2$.

所以，隧道顶部所在抛物线的方程为 $x^2=-4y$.

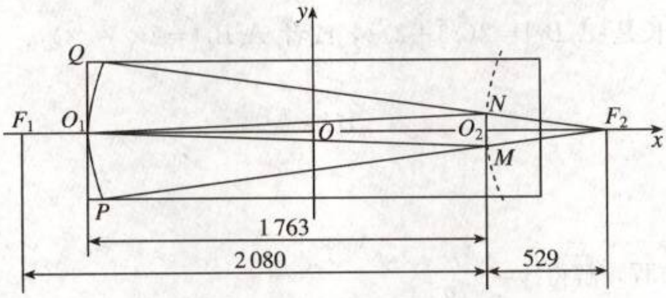
设 $|EB|=h+0.5$，则 $B(3,\ h-5.5)$，把点 B 的坐标代入方程 $x^2=-4y$，解得 $h=3.25$.

答：车辆通过隧道的限制高度为 3.2 m.

4. 如图，以连接 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的中点为原点，建立直角坐标系. 对于抛物线，有

$$\frac{p}{2}=1\ 763+529=2\ 292,$$

所以，$p=4\ 584$，$2p=9\ 168$.



（第 4 题）

对于双曲线，有

$$\begin{cases}c+a=2\ 080,\\c-a=529.\end{cases}$$

解此方程组，得 $a=775.5$，$c=1\ 304.5$.

因此，$b^2=c^2-a^2=1\ 100\ 320$.

所以，所求双曲线的方程是$\dfrac{x^2}{601\ 400.25}-\dfrac{y^2}{1\ 100\ 320}=1(x\geqslant 775.5)$.

因为抛物线顶点的横坐标是

$$-(1\ 763-a)=-(1\ 763-775.5)=-987.5.$$

所以，所求抛物线的方程为 $y^2=9\ 168(x+987.5)$.

答：抛物线的方程为 $y^2=9\ 168(x+987.5)$，双曲线的方程是$\dfrac{x^2}{601\ 400.25}-\dfrac{y^2}{1\ 100\ 320}=1$ $(x\geqslant 775.5)$.

III 自我检测题

一、选择题

1. 设 F_1 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点，$PQ$ 是经过另一个焦点 F_2 的弦，则$\triangle PF_1Q$ 的周长是（　　）.

(A) $4a$　　(B) $2a$　　(C) $4b$　　(D) 不确定

2. 若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1,0)$，$F_2(3,0)$，则其离心率为（　　）.

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线 l 交抛物线于 A，B 两点，若线段 AB 中点的横坐标为 3，则$|AB|$等于（　　）.

(A) 10　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 4

4. 与 y 轴相切且和半圆 $x^2+y^2=4(0\leqslant x\leqslant 2)$内切的动圆圆心的轨迹方程是（　　）.

(A) $y^2=-4(x-1)(0<x\leqslant 1)$　　(B) $y^2=4(x-1)(0<x\leqslant 1)$

(C) $y^2=4(x+1)(0<x\leqslant 1)$　　(D) $y^2=-2(x-1)(0<x\leqslant 1)$

5. 若椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$的弦被点(4，2)平分，则此弦所在的直线方程为（　　）.

(A) $x-2y=0$　　(B) $x+2y-4=0$

(C) $2x+13y-14=0$　　(D) $x+2y-8=0$

6. 如果方程$\frac{x^2}{-p}+\frac{y^2}{q}=1$表示双曲线，则下列椭圆中，与该双曲线共焦点的是（　　）.

(A) $\frac{x^2}{2q+p}+\frac{y^2}{q}=1$　　(B) $\frac{x^2}{2q+p}+\frac{y^2}{p}=-1$

(C) $\frac{x^2}{2p+q}+\frac{y^2}{q}=1$　　(D) $\frac{x^2}{2p+q}+\frac{y^2}{p}=-1$

二、填空题

7. 椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$F_1$和$F_2$，点$P$在椭圆上. 如果线段$PF_1$的中点在$y$轴上，那么$|PF_1|$是$|PF_2|$的________倍.

8. 椭圆$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$的焦点分别是$F_1$和$F_2$，过中心$O$作直线与椭圆交于$A$，$B$，若$\triangle ABF_2$的面积是20，直线$AB$的方程是________.

9. 与双曲线$x^2-4y^2=4$有共同的渐近线，并且经过点$(2,\sqrt{5})$的双曲线方程是____________.

三、解答题

10. 抛物线$y=-\frac{x^2}{2}$与过点$M(0,-1)$的直线l交于A，B两点，O为原点，若OA和OB的斜率之和为1，求直线l的方程.

11. 已知中心在原点，一焦点为$F(0,\sqrt{50})$的椭圆被直线l：$y=3x-2$截得的弦的中点横坐标为$\frac{1}{2}$，求此椭圆的方程.

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	C	B	A	D	D

1. 本题考查椭圆的定义.

$|F_1P|+|PQ|+|QF_1|=|F_1P|+|PF_2|+|QF_2|+|QF_1|=2a+2a=4a$. 选择 A.

2. 本题考查椭圆的离心率的意义.

原点到F_1，F_2的距离之和是长轴长$2a=4$，又$2c=2$，离心率$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 选择 C.

3. 本题考查抛物线的定义、抛物线上任意一点到焦点的距离与该点横坐标的关系.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，焦点为F，由抛物线定义得$|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，所以$|AB|=x_1+x_2+2$，又$x_1+x_2=6$，所以$|AB|=8$. 选择 B.

4. 本题考查寻找动点变动时满足的几何条件、曲线方程中x的范围.

设动圆圆心为$M(x, y)$，切点为A，点M到y轴的距离为d.

则有$|OA|=|OM|+d$.

而$d=x$. 所以$2=\sqrt{x^2+y^2}+x$.

化简，得$y^2=-4(x-1)(0<x\leqslant 1)$. 选择A.

5. 本题考查椭圆的弦的中点的重要性质.

设弦两端点为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

分别代入椭圆方程相减，得$({x_1}^2-{x_2}^2)+4({y_1}^2-{y_2}^2)=0$. ①

将$x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=4$代入①，得

$$8(x_1-x_2)+4\times 4(y_1-y_2)=0,$$

所以$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{2}$，弦所在的直线方程为$x+2y-8=0$.

经验证，直线$x+2y-8=0$与椭圆有公共点，所以，弦所在的直线方程为$x+2y-8=0$.

选择D.

6. 本题辨析椭圆、双曲线方程中的基本量.

由双曲线方程知p，q同号.

若p，q同为正数，则半焦距平方$c^2=p+q$，双曲线焦点在y轴上.

而在选项A，C中，椭圆的焦点都在x轴上.

若p，q同为负数，则半焦距平方$c^2=-p-q$，双曲线焦点在x轴上.

选项D的方程即$\dfrac{x^2}{2p+q}+\dfrac{y^2}{p}=-1$.

它的半焦距平方是$(-2p-q)-(-p)=-p-q$，且焦点在x轴上.

选择D.

二、填空题

7. 本题考查椭圆的定义及几何性质.

由已知椭圆方程，得$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，$c=3$，$F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$.

由于焦点F_1和F_2关于y轴对称，由已知可见，PF_2必垂直于x轴.

所以，$P\left(3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$|PF_2|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$|PF_1|=\sqrt{(3+3)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$，$|PF_2|=7|PF_1|$.

8. 本题考查椭圆的几何性质.

设点$A(x_0, y_0)$，因为$S_{\triangle ABF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_A|=20$，所以$|y_A|=\dfrac{40}{2c}=4$.

因为点A在椭圆上，所以$\dfrac{x_0^2}{45}+\dfrac{16}{20}=1$，解得$x_0=\pm 3$. 所以直线$AB$的斜率$k=\pm\dfrac{4}{3}$.

于是，直线AB的方程为$y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

9. 本题考查共渐近线的双曲线系.

设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=\lambda$. 把点$(2, \sqrt{5})$代入方程，得

$$\lambda=1-5=-4.$$

所以，所求双曲线的方程是$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{16}=1$.

三、解答题

10. 本题考查直线与抛物线的位置关系，一元二次方程根与系数关系的应用.

显然直线 l 垂直于 x 轴不合题意，设所求的直线方程为 $y=kx-1$.

代入抛物线方程化简，得 $x^2+2kx-2=0$.

根的判别式 $\Delta=4k^2+8=4(k^2+2)$，于是有 $k\in\mathbf{R}$.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=1$.　①

因为 $y_1=kx_1-1$，$y_2=kx_2-1$，代入①，得 $2k-\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=1$.　②

因为 $x_1+x_2=-2k$，$x_1x_2=-2$，代入②得 $k=1$.

所以直线 l 的方程为 $y=x-1$.

11. 本题考查直线与椭圆的位置关系问题.

设所求椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

因为 $c^2=a^2-b^2=50$，由 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 及 $y=3x-2$，得

$$(a^2+9b^2)x^2-12b^2x+b^2(4-a^2)=0.\quad ①$$

所以 $x_1+x_2=\dfrac{12b^2}{a^2+9b^2}$.

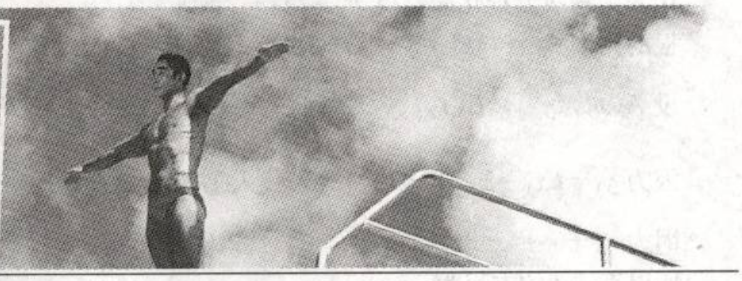
由已知得 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{12b^2}{a^2+9b^2}=1$，所以 $a^2=3b^2$.　②

由①②得 $a^2=75$，$b^2=25$.

此时，方程①根的判别式 $\Delta>0$，方程①有两实根 x_1，x_2.

所以，所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{75}=1$.

第三章 导数及其应用



I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

微积分的创立是数学发展史中的里程碑，它的发展及应用开创了向近代数学过渡的新时期，它为研究变量与函数提供了重要的方法和手段．导数的概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用．在本模块中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数的含义，体会导数的思想及其内涵；应用导数探索函数的单调、极值等性质及其在实际中的应用，感受导数在解决数学问题和实际问题中的作用，体会微积分的产生对人类文化发展的价值．

2. 学习目标

（1）变化率与导数

① 通过分析实例，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵．

② 通过函数图象直观地理解导数的几何意义．

（2）导数的计算

① 能根据导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$的导数．

② 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数．

③ 会使用导数公式表．

（3）导数在研究函数中的应用

① 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间．

② 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及在给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值．

（4）生活中的优化问题举例

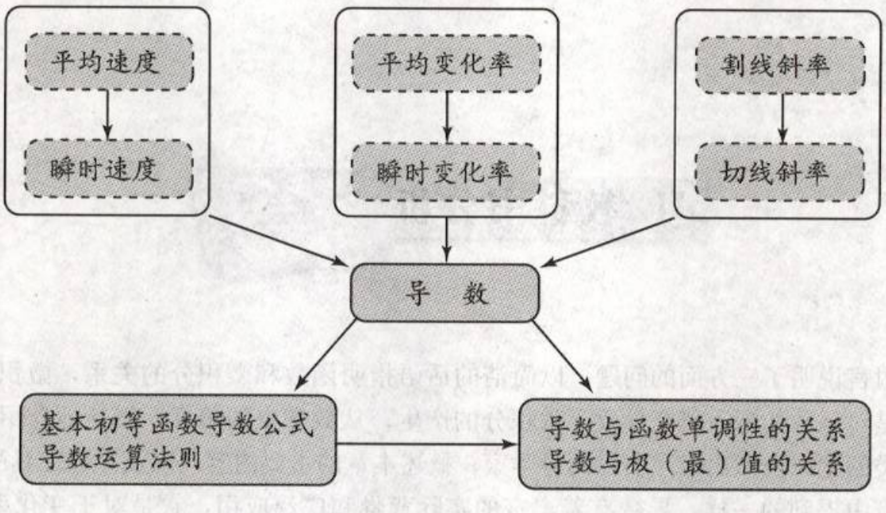
通过利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用．

（5）数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 4 节：3.1 变化率与导数，3.2 导数的计算，3.3 导数在研究函数中的应用，3.4 生活中的优化问题举例. 另外还有一个实习作业.

（1）导数概念是微积分的基本概念之一，它有着丰富的实际背景. 教科书选取了两个典型的变化率问题，从对平均变化率的分析入手，层层深入，展现了从平均变化率到瞬时变化率的过程，指明了瞬时变化率就是导数，介绍了导数的一般定义. 在此基础上，教科书借助函数图象，运用观察与直观分析阐明了曲线的切线斜率和导数间的关系. 在介绍导数定义和导数几何意义知识的同时，教科书注重渗透其中蕴涵的丰富思想，如逼近、以直代曲等，并通过例题和设置栏目为学生提供亲自感受导数内涵及其思想的机会.

（2）导数的计算主要包括两个方面. 首先，教科书根据导数定义求出几个常见函数的导数，以让学生进一步理解导数的概念；然后，教科书直接给出基本初等函数的导数公式和导数的运算法则，关键在于使用这些公式与法则求简单函数的导数，因此教科书通过例题的展示和适量的习题让学生在模仿、操作中熟悉和掌握这些公式与法则.

（3）导数在研究函数中的应用主要是运用导数研究函数的单调性，在研究函数单调性的基础上，再研究函数的极大（小）值，最后在函数的极大（小）值的基础上，研究函数的最大（小）值. 其中运用导数研究函数的单调性是本节的基础.

（4）生活中的优化问题举例一节通过三个具体的例子：海报版面尺寸的设计、饮料瓶大小对公司利润的影响以及磁盘的最大存储量问题，说明生活中存在很多优化问题，我们可以建立这些问题的数学模型，运用导数这个工具解决.

