普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4—5

不等式选讲

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书教师教学用书：A 版. 数学 . 4-5，不等式选讲：选修 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —2版. — 北京：人民教育出版社，2007.4（2019.7重印）

ISBN 978-7-107-19154-1

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 021524 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-5 A版 不等式选讲 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

网 址 http://www.pep.com.cn

经 销 全国新华书店

印 刷 保定市中画美凯印刷有限公司

版 次 2007 年 4 月第 2 版

印 次 2019 年 7 月第 25 次印刷

开 本 890 毫米 ×1240 毫米 1/16

印 张 3.75

字 数 90 千字

定 价 9.10元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

主要编者：俞求是　田载今　章建跃
责任编辑：李龙才
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

提问是创新的开始．“看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神．

3．“思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括．

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”．

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平. 特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{推广} & \\
 & \uparrow & \\
\text{类比} \longleftarrow & \text{当前内容} & \longrightarrow \text{类比} \\
 & \downarrow & \\
 & \text{特殊化} &
\end{array}
$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应的教科书内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本专题知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议等.

(1) 课程目标与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 本专题知识结构框图展示了本专题的知识结构，以利于教师从整体上把握本专题知识发生、发展的脉络；

(3) 内容安排说明按照教科书内容的编排顺序，说明内容的前后逻辑关系，并对本专题的重点、难点进行说明；

(4) 课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本讲知识结构、教学重点与难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本讲知识结构讲述本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(3) 教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题所具备的巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

另外，我们专门制作了一套“信息技术支持系统”，教学中有需求的可以从人教网上下载.

本书是选修课程数学 4-5 的教师教学用书，包含不等式和绝对值不等式、证明不等式的基本方法、柯西不等式与排序不等式、数学归纳法证明不等式等四讲内容. 全书共 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲	不等式和绝对值不等式	约 5 课时
第二讲	证明不等式的基本方法	约 4 课时
第三讲	柯西不等式与排序不等式	约 4 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要．由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务．

目录

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

自然界中存在着大量的不等量关系和等量关系. 不等关系和相等关系是基本的数学关系，它们在数学研究和数学应用中起着重要的作用.

本专题将介绍一些重要的不等式和它们的证明、数学归纳法和它的简单应用. 本专题特别强调不等式及其证明的几何意义与背景，以加深学生对这些不等式的数学本质的理解，提高学生的逻辑思维能力和分析问题、解决问题的能力.

2. 学习目标

(1) 回顾和复习不等式的基本性质和基本不等式.

(2) 理解绝对值的几何意义，并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式：

① $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

② $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$；

③ 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式：

$|ax+b|\leqslant c$；

$|ax+b|\geqslant c$；

$|x-c|+|x-b|\geqslant a$.

(3) 认识柯西不等式的几种不同形式. 理解它们的几何意义.

① 证明柯西不等式的向量形式：$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|$.

② 证明：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

③ 证明：

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}.$$

(通常称作平面三角不等式).

(4) 用参数配方法讨论柯西不等式的一般情况：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2.$$

(5) 用向量递归方法讨论排序不等式.

(6) 了解数学归纳法的原理及其使用范围，会用数学归纳法证明一些简单问题.

(7) 会用数学归纳法证明贝努利不等式：

$$(1+x)^n>1+nx\ (x>-1, n\ \text{为正整数}).$$

了解当 n 为实数时贝努利不等式也成立.

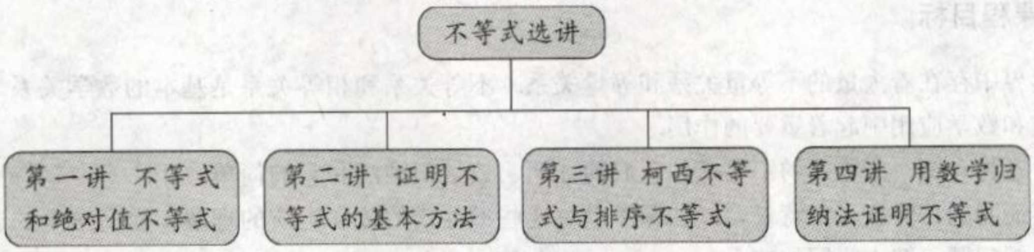
(8) 会用上述不等式证明一些简单问题. 能够利用平均值不等式、柯西不等式求一些特定函数的极值.

(9) 通过一些简单问题了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法.

(10) 完成一个学习总结报告. 报告应包括三方面的内容：① 知识的总结，对本专题介绍的不等式中蕴涵的数学思想方法和数学背景进行总结；② 拓展，通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨不等式的应用；③ 对不等式学习的感受、体会.

二、内容安排

1. 本专题知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本书共分四讲.

第一讲，“不等式和绝对值不等式”. 这是本专题的最基本内容，是其余三讲的基础. 本讲的第一部分类比等式的基本性质，先讨论不等式的基本性质，这是关于不等式在运算方面的一些最基本法则. 接着讨论基本不等式，并将其推广到一般形式的均值不等式. 在介绍基本性质和基本不等式的过程中，强调了用它们解决一些简单问题. 第二部分中，类比得出不等式基本性质的过程，采用数形结合思想方法，讨论有关绝对值不等式的性质及绝对值不等式的解法.

第二讲，“证明不等式的基本方法”. 本讲介绍证明不等式的几种常用方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法. 其中比较法是证明不等式的最基本方法. 教科书结合证明方法的介绍，对相应的数学思想进行及时概括. 本讲内容对进一步讨论不等式提供了思想方法的基础.

第三讲，“柯西不等式和排序不等式”. 本讲介绍两个经典不等式：柯西不等式和排序不等式，以及它们的简单应用. 柯西不等式是基本而重要的不等式，是推证其他许多不等式的基础，有着广泛的应用. 教科书首先介绍二维形式的柯西不等式，再从向量的角度来认识柯西不等式，引入向量形式的柯西不等式，再介绍一般形式的柯西不等式. 排序不等式也是基本而重要的不等式，一些重要不等式可以看成是排序不等式的特殊情形.

第四讲，“用数学归纳法证明不等式”. 本讲介绍数学归纳法及其在证明不等式中的应用. 教科书首先结合具体例子，提出寻找一种用有限步骤处理无限多个对象的方法的问题. 然后，类比多米诺骨牌游戏，引入用数学归纳法证明命题的方法，并分析数学归纳法的基本结构和用它证明命题时应注意的问题（两个步骤缺一不可）. 第二部分举例说明用数学归纳法证明不等式.

教科书重视介绍不等式的几何背景，对于重要不等式，教科书一般给出它们的几何解释，力图让学生从几何上去直观地把握，有些不等式则直接从相关的几何问题引入. 此外，教科书注意为学生提供适度的探究空间，对于一些重要结论，通过“观察”“思考”“探究”等，引导学生自己探究得出结论. 教科书也比较重视用不等式知识解决实际问题，以培养学生应用数学的意识和能力.

三、课时分配

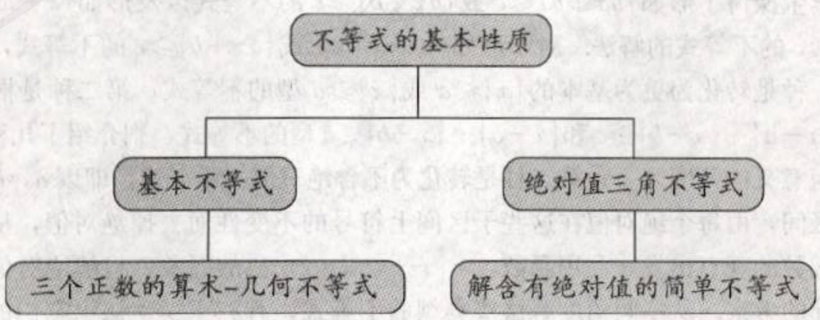
本专题教学时间约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　不等式和绝对值不等式	约 5 课时
一　不等式	约 3 课时
二　绝对值不等式	约 2 课时
第二讲　证明不等式的基本方法	约 4 课时
一　比较法	约 1 课时
二　综合法与分析法	约 2 课时
三　反证法与放缩法	约 1 课时
第三讲　柯西不等式与排序不等式	约 4 课时
一　二维形式的柯西不等式	约 1 课时
二　一般形式的柯西不等式	约 1 课时
三　排序不等式	约 2 课时
第四讲　用数学归纳法证明不等式	约 4 课时
一　数学归纳法	约 2 课时
二　用数学归纳法证明不等式举例	约 2 课时
学习总结报告	约 1 课时

II 教科书分析

第一讲　不等式和绝对值不等式

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 不等式的基本性质；
2. 基本不等式及其应用；
3. 绝对值三角不等式.

难点：

1. 三个正数的算术-几何平均不等式及其应用；
2. 绝对值不等式的解法.

三、编写意图与教学建议

本讲的内容是在初中阶段掌握了不等式的基本概念，学会了一元一次不等式、一元一次不等式组的解法，多数学生在学习高中必修课五个模块的基础上展开的. 作为一个选修专题，在内容的呈现上保持了相对的完整性. 教学中，教师可以根据教学实际掌握内容的深度和广度.

本讲的内容包括不等式的基本性质，基本不等式，绝对值不等式的性质，以及解一些简单的绝对值不等式.

本讲首先复习和回顾了不等式的基本性质和基本不等式，在这个过程中，强调了“如何提出不等式基本性质”的引导，以及用这些知识解决问题时的规范化表述. 对于基本不等式，注意引导学生从几何角度进行解释，并把基本不等式推广到三个正数的算术-几何平均不等式. 对于一般形式的均值不等式，则只作简单介绍，不给出证明.

本讲的第二部分内容是绝对值不等式. 绝对值是与实数有关的一个基本而重要的概念，讨论关于绝对值的不等式具有重要的意义.

关于绝对值的三角不等式是一个基本的结论，教科书首先引导学生借助于实数在数轴上的表示和绝对值的几何意义，通过探究发现并归纳出绝对值三角不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

接着联系向量形式的三角不等式，得到绝对值三角不等式的几何解释，最后用代数方法给出证明. 这样，用数形结合思想，引导学生多角度地研究和认识这个不等式，使学生在建立知识联系的过程中，逐步深化对它的理解. 在此基础上，教科书对绝对值三角不等式进行恒等变形，得到了一些有用的绝对值不等式.

教科书引导学生探讨了形如$|ax+b|\leqslant c$或$|ax+b|\geqslant c$的不等式以及形如$|x-a|+|x-b|\geqslant c$或$|x-a|+|x-b|\leqslant c$的不等式的解法. 对于形如$|ax+b|\leqslant c$或$|ax+b|\geqslant c$的不等式，教科书介绍了两种求解方法：第一种是转化为更为基本的$|x|\leqslant a$或$|x|\geqslant a$型的不等式；第二种是根据绝对值的几何意义求解. 对于$|x-a|+|x-b|\geqslant c$和$|x-a|+|x-b|\leqslant c$型的不等式，则介绍了几种不同方法：第一种是从绝对值几何意义的角度入手；第二种是转化为不含绝对值的不等式，即以a，b为分界点把实数集分割为几个子区间，由每个绝对值在这些子区间上符号的不变性而去掉绝对值，从而实现转化；第三种方法则是从函数的观点出发，利用函数$y=|x-a|+|x-b|$的图象，将解绝对值不等式问题转化为对函数取值情况的考察. 从不同角度解这些类型的不等式，有利于学生认识它们的本质特征，更好地掌握这些不等式的解法，并从中学习解决问题的一般方法和策略.

（一）不等式

1. 不等式的基本性质

（1）不等式的基本事实

这部分的内容不多，但是比较重要，是这个专题的基础.

不等式的基本性质的讨论以实数大小关系为出发点，实数大小关系的现实背景则是长短、远近、多少、高矮、重轻……本质上都是顺序关系，可以对应于数轴上点的左右位置关系. 数轴表示了实数集，两者建立的一一对应关系，沟通了数与形之间的关系，这是非常重要的一个联系. 实数的大小关系表现在数轴上就是实数所对应的点在数轴上的左右位置关系（顺序关系）. 此外，为了便利地进行实数之间的大小比较，又要摆脱这种完全依赖于数轴上点的位置关系的判断，所以，关于实数的大小，借助于运算的基本事实：

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b\Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

实际上，借助于上述基本事实研究不等式，其基本思想是将个别的、互不相同的实数大小比较问题，转化为统一的与 0 的大小比较问题（即判断两个实数差的符号），正如教科书指出的“0 为实数比较大小提供了‘标杆’”. 这一思想简单但非常重要，是不等式证明和解不等式的主要依据，因此在教学中应该予以重视.

由于判断两个实数 a 与 b 的大小归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号（注意，这里只关注差的符号，至于差究竟是多少则是无关紧要的），因此，如果设 $a-b=m$，而 m 又是可以表示为某些实数的运算的结果，那么要确定 m 的符号，必然要归结到实数的运算符号法则，因此在不等式中，实数运算的符号法则是一个很重要的基础知识，也是得出不等式基本性质的依据.

