普通高中课程标准实验教科书

# 数学 选修 4-9

## 风险与决策

# 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4-9风险与决策（A版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2009.5（2019.1重印）
ISBN 978-7-107-21929-0

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①人… ②课… Ⅲ. ①中学数学课–高中–教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 035573 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-9 风险与决策 A版 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 北京天宇星印刷厂
版 次 2009 年 5 月第 1 版
印 次 2019 年 1 月第 7 次印刷
开 本 890 毫米 × 1240 毫米 1/16
印 张 3.5
字 数 76 千字
定 价 8.60元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

编　　者：李　勇　张淑梅
责任编辑：张唯一
美术编辑：郑文娟
封面设计：李宏庆

# 中学数学概观

## ——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修系列 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

**集合**　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

**统计**　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想等．

**概率**　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等）相类似，性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

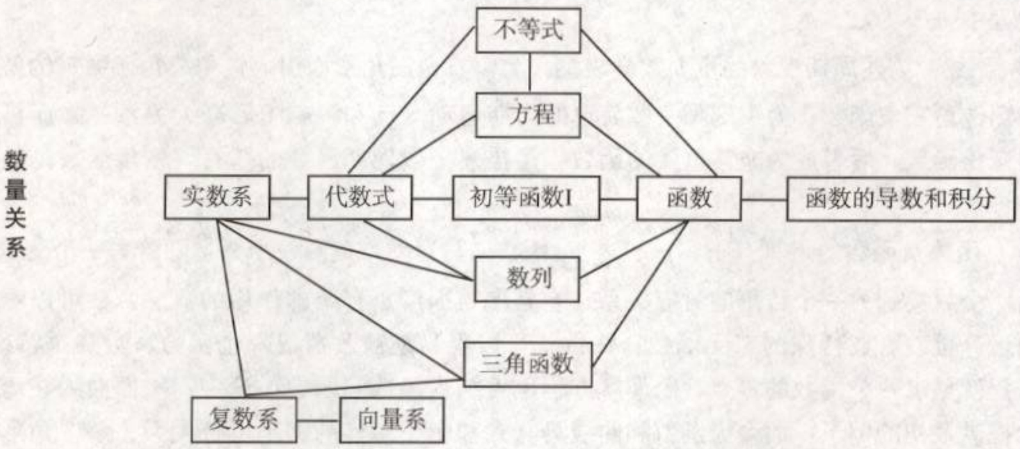
1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

**算法**　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

**“数量关系”**

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：




**实数系** 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

**复数系** 复数及其运算. 复数系由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，其原因是：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 $n$ 次多项式至少有一个复数根，其中 $n$ 为正整数).

**向量系** 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 $(x, y)$，而空间中向量的坐标是三实数组 $(x, y, z)$. 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})$，而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段、位移、力等).

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

**代数系** 用文字代表数，我们有了变量 $a$，$b$，$c$，$x$，$y$，$z$ 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

**方程** 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

**不等式** 把方程中的“＝”换成实数系所特有的“＞”（或“＜”）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 $x$ 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”. “＞”的性质比“＝”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式.

**初等函数I** 令变量 $y$ 等于含变量 $x$ 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 $x$ 的函数 $y$. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

**数列** 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

**三角函数** 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

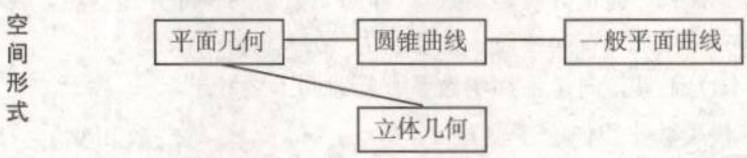
**函数** 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度、函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

**函数的导数和积分** 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

**“空间形式”**

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：




**平面几何** 讨论点、直线、直线的平行和垂直、三角形、圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

**圆锥曲线** 在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

**立体几何** 讨论线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

**一般平面曲线** 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看 三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 $a$，$b$ 及其夹角 $C$，依边角边定理，第三边 $c$ 完全确定，因而有函数 $c=f(a,\ b,\ C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

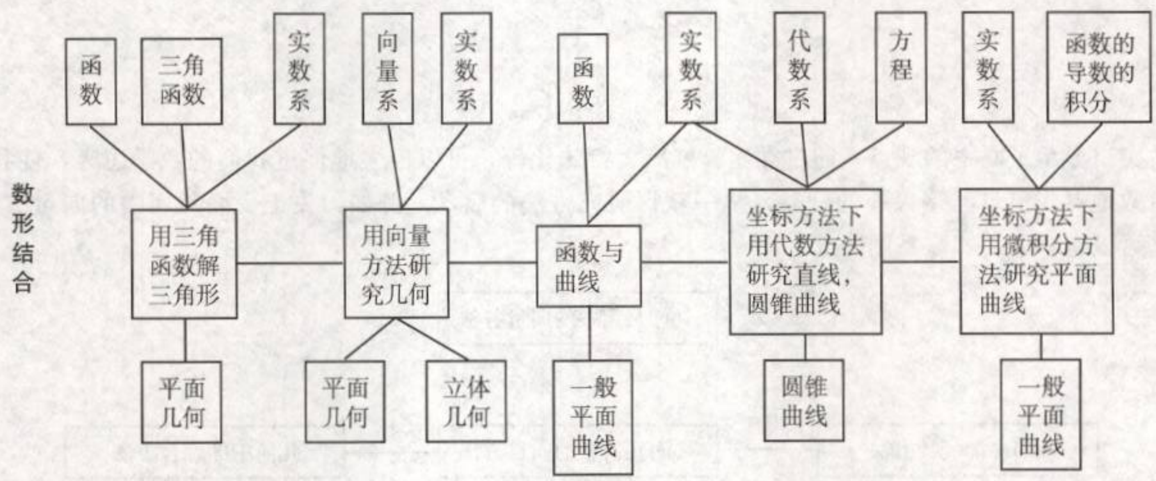
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标）、代数式、方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数、代数式、方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：




最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：用三角函数解三角形，直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来，一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来，等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

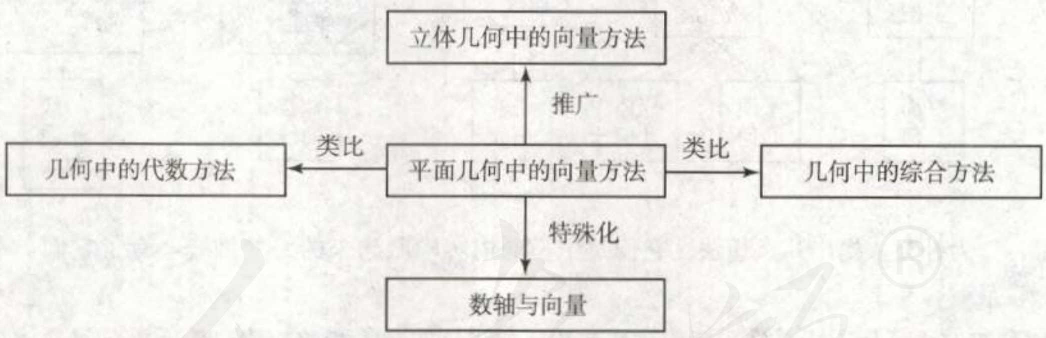
5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法，等等.

6. 相等的定义处处都有．我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的．例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度和相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的．

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据．在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理．这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体．如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律；等等．

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：


其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示．例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：




这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考．例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题．

# 说明

人教版普通高中课程标准数学实验教材（A 版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A 版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等，具有如下特点：

**1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．**

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中的数学力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情．

**2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．**

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

提问是创新的开始．“看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神．

**3．“思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括．**

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”．

**4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.**

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想. 包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

（1）课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性.

（2）内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络.

（3）课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图与教学建议. 主要包括：本讲知识结构、教学重点与难点、编写意图与教学建议等.

（1）本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学

习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述.

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点指学生在学习过程中可能遇到的困难和问题.

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

(4) 教学设计案例选取了一些具有典型性、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

①教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析.

②教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程.

③重点和难点指本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难.

④教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

(5) 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

(6) 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

3. 自我检测题提供了本专题的自我检测题目，目的是检测学生掌握本专题知识内容的情况. 教学时，教师可直接使用.

本书是选修系列 4-9《风险与决策》的教师教学用书，它包括了风险与决策的基本概念、决策树方法、风险型决策的敏感性分析、马尔可夫型决策简介等四讲内容. 全书共 18 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

| | |
|---|---|
| 第一讲　风险与决策的基本概念 | 7 课时 |
| 第二讲　决策树方法 | 4 课时 |
| 第三讲　风险型决策的敏感性分析 | 2 课时 |
| 第四讲　马尔可夫型决策简介 | 3 课时 |
| 学习总结报告 | 2 课时 |

由于第四讲中“长期准则下的马尔可夫型决策理论”需要较多的数学知识，教科书把这一小节作为选学内容，仅供基础好的学生参考学习. 在本书“教科书分析”部分略去该小节相应的内容.

参加本书编写的有李勇、张淑梅，责任编辑张唯一.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

# 目录

# I 总体设计

## 一、课程与学习目标

### 1. 课程目标

在日常生活和经济活动中，例如，个人的采购、求职、投资，工商企业的生产或经营的方案，直至部门和全国的某一事业的计划，经常需要对事物的进展情况做出决策，以便用最有利的方式采取行动. 由于事物的进展情况和信息往往受随机因素的影响，不能确切预料，决策往往带有风险. 在这种情况下，决策者通常有很多决策方案可以采用，而统计决策方法可以提供最优行动方案，大大减少由于盲目决定而导致的损失. 因此，统计决策方法和统计决策分析将会在社会的发展和进步中发挥越来越大的作用.

在现代社会中，公民应该具有合理决策的能力. 因此，在中学阶段学习一些简单的统计决策知识和方法，形成初步的决策意识是很有必要的.

学生已在《选修 2-3》中接触风险与决策的思想，本专题通过引进必要的术语将这种思想更加有条理地表达出来，帮助学生更好地理解这种思想，并能将其应用到现实生活中，为进一步学习风险型决策理论打下初步的基础.

### 2. 学习目标

第一讲　风险与决策的基本概念

(1) 通过案例直观理解行动方案和决策的概念，认识风险的随机性，体会不同的行动方案产生不同的风险，理解通过风险进行决策的必要性和重要性.

(2) 理解损失函数、损失矩阵、收益函数、收益矩阵的概念；从概率统计的角度认识风险和收益，掌握决策的准则——最小风险准则和最大收益准则，并理解最优决策的含义.

第二讲　决策树方法

会用决策树表示需要决策问题的有关信息，能用反推决策树的方法进行决策.

第三讲　风险决策的敏感性分析

理解风险决策敏感性分析的意义，会进行决策的敏感性分析.

第四讲　马尔可夫型决策简介

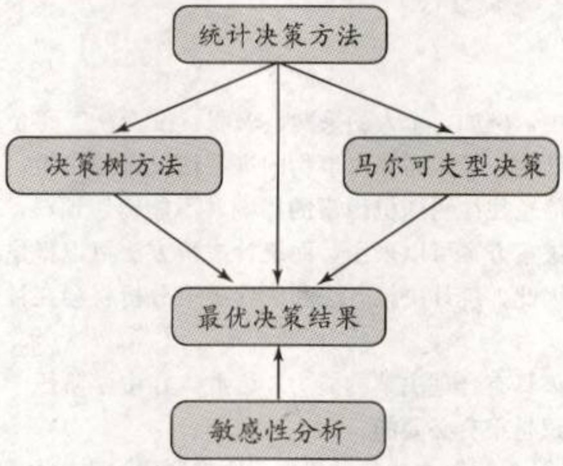
(1) 了解马尔可夫性、马尔可夫链、转移概率和转移概率矩阵等概念.

(2) 了解马尔可夫型决策的基本思想，体会不同决策准则对最优决策的影响，能根据实际问题的需要选择决策准则.

## 二、内容安排

**1. 本专题知识结构**

本专题第一讲和第三讲的知识构成了风险与决策领域的基本知识框架；第二讲的内容是将基于风险或收益的决策过程通过树状图来表示；第四讲则是简单介绍风险与决策思想在一种特殊背景下的应用，即未来状态的变化具有马尔可夫性的情况下的风险与决策问题．本专题四讲的知识结构框图如下：




在上面的知识结构框图中，“统计决策方法”是第一讲所介绍的内容，包括了风险型决策的基本概念和基本思想，其他各种风险型决策方法都建立在这些基本概念和基本思想的基础之上；“决策树方法”是第二讲所介绍的内容，包括利用决策树表示风险型决策的三个基本要素，通过反推决策树进行决策的方法；“敏感性分析”是第三讲所介绍的内容，主要是讨论状态分布列的变化对最优决策结果的影响；“马尔可夫型决策”是第四讲所介绍的内容，包括马尔可夫链的基本概念，马尔可夫型决策的基本思想．

**2. 对内容安排的说明**

风险与决策方法以概率统计知识为基础，该专题的目的是培养学生的决策能力，巩固学生已学过的概率统计知识，并使学生进一步体会概率统计知识的应用价值．

为达到上述目的，教科书通过具体案例介绍风险与决策的基本概念和方法，使学生了解方法的应用背景，以恰当地利用风险与决策方法解决实际问题．

在引入风险与决策的基本概念过程中，教科书始终强调任何行动方案的未来损失或未来收益都是随机变量，其目的是使学生认识到应该用概率统计的知识进行决策．

为使学生明确风险与决策问题的基本要素，教科书通过案例介绍了行动方案、状态分布列和损失函数的概念．为简化各个行动方案的平均损失的计算表达式，引入了矩阵与向量的乘法运算和损失矩阵的概念．

损失和收益是相互对应的两个概念，都可以描述行动方案执行的结果．通过损失或收益进行决策都是在实际中常用的决策方法，因此教科书中对这两种方法都进行了介绍．但是因为它们在方法上完全类似，所以为了避免重复，教科书在处理上偏重于用损失进行决策的方法．

决策树方法可以直观地表示决策的全过程，也是人们在实际中乐于使用的方法，因此我们在教科书中简要介绍了决策树方法．

当确定了风险函数或收益函数之后，各个行动方案的风险或平均收益就完全由状态分布列决定，

从而最优决策也就完全由状态分布列决定. 而在实际应用中，精确的状态分布列是不可知的，只能通过某种方法来估计它. 例如，可以用频率来估计状态分布列. 估计必然会有误差，这种误差对于最优决策的影响就成为人们关心的问题，这就产生了风险型决策的敏感性分析. 教科书根据上述思路介绍敏感性分析，主要目的是引导学生体会理论与实际应用的差别，理解风险决策敏感性分析的意义，并能够进行敏感性分析.

决策的准则：选择风险最小或平均收益最大的行动方案. 在实际应用中，更常见的情形是行动方案所带来的风险或平均收益会在一段时间内持续变化，这就需要我们用这段时间内的总风险或总平均收益来评价各个行动方案. 通常这种变化源于状态分布列的变化，因此了解状态分布列的随机变化规律可以帮助我们进行更科学的决策. 教科书介绍马尔可夫型决策方法的目的是使学生更好地理解风险与决策的原理，演示如何根据实际背景灵活运用风险与决策的原理和其他数学知识进行决策.

在实际应用中，经常利用马尔可夫链的平稳分布进行决策. 考虑到完全理解平稳分布需要较多的数学知识，教科书把长期准则下的马尔可夫型决策方法作为选学内容，仅供基础好的学生参考学习.