三、课时分配

本章教学时间约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 变化率与导数	约 4 课时
3.2 导数的计算	约 3 课时
3.3 导数在研究函数中的应用	约 3 课时
3.4 生活中的优化问题举例	约 4 课时
实习作业	约 1 课时
小结	约 1 课时

II 教科书分析

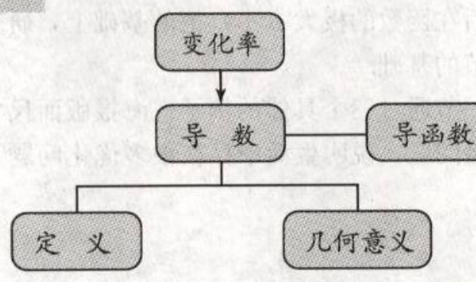
本章的章引言说明了三方面的问题：以简洁的话语指明函数和微积分的关系，微积分的研究对象就是函数，正是对函数的深入研究导致了微积分的产生；从数学史的角度，概括地介绍与微积分创立密切相关的四类问题以及做出巨大贡献的科学家；概述本章的主要内容，以及导数工具的作用和价值.

正如章引言中提到的一样，导数有着丰富的实际背景和广泛应用，它是对于变化率的一种度量. 而变化率问题在现实生活中随处可见，章头图展示了其中最常见的一种变化率——运动速度. 速度是学生非常熟悉的物理知识，因此，教科书将高台跳水模型作为贯穿全章的主线问题. 通过这个问题，引入导数概念，介绍函数的单调性、极值与导数间的关系. 目的在于，不仅在学习的过程中，学生能够借助熟知的物理模型理解数学知识，而且学完本章知识后，能在头脑中保留一个导数的实际模型，以使抽象概念具体化.

在教学中，可以充分利用章引言中提示的微积分史料，为学生提供一条微积分发生发展的线索，以使学生感受到数学知识的产生发展是自然的，并非强加于人的，从而激发他们学习的兴趣与愿望. 此外，建议学完本章后，再次引导学生阅读章引言. 通过全章的学习，学生会对导数的思想、方法和作用有更深的体会，从而会对章引言中的话语获得更深的感受.

3.1 变化率与导数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是使学生知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵，理解导数的几何意义.

学生在本节学习中可能会遇到以下困难：

(1) 体会从平均变化率到瞬时变化率，从割线到切线的过程中采用的逼近方法；

(2) 理解导数的概念，将导数多方面的意义联系起来. 例如，导数就是瞬时变化率，导数反映了函数 $f(x)$在点 x 附近变化的快慢，导数是曲线上某点处切线的斜率，等等.

三、编写意图与教学建议

本节主要包括三方面的内容：变化率、导数概念、导数的几何意义. 实际上，它们是理解导数思想及其内涵的不同角度. 首先，教科书从平均变化率开始，用平均变化率探求瞬时变化率，并从数学上给予各种不同变化率在数量上的精确描述，即导数；然后，教科书从数转向形，借助函数图象，探求了切线斜率和导数的关系，说明了导数的几何意义.

在这样的两个阶段，教科书注重思考方法的渗透，即以已知探求未知；注重抽象概念不同意义间的转换，即从实际意义、数值意义、几何意义等方面理解导数内涵与思想. 目的在于，不仅让学生在数学知识的量上有所收获，而且能够体会其中蕴涵的丰富的思想，逐渐掌握数学研究的基本思考方式和方法.

3.1.1 变化率问题

本小节的主要知识内容是平均变化率. 在众多变化率问题中，教科书选择了气球膨胀率问题和高台跳水运动的速度问题. 这两个实例的共同点是背景简单，吹气球是很多人具有的生活经验，运动速度是学生非常熟悉的物理知识. 从简单的背景出发，既可以利用学生原有的知识经验，又可以减少因为背景的复杂而可能引起的对数学知识学习的干扰.

1. 气球膨胀率问题

“对一种生活现象的数学解释”是教科书介绍数学知识的切入角度，不仅可以激发学生深入探究的兴趣，而且让学生感到数学是有用的. 如何从数学的角度描述吹气球过程中的现象“随着气球内空气容量的增加，气球的半径增加得越来越慢”？这可能也是学生感到困难的地方. 在教学中，可以从以下几个方面进行引导：

(1) 这句话中涉及到两个变量，气球空气容量，即气球体积 V，气球半径 r；还涉及到两个变量间的关系，运用几何知识可以写出它们之间的函数解析式，即 $r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

(2)“气球的半径增加得越来越慢”的意思就是说“随着气球体积的增大，当气球体积的增加量相同时，相应半径的增加量越来越小”，从数学角度进行描述就是，“随着气球体积的增大，比值 $\frac{\text{半径的增加量}}{\text{体积的增加量}}$ 越来越小”. 而这个比值就是气球的平均膨胀率.

(3) 运用上述数学解释计算一些具体的值，如 V 从 0 增加到 1 L，从 1 L 增加到 2 L，从 2 L 增加到 2.5 L，从 2.5 L 增加到 4 L 的平均膨胀率. 感受气球膨胀率大小的变化，从而体会到平均膨胀率可以刻画气球半径变化的快慢.

2. 高台跳水问题

教科书计算了两个时间段内运动员的平均速度，在教学中，可以让学生多计算几个平均速度，体会到平均速度可以描述运动员在某段时间内运动的快慢.

3. 平均变化率的教学分析

在这两个问题的基础上，教科书归纳它们的共同特征，用 $f(x)$ 表示其中的函数关系，定义了一般的平均变化率，并给出符号表示. 随后设置的“思考”（第 74 页）意在让学生借助函数图象，了解平均变化率的几何意义.

考虑到学生初次接触平均变化率及其符号表示，建议教学中多举一些具体的例子让学生巩固对这个概念的理解.

4. “探究”（第 73 页）的目的

通过学生亲自的计算和思考意识到，平均速度只能粗略地描述运动员的运动状态，它并不能反映某一时刻的运动状态. 因此，就需要寻找一个量，能更精细地刻画运动员的运动状态. 所以，这里的“探究”会让学生感受到进一步探究、学习的必要性，为建立导数概念营造了一个良好的问题情境. 在教学中，可以让学生就此探究进行思考、展开讨论，激发他们的认知需求，自然地进入导数概念的学习.

3.1.2 导数的概念

1. 导数概念建立方式的说明

一般地，导数概念学习的起点是极限，即从数列→数列的极限→函数的极限→导数. 这种概念建立方式具有严密的逻辑性和系统性，但是也产生了一些问题：就高中学生的认知水平而言，他们很难理解极限的形式化定义，由此产生的困难也影响了对导数本质的理解. 因此，教科书没有介绍形式化的极限定义及相关知识，而是从变化率入手，用形象直观的“逼近”方法定义导数. 这样一来，其一，避免学生认知水平和知识学习间的矛盾；其二，将更多精力用于导数本质的理解上；其三，学生对逼近思想有了丰富的直观基础和一定的理解，有利于在大学的初级阶段学习严格的极限定义.

在教学中值得注意的是，本节教科书编写的重点在于理解导数的概念和基本方法，并不追求理论上的严密性和过多的技巧，建议教学时充分理解教科书的编写意图，将教学重点放在导数思想及其内涵的理解上.

2. 导数概念建立过程的分析

教科书将导数概念的建立划分为两个阶段：首先明确瞬时速度的含义，然后将瞬时速度一般化，给出导数定义. 这个过程蕴涵了逼近的思想和用已知探究未知的思考方法. 在教学中，应特别注意这些思想方法的渗透和引导.

（1）从平均速度到瞬时速度

作为 3.1.1 节运动员速度问题的延续，教科书指出：“物体在某一时刻的速度称为瞬时速度……如何求运动员的瞬时速度呢?”根据物理中的知识，运动员在每一个时刻必有瞬时速度，那么如何求瞬时速度呢？面对问题，教科书从已知，即平均速度入手开始探求瞬时速度. 首先是寻求解决问题的思路.

公式 $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ 定义了运动员在一段时间内的平均速度，它粗略地描述了这段时间内运动员运动的快慢. 可以想象，如果 Δt 非常非常小，$\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ 就可以近似地反映这段时间内任何时刻的瞬时速度，当然也可以近似地反映 t 时刻的瞬时速度. 所以，一个自然的想法是，选取一个时刻，如 $t=2$ 秒，在具体数值计

算基础上，细致地观察它附近的变化情况.

确定思路后，教科书选取了两串越来越小的 Δt 的值，计算出 $t=2$ 两侧各时间段内运动员的平均速度，如 74 页表格所示. 观察表格中的两列数值，可以发现，当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋向于一个定值. 自然地，这个定值就是 $t=2$ s 时的瞬时速度.

于是，教科书给出了运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度：

$$\text{当 } \Delta t \text{ 趋近于 0 时，} \frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t} \text{趋于的定值.}$$

最后出于表述上的方便，教科书用简洁的符号表示上述思想，即用“$\lim\limits_{\Delta t\to 0}$”代替“当 Δt 趋近于 0 时，……趋于的定值”. 于是，$t=2$ s 时的瞬时速度可以简洁地表示为

$$2 \text{ s 时的瞬时速度} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t} = -13.1.$$

(2) 瞬时速度教学分析

学生在高一年级的物理课程中学习过瞬时速度. 因此，学生已经具备了一定的认知基础. 教科书充分利用这一认知基础，展现了一个完整的数学探究过程：提出问题，寻求想法，实施想法，发现规律，给出定义. 在教学中，应注重引导学生充分经历这个过程，通过思考、讨论、探究，理解瞬时速度的含义、感受逼近的思想. 对于瞬时速度的符号记法，教学中应给予说明，并在此基础上，让学生完成第 75 页“探究”中的问题 1，从特殊到一般，表示运动员在时刻 t_0 的瞬时速度.

值得注意的是，当定义 t_0 时刻的瞬时速度时，只要求学生能直观认识到“当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度趋向于一个定值，这个定值就是 t_0 时刻的瞬时速度”，并没有提及极限，以及从极限的角度认识瞬时速度. 在教学中，应注意把握好这一要求，采用逼近方法定义瞬时速度，不宜添加极限知识追求理论上的严密性.

(3) 从瞬时速度到导数

教科书第 75 页“探究”的第 2 个问题是舍弃高台跳水的物理意义，完全抽象为数学问题：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处（运动员在 t_0 时刻），自变量 x 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 有改变量 Δx（时间从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 有改变量 Δt），相应的函数改变量 Δf 表示函数变化的数量（Δh 表示运动员的位移），因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 表示在 x_0 处，当 x 变化时，函数 $f(x)$ 变化的快慢程度（$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ 表示运动员的瞬时速度），这叫做瞬时变化率.

许多实际问题（如效率、点密度等等）都归结为变化率的问题，在数学上，这种反映函数在一点处变化快慢程度的变化率就定义为导数.

(4) 导数概念教学分析

形成导数定义以及理解导数内涵的基础都是瞬时速度这个具体的物理模型，因此教学的关键是让学生充分经历从平均速度探究到瞬时速度，体会到整个过程中采用的方法以及明确瞬时速度的含义；然后是推广到一般的情形，包括方法、思想以及形式的迁移.

建议教学时，可以再选配一些其他的变化率问题. 形式丰富的实例有利于学生辨别出它们具有的共同特征，认识到导数可以描述任何事物的瞬时变化率. 在数学中，它反映函数 $f(x)$ 在点 x 处变化的快慢；在物理中，它的一种意义就是瞬时速度，反映物体在某一时刻运动的快慢.

经历了建立导数概念的过程，学生会对历史上导致导数产生的一类问题“根据物体的路程关于时间的函数求速度和加速度”有更深的体会. 因此，教科书在导数定义后安排的一段话，意在使学生结合亲身的学习过程感受到数学知识的产生是水到渠成的，数学的发展与人类文明的发展相互促进. 教学中，建议教师提示学生意识到这一点.

3. 例题1的教学

安排在导数定义之后的例1意在帮助学生理解导数概念. 利用定义计算导数的过程会让学生感受其中蕴涵的逼近思想；应用计算结果解释瞬时变化率的意义，能让学生进一步体会导数的内涵，即导数反映了函数在某一点附近的变化情况.

3.1.3 导数的几何意义

教科书在3.1.1设置的“思考”揭示了平均变化率与割线斜率之间的关系，而建立导数概念是从平均变化率到瞬时变化率，因此从形的角度探究导数的几何意义时，一个想法就是从割线入手. 教科书以此为出发点，直观定义了切线，获得了导数的几何意义.

1. 切线的定义

教科书在“观察”中就四幅图提出问题，让学生观察割线的变化趋势. 在这里，运用信息技术演示割线的动态变化趋势，会对学生的观察、分析非常有帮助. 在教学中，应给予学生观察、思考的时间，并引导学生共同分析、直观获得切线定义.

第77页旁边框中的问题要求学生比较已学的两个切线定义，从而在比较中发展切线的定义. 参考解释如下：

初中平面几何中圆的切线的定义：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫做圆的切线，唯一的公共点叫做切点.

圆是一种特殊的曲线. 这种定义并不适用于一般曲线的切线. 比如，图3-1中的曲线C，直线l_1虽然与曲线C有唯一的公共点N，但我们不能认为它与曲线C相切；而另一条直线l_2，虽然与曲线C有不只一个公共点，我们还是认为它是曲线C在点M处的切线. 因此，以上圆的切线的定义并不适用于一般的曲线.

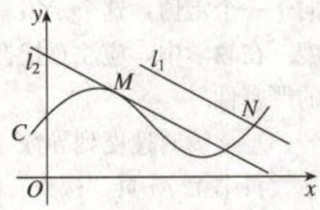


图 3-1

通过逼近方法，将割线趋于的确定位置的直线定义为切线，适用于各种曲线. 所以，这种定义才真正反映了切线的直观本质.

2. 导数的几何意义

问题是教科书内容展开和启发学生思考的重要手段. 在获得切线定义以后，教科书通过问题“割线PP_n的斜率与切线PT的斜率k有什么关系”要求学生数形结合，将切线斜率和导数相联系，发现导数的几何意义.

教学中，应特别注重让学生意识到数与形的结合，认识到一个数学对象不同方面的意义，以及建立这些方面的联系时采用的数形结合的方法.

3. 以直代曲

以直代曲是微积分中重要的思想方法，即以简单的对象刻画复杂的对象. 大多数函数曲线就一小范围来看，大致可看作直线，所以，某点附近的曲线可以用过此点的切线近似代替，即以直代曲.