（2）不等式的基本性质

不等式的研究要借助于不等式的基本性质. 教科书通过“探究”（第 3 页），引导学生类比等式的基本性质，得出不等式的基本性质. 教学中可以先让学生思考等式的基本性质的内容及其得出过程（实际上是研究作加法、乘法等运算时等式是否仍然成立），然后再引导学生思考如何研究不等式的基本性质，并猜想有哪些不等式的基本性质. 这里，对研究方法的指导是重要的，这不仅可以使学生知道不等式基本性质的内容，而且还可以使他们知道这些基本性质是怎么来的.

在给出六条基本性质后，可以从几个角度对它们进行思维的“深加工”. 例如，将数学符号语言转化为日常语言，使之形象化，有利于理解和记忆；或者选取其中若干条基本性质作证明，这对不等式的基本事实和实数的运算法则的应用和巩固起到一定的复习作用，也为以后学习不等式的证明作了准备；与等式的基本性质作比较，讨论它们的异同，从而认识它们的联系与区别，实际上，其中最重要的是不等式两边同乘一个负数时，不等号应该变向，这就是教科书指出的“符号问题”，也是学生容易出现错误的一个问题.

（3）例 2 的教学建议

例 2 的目的是让学生熟悉利用不等式的基本事实和基本性质证明不等式的基本方法.

由于学生在以往的学习中对不等式的证明接触较少，因此本例的教学应当强调推理的严谨性和书写格式的规范性. 在分析证明思路时，应当引导学生思考如何应用基本事实和基本性质. 事实上，由要证的不等式，联系性质（6），说明需要先证明$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$；结合本例前面的“$a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$”，说明需要先证明$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$；在证明过程中又要用到性质（2）（4）等. 教学中可以在引

导分析的基础上，先让学生自己写出证明过程，然后再查漏补缺，完善证明过程，以培养学生思维的严谨性和规范化书写证明过程的习惯.

本例中，中间结果“如果 $c>d>0$，那么 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$”也是非常有用的.

2. 基本不等式

(1) 基本不等式及其教学建议

教科书首先以定理的形式引入关于实数的一个非常重要的不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$. 在给出证明的基础上，还引导学生对它进行几何解释. 前面已经指出，不等式研究实数的大小关系，实数与数轴上的点一一对应，在此基础上，教科书进一步提出“把实数 a，b 作为线段的长度”，就可以对定理作出一个几何解释. 学生可能对 a，b 的取值范围有疑虑，教学时可以对此作适当解释（长度、面积总是非负的）. 另外，还可以让学生自己尝试给出其他形式的几何解释.

以上述不等式为工具，教科书证明了关于两个正数的均值不等式——基本不等式，并给出了基本不等式的一个几何解释.

教学中要注意以下几点：

① $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的，前者只要求 a，b 是实数，而后者则要求 a，b 是正数；

② 这两个不等式都是带有等号的不等式，要注意等号成立的条件；

③ 教科书分别用数学符号语言、日常语言和图形语言表述基本不等式，这有利于学生理解基本不等式.

另外，之所以把 $\sqrt{ab}$ 叫做 a，b 这两个正数的几何平均，可以从教科书给出的基本不等式的几何意义中得到解释. 教学中还可以让学生给出一些其他解释，例如圆中直径不小于弦长，等等.

(2) 例题的教学建议.

例 3 是一个典型的问题，得到的结论在实际中有广泛的应用，应该要求学生掌握本例中得到的结论. 本例的证明并不困难，只要将日常语言表述的命题转化为数学符号语言，立即可以看到它与基本不等式之间的内在联系，事实上这也是基本不等式的一个几何背景. 本例的关键是要引导学生对“在所有周长相同的矩形中，正方形的面积最大；在所有面积相同的矩形中，正方形的周长最短”这一结论进行深入剖析：首先，题中涉及的都是“正数”；其次，涉及两个“定值”；再次，都是在“相等”的极端情况下取得“最值”. 可以简述为“一正、二定、三相等”，这是具有一般意义的.

例 4 是一个利用基本不等式解决的极值问题. 要解决函数极值问题，要先写出函数的解析式，然后判断是否可以借助于均值不等式去解决. 利用基本不等式可以解决许多类似的极值问题. 虽然微分学的方法对于极值问题具有一般的可行性和有效性，但是，借助于均值不等式解决某些特殊类型的极值问题仍有其独到之处，因为证明均值不等式需要的基础知识非常少，对于中学生相对简明易懂.

教学中可以先让学生分析总造价 S 的构成成分，以及它们与 AD 的长 x 之间的关系，再让学生自己写出函数解析式并给出解答.

3. 三个正数的算术-几何平均不等式

(1) 关于定理 3 及其证明

把基本不等式作推广，首先就要推广到关于三个正数的算术-几何平均不等式.

教科书借助“思考”引导学生探究将基本不等式推广到三个正数的情形. 这里，定理 3 的猜想和证明都类比了基本不等式的推出过程.

在证明“对于 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立”时，需要用“立方和公式”的变形，并要灵活应用“和的立方公式”，这是学生不熟悉的，其中对代数变换能力要求也较高，教学时要注意精心引导．教科书实际上先证明了恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

然后利用它证明 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$．由于 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的符号并非一目了然，因此要把它进一步变形为 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$．

对于一般形式的均值不等式，教科书直接给出结论：

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\ (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in\mathbf{R}_+),$$

当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时，等号成立．教学中应让学生知道这个基本而重要的数学事实，但不必对学生提出证明的要求．历史上许多著名数学家都曾对一般形式的均值不等式进行过研究，得到许多证明方法，拓展资源中给出了一个比较简捷的证法．

(2) 关于例题的教学建议

例 5 是三个正数的均值不等式的一个简单变形，可以由学生独立完成．同时可以向学生说明，这种变形是有用的，就像前面对立方和公式的变形一样．

例 6 是一个非常典型的、常见的关于三个正数的均值不等式的应用题．本题的关键是要对体积表达式进行变形：

$$(a-2x)^2x=\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\times 4x,$$

而这一变形实际上是事先考虑了前面提到过的关于用均值不等式求“最值”时所强调的“一正、二定、三相等”．这里有一定的技巧性，但它是建立在对均值不等式的全面、正确理解的基础上的．为了引起学生对“一正、二定、三相等”的注意，可以先让学生独立完成本题的求解，再对解答中出现的错误予以纠正，在纠正错误的过程中强化理解．

以下例题可以供教学时参考．

例　求证：在表面积一定的长方体中，以正方体的体积最大．

证明：设长方体的三条相交于同一顶点的棱的长分别为 x，y，z，则长方体的体积为

$$V=xyz,$$

表面积为

$$A=2xy+2yz+2zx.$$

根据均值不等式，

$$A=2xy+2yz+2zx\geqslant 6\sqrt[3]{(xyz)^2},$$

这里 A 是定值，即 $A\geqslant 6\sqrt[3]{V^2}$，从而

$$V\leqslant\sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3},$$

当且仅当 $xy=yz=zx$，即 $x=y=z$ 时，等号成立．所以，当长方体是正方体时，体积取得最大值，最大值是 $\sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3}$．

例　求函数 $y=x^2(1-3x)$ 在 $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ 上的最大值．

解：先将函数式变形为

$$y=x^2(1-3x)=\frac{3}{2}\left[x\cdot x\cdot\left(\frac{2}{3}-2x\right)\right].$$

因 $x\in\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$，故 $x\geqslant 0$，$\frac{2}{3}-2x\geqslant 0$，所以

$$y=\frac{3}{2}\left[x\cdot x\cdot\left(\frac{2}{3}-2x\right)\right]\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{x+x+\left(\frac{2}{3}-2x\right)}{3}\right]^3=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^3=\frac{4}{243},$$

当且仅当 $x=\frac{2}{3}-2x$，即 $x=\frac{2}{9}$ 时取得最大值，最大值是 $\frac{4}{243}$.

（二）绝对值不等式

本节首先研究绝对值三角不等式，再讨论了一些典型的绝对值不等式的解法.

1. 绝对值三角不等式

（1）绝对值三角不等式的探究

研究绝对值不等式的基础是实数绝对值和两个实数的差的绝对值的几何意义，正如教科书指出的，可以把“距离大小”作为解决绝对值不等式的基本出发点.

教科书利用“思考”向学生提出猜想绝对值不等式性质的任务，这样做主要是为了解决性质的来源问题，引导学生学习提出问题的方法. 实际上，数有了运算才变化无穷、力量无限，因此从运算的角度考察绝对值不等式是一个非常自然的想法. 关于这一点，以往的教科书中很少涉及，希望老师能够给予关注. 从运算的角度看，最简单的当然是关于两个实数 a，b 的绝对值 $|a|$，$|b|$ 及其加减运算结果 $|a+b|$，$|a-b|$ 的大小关系问题，教科书通过“探究”引导学生利用数轴研究 $|a+b|$ 与 $|a|$，$|b|$ 之间的关系. 教学中可以先让学生自己在数轴上表示出 $|a+b|$，$|a|$ 和 $|b|$，这时自然会出现按照 a，b 的符号分类讨论的需要，再引导学生分析如何分类才能对 $|a+b|$，$|a|$，$|b|$ 三者的关系进行不重不漏的讨论，最后得出分 $ab>0$，$ab<0$，$ab=0$ 三种情况进行讨论的结果：从数轴上可直观地看到，当 $ab\geqslant 0$ 时，$|a+b|=|a|+|b|$；当 $ab<0$ 时，$|a+b|<|a|+|b|$，从而对于任意两个实数 a，b，都有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 通过这个探究过程，得到了绝对值三角不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，同时这也是该不等式的一种几何证法.

把关于实数的绝对值三角不等式推广到平面上，就是关于向量的绝对值三角不等式. 关于向量的不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 可以看成绝对值三角不等式的一种几何背景. 实际上，用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 替换实数 a，b 时，问题就从一维扩展到二维. 当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 构成三角形，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向（相当于 $ab\geqslant 0$）时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 异向（相当于 $ab<0$）时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

为了使学生更深刻地认识绝对值三角不等式，使学生熟悉绝对值不等式的证明方法，同时也为了数学上的严谨性，教科书进一步给出了它的代数证明. 这个证明的基本思想是借助于恒等式 $|a|=\sqrt{a^2}$ $(a\in\mathbf{R})$ 和 $|a|^2=a^2$，将绝对值问题转化为不含绝对值的问题，通过“放缩法”达到证明的目的. 其难点是“分类讨论”思想和“放缩法”的应用. 教学中要提醒学生注意这个证明中体现的思想方法.

从上面的介绍可以看到，教科书先利用数轴引导学生猜想出绝对值三角不等式，再借助向量知识给出不等式的几何意义，最后再从代数推理的角度给出严格的证明，这个过程体现了“联系”的思想，使学生有机会从多种角度观察、研究同一个问题，这对学生理解和掌握绝对值三角不等式是非常有利的. 教学中应当有意识地提醒学生注意“联系”的思想，以使他们逐步养成用联系的观点看待问题的习惯.

关于绝对值的常用不等式，除了以上最基本的绝对值三角不等式外，还有另外的几个重要不等式. 为此，教科书安排了一个“探究”，让学生自己思考 $|a|$，$|b|$，$|a+b|$，$|a-b|$ 等之间的其他关系. 教

学中可以让学生模仿上述不等式的得出和证明过程，通过自主探究获得结论和证明．实际上，对于实数 a，b，$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

教科书指出，关于两个实数的绝对值不等式是最基本、最重要的．在这个基础上，用完全同样的方法，就可以讨论涉及多个实数的绝对值不等式，例如定理 2 可以用定理 1 加以证明，实际上定理 2 就是定理 1 的一般化，因为定理 1 可以看作是定理 2 中 $b=0$ 时的特例．从几何角度看，定理 2 与定理 1 的关系则是一个"平移变换"（将原点平移到 b 所对应的点）.

（2）例题的教学建议

例 1 是绝对值三角不等式的一个简单应用，只要对不等式稍作变形，就可以应用绝对值三角不等式，可以由学生独立完成.

例 2 是绝对值三角不等式的应用题．首先把实际问题化归为数学问题，即归结为求解形如 $y=|x-a|+|x-b|$ 的函数的极值问题，这类问题借助于绝对值三角不等式可以得到比较容易的解答．教科书在得出答案后，进一步用函数图象进行了直观解释．实际上，也可以借助数轴给出解释：当 $10\leqslant x\leqslant 20$ 时，实数 x 对应的点到 10，20 对应的点的距离之和为常数 10；x 取其他值时，这个距离之和都大于 10．实际上这就是例 5 的思想方法.

关于绝对值三角不等式，推广到一般情形就是：

如果 a_1，a_2，…，a_n 都是实数，那么

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$$

当且仅当 a_1，a_2，…，a_n 都是非正（负）数时取等号.

以上结论，在涉及多个实数的绝对值问题时是非常有用的，例如，在求形如 $y=|x-x_1|+|x-x_2|+|x-x_3|$ 函数的极值问题时，就可以直接应用以上不等式得到结果.

（3）教学中，可以结合教学适当复习关于绝对值的以下一些基本性质：

① $|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时}, \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$

② 对于任何实数 a，都有 $|a|=\sqrt{a^2}$.

这个关系式使我们可以把绝对值的运算转化成不带绝对值符号的运算.