## 三、课时分配

本专题教学时间约为 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

| | |
|---|---|
| **第一讲　风险与决策的基本概念** | **7 课时** |
| 一　风险与决策的关系 | 1 课时 |
| 二　风险与决策的基本概念 | 6 课时 |
| **第二讲　决策树方法** | **4 课时** |
| **第三讲　风险型决策的敏感性分析** | **2 课时** |
| **第四讲　马尔可夫型决策简介** | **3 课时** |
| 一　马尔可夫链简介 | 2 课时 |
| 二　马尔可夫型决策简介 | 1 课时 |
| **学习总结报告** | **2 学时** |

# II 教科书分析

## 引　言

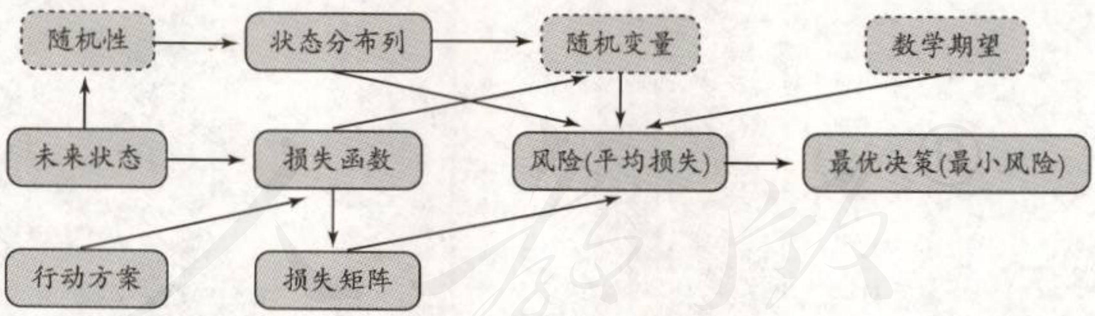
引言给出了整个专题的一个简要介绍，主要目的是向学生展示风险与决策的广泛应用价值，引发学生的学习兴趣；其次是简单概述各讲的内容．

## 第一讲　风险与决策的基本概念

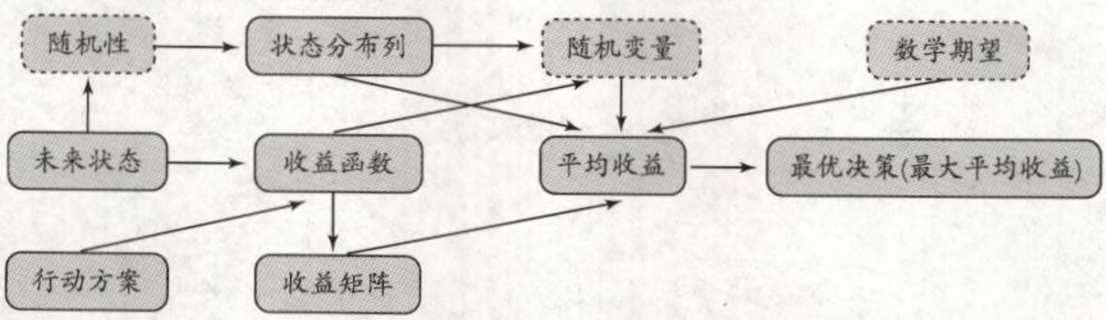
### 一、本讲知识结构

本讲需要《选修 2-3》中的随机变量的相关知识作为基础．在下面的知识结构框图中，用虚线框表示在《选修 2-3》中的相关知识，实线框表示新的知识．本讲涉及风险和平均收益两个指标．风险也称为平均损失，它是和平均收益相对应的一个概念，在选取最优决策时，风险和平均收益是等价的．

风险与决策的知识结构框图如下：




平均收益与决策的知识结构框图如下：



## 二、教学重点与难点

重点：

1. 理解风险决策的必要性和重要性；
2. 了解未来状态的随机性，理解状态分布列的概念；
3. 理解损益函数和损益矩阵，以及它们的随机性特征；
4. 初步掌握风险、平均收益的计算方法；
5. 理解最优决策的意义.

难点：

1. 理解损失函数和收益函数的随机性特征；
2. 理解最优决策的意义.

## 三、编写意图与教学建议

风险与决策过程实际上是利用概率统计知识进行决策的过程，学生对此并不陌生. 事实上，在《选修 2-3》中所介绍的利用数学期望比较防洪方案的例子（第 2.3.1 节中的例 3），就是一个典型的风险与决策的案例. 本讲是将这类案例的共性提取出来，形成具有普遍指导意义的、通过风险或平均收益进行决策的方法，使学生对风险与决策模型形成初步认识.

在利用风险或平均收益进行决策的过程中，完全可以避免使用矩阵的知识. 但在实际应用中，人们常用矩阵的乘法来表示各个行动方案的风险的计算过程，还用向量表示所有不同行动方案的风险或平均收益. 因此，有必要使学生了解通过损失矩阵和状态分布列进行决策的方法. 但在《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称“课标”）中，矩阵的知识安排在选修系列 4-2《矩阵与变换》中，不能保证所有参加本专题学习的学生都选修了它. 为使学生更好地理解利用损失矩阵进行决策，教科书在附录中简要介绍了矩阵、矩阵的加法和乘法的概念，教师在教学过程中可视学生的情况灵活处理这部分知识.

### （一）风险与决策的关系

教科书通过对几个不同实际背景的决策问题的分析，引导学生体会风险与决策的特点，归纳出这类问题的本质特征. 然后再通过一个具体的案例的分析，使学生初步体会风险与决策的思想.

#### 1. “上学是否带雨具”问题的教学建议

这是一个学生在生活中经常遇到的问题. 教科书选用类似这样贴近学生生活的问题背景，一是问题背景学生容易理解，二是让学生体会决策问题广泛存在于我们生活中.

教学中，可以先提出问题，让学生稍加思考，然后通过提问的方式让学生阐述自己的结论及得出结论的依据，引导学生体会无论是否带雨具，其结果都会有损失，导致这种损失的原因是随机性（是否降水）.

#### 2. “是否提前预订火车票”问题的教学建议

这个问题和“上学是否带雨具”问题背景不同，解答思路本质上相同. 这个决策问题的背景更加隐晦，没有直接给出影响临时买票结果的随机因素. 教科书提出这个问题的用意也是让学生体会决策

问题的广泛性.

教学中，可以采取类似问题1的处理方式，先提出问题让学生思考，然后以提问的方式引导学生体会无论是否预定火车票，都会产生某种损失，导致损失的原因是随机性（买火车票的人数）.

#### 3. “选择产品”问题的教学建议

这个决策问题的背景换成了商品选择，用意是让学生进一步体会决策问题的广泛性.

教学中，为节省时间，可以通过教师讲解分析的方式，使学生认识到无论是买A箱的产品还是买B箱的产品，都会产生损失，导致损失的原因是随机性（箱中的产品是否为合格品）. 另外，教学中，也可以将此问题中的产品具体化，如电视机、电冰箱等.

#### 4. 决策问题“共同特征”的教学建议

教科书通过决策问题共同特征的提取，使学生理解决策问题的本质是未来状态的随机性，为后面用随机变量的数学期望（均值）解决决策问题的合理性作铺垫.

教学中，可以通过教师总结归纳的方式向学生介绍决策问题的共同特征：

(1) 需要在多个方案中选择一个方案作为执行方案. 如问题1是要在两个方案“带雨具”和“不带雨具”中选择一个执行方案；问题2是要在两个方案“预订火车票”和“不预定火车票”中选择一个执行方案；问题3是要在两个方案“买A箱产品”和“买B箱产品”中选择一个执行方案.

(2) 任何方案的执行结果都可能带来损失，导致损失的原因是未来状态具有随机性. 如问题1中导致损失的原因是“降水”的随机性；问题2中导致损失的原因是“买火车票的人数”的随机性；问题3中导致损失的原因是“箱中产品质量”的随机性.

#### 5. 案例1的教学建议

如果认识到决策问题的本质是未来状态随机性，就自然会想到用概率统计知识来解答决策问题. 案例1正是在这种背景下提出的. 它的作用有：第一，复习已学过的有关概率统计知识；第二，向学生展示统计决策的原理与决策结果合理性的直观解释；第三，梳理通过损失进行决策的过程，为建立风险与决策基本概念和原理作铺垫.

本案例的教学应该紧扣决策问题的背景特征，分析其中的行动方案有哪些，可能出现的未来状态是什么，未来状态是否具有随机性，然后把这个案例归结为风险与决策问题.

在接下来的教学过程中可以先分析执行“行动一”的损失情况，得到此时的损失为随机变量，引导学生发现这个随机变量的分布列. 然后指出执行“行动二”的损失也是随机变量，给出这个随机变量的分布列. 接着向学生说明现在问题转化为两个表示损失的随机变量的比较问题，并通过问题“如何比较两个随机变量（损失）的大小”引导学生复习随机变量的数学期望（均值）的概念，进而通过平均损失（风险）的比较得到最优决策的结果.

另外，可以通过问题“该同学执行行动方案二后的真实损失一定最小吗?”引导学生体会“随机变量重复观测值的算术平均接近于数学期望（均值）”这一结论的应用价值，进而正确理解决策结论：不能保证这名同学在一次独立实验后的损失最小，但可以保证很多名同学独立完成实验后的总损失最小.

### （二）风险与决策的基本概念

既然决策问题是现实生活中常见的问题，就要对其进行深入地研究与讨论. 从研究和应用的角度出发有必要提出一些基本概念以简化决策问题的描述，便于表达与交流.

教科书在介绍决策问题的背景和基本原理后，以案例1为背景，介绍风险与决策的基本概念. 损

失和收益是相互对应的两个概念，可以通过损失进行决策，也可通过收益进行决策. 教科书通过案例2介绍利用平均收益进行决策的方法. 为使学生更好地掌握隐含在案例中风险型决策的方法，教科书通过总结三个案例的共同特点，提出了风险型决策问题的三个要素，给出解决一般决策问题的六个步骤.

### 1. “风险（平均损失）”的教学建议

这一小节主要是向学生介绍损失函数、状态分布列、风险（平均损失）的概念，以及通过风险选取最优决策的准则——风险最小准则. 这里的概念都是以案例1为背景引出，学生不难理解.

教学中应该引导学生注意：这里关心的是各个行动方案的损失变化情况，即对于给定的行动方案 $d$，关心损失函数 $l(d, h)$随着状态 $h$ 的改变而变化的情况. 教学中注意不要把 $l(d, h)$处理成抽象的二元函数，而是把它处理成一元的 $h$（代表抽象的状态，可以不是实数）的函数，不同的 $d$ 代表了不同的方案所对应的损失函数.

状态的随机性和损失函数的构造导致不同行动方案的损失成为不同的随机变量，而决策过程等价于这些表示损失的随机变量的比较过程，因此可以通过数学期望（均值）来比较这些随机变量的大小.

### 2. “平均收益”的教学建议

损失和收益是相互对应的两个概念，可以用收益描述损失，也可以用损失来描述收益. 例如损失5元钱等价于收益－5元钱；收益10 L汽油等价于损失－10 L汽油. 在实际应用中，有的容易确定行动方案的损失情况，有的则容易确定行动方案的收益情况，因此有必要让学生了解通过收益进行决策的方法. 了解风险与决策的基本原理之后，通过类比很容易理解通过平均收益进行决策的原理.

教科书通过案例2介绍利用收益进行决策的基本原理与基本概念. 教学中，可以先通过平均损失来解决此案例，然后向学生指出：这个案例直接给出的是收益，如果能通过收益直接进行决策，就能避免确定损失函数的过程，从而简化案例2的决策过程. 通过问题“损失和收益的关系是什么？能够直接利用收益进行决策吗?”引导学生模仿风险与决策的过程完成直接利用收益进行决策的任务，并在这个过程中归纳出收益函数、益损函数的概念.

### 3. 第7页第2个“思考”的教学建议

如果在教学中先用平均损失解决案例2，这个“思考”就应改为“本例的收益函数应如何定义?”. 如果采用教科书中案例2的解答顺序，就不用改思考问题.

对于案例2中损失函数的定义，学生可能有不同的答案，因为其答案并不唯一. 因此教学中要避免争论哪一个为正确的损失函数，而把注意力集中在确定损失的方法是否合理.

由损失和收益的对应关系知道：最简单的定义损失的方法是收益值改变符号. 教科书上没用这种最简单的由收益确定损失的方法，其目的是使损失的定义在案例2的实际背景下更容易理解.

一般地，若采用行动方案 $d$ 后可能出现的所有状态为 $h_1$，$h_2$，…，$h_m$，相应于 $h_i$ 的收益值为 $q(d, h_i)$，则可以任意取定实数 $c_1$，$c_2$，…，$c_m$，定义行动方案 $d$ 的损失函数

$$l(d, h_i)=c_i-q(d, h_i),\ i=1, 2, \cdots, m.$$

可以证明根据这样定义的损失函数得到的最小风险决策结果和实数 $c_1$，$c_2$，…，$c_m$ 的选择无关，都为最大平均收益决策. 类似地，若采用方案 $d$ 后相应于 $h_i$ 的损失值为 $l(d, h_i)$，则可以任意取定实数 $b_1$，$b_2$，…，$b_m$，定义行动方案 $d$ 的收益函数

$$q(d, h_i)=b_i-l(d, h_i),\ i=1, 2, \cdots, m.$$

可以证明根据这样定义的收益函数得到的最大平均收益决策结果和实数 $b_1$，$b_2$，…，$b_m$ 的选择无关，

都为最小风险决策.

4. “损益矩阵”的教学建议

教科书引入损益矩阵的目的是利用矩阵简化各个行动方案的损失、收益的表示，利用矩阵（向量）的乘法简单直观表示平均损失或平均收益的计算过程，进而能简单明了地用数学式表示整个决策过程.

教学中可以通过简单的实例介绍 2（或 3）维的行向量与 2（或 3）行的矩阵的乘法计算公式，让学生认识到可以利用这种乘法简化各个行动方案平均损失或平均收益的表示，从而自然地引出损失矩阵、收益矩阵、损益矩阵的概念.

教学中还要引导学生用行向量表示状态分布列，这样就可以用行向量与矩阵的乘法简化平均损失或平均收益的计算过程. 教学中还可以进一步向学生指出：在实际应用中，人们更愿意借助于损益矩阵解答决策问题.

5. 案例 3 的教学建议

教科书在这里借助于损失矩阵重新解答《选修 2-3》中第 2.3.1 节的例 3，目的是使学生体会到风险与决策的思想并不陌生，这种方法实际上是随机变量的数学期望（均值）的一种应用；同时，也向学生演示如何利用矩阵的工具解答决策问题.

为使学生容易理解此案例解答的思维过程，教科书在这里写得比较详细. 教学中，可以仅用板书书写必要的步骤，为学生提供一个用矩阵简要表示决策过程的示范.

在完成案例的解答之后，还可以通过提问的方式进一步加深学生对于最优决策内涵的正确理解.

6. “风险型决策”的教学建议

为使学生更好地理解风险型决策的概念，教科书总结前三个案例的共性，总结出表示风险型决策问题的三个要素，并给出一般决策过程的步骤.

在介绍状态及其分布列要素时，应向学生说明在某些情况下状态的分布列也可能和行动方案有关系，为下面的案例 4 作铺垫.

在介绍损益函数要素时，可以向学生说明：即使在同一问题背景之下，对于损失或收益含义的理解不同，会定义出不同的损益函数，从而导致不同的决策结果.

7. 案例 4 的教学建议

教科书通过案例 4 来说明损失函数在决策过程中的作用，使学生从更深的层次理解最优决策内涵.

在案例 4 中，容易确定所有的行动方案和未来出现的状态，按教科书所说的“自然的想法”也不难定义损失函数. 但与前三个案例不同，这里的状态分布列随行动方案的改变而改变. 教学中，可以通过问题“状态分布列是什么?”引导学生发现这里的不同，从而能够正确地计算两个行动方案的风险. 然后再指出，一般情况下，状态分布列可随着行动方案的改变而改变，从而导致损失或收益随机变量的分布列随行动方案的改变而改变，但风险和平均收益分别是损失和收益的数学期望的本质不变.

在案例 4 的讨论过程中，在损失函数

$$l(d_1,\ h)=\begin{cases}0, & h=h_1,\\ 120, & h=h_2,\end{cases}$$

$$l(d_2,\ h)=\begin{cases}0, & h=h_1,\\ 60, & h=h_2,\end{cases}$$

下得到最优行动方案 $d_1$ 后，可以通过问题“若两个箱中正品的质量完全相同，你会购买哪箱产品?”

强调问题中的“质量完全相同”，引导学生发现上述损失函数的缺点，从而对于行动方案 $d_1$ 的损失函数进行修正，提出更合理的损失函数

$$l(d_1,\ h)=\begin{cases}60, & h=h_1, \\ 120, & h=h_2,\end{cases}$$

进而得到更为合理的最优决策 $d_2$.