在教学中，可以让学生通过对曲线的直观观察体会以直代曲的思想. 比如，利用信息技术或不同倍数的放大镜将函数曲线某一点附近的图象放大得到一个近景图，图象放得越大，这一小段曲线看起来就越像直线（如图3-2）.

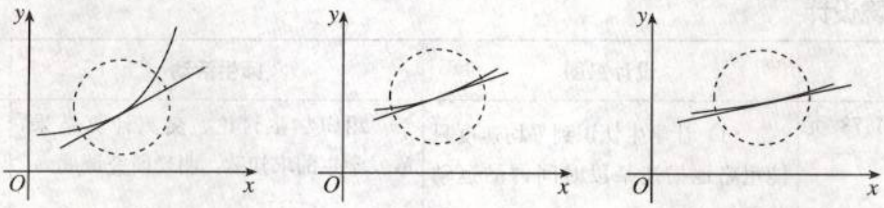


图 3-2

4. 例题 2、3 的教学

例 2 是运用“以直代曲”解决问题的. 例题解答中“所以”的根据在几何直观上就是“以直代曲”. 比如，在 t_1 附近，切线 l_1 可以近似代替曲线 $h(t)$，切线 l_1 的斜率小于 0，呈下降趋势，故在 $t=t_1$ 附近曲线下降，函数 $h(t)$在 $t=t_1$ 附近单调递减. 在教学中应注意以此问题为载体，让学生体会“用简单对象刻画复杂对象”的思想.

例 3 的作用有两个：一是让学生通过直观操作进一步认识到导数和切线斜率之间的关系，二是 79 页的表格为介绍导函数概念作铺垫.

5. 导函数

教科书对于导函数只是作了简单的介绍. 借助例 3 的表格，可以帮助学生体会“当 x 变化时，$f'(x)$便是 x 的一个函数”.

本节出现了一些新的符号，教学中应让学生明确这些符号的含义. 如 $f'(x)(y')$是函数 $f(x)$的导函数，简称导数；$f'(x_0)(y'|_{x=x_0})$是函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数；等等.

四、教学设计案例

3.1.2 导数的概念（2 课时）

1. 教学任务分析

本节的中心任务是形成导数概念. 概念形成划分为两个层次：

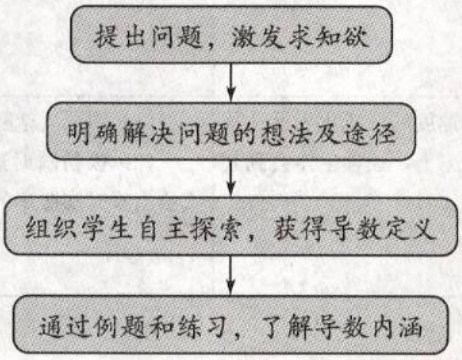
(1) 借助高台跳水问题，明确瞬时速度的含义；

(2) 以速度模型为出发点，结合其他实例抽象出导数概念，使学生认识到导数就是瞬时变化率，了解导数内涵.

2. 教学重点、难点

形成导数概念，了解导数的内涵既是本节的重点也是难点.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师生活动	备　注
(1) 回顾第 73 页“探究”.	(1) 让学生认识到平均速度只能粗略地描述某段时间内的运动状态. (2) 让学生产生进一步学习的需求，即有必要知道任意时刻的速度.	组织学生讨论、交流计算结果，激发学生的求知欲，明确研究课题.	此问题的设计基于学生在 3.1.1 学习后对于“探究”的自主学习.
(2) 如何求运动员的瞬时速度？比如，$t=2$ 秒时的瞬时速度是多少？	(1) 问题具体化，即求运动员在 $t=2$ 秒时的瞬时速度. (2) 针对具体的问题情境，寻求解决问题的想法.	(1) 组织学生讨论问题，阐述想法. (2) 引导学生“以未知探求已知”，从平均速度出发，寻求想法. (3) 师生共同确定想法：计算 $t=2$ 秒附近的平均速度，细致地观察它附近发生的情况.	(1) 应特别注重思考方法的引导，即以未知探究已知. (2) 直观的想法需通过数量计算得以明确.
(3) 当 Δt 取不同值时，计算平均速度 $\bar{v}=\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 的值.	(1) 熟悉符号. (2) 让学生在亲自计算的过程中感受逼近的趋势.	(1) 引导学生采用数学符号将想法具体化，明确计算公式. (2) 要求学生利用计算器亲自计算两串平均速度.	适当增加表格中 Δt 的取值，更多的数值有利于学生发现其中蕴涵的规律.
(4) 当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？	让学生经历观察、分析、归纳、发现规律的过程，体会瞬时速度的含义.	(1) 出示学生的计算结果，组织学生观察、讨论平均速度的变化趋势，引导学生说出“当 Δt 趋于 0 时，平均速度趋于一个确定的值 13.1”. (2) 教师介绍符号表示，并解释符号含义.	在这里应给予学生充分思考和讨论的机会，慢慢引导他们说出自己的发现，并逐步修正到最终的结论上.
(5) 运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度怎样表示？	从特殊到一般，即从特殊点 $t=2$ 上升到任意点 $t=t_0$ 瞬时速度的表示.	(1) 带领学生回顾探求 $t=2$ 时瞬时速度的全过程. (2) 引导学生从特殊到一般，获得 $t=t_0$ 时瞬时速度的形式化表示.	应该让学生体会到从特殊到一般的过程中，研究问题的想法和方法是相同的，只是获得了更一般的形式化的表示.
(6) 气球在体积为 V_0 时的瞬时膨胀率如何表示？	将瞬时速度的形式化表示迁移到瞬时膨胀率上，让学生体会到其中的共同点.	(1) 回顾气球膨胀率问题. (2) 模仿瞬时速度的一般表示形式给出瞬时膨胀率的表示.	迁移的基础是两个变化率问题具有的共同特征.

续表

问　题	设计意图	师生活动	备　注
(7) 如果将这两个变化率问题中的函数用 $f(x)$ 表示，那么函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的瞬时变化率怎样表示？	舍弃具体变化率问题的实际意义，抽象为数学问题，定义导数.	(1) 比较两个变化率问题，体会它们的共同特征. (2) 引导学生舍弃这两个问题的实际意义，抽象为数学问题. (3) 共同写出瞬时变化率的表示，并定义为导数.	这是学生思维上升的又一个层次，在这个过程中应特别注意教师的引导作用.
(8) 例 1.	熟悉导数定义，了解导数内涵.	(1) 讲解例 1，结合第 76 页练习上的文字，让学生感受导数的内涵. (2) 让学生完成练习 1. (3) 说明导数 $f'(x_0)$ 反映了函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的变化情况.	
(9) 课堂小结.	教师引导学生从以下几个方面进行小结： (1) 导数产生的背景； (2) 导数形成的过程； (3) 导数的定义及其内涵； (4) 研究问题的步骤，即提出问题、寻求想法、确定想法、实施操作、发现规律； (5) 思考方法：以已知探求未知.		
作业：教科书习题 3.1 A 组 1，2，3，4，5.			

五、习题解答

练习（第 76 页）

在第 3 h 和 5 h 时，原油温度的瞬时变化率分别为-1和 3. 它说明在第 3 h 附近，原油温度大约以 1 ℃/h的速率下降；在第 5 h 时，原油温度大约以 3 ℃/h 的速率上升.

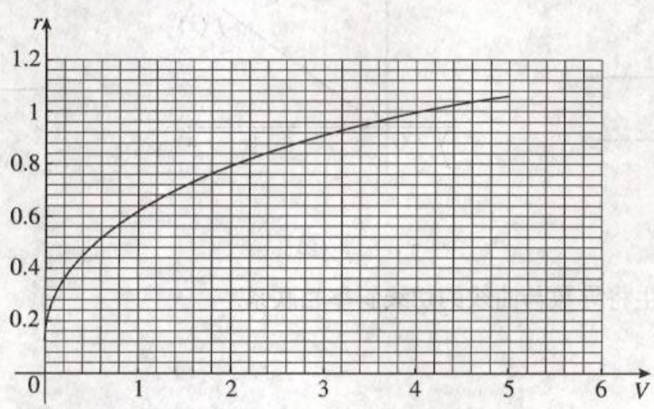
练习（第 78 页）

函数 $h(t)$ 在 $t=t_3$ 附近单调递增，在 $t=t_4$ 附近单调递增. 并且，函数 $h(t)$ 在 t_4 附近比在 t_3 附近增加得慢.

说明　体会“以直代曲”的思想.

练习（第 79 页）

函数 $r(V)=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\,(0\leqslant V\leqslant 5)$ 的图象为



根据图象，估算出 $r'(0.6)\approx 0.3$，$r'(1.2)\approx 0.2$.

说明　如果没有信息技术，教师可以将此图直接提供给学生，然后让学生根据导数的几何意义估算两点处的导数.

习题 3.1（第 79 页）

A 组

1. 在 t_0 处，虽然 $W_1(t_0)=W_2(t_0)$，然而$\dfrac{W_1(t_0)-W_1(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}\geqslant\dfrac{W_2(t_0)-W_2(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}$，所以单位时间里企业甲比企业乙的平均治污率大，因此企业甲比企业乙略好一筹.

   说明　平均变化率的应用，体会平均变化率的内涵.

2. $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-4.9\Delta t-3.3$，所以，$h'(1)=-3.3$.

   这说明运动员在 $t=1$ s 附近以 3.3 m/s 的速度下降.

3. 物体在第 5 s 的瞬时速度就是函数 $s(t)$ 在 $t=5$ 时的导数.

   $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(5+\Delta t)-s(5)}{\Delta t}=\Delta t+10$，所以，$s'(5)=10$.

   因此，物体在第 5 s 时的瞬时速度为 10 m/s，它在第 5 s 的动能 $E_k=\dfrac{1}{2}\times 3\times 10^2=150$ J.

4. 设车轮转动的角度为 θ，时间为 t，则 $\theta=kt^2(k>0)$.

   由题意可知，当 $t=0.8$ 时，$\theta=2\pi$. 所以 $k=\dfrac{25\pi}{8}$，于是 $\theta=\dfrac{25\pi}{8}t^2$.

   车轮转动开始后第 3.2 s 时的瞬时角速度就是函数 $\theta(t)$ 在 $t=3.2$ 时的导数.

   $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta(3.2+\Delta t)-\theta(3.2)}{\Delta t}=\dfrac{25\pi}{8}\Delta t+20\pi$，所以 $\theta'(3.2)=20\pi$.

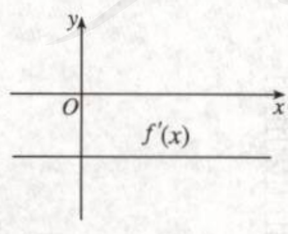
   因此，车轮在开始转动后第 3.2 s 时的瞬时角速度为 20π 弧度/秒.

   说明　第 2，3，4 题是对了解导数定义及熟悉其符号表示的巩固.

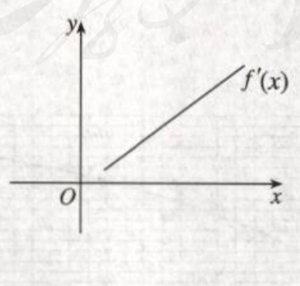
5. 由图可知，函数 $f(x)$ 在 $x=-5$ 处切线的斜率大于 0，所以函数在 $x=-5$ 附近单调递增. 同理可得，函数 $f(x)$ 在 $x=-4$，-2，0，2 附近分别单调递增，几乎没有变化，单调递减，单调递减.

   说明　"以直代曲"思想的应用.

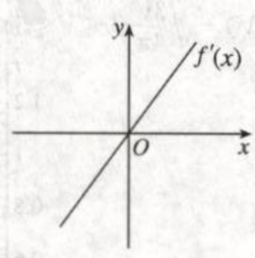
6. 函数（1）是一条直线，其斜率是一个小于 0 的常数；函数（2）的 $f'(x)$ 均大于 0，并且随着 x 的增加，$f'(x)$ 的值也在增加；对于函数（3），当 x 小于 0 时，$f'(x)$ 小于 0，当 x 大于 0 时，$f'(x)$ 大于 0，并且随着 x 的增加，$f'(x)$ 的值也在增加. 以下给出了满足上述条件的导函数图象中的一种.



(1)



(2)



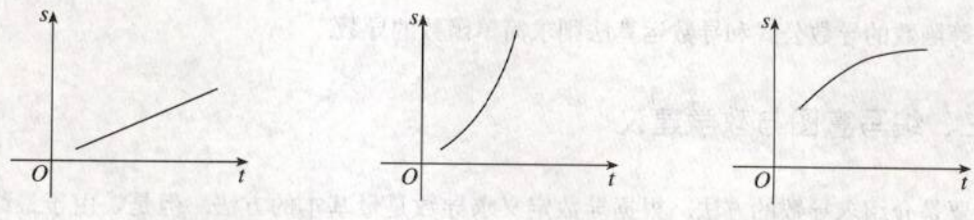
(3)

   说明　本题意在让学生将导数与曲线的切线斜率相联系.

B组

1. 高度关于时间的导数刻画的是运动变化的快慢，即速度；速度关于时间的导数刻画的是速度变化的快慢，根据物理知识，这个量就是加速度.

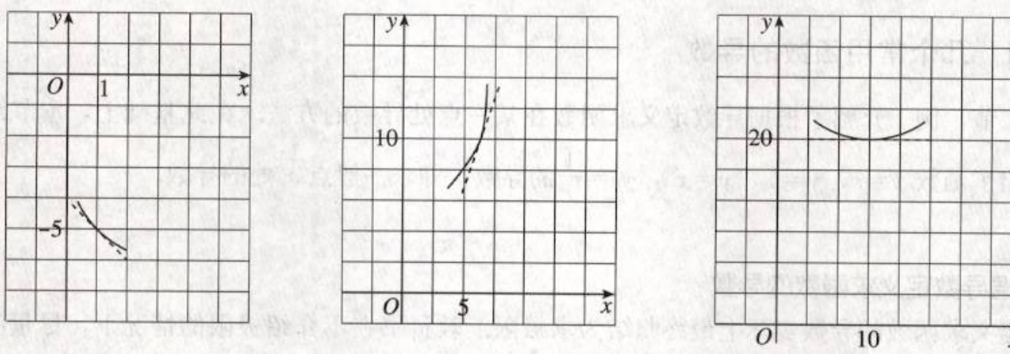
2.