③ 实数积和商的绝对值运算法则：$|ab|=|a|\times|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

2. 绝对值不等式的解法

对于解含有绝对值的不等式，教科书利用更为基本的不等式 $|x|\leqslant a$ 或 $|x|\geqslant a$ 的解集，或直接从绝对值的几何意义出发，介绍了两种特殊类型的绝对值不等式的解法.

（1）$|ax+b|\leqslant c$ 和 $|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法

解决这种类型不等式的依据是不等式 $|x|\leqslant a$ 或 $|x|\geqslant a$ 的解集，为此，教科书采用从具体到抽象的方法，先利用绝对值的几何意义，对简单的绝对值不等式 $|x|<1$，$|x|>1$ 的解集作出解释，然后再推广到一般情形：当 $a>0$ 时，绝对值不等式 $|x|<a$ 的解集是 $(-a, a)$；$|x|>a$ 的解集是 $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$，并给出图形表示．在此基础上再给出更一般的情形：$|x-x_1|<a$ 和 $|x-x_1|>a$ 的解集及其图形表示．教学中应当注意上述推导过程，引导学生学习如何从一个特殊结论逐步推广，得到一些具有一般意义的结论的思想方法．另外，在解绝对值不等式的过程中，注意从几何意义的角度对不等式作出解释，这是本书贯穿始终的一个重要思想，也要引起学生重视.

例 3 和例 4 的解答，都直接从 $|x|\leqslant a$ 或 $|x|\geqslant a$ 得到

$$-c\leqslant ax+b\leqslant c,$$

或

$$ax+b\leqslant -c，或 ax+b\geqslant c,$$

从而得出不等式的解．教学中还可以从另一个角度引导学生思考：把$|ax+b|$变形为$a\left|x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right|$，从而可以从两实数的差的绝对值去理解$|ax+b|$，这样就可以根据绝对值的几何意义得到相应不等式的解，这也是教科书在例3的解答之后给出几何解释的目的．

（2）$|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 和 $|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法

对于这一类型的不等式，教科书通过例5介绍了三种基本方法，其中体现的思想方法具有普遍意义．教科书的解法一着重对$|x-1|+|x+2|\geqslant 5$的几何意义作分析；解法二把含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式；解法三则是从函数的观点来处理不等式．在解一般含有绝对值的不等式时，解法二具有一般的通用性．通常地，解含有绝对值的不等式比较难处理的就是绝对值符号，因而设法把它化为不含绝对值的不等式，就转化成了比较容易处理的问题．

教科书将分析几何意义的方法作为解法一，这样做容易引发学生思考．由于不等式$|x-1|+|x+2|\geqslant 5$的几何意义很明确，用语言叙述就是"数轴上到-2，1的距离大于5的点的集合"，借助于数轴可以比较容易地确定具有这一特点的数的范围．从解答过程可以看到，在数轴上找出与-2，1的距离之和为5的点是关键，找到了关键点后问题就迎刃而解了．

解法二可以看成是解法一基础上的进一步提炼，以-2，1为分界点，将实数集分为三个区间，在每个区间上，$x+2$，$x-1$的符号保持不变，于是可以在相应的区间上把绝对值不等式转化为不含绝对值的不等式．这个解法中，需要引起学生注意的是"在给定的区间上解不等式"，要"先分后合"，可以锻炼学生思维的严密性．

解法三从函数观点出发，联系函数图象，通过分析函数值的取值范围得到不等式的解．一般来讲，解不等式可以理解为"求使不等式成立的x的取值范围"，因此它与函数的定义域就有内在的联系．就像把函数的零点与方程的根联系起来一样，把不等式的解与函数的定义域、值域联系起来，可以开阔思路，更好地认识不等式．

（3）补充例题

教学中，可以根据学生的实际情况，对解绝对值不等式的问题作适当拓展．以下问题可作教学参考．

例　解不等式$|x^2-2x|<3$．

解法1：由$|x^2-2x|<3$，得$-3<x^2-2x<3$，所以

$$x^2-2x+3>0，且 x^2-2x-3<0,$$

所以

$$x^2-2x-3<0,$$

解得

$$-1<x<3.$$

所以，不等式的解集是$(-1,3)$．

解法2：作函数$y=x^2-2x$的图象．$|x^2-2x|<3$表示函数图象中在直线$y=-3$和直线$y=3$之间相应部分的自变量的集合．解方程

$$x^2-2x=3$$

得解$x_1=-1$，$x_2=3$．即得到不等式的解集是$(-1,3)$．

四、教学设计案例

不等式的基本性质

1. 教学任务分析

在以往的学习中，学生对不等式的基本性质已有所接触，但不系统、完整．本课时的任务是在回顾和复习不等式的过程中，对不等式的基本性质进行系统地归纳整理，并对“不等式有哪些基本性质和如何研究这些基本性质”进行讨论，使学生掌握相应的思想方法，以提高学生对不等式基本性质的认识水平．

2. 教学重点、难点

重点：掌握不等式的基本性质及其讨论方法．

难点：类比等式的基本性质，提出不等式基本性质的猜想．

3. 教学基本流程

实数大小的基本事实及其分析

↓

不等式基本性质及其分析

↓

不等式基本性质的应用

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 你能回忆一下实数大小是如何规定的吗?	引导学生回忆用数轴上点的顺序关系规定实数大小的方法．	教师提出问题，学生回忆、讨论并回答． 教师特别注意引导学生从数轴上点与实数的对应关系出发，用点的左右位置关系（从左到右的顺序关系）定义实数大小关系．这种定义方式是“人为的”但符合人的直觉，是合理的．
(2) 实数 a，b 的大小关系与 $a-b$ 的符号有什么关系?	导出基本事实．	教师提出问题，学生独立思考并给出答案．教师注意从规范、有序等方面引导学生思考．
(3) 你认为实数大小的基本事实有什么作用?	加深理解基本事实，获得用基本事实解决问题的思想方法．	教师引导学生思考、回答．要特别注意引导学生认识从基本事实出发研究不等关系的重要性，理解其中蕴含的基本思想：直接比较两个实数的大小往往比较困难，借助于减法运算，将两个实数大小比较转化为判断它们的差的符号．
(4) 例 1.	熟悉基本不等式的应用．	学生独立完成．

续表

问　题	设计意图	师生活动
(5) 等式的基本性质是研究方程的基础. 类似的，不等式的基本性质是研究不等式的基础. 你能类比等式的基本性质提出一些不等式的基本性质的猜想吗？	明确研究不等式的基本性质的意义和研究不等式基本性质的方法.	教师提出问题，学生思考、讨论、回答. 教师特别注意从思想方法的高度进行引导：类比等式的基本性质，联系加、减、乘、除、乘方、开方等运算，提出不等式的基本性质的猜想.
(6) 你能用语言叙述一下上述基本性质吗？	辨析基本性质，加深理解.	学生思考、叙述，教师引导学生注意叙述的正确性、完整性.
(7) 你能证明一下这些性质吗？	加深理解基本不等式，掌握用不等式的基本事实证明不等式的方法.	学生分组分别完成某几条性质的证明（如分 6 组，每组证明一条性质），并选几名学生板演. 完成后再讲评.
(8) 与等式问题比较，你认为在研究不等式时要注意些什么？	辨析基本性质，加深理解.	教师提出问题，学生回答. 要提醒学生注意“等”与“不等”的联系与区别.
(9) 你能从基本性质出发，得出一些新的结论吗？	挖掘基本性质的内涵，加深理解讨论基本性质的思想方法.	教师引导学生证明第 4 页的两个结论，并让学生思考能否得出一些其他新结论.
(10) 例 2.	巩固对基本事实和基本性质的理解，学会用它们证明简单的不等式.	教师引导学生分析证明思路，学生先独立写出证明，再由教师带领学生对证明过程进行分析. 要强调推理的严谨性和书写格式的规范性. 在分析证明思路时，主要应当引导学生思考如何应用基本事实和基本性质.
(11) 小结：我们是怎样讨论不等式的基本事实和基本性质的？有哪些特别值得注意的地方？	概括思想方法.	先由学生独立思考、回答、补充，教师再归纳：数形结合，联系运算，与等式的基本性质作类比，强调多角度辨析、理解，等等.
(12) 作业：第 9 页习题 1.1 第 1～4 题.		

5. 说明

本节课的教学，基本内容是学生在以往学习中接触过的，但他们对“为什么要讨论这些基本性质”“这些基本性质是怎么提出来的”“如何证明”等都不完全清楚. 因此，教学中要特别注意在上述问题上做点文章，以保证本节课的思想性，同时也是在原有基础上的提高，以提高学生的学习兴趣.

五、习题解答

习题 1.1（第 9 页）

1. (1) 假命题. 例如 $3>2$，但是 $3\cdot(-1)<2\cdot(-1)$.
   (2) 假命题. 例如 $3>2$，但是 $3\cdot 0^2=2\cdot 0^2$.
   (3) 假命题. 例如 $-1>-2$，但是 $(-1)^2<(-2)^2$.
   (4) 真命题. 因为 $c<d$，所以 $-c>-d$，因此 $a-c>a-d$. 又 $a>b$，所以 $a-d>b-d$. 因此 $a-c>b-d$.
2. 因为

$$(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)$$
$$=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-18)=20>0,$$

所以$(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6)$.

3. (1) 因为$a>b$，$\frac{1}{ab}>0$，所以$a\times\frac{1}{ab}>b\times\frac{1}{ab}$，即$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2) 因为$a>b$，$c<0$，所以$ac<bc$. 因为$c<d$，$b>0$，所以$bc<bd$. 因此$ac<bd$.

4. 不能得出. 举反例如下：例如$-2>-3$，$-1>-4$，但是$(-2)\times(-1)<(-3)\times(-4)$.

5. (1) 因为a，$b\in\mathbf{R}_+$，$a\neq b$，所以$a^2\neq b^2$，即$\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b}$. 所以$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$.

(2) 因为$a+b>2\sqrt{ab}>0$，所以$\frac{1}{a+b}<\frac{1}{2\sqrt{ab}}$，所以$2ab\times\frac{1}{a+b}<2ab\times\frac{1}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，即$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$.

6. 因为a，b，c是不全相等的正数，所以

$$a+b\geqslant2\sqrt{ab};$$
$$b+c\geqslant2\sqrt{bc};$$
$$c+a\geqslant2\sqrt{ca}.$$

以上不等式不可能全取等号，所以

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)>2\sqrt{ab}\times2\sqrt{bc}\times2\sqrt{ca}=8abc$，即$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

(2) $(a+b)+(b+c)+(c+a)>2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$，所以$a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

7. 因为$a^2+b^2\geqslant2ab$，$b^2+c^2\geqslant2bc$，$c^2+d^2\geqslant2cd$，$d^2+a^2\geqslant2da$，所以

$$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)\geqslant2(ab+bc+cd+da).$$

即

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da.$$

8. 因为

$$a_1^2+x_1^2\geqslant2a_1x_1,$$
$$a_2^2+x_2^2\geqslant2a_2x_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n^2+x_n^2\geqslant2a_nx_n,$$

所以

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\geqslant2(a_1x_1+\cdots+a_nx_n),$$

即$2\geqslant2(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)$，所以

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\leqslant1.$$

9. 因为

$$\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{2x^2+2y^2-(x^2+y^2+2xy)}{4}=\frac{(x-y)^2}{4}\geqslant0,$$

所以

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

10. 因为$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant\frac{2\sqrt{(x^2+1)\cdot1}}{\sqrt{x^2+1}}=2$，所以$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant2$.

11. 因为a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，$a+b+c=1$，所以

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)&=2(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2+c^2)\\&\geqslant 2ab+2bc+2ca+(a^2+b^2+c^2)\\&=(a+b+c)^2=1.\end{aligned}$$

所以

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

12. (1) 因为 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，所以

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3,$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3.$$

所以

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9.$$

(2) 因为 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，所以

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0,$$

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}>0.$$

所以

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=9abc.$$

13. 设矩形的两边分别为 a，b，对角线为定值 d，则 $a^2+b^2=d^2$，且

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)=2d^2,$$

$$a+b\leqslant\sqrt{2}d,$$

$$2(a+b)\leqslant 2\sqrt{2}d,$$

当且仅当 $a=b$ 时，以上不等式取等号．所以，当矩形是正方形时，周长取得最大值，最大值是 $2\sqrt{2}d$.

因为 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{d^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．所以，当矩形是正方形时，面积取得最大值，最大值是 $\frac{d^2}{2}$.

14. 因为 $r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=R^2$，所以 $4r^2+h^2=4R^2$．根据三个正数的算术-几何平均不等式，得

$$4R^2=2r^2+2r^2+h^2\geqslant 3\sqrt[3]{4r^4h^2},$$

所以，球内接圆柱的体积

$$V=\pi r^2h\leqslant\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9},$$

当且仅当 $2r^2=h^2$，即 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$，$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时，V 取最大值.

15. 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $\frac{ab}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2}$，即 $a\times\frac{b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2}$．由于

$$0<h=\min\left\{a,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right\}\leqslant a,$$

$$0<h=\min\left\{a,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right\}\leqslant\frac{b}{a^2+b^2},$$

所以 $h^2\leqslant a\times\frac{b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2}$，从而 $h\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

习题 1.2（第 19 页）

1. (1) $|a+b|+|a-b|\geqslant|(a+b)+(a-b)|=|2a|=2|a|$.