进一步，还可以通过问题“若 A 箱中的正品的使用寿命是 B 箱中寿命的 2 倍，应该采用哪一个损失函数所对应的最优决策?”引导学生讨论，以提高学生理智判断的能力. 在这个问题的背景之下，按教科书中的“自然的想法”所确定的损失函数更为合理.

教科书通过“思考：前面我们基于两种不同的想法，构造了两种不同的损失函数，得到了两个截然相反的最优决策. 面对这两个最优决策，你应该怎么办?”促使学生进一步思考，为更科学解决此问题，应该收集两种产品的正品信息，以确定更加合理的损失函数，从而得到更加合理的最优决策. 最后，可以介绍在决策过程中，损失函数或收益函数所扮演的角色（详见教科书第 12 页思考栏目下的说明），以帮助学生更好地理解风险型决策的方法.

### （三）探究与发现

虽然“课标”没有要求学生能够解答此栏目探索的问题，但利用已掌握的知识探索问题的解答过程却对培养学生探索性研究的能力有帮助. 因此，此栏目可供那些对于风险型决策方法特别感兴趣的学生阅读.

教科书在这里通过一个是否应该购买保险的案例，探讨各个行动方案的风险相等或相差不大时的决策问题. 此时可借助于损失或收益的方差和具体的实际情况进行决策. 在指导学生阅读这个栏目的内容时，要提醒学生注意该案例的实际背景：如果没有火灾的后顾之忧，企业就可以获得持续稳定发展，回报（回报远远高于保险费用）逐年增加；如果有火灾的后顾之忧，一旦发生火灾，就使得企业破产，此后得不到任何回报. 在这种背景之下，对于风险相等的两个行动方案，应该选择风险相对稳定的可持续发展行动方案，即选择损失方差小的行动方案.

在这个案例中出现各个行动方案的风险相等，其主要原因是所构造的风险函数没有包含上述背景信息. 但很难将上述背景信息引入到风险函数，因为案例中没有提供更多的数字信息（在实际应用中经常会出现此类情况），如所投资企业的每年回报情况等. 因此，结合定性分析结论和风险计算结果进行决策，具有应用价值.

另外，在有的决策问题背景之下，可能会采用损失方差大的行动方案，希望以较大的概率获得较小的风险或较大的收益. 例如，在平均水平相同的两名运动员中选取一名参加比赛，有时成绩稳定的运动员获胜的可能性小，而成绩不稳定，即方差大的运动员获胜的可能性反而大. 此时，如果直接用成绩作为构造收益或损失函数的指标，则选择方差大的运动员为好的决策.

## 四、教学设计案例

### 风险与决策的关系（1 课时）

**1. 教学任务分析**

（1）通过引言理解风险决策的必要性；

（2）通过实际问题，理解行动方案、损失的概念，认识不同的行动方案所对应的损失不同，体会损失的随机性；

(3) 理解风险的概念，掌握风险的计算原理；

(4) 理解最优决策的内涵.

### 2. 教学重点与难点

重点：

(1) 理解风险决策的必要性；

(2) 理解行动方案所产生损失的随机性；

(3) 理解风险的概念，掌握风险的计算原理；

(4) 理解最优决策的内涵.

难点：

(1) 理解行动方案所产生损失的随机性；

(2) 理解最优决策的内涵.

### 3. 教学基本流程

介绍专题引言，使学生了解决策的应用价值

↓

引导学生讨论问题1，2，3，体会决策问题背景特征

↓

从问题1，2，3中提炼出行动方案和损失的概念

↓

通过问题1，2，3，使学生体会损失的随机性

↓

运用随机变量的知识，比较不同方案的损失

↓

决策原则：平均损失最小

### 4. 教学情境设计

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
|---|---|---|
| (1) 教师介绍专题引言第一段. | 使学生认识到决策问题在现实生活中广泛存在. | 教师介绍. |
| (2) 天气预报说“今天降水概率是55%”. 你今天上学时，是否会带雨具？ | 让学生通过直觉给出问题答案，为进一步分析统计决策问题的共同特征作铺垫. | 教师提问题，学生讨论，给出答案. |
| (3) 带雨具会成为多余的负担吗？不带雨具会挨雨淋吗？你能事先预知答案吗？ | 探究各种答案可能导致的结果，引导学生发现这些结果的随机性，初步体会决策问题特征. | 教师提问，学生讨论，给出答案. 教师总结：带雨具，不能预知所带的雨具是否成为多余负担，此时雨具是否成为多余负担由今天是否降水而定，是一个随机现象；同样，不带雨具也不能预知是否挨雨淋，此时是否挨雨淋也是一个随机现象. |

续表

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
|---|---|---|
| (4) 在“十一”黄金周期间，许多人都会乘火车出外旅行，所以人们往往面临是否提前预订火车票（订票费40元）的问题. 如果你正面临这个问题，你会如何做呢？你的决定所带来的损失是随机现象吗？为什么？ | 引导学生在不同的背景下，发现决策问题特征. | 教师提问，学生讨论，给出答案. 有问题(2) 和问题 (3) 作为铺垫，学生应该能够给出此问题的完整答案：预订火车票，可能会损失订票费，此时是否损失订票费是一个随机现象；不预订火车票，可能会损失旅行计划，此时是否损失旅行计划是一个随机现象. 若不能给出完整答案，教师适当引导. |
| (5) A，B两个大小相同的箱子中装有同样规格的一件产品，且产品的价格相同. 已知A箱中产品的废品率是1%，B箱中产品的废品率是3%. 若你想购买1件产品，且购买时不能打开产品包装，你会选择哪个箱中的产品？你的选择会有损失吗？能预知损失情况吗？ | 引导学生在不同问题背景下，发现决策问题特征. | 教师提问，学生讨论，给出答案. 在问题(2) (3) (4) 的铺垫下，学生能够给出完整答案：选A箱产品可能面临买到废品的损失，这个损失不能预知；选B箱产品也可能面临买到废品的损失，这个损失也不能预知. |
| (6) 问题“是否带雨具”“是否预订火车票”和“买A箱产品还是买B箱产品”有什么共同的特征？ | 引导学生归纳决策问题特征. | 教师提问，学生思考、讨论，教师适当引导讨论方向，给出“行动方案”的概念，然后归纳得到问题的共性：<br>(1) 需要在几个行动方案中选择一个行动方案来执行；<br>(2) 各个行动方案所带来的损失不能预知，具有随机性.<br>最后由教师总结：具有如上两个特征的问题构成一个统计决策问题. |
| (7) 在统计决策问题中，如果能定量描述行动方案所带来的损失，那么指定方案的损失就是一个随机变量，根据以往学过的有关随机变量的知识，应该如何比较两个行动方案的损失情况？应该如何选择行动方案？ | 引导学生运用已经学过的概率统计知识，发现统计决策问题的解答思路，锻炼学生应用所学知识解决实际问题的能力. | 教师提问，学生回忆在《选修2-3》中的有关随机变量的知识：可以通过数学期望（均值）来比较两个随机变量平均水平的大小，进而自然得到选择行动方案的原则：应该选择平均损失最小的行动方案. |
| (8) 根据数学期望（均值）的理论，平均损失最小的行动方案一定能够保证其损失比其他行动方案小吗？平均损失最小的行动方案的优点是什么？ | 引导学生利用数学期望（均值）的统计学含义解释平均风险最小的内涵，更好地理解最优决策. | 教师提问题，学生复习随机变量的有关知识，复习数学期望（均值）的统计学含义，通过讨论给出问题的解答.<br>(1) 执行一次平均损失最小的行动方案，不能保证其实际得到的损失一定小于其他方案的实际损失.<br>(2) 平均损失最小的行动方案的优点是：多次执行该行动方案的平均损失应该小于多次执行其他任何方案的平均损失.<br>最后教师简要总结统计决策问题的特征，解答思路和答案的内涵. |

## 五、习题解答

**习题 1.1**（第 4 页）

1. 答案不唯一，要求：写明所有可以采用的行动方案，说明每个行动方案所导致的损失具有随机性，并且决策成功即可（不需要决策细节）．如三国演义中，诸葛亮草船借箭的故事．这里诸葛亮可以采用的两个行动方案与结果如下：

   (1) 监督工匠按期造出规定数目的箭，结果一定不能完成任务；

   (2) 草船借箭：如果出现大雾，结果是按时完成任务；如果不出现大雾，结果是不能完成任务．

   由于诸葛亮成功地预测到大雾天气而采用了草船借箭的行动方案，结果顺利完成任务，成为成功解决决策问题的一个范例．

2. 带雨衣的行动方案可能出现的两个结果为：路上下雨了，没有挨雨淋；路上没有下雨，使得雨具成为多余的负担．不带雨具的行动方案可能出现的结果：路上挨雨淋了；路上没有下雨，没有多余的负担．更希望的是不下雨时就不带雨衣，下雨时就带雨衣．损失值和下雨概率的认定对于决策的影响最大．

3. 经过分析可知，甲所能采取的行动方案包括下列三种：

   行动方案一，向 2 号靶射击；

   行动方案二，向 3 号靶射击；

   行动方案三，向空中射击．

   分别用 $A$，$B$，$C$ 表示甲、乙、丙开枪击中目标的事件，用 $S$ 表示甲在第 2 枪后被淘汰出局的事件，则 $A$，$B$，$C$ 相互独立，且

   $$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(C)=1.$$

   (1) 若采取行动方案一，会有两种可能的结果：

   ①击中 2 号靶，则第 2 枪是丙向 1 号靶射击，结果甲必被淘汰出局；

   ②未击中 2 号靶，则第 2 枪是乙射击，而乙必向 3 号靶射击（否则乙必被丙淘汰出局），结果甲未被淘汰出局．

   这时，$S=AC$．由于 $A$ 和 $C$ 相互独立，所以

   $$P(S)=P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}.$$

   (2) 若采取行动方案二，也会有两种可能的结果：

   ①击中 3 号靶，则第 2 枪是乙向 1 号靶射击，结果甲可能被淘汰出局；

   ②未击中 3 号靶，则第 2 枪是乙射击，而乙必向 3 号靶射击，结果甲未被淘汰出局．

   这时，$S=AB$．由于 $A$ 和 $B$ 相互独立，所以

   $$P(S)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

   (3) 若采取行动方案三，则第 2 枪是乙射击，而乙必向 3 号靶射击，结果甲未被淘汰出局．这时

   $$P(S)=0.$$

   因此甲应选行动方案三，即向空中射击．

**习题 1.2**（第 14 页）

1. 此时可以选择的两个行动方案为

$d_1$：将第 4 个鸡蛋敲进同一只碗里.

$d_2$：将第 4 个鸡蛋敲进另一只碗里，如果是好鸡蛋，就将其倒进盛放另外 3 个鸡蛋的碗里；否则将坏鸡蛋丢掉.

所有可能发生的两种状态为

$h_1$：第 4 个鸡蛋是好鸡蛋.

$h_2$：第 4 个鸡蛋是坏鸡蛋.

2.（1）可选择的行动方案为

$d_1$：保持现状.

$d_2$：增加员工.

$d_3$：增加新设备.

未来可能发生的状态为

$h_1$：市场对产品的需求增加.

$h_2$：市场对产品的需求下降.

（2）损失函数构造如下

$$l(d_1,\ h)=\begin{cases}-340\,000, & h=h_1,\\ -300\,000, & h=h_2,\end{cases}$$

$$l(d_2,\ h)=\begin{cases}-420\,000, & h=h_1,\\ -270\,000, & h=h_2,\end{cases}$$

$$l(d_3,\ h)=\begin{cases}-440\,000, & h=h_1,\\ -260\,000, & h=h_2.\end{cases}$$

（3）状态分布列为

| $h$ | $h_1$ | $h_2$ |
|---|---|---|
| $P(h)$ | 0.6 | 0.4 |

各个行动方案的风险分别为

$$R(d_1)=l(d_1,\ h_1)\times 0.6+l(d_1,\ h_2)\times 0.4=-324\,000,$$
$$R(d_2)=l(d_2,\ h_1)\times 0.6+l(d_2,\ h_2)\times 0.4=-360\,000,$$
$$R(d_3)=l(d_3,\ h_1)\times 0.6+l(d_3,\ h_2)\times 0.4=-368\,000.$$

由于行动方案 $d_3$ 的风险最小，所以最优决策为 $d_3$，即最优决策为增加新设备.

3.（1）可以选择的 6 个行动方案为

$d_i$：进货（$14+i$）台，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

可能出现的 6 个状态为

$h_i$：销售（$14+i$）台，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

（2）收益函数为

$$q(d_i,\ h_j)=\begin{cases}(14+i-j+i)\times 200, & j\geqslant i,\\ (14+j)\times 200-(i-j)\times 800, & j<i.\end{cases}$$

（3）状态分布列为

| $h$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(h)$ | 0.05 | 0.10 | 0.20 | 0.40 | 0.20 | 0.05 |

收益矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 3\,000 & 2\,200 & 1\,400 & 600 & -200 & -1\,000 \\ 2\,800 & 3\,200 & 2\,400 & 1\,600 & 800 & 0 \\ 2\,600 & 3\,000 & 3\,400 & 2\,600 & 1\,800 & 1\,000 \\ 2\,400 & 2\,800 & 3\,200 & 3\,600 & 2\,800 & 2\,000 \\ 2\,200 & 2\,600 & 3\,000 & 3\,400 & 3\,800 & 3\,000 \\ 2\,000 & 2\,400 & 2\,800 & 3\,200 & 3\,600 & 4\,000 \end{pmatrix}$$

各个行动方案的平均收益为

$$\begin{aligned}&(Q(d_1)\quad Q(d_2)\quad Q(d_3)\quad Q(d_4)\quad Q(d_5)\quad Q(d_6))\\ &=(0.05\quad 0.10\quad 0.20\quad 0.40\quad 0.20\quad 0.05)\boldsymbol{Q}\\ &=(2\,450\quad 2\,790\quad 3\,010\quad 2\,990\quad 2\,490\quad 1\,750),\end{aligned}$$

所以 $d_3$ 为最优决策，即当月进货数量为 17 台.

4. (1) 可以选择的 4 个行动方案为

$$d_i：进货\ (50\times i)\ 本，i=1，2，3，4.$$

可能出现的 4 个状态为

$$h_i：销售\ (50\times i)\ 本，i=1，2，3，4.$$

(2) 收益函数为

$$q(d_i，h_j)=\begin{cases}50\times(i-j+i)\times 2, & j\geqslant i,\\ 50\times j\times 2-(i-j)\times 2, & j<i.\end{cases}$$

(3) 状态分布列为

| $h$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(h)$ | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

收益矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 100 & 0 & -100 & -200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 \\ -100 & 100 & 300 & 200 \\ -200 & 0 & 200 & 400 \end{pmatrix}$$

各个行动方案的平均收益为

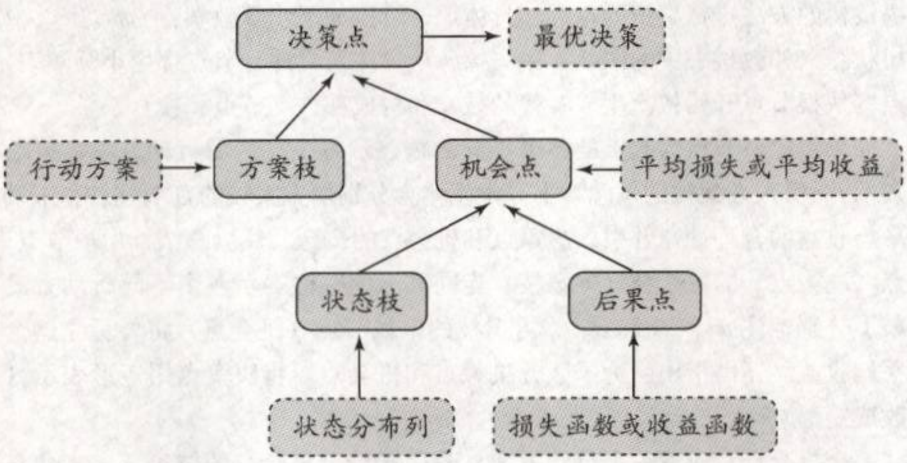
$$\begin{aligned}&(Q(d_1)\quad Q(d_2)\quad Q(d_3)\quad Q(d_4))\\ &=(0.2\quad 0.4\quad 0.3\quad 0.1)\begin{pmatrix} 100 & 0 & -100 & -200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 \\ -100 & 100 & 300 & 200 \\ -200 & 0 & 200 & 400 \end{pmatrix}\\ &=(-30.0\quad 110.0\quad 130.0\quad 60.0),\end{aligned}$$

所以 $d_3$ 为最优决策，即订购新书 150 本.