(1) (2) (3)

说明 由给出的 $v(t)$ 的信息获得 $s(t)$ 的相关信息，并据此画出 $s(t)$ 的图象的大致形状. 这个过程基于对导数内涵的了解，以及数与形之间的相互转换.

3. 由题意可知，函数 $f(x)$ 的图象在点(1，－5)处的切线斜率为－1，所以此点附近曲线呈下降趋势. 首先画出切线的图象，然后再画出此点附近函数的图象. 同理可得(2) (3)某点处函数图象的大致形状.

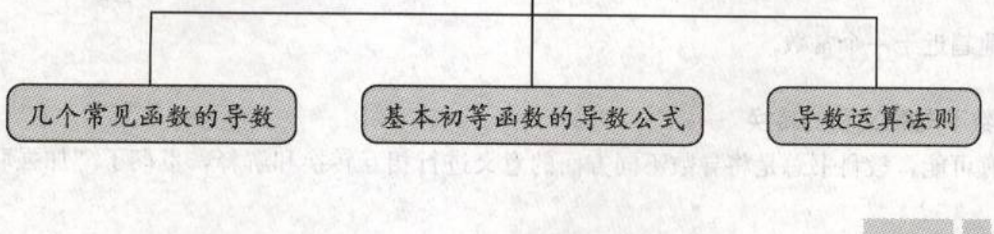


(1) (2) (3)

说明 这是一个综合性问题，包含了对导数内涵、导数几何意义的了解，以及对以直代曲思想的领悟.

3.2 导数的计算

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是让学生会根据导数的定义求四个函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数，并能利用基本初等函数的导数公式和导数运算法则求简单函数的导数.

三、编写意图与教学建议

本节主要是介绍求导数的方法. 根据导数定义求导数是最基本的方法. 但是，由于最终总会归结为求极限，而本章并没有介绍极限知识，因此，教科书只是采用这种方法计算了 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 这四个常见函数的导数. 意在让学生感受根据导数定义求导数这种基本的方法，但不作过多要求. 只要学生能够利用教科书给出的基本初等函数的导数公式和导数运算法则求简单函数的导数即可. 因此，教科书直接给出了基本初等函数的导数公式和导数运算法则，并没有对这些公式和法则进行推导. 在教学中，也应如此，不要作过多要求. 另外，本节在求四个常见函数的导数时，特别注意了它们的几何意义和物理意义的解释.

3.2.1 几个常用函数的导数

在 3.1 节，例 1 介绍了根据导数定义求函数在某一点处导数的方法. 在此基础上，本节继续用这种方法求出了函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数，即求一般点 x 处的导数.

1. 根据导数定义求函数的导数

根据定义求函数的导数实际上最终归结为求极限. 教科书在不介绍极限的情况下，尽量淡化这种方法的严格性要求及涉及的相关技巧，只是要求：

首先，计算 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，并化简；

然后，观察当 Δx 趋近于 0 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋近于哪个定值；

最后，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 趋近于的定值就是函数 $y=f(x)$ 的导数.

以上过程中涉及到的一些相关知识，教师应该明了，但并不要求学生了解.

（1）由于 Δx 是自变量 x 的改变量，所以 Δx 可正可负，但不能为 0. 当 $\Delta x>0$（或 $\Delta x<0$）时，$\Delta x\to 0$ 表示 $x+\Delta x$ 从右边（或从左边）趋近于 x. Δy 是相应的函数改变量，则依函数的不同可以为正、为负，也可以为 0.

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 Δx 的函数.

（3）导数的定义本身包含着可导与导数两层含义. 可导是指当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，反映函数在一点所具有的性质，导数是刻画这一性质的数量. 不可导是指当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在，即不是无限地趋近于一个常数.

2. 导数不同意义间的转换

只要有可能，教科书总是将导数不同方面的意义进行相互转换和解释，贯彻了“加强联系性”这

一思想．这样，不仅可以使学生转换思维角度，深刻认识导数内涵，而且能逐渐培养成用数学知识解释现实问题的习惯．例如，根据定义计算完函数 $y=c$，$y=x$ 的导数后，教科书从物理意义的角度进行解释，计算完 $y=x^2$ 的导数后，分别从几何意义和物理意义两个角度进行解释；在 3.2.2 解答完每一个例题后，教科书都将计算结果转换为它们的实际意义．

建议教学设计时，应有层次地让学生逐步实现不同意义间的转换．首先分别认识导数不同方面的意义，然后建立不同意义间的联系，最后能够在不同意义间进行转换．

3．探究的说明与解答

●第 82 页第一个“探究”设计了三个逐步深入的问题，目的在于：首先，让学生模仿着根据导数定义求导数；其次，进一步体会导数与切线斜率间的关系；最后，发现正比例函数增减快慢的规律，为后继的学习做个铺垫．具体解答如下：

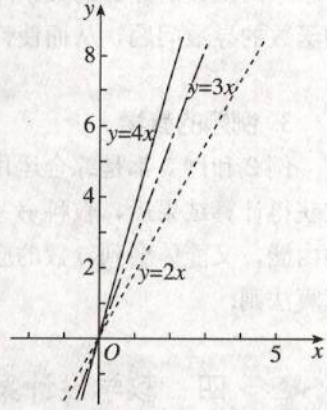


图 3-3

函数 $y=2x$，$y=3x$，$y=4x$ 的图象如图 3-3 所示，导数分别为 $y'=2$，$y'=3$，$y'=4$．

(1) 从图象上看，函数 $y=2x$，$y=3x$，$y=4x$ 的导数分别表示这些直线的斜率．

(2) 在这三个函数中，$y=4x$ 增加得最快，$y=2x$ 增加得最慢．

(3) 函数 $y=kx(k>0)$增加的快慢与 k 有关系，即与函数的导数有关系，k 越大，函数增加得越快，k 越小，函数增加得越慢．

函数 $y=kx(k<0)$减少的快慢与$|k|$有关系，即与函数导数的绝对值有关系，$|k|$越大，函数减少得越快，$|k|$越小，函数减少得越慢．

●第 82 页第二个“探究”设计了两个问题．第一个问题要求学生在思考和模仿的基础上，利用函数 $y=\dfrac{1}{x}$的导数描述它的变化情况；第二个问题要求学生数形结合，求出曲线在点(1，1)处的切线方程．具体解答如下：

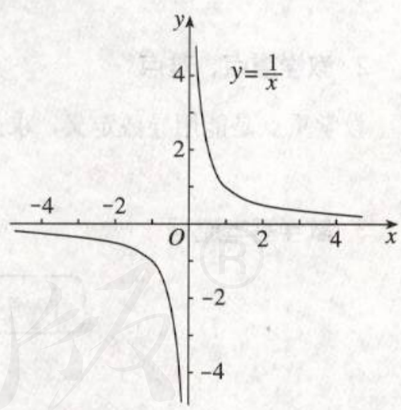


图 3-4

函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象如图 3-4 所示．

结合函数图象及其导数 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$发现，当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，函数 $y=\dfrac{1}{x}$减少得越来越快；当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，函数减少得越来越慢．

点(1，1)处切线的斜率就是导数 $y'|_{x=1}=-\dfrac{1}{1^2}=-1$，故斜率为$-1$，过点(1，1)的切线方程为$y=-x+2$．

3.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

教科书直接给出基本初等函数的导数公式及导数的运算法则，不要求根据导数定义推导这些公式和法则，只要求能够利用它们求简单函数的导数即可．在教学中，适量的练习对于熟悉公式和法则的运用是必要的，但应避免过量的形式化的运算练习．

1．基本初等函数的导数公式

教科书给出了八个常用的基本初等函数的导数，包括常数函数、有理数幂函数、正弦函数、余弦

函数、指数函数、对数函数．其中每一个公式都可以根据导数定义推导出来，但在这里不做要求．

例 1 是一个关于指数型函数的实际问题，教科书通过这个例题展示了导数公式表的运用．

2. 导数的运算法则

“思考”说明了为什么要引入导数运算法则．运用导数公式，已经会求 $f(t)=5$ 和 $g(t)=1.05^t$ 的导数，现在要求 $p(t)=5\times1.05^t$ 的导数，而 $p(t)$ 的导数正是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 乘积的导数．一般来说，如果两个已知函数的导数会求或易求，引进四则运算的求导法则，就能得到两函数的和、差、积、商的导数与原来两函数的导数的关系．应用这些法则就可以将比较复杂的函数的求导问题，化为会求的或易求的函数的导数问题，从而使许多函数的求导过程得到简化．

3. 例题的教学

例 2 和例 3 都是综合运用导数公式和运算法则计算导数的问题．例 3 是一个净化度的实际问题，在获得计算结果后，教科书一如既往地运用数学结果解释其实际意义，既可以使学生进一步理解导数的内涵，又能体会到导数的应用性．在教学中，可以选配适量的求导问题，帮助学生熟悉导数公式和运算法则．

四、教学设计案例

3.2.1　几个常用函数的导数（1课时）

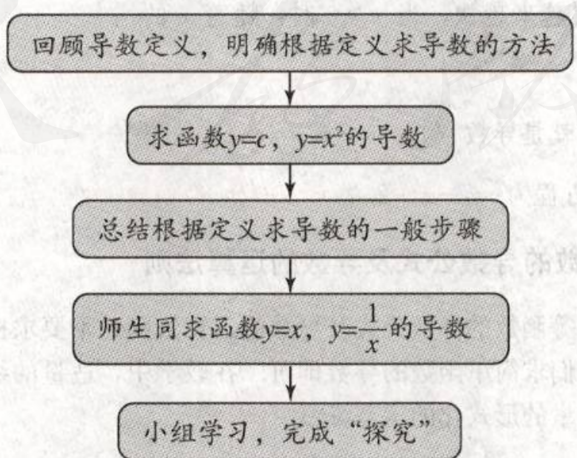
1. 教学任务分析

本节的教学任务是用导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数．

2. 教学重点、难点

教学重点是能用导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数．

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师生活动	备　注
(1) 如何求函数 $y=f(x)$ 的导数?	课题引入.	回顾、分析导数定义，明确根据定义求导数的方法.	
(2) 求函数 $y=c$，$y=x^2$ 的导数.	通过两个求函数导数的具体计算过程，让学生体会根据定义求导数的方法.	以教师计算演示为主，说明根据定义求导数这种方法的具体操作过程.	在这个过程中，“Δx 趋于 0 但不等于 0；$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 可能趋于定值也可能不趋于定值”都不要求学生了解，只要求学生能直观观察出变化趋势，会用定义求导数即可.
(3) 概括根据定义求导数的具体步骤.	将方法具体化为程序性的步骤，以便能快捷地根据定义求导数.	教师引导学生概括求以上两个函数导数的具体步骤： (1) 求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，并化简； (2) 观察“$\Delta x$ 趋于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 化简后的式子趋于哪个定值”； (3) 此定值即为函数的导数.	
(4) 根据概括的步骤求函数 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$ 的导数.	让学生模仿前两个函数求导数的过程，根据具体的步骤亲自尝试求这两个函数的导数.	学生亲自计算这两个函数的导数，并进行结果展示，教师给予评价和解决学生解答中存在的一般问题.	本表中的问题（2）是让学生“看一看”，问题（3）是让学生“想一想”，问题（4）是让学生“做一做”.
(5) 函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$ 的导数的几何意义是什么？从物体运动角度看，它们各自的物理意义是什么？	将导数各方面的意义联系起来，并相互转化，让学生进一步理解导数的内涵.	让学生画出三个函数的图象，教师引导学生从几何和物理两个方面解释导数的意义，理解导数的内涵.	
(6) 教科书第 82 页第一个“探究”.	(1) 让学生通过练习进一步熟悉根据定义求导数的方法. (2) 数形结合，进一步理解导数内涵. (3) 为 3.3 做铺垫.	教师指导学生分组进行探究性学习，分别展示探究结论，教师给予分析、评价并总结.	
(7) 课堂小结.	教师引导学生从以下两个方面进行小结： (1) 根据定义求导数的方法； (2) 根据定义求导数的具体步骤.		
作业：教科书第 82 页第二个“探究”，习题 3.2A 组第 1 题.			

五、习题解答

练习（第85页）

1. $f'(x)=2x-7$，所以，$f'(2)=-3$，$f'(6)=5$.

2. (1) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$； (2) $y'=2e^x$；

(3) $y'=10x^4-6x+5$； (4) $y'=-3\sin x-4\cos x$.

习题3.2（第85页）

A组

1. $\dfrac{\Delta S}{\Delta r}=\dfrac{S(r+\Delta r)-S(r)}{\Delta r}=2\pi r+\Delta r$，所以，$S'(r)=\lim\limits_{\Delta r\to 0}(2\pi r+\Delta r)=2\pi r$.

2. $h'(t)=-9.8t+6.5$.

3. $r'(V)=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi V^2}}$.

4. (1) $y'=3x^2+\dfrac{1}{x\ln 2}$； (2) $y'=nx^{n-1}e^x+x^ne^x$； (3) $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. $f'(x)=-8+2\sqrt{2}x$. 由 $f'(x_0)=4$ 有

$$4=-8+2\sqrt{2}x_0,$$

解得 $x_0=3\sqrt{2}$.

6. (1) $y'=\ln x+1$；

(2) $y=x-1$.

7. $y=-\dfrac{x}{\pi}+1$.

8. (1) 氡气的散发速度 $A'(t)=500\times\ln 0.834\times 0.834^t$.

(2) $A'(7)=-25.5$，它表示氡气在第7天左右时，以25.5克/天的速率减少.

B组

1. 当 $y=0$ 时，$x=0$. 所以函数图象与 x 轴交于点 $P(0,0)$.