   (2) $|a-b|+2|b|\geqslant|(a-b)+2b|=|a+b|$，所以 $|a+b|-|a-b|\leqslant2|b|$.

2. 证法一：$\left|x+\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{x^2+1}{x}\right|=\frac{|x|^2+1}{|x|}\geqslant\frac{2|x|}{|x|}=2$.

   证法二：容易看出，无论 $x>0$，还是 $x<0$，均有 $\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}$. 所以

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2.$$

3. (1) $|x-a|+|x-b|=|a-x|+|x-b|\geqslant|(a-x)+(x-b)|=|a-b|$.

   (2) 因为 $|a-b|+|x-b|=|b-a|+|x-b|\geqslant|(b-a)+(x-b)|=|x-a|$，所以

$$|x-a|-|x-b|\leqslant|a-b|.$$

   另证：$|x-a|-|x-b|\leqslant|(x-a)-(x-b)|=|a-b|$.

4. (1) $|(A+B)-(a+b)|=|(A-a)+(B-b)|\leqslant|A-a|+|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

   (2) $|(A-B)-(a-b)|=|(A-a)+(b-B)|\leqslant|A-a|+|b-B|=|A-a|+|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

5. $y=|x-4|+|x-6|=|x-4|+|6-x|\geqslant|(x-4)+(6-x)|=2$，当且仅当 $(x-4)(6-x)\geqslant0$，即 $x\in[4,\ 6]$ 时，函数 y 取最小值 2.

6. (1) $(-1,\ 4)$；　(2) $(-\infty,\ 2]\cup[3,\ +\infty)$；

   (3) $(-8,\ 4)$；　(4) $\left(-\infty,\ -\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4},\ +\infty\right)$.

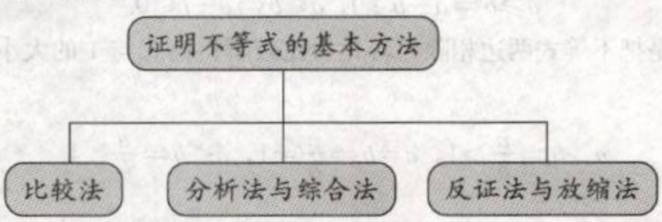
7. (1) $\left[-\frac{10}{3},\ -\frac{5}{3}\right)\cup\left(-1,\ \frac{2}{3}\right]$；　(2) $(-2,\ 1]\cup[4,\ 7)$.

8. (1) $(-\infty,\ 2]\cup[6,\ +\infty)$；　(2) 解集为 $\mathbf{R}$；　(3) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$.

9. $a\in(1,\ +\infty)$.

第二讲　证明不等式的基本方法

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：用比较法、分析法、综合法证明不等式.

难点：用反证法、放缩法证明不等式的思考过程.

三、编写意图与教学建议

在前一讲学习了关于实数大小的基本事实、不等式的基本性质、基本不等式、含有绝对值的不等式的性质等的基础上，本讲学习证明不等式的基本方法. 我们知道，利用代数恒等变换以及放大、缩小的方法是证明不等式的常用方法，例如，比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法等. 与证明等式相比较，证明不等式的方法更加灵活，也需要更多的技巧，这对学生来说是比较困难的. 教科书根据“标准”的要求，把重点放在以简单不等式问题为载体介绍这些证明方法，引导学生理解这些证明的数学思想，而在恒等变换的难度特别是一些技巧上则不做更多的要求.

不等式的形式多种多样，所以不等式的证明方法也各有不同.

在证明不等式的方法中，**比较法**是最基本、最重要的方法，它所依据的就是实数大小的基本事实. 用这一方法证明不等式，关键要有较强的恒等变换技能.

在证明不等式时，可以从已知条件出发逐步推出结论，这种方法叫做**综合法**；也可以寻找结论成立的充分条件，从而证明不等式，这种方法就是**分析法**. 一般情况下，分析法有利于我们找到证明的思路，综合法则有利于我们简洁地表述证明过程.

证明不等式的方法还可以分为直接证法和间接证法，**反证法**是一种间接证法. 它从不等式结论的反面出发，即假设要证明的结论不成立，经过正确的推理，得出矛盾，从而说明假设错误，要证的原不等式结论成立. 反证法的依据是逻辑中的矛盾律、排中律，这是一种“迂回包抄”的方法，往往能够出奇制胜.

在证明不等式的过程中，有时通过对不等式的某些部分作适当的放大或缩小达到证明的目的，这就是所谓的**放缩法**. 比较法、综合法、分析法和反证法等在证明恒等式时也是常用的方法，而放缩法则是证明不等式所独有的，它的灵活性、技巧性都比较强.

有时也用数学归纳法去证明一些涉及自然数的不等式，教科书专门安排了第四讲“数学归纳法证明不等式”.

关于上述证明方法及其相互之间的关系，教科书都给予了比较明确、详细的说明，相信学生通过仔细阅读，对它们会有比较好的理解. 但要真正掌握这些方法，需要有一定的证明训练. 所以教学中应当鼓励学生认真完成教科书中的练习，有条件的还可以适当增加一些练习，以使学生通过练习形成对这些方法的良好感觉，在遇到具体不等式证明时能根据其特点选择恰当的方法进行证明.

（一）比较法

1. 对比较法的说明

比较法是证明不等式的基本而重要的方法. 比较法有两种，一种是相减比较法，它的依据是：

$$a\geqslant b\Leftrightarrow a-b\geqslant 0,\ a\leqslant b\Leftrightarrow a-b\leqslant 0.$$

另一种是相除比较法，是把不等式两边相除，转化为比较所得商式与 1 的大小关系，它的依据是：当 $b>0$ 时，

$$a>b\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1,\ a=b\Leftrightarrow \frac{a}{b}=1,\ a<b\Leftrightarrow \frac{a}{b}<1.$$

在比较法的两种方法中，相减比较法又是其中最基本而重要的一种方法，应该引起学生的充分注意和重视.

用相减法证明不等式时，要判断不等式两边差的符号. 对不等式两边求差后，要通过配方、因式分解、通分等，对所得代数式进行恒等变形，得到一个能够明显看出其符号的代数式，进而得出证明.

2. 对例题的教学建议

例 1 是一个用相减比较法证明不等式的例子. 本例比较简单，只要学生具有一定的代数恒等变形能力，就能顺利完成，可以让学生独立完成. 要注意书写的规范性.

以下的结论是例 1 的推广.

若 $a>0$，$b>0$，$n>0$（$n\in\mathbf{N}$），则 $a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

证明如下：

不等式左边减去右边，得

$$(a^n+b^n)-(a^{n-1}b+ab^{n-1})=a^{n-1}(a-b)-b^{n-1}(a-b)=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1}).$$

(1) 若 $a>b$，则 $a^{n-1}\geqslant b^{n-1}$. 从而 $a-b>0$，$a^{n-1}-b^{n-1}\geqslant 0$. 所以

$$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})\geqslant 0.$$

(2) 若 $a=b$，则 $a-b=0$. 所以

$$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})=0.$$

(3) 若 $a<b$，则 $a^{n-1}\leqslant b^{n-1}$. 从而 $a-b<0$，$a^{n-1}-b^{n-1}\leqslant 0$. 所以

$$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})\geqslant 0.$$

综合上述三种情形，有 $(a^n+b^n)-(a^{n-1}b+ab^{n-1})=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})\geqslant 0$.

所以

$$a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1}.$$

以下的例题也是用相减比较法证明的问题，可供教学时参考.

例 已知 a_1，a_2，b_1，b_2 都是正数，且 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$，求证：$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}$.

证明：因为 a_1，a_2，b_1，b_2 都是正数，且

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2},$$

所以，在以上不等式两边同乘 b_1b_2，得

$$a_1b_2<a_2b_1,$$

所以

$$a_1b_2-a_2b_1<0.$$

又因为

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1(b_1+b_2)}<0,$$

所以

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}.$$

同理可证

$$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}.$$

所以

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}.$$

例 2 是一个实际问题. 问题的实际意义非常容易理解：溶质的质量分数$=\frac{\text{溶质的质量}}{\text{溶液的质量}}$，溶质的质量增加时，溶质的质量分数就增加. 将这个事实抽象为不等式问题的过程中，需要提醒学生注意的是各个字母的取值范围都是正数集. 这个不等式的证明也不困难，不过它的应用是非常广泛的，许多书刊杂志上都对这个不等式进行过讨论，有兴趣的老师可以自己查阅.

例 3 是一个应用相除比较法证明不等式的例子. 不等式两边相除以后，问题转化为判断一个幂是否大于 1，这就可以借助指数函数的性质加以解决. 本例的证明中，另一个值得注意的问题是，所证的不等式具有"轮换对称"的特点，即将不等式中的字母 a，b 对调，不等式保持不变. 根据这一特点，可以设 $a\geqslant b>0$，否则就要对 $b\geqslant a>0$ 时不等式是否成立也给出证明.

有时，类似的问题也可以借助幂函数的性质加以解决. 利用相除比较法证明不等式要注意不等式两边所除的代数式的符号，以确定不等号的方向是否应该改变. 一般情况下，当不等式一边的代数式的符号保持不变时，可以考虑采用相除比较法.

以下不等式可用相除比较法证明，供教学时参考选用. 这个问题中的不等式是关于字母 a，b，c 轮换对称的.

例 如果 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，那么 $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

（二）综合法与分析法

1. 对综合法、分析法的说明

用综合法证明不等式，是从已知条件和不等式的性质、基本不等式、已知成立的不等式等出发，逐步推理论证，直至得出要证的不等式. 这是一种由因导果的思考方法和证明方法.

用分析法证明不等式，则是从要证的不等式（也可以结合已知条件或一部分已知条件）着手，逐步推求使它成立的充分条件，直至所需条件为已知正确的不等式或已知条件，从而得知要证的不等式成立. 这是一种执果索因的思考方法和证明方法.

分析法是探求命题结论成立的充分条件，用分析法证明不等式的逻辑关系是

$$\text{（结论）} B\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow B_3\Leftarrow B_4\Leftarrow\cdots\Leftarrow A \text{（已知）}$$

分析法常常用于从已知条件不易着手的情况.

问题比较复杂时，通常把分析法和综合法结合起来以寻找证明不等式的思路，而用综合法叙述、表达整个证明过程. 在教学中应该要求学生正确使用分析法的表述方法.

在这部分例题的教学中，要引导学生注意观察要证明的不等式与已知的重要不等式（如基本不等式、均值不等式）之间的关系，从而寻找证明不等式的途径.

2. 对例题的教学建议

本节共四个例题，例 1、例 2 针对综合法，例 3 针对分析法，例 4 是两种方法结合使用的例题.

例 1 中要证明的不等式结构对称，有三项，每一项都是关于 a，b，c 中的两个数的平方和与另一个数的乘积，再结合右边是三个数的乘积的 6 倍，这些特点都能把学生的思路引导到用重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 上. 所以本例的证明不难，可以由学生独立完成. 需要提醒的是书写的规范性以及条件"a，b，c 不全相等"的作用.

例 2 是一个条件不等式. 关键是要仔细观察待证不等式的特点，再结合已知条件，用适当方法将 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$转化，出现 $a_1a_2\cdots a_n$ 的形式. 本例可以先引导学生分析，有了证明思路后再让学生自己写出证明过程. 另外，可以在不等式性质的应用、取等号的条件等问题上引导学生思考.

例 3 是一个比较典型的用分析法证明的不等式．教学中要注意书写的格式，其中“只需证”实际上指“充分条件”．另外还要注意教科书在本例结束后的一段话，让学生从中体会分析法与综合法的内在联系．实际上，数学证明中，除非我们对问题有非常好的直觉，能够立即抓住证明的关键，一般情况下总是通过分析法寻找证明思路．

本例的一般结果是：a，b，c，$d\in\mathbf{R}_+$，$a+b=c+d$，$ab\leqslant cd$，那么

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{c}+\sqrt{d}.$$

例 4 的证明中，首先对待证不等式进行变形，变形过程就是一个分析的过程．变形后的不等式的特点更加鲜明，使我们能更快地确定证明思路．由于有了前面的经验，所以本例的教学可以先让学生独立完成证明过程，再让学生叙述、讨论自己的证明，分析各自的证明方法的特点，以加深对综合法与分析法的认识．实际上，本例的证明可以有多条途径，教科书中的方法也可以有多种变式，教学时可以做适当延伸．

3. 补充例题

例 1　已知 a，b，c，$d\in\mathbf{R}_+$，求证：$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$．

证明：用综合法证明．

由 a，b，c，$d\in\mathbf{R}_+$，得

$$\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{ab\cdot cd}>0,$$

$$\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{ac\cdot bd}>0.$$

所以

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd,$$

即

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd.$$

例 2　求证：若 a，b 为正数，则 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$．

证明：用分析法证明．

要证 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$，即证 $\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$．

因为 $\sqrt{ab}>0$，所以只要证 $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\leqslant 1$．

因为 $a+b>0$，所以只要证 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b$，即只要证

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

显然，此不等式正确．所以 $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$ 成立，本题得证．

注：这是用分析法证明不等式的例子，本例也可以用综合法进行证明．

例 3　已知 a，$b\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=1$，求证

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}.$$

分析：若将不等式的左边展开，得 $ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}$. 此时若用基本不等式，可得 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，相加后只能得出左边的式子大于等于 4，而不能推出要证的结论. 这是由于没有运用条件 $a+b=1$. 为了运用这个条件证题，设法凑出关于 $a+b$ 的式子，再讨论其余式子的取值范围.