# 第二讲 决策树方法

## 一、本讲知识结构

本讲仅是将第一讲中的风险型决策方法用树形图来实现，为此需要将树状图的各个组成部件赋予新的含义．决策树的制作和决策过程同步进行，最后完成的决策树保留了决策过程的所有信息，使得决策过程可视化．决策树各个部件之间的关系，以及各个部件所涉及的风险与决策概念如下图所示：




上图中，虚线框表示在第一讲中风险型决策的基本知识，实线框表示本讲将要介绍的决策树中的各个部件名称．

## 二、教学重点与难点

重点：

1. 掌握决策树中各个部件与风险型决策基本概念之间的对应关系；
2. 了解决策树形状构建过程；
3. 了解机会点的值的计算过程；
4. 掌握通过反推决策树进行决策的方法．

难点：

理解具有多个决策点的决策树．

## 三、编写意图与教学建议

决策树方法是在实际中应用最为广泛的统计决策方法，它使得决策过程一目了然．在本讲中先介绍决策树的基本部件（即决策点、方案枝、机会点、状态枝、后果点），然后介绍决策树的构建过程，以及从后果点开始通过反推决策树的方法进行决策的过程（即后果点的标注、机会点的计算与标注、决策点的标注）．

通过本节学习，要让学生体会到：在决策问题中的行动方案、状态分布列、损失函数或收益函数、

平均损失或平均收益、最优决策分别可以用方案枝、状态枝、后果点、机会点和决策点表示. 决策树中的状态枝和后果点信息（即风险或平均收益）汇总于机会点；方案枝和机会点的信息汇总于决策点（最优决策）. 利用决策点、方案枝、机会点、状态枝和后果点，可以表示非常复杂的决策问题的决策过程，其中相应的决策树可能包含多个决策点.

### 1. “用决策树表示决策问题三要素”的教学建议

学生在理解风险型决策的基本原理后，若能建立决策问题中各要素与决策树部件之间的对应关系，就能按案例中所演示的方法建立决策树，并通过标注和反推各个机会点值完成决策任务. 因此，教学中可先引导学生建立决策树中各个部件和各决策要素的对应关系；然后通过第一讲中案例 2 所对应的决策树，进一步认识决策树的构造；通过对这个决策树机会点值的反推计算和标注过程，使学生初步体会利用反推决策树的方法进行决策的过程. 具体地，可按如下步骤教学：

先画一张树状图（如教科书中的图 2-4 中去掉各个标注值，并且节点都用小圆圈表示），并介绍这张树状图的特点（从根节点开始依次生成各代的枝）和构成部件（节点和枝）.

通过问题“如果用以根节点为起点的各个不同的枝表示各个不同的行动方案，风险和最优决策应该用哪些节点表示?”引入方案枝的概念，引导学生体会分别用方案枝的首端节点和末端节点表示最优决策和风险或平均收益的合理性，并引入决策点和机会点的概念. 然后总结：用根节点表示最优方案，用起始于根节点（决策点）的各个枝（方案枝）连同其上的标注表示各个不同行动方案（这时在所画树状图的三个枝上分别标注 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$），方案枝的末端节点（机会点）将要标注这个枝所对应行动方案的风险或平均收益. 还需指出：为了区分决策点和机会点，将决策点用矩形表示（这时把所画树状图的根节点改成矩形）.

通过问题“一个机会点对应着一个行动方案，若用起始于机会点的枝表示未来状态，该行动方案在未来状态的损失或收益应该如何表示?”引导学生得到唯一答案：用枝的末端节点表示损失或收益. 然后教师可以总结：起始于机会点的那些枝（状态枝）表示各个不同的状态，并在状态枝上标注表示这个状态出现的概率值，状态枝连同其上的标注值表示状态分布列（这时在所画的树状图中各个状态值上标注教科书图 2-4 中的那些数据）；状态枝的末端节点（后果点）上标注相应行动方案和状态的损失或收益（此时可以将图 2-4 中各个后果点的收益标注到所画的图上）. 还需指出：为了在决策图中区分决策点、机会点和后果点，将后果点用三角形表示（同时将所画图中的后果点都改成三角形，得到和图 2-4 一样的决策图）. 然后向学生说明所得的图形就是一个决策图，它是第一讲案例 2 的决策树（这里标注的是收益）.

通过问题“应该如何利用状态枝和后果点的标注值计算各个机会点的平均收益或风险?”引导学生发现机会点的平均收益或风险和起始于该点的状态枝及后果点标注值之间的关系，必要时可提示学生回忆风险的计算公式，掌握通过后果点和状态枝标注值反推平均收益或风险的方法.

通过问题“如何通过机会点的值确定最优决策?”引导学生掌握由机会点的标注值反推最优决策（这里是标注值最大的机会点所在的方案枝对应的方案）的方法. 最后，教师将所得到代表最优行动方案的符号标注到决策点的方框中，从而完成通过反推决策树的方法进行决策的过程.

### 2. 例 1 的教学建议

教科书通过例 1 向学生演示根据具体实际问题背景，构建决策树的方法，让学生练习用反推决策树各机会点的值进行决策的方法. 可以构建不同的决策树表示同一决策问题，即决策问题和决策树不一一对应. 在实际应用中，人们希望构建尽量简单的决策树，以使决策图能够和实际问题的背景有更好的对应，并减少制作决策树图形的工作量和各机会点值的计算量. 教科书通过例 1 演示了简化决策

树的方法.

教学中，可通过分析例 1 的背景，用问题"现在有几个不同的行动方案？从决策点出发应该有几条方案枝?"引导学生构建出表示这个决策问题的决策点、两个方案枝及标注和两个机会点（教师可在黑板上画出相应的图形）.

通过问题"5 年后可能出现几种情况？各个行动方案相应的收益是多少?"引导学生构建各个方案枝及标注，构建各个后果点及标注（教师可在前面图形的基础上完成教科书上图 2-8 所对应的决策树）.

通过问题"行动方案 $d_1$ 和 $d_2$ 所对应机会点的值是多少？你是如何计算的?"引导学生利用后果点和状态枝的标注值计算各个行动方案的收益，然后教师将这些值标注到相应的机会点上（教师在前面画的决策树上标注机会点的值）.

通过问题"最优行动方案是什么？你是如何得到的?"引导学生比较各个机会点的标注值，进而获得最优决策（教师在前面画的决策树上标注最优行动方案，得到和图 2-8 一样的决策树）.

通过问题"在上面的决策树中，行动方案 $d_1$ 的所有后果点的标注值有何特征?"引导学生发现两个标注值相等. 通过问题"能否将连接同一方案枝的、标注值相等的所有后果点连同其状态枝点简化成一个后果点和一个状态枝？简化的状态枝和后果点应如何标注?"引导学生发现简化决策树的原理，然后由教师总结制作简单决策树的方法：如果一个行动方案的几个状态的损失或收益都等于 $a$，就可以把这几个状态合并成一个状态，这个合并状态出现的概率等于合并前的这几个状态出现的概率之和，这个行动方案在合并状态的损失或收益还等于 $a$. 在制作决策树时，可以用一个状态枝及其末端的后果点表示合并状态及合并状态的损失或收益，得到相对简单的决策树.

接着，教师可结合例 1 的背景，解释简单决策树的优点：能更好地反映原始问题的背景信息，使得决策树更加简单明了、制作更为简单、反推决策树过程中的计算量更少.

### 3. 例 2 的教学建议

例 2 是用决策树方法解决第一讲案例 3 中的决策问题，可以让学生在课堂上独立完成，使他们更好地掌握决策树方法. 在学生完成解答后，教师可请几名不同解法的学生将自己的决策图连同机会点和决策点的标注画在黑板上，然后加以点评.

此时，教师可总结绘制决策树、标注机会点和决策点的一般步骤.

### 4. 例 3 的教学建议

例 3 中的决策问题更为复杂，是两个简单决策问题的叠加. 虽然也可以把这里的决策问题看作简单决策问题通过决策树方法来解决，但在这种观点之下决策树的各个方案枝的解释就不自然，与问题的直观背景相差甚远. 教科书通过例 3 向学生演示复杂决策树（包括多个决策点的决策树）的构建方法，以及通过反推这个决策树获取最优决策的方法，使得学生能更恰当地利用复杂决策树表示决策问题，进而获得决策问题的解答.

教学中，教师可以通过问题"现在的决策问题中的行动方案都有哪些?"引导学生发现所有的行动方案. 对于这个问题，学生的答案可能会是

$d_1$：购买新设备.

$d_2'$：聘请外厂专家改造原有设备.

$d_3'$：由本厂技术人员改造原有设备.

学生的答案也可能和教科书的相同：

$d_1$：购买新设备.

$d_2$：改造原有设备.

若学生不能给出这个答案，教师可以提出来，让学生讨论.

教师可以点评这两个答案：两个答案都不错，但分别基于它们所构建出的决策树却不同，用这两个不同的决策树也可以得到相同的决策结果. 基于前一答案可以建立有一个决策点的简单决策树（图2-1）.

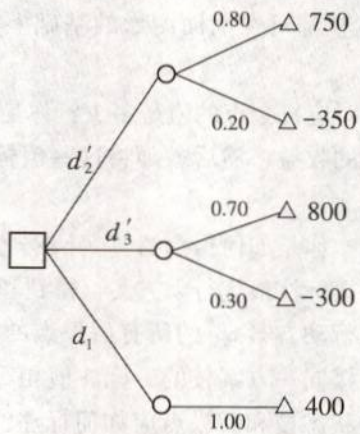



图 2-1

在例 3 的背景中，选择生产设备分两步完成：第一步，确定购买新设备还是改造原有设备；第二步，确定聘请厂外专家还是由本厂技术人员改造设备. 上面这个决策图不能表示背景中的这种含义，而基于第二个答案所构建的复杂决策图却能很好地表示背景中的这种含义.

教师此时可以通过问题“现在我们基于答案二所确定的两个行动方案构造决策树，请画出决策点、方案枝和机会点”引导学生开始构建如教科书中图 2-12 的决策图.

教师在黑板上画出决策点、方案枝和机会点，并将表示两个不同方案的符号标注到方案枝上. 然后通过问题“执行行动方案 $d_2$ 后，其平均收益都和哪些因素有关?”引导学生发现新的问题“聘用外厂专家还是请本厂的技术人员改造原有设备?”行动方案 $d_2$ 的平均收益应该是新决策问题的最优行动方案的平均收益.

这样教师就可以指出应该把行动方案 $d_2$ 所对应枝的末端节点画成新决策问题的决策点，即该节点画成矩形. 然后按学生已经熟悉的方法以这个矩形为起点画出表示新决策问题的树状分支图.

接下来教师可以分析行动方案 $d_1$ 所对应的机会点、状态枝、后果点及其标注，得到决策树（图2-2）.

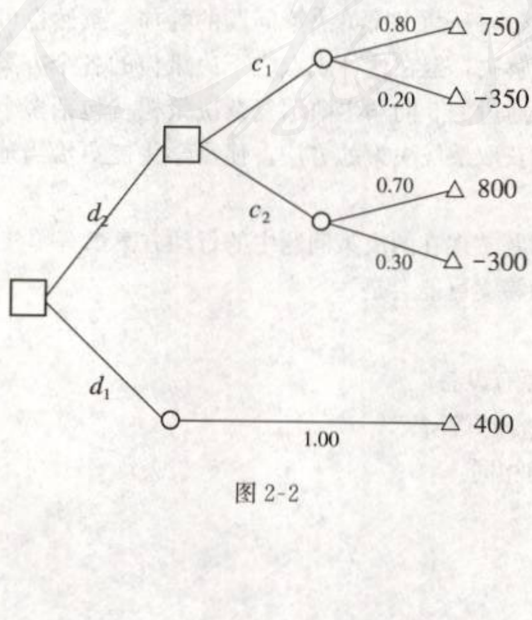



图 2-2

注意，这个图和教科书上的图 2-12 稍有不同，教师可以向学生解释如下：当连接机会点的状态枝只有一枝时，可以省略这个机会点和状态枝，而直接在相对应的方案枝的末端画后果点，并表注这个后果点的值（至此教师可以把上图改成教科书上图 2-12 中的决策树）.

当在黑板上完成教科书上图 2-12 有两个决策点的决策树后，教师通过任务“请在纸上画出这个决策树，并用反推的方法获得最优决策，如遇见问题请举手”引导学生完成例题答案. 教学中，教师要解答和总结如何标注行动方案 $d_2$ 所对应枝的末端决策点的标注问题：该决策点矩形内标注的标号代表新决策问题的最优行动方案，该矩形的上方或下方标注的是这个最优行动方案的平均收益或损失. 可以通过比较各个行动方案枝末端的标注值获取整个问题的最优决策.

完成有多个决策点的决策树的全部标注后，教师还要借助这个复杂决策树向学生交代：如何从这些决策点的标注中读取完整最优决策结果.

对于有多个决策点的复杂决策树，完成其所有节点标注之后，应从决策树的起始决策点读取第一步的最优行动方案（在此例中是“改造原有设备”），然后按从左到右的次序在各步最优方案枝末端决策点中读取下一步最优行动方案（若末端不是决策点，就停止读取），将各步读出的最优行动方案依次排列在一起，得到复杂决策问题的最优决策结果. 此例的决策树有两个决策点，表示了一个两步决策问题. 解决该问题的第一步最优行动方案是“改造原有设备”，第二步最优行动方案是“聘请厂外专家完成设备改造工作”. 也可以把两步最优行动方案合并，将最优决策表述为“聘请厂外专家改造原有设备”.

## 四、教学设计案例

### 用树状图解决风险型决策问题（1 课时）

**1. 教学任务分析**

（1）了解树状图的结构及构成部件；

（2）通过逻辑关系类比，探索用根节点、从根节点的枝及枝的末端节点表示最优决策方案、行动方案、风险或平均收益的方法，给出决策点、方案枝和机会点的概念；

（3）通过逻辑关系类比，探索用树状图表示状态分布列和风险的方法，给出状态枝和后果点的概念；

（4）了解方案枝、状态枝和后果点的标注方法，以及决策树的构建方法；

（5）了解机会点的标注方法，体会用反推决策树解答决策问题的方法.

**2. 教学重点与难点**

重点：

（1）建立决策问题三要素在决策树中的表示方法；

（2）机会点值的计算及标注；

（3）最优行动方案的获取与标注.

难点：

用反推决策树进行决策的方法.