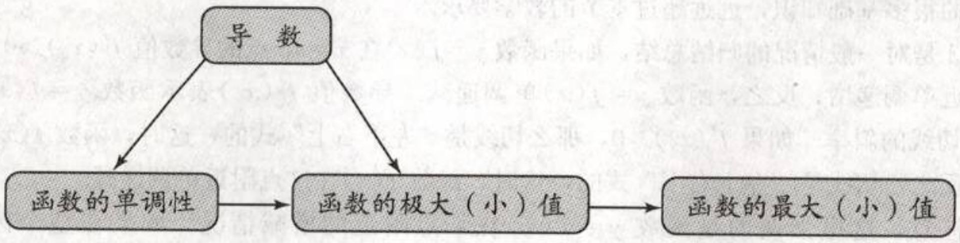
$y'=-e^x$，所以 $y'|_{x=0}=-1$.

所以，曲线在点 P 处的切线的方程为 $y=-x$.

2. $d'(t)=-4\sin t$. 所以，上午6:00时潮水的速度为1.12 m/h；上午9:00时潮水的速度为−1.65 m/h；中午12:00时潮水的速度为2.15 m/h；下午6:00时潮水的速度为3.00 m/h.

3.3 导数在研究函数中的应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

难点：函数在某点取得极值的必要条件和充分条件.

三、编写意图与教学建议

在《数学 1》和《数学 4》中，我们研究过函数、三角函数，知道函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型. 变化规律可用函数的性质来描述，函数的单调性是函数的重要性质之一. 当时我们直接根据函数单调性的定义，研究函数的单调性，以及函数的最大（小）值.

现在我们运用导数这个工具研究函数的单调性，体会导数在研究函数中的应用，并与《数学 1》、《数学 4》中的方法进行比较，体会导数在研究函数中的优越性.

3.3.1 函数的单调性与导数

1. 为什么可以用导数研究函数的单调性

函数单调性的定义在《数学 1》中已经介绍，当时直接根据单调性的定义研究函数的单调性. 导数是在研究变化现象中产生的，它是平均变化率的极限. 我们可由函数的某段平均变化率 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 逐步逼近函数在某点的瞬时变化率（导数）；反过来，由函数在某点的瞬时变化率我们可以估计函数在这点附近的变化情况. 由函数在某段平均变化率 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 的符号可以比较，当 $x_1\neq x_2$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_1，x_2 两点的大小，因此，导数可以作为研究函数单调性的工具，而且利用导数研究函数的单调性具有一般性.

2. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系

高台跳水是本章一以贯之的例子. 本节以“观察”栏目引出学习的内容“函数的单调性与导数”. 让学生观察图象：一个是高度随时间变化的图象，一个是速度随时间变化的图象. 从图象上，学生可

以直观得出运动员从起跳到最高点、从最高点到入水这两段的运动状态. 从函数的增减角度看，就是 $h(t)$单调递增，相应地，$v(t)=h'(t)>0$；$h(t)$单调递减，相应地，$v(t)=h'(t)<0$.

教科书中结合学生学过的大量实例：一次函数、二次函数、三次函数、反比例函数，借助这些函数的图象（几何直观），让学生观察，然后探讨函数的单调性与其导函数正负的关系. 在观察、探讨的基础上归纳出函数的单调性与其导函数正负之间的关系.

这里，结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与其导函数正负之间的关系，没有进行严格的证明. 这是《普通高中数学课程标准（实验）》的要求，学生只需归纳得出结论即可，严格的证明需要导数的很多基础知识，远远超过本节的教学要求.

图 3.3-3 是对一般情况的归纳总结，如果函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 点的导数值 $f'(x_0)>0$，那么函数在这点的附近单调递增；反之，函数 $y=f(x)$单调递减. 导数值 $f'(x_0)$表示函数 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率. 如果 $f'(x_0)>0$，那么切线是“左下右上”式的，这时，函数 $f(x)$在 x_0 附近单调递增；反之，切线是“左上右下”式的，这时，函数 $f(x)$在这点附近单调递减.

一定要注意，这里强调的是函数 $y=f(x)$在某点附近的增减情况. 如果在整个区间上恒有 $f'(x)>0(<0)$，那么函数 $y=f(x)$在整个区间上单调递增（递减）.

3. 对第 90 页“边空”问题的说明

如果在某个区间上恒有 $f'(x)=0$，那么函数 $f(x)$在这个区间上是常数函数.

4. 对第 90 页“思考”的说明

平均变化率$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$的几何意义是经过$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$两点直线的斜率. 观察图象，我们可以发现，存在一点 $\xi\in(x_1, x_2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$（这个结论是拉格朗日中值定理）. 从图象上看，这个结论非常直观. 它可以近似表示函数 $y=f(x)$在区间(x_1, x_2)的单调性.

5. 关于例 1 的说明

由导函数 $f'(x)$在某区间的符号，可以判定函数 $y=f(x)$在这个区间的单调情况. 如果函数在某点 ξ 的导数值 $f'(\xi)=0$，而且在这点附近的左侧单调递增（减）、右侧单调递减（增），那么这一点是函数的极值点. 由于此时还没有极值点的概念，我们姑且称之为“临界点”，要让学生知道函数在这点的函数值是附近所有点中最大（小）的.

根据上述信息以及我们的判断，画出的函数的图象是大致形状，要注意这是图象的大致形状. 在每段中，图象可能向“内”弯曲，可能向“外”弯曲，也可能是条直线. 而且上下平移函数的图象都能反映题目提供的信息，都符合题意.

例 1 具有一定的开放性，学生得出的函数图象不唯一，只要学生抓住了问题的本质，即在相应区间上的单调性就可以了，不要作更多、更高的要求.

6. 关于例 2 的说明

例 2 直接运用函数的单调性与其导数正负的关系判断函数的单调性，并求出单调区间. 函数以不超过三次的多项式函数为主.

在每道小题的后面，我们都给出函数的图象，目的是用函数的图象为我们的结论提供直观支持，把函数的解析表示、图象表示有机地结合起来. 我们鼓励使用各种信息技术工具画出函数的图象，用图象进行直观验证.

如果不用导数的方法，直接运用单调性的定义，也可以求解本题．但运算过程相对比较麻烦，有时需要变形的很多技巧，特别是判断三次的多项式函数的单调性并求其单调区间时．这种方法不是一般通用的方法．导数是研究函数单调性的工具，其方法具有普适性、通用性．

鼓励学生直接运用单调性的定义求解本题．通过比较，学生会有更深刻的体会．

7．关于例3的说明

本例紧密结合具体问题，同时具有一定的趣味性，对学生的思维具有一定的挑战性．直接经验告诉我们，不同形状的容器其水面的高度随时间变化，而且高度随着时间的增加逐渐变高，但高度增加有快有慢，也就是说变化是有快慢的．

在图象上如何表示变化的快慢，数学上如何表示，与导数具有怎样的联系？这都是例3需要回答的．

我们知道导数的符号反映函数 $y=f(x)$ 的增减情况，怎样反映函数 $y=f(x)$ 增减的快慢呢？也就是说，从导数的角度如何解释变化的快慢呢？

在学习函数时，我们利用计算工具，比较过指数函数、对数函数增长的差异；同时结合实例，体会了直线上升、指数爆炸、对数增长这些变化的含义．指数函数变化快，直线次之，对数函数变化最慢．反映在导数上就是，如果一个函数在某段导数的绝对值较大，那么函数在这段变化得快，函数在这段的图象就“陡峭”一些（向上或向下）；反之，函数的图象就“平缓”一些．也就是说，导数的符号反映了函数在某个区间上的单调性，导数绝对值的大小反映了函数在某个区间或某点附近变化的快慢程度．

3.3.2　函数的极值与导数

1．从函数的单调性到极值

观察图象3.3-1，给出问题，让学生结合实际经验探索函数的极值与导数值变化之间的关系．我们知道，$t=a$ 时，运动员距水面的高度最大．从图象上看非常直观，为了使学生有眼见为实的感觉，我们采用技术手段，放大函数在这点附近的函数的图象．学生会直观感觉，$h'(a)=0$，而且在 $t=a$ 的附近，当 $t<a$ 时，函数 $h(t)$ 单调递增，$h'(t)>0$；当 $t>a$ 时，函数 $h(t)$ 单调递减，$h'(t)<0$．

事实上，当 t 在点 a 的附近从小到大经过点 a 时，$h'(t)$ 先正后负，且 $h'(t)$ 连续变化，于是在单调递增区间与单调递减区间的“边界点”处有 $h'(a)=0$．无论是直观观察，还是根据 $h'(t)$ 的连续变化，我们都能得出 $h'(a)=0$．

教科书给出大量的函数图象，让学生观察图象，直观感受函数在某些特殊点（极值点）的函数值与附近点函数值大小之间的关系，并直观感受函数在这些点的导数值以及在这些点附近函数的增减情况．

教科书以图3.3-10为例，进行了具体说明．在此基础上，给出了函数的极大值和极小值的概念．

需要特别说明的是，极大值和极小值反映的是函数在某点附近的性质，是局部性质．而且极大值不一定大于极小值，例如，在图3.3-11中，函数 $y=f(x)$ 在点 c 的极小值大于在点 f 的极大值．

2．关于例4的说明

求三次多项式函数的单调区间以及极值是本节的重点，例4给出了求三次多项式函数极值的方法．需要说明的是，表格给出了当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况，表格直观清楚，容易看出具体的变化情况，并且判断是极大值还是极小值，最后得出函数的极大值．

图象是函数性质的直观载体，函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象可以为我们的结论提供直观验证．

3. 函数在某点的导数值为0是取得极值的必要条件，而非充分条件

需要特别说明的是，导数值为0的点不一定是函数的极值点，例如函数 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，虽然 $f'(0)=0$，但由于无论 $x>0$，还是 $x<0$，恒有 $f'(x)>0$，即函数是单调递增的，所以 $x=0$ 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点．也就是说，函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为0是函数 $y=f(x)$ 在这点取极值的必要条件，而非充分条件．

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点取极值的充分条件是：(1) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数值 $f'(x_0)=0$；(2) 在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0(<0)$，右侧 $f'(x)<0(>0)$．

本小节最后归纳概括了求函数 $y=f(x)$ 极值的一般步骤，学生熟悉一般步骤之后，有些步骤可以省略．

3.3.3　函数的最大（小）值与导数

1. 最大（小）值

极值反映的是函数在某一点附近的局部性质，而不是函数在整个定义域上的性质．但是，在解决实际问题或研究函数的性质时，我们往往关心函数在指定的区间上，哪个值最大，哪个值最小．这就是本小节要研究的最大（小）值问题．

函数的最大（小）值是在函数的极大（小）值基础上的发展．从函数图象上我们容易直观地看出：如果 $[a, b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值．

结合函数极值中的例子，以及函数的图象不难看出，只要把函数 $y=f(x)$ 的所有极值连同端点的函数值进行比较，就可以求出函数的最大（小）值．

2. 关于例5的说明

我们是在极值的基础上讲最大（小）值，例5的教学要紧密结合例4．例4已求出函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的极大值和极小值，在例5给定的区间上，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 有极小值，然后求出函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在给定区间端点的函数值，把区间端点的函数值与极小值比较，就可以得出函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在给定区间上的最大值和最小值．

最后归纳给出了求函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大（小）值的步骤，学生熟悉一般步骤之后，有些步骤可以省略．

四、习题解答

练习（第93页）

1. (1) 因为 $f(x)=x^2-2x+4$，所以

$$f'(x)=2x-2.$$

当 $f'(x)>0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)=x^2-2x+4$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)=x^2-2x+4$ 单调递减．

(2) 因为 $f(x)=e^x-x$，所以

$$f'(x)=e^x-1.$$

当 $f'(x)>0$，即 $x>0$ 时，函数 $f(x)=e^x-x$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x<0$ 时，函数 $f(x)=e^x-x$ 单调递减．

(3) 因为 $f(x)=3x-x^3$，所以

$$f'(x)=3-3x^2.$$

当 $f'(x)>0$，即 $-1<x<1$ 时，函数 $f(x)=3x-x^3$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>1$，或 $x<-1$ 时，函数 $f(x)=3x-x^3$ 单调递减.

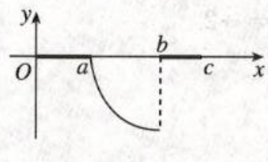
(4) 因为 $f(x)=x^3-x^2-x$，所以

$$f'(x)=3x^2-2x-1.$$

当 $f'(x)>0$，即 $x>1$，或 $x<-\frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ 单调递减.

2.



注：图象形状不唯一.

3. 因为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，所以

$$f'(x)=2ax+b.$$

(1) 当 $a>0$ 时，

$f'(x)>0$，即 $x>-\frac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$单调递增；

$f'(x)<0$，即 $x<-\frac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$单调递减.

(2) 当 $a<0$ 时，

$f'(x)>0$，即 $x<-\frac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$单调递增；

$f'(x)<0$，即 $x>-\frac{b}{2a}$时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$单调递减.

4. 证明：因为 $f(x)=2x^3-6x^2+7$，所以

$$f'(x)=6x^2-12x.$$

当 $x\in(0,2)$时，$f'(x)=6x^2-12x<0$，因此函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 在$(0,2)$内是减函数.

练习（第96页）

1. (1) 因为 $f(x)=6x^2-x-2$，所以

$$f'(x)=12x-1.$$

令 $f'(x)=12x-1=0$，得 $x=\frac{1}{12}$.

当 $x>\frac{1}{12}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x<\frac{1}{12}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. 所以，当 $x=\frac{1}{12}$时，$f(x)$有极小值，并且极小值为 $f\left(\frac{1}{12}\right)=6\times\left(\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{12}-2=-\frac{49}{24}$.

(2) 因为 $f(x)=x^3-27x$，所以

$$f'(x)=3x^2-27.$$

令 $f'(x)=3x^2-27=0$，得 $x=3$，或 $x=-3$.

下面分两种情况讨论：

①当 $f'(x)>0$，即 $x>3$，或 $x<-3$ 时；

②当 $f'(x)<0$，即 $-3<x<3$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	54	单调递减	-54	单调递增

因此，当 $x=3$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 -54；

当 $x=-3$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 54.

(3) 因为 $f(x)=6+12x-x^3$，所以

$$f'(x)=12-3x^2.$$

令 $f'(x)=12x-3x^2=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

下面分两种情况讨论：

①当 $f'(x)>0$，即 $-2<x<2$ 时；

②当 $f'(x)<0$，即 $x>2$，或 $x<-2$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-10	单调递增	22	单调递减

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 -10；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 22.