证明：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^2+1}{a}\times\frac{b^2+1}{b}=\frac{(a+b)^2+(ab-1)^2}{ab}=\frac{1+(1-ab)^2}{ab}$.

因为 $a+b=1$，所以

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2},$$

从而 $ab\leqslant\frac{1}{4}$，所以

$$1-ab\geqslant 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

当 $\frac{1+(1-ab)^2}{ab}$ 的分母取最大值 $\frac{1}{4}$ 时，分子同时取得最小值 $1+\left(\frac{3}{4}\right)^2$，此时分式也取得最小值. 所以

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{1+(1-ab)^2}{ab}\geqslant\frac{1+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}.$$

（三）反证法与放缩法

1. 对反证法的说明

对于某些不等式，直接证明比较困难时，可以通过间接的方法，先假设要证明的不等式不成立，也就是说不等式的反面成立（可能包含一种或多种情况），以此为出发点，结合已知条件，应用公理、定义、定理，进行推理论证，得到和已知条件（已证明的定理，或明显成立的事实）矛盾的结论，从而说明假设错误而要证的不等式成立. 这种证明不等式的方法就是反证法.

教科书以基本性质（6）的证明为例引入反证法. 性质（6）是比较典型的很难直接证明的例子. 教学时可以先让学生思考能否直接证明性质（6），并尝试给出证明，以形成学习反证法的心理需要. 另外，要引导学生分析，如果 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 不成立，那么会有两种可能：$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 或 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，只有否定了这两种情况，原不等式才成立.

2. 对例 1、例 2 的教学建议

（1）对于例 1，教科书指出，它的条件与结论之间的联系不明显，而且正面证明需要进行分类讨论，而从反面则只需要证明一种情形，这是使用反证法的最主要理由. 在本例的教学中应该引起学生注意的是，在证明涉及“至少有一个”“不全都是”这样叙述的不等式时，通常可以考虑用反证法，这是因为“至少有一个”“不全都是”的反面情况特别清楚，就是“全部都不是”“全部都是”，这样的假设常常很容易描述，从而有利于进行推理.

（2）当然，也有相反的情形. 例 2 要证明的是某些对象（三个数 a，b，c）“全部具有一种性质（大于 0）”，这时，要从反面来推理，就要证明“存在一个对象（数）不具有此性质（大于 0）”是不可能的. 由于作为本例条件的所有不等式都关于 a，b，c 对称，因此，如果证明了“一个数（例如 a）不大于 0”是不可能的，那么其他两个数 b，c 与这种情形类似. 这样，证明“存在一个对象不具有此性质”是不可能的，本质上只需证明一种情形即可. 教科书考虑到本例的这个特点，以及已知条件与结论之间的联系不明显，采用了反证法进行证明. 在本例的证明中，难点有两个：一是学生不习惯利用

条件、结论的特点（关于 a，b，c 的轮换对称性），即对“不妨设……”不能自如地应用；二是因为涉及分类讨论，可能出现遗漏的情况. 这些都需要在教学中给予注意.

通过这两个例题的教学，应引导学生认识到反证法主要适用于以下两种情形：①要证的结论与条件之间的联系不明显，直接由条件推出结论的线索不够清晰；②如果从正面证明，需要分成多种情形进行分类讨论，而从反面进行证明，只要研究一种或很少的几种情形.

(3) 补充例题

例 设 $f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

证明：设 $|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ 都小于 $\frac{1}{2}$，则

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<2. \qquad ①$$

另一方面，由绝对值不等式的性质，有

$$\begin{aligned}|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|&\geqslant|f(1)-2f(2)+f(3)|\\&=|(1+p+q)-2(4+2p+q)+(9+3p+q)|=2,\end{aligned}$$

这与①式矛盾，从而 $|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

3. 对放缩法的说明

在证明某些不等式时，通过将所证不等式中的某些项的值适当放大或缩小，可以使不等式中有关项之间的大小关系更加明晰，或使不等式中的项得到化简而有利于代数变形，从而达到证明的目的，这种证法就是放缩法. 通常，放大或缩小的方法是不惟一的，因而放缩法具有较大的灵活性. 另外，运用放缩法证明不等式时，关键是放大或缩小要适度，否则就不能达到证明的目的，因此它又是技巧性较强的一种证明方法. 要使学生学会用放缩法证明不等式，惟一的途径是让他们多接触这类问题.

4. 对例 3、例 4 的教学建议

(1) 例 3 中，放、缩的目标都是常数，教学中可以先引导学生分析其中代数式的特点：涉及 a，b，c，d 四个字母；共有四项，分子各不相同，分母是其中三个字母的和. 这就容易想到把分母都扩大为 $a+b+c+d$，而得到左边的 1；分别把分母缩小为 $a+b$ 和 $c+d$，而得到右边的 2.

(2) 例 4 中的不等式，左右两边各式的结构是一样的，这个结构对于我们发现中间结果

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

是有启发的. 另一方面，由于不等式中出现了 $|a+b|$，$|a|$，$|b|$，由此联想到绝对值不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

也是比较自然的. 当然，关键还是如何将它们联系起来而构造出下列不等式：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

(3) 补充例题

例 求证：$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$（其中 $n\in\mathbf{N}_+$，$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$）.

分析：要设法使一个不容易相加的和式经过放缩变形为容易相加的和式.

证明：当 k 是大于 2 的正整数的时候，

$$\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times k}<\frac{1}{1\times2\times2\times\cdots\times2}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

所以

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

不等式得证.

对于一个具体的不等式问题来说，通常要综合几种不同的证明方法进行证明，而不能局限于一种方法，要防止思想方法的单一性和只按照一种思想方法走到底，要求学生通过练习达到灵活运用.

四、教学设计案例

反证法（约1课时）

1. 教学任务分析

通过一些简单的不等式证明问题，使学生了解用反证法证明不等式的基本过程及其思想方法，引导学生体会适宜于用反证法证明的不等式的特点，了解用反证法证明不等式时需要注意的问题，并使他们进一步认识反证法的思想.

2. 教学重点、难点

重点：分析要用反证法证明的不等式问题的特点，理解用反证法证明不等式的思想.

难点：从不等式结论的否定推出矛盾，得到不等式的证明.

3. 教学基本流程

（1）从不等式的基本性质（6）的证明引入反证法，说明反证法的基本思想和方法.

（2）通过例1和例2的教学，总结用反证法证明的不等式的常见类型及需要注意的问题.

4. 教学情境设计

问题1：前面我们曾经研究过不等式的基本性质，对于这些性质的证明，在方法上有值得琢磨的地方．有的性质证明比较容易，但对于性质（6）的证明，用通常的综合法则相当困难．我们很难直接从条件和已有的事实直接推证出结论．你认为可以怎样证明这个结论？通常，正面入手不能奏效时，可以从结论的反面来思考问题.

设计意图：从对不等式性质（6）的证明的研究，引入反证法，初步体会反证法的思想方法.

师生活动：分析不等式基本性质的证明，对性质（6），分析结论的反面的两种情况，思考这两种情况是否可能成立，怎样否定它，即证明它是不可能成立的．从以上过程概括出用反证法证明不等式的基本思路，并进一步总结概括出反证法证明命题的方法．教师可以引导学生归纳在哪些情况下使用反证法（通常在不太容易用直接证法证明命题的情况下考虑试用反证法）.

问题2：例1的结论“$\frac{1+x}{y}$，$\frac{1+y}{x}$中至少有一个小于2”包含了哪些情况，你能从已知条件直接推证这些情况吗？

设计意图：反证法通常用于直接证法不能实现证明的目的的情况，首先应该让学生对于问题的特点和困难有一定的认识，才能使学生认识引入反证法的必要性，并尝试用反证法去证明.

师生活动：分析例 1 结论的几种情况，学生通过亲自尝试，认识到直接证明的困难. 从而考虑用反证法证明.

问题 3：例 1 的结论“$\frac{1+x}{y}$，$\frac{1+y}{x}$中至少有一个小于 2”的否定是什么？是否比命题的结论简单一些？你能用反证法证明它吗？

设计意图：引导学生认识用反证法证明例 1 不等式中结论的可能性，寻求证明方法.

师生活动：教师提出问题，学生思考并回答“结论的否定”，师生共同完善、补充；学生独立给出证明，通过课堂交流，查漏补缺，得出完整的证明.

问题 4：你认为例 2 中结论“$a>0$，$b>0$，$c>0$”的否定是什么？本例的条件有什么特点？如何根据这种特点简化证明过程？

设计意图：引导学生通过自己的思考得出结论的否定形式；引导学生关注条件“轮换对称”的特点，并学习用这种特点简化证明.

师生活动：教师提出问题后，先由学生思考、回答. 对于怎样对命题的结论进行否定，教师要引导学生注意有多种情形，例如 a，b，c 有一个非正数其余两个为正数；a，b，c 有两个非正数一个为正数；a，b，c 都是负数. 而且在每一种情形下又有哪一个为正数或负数的问题. 由于反面情况太多，自然地就把学生的思路引到如何简化的问题上，这时教师再引导学生观察已知条件特点，发现可以把这些情形归结为“a，b，c 至少有一个不是正数”，而且只要证明了 $a\leqslant 0$，其他情形的证明完全与此一样. 在上述活动的基础上，让学生独立完成证明过程.

问题 5：你能总结一下要用反证法证明的不等式的特点，用反证法证明不等式时要注意哪些问题？

设计意图：引导学生及时归纳反证法证明不等式的基本思想.

师生活动：教师引导学生总结，如果不等式是某些初始命题、否定性命题或惟一性命题等等，常常可以考虑用反证法加以证明. 用反证法证明不等式时，正确地否定不等式的结论非常重要，另外，还要注意观察条件，建立条件和结论的否定之间的联系，有利于找到证明的思路.

作业：习题 2.3 第 1，4 题.

五、习题解答

习题 2.1（第 23 页）

1. 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$. 因此

$$\begin{aligned}&a^3-b^3-ab(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab)\\&=(a-b)(a^2+b^2)>0,\end{aligned}$$

所以

$$a^3-b^3>ab\ (a-b).$$

2. 因为 $ad\neq bc$，所以

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\&=(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)\\&=(ad-bc)^2>0.\end{aligned}$$

所以

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2.$$

3. 因为 $a\neq b$，所以

$$\begin{aligned}&a^4+6a^2b^2+b^4-4ab(a^2+b^2)\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)\cdot(2ab)+(2ab)^2\\&=(a^2+b^2-2ab)^2\\&=(a-b)^4>0.\end{aligned}$$

所以

$$a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2).$$

4. 因为 a，b，c 是正数，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，则

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1,\ \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geqslant 1,\ \left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geqslant 1.$$

因为 $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}>0$，且

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=a^{2a-b-c}b^{2b-c-a}c^{2c-a-b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geqslant 1,$$

所以

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

习题 2.2（第 25 页）

1. 因为

$$a^2+b^2+5-2(2a-b)=(a-2)^2+(b-1)^2\geqslant 0,$$

所以

$$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b).$$

2. (1) 因为

$$\begin{aligned}&(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\\&=(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\\&\geqslant 2\sqrt{a}\times 2\sqrt{b}\times 2\sqrt{ac}\times 2\sqrt{bc}\\&=16abc,\end{aligned}$$

所以

$$(ab+a+b+c)(ab+ac+bc+c^2)\geqslant 16abc.$$

(2) 因为

$$(a^3+b^3)-(a+b)ab=(a-b)^2(a+b)\geqslant 0,$$

所以

$$(a^3+b^3)\geqslant(a+b)ab.$$

同理可得

$$(b^3+c^3)\geqslant(b+c)bc,$$
$$(c^3+a^3)\geqslant(c+a)ca.$$

从以上三个不等式得

$$2(a^3+b^3+c^2)\geqslant a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

3. 略.

4. 要证明 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$，即证明 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}$.

因为 $a>b>c$，所以 $a-c>a-b>0$，从而 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a-c}>0$. 又因为 $\frac{1}{b-c}>0$，所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}$.

所以$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

5. 提示：要证明$\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt[m+n]{m^n n^m}$，只需证明$\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}\geqslant m^n n^m$. 因为$\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}\geqslant(\sqrt{mn})^{m+n}=(mn)^{\frac{m+n}{2}}$，所以只要证明$(mn)^{\frac{m+n}{2}}\geqslant m^n n^m$，即证明$(mn)^{m+n}\geqslant m^{2n}n^{2m}$，只需证$\left(\frac{m}{n}\right)^{m-n}\geqslant 1$. 不妨设$m\geqslant n$，则$m-n\geqslant 0$，从而$\left(\frac{m}{n}\right)^{m-n}\geqslant 1$. 所以，原不等式成立.