3. 教学基本流程

考察树状图，了解其组成部件

↓

引导学生讨论在树状图中应该用哪些部件表示行动方案、风险、最优决策

↓

引导学生讨论在树状图中应该用哪些部件表示状态、状态分布列、损失或收益

↓

借助图形使学生理解决策树的概念

↓

通过第一讲案例2演示如何用决策树表示决策问题

↓

通过第一讲案例2演示如何用决策树解答决策问题

4. 教学情境设计

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
|---|---|---|
| (1) 考察树状图，它由哪些部件组成? | 通过观察，发现构成图形的部件，引入节点、枝、根节点和树状图的概念. | 教师先在黑板上画出树状图（图 2-3），说明类似的图形叫做树状图. 然后提出问题，请学生给出答案. 最后教师总结：在树状图中，线段称为枝，线段两端的点称为节点. 树状图由节点和枝构成，最左边的节点称为根节点，是所有枝的起始点. |

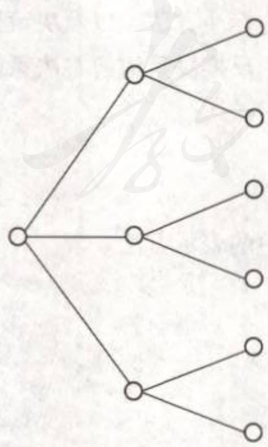


图 2-3

续表

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
| --- | --- | --- |
| (2) 如果用以根节点为起点的各个枝表示各个不同的行动方案，风险和最优决策应该用哪些节点表示？ | 引出决策点、方案枝和机会点的概念. | 教师提问题，学生思考给出正确答案：用根节点表示最优决策，枝末端的节点表示这个枝所代表的行动方案的风险. 必要时教师可适当提示，最优决策只有一个，风险和行动方案相对应. 教师总结：用根节点表示最优行动方案，并把根节点画成矩形，以区别于其他节点（教师此时将根节点改成矩形）；起始于根结点的枝称为方案枝，它们代表各个不同的行动方案（教师此时在各个方案枝上标注表示方案的符号 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$）；方案枝末端的节点称为机会点，用来标注所在方案枝的风险或平均收益. |
| (3) 要计算行动方案 $d_1$ 的风险，需要哪些量？ | 为引出状态枝和后果点作准备. | 教师提问题，学生回忆第一讲学过的知识给出答案，教师总结：需要知道执行 $d_1$ 后会出现哪些状态，各个状态出现的概率和损失. |
| (4) 如果用起始于机会点的枝表示各个不同的状态，这些枝的末端节点应该表示损失还是状态出现的概率？另外一个量该如何表示？ | 引出状态枝、方案枝的标注和后果点的概念，以及决策树的概念. | 教师提问题，学生回答. 学生对第一问的回答可能为“末端节点表示状态出现的概率”，也可能为“末端节点表示状态出现的损失”. 教师总结，但不断言第一问的两个答案哪一个正确：由于状态出现的概率和状态的关系更密切些，人们更愿意把它作为状态枝的标注（教师此时可以将所画图中的状态枝上标注状态发生的概率）；而把末端的节点称为后果点，用来标注损失或收益. 为区分于决策点、机会点，教科书上用三角形表示后果点（教师此时可以将所画图中的末端节点改为三角形，并标注上损失函数，得到图形同教科书中图 2-3）. 最后教师给出决策树的定义：这样表示决策问题的树状图称为决策树. |
| (5) 要用决策树表示第一讲案例 2 中的决策问题，从决策点出发应该画几条方案枝？如何画方案枝的机会点？如何标注方案枝？ | 演示如何画方案枝、机会点和方案枝的标注. | 教师提问，学生回答，教师根据学生的答案在黑板上画图、标注. |
| (6) 从方案枝 $d_1$ 末端节点出发，应该画几条状态枝？如何画后果点？如何标注这些状态枝和后果点？ | 演示如何画状态枝、后果点，以及状态分布列、损失或收益函数的标注. | 教师提问，学生回答，教师根据学生的答案在黑板上画图、标注（此时，教师在黑板上画的图形和教科书中图 2-4 相同）. 教师总结：现在的决策图上包含了案例 2 中决策问题的所有信息. |

续表

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
| --- | --- | --- |
| (7) 如何利用这个决策树上的信息计算行动方案 $d_1$ 的风险？ | 引导学生利用状态枝和后果点的标注值计算行动方案的风险，体会反推决策树方法决策的第一步. | 教师提问，学生思考答案. 必要时，教师可给出风险的定义加以提示. 教师将风险的计算结果标注到 $d_1$ 枝的机会点上. 然后将其他行动方案的风险标注到相应的机会点上. |
| (8) 最优决策是哪一个行动方案？为什么？ | 引导学生发现通过比较机会点值的方法确定最优决策. | 教师提问，学生解答，教师将最优决策结论 $d_1$ 标注在决策点的矩形内. 教师总结：通过决策树进行决策的先后过程和构建决策树的过程恰好相反，这种决策的方法称为反推决策树法. |

## 五、习题解答

### 习题 2（第 24 页）

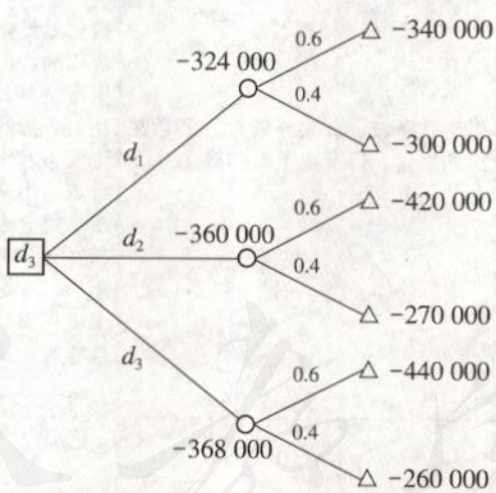
1. 可选择的行动方案为

$d_1$：保持现状.　　$d_2$：增加员工.　　$d_3$：增加新设备.

未来可能发生的状态为

$h_1$：市场对产品的需求增加.　　$h_2$：市场对产品的需求下降.

描述该决策问题的损失决策树及反推结果为




（第 1 题）

所以最优决策为 $d_3$，即最优决策为增加新设备.

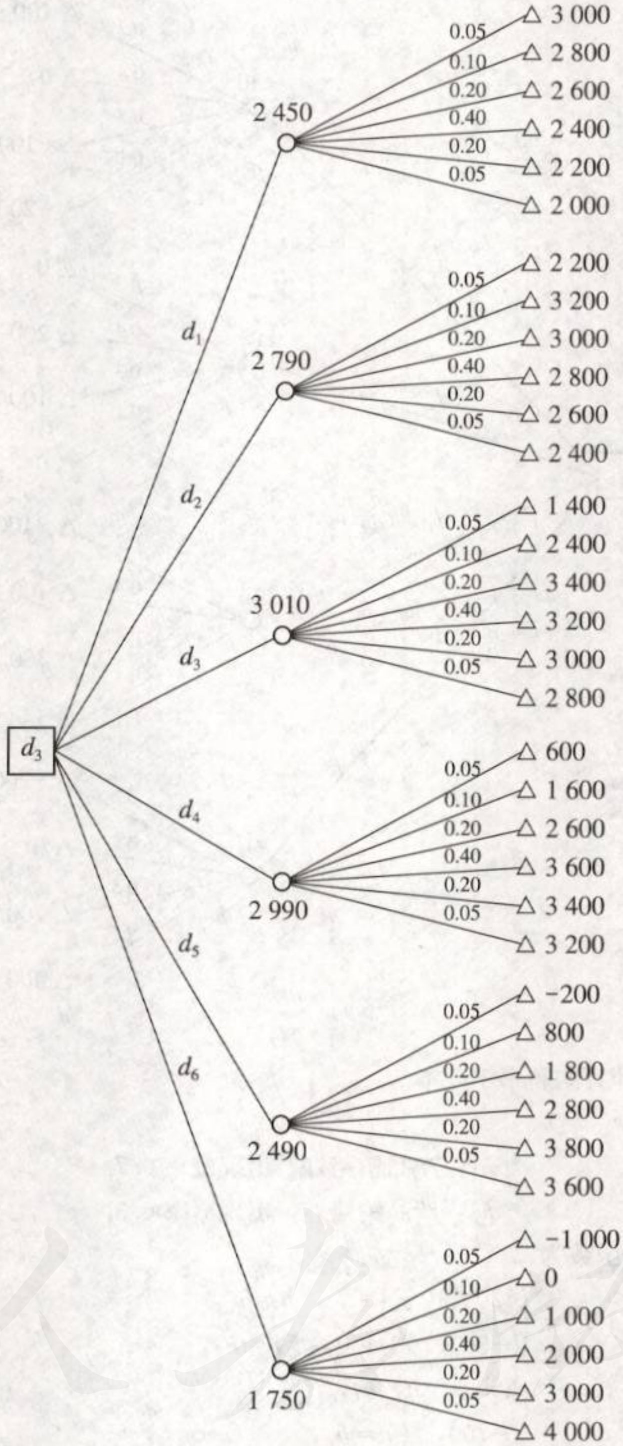
2. 可以选择的 6 个行动方案为

$d_i$：进货 $(14+i)$ 台，$i=1,2,3,4,5,6$.

可能出现的 6 个状态为

$h_i$：销售 $(14+i)$ 台，$i=1,2,3,4,5,6$.

描述该决策问题的收益决策树及反推结果为




(第 2 题)

所以 $d_3$ 为最优决策，即当月进货数量为 17 台.

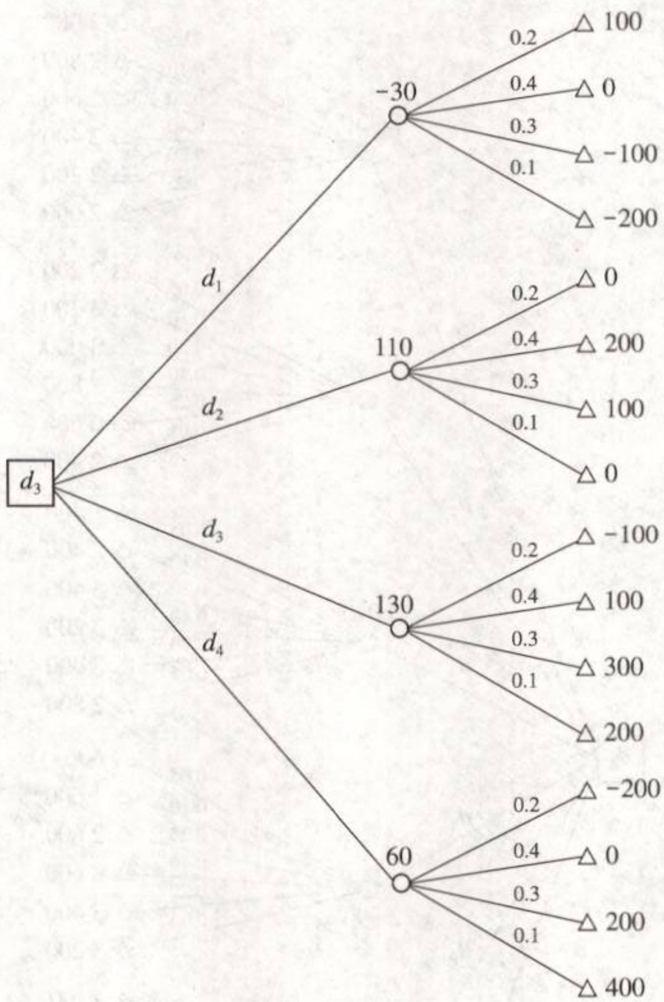
3. 可以选择的 4 个行动方案为

$$d_i：进货（50\times i）本，i=1，2，3，4.$$

可能出现的 4 个状态为

$$h_i：销售（50\times i）本，i=1，2，3，4.$$

描述该决策问题的收益决策树及反推结果为




（第 3 题）

所以 $d_3$ 为最优决策，即订购新书 150 本.

4. 未来可能出现的状态为

$h_1$：产品销路好，出现概率 0.7.

$h_2$：产品销路差，出现概率 0.3.

由题目所给条件，收益函数为

$$q(A_1,\ h)=\begin{cases}120\times10-400, & h=h_1,\\ -30\times10-400, & h=h_2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}800, & h=h_1,\\ -700, & h=h_2,\end{cases}$$

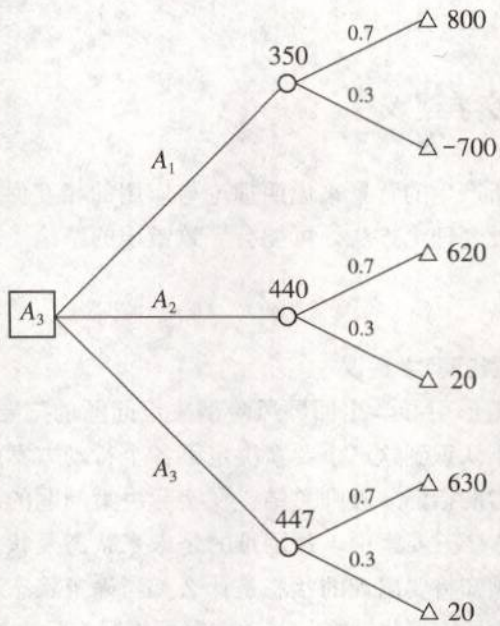
$$q(A_2,\ h)=\begin{cases}80\times10-180, & h=h_1,\\ 20\times10-180, & h=h_2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}620, & h=h_1,\\ 20, & h=h_2,\end{cases}$$

$$q(A_3,\ h)=\begin{cases}80\times3+110\times7-180-200, & h=h_1,\\ 20\times10-180, & h=h_2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}630, & h=h_1,\\ 20, & h=h_2.\end{cases}$$

描述该决策问题的收益决策树及反推结果为



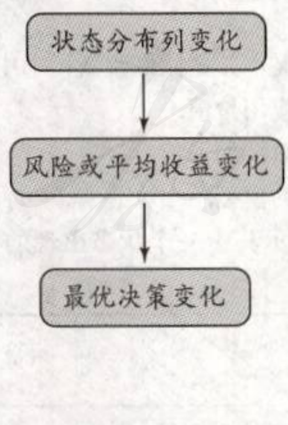

（第 4 题）

所以 $A_3$ 为最优决策，即应该先进行扩建，销路好时，三年后再进行改造设备.

# 第三讲　风险型决策的敏感性分析

## 一、本讲知识结构

本讲讨论状态分布列的变化对于最优决策结果的影响，其知识结构框图如下：




## 二、教学重点与难点

重点：

1. 理解敏感性分析的意义；
2. 理解敏感性分析的原理.

难点：

理解敏感性分析的意义.

## 三、编写意图与教学建议

教科书试图通过敏感性分析产生的背景来说明理论与应用的相互促进、共同发展的关系，使学生体会到：不顾实际问题特点而硬套理论方法，可能会导致错误的结论. 教科书通过具体案例介绍风险型决策的敏感性分析.

### 1. 敏感性分析方法产生背景的教学建议

教学中，可借助于决策树图形引导学生回顾风险型决策问题的三要素：状态分布列、行动方案、损失或收益函数的概念. 使学生认识到这三个要素决定了各个行动方案的风险或平均收益，而风险或平均收益则是评价行动方案优劣的指标. 教师总结：在实际决策问题的解答过程中，关键在于如何根据问题的背景确定问题的三要素. 三要素中，最困难的是未来状态及状态分布列的确定，因为未来状态往往为随机现象，我们不能预知将要出现的状态是什么. 当确定状态分布列后，就容易确定各个行动方案的损失或收益情况，因为所有可供选择的行动方案可根据实际决策问题直接得到.

教师可以指出，对于随机的未来状态，人们只能用历史的数据和经验估计其出现的统计规律，即只能估计状态分布列，而没有任何获取精确的状态分布列的方法. 可以通过问题“在风险型决策方法中，用估计出的分布列取代精确的分布列是否会导致错误的最优决策?”引导学生讨论，发现问题. 教师总结：这一问题导致了新的理论研究课题——敏感性分析，即分布列的变化对于最优决策结果的影响. 教科书期望通过这样的讨论过程，潜移默化地培养学生发现问题和研究问题的能力.

### 2. 探究第二讲例 1 中决策问题的敏感性分析的教学建议

给出图 2-9，并解释这个实际问题的背景：对于行动方案 $d_1$ 而言，其执行后所出现的结果总是收益 1 300 元，因此无需讨论执行 $d_1$ 后状态分布列的变化情况；对于行动方案 $d_2$ 而言，其执行后所出现的结果随着投资成功或失败而有不同的收益，而实际上无人知道真正的投资成功或失败的概率（第二讲中仅是假设这两个概率分别是 0.9 和 0.1），因此讨论执行 $d_2$ 后状态分布列的变化情况有实际应用价值.

然后探讨将成功概率改为 0.8 的情况，并稍微修改教科书中图 2-9 得到图 3-1. 接着按照教科书中的方式引入敏感性分析的概念，解释其应用价值.

最后，应该对敏感性分析方法步骤总结如下：

(1) 构建描述状态分布列变化规律的模型.