(4) 因为 $f(x)=3x-x^3$，所以

$$f'(x)=3-3x^2.$$

令 $f'(x)=3-3x^2=0$，得 $x=1$，或 $x=-1$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即 $-1<x<1$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $x>1$，或 $x<-1$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	-2	单调递增	2	单调递减

因此，当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 -2；

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 2.

2. x_2，x_4 是函数 $y=f(x)$ 的极值点，其中 $x=x_2$ 是函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$x=x_4$ 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点.

练习（第 98 页）

(1) 在 $[0, 2]$ 上，当 $x=\frac{1}{12}$ 时，$f(x)=6x^2-x-2$ 有极小值，并且极小值为 $f\left(\frac{1}{12}\right)=-\frac{49}{24}$. 又由于 $f(0)=-2$，$f(2)=20$. 因此，函数 $f(x)=6x^2-x-2$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值是 20、最小值是 $-\frac{49}{24}$.

(2) 在$[-4, 4]$上，当$x=-3$时，$f(x)=x^3-27x$有极大值，并且极大值为$f(-3)=54$；

当$x=3$时，$f(x)=x^3-27x$有极小值，并且极小值为$f(3)=-54$.

又由于$f(-4)=44$，$f(4)=-44$，因此，函数$f(x)=x^3-27x$在$[-4, 4]$上的最大值是54、最小值是-54.

(3) 在$\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$上，当$x=2$时，$f(x)=6+12x-x^3$有极大值，并且极大值为$f(2)=22$. 又由于$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{55}{27}$，$f(3)=15$. 因此，函数$f(x)=6+12x-x^3$在$\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$上的最大值为22，最小值为$\frac{55}{27}$.

(4) 在$[2, 3]$上，函数$f(x)=3x-x^3$无极值. 因为$f(2)=-2$，$f(3)=-18$，所以函数$f(x)=3x-x^3$在$[2, 3]$上的最大值是-2，最小值是-18.

习题 3.3（第 98 页）

A 组

1. (1) 因为$f(x)=-2x+1$，所以$f'(x)=-2<0$.

因此，函数$f(x)=-2x+1$是单调递减函数.

(2) 因为$f(x)=x+\cos x$，$x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，所以$f'(x)=1-\sin x>0$，$x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

因此，函数$f(x)=x+\cos x$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数.

(3) 因为$f(x)=2x-4$，所以$f'(x)=2>0$.

因此，函数$f(x)=2x-4$是单调递增函数.

(4) 因为$f(x)=2x^3+4x$，所以$f'(x)=6x^2+4$.

由于$f'(x)=6x^2+4>0$，所以函数$f(x)=2x^3+4x$是单调递增函数.

2. (1) 因为$f(x)=x^2+2x-4$，所以$f'(x)=2x+2$.

当$f'(x)>0$，即$x>-1$时，函数$f(x)=x^2+2x-4$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x<-1$时，函数$f(x)=x^2+2x-4$单调递减.

(2) 因为$f(x)=2x^2-3x+3$，所以$f'(x)=4x-3$.

当$f'(x)>0$，即$x>\frac{3}{4}$时，函数$f(x)=2x^2-3x+3$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$x<\frac{3}{4}$时，函数$f(x)=2x^2-3x+3$单调递减.

(3) 因为$f(x)=3x+x^3$，所以$f'(x)=3+3x^2>0$.

因此，函数$f(x)=3x+x^3$是单调递增函数.

(4) 因为$f(x)=x^3+x^2-x$，所以$f'(x)=3x^2+2x-1$.

当$f'(x)>0$，即$x>\frac{1}{3}$，或$x<-1$时，函数$f(x)=x^3+x^2-x$单调递增；

当$f'(x)<0$，即$-1<x<\frac{1}{3}$时，函数$f(x)=x^3+x^2-x$单调递减.

3. (1) 图略.

(2) 加速度等于0.

4. (1) 在$x=x_2$处，导函数$y=f'(x)$有极大值；

(2) 在$x=x_1$和$x=x_4$处，导函数$y=f'(x)$有极小值；

(3) 在$x=x_3$处，函数$y=f(x)$有极大值；

(4) 在 $x=x_5$ 处，函数 $y=f(x)$ 有极小值.

5. (1) 因为 $f(x)=6x^2+x+2$，所以

$$f'(x)=12x+1.$$

令 $f'(x)=12x+1=0$，得 $x=-\frac{1}{12}$.

当 $x>-\frac{1}{12}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x<-\frac{1}{12}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减．所以，当 $x=-\frac{1}{12}$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 $f\left(-\frac{1}{12}\right)=6\times\left(-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{12}+2=\frac{47}{24}$.

(2) 因为 $f(x)=x^3-12x$，所以

$$f'(x)=3x^2-12.$$

令 $f'(x)=3x^2-12=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即 $x>2$，或 $x<-2$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $-2<x<2$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	16	单调递减	−16	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 16；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 -16.

(3) 因为 $f(x)=6-12x+x^3$，所以

$$f'(x)=-12+3x^2.$$

令 $f'(x)=-12+3x^2=0$，得 $x=2$，或 $x=-2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	22	单调递减	−10	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 22；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 -10.

(4) 因为 $f(x)=48x-x^3$，所以

$$f'(x)=48-3x^2.$$

令 $f'(x)=48-3x^2=0$，得 $x=4$，或 $x=-4$.

下面分两种情况讨论：

① 当 $f'(x)>0$，即 $-4<x<4$ 时；

② 当 $f'(x)<0$，即 $x>4$，或 $x<-4$ 时.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	−128	单调递增	128	单调递增

因此，当 $x=-4$ 时，$f(x)$有极小值，并且极小值为-128；

当 $x=4$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 128.

6. (1) 当 $x=-\dfrac{1}{12}$时，$f(x)$有极小值，并且极小值为$\dfrac{47}{24}$.

由于 $f(-1)=7$，$f(1)=9$，所以函数 $f(x)=6x^2+x+2$ 在$[-1, 1]$上的最大值和最小值分别为 9，$\dfrac{47}{24}$.

(2) 在$[-3, 3]$上，当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)=x^3-12x$ 有极大值，并且极大值为 16；当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x^3-12x$ 有极小值，并且极小值为-16. 又由于 $f(-3)=9$，$f(3)=-9$，所以函数 $f(x)=x^3-12x$ 的最大值和最小值分别为 16，-16.

(3) 函数 $f(x)=6-12x+x^3$ 在$\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$上无极值.

因为 $f(x)=6-12x+x^3$ 在$\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$上单调递减，且 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{269}{27}$，$f(1)=-5$，所以函数 $f(x)=6-12x+x^3$ 在$\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$上的最大值和最小值分别为$\dfrac{269}{27}$，$-5$.

(4) 当 $x=4$ 时，$f(x)$有极大值，并且极大值为 128. 又由于 $f(-3)=-117$，$f(5)=115$，因此函数$f(x)=48x-x^3$ 在$[-3, 5]$上的最大值和最小值分别为 128，-117.

B组

(1) 证明：设 $f(x)=\sin x-x$，$x\in(0, \pi)$，因为 $f'(x)=\cos x-1<0$，$x\in(0, \pi)$，所以 $f(x)=\sin x-x$在 $x\in(0, \pi)$内单调递减，因此 $f(x)=\sin x-x<f(0)=0$，$x\in(0, \pi)$，即 $\sin x<x$，$x\in(0, \pi)$.

图略.

(2) 证明：设 $f(x)=x-x^2$，$x\in(0, 1)$，因为 $f'(x)=1-2x$，$x\in(0, 1)$，所以当 $x\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(x)=1-2x>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=x-x^2>f(0)=0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$时，$f'(x)=1-2x<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=x-x^2>f(1)=0$，又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}>0$. 因此，$x-x^2>0$，$x\in(0, 1)$.

图略.

(3) 证明：设 $f(x)=e^x-1-x$，$x\neq0$，因为 $f'(x)=e^x-1$，$x\neq0$，所以，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=e^x-1-x>f(0)=0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=e^x-1-x>f(0)=0$. 综上，$e^x>1+x$，$x\neq0$.

图略.

(4) 证明：设 $f(x)=\ln x-x$，$x>0$，因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，所以，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)=\ln x-x<f(1)=-1<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)=\ln x-x<f(1)=-1<0$；当 $x=1$ 时，显然 $\ln 1<1$. 因此，$\ln x<x$.

由 (3) 可知，$e^x>1+x>x$，$x>0$.

综上，$\ln x<x<e^x$，$x>0$.

图略.

3.4 生活中的优化问题举例

生活中经常遇到求利润最大、用料最省、效率最高等问题，这些问题称为优化问题，优化问题有时也称为最值问题．解决这些问题具有非常现实的意义．这些问题通常可以转化为数学中的函数问题，进而转化为求函数的最大（小）值问题．导数是求函数最大（小）值的强有力工具，本节我们运用导数，解决生活中的一些优化问题．

本节中的优化问题举例一改过去直接给出题目，然后给出解答的模式．而是改变了问题的呈现方式，首先给出一些背景性的问题，让学生了解背景，对问题有一定的生活经验，从生活经验的角度如何看待本题．在生活经验的基础上，逐步引入到数学问题中，在数学问题中，按照学生的思维过程，逐步展开问题、解决问题．解决完问题后，再给学生提出一些有思维价值的思考题目，作为正文例题的延续．在分析问题、解决问题的过程中，让学生体会数学建模的过程．培养学生主动发现问题、分析问题、解决问题的能力．进一步培养学生应用数学的意识．

1. 关于例 1 的说明

这道例题的背景，对于学生来说并不陌生．贴近学生的生活实际，是教科书选取应用问题的重要前提之一．这样的问题能够引起学生的兴趣，使他们感觉“数学”就在自己身边，从而激发他们解决这道例题的冲动．

很多学校或班级举行活动，通常需要张贴海报进行宣传．题目的前提是海报的版心面积一定，上、下边距一定，左、右边距一定，而版心的高和宽是不定的、变化的．因此，可设版心的高为 x，相应地，版心的宽可用含 x 的式子$\dfrac{128}{x}$表示．由于上、下边距一定，左、右边距一定，这样，整个海报的面积也可用含 x 的式子$(x+4)\left(\dfrac{128}{x}+2\right)$表示出来，整个海报的面积减去版心的面积就是四周空白的面积，即教科书中的表达式．

这道题目学生必须明确“版心”的概念，通俗一点，版心是我们能够写东西、发挥创意的地方．考虑到美观，不能占有整个版面，四周必须留有适当的边距．

由于版心的高和宽是变化的，整个海报的面积也是变化的，其面积为$(x+4)\left(\dfrac{128}{x}+2\right)$ dm^2，它的最小面积为 200 dm^2．当整个版面的面积最小时，由于版心的面积固定，此时四周空白的面积最小．这也是处理问题的一种方式，即如果我们能够按照题目的条件，求出海报面积的最小值，那么四周空白的最小面积也就确定了．

2. 关于例 2 的说明

例 2 是一个实际生活中经常遇到的经济问题，让学生结合各自的生活经验，首先回答前面两个问题；在回答问题的基础上，给出问题的背景知识，让学生分析问题、解决问题；最后，从函数图象上直观验证结果．

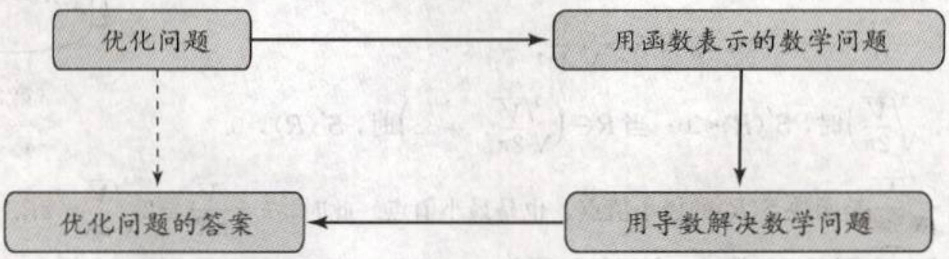
3. 关于例 3 的说明

当前已进入信息化时代，计算机存储与检索是计算机的基本功能．学生应了解计算机的存储与检索信息的功能，同时应了解磁盘的结构以及一个圆环状的磁盘如何存储更多的信息．第三个问题就是

针对上面情况提出的，学生必须了解数学问题后的现实的背景．先提问题，然后对背景知识进行详细的说明，尔后提出数学问题，在这个基础上，学生再来解决数学问题．

如果每条磁道存储的信息与磁道的长度成正比，可以计算磁盘存储的信息，此时，r 越小，磁盘的存储量越大．

最后通过优化问题的举例，提出解决优化问题的基本思路，也就是典型的数学建模的过程：



本节三个例题具有一定的代表性，从不同的侧面说明了生活中的优化问题，并对问题进行了深入细致的分析．目的是通过三个问题，了解现实生活中存在大量的优化问题，同时了解导数在解决优化问题中的作用．

习题 3.4（第 104 页）

A 组

1. 设两段铁丝的长度分别为 x，$l-x$，则这两个正方形的边长分别为$\frac{x}{4}$，$\frac{l-x}{4}$，两个正方形的面积和为

$$S=f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{l-x}{4}\right)^2=\frac{1}{16}(2x^2-2lx+l^2)，0<x<l.$$

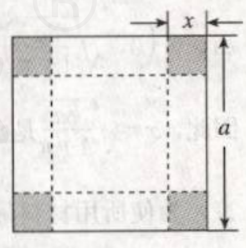
令 $f'(x)=0$，即 $4x-2l=0$，$x=\frac{l}{2}$.

当 $x\in\left(0，\frac{l}{2}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{l}{2}，l\right)$时，$f'(x)>0$.

因此，$x=\frac{l}{2}$是函数 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点．所以，当两段铁丝的长度分别是$\frac{l}{2}$时，两个正方形的面积和最小．

答：两段铁丝的长度分别是$\frac{l}{2}$时，两个正方形的面积和最小．

2. 如图所示，由于在边长为 a 的正方形铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，做成一个无盖方盒，所以无盖方盒的底面为正方形，且边长为 $a-2x$，高为 x.



（第 2 题）

(1) 无盖方盒的容积 $V(x)=(a-2x)^2x$，$0<x<\frac{a}{2}$.