6. 要证明
$$|f(a)-f(b)|<|a-b|,$$
即
$$\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|<|a-b|,$$
即
$$\left|\frac{a^2-b^2}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}\right|<|a-b|.$$
因为$a\neq b$，只需证
$$|a+b|<\left|\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\right|.$$
因为
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|<\left|\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\right|,$$
所以$|a+b|<\left|\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\right|$成立，从而原不等式成立.

7. 因为
$$\begin{aligned}&|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2\\&=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)][\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]\\&=\log_a(1-x^2)\log_a\frac{1-x}{1+x},\end{aligned}$$
又因为$0<x<1$，所以$0<1-x^2<1$，$0<\frac{1-x}{1+x}<1$. 所以
$$\log_a(1-x^2)\log_a\frac{1-x}{1+x}>0,$$
所以$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2>0$，即$|\log_a(1-x)|^2>|\log_a(1+x)|^2$.
从而
$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

8. 因为$n>0$，所以
$$n+\frac{4}{n^2}=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{4}{n^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{n^2}}=3.$$

9. 因为$|1-ab|^2-|a-b|^2=(1-a^2)(1-b^2)>0$，所以$|1-ab|>|a-b|$.

习题 2.3（第 29 页）

1. 因为$0<a$，b，$c<1$，根据基本不等式
$$0<(1-a)a\leqslant\left(\frac{(1-a)+a}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$
$$0<(1-b)b\leqslant\left(\frac{(1-b)+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$
$$0<(1-c)c\leqslant\left(\frac{(1-c)+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$
所以
$$(1-a)a\times(1-b)b\times(1-c)c\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

假设$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 都大于$\frac{1}{4}$，则

$$(1-a)b\times(1-b)c\times(1-c)a>\left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

这与$(1-a)a\times(1-b)b\times(1-c)c\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3$ 矛盾. 所以，$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能都大于$\frac{1}{4}$.

2. 一方面，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}&>\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1};\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}&<\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

3. 当$n=1$时，不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$显然成立，即

$$1<2\sqrt{1}. \qquad ①$$

当$n\geqslant2$时，因为$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}),$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$

……

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

把①式和以上各式依次相加，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

4. 假设$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)<9$，由于 x，$y>0$，且 $x+y=1$，所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)&=\frac{1-x^2}{x^2}\times\frac{1-y^2}{y^2}\\&=\frac{(1+x)(1-x)}{x^2}\times\frac{(1+y)(1-y)}{y^2}\\&=\frac{(1+x)y}{x^2}\times\frac{(1+y)x}{y^2}\\&=\frac{(1+x)}{x}\times\frac{(1+y)}{y}\\&=\frac{(1+x)}{x}\times\frac{(2-x)}{1-x}<9,\end{aligned}$$

得

$$(2x-1)^2<0.$$

这是不可能的．所以

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant 9.$$

5. 因为 $\pi r^2h=V$（定值），所以，圆柱的表面积

$$\begin{aligned}S&=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh\\&\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi r^2\times\pi rh\times\pi rh}\\&=3\sqrt[3]{2\pi^3r^4h^2}\\&=3\sqrt[3]{2\pi V^2},\end{aligned}$$

当且仅当 $2\pi r^2=\pi rh=\pi rh$ 时，等号成立．所以，当 $h=2r$，即 $h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$，$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$时，其表面积最大．

6. $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

第三讲 柯西不等式与排序不等式

一、本讲知识结构

二维形式的柯西不等式
（引入与证明，分析二维柯西不等式的几种形式、几何意义，应用举例）

三维形式的柯西不等式
（提供几何背景，分析不等式的形式及其数学含义）

一般形式的柯西不等式
（探求不等式的形式、分析其数学含义，讨论证明方法，应用举例）

排序不等式
（探究—猜想—证明—应用）

二、教学重点与难点

重点：

1. 认识柯西不等式的几种不同形式，理解其几何意义；

2. 用向量递归方法讨论排序不等式；

3. 通过运用这两种不等式分析解决一些简单问题，体会运用经典不等式的一般方法——发现具体问题与经典不等式之间的联系，经过适当变形，以经典不等式为依据得出具体问题中的不等关系.

难点：

1. 一般形式的柯西不等式和排序不等式的证明思路；

2. 运用这两个经典不等式证明不等式.

三、编写意图与教学建议

本讲的核心内容为两个经典不等式——柯西不等式和排序不等式. 这两个不等式不仅形式优美，而且具有重要应用价值.

本讲对柯西不等式的讨论篇幅较多，组成本讲的第一、二两部分，这是一个从特殊到一般的展开过程. 教科书首先讨论了二维形式的柯西不等式，这是最简单的柯西不等式. 在此基础上，教科书按照从特殊到一般的认识方式，继续讨论三维形式的柯西不等式，进而讨论一般形式的柯西不等式. 这些讨论包括柯西不等式的数学含义（即所表示的不等关系）、几何意义（对二维和三维形式而言）、应

用举例等. 通过这些讨论，学生可以对柯西不等式形成一个较全面的认识.

本讲的第三部分是排序不等式，但对它的讨论篇幅不多. 教科书在讨论排序不等式时，展示了一个“探究—猜想—证明—应用”的研究过程，目的是引导学生通过自己的数学活动，初步认识排序不等式的数学意义、证明方法和简单应用.

本讲的编写意图不是仅仅介绍两种经典不等式及其证明方法，而是更希望能通过分析和解决问题，讨论经典不等式的简单应用，提高学生运用重要数学结论进行推理论证的能力，即在理解重要数学结论的基础上，能够发现面临的具体问题与重要数学结论之间的内在联系，并善于利用这样的联系，应用重要数学结论及其所反映的数学思想方法解决具体问题. 教学中，希望教师能把握重点，不仅使学生从形式上认识这两个经典不等式的基本特征，而且更要关注学习过程中从特殊到一般、数形结合等认识事物规律的方法，以培养能力为重要目标. 此外，还要注意把握问题的难度，重在对经典不等式的基本的、简单的运用，强调解决这些问题的通性通法，而不过分追求证明中的个别变形技巧.

（一）二维形式的柯西不等式

1. 经典不等式

本讲在开始部分提及经典不等式. 所谓经典不等式，就是指那些表示某些基本不等关系，而且经常被当作推理根据，用来推导其他不等关系的不等式，它们都是属于不等式范畴的重要数学结论. 例如，下列不等式都属于经典不等式之列.

平均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\ (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in\mathbf{R}_+).$$

三角不等式（又称为三角形不等式）

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ (x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2\in\mathbf{R}).$$

柯西（Cauchy）不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$(a_i,\ b_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

排序不等式

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两组实数，c_1，c_2，c_3，…，c_n 是 b_1，b_2，…，b_n 的任一排列，则

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

贝努利（Bernoulli）不等式

若 $x\in\mathbf{R}$，且 $x>-1$，$x\neq0$，$n>1$，$n\in\mathbf{N}$，则 $(1+x)^n>1+nx$.

一般地说，经典不等式所表示的不等关系具有形式规则并且优美的特征，它们在数学和其他相关学科的研究中具有重要作用，一般被当作定理使用.

2. 二维形式的柯西不等式

二维形式的柯西不等式通常被表示为如下形式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}).\qquad ①$$

教科书从学生熟悉的不等式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 引入这一不等式. 由于不等式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 涉及平方和，联想到 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）也与平方和有关，所以通过多项式的乘法和因式分解，根据实数平方的非负性，可以证明二维形式的柯西不等式，这是代数证法. 这样引入二维形式的柯西不等式，是一种比较自然的处理方法.

由二维形式的柯西不等式①还可以推出一些其他形式的不等式，例如

$$(a+b)(c+d)\geqslant(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2\ (a,\ b,\ c,\ d\text{ 为非负实数});$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac+bd|\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R});$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac|+|bd|\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}).$$

容易看出，这些不等式与二维形式的柯西不等式①是等价的．其中第一、二式中当且仅当 $ad=bc$ 时等号成立；第三式中当且仅当 $|ad|=|bc|$ 时等号成立．

借助平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{\beta}=(c,\ d)$，可以从数量积的角度对二维柯西不等式进行解释，即 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$ 等价于 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac+bd|$，这就是从二维向量角度对二维柯西不等式的几何意义所作的解释，也可以把这种解释看作关于二维柯西不等式的几何证法．式子

$$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\qquad ②$$

被称为二维柯西不等式的向量形式，它可以被看作二维柯西不等式的几何表示形式．教科书安排了“探究”栏目，引导学生进行二维柯西不等式的代数表示形式①与向量形式②的互推，目的是从数和形两个角度来加深对二维柯西不等式的认识，体会两种表示形式的等价关系．同时，这样安排也为后面引出三维柯西不等式埋下伏笔．教学中可以对学生的探究活动进行适当启发，但建议教师不要完全代替学生完成这样的推导．

3. 对三角不等式的安排方式

教科书中安排了“观察”栏目，引导学生在平面直角坐标系中，根据两点间的距离公式以及三角形的边长关系，从几何意义上发现二维形式的三角不等式

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ (x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2\in\mathbf{R});$$

接着用代数方法证明三角不等式，从而体现二维形式柯西不等式的应用．教学中应引导学生关注证明过程中如何用柯西不等式，体会进行式子变形并设法创设两数平方和乘另两数平方和的形式的目的性，使对这样的变形不是简单的记忆，而是在理解的基础上学习，以逐步掌握根据具体不等式的特点进行代数变换的技能，提高运算能力．

二维形式的三角不等式反映了平面几何中三角形三边之间的数量关系，这可以进一步推广到三维空间的情形，得到三角不等式的三维形式，即

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2\in\mathbf{R}).$$

对它的几何意义，可以利用三维空间直角坐标系作出清晰的解释．利用三维形式的柯西不等式可以证明这个不等式，教学中可以在得出三维形式的柯西不等式后让学生考虑这个证明．

三角不等式的一般形式为

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\geqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

$$(x_i,\ y_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

利用一般形式的柯西不等式可以证明这个不等式，具体证法与本讲定理 3 的证明思路基本一致．教科书在本讲的第二部分“探究”栏目中安排了有关内容，教学中可以启发学生联系前面已经学习过的对二维形式的三角不等式的证明，进一步探究如何证明一般形式的三角不等式．这样的探究也是从特殊认识一般的过程．

三角不等式是一个在数学中有重要地位的不等式．例如，在拓扑学中“距离”是一个重要概念，而无论如何定义距离，都离不开三角不等式．

4. 对例题的说明

本讲第一部分的最后安排了三个例题（例 1～例 3），编写意图为：通过证明不等式的具体例子，体现二维形式的柯西不等式的应用价值，说明它是研究不等关系的重要工具.

例 1 中不等式的形式与二维形式的柯西不等式具有明显的一致性，因此比较容易考虑到应用柯西不等式进行证明，这样可以避免较繁的运算．教学中应注意提醒学生弄清本例中对应于柯西不等式中 a，b，c，d 的是哪 4 个数.

例 2 要求出函数的最大值，由于这个函数的解析式可以化为 $ac+bd$ 的形式，所以可以想到利用柯西不等式的 $|ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ 的形式．教学中应注意提醒学生弄清本例中对应于柯西不等式中 a，b，c，d 的是哪 4 个数．如何确定 a，b，c，d，关系到能否顺利地得出结果．本例中要设法使 $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ 化为常数，才能得出函数的最大值．有了这样的分析，就容易理解为什么要把 $10-2x$ 变形为 $2(5-x)$，由此可以提高利用柯西不等式解决问题的能力.

例 3 中，由于 $a+b=1$，因此用 $a+b$ 去乘任何式子，都不会改变这个式子的值．本例要证的结论与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值有关，而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$，有了 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 这个乘积形式，就创造了使用柯西不等式的条件．教学中应注意提醒学生注意本例中 $a+b=1$ 和 a，$b\in\mathbf{R}_+$ 这些条件的作用.

在用柯西不等式证明时，经常会遇到"$a+b=k$（非零常数）"这样的特殊条件，这时，用 $a+b$ 去乘任何式子，得到的是这个式子与这个常数的积．特别地，将 $a+b=k$ 转化为 $\frac{a+b}{k}=1$，就使问题化归到与 $a+b=1$ 类似的情形.

通过例 1～例 3 的教学，可以使学生体会如何进行必要的式子变形，使其转化到可以使用二维形式的柯西不等式的形式．虽然这些变形比较简单，但却能说明变形的必要性．教学中可以引导学生考虑"为什么要这样变形"，使他们认识如此变形的合理性，从而感觉到如此变形是自然的而不是不可知的，这样做有利于培养学生运用适当的变形手段解决问题的能力.

（二）一般形式的柯西不等式

1. 一般形式的柯西不等式

由二维形式的柯西不等式到一般形式的柯西不等式，是从特殊到一般的认识过程，其中三维形式的柯西不等式是过渡的桥梁．从空间向量的几何意义，也能得到 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|$，将空间向量的坐标代入，化简后就可得三维形式的柯西不等式，即

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

这在教学中难度不大，学生比较容易接受.