①当只有两个状态时，可以用 $p$ 表示其中一个状态出现的概率，$1-p$ 表示另一个状态出现的概率，此时状态分布列具有如下的形式：

| $h$ | $h_1$ | $h_2$ |
|---|---|---|
| $P(h)$ | $p$ | $1-p$ |

②当只有三个状态时，可以用 $p_1$ 和 $p_2$ 分别表示其中两个状态出现的概率，另一个状态出现的概率为 $1-p_1-p_2$，此时状态分布列具有如下的形式：

| $h$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $P(h)$ | $p_1$ | $p_2$ | $1-p_1-p_2$ |

（2）根据状态分布列变化规律的模型，计算各个行动方案的风险或平均收益，它们都是 $p$ 的一元函数，或者是 $p_1$ 和 $p_2$ 的二元函数.

（3）分析最优决策随着 $p$（或者 $p_1$ 和 $p_2$）的变化而变化的规律，分析哪些点使得至少有两个行动方案的风险或平均损失相等，$p$（或者 $p_1$ 和 $p_2$）经过这些点时最优决策及相应的风险或平均收益的变化情况.

（4）对于实际应用问题，还需根据（3）的分析和状态分布列的估计精度，评估由状态分布列的估计结果所得最优决策的可靠性.

## 四、教学设计案例

### 状态分布列的变化与最优决策（1 课时）

**1. 教学任务分析**

（1）理解对决策进行敏感性分析的必要性；

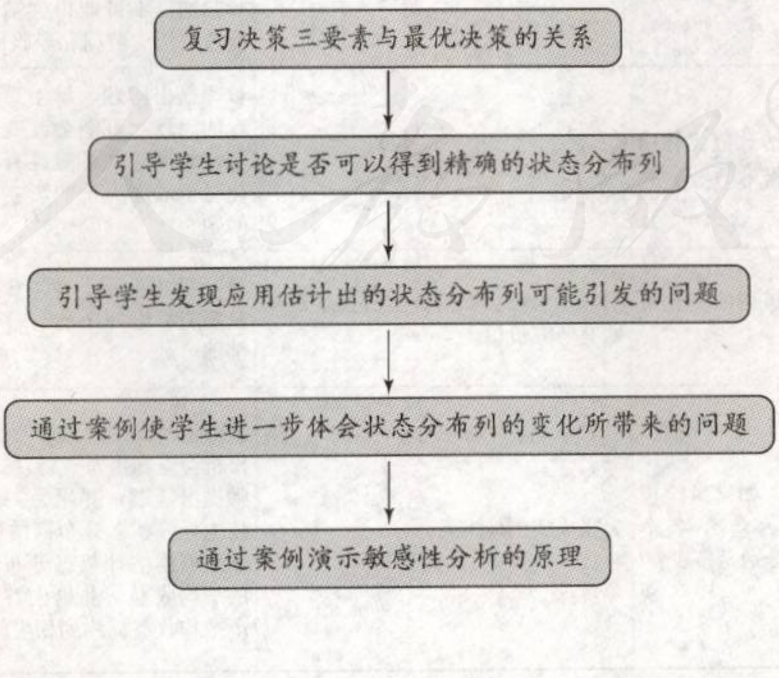
（2）理解敏感性分析的基本原理，并能对决策进行敏感性分析.

**2. 教学重点与难点**

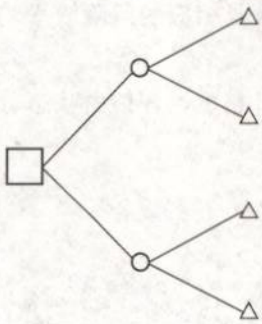
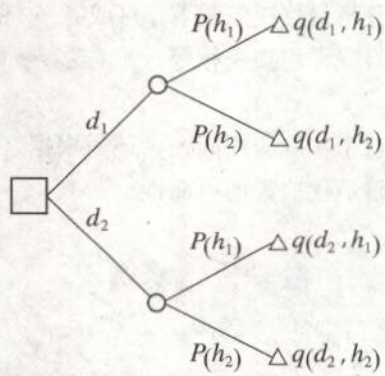
（1）理解敏感性分析的必要性；

（2）理解敏感性分析的基本原理，并能对决策进行敏感性分析.

**3. 教学任务流程**



4. 教学情境设计

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
| --- | --- | --- |
| (1) 上一讲我们学习了决策树方法，行动方案、状态分布列和损益函数的信息都应该分别标注在图 3-1 什么地方？ | 引导学生复习决策树，为探讨决策三要素与最优决策关系作准备. | 教师先在黑板上画一个不加标注的树状图（图 3-1）. 然后提出问题. 学生回忆，回答问题. 教师在学生回答问题的过程中添加标注得到抽象决策树（图 3-2）. |
| <br>图 3-1 | | <br>图 3-2 |
| (2) 决策问题的三要素与风险或平均收益及最优决策是什么关系？ | 引导学生复习决策问题三要素、风险或平均收益及最优决策之间的因果关系. | 教师提出问题，学生思考回答. 必要时教师提示反推决策树方法是如何进行的. 教师归纳总结：收益函数或损失函数和状态分布列决定行动方案的平均收益或风险，各个行动方案的平均收益或风险决定最优决策. 教师总结：在实际决策问题的解答过程中，关键在于如何根据问题的背景确定该问题的三要素. |
| (3) 在具体决策问题里，行动方案、收益函数或损失函数、状态分布列三个因素中哪一个更难确定？原因是什么？ | 为引入敏感性分析作铺垫. | 教师提出问题，学生思考回答. 必要时教师可提示未来状态是随机现象，根据现有知识，没有办法精确知道各个状态发生的概率. 教师归纳：不可能得到精确的状态分布列，只能通过历史数据和经验估计状态分布列. |
| (4) 用状态分布列的估计值代替精确值会不会改变最优决策结果？ | 引导学生发现新问题. | 教师提出问题，学生思考回答. 教师总结发现的问题：可能会改变最优决策结果. 进一步，如果这种可能性存在，状态分布列的变化对于最优决策的影响就成为一个有意义的问题. |
| (5) 如何确认状态分布列的变化可能影响决策结果？ | 引导学生体会如何证实所发现的问题有研究价值. | 教师提出问题，学生讨论回答. 教师总结：只要能举出一个能够使得这种情况发生的实例即可. |
| (6) 在第二讲例 1 中，如果风险投资成功概率的估计值为 0.8，各个行动方案的平均收益分别是多少？ | 为完成实例作准备. | 教师将所画的图形修改成例 1 的决策树，并给出机会点和决策点标注，得到图 2-9. 然后教师提出问题，并用另一种颜色的粉笔在状态枝上标注状态分布列的估计值（0.8 和 0.2）. 学生根据估计状态分布列计算各个行动方案的平均收益，并给出答案. 教师将算出的各个平均收益标注到相应的机会点上. |

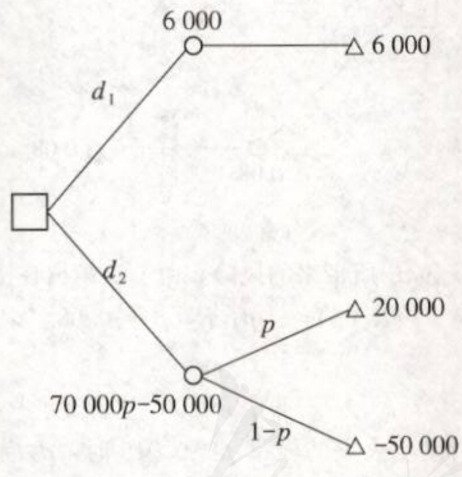
续表

| 问　题 | 设计意图 | 师生活动 |
|---|---|---|
| (7) 用状态分布列的估计值代替精确值所得的最优决策是什么? | 引导学生完成实例. | 教师提出问题，学生给出答案. 教师将答案用另一种颜色的粉笔标注到决策点的下方.<br>教师总结：用状态分布列的估计值代替精确值得到了不同的决策结果，即确实存在用分布列的估计值代替精确值改变最优决策结果的实例，因此研究状态分布列的变化对决策结果的影响是一个有应用价值的问题.<br>教师总结：在决策问题中，状态分布列的变化对于决策结果的影响是一个有应用价值的问题. 下一节中我们将通过案例演示分析状态分布列的变化对决策结果的影响的方法，即敏感性分析方法. |

## 五、习题解答

### 习题 3（第 27 页）

1. 用 $d_1$ 表示“将 200 000 元存入银行”，$d_2$ 表示“将 200 000 元买股票”. 根据题目所给的数据，得到完成机会点标注的收益决策树为




（第 1 题）

用 $Q_1(p)$ 和 $Q_2(p)$ 分别表示 $d_1$ 和 $d_2$ 所带来的平均收益，由上决策树在机会点的标注得

$$Q_1(p)=6\ 000,$$

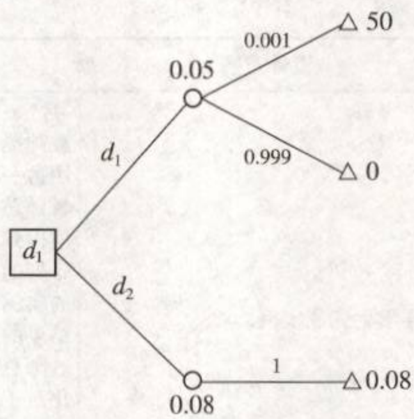
$$Q_2(p)=70\ 000p-50\ 000.$$

求解方程

$$70\ 000p-50\ 000=6\ 000,$$

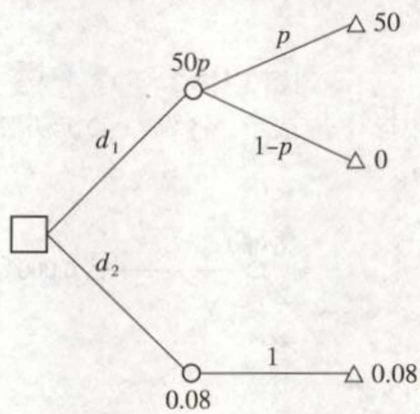
得 $p=0.8$. 因此当 $p>0.8$ 时，$d_2$ 为最优行动方案，此时应该选择“将 200 000 元买股票”；否则，$d_1$ 为最优行动方案，此时应该选择“将 200 000 元存入银行”.

2. 用 $d_1$ 表示“不购买家庭财产保险”，$d_2$ 表示“购买家庭财产保险”. 根据题目所给的数据，得到完成机会点和决策点标注的损失决策树为




（第 2 题①）

因此按照所给条件，$d_1$ 为最优决策，即不应该购买家庭财产保险．但按照题目的背景，家庭一年内发生火灾的概率应为估计值，因此有必要进行敏感性分析，考察决策的结论对于这个估计值是否敏感．用 $p$ 表示家庭一年内发生火灾的概率，现在完成了机会点标注的损失决策树变为




（第 2 题②）

用 $R_1(p)$和 $R_2(p)$分别表示 $d_1$ 和 $d_2$ 所带来的风险，由上决策树在机会点的标注得

$$R_1(p)=50p;\ R_2(p)=0.08.$$

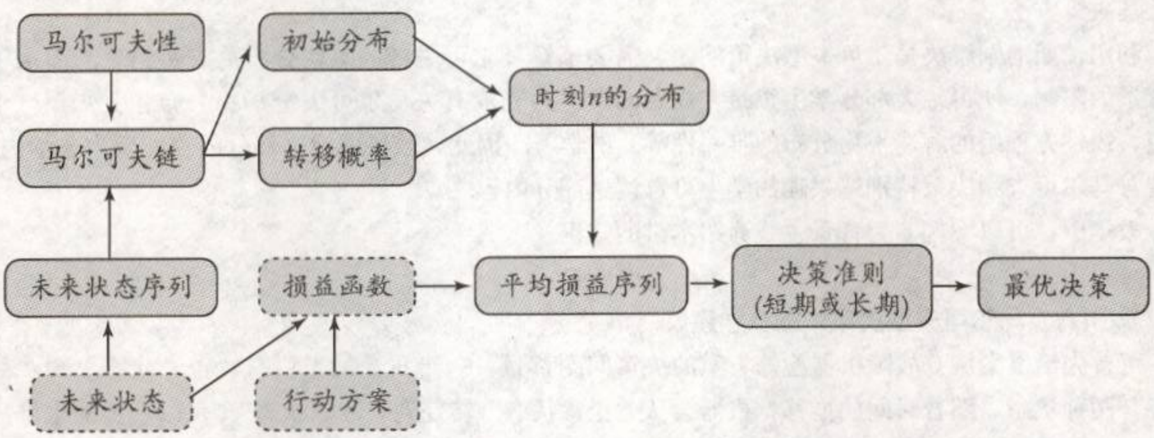
求解方程

$$50p=0.08,$$

得 $p=0.016$．因此，当一年内发生火灾的概率 $p>0.016$ 时，$d_2$ 为最优行动方案，此时应该选择“购买家庭财产保险”；否则，$d_1$ 为最优行动方案，此时应该选择“不购买家庭财产保险”．
由于 $p=0.001$，因此应该选择“不购买家庭财产保险”．

# 第四讲 马尔可夫型决策简介

## 一、本讲知识结构




在上面的知识框图中，虚线框中的知识在第一讲中已经介绍，它们和本讲所要介绍的知识关系密切.

## 二、教学重点与难点

重点：

1. 理解马尔可夫性与马尔可夫链的基本概念；
2. 理解短期准则；
3. 了解长期准则；
4. 理解马尔可夫型决策.

难点：

1. 理解马尔可夫性；
2. 理解转移概率和时刻 $n$ 的分布之间的区别与联系.

## 三、编写意图与教学建议

在决策问题中，行动方案决定着未来状态变化规律，从而决定了未来的损失或收益的变化规律. 一种常见的情况是各个行动方案对于未来状态变化规律的影响会持续一段时间，结果导致行动方案所带来的损失或收益也在这段时间内随时间而变化. 此时正确利用描述未来状态随着时间变化的概率统计模型，可以帮助我们更精细地刻画行动方案所引起的损失或收益情况，从而能够得到更精细可信的最优决策结果.

马尔可夫链是一个著名的概率模型，它用转移概率来描述状态随时间变化的规律，在自然科学和社会科学中有着广泛的应用，其理论研究也成为概率论与数理统计领域的一个重要分支. 教科书试图通过案例 5 使学生理解有关马尔可夫链的一些基本概念（马尔可夫性、转移概率、初始分布和在时刻

$n$ 的分布等)，马尔可夫型决策的基本原理建立在这些概念之上.

我们知道，对于给定的行动方案，其执行后所产生的损失或收益由未来状态所决定. 如果未来状态随着时间变化的规律可以用一个马尔可夫链描述，那么这个行动方案所带来的损失或收益情况也会随机变化，其规律也可以借助于这个马尔可夫链的初始分布和转移概率来描述. 这样执行这个行动方案后，其在各个单位时间内的风险或平均收益可以通过损失函数或收益函数、马尔可夫链的初始分布和转移概率来精细计算，进而可以通过累计风险或平均收益（短期准则或长期准则）来决策，这就是马尔可夫型决策的基本想法. 教科书通过案例 6 展示上述想法，使学生了解马尔可夫型决策的基本原理及其决策方法.

利用长期准则解决马尔可夫型决策问题，需要了解马尔可夫链的平稳分布的有关结论. 而由于知识背景的限制，使得绝大部分学生很难在规定的课时内完成有关马尔可夫链平稳分布相关知识（平稳分布、线性方程组的解、平稳分布的唯一性等）的学习. 因此，教科书把这部分内容处理为选学内容，那些对马尔可夫型决策特别感兴趣的学生可选读这部分内容.

教学中，可以案例 6 为背景主线介绍本讲的知识.

### 1. 引入“马尔可夫型决策”的教学建议

可首先给出案例 6 故障机器检修方案的决策问题背景：一台自动加工机有“正常状态”和“故障状态”两种状态，随着时间的推移，机器会从“正常状态”转变到“故障状态”. 可以选择的维修故障机器的行动方案为

$d_1$：一旦机器出故障，就采用抢修方案 1.

$d_2$：一旦机器出故障，就采用抢修方案 2.