(2) 因为 $V(x)=4x^3-4ax^2+a^2x$，所以 $V'(x)=12x^2-8ax+a^2$.

令 $V'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$（舍去），或 $x=\frac{a}{6}$.

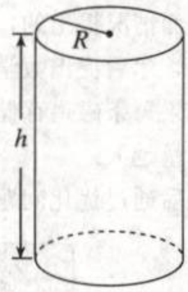
当 $x\in\left(0，\frac{a}{6}\right)$时，$V'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{a}{6}，\frac{a}{2}\right)$时，$V'(x)<0$.

因此，$x=\frac{a}{6}$是函数 $V(x)$的极大值点，也是最大值点．所以当 $x=\frac{a}{6}$时，无盖方盒的容积最大．

答：当 $x=\frac{a}{6}$时，方盒的容积 V 最大．

3. 如图，设圆柱的高为 h，底半径为 R，则表面积

$$S=2\pi Rh+2\pi R^2.$$



（第 3 题）

由 $V=\pi R^2 h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi R^2}$，因此

$$S(R)=2\pi R\,\frac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2,\ R>0.$$

令 $S'(R)=-\dfrac{2V}{R^2}+4\pi R=0$，解得 $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

当 $R\in\left(0,\ \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$时，$S'(R)<0$；当 $R\in\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}},\ +\infty\right)$时，$S'(R)>0$.

因此，$R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$是函数 $S(R)$的极小值点，也是最小值点．此时，$h=\dfrac{V}{\pi R^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2R$.

答：当罐高与底面直径相等时，所用材料最省．

4. 证明：由于 $f(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-a_i),$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

可知，$x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 是函数 $f(x)$的极小值点，也是最小值点．

这个结果说明，用 n 个数据的平均值$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 表示这个物体的长度是合理的，这就是最小二乘法的基本原理．

5. 设矩形的底宽为 x m，则半圆的半径为$\dfrac{x}{2}$ m，半圆的面积为$\dfrac{\pi x^2}{8}$ m^2，矩形的面积为 $a-\dfrac{\pi x^2}{8}$ m^2，矩形的另一边长为$\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{\pi x}{8}\right)$ m，因此铁丝的长为

$$l(x)=\frac{\pi x}{2}+x+\frac{2a}{x}-\frac{\pi x}{4}=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2a}{x},\ 0<x<\sqrt{\frac{8a}{\pi}}.$$

令 $l'(x)=1+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2a}{x^2}=0$，得 $x=\sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}}$（负值舍去）．

当 $x\in\left(0,\ \sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}}\right)$时，$l'(x)<0$；当 $x\in\left(\sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}},\ \sqrt{\dfrac{8a}{\pi}}\right)$时，$l'(x)>0$.

因此，$x=\sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}}$是函数 $l(x)$的极小值点，也是最小值点．所以，当底宽为$\sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}}$ m时，所用材料最省．

答：为使所用材料最省，底宽应为$\sqrt{\dfrac{8a}{4+\pi}}$ m.

6. 利润 L 等于收入 R 减去成本 C，而收入 R 等于产量乘价格．由此可得出利润 L 与产量 q 的函数关系式，再用导数求最大利润．

收入 $R=q\cdot p=q\left(25-\dfrac{1}{8}q\right)=25q-\dfrac{1}{8}q^2$，

利润 $L=R-C=\left(25q-\dfrac{1}{8}q^2\right)-(100+4q)$

$\quad=-\dfrac{1}{8}q^2+21q-100$，$0<q<200$.

$$L'=-\frac{1}{4}q+21.$$

令 $L'=0$，即 $-\frac{1}{4}q+21=0$，$q=84$.

当 $q\in(0,\ 84)$ 时，$L'>0$；当 $q\in(84,\ 200)$ 时，$L'<0$.

因此，$q=84$ 是函数 L 的极大值点，也是最大值点. 所以产量为 84 时，利润 L 最大.

答：产量为 84 时，利润 L 最大.

B 组

1. 设每个房间每天的定价为 x 元，那么宾馆利润

$$\begin{aligned}L(x)&=\left(50-\frac{x-180}{10}\right)(x-20)\\&=-\frac{1}{10}x^2+70x-1\,360,\ 180<x<680.\end{aligned}$$

令 $L'(x)=-\frac{1}{5}x+70=0$，解得 $x=350$.

因为 $L(x)$ 只有一个极值，所以 $x=350$ 为最大值点.

因此，当每个房间每天的定价为 350 元时，宾馆利润最大.

答：当每个房间每天的定价为 350 元时，宾馆利润最大.

2. 设销售价为 x 元/件时，利润

$$\begin{aligned}L(x)&=(x-a)\left(c+c\,\frac{b-x}{b}\times 4\right)\\&=c(x-a)\left(5-\frac{4}{b}x\right),\ a<x<\frac{5b}{4}.\end{aligned}$$

令 $L'(x)=-\frac{8c}{b}x+\frac{4ac+5bc}{b}=0$，解得 $x=\frac{4a+5b}{8}$.

当 $x\in\left(a,\ \frac{4a+5b}{8}\right)$ 时，$L'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{4a+5b}{8},\ \frac{5b}{4}\right)$ 时，$L'(x)<0$. 所以，销售价为 $\frac{4a+5b}{8}$ 元/件时，可获得最大利润.

答：销售价为 $\frac{4a+5b}{8}$ 元/件时，可获得最大利润.

实习作业　走进微积分

1. 实习作业的主要目的

“实习作业　走进微积分”属于“数学文化”内容. 目的是让学生自己收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

2. 实习作业的主要方式

实习作业的主要方式是，带着教科书上提出的问题，查阅资料，回答上述问题. 教科书列出了一些主要的、权威的参考书目；学生也可以借助互联网查阅相关的内容，比如在著名的搜索引擎“google”中输入“微积分”“牛顿”“莱布尼茨”等关键词进行搜索，最后将查阅的资料进行汇总，写出实习报告.

写出实习报告以后，要求以小组为单位进行交流，初步了解数学科学与人类社会发展的相互作用，

体会数学的科学价值、应用价值，开阔学生的视野，寻求数学进步的历史轨迹，提高学生的文化素养和创新意识.

3. 对实习报告的评价

学生递交实习报告后，教师应结合这部分内容，有意识地强调数学的科学价值和应用价值.

通过实习作业，教师可以考察学生在查阅文献、阅读资料、撰写报告以及合作交流中的表现，对于优秀的作品应当给予鼓励、展示和推荐.

4. 关于教科书上几个问题的说明

●微积分的研究对象和基本概念

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支科学. 微积分中的基本概念是函数、极限、导数、积分等，其中极限是微积分的基石.

●历史上对微积分创立和发展的一些重要评价

微积分的产生和发展被誉为“近代技术文明产生的关键事件之一，它引入了若干极其成功的、对以后许多数学的发展起决定性作用的思想”. 恩格斯更是称之为“17 世纪自然科学的三大发明之一”. 微积分的建立，无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展都产生了巨大的影响，充分显示了人类的数学知识对于人的认识发展和改造世界的能力的巨大促进作用. 微积分为创立许多新的学科提供了源泉. 微积分是人类智力的伟大结晶，它给出了一整套的科学方法，开创了科学的新纪元，并因此加强与加深了数学的作用. 恩格斯曾说：“在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了. 如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和唯一的功绩，那就是正是在这里.”

●历史上我国和古代欧洲有关微积分思想的一些代表性工作

微积分的产生具有悠久的历史渊源. 在中国，公元前 4 世纪，桓团、公孙龙等提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；公元 3 世纪刘徽的“割圆术”和公元 5～6 世纪祖冲之、祖暅对圆周率、面积和体积的研究(祖冲之在刘徽割圆术的基础上首先计算出了精确到小数点后 7 位的圆周率的近似值，他还相当精确地计算了球的体积)，都包含着微积分概念的萌芽. 在欧洲，公元前 3 世纪欧几里得(Euclid，活动于公元前 300 年左右)在《原本》中对不可约量及面积与体积的研究，公元前 3 世纪阿基米德对面积及体积的进一步研究(穷竭法)，也都包含着上述萌芽.

●欧洲文艺复兴到 17 世纪期间的社会、经济状况、科学发展、贸易、航运等情况，对数学提出了要求

欧洲文艺复兴之后，资本主义生产方式兴起，生产力有了较大的发展. 到了 16 世纪，由于航海、机械制造以及军事上的需要，运动的研究成了自然科学的中心议题. 于是在数学中开始研究各种变化过程中变化的量(变量)间的依赖关系，变量的引进，形成了数学中的转折点. 在伽利略等人的数学著作中，都包含着微积分的初步想法.

到了 17 世纪，生产的发展提出了许多技术上的新要求，而要实现技术要求必须有相应的科学知识，例如流体力学(与矿井的通风和排水有关)、机械力学等都有了突飞猛进的发展. 在资本主义社会的商品生产中，贸易活动占有重要地位，与此相关的海运事业迅速发展，向外扩张的军事需要，也促进了航海的发展. 航海需要精确而方便地确定位置(经纬度)、预报气象，天文学因而发展起来，对经纬度测量的需要使人们进行了这样一系列研究：(1) 对月亮与太阳及某一恒星距离的计算；(2) 对木星卫星蚀的观察；(3) 对月球穿越子午圈的观测；(4) 摆钟及其他航海计时在海上的应用等等. 由于这些研究，产生了近代力学、天文学等近代理论.

所有这些发展都对数学提出了新的要求，这些要求表现为一些亟待数学解决的问题，这些问题可以分为以下四种类型：

(1) 已知物体移动的距离能表示为时间的函数的公式 $s=s(t)$，求物体在任意时刻的速度 $v=v(t)$ 和加速度 $a=a(t)$；或者反过来，已知物体加速度能表示为时间的函数 $a=a(t)$，求物体在任意时刻的速度；或已知物体速度能表示为时间的函数 $v=v(t)$，求物体在任意时刻的移动距离. 上述问题如果对于匀速直线运动来考虑，当时的数学工具已经可以解决，但当时天文学、力学等涉及许多非匀速运动，大多数也不是直线运动，所以要求新的数学工具.

(2) 已知曲线求其切线. 这不仅是几何学的问题，而且也是许多其他科学问题的要求：物体作曲线运动时，在每一瞬间的速度方向是此曲线相应的点的切线的方向；在光学中对光的折射和反射的研究需要求出界面的法线方向，法线方向是由切线方向决定的.

(3) 已知函数求函数的极大值和极小值. 这与天文学和力学都有关，例如求行星运动的近日点和远日点，抛射体的最大射程和最大高度等问题，都可归结为这种类型的问题.

(4) 求曲线的长度. 这是以计算行星或曲线运动的物体走过的路程为背景的(图 3-5)；求曲线围成的图形的面积，以计算行星与太阳之间的线段扫过的面积为代表(图 3-5)；还有求物体的重心、求两个天体之间的引力(图 3-6)等问题.

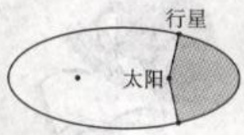


图 3-5

图 3-6

这些问题，都是 17 世纪时其他科学，尤其是天文学和力学及某些技术科学所提出的基本数学问题.

● 牛顿和莱布尼茨是微积分的主要创立者

到 17 世纪前叶，已经积累了许多关于微积分思想的成果，但微积分作为一门学科来发展，还是由于牛顿和莱布尼茨的杰出工作. 在他们之前，微积分的工作基本局限于一些具体问题的细节之中，还缺乏普遍性的规律.

在 17 世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨总结了诸多数学家的工作之后，分别独立建立了微积分学. 他们建立微积分的出发点都是直观无穷小量.

牛顿(I. Newton，1642—1727)，英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家. 牛顿在数学上最卓越的贡献是创建微积分. 17 世纪早期，数学家们已经建立起一系列求解无限小问题(诸如曲线的切线、曲率、极值，求运动的瞬时速度以及面积、体积、曲线长度以及物体重心的计算)的特殊方法. 牛顿超越前人的功绩在于将这些特殊的技巧归结为一般的算法，特别是确立了微分与积分的逆运算关系(微积分基本定理). 牛顿的微积分中有一个基本重要的概念“流数”，流数被定义为可借运动描述的连续量——流量(用 x，y，z，…表示)的变化率(速度)，并用在字母上加点来表示，如 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，…. 牛顿表述流数术的基本问题为：已知流量间的关系，求它们的流数间的关系，以及逆运算. 牛顿创立微积分有深刻的力学背景，他更多的是从运动变化的观点考虑问题，把力学问题归结为数学问题.

莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)，德国数学家、哲学家，和牛顿同为微积分学的创始人. 莱布尼茨终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法. 这种努力导致许多数学的发现，最突出的是微积分学. 莱布尼茨创立微积分主要是从几何学的角度考虑，他创建的微积分的符号(如 $\mathrm{d}x$，$\int$ 等)以及微分的基本法则，对以后微积分的发展有极大的影响.

微积分的产生和发展与力学、物理学和几何学的发展紧密相联，微积分的许多基本概念都有实际背景，并受实际需要的推动. 17 世纪牛顿和莱布尼茨分别独立地完成了微积分的创建工作，与此同时，力学和物理学也得到了发展. 牛顿和莱布尼茨的工作使得求导数和积分的互逆关系成为相当广泛

的一类函数的普遍规律. 他们有效地创立了微积分的基本定理和运算法则，从而使微积分能普遍应用于科学实践.

●微积分产生的历史意义

微积分的产生具有深远的历史意义. 一方面，它极大地推动了数学科学的发展，丰富了数学科学的思想宝库，随着微积分的理论基础逐步完善，以微积分为基础的数学分析科学得到空前发展，建立了多种数学分支，如微分方程、积分方程、复变函数、实变函数、泛函分析、微分几何、拓扑学、流形等. 另一方面，微积分在力学、天文学以及物理和其他科学技术中的运用，极大地促进了以上科学的发展.

●微积分产生说明了什么

微积分产生的时代背景和历史意义充分说明，数学来源于实践又反过来作用于实践；数学中普遍存在着对立统一、运动变化、相互联系、相互转化；数学可提供自然现象、社会系统的数学模型；数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分.