由二维和三维形式的柯西不等式，容易猜想到一般形式的柯西不等式，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

对于它的证明，教科书采用了构造二次函数，通过配方，利用判别式推导结果的方法．教学中可以引导学生从观察一般形式的柯西不等式的整体结构入手，分析它具有 $AC\geqslant B^2$ 的形式，这样就容易联想到要构造函数 $y=Ax^2+2Bx+C$ 了．这不仅说明了方法的合理性，而且点出了这种方法是怎样产生的，从而有利于培养学生的逻辑思维能力．总之，对于证明一般形式柯西不等式的教学，要注意强调整体思路，而不要只注意具体细节.

另外，证明过程中，对等号成立的条件的讨论是学生不太习惯的．其逻辑过程是：

二次函数 $f(x)$ 有唯一零点时，判别式 $\Delta=0$，这时不等式取等号；

$\Delta=0\Leftrightarrow a_ix+b_i=0$（$i=1$，2，…，$n$）$\Leftrightarrow b_i=0$ 或 $a_i=kb_i$（$i=1$，2，…，n）.

利用一般形式的柯西不等式，容易推导出一般形式的三角不等式

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\geqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$
$$(x_i,\ y_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

具体证法为：展开$(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2})^2$，然后由柯西不等式推出展开式中的$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\geqslant|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|$，进而完成全部证明．教学中，可由学生探究具体证明过程，以加强其对一般形式柯西不等式与一般形式三角不等式之间联系的认识．

2. 对例题的说明

教科书安排了三个例题（例1～例3），编写意图为：通过证明不等式的具体例子，体现一般形式的柯西不等式的应用价值．这些例题说明：当不等式中多个数量具有平方和形式时，一般形式的柯西不等式是解决问题的重要工具．

例1要证的不等式的形式与一般形式的柯西不等式很接近，但必须经过适当变形才能看出两者是完全一致的．因此，适当变形在证明本例中起关键性的转化作用．教学中应注意引导学生弄清本题中n和1是如何转化的，特别注意到1这个常数的特性，认识到虽然从表面看$a_1+a_2+\cdots+a_n$要比$1\times a_1+1\times a_2+\cdots+1\times a_n$形式简单，但是只有能看出两者的相等关系，才能使用一般形式的柯西不等式，这是用柯西不等式进行证明的一个重要技巧．这种从简单事物看出其中隐含的规律的能力很重要．

例2要证的式子中四个字母a，b，c，d的排列具有轮换对称性，即按照$a\to b\to c\to d\to a$的顺序轮换时这个式子不变，由此可以想到利用柯西不等式进行证明．教学中应注意启发学生理解本例中为什么要考虑

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+a^2),$$

这个式子中两个括号中字母顺序按照什么规律对应．弄清这些问题对提高使用柯西不等式的能力很重要．此外，问题中还涉及等号成立的条件，讨论它可以培养学生认真细致的学习态度，提高逻辑推理的严谨性．

例3要求式子$x^2+y^2+z^2$的最小值，根据$x^2+y^2+z^2$的形式特征及$x+2y+3z=1$这个特殊条件，结合柯西不等式的形式特征，从$x+2y+3z$入手进行构造，可以得到下面的关系

$$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)\geqslant(x+2y+3z)^2=1,$$

这就找到了解决问题的思路．教学中应注意通过分析问题，使学生体会到解决问题的巧妙方法不是凭空的灵机一动，而是在认真观察、分析之后产生的．

例1～例3对于如何进行必要的式子变形，使其符合使用一般形式的柯西不等式的形式，作出了示范．这些变形虽都比较简单，但能说明变形的必要性．要使用经典不等式，必须熟悉它们的形式以及等价变形，掌握它们的结构特点，才有可能灵活运用它们．

（三）排序不等式

1. 排序不等式

教科书通过"探究"，引导学生考虑三角形面积大小的比较问题，由这个问题可以归结出关于排序不等式的猜想，因此，可以说这个问题是排序不等式的一个几何模型．讨论问题中三角形的构成时，涉及点A_1，A_2，…，A_n与点B_1，B_2，…，B_n之间的"一一搭配"，这里"一一搭配"指A_1，A_2，…,A_n中各点分别对应B_1，B_2，…，B_n中不同的点，完成一次"一一搭配"后形成n个像(A_i,B_j)这样的"配对"，它们对应n个三角形．由探究三角形面积这个具体问题推而广之得到一般性猜想后，教科书又通过另一个"探究"，引导学生对猜想进行尝试性检验，使其进一步感到猜想的正确性．在此基础上，教科书又引导学生进行一般性证明，基本策略是固定a_1，a_2，…，a_n，对另一列数采用逐步调整并不断比较的措施，使之逐步递归为b_1，b_2，…，b_n，逐步得出"反序和≤乱序和≤顺

序和”. 最后教科书又讨论了排序不等式中等号成立的条件.

综观教科书这段内容的安排，可以发现其中“探究—猜想—检验—证明”的整体设计思路，这反映了研究数学问题时使用的基本方法和通常的研究过程. 教学中应注意引导学生从整体上认识这段内容，把握教材的编写意图，培养由特殊事物发现一般规律并进而证明一般规律的能力.

教学中，对排序不等式的证明，重点要放在使学生认识基本证明思路上——通过逐步调整比较法，一步一步地接近要证的目标，如此继续下去最终可以得到相应的大小关系.

2. 对例题的说明

排序不等式也是经典不等式，它的规律简明，容易记忆. 对于具有明确大小顺序的、数目相同的两列数，考虑它们对应项乘积之和的大小关系时，排序不等式是很有用的工具. 这里安排了两个例题，对如何应用排序不等式作出示范.

例 1 是一个实际问题，关键是正确建立数学模型，即把问题数学化，使实际问题转化为数学问题. 教科书中的“分析”抓住问题中的关键词“等候的总时间”，把它数量化表示为 $10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}$，这个乘积之和使问题变得明朗化，我们可以把问题叙述为“t_1，t_2，…，t_{10} 满足什么条件时，$10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}$ 取最小值”. 于是，利用排序不等式就可以设计出最省时间的排队方案，即当 $t_1<t_2<\cdots<t_9<t_{10}$ 时，等候总时间

$$10t_1+9t_2+\cdots+t_{10}$$

最少，因此应按水桶容积的大小，由小到大依次接水.

教学中，可以结合排队的实际背景，举适当例子帮助学生理解数学模型的意义. 例如，可以让学生先考虑这样的简单问题：有 3 个人拿着不同的水桶在一个水龙头前排队接水，前面的人接满水后离开，后面的人才能继续接水. 甲接满水需 1 min，乙接满水需 2 min，丙接满水需 1.5 min.

(1) 如果按照甲、乙、丙的先后顺序接水，三人排队时间的总和是多少?

(2) 如果按照甲、丙、乙的先后顺序接水，三人排队时间的总和是多少?

(3) 如果按照乙、丙、甲的先后顺序接水，三人排队时间的总和是多少?

通过列式、计算，可以帮助学生理解问题情境及如何把问题数学化，进而为学习例 1 进行铺垫.

例 2 是证明不等式的问题，如能注意到“a_1，a_2，…，a_n 是 n 个互不相等的正整数”这个条件，由此想到它们可以从小到大地排序，就容易联想到排序不等式了. 在此基础上，观察问题中的式子，就能顺势想到与 a_1，a_2，…，a_n 对应的是另一列数 1，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{3^2}$，…，$\frac{1}{n^2}$，这样就会产生证明的基本思路. 实际上，在不等式的证明中，往往将“n 个互不相等的正整数”进行排序，这种排序并不失一般性，是证明中常常使用的一个重要技巧. 教学中应注意引导学生从正确方向进行分析，充分利用问题的条件，挖掘条件背后更深的内容，为使用已有经典不等式创造条件.

本题中较难想到之处是 $b_1\geqslant 1$，$b_2\geqslant 2$，…，$b_n\geqslant n$. 这需要根据分析的发展逐步想到，从要证明的不等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2},$$

可以想出设 b_1，b_2，…，b_n 是 a_1，a_2，…，a_n 的一个排列，且满足 $b_1<b_2<\cdots<b_n$. 然后考虑到

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2},$$

以及

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=1\times 1+2\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{n^2},$$

就可以想到要将 b_1，b_2，…，b_n 与 1，2，…，n 联系起来．教学中应注意启发学生思考为什么要有这些证明步骤以及怎样才会想出这些步骤，培养学生的独立思考能力和逻辑推理能力．

四、教学设计案例

二维形式的柯西不等式（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）通过探究式子 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），从式子变形的角度证出不等关系

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}),\qquad ①$$

认识二维柯西不等式的代数表示形式．

（2）借助平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{\beta}=(c,\ d)$，从数量积的角度推出二维柯西不等式的向量形式

$$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|,\qquad ②$$

给出二维柯西不等式的几何意义．

（3）通过对二维柯西不等式的探究、思考和讨论，使学生从数、形两方面认识①②两式的等价关系，体会数形结合的数学思考方法．

2. 教学重点、难点

重点：（1）定理 1（二维形式的柯西不等式）；

（2）定理 2（柯西不等式的向量形式）．

难点：数形结合地认识①②两式的等价关系．

3. 教学基本流程

探究：类比不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的推导过程，通过乘法及配方，得出 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，从而总结出定理 1（二维形式的柯西不等式）．

↓

分析：将①式变形，得出其等价形式 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac+bd|$，加深对二维形式的柯西不等式的认识．

↓

讨论：二维形式的柯西不等式的几何意义，推出式子 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$，进而由它得出 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，即②式⇒①式，从而总结出定理 2（柯西不等式的向量形式）．

↓

探究：①式⇒②式，从数、形两方面认识定理 1 和定理 2 的一致性（①②两式的等价关系）．

↓

小结：二维柯西不等式的形式特点、所表示的不等关系、几何意义等．

↓

练习，布置作业．

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 回顾不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，它反映了两个实数的平方和与乘积的大小关系．现在考虑乘积 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，它关系到 4 个实数，并且形式上也与平方和有关，由它能否发现新的不等关系？	从温故的角度自然地引出新课题．不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的证明中涉及多项式的乘法及平方非负性，这些对研究新课题仍然适用．	教师提出要考虑的新问题，分析乘积 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 的形式特征，引导学生回顾不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的证明过程，留给学生一定时间，使其能类比思考，想到通过多项式的乘法及平方非负性有可能发现新的不等关系，从而产生解决新问题的大体思路．
(2) 请你将式子 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 作适当变形，找出其中包含的不等关系．由此能得到什么结论？	通过展开乘积，可得到 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$，由 $(ad-bc)^2\geqslant 0$，可得 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$． 从上面的探究过程可以得出：当且仅当 $ad-bc=0$，式中的等号成立．由此得到二维柯西不等式的第一种形式．	学生独立进行多项式的乘法，教师引导学生认识展开式可化为平方和形式，并根据平方的非负性，得到 $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2.$$ 教师进一步启发学生考虑式中的等号成立的条件． 师生共同分析所得不等式的含义，概括出定理 1． 以上活动过程是：先探究，再分析探究中证明的规律，最后将此规律概括为重要结论（二维柯西不等式）．
(3) 你能简明地写出定理 1 的证明吗？	及时回顾推导二维柯西不等式的具体过程，使学生加深对二维柯西不等式的合理性的认识，增强理性思维意识．	教师引导学生回顾定理 1 是如何得出的，由学生独立地再次重现具体证明过程．
(4) 利用二维形式的柯西不等式，由式子 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$ 可以得出什么不等关系？	分析这个式子，得出二维柯西不等式的等价形式 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\lvert ac+bd\rvert$，以及 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\lvert ac\rvert+\lvert bd\rvert$，这不仅可以加深对二维形式的柯西不等式的认识，而且有利于灵活使用柯西不等式．	教师提出问题 (4)，启发学生考虑这个式子与柯西不等式的联系，然后利用柯西不等式得出新的不等式．这是初步运用柯西不等式的实践，同时也可以认识到柯西不等式可以有不同的表达形式．
(5) 考虑向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{\beta}=(c,\ d)$ 的数量积的绝对值 $\lvert\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}\rvert=\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{\beta}\rvert\cdot\lvert\cos\theta\rvert$，由此能得出什么不等关系？这与二维形式的柯西不等式有什么联系？	根据余弦函数的有界性，可以推出向量不等式 $\lvert\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{\beta}\rvert$．　② 联系向量的坐标表示，由②式可推出①式，又联系②式所对应的几何直观意义，就对二维柯西不等式作出了直观的几何解释，即得到二维柯西不等式的几何意义．	教师从向量数量积的绝对值出发，启发学生考虑相应的不等关系，让学生讨论：这个不等关系与二维柯西不等式①是什么关系？由此引导学生由②式得到①式．在讨论的基础上，由学生自己写出主要证明过程，即用坐标表示向量的过程；师生共同分析这个过程，概括出定理 2（柯西不等式的向量形式）．
(6) 考虑定理 2 后面的“探究”，如何①式⇒②式？	继上一问题之后，从逆向认识①②两式可以互相推导，从而认识定理 1 和定理 2 的等价关系．这是数形结合地认识同一问题的过程．	教师启发学生回顾如何实现②式⇒①式，找出如何实现①式⇒②式的方法． 学生独立进行探究，并从数形结合的角度体会①②两式的等价关系．
(7) 回顾本节课学习的内容，你能梳理出其要点吗？	小结：二维柯西不等式的形式特点、所表示的不等关系、几何意义等．	学生在教师引导下，对本节学习内容进行整理，分析出其中的重点内容，构建新知识框架．

续表

问 题	设计意图	师生活动
练习，布置作业.	独立思考，巩固提高.	练习：证明不等式 $(x^2+y^4)(a^4+b^2)\geqslant(a^2x+by^2)^2$. 作业：1. 写出第33页"探究"中的推导过程. 2. 证明不等式： (1) $(x^2+y^2)(1+z^2)\geqslant(x+yz)^2$； (2) $(4x^2+9y^2)(m^2+n^2)\geqslant(2mx+3ny)^2$.