然后通过问题“为进行决策，需要知道执行 $d_1$ 后都可能出现哪些状态……哪位同学能够给出答案?”引导学生发现新问题：若用第一讲的方式理解状态（一个行动方案只能导致一个随机变化的状态)，则难以确定到底有多少个可能发生的状态（详见后面教学设计案例问题 2 的注解)，从而难以定义损益函数；若将“正常状态”和“故障状态”看成两种状态，则容易确定损益函数，但是执行一个行动方案将导致一个随着时间变化的状态序列.

引入上述问题之后，再通过举例说明这类决策问题广泛存在，使学生体会马尔可夫型决策方法产生的背景，锻炼它们发现问题和提出问题的能力.

### 2. “马尔可夫性与马尔可夫链”的教学建议

教学中，可以借用前面的维修机器决策问题的背景，引入案例 5. 然后通过问题“在第 $n$ 小时可能出现的机器检查结果是什么？这个结果可以预知吗?”引导学生发现这个结果具有随机性. 接着引导学生借助于随机变量 $X_n$ 表示检查的结果，为进一步研究案例作准备.

教学中，教师可先引导学生利用已掌握的概率加法公式和条件概率知识获取计算 $X_1$ 的分布列，并在这个过程中引入条件分布列概念. 在此基础上教师可以通过问题“获取 $X_{n+1}$ 的分布列的思路是什么?”引导学生发现可以通过条件概率和 $X_n$ 的分布列来获取 $X_{n+1}$ 的分布列.

对于教科书第 29 页的第二个“思考”，必要时教师可以提示需要按照机器在第 $n$ 小时所处状态，分两种情况分别讨论，以引导学生能够类比于第一个“思考”的解答思路思考，得到教科书上同样的结论.

教科书提出第 30 页第一个“思考”的目的在于引导学生体会 $X_{n+1}$ 的条件分布的特点，为引入“马尔可夫性”作铺垫. 在完成这个“思考”的讨论之后，可以通过问题“如果已经知道 $X_n=2$，以及 $X_{n-1}$，…，$X_0$ 的取值，$X_{n+1}$ 的条件概率分布规律会改变吗?”引导学生得到结论：这个条件概率分布

不会改变，与“思考”的答案相同. 进而教师就可以抽象出随机变量序列的马尔可夫性的概念.

3. “转移概率与转移概率矩阵”的教学建议

教科书在第 30 页第二个“思考”中假设“已知……$X_n$ 的分布列”，由于“条件分布列”和“分布列”比较类似，而教科书前面又是在讨论条件分布列，容易引起学生对概念的混淆. 教师在提出这个“思考”之前，可以通过问题“$X_n$ 的分布列与已知 $X_{n-1}$ 情况下 $X_n$ 的条件分布列的定义相同吗?”引导学生注意这个问题.

另外，如果感觉学生解答教科书第 30 页第二个“思考”的难度过大，可以将它分成两个问题. 首先通过问题“若已知第 $n$ 小时机器的状态 $X_n$ 的分布列为

| $X_n$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P(x_n)$ | $p_1^{(n)}$ | $p_2^{(n)}$ |

可以用 $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ 表示 $P(X_n=i,\ X_{n+1}=j)$ 吗?”引导学生利用条件概率的定义得到结论：

$$P(X_n=i,\ X_{n+1}=j)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)P(X_n=i)=p_i^{(n)}P(X_{n+1}=j\mid X_n=i).$$

然后通过问题“若已知 $P(X_n=i,\ X_{n+1}=j)$，能够求出 $X_{n+1}$ 的分布列吗?”引导学生利用概率的加法公式得到结论：

$$P(X_{n+1}=j)=P(X_n=1,\ X_{n+1}=j)+P(X_n=2,\ X_{n+1}=j).$$

在此基础上，教师归纳总结得到教科书第 31 页公式 (3). 在引入马尔可夫链的转移概率和转移概率矩阵的概念之前，教师可以先引导学生复习向量和矩阵的乘法计算公式，然后进一步分析公式 (3) 与这个计算公式之间的类似性，从而可以自然地引出马尔可夫链的转移概率矩阵、在时刻 $n$ 的分布以及这种分布的递推计算公式.

教师可以根据学生的具体情况，决定是否归纳总结一般马尔可夫链中有关“在时刻 $n$ 的分布 $\boldsymbol{p}^{(n)}$”“转移概率矩阵”的概念，以及相关的基本结论：若马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的所有状态为 1，2，…，$m$，则

(1) 它在时刻 $n$ 的分布 $\boldsymbol{p}^{(n)}$ 是一个 $m$ 维行向量，其第 $i$ 个分量等于事件 $\{X_n=i\}$ 出现的概率，即

$$\boldsymbol{p}^{(n)}=(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\quad \cdots\quad P(X_n=m)).$$

(2) 它的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是一个 $m\times m$ 阶矩阵，该矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列位置的元素等于已知 $\{X_0=i\}$ 时事件 $\{X_1=j\}$ 的概率，即

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} P(X_1=1\mid X_0=1) & P(X_1=2\mid X_0=1) & \cdots & P(X_1=m\mid X_0=1)\\ P(X_1=1\mid X_0=2) & P(X_1=2\mid X_0=2) & \cdots & P(X_1=m\mid X_0=2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ P(X_1=1\mid X_0=m) & P(X_1=2\mid X_0=m) & \cdots & P(X_1=m\mid X_0=m)\end{pmatrix}.$$

(3) 它在时刻 $n$ 的分布可以由初始分布 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ 和转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 通过下列公式递推得到：

$$\boldsymbol{p}^{(1)}=\boldsymbol{p}^{(0)}\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{p}^{(2)}=\boldsymbol{p}^{(1)}\boldsymbol{P},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}^{(n)}=\boldsymbol{p}^{(n-1)}\boldsymbol{P}.$$

4. “马尔可夫型决策简介”的教学建议

教科书通过案例 6 介绍马尔可夫型决策方法，而案例 6 与案例 5 来自同一实际问题背景. 有案例 5 的结果，学生不难理解案例 6 中的各个推导公式.

教学中，在案例决策前有必要让学生认识到：在这个案例的背景之下，无论采用哪一个行动方案，这台机器在任何一小时内都会产生收益或损失，任何相邻两个整数钟点之间的收益或损失都由所采用

的行动方案和机器在这一小时中的状态所决定. 这样就可以使学生更好地理解为什么要推导各个时间段内平均收益，为什么有两个不同的决策准则，即短期准则和长期准则.

另外，在 $Q_n(d_i)$ 的数值计算过程中，可以通过下面的步骤减少计算量：

(1) 确定在行动方案 $d_i$ 下马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}_i$.

(2) 利用递推的方法依次计算 $\boldsymbol{P}_i^0\boldsymbol{q}_i$，$\boldsymbol{P}_i^1\boldsymbol{q}_i$，$\boldsymbol{P}_i^2\boldsymbol{q}_i$，…，$\boldsymbol{P}_i^n\boldsymbol{q}_i$，其中 $\boldsymbol{q}_i$ 是收益矩阵的第 $i$ 列.

(3) 计算

$$Q_n(d_i)=\boldsymbol{p}^{(0)}(\boldsymbol{P}_i^0\boldsymbol{q}_i+\boldsymbol{P}_i^1\boldsymbol{q}_i+\boldsymbol{P}_i^2\boldsymbol{q}_i+\cdots+\boldsymbol{P}_i^n\boldsymbol{q}_i),$$

其中 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ 为初始分布.

## 四、教学设计案例

### 马尔可夫性与马尔可夫链（1课时）

**1. 教学任务分析**

(1) 理解马尔可夫性和马尔可夫链的概念；

(2) 能够根据实际问题背景判断随机变量序列 $\{X_n\}$ 是否具有马尔可夫性.

**2. 教学重点与难点**

理解马尔可夫性.

**3. 教学任务流程**

引导学生简单复习决策问题中三要素

↓

引导学生探讨案例5、6背景下建立损益函数的困难

↓

引导学生发现案例背景中状态变化特征

↓

引导学生利用条件概率知识研究状态变化特征

↓

引导学生认识马尔可夫性与马尔可夫链

↓

引入转移概率、初始分布和在时刻$n$的分布的概念

4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问　题</th><th>设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>(1) 风险型决策的三要素是什么？</td><td>引导学生复习风险型决策三要素，为分析下一问题作准备.</td><td>教师提问，学生回忆并回答. 教师总结：在实际决策问题中，问题涉及的所有行动方案往往是不言自明，而损益函数和状态分布列则和未来可能出现的所有状态有关，因此在解决实际决策问题时，首先要确定各个行动方案导致的状态.</td></tr>
<tr><td>(2) 在自动加工机的维修方案决策问题中，如何确定两个行动方案所导致的状态？按你所确定的状态之下，容易确定收益函数吗？</td><td>培养学生分析问题能力，引导学生注意到确定状态的目的是为了确定损益函数和状态分布列，应该让所确定的状态便于构造损益函数和状态分布列. 另外还为引入马尔可夫链作准备.</td><td>教师介绍自动加工机的维修方案决策问题案例背景. 一台运行的机器，有“正常状态”和“故障状态”两种状态，随着时间的推移，机器会从“正常状态”转变到“故障状态”.<br>可以选择的维修故障机器的行动方案为<br>$d_1$：一旦机器出故障，就采用抢修方案 1.<br>$d_2$：一旦机器出故障，就采用抢修方案 2.<br>然后提出问题，学生思考并回答. 教师归纳总结. 必要的时候，教师可以通过问题“损失函数中的状态和这里的机器工作状态有何不同?”提示学生注意两个状态的不同之处，还可以通过问题“状态是行动方案可能导致的结果，这里的行动方案可能导致的结果是什么?”进一步引导学生获取答案. 如果学生还不能获取答案，教师可以在学生回答的基础上给出问题答案.</td></tr>
<tr><td colspan="3">问题 (2) 注解：学生回答问题时，遇到的主要困难会是：在前面介绍的风险型决策问题中，损益函数和状态分布列中的状态与时间无关，而这里的机器工作状态随着时间的变化而变化，即这里的机器工作状态和前面讲的状态不同. 为得到前面讲的状态，可以将行动方案导致的各个小时的工作状态所形成的序列 $Z_0$，$Z_1$，…，$Z_n$，…看成状态（即把这样的一个序列的整体看成一个状态），其中 $Z_n$ 代表第 $n$ 小时机器所处的工作状态（其取值或为“正常状态”或为“故障状态”）. 但无穷多个不同的状态（这样的序列有无穷多个，不同的序列对应于不同的状态）为构建收益函数和状态分布列制造了障碍，而要克服这些障碍还需要很多新知识. 因此将机器的工作状态序列定为状态不容易确定收益函数.</td></tr>
<tr><td>(3) 为使得收益函数容易确定，可以将机器的“正常状态”和“故障状态”看成两个状态. 可以用下面的随机变量表示机器在第 $n$ 小时的工作状态：<br>$X_n=\begin{cases}1, & \text{第 } n \text{ 小时机器处于正常状态,}\\ 2, & \text{第 } n \text{ 小时机器处于故障状态,}\end{cases}$<br>执行一个行动方案将导致一个随时间变化的随机状态序列 $\{X_n\}$，这个序列中随机变量 $X_n$ 是离散型随机变量吗？</td><td>为探究马尔可夫性作准备.</td><td>教师提问，学生回答.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>问　题</th><th>设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr>
<td>(4) 如果知道正常工作的机器经过1小时工作后出现故障的概率为0.05，故障机器在一小时内被维修好的概率为0.6，$X_1$ 的分布列可以用下面的表格表示吗？
<table>
<tr><td>$X_1$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$P$</td><td>0.95</td><td>0.05</td></tr>
</table>
</td>
<td>引导学生理解所给概率的真实含义.</td>
<td>教师提问，学生回答．教师总结：这个表不是 $X_1$ 的分布列表．但在已知 $\{X_0=1\}$ 的情况下，$X_1$ 的条件分布列可以用这个表格中的数据来表示．为了区分 $X_1$ 的条件分布列表与 $X_1$ 的分布列表，我们将表中第二行第一个表格中的 $P$ 改为 $P(\cdot \mid X_0=1)$（教师此时可修改这个表格中的符号）．类似地，
<table>
<tr><td>$X_1$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$P(\cdot \mid X_0=2)$</td><td>0.6</td><td>0.4</td></tr>
</table>
表示已知 $\{X_0=2\}$ 的情况下，$X_1$ 的条件分布列.</td>
</tr>
<tr>
<td>(5) 若 $P(X_0=1)=p$，能用 $p$ 表示 $P(X_0=1,\ X_1=1)$ 吗？进而能表示 $X_1$ 的分布列吗？</td>
<td>引导学生复习巩固条件概率的知识，使学生理解可以用 $X_0$ 的分布列和已知的条件概率信息得到 $X_1$ 的分布列.</td>
<td>教师提问，学生思考并回答．必要时可以引导学生复习条件概率的定义．教师总结：可以，由条件概率的定义知<br>
$P(X_0=1,\ X_1=1)$<br>
$=P(X_0=1)P(X_1=1 \mid X_0=1)$<br>
$=0.95p$.<br>
类似地，<br>
$P(X_0=2,\ X_1=1)$<br>
$=P(X_0=2)P(X_1=1 \mid X_0=2)$<br>
$=0.6(1-p)$.<br>
利用概率的加法公式得<br>
$P(X_1=1)$<br>
$=P(X_0=1,\ X_1=1)+P(X_0=2,\ X_1=1)$<br>
$=0.6+0.35p$.<br>
类似地，<br>
$P(X_1=2)$<br>
$=P(X_0=1,\ X_1=2)+P(X_0=2,\ X_1=2)$<br>
$=P(X_0=1)P(X_1=2 \mid X_0=1)+P(X_0=2)P(X_1=2 \mid X_0=2)$<br>
$=0.4-0.35p$.<br>
这样用 $X_0$ 的分布列和已知的条件概率信息得到 $X_1$ 的分布列表
<table>
<tr><td>$X_1$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$P$</td><td>$0.6+0.35p$</td><td>$0.4-0.35p$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>(6) 获取 $X_{n+1}$ 的分布列的思路是什么？</td>
<td>引导学生通过类比的方法获取解决问题的思路，同时引入条件概率 $P(\cdot \mid X_n=1)$ 和 $P(\cdot \mid X_n=2)$，为介绍马尔可夫性作铺垫.</td>
<td>教师提问题，学生思考并回答．必要时教师可提示可以用获取 $X_1$ 的分布列的思路．教师总结：可以通过 $X_n$ 的分布列和条件概率<br>
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)$，$P(X_{n+1}=2 \mid X_n=1)$，<br>
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)$，$P(X_{n+1}=2 \mid X_n=2)$，<br>
获取 $X_{n+1}$ 的分布列.</td>
</tr>
<tr>
<td>(7) 根据所给的条件，上面的条件概率与 $n$ 有关系吗？这些条件概率的值是什么？</td>
<td>使学生进一步理解根据实际问题的背景确定条件概率方法，同时发现此案例中的特点：这些条件概率与 $n$ 无关.</td>
<td>教师提问，学生回答．教师总结：这些条件概率与 $n$ 无关，且<br>
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)=0.95$，<br>
$P(X_{n+1}=2 \mid X_n=1)=0.05$，<br>
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)=0.60$，<br>
$P(X_{n+1}=2 \mid X_n=2)=0.40$.</td>
</tr>
</table>

续表

| 问题 | 设计意图 | 师生活动 |
|---|---|---|
| (8) 根据所给条件，$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=1)$与$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)$相等吗？ | 为引入马尔可夫性作准备. | 教师提问，学生思考并回答. 教师总结：当已知事件$\{X_n=1\}\cap\{X_{n-1}=1\}$发生的情况下，能够确认机器在第 $n$ 小时处于正常工作状态，因此机器在第 $n+1$ 小时还处于正常工作状态的概率为 0.95，即<br>$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=1)$<br>$=0.95=P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)$. |
| (9) 根据所给条件，对于任何给定的数 $k\in\{1, 2\}$ 和 $i_m\in\{1, 2\}$，$m=0, 1, \cdots, n$，条件概率 $P(X_{n+1}=k \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0)$与$P(X_{n+1}=k \mid X_n=i_n)$相等吗？ | 引入马尔可夫性. | 教师提出问题，学生思考并回答. 必要时教师可以提示这种 $X_{n+1}$ 的条件概率只是由 $X_n$ 的取值完全决定. 教师总结：<br>$P(X_{n+1}=k \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0)=P(X_{n+1}=k \mid X_n=i_n)$. (＊)<br>如果把第 $n$ 小时理解为现在，把第 $n$ 小时之前理解为过去，把第 $n+1$ 小时理解为将来，则上面的等式可以解释为：在已知现在的情况之下，将来的随机变化规律与过去发生的事件无关. 1906 年，科学家安德烈·马尔可夫(A. A. Markov，1856—1922) 以性质（＊）为特征建立起一类概率模型，后人称为马尔可夫链，并将（＊）式称为马尔可夫性.<br>在实际应用中，人们通常根据问题的背景确认所关心的随机变量序列$\{X_n\}$是否具有马尔可夫性，例如，在上面的案例中，当已经知道 $X_n$ 取值的情况下，$X_{n+1}$ 的条件分布就与第 $n$ 小时以前发生的事情没有关系了，所以$\{X_n\}$具有马尔可夫性，即它为马尔可夫链. |
| (10) 某人在甲和乙两个不同的城市从事维修指导工作，每天他变换工作城市的概率为 0.6. 定义<br>$X_n=\begin{cases}1, & \text{第 } n \text{ 天他在甲城工作,}\\ 2, & \text{第 } n \text{ 天他在乙城工作,}\end{cases}$<br>随机变量序列$\{X_n\}$具有马尔可夫性吗？ | 提高学生在实际问题中识别马尔可夫链的能力. | 教师提问题，学生回忆马尔可夫性的直观含义并给出答案. |

## 五、习题解答

### 习题 4.1（第 32 页）

1. 略.