III 自我检测题

一、选择题

1. 质量为 5 kg 的物体按规律 $S=2t+3t^2$（S 的单位：cm，t 的单位：s）做直线运动，则物体受到的作用力为（　　）.

(A) 30 N　　(B) 6×10^{-5} N　　(C) 3×10^{-4} N　　(D) 6 N

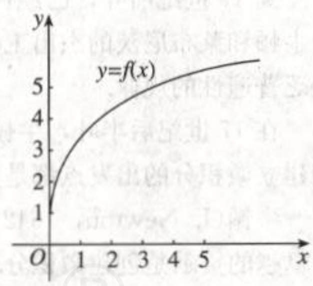
2. 函数 $f(x)$的图象如图所示，下列数值排序正确的是（　　）.

(A) $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

(B) $0<f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

(C) $0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

(D) $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$



(第 2 题)

3. 若函数 $f(x)=x^3-3bx+3b$ 在(0，1)内有极小值，则（　　）.

(A) $0<b<1$　　(B) $b<1$　　(C) $b>0$　　(D) $b<\frac{1}{2}$

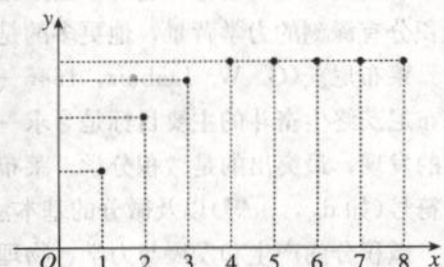
4. 函数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ 在[0，3]上的最大值和最小值分别是（　　）.

(A) 5，−15　　(B) 5，−4　　(C) −4，−15　　(D) 5，−16

二、填空题

5. 已知物体的运动方程是 $s=t^2+\frac{3}{t}$(t 的单位：s，s 的单位：m)，则物体在时刻 $t=4$ 时的速度 $v=$________，加速度 $a=$________.

6. 甲工厂八年来某种产品年产量与时间（单位：年）的函数关系如图所示. 现有下列四种说法：



(第 6 题)

①前三年该产品产量增长速度越来越快；

②前三年该产品产量增长速度越来越慢；

③第三年后该产品停止生产；

④第三年后该产品年产量保持不变.

其中说法正确的是________.

7. 函数 $f(x)=2x^3-6x^2+m$（m 为常数）在$[-2, 2]$上有最大值 3，那么此函数在$[-2, 2]$上的最小值为________.

8. 周长为 20 cm 的矩形绕一条边旋转成一个圆柱，则圆柱体积的最大值为________.

三、解答题

9. 假设 $g(x)=\sqrt{x}$，$f(x)=kx^2$，其中 k 为常数.

(1) 计算 g 的图象在点$(4, 2)$处的切线斜率.

(2) 求此切线方程.

(3) 如果函数 $f(x)$ 的图象经过点$(4, 2)$，计算 k 的值.

(4) 函数 $f(x)$ 的图象在哪一点与(2)中的切线相交？

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x=-1$ 时，$f(x)$的极大值为 7；当 $x=3$ 时，$f(x)$有极小值. 求：

(1) a，b，c 的值；

(2) 函数 $f(x)$的极小值.

11. 某厂生产某种产品 x 件的总成本 $c(x)=1\,200+\frac{2}{75}x^3$(万元)，已知产品单价的平方与产品件数 x 成反比，生产 100 件这样的产品单价为 50 万元，产量定为多少时总利润最大？

参考答案

一、选择题

1. C.　2. B.　3. A.　4. A.

二、填空题

5. $\frac{125}{16}$ m/s，$\frac{67}{32}$ m/s^2.

6. ①④.

7. -37.

8. $\frac{4\,000}{27}\pi$ cm^3.

三、解答题

9. (1) $\frac{1}{4}$；　(2) $y=\frac{1}{4}x+1$；　(3) $\frac{1}{8}$；　(4) $(4, 2)$，$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

10. (1) $a=-3$，$b=-9$，$c=2$；　(2) -25.

11. 当产量为 25 万件时，总利润最大.

Ⅳ 拓展资源

1. 变化率

西红柿在成熟的过程中，它的大小、含糖量等都会随时间变化；树木在成长过程中，它的高度、树干的直径都会随时间变化……这些变化有时快、有时慢. 描述变化快慢的量就是变化率.

变化率在描述各种变化规律过程中起着非常重要的作用，速度和加速度就是两个很好的例子. 变化率表示变化的快慢，不表示变化的大小. 速度大，加速度不一定大，比如匀速飞行的高空侦察机，尽管它的速度能够接近 1 000 m/s，但它的加速度为 0. 相反，速度小，加速度也可以很大. 比如枪筒里的子弹，在扣扳机火药刚刚爆发的时刻，尽管子弹的速度接近 0，但它的加速度可以达到 $5\times10^4\ \mathrm{m/s^2}$.

当然，生活中的变化率问题多种多样. 在数学上，差商就是平均变化率，导数就是瞬时变化率，利用数学工具，可以详尽地研究导数，继而解决现实中的变化率问题. 对于源于变化率问题的导数，既要体会变化率的思想，又要明确其中采用的数学方法，如逼近的思想方法、以直代曲等等.

2. 变化率问题示例

交流电路：电荷量对时间的导数为电流.

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

非均匀的物体：质量对长度(面积，体积)的导数为物体的线(面，体)密度.

3. 物理教科书中的速度知识

《普通高中课程标准实验教科书 物理 必修 1》第一章《运动的描述》中介绍了“运动快慢的描述——速度”. 相关内容如下.

平均速度和瞬时速度

一般说来，物体在某一时间间隔内，运动的快慢不一定是时时一样的，所以由 $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 求得的速度，表示的只是物体在时间间隔 Δt 内的平均快慢程度，称为平均速度.

显然，平均速度只能粗略地描述运动的快慢. 为了使描述精确些，可以把 Δt 取得小一些. 物体在从 t 到 $t+\Delta t$ 这样一个较小的时间间隔内，运动快慢的差异就小一些. Δt 越小，运动的描述就越精确. 可以想象，如果 Δt 非常非常小，就可以认为 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 表示的是物体在时刻 t 的速度，这个速度叫做瞬时速度.

复习参考题（第 110 页）解答

A 组

1. （1）3；　　（2）$y=-4$.

2. （1）$y'=\dfrac{2\sin x\cos x+2x}{\cos^2 x}$；

（2）$y'=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}$.

3. $F'=-\frac{2GMm}{r^3}$.

4. (1) $f'(t)<0$. 因为红茶的温度在下降.

(2) $f'(3)=-4$ 表明在 3 ℃附近时，红茶温度约以 4 ℃/min 的速率下降.

图略.

5. 因为 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，所以 $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

当 $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}>0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$单调递增；

当 $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$单调递减.

6. 因为 $f(x)=x^2+px+q$，所以 $f'(x)=2x+p$.

当 $f'(x)=2x+p=0$，即 $x=-\frac{p}{2}=1$ 时，$f(x)$有最小值.

由$-\frac{p}{2}=1$，得 $p=-2$. 又因为 $f(1)=1-2+q=4$，所以 $q=5$.

7. 因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$，所以

$$f'(x)=3x^2-4cx+c^2=(3x-c)(x-c).$$

当 $f'(x)=0$，即 $x=\frac{c}{3}$，或 $x=c$ 时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 可能有极值.

由题意当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值，所以 $c>0$. 由于

x	$\left(-\infty, \frac{c}{3}\right)$	$\frac{c}{3}$	$\left(\frac{c}{3}, c\right)$	c	$(c, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以，当 $x=\frac{c}{3}$时，函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 有极大值. 此时，$\frac{c}{3}=2$，$c=6$.

8. 设当点 A 的坐标为$(a, 0)$时，$\triangle AOB$ 的面积最小.

因为直线 AB 过点$A(a, 0)$，$P(1, 1)$，所以直线 AB 的方程为

$$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-a}{1-a},$$

即

$$y=\frac{1}{1-a}(x-a).$$

当 $x=0$ 时，$y=\frac{a}{a-1}$，即点 B 的坐标是$\left(0, \frac{a}{a-1}\right)$.

因此，$\triangle AOB$ 的面积

$$S_{\triangle AOB}=S(a)=\frac{1}{2}a\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{2(a-1)}.$$

令 $S'(a)=0$，即 $S'(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}=0$.

当 $a=0$，或 $a=2$ 时，$S'(a)=0$，$a=0$ 不合题意舍去. 由于

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以，当 $a=2$，即直线 AB 的倾斜角为 135° 时，$\triangle AOB$ 的面积最小，最小面积为 2.

9. D.

10. 设底面一边的长为 x m，另一边的长为 $(x+0.5)$ m. 因为钢条长为 14.8 m，所以长方体容器的高为

$$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=\frac{12.8-8x}{4}=3.2-2x.$$

设容器的容积为 V，则

$$V=V(x)=x(x+0.5)(3.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x.$$

令 $V'(x)=0$，即

$$-6x^2+4.4x+1.6=0，0<x<1.6.$$

所以，$x=-\dfrac{4}{15}$（舍去），或 $x=1$.

$x=1$ 是函数 $V(x)$ 在 $(0, 1.6)$ 内唯一极值点，且为极大值点，从而是最大值点.

答：当长方体容器的高为 1.2 m 时，容器最大，最大容积为 1.8 m^3.

11. 设旅游团人数为 $100+x$ 时，旅行社费用为

$$y=f(x)=(100+x)(1\,000-5x)=-5x^2+500x+100\,000 \ (0\leqslant x\leqslant 80，x\in \mathbf{N}).$$

令 $f'(x)=0$，即 $-10x+500=0$，$x=50$.

又 $f(0)=100\,000$，$f(80)=108\,000$，$f(50)=112\,500$，所以，$x=50$ 是函数 $f(x)$ 的最大值点.

答：当旅游团人数为 150 时，可使旅行社收费最多.

12. 设打印纸的长为 x cm 时，可使其打印面积最大.

因为打印纸的面积为 623.7，长为 x，所以宽为 $\dfrac{623.7}{x}$，打印面积

$$S(x)=(x-2\times 2.54)\left(\frac{623.7}{x}-2\times 3.17\right)=655.907\,2-6.34x-\frac{3\,168.396}{x^2}，5.08<x<98.38.$$

令 $S'(x)=0$，即

$$6.34-\frac{3\,168.396}{x^2}=0，x\approx 22.36 \ (负值舍去)，\frac{623.7}{22.36}\approx 27.89.$$

$x=22.36$ 是函数 $S(x)$ 在 $(5.08, 98.38)$ 内唯一极值点，且为极大值，从而是最大值点.

答：打印纸的长、宽分别约为 27.89 cm，22.36 cm 时，可使其打印面积最大.

13. 设每年养 q 头猪时，总利润为 y 元. 则

$$\begin{aligned} y&=R(q)-20\,000-100q \\ &=-\frac{1}{2}q^2+300q-20\,000 \ (0<q\leqslant 400，q\in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

令 $y'=0$，即 $-q+300=0$，$q=300$.

当 $q=300$ 时，$y=25\,000$；当 $q=400$ 时，$y=20\,000$.

$q=300$ 是函数 $y(p)$ 在 $(0, 400]$ 内唯一极值点，且为极大值点，从而是最大值点.

答：每年养 300 头猪时可使总利润最大，最大总利润为 25 000 元.

B 组

1. (1) $b'(t)=10^4-2\times 10^3 t$. 所以，细菌数量在 $t=5$ 与 $t=10$ 时的瞬时变化率分别为 0 和 -10^4.

(2) 当 $0\leqslant t<5$ 时，细菌在增加；当 $5<t<5+5\sqrt{5}$时，细菌在减少.

2. 设扇形的半径为 r，中心角为 α 弧度时，扇形的面积为 S.

因为 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$，$l-2r=\alpha r$，所以 $\alpha=\frac{l}{r}-2$.

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}-2\right)r^2=\frac{1}{2}(lr-2r^2),\ 0<r<\frac{l}{2}.$$

令 $S'=0$，即 $l-4r=0$，$r=\frac{l}{4}$，此时 α 为 2 弧度.

$r=\frac{l}{4}$是函数 $S(r)$在$\left(0,\ \frac{l}{2}\right)$内唯一极值点，且是极大值点，从而是最大值点.

答：扇形的半径为$\frac{l}{4}$、中心角为 2 弧度时，扇形的面积最大.

3. 设圆锥的底面半径为 r，高为 h，体积为 V，那么 $r^2+h^2=R^2$.

因此，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h=\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^3$，$0<h<R$.

令 $V'=\frac{1}{3}\pi R^2-\pi h^2$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

$h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 是函数 $V(h)$在$(0,\ R)$内唯一极值点，且是极大值点，从而是最大值点.

把 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 代入 $r^2+h^2=R^2$，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

由 $R\alpha=2\pi r$，得 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

所以圆心角为 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，容积最大.

答：扇形的圆心角 $\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，容器的容积最大.

4. 由于 $80=k\times10^2$，所以 $k=\frac{4}{5}$.

设船速为 x km/h 时，总费用为 y，则

$$\begin{aligned}y&=\frac{4}{5}x^2\times\frac{20}{x}+\frac{20}{x}\times480\\&=16x+\frac{9\ 600}{x},\ x>0.\end{aligned}$$

令 $y'=0$，即 $16-\frac{9\ 600}{x^2}=0$，$x\approx24$.

$x=24$ 是函数 y 在$(0,\ +\infty)$上唯一极值点，且是极小值点，从而是最小值点.

当 $x=24$ 时，$16\times24+\frac{9\ 600}{24}=784$(元). 于是 $780\div\left(\frac{20}{24}\right)=940.8$ (元/时)

答：船速约为 24 km/h 时，总费用最少，此时每小时费用约为 941 元.

5. 设汽车以 x km/h 行驶时，行车的总费用

$$y=\frac{390}{x}\left(3+\frac{x^2}{360}\right)+\frac{130}{x}\times14,\ 50\leqslant x\leqslant100.$$

令 $y'=0$，解得 $x\approx53$，$y\approx114$；当 $x=50$ 时，$y\approx114$；当 $x=100$ 时，$y\approx138$.

因此，当 $x=53$ 时，行车总费用最少.

答：最经济的车速约为 53 km/h；如果不考虑其他费用，这次行车的总费用约是 114 元.