2. (1) 用 1 表示“正常状态”，2 表示“故障状态”，则 $X_n$ 为取值于 1 和 2 的随机变量. 根据题意，在已知 $X_n$ 取值为 $i$ 的情况下，$X_{n+1}$的分布与 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$的取值没有关系，即随机变量序列$\{X_n\}$为马尔可夫链.

(2) 显然，

$$P(X_1=1 \mid X_0=1)=0.99, \ P(X_1=2 \mid X_0=1)=0.01,$$

$$P(X_1=1|X_0=2)=0,\ P(X_1=2|X_0=2)=1.$$

所以马尔可夫链$\{X_n\}$的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}0.99 & 0.01\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

## 习题 4.2（第 36 页）

1. 略.
2. 初始分布为$(1\quad 0)$，收益矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}10 & 10\\ -9 & -6\end{pmatrix},$$

从而行动方案 $d_1$ 和 $d_2$ 在时间段$[n,\ n+1)$内的平均收益分别为

$$Q(d_1,\ n)=(1\quad 0)\boldsymbol{P}_1^n\begin{pmatrix}10\\ -9\end{pmatrix},\ n=0,\ 1,\ \cdots,\ 11,$$

$$Q(d_2,\ n)=(1\quad 0)\boldsymbol{P}_2^n\begin{pmatrix}10\\ -6\end{pmatrix},\ n=0,\ 1,\ \cdots,\ 11,$$

其中

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}.$$

分别为采用行动方案 $d_1$ 和 $d_2$ 时马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的转移概率矩阵．所以机器在 12 小时内，采用行动方案 $d_1$ 和 $d_2$ 的平均收益分别为

$$Q_{11}(d_1)=\sum_{n=0}^{11}Q(d_1\ ,\ n)=109.052\ 6,$$

$$Q_{11}(d_2)=\sum_{n=0}^{11}Q(d_2\ ,\ n)=107.124\ 3.$$

由 $Q_{11}(d_1)>Q_{11}(d_2)$知行动方案 $d_1$ 的平均收益较大，因此应该选用加急检修的方案.

注：(1) 鼓励学生用计算机完成题目中的数值计算．为减少 $Q_{11}(d_1)$的计算工作量，可以利用公式

$$(p_1^{(n)}\quad p_2^{(n)})=(p_1^{(n-1)}\quad p_2^{(n-1)})\boldsymbol{P}_1,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 11,$$

递推计算马尔可夫链在前 11 个时刻的分布，之后计算

$$\left(\sum_{n=0}^{11}(p_1^{(n)}\quad p_2^{(n)})\right)\begin{pmatrix}10\\ -9\end{pmatrix},$$

得到 $Q_{11}(d_1)$．$Q_{11}(d_2)$可用类似的方法计算.

(2) 这里假设了机器出故障的时间都在整数小时．如果没有这种假设，问题变得更复杂，从而更难描述机器在时间段 $[n,\ n+1)$ 内所获收益情况．当能够获得机器在该时间段内出故障时刻的随机变化规律信息，可以帮助我们建立更精确的刻画收益情况的概率统计模型.

## 习题 4.3（第 44 页）

1. 用 $d_1$ 表示“出现故障就进行维修”，$d_2$ 表示“仅出现大故障才进行维修”．定义

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{设备第 } n \text{ 天处于正常状态},\\ 2, & \text{设备第 } n \text{ 天处于小故障状态},\\ 3, & \text{设备第 } n \text{ 天处于大故障状态},\end{cases}$$

则无论采用哪种行动方案，$\{X_n\}$ 都为马尔可夫链．从节约维修费用的角度考虑，损失矩阵为

$$L=\begin{pmatrix}0&0\\3\ 000&0\\6\ 000&6\ 000\end{pmatrix}.$$

在本题问题背景下，应该采用长期准则做决策.

当采用行动方案 $d_1$ 时，$\{X_n\}$ 的转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0.80&0.18&0.02\\1.00&0.00&0.00\\1.00&0.00&0.00\end{pmatrix},$$

其平稳分布 $\boldsymbol{u}=(u_1\quad u_2\quad u_3)$满足方程组

$$\begin{cases}0.8u_1+u_2+u_3=u_1,\\0.18u_1=u_2,\\0.02u_1=u_3,\\u_1+u_2+u_3=1,\end{cases}$$

解方程组得唯一的平稳分布 $\boldsymbol{u}=(0.833\ 3\quad 0.150\ 0\quad 0.016\ 7)$. 从而行动方案 $d_1$ 的平稳风险为

$$R(d_1)=(0.833\ 3\quad 0.150\ 0\quad 0.016\ 7)\begin{pmatrix}0\\3\ 000\\6\ 000\end{pmatrix}=550.2.$$

当采用行动方案 $d_2$ 时，$\{X_n\}$ 的转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0.80&0.18&0.02\\0.00&0.50&0.50\\1.00&0.00&0.00\end{pmatrix},$$

其平稳分布 $\boldsymbol{v}=(v_1\quad v_2\quad v_3)$满足方程组

$$\begin{cases}0.8v_1+v_2=v_1,\\0.18v_1+0.5v_2=v_2,\\0.02v_1+0.5v_2=v_3,\\v_1+v_2+v_3=1,\end{cases}$$

解方程组得唯一的平稳分布 $\boldsymbol{v}=(0.641\ 0\quad 0.230\ 8\quad 0.128\ 2)$. 从而行动方案 $d_2$ 的平稳风险为

$$R(d_2)=(0.641\ 0\quad 0.230\ 8\quad 0.128\ 2)\begin{pmatrix}0\\0\\6\ 000\end{pmatrix}=769.2.$$

综上所述，应该选用平稳风险较小的行动方案 $d_1$，即一旦出现故障就进行维修.

注：在上面的解题过程中应用计算机进行数值计算.

2. 沿用第1题的符号. 现在损失矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}-3\ 000&-3\ 000\\3\ 000&-1\ 000\\6\ 000&6\ 000\end{pmatrix}.$$

从而行动方案 $d_1$ 的平稳风险为

$$R(d_1)=(0.833\ 3\quad 0.150\ 0\quad 0.016\ 7)\begin{pmatrix}-3\ 000\\3\ 000\\6\ 000\end{pmatrix}=-1\ 949.7.$$

行动方案 $d_2$ 的平稳风险为

$$R(d_2)=(0.641\,0\quad 0.230\,8\quad 0.128\,2)\begin{pmatrix}-3\,000\\-1\,000\\6\,000\end{pmatrix}=-1\,384.6.$$

所以应该选用平稳风险较小的行动方案 $d_1$，即一旦出现故障就进行维修.

## III 自我检测题

1. 一位投资者面临两个投资项目可以选择. 若投资项目 1，则投资在市场好的情况下可以获利 20 000元；投资在市场坏的情况下会亏损 10 000. 若投资项目 2，一年后无论市场好坏总可以获利 1 000 元. 若市场好的概率为 0.3，市场差的概率为 0.7，这位投资者应该选择哪个项目进行投资？
2. 某水果商准备购进一批草莓投放市场，购进成本为 6 元/kg，出售价格为 10 元/kg. 草莓在购销过程中将损耗$\frac{1}{11}$. 根据经验，草莓投放市场后三天之内能销售 100 kg 的概率为 0.7，能销售 300 kg 的概率为 0.3. 如果三天之内不能售出的草莓只能以 3 元/kg 的价格处理销售，请用决策树方法确定应该购进 110 kg 草莓还是购进 330 kg 草莓.
3. 某厂准备建立新产品生产线，有以下两种方案可供选择：

   $d_1$：改建本厂生产线；

   $d_2$：从国外引进自动生产线.

   生产线投入生产之后，市场对于新产品需求量可分为两种：

   $h_1$：需求量高；

   $h_2$：需求量低.

   经过核算，得到收益函数如下：

$$q(d_i,\ h_j)=\begin{cases}700, & i=1,\ j=1,\\ -100, & i=1,\ j=2,\\ 1\,000, & i=2,\ j=1,\\ -500, & i=2,\ j=2.\end{cases}$$

   若出现需求量高的概率为 $p$，则当 $p$ 取何值时应该采取“改建本厂生产线”的行动方案？当 $p$ 取何值时应该采取“从国外引进自动生产线”的行动方案？
4. 假设对于处于健康状态的人，一年后转为疾病状态的概率为 0.005；对于处于疾病状态中的人，一年后转为健康状态的概率为 0.5. 有一种医疗保险产品，有效期为 5 年，保险费为 0.12 万元. 该医疗保险能使投保人在保险期内从疾病状态（一年后）转为健康状态的概率提升到 0.8. 某人在健康状态下工作年收入 6 万元，在疾病状态下工作年收入 2 万元. 如果此人正处于健康状态，他是否应该购买这种医疗保险产品？

**参考答案**

1. 用 $d_1$ 和 $d_2$ 分别表示“投资项目 1”和“投资项目 2”两个行动方案，用 $h_1$ 和 $h_2$ 分别表示“市场好”和“市场坏”两种状态，则

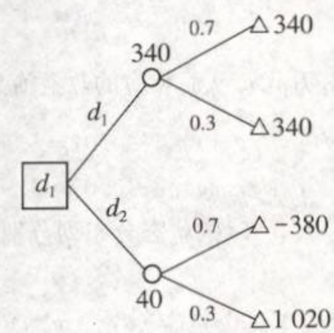
$$(Q(d_1)\quad Q(d_2))=(0.3\quad 0.7)\begin{pmatrix}20\ 000 & 1\ 000\\ -10\ 000 & 1\ 000\end{pmatrix}=(-1\ 000\quad 1\ 000),$$

即项目 2 的平均收益大，所以这位投资者应该选择项目 2 进行投资.

2. 用 $d_1$ 和 $d_2$ 分别表示"购进 110 kg 草莓"和"购进 330 kg 草莓"两个行动方案，用 $h_1$ 和 $h_2$ 分别表示"三天内能销售 100 kg 草莓"和"三天内能销售 300 kg 草莓"两种状态，则收益函数为

$$q(d_1,\ h_j)=100\times10-110\times6=340,\ j=1,\ 2,$$
$$q(d_2,\ h_1)=100\times10+200\times3-330\times6=-380,$$
$$q(d_2,\ h_2)=300\times10-330\times6=1\ 020.$$

由题目所给数据和上述收益函数计算结果可以得到决策树为




（第 2 题）

因此应该购进 110 kg 草莓.

3. 由题目所给条件，得到 $d_1$ 的平均收益为

$$Q(d_1)=700p-100(1-p)=800p-100.$$

$d_2$ 的平均收益为

$$Q(d_2)=1\ 000p-500(1-p)=1\ 500p-500.$$

解方程

$$800p-100=1\ 500p-500,$$

得 $p=\frac{4}{7}$. 因此，当 $0\leqslant p<\frac{4}{7}$时，应该选用行动方案 $d_1$；当$\frac{4}{7}<p\leqslant1$ 时，应该选用行动方案 $d_2$；当 $p=\frac{4}{7}$时，两个行动方案的平均收益相等，可以任选一个行动方案.

综上所述：当 $0\leqslant p<\frac{4}{7}$时，应该采取"改建本厂生产线"的行动方案；当$\frac{4}{7}<p\leqslant1$ 时，应该采取"从国外引进自动生产线"的行动方案.

4. 用 $d_1$ 和 $d_2$ 分别表示"不购买保险"和"购买保险"两个行动方案，定义

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{此人第 } n \text{ 年处于健康状态},\\ 2, & \text{此人第 } n \text{ 年处于疾病状态}.\end{cases}$$

无论采用行动方案 $d_1$，还是采用行动方案 $d_2$，依题意可知 $\{X_n\}$ 都是马尔可夫链，初始分布为 $(1\quad 0)$.

当采用行动方案 $d_1$ 后，$\{X_n\}$ 的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0.995 & 0.005\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}.$$

相应的收益值为

$$q(d_1,\ 1)=6,\ q(d_1,\ 2)=2.$$

利用递推计算得到 $X_0$，$X_1$，$X_2$，$X_3$，$X_4$，$X_5$ 的状态分布列分别为

$(p_1^{(0)}\quad p_2^{(0)})=(1\quad 0)$，　$(p_1^{(1)}\quad p_2^{(1)})=(0.995\quad 0.005)$，

$(p_1^{(2)}\quad p_2^{(2)})=(0.992\,5\quad 0.007\,5)$，　$(p_1^{(3)}\quad p_2^{(3)})=(0.991\,3\quad 0.008\,7)$，

$(p_1^{(4)}\quad p_2^{(4)})=(0.990\,7\quad 0.009\,3)$，　$(p_1^{(5)}\quad p_2^{(5)})=(0.990\,4\quad 0.009\,6)$.

行动方案 $d_1$ 在前 6 年的平均收益为

$$Q_5(d_1)=\left(\sum_{n=0}^{5}(p_1^{(n)}\quad p_2^{(n)})\right)\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=35.839\,6.$$

当采用行动方案 $d_2$ 后，$\{X_n\}$ 的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0.995 & 0.005\\0.8 & 0.2\end{bmatrix}.$$

前 6 年的平均保费为 $\frac{0.12}{6}=0.02$ 万元，从而相应的收益值为

$$q(d_2,\ 1)=6-0.02=5.98,$$
$$q(d_2,\ 2)=2-0.02=1.98.$$

类似地，得 $X_0$，$X_1$，$X_2$，$X_3$，$X_4$，$X_5$ 的状态分布列分别为

$(u_1^{(0)}\quad u_2^{(0)})=(1\quad 0)$，　$(u_1^{(1)}\quad u_2^{(1)})=(0.995\quad 0.005)$，

$(u_1^{(2)}\quad u_2^{(2)})=(0.994\,0\quad 0.006\,0)$，　$(u_1^{(3)}\quad u_2^{(3)})=(0.993\,8\quad 0.006\,2)$，

$(u_1^{(4)}\quad u_2^{(4)})=(0.993\,8\quad 0.006\,2)$，　$(u_1^{(5)}\quad u_2^{(5)})=(0.993\,8\quad 0.006\,2)$.

行动方案 $d_2$ 在前 6 年的平均收益为

$$Q_5(d_2)=\left(\sum_{n=0}^{5}(u_1^{(n)}\quad u_2^{(n)})\right)\begin{bmatrix}5.98\\1.98\end{bmatrix}=35.761\,8.$$

由于 $Q_5(d_1)>Q_5(d_2)$，所以此人不应该购买这种医疗保险.

注：由于保险期是 5 年，所以此人第 6 年的收入情况还受是否投保的影响，因此计算平均收益应该考虑 6 年的平均收益.