五、习题解答

习题 3.1（第 36 页）

1. 函数定义域为$[5，6]$，且 $y\geqslant0$.

$$y=3\sqrt{x-5}+4\sqrt{6-x}\leqslant\sqrt{(3^2+4^2)(x-5+6-x)}=5.$$

当且仅当 $4\sqrt{x-5}=3\sqrt{6-x}$，即 $x=\dfrac{134}{25}$时，函数有最大值 5.

2. 三维柯西不等式

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2;$$

三维三角不等式

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

3. 因为 $2x^2+3y^2\leqslant6$，所以 $|x+2y|\leqslant\sqrt{(2x^2+3y^2)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}\right)}\leqslant\sqrt{6\times\dfrac{11}{6}}=\sqrt{11}$. 因此 $x+2y\leqslant\sqrt{11}$.

4. 因为 $a^2+b^2=1$，所以 $|a\cos\theta+b\sin\theta|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=1$.

5. 因为 $a+b=1$，所以 $(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)\geqslant(a\sqrt{x_1x_2}+b\sqrt{x_1x_2})^2=(a+b)^2x_1x_2=x_1x_2$.

6. $(x^2+y^2)(1+4)\geqslant(x+2y)^2=1$，即 $x^2+y^2\geqslant\dfrac{1}{5}$.

当且仅当 $x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$时，x^2+y^2有最小值$\dfrac{1}{5}$.

7. $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(2b+\dfrac{1}{2a}\right)\geqslant\left(\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{2a}}+\sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot2b}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

当且仅当 $2ab=1$（$a，b\in\mathbf{R}_+$）时，函数有最小值$\dfrac{9}{2}$.

8. $$\begin{aligned}pf(x_1)+qf(x_2)&=p\sqrt{x_1}+q\sqrt{x_2}=\sqrt{px_1}\cdot\sqrt{p}+\sqrt{qx_2}\cdot\sqrt{q}\\&\leqslant\sqrt{(px_1+qx_2)(p+q)}=\sqrt{px_1+qx_2}=f(px_1+qx_2).\end{aligned}$$

9. $y=3\sin x+4\sqrt{1+\cos2x}=3\sin x+4\sqrt{2\cos^2x}\leqslant\sqrt{(\sin^2x+\cos^2x)(9+32)}=\sqrt{41}$.

当且仅当 $\tan x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$时，函数有最大值$\sqrt{41}$.

习题 3.2（第 41 页）

1. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot a}+\sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot b}+\sqrt{\dfrac{1}{c}\cdot c}\right)^2=3^2=9$.

推广：若 $x_1，x_2，\cdots，x_n\in\mathbf{R}_+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，则$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\geqslant n^2$.

证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot x_1}+\sqrt{\frac{1}{x_2}\cdot x_2}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{x_n}\cdot x_n}\right)^2=n^2.$$

2. 因为 $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$$\geqslant(a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1)^2$$

$$=(a+b+c+d)^2=1^2=1,$$

所以 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\frac{1}{4}$.

3. $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(\sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot x_1}+\sqrt{\frac{1}{x_2}\cdot x_2}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{x_n}\cdot x_n}\right)^2=n^2$.

4. $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$=\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{a+b}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}\cdot\frac{1}{c+a}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{1}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{1}{a+b+c}}\right)^2$$

$$=\left(3\sqrt{\frac{1}{a+b+c}}\right)^2=\frac{9}{a+b+c}.$$

上式中等号不成立，这是由于 a，b，c 是互不相等的正数，所以

$$\frac{a+b}{a+b+c}:\frac{1}{a+b}\neq\frac{b+c}{a+b+c}:\frac{1}{b+c}\neq\frac{c+a}{a+b+c}:\frac{1}{c+a}.$$

5. 因为$(x^2+y^2+z^2)(2^2+3^2+4^2)\geqslant(2x+3y+4z)^2=10^2=100$，所以

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{100}{29}.$$

当且仅当 $x=\frac{20}{29}$，$y=\frac{30}{29}$，$z=\frac{40}{29}$时，$x^2+y^2+z^2$ 有最小值$\frac{100}{29}$.

6. 因为$\left(\frac{x_1^2}{1+x_1}+\frac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1+x_n}\right)(n+1)$

$$=\left(\frac{x_1^2}{1+x_1}+\frac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1+x_n}\right)[(1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)]$$

$$\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=1,$$

所以$\frac{x_1^2}{1+x_1}+\frac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1+x_n}\geqslant\frac{1}{n+1}$.

习题 3.3（第 45 页）

1. 由加法交换律及 c_1，c_2，…，c_n 的任意性，不妨假设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，这不影响题意.
   由排序不等式，得 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.
2. 由于要证的式子中 a，b，c 所处地位相同，所以不妨假设 $a\leqslant b\leqslant c$. 于是 $a^2\leqslant b^2\leqslant c^2$. 由排序不等式，得

$$a^2a+b^2b+c^2c\geqslant a^2b+b^2c+c^2a,$$

$$a^2a+b^2b+c^2c\geqslant a^2c+b^2a+c^2b.$$

两式相加，得 $2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

3. 由于要证的式子中 a_1，a_2，a_3 所处地位相同，所以不妨假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$. 于是

$$\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{a_3},\ a_2a_3\leqslant a_3a_1\leqslant a_1a_2.$$

由排序不等式，得

$$\frac{a_1a_2}{a_3}+\frac{a_2a_3}{a_1}+\frac{a_3a_1}{a_2}\geqslant\frac{1}{a_3}\cdot a_2a_3+\frac{1}{a_1}\cdot a_3a_1+\frac{1}{a_2}\cdot a_1a_2=a_2+a_3+a_1.$$

即 $\frac{a_1a_2}{a_3}+\frac{a_2a_3}{a_1}+\frac{a_3a_1}{a_2}\geqslant a_1+a_2+a_3$.

4. **用柯西不等式证明如下：**

因为 $\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\right)(a_2+a_3+\cdots+a_n+a_1)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$，

所以 $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$.

用排序不等式证明如下：

设 $a_{i_1}\geqslant a_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant a_{i_n}>0$，其中 i_1，i_2，…，i_n 是 1，2，…，n 的一个排列，则

$$a_{i_1}^2\geqslant a_{i_2}^2\geqslant\cdots\geqslant a_{i_n}^2,\ \frac{1}{a_{i_1}}\leqslant\frac{1}{a_{i_2}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{a_{i_n}}.$$

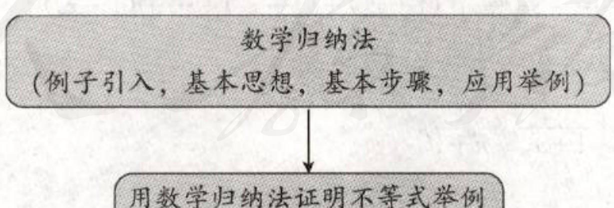
由排序不等式知，反序和最小，从而

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}&\geqslant\frac{1}{a_{i_1}}\cdot a_{i_1}^2+\frac{1}{a_{i_2}}\cdot a_{i_2}^2+\cdots+\frac{1}{a_{i_n}}\cdot a_{i_n}^2\\&=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}=a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

所以 $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$.

第四讲　用数学归纳法证明不等式

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 了解数学归纳法的原理及其使用范围和基本步骤；
2. 会运用数学归纳法证明含有任意正整数 n 的不等式（包括贝努利不等式）.

难点：

1. 认识数学归纳法的证明思路；

2. 运用数学归纳法时，在“假设与递推”的步骤中发现具体问题中的递推关系.

三、编写意图与教学建议

本讲的核心内容为用数学归纳法证明不等式. 对于某些涉及正整数 n（n 可以取无限多个值）的不等式，数学归纳法是非常有用的研究工具.

本讲分为两部分. 第一部分的重点是介绍数学归纳法，这也可以看作本讲的基础知识. 教科书在第 46 页通过“思考”，提出如何证明一个含有任意正整数 n 的等式的问题，由此引出“递推”的证明思想，并结合这个具体问题概括出数学归纳法的基本原理和步骤. 此后教科书安排了两个例题，通过证明等式巩固对数学归纳法的认识. 第二部分的重点是用数学归纳法证明不等式，教科书安排了 4 个例题，由浅入深地讨论如何通过“奠基”“假设与递推”证明含有任意正整数 n 的不等式. 这些不等式涉及到数列、三角函数、二项式乘方等，其中包括贝努利不等式这个经典不等式.

（一）数学归纳法

1. 数学归纳法的基本原理、步骤和适用范围

数学归纳法是一种重要的数学证明方法，其中递推思想起主导作用. 形象地说，多米诺骨牌游戏是递推思想的一个模型，数学归纳法的基本原理相当于有无限多张牌的多米诺骨牌游戏，其核心是归纳递推. 教科书借助了多米诺骨牌游戏这个模型来直观地类比抽象的数学归纳法，教学中应注意运用模型的作用.

数学归纳法的基本步骤有两步：(1) 奠基；(2) 假设与递推. 两步缺一不可. 教学中可以结合例子和模型分别说明这两步各自的作用，使学生认识到要完成它们的理由.

自然数公理（皮亚诺公理）中的“归纳公理”（参见拓展资源）是数学归纳法的理论根据，数学归纳法的两步证明恰是验证这条公理所说的两个性质. 设 P 是一个有关正整数的命题，我们把使 P 成立的所有正整数组成的集合记为 M，如果要证明命题 P 对于所有正整数都成立，即 $M=\mathbf{N}_+$，则根据归纳公理，只要首先证明 $1\in M$；其次证明若 $k\in M$ 则 $k+1\in M$，这样就可以完成证明.

数学归纳法一般被使用于证明某些涉及正整数 n 的命题，例如教科书在本讲中所举的各例. 这里的 n 是任意的正整数，它可取无限多值. 教学中可以结合例题使学生了解数学归纳法的适用范围. 但是，并不能简单地说所有涉及正整数 n 的命题都可以用数学归纳法证明，例如用数学归纳法证明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$（$n\in\mathbf{N}_+$）的单调性就难以实现. 一般说来，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，如果问题中存在可利用的递推关系，则数学归纳法有用武之地，否则使用数学归纳法就有困难.

教科书安排了“思考”问题，引导学生结合例子来认识数学归纳法的基本思想，这有助于帮助学生从整体上认识数学归纳法. 对数学归纳法有一个正确的整体认识，即从整体上认识到它的基本思想和使用它要先后完成两个基本步骤，对于提高使用数学归纳法的能力很重要.

2. 教学中要注意的问题

教学中，强调用数学归纳法时两步缺一不可是非常重要的. 学生初学数学归纳法时，往往感到证明中的第二步（假设与递推）比较难，因而也较为重视，但是对于证明中的第一步（奠基）往往不够重视，有时甚至忽略它. 为使学生对此能有所认识，教学中应强调奠基的作用，说明没有它的证明就如同在沙滩上建房子，是不可靠的. 为使学生加深印象，教师可以结合反例进行说明. 例如，“奇数是

2 的倍数”显然是个假命题，但是如果没有第一步奠基，直接假设如果奇数 k 是 2 的倍数（这是一个不合实际的假设），那么就能推出后一个奇数 $k+2$ 也是 2 的倍数.

教学中应提醒学生：在用数学归纳法进行证明时，第一步从 n 等于几开始，要根据具体问题而定. 一般地，如果要证明的命题是对全体正整数都成立的，则要从 $n=1$ 证起（教科书安排了“思考”，引导学生独立地思考这样的问题）；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的所有正整数都成立，则要从 $n=n_0$ 证起；如果要证明的命题是对全体自然数（包括 0）都成立的，则要从 $n=0$ 证起. 教学中可以结合不同类型的问题对这些加以说明.

证明中的第二步（假设与递推）的作用是传递，有了这种向后传递的关系，就能从一个起点（例如 $n=1$）不断发展，以至无穷. 如果没有它，即使前面验证过当 n 等于许多正整数时命题都成立，也不能保证对于后面的全体正整数命题都成立. 教学中，也可以通过具体例子对此进行说明. 例如，“n^2+n+11 是质数”这个命题对于 $n=1$，2，3，…，9 都成立，但是对于 $n=10$ 却不成立，$10^2+10+11=121=11^2$ 是一个合数.

教学中应综合两个步骤的作用，强调数学归纳法的两步是互相配合的，两步缺一不可.

3. 对例题的说明

教科书在这里安排了两个例题，意图是使学生通过它们进一步熟悉应用数学归纳法进行证明的过程及格式.

例 1 是关于整除的问题，教学中需要引导学生认识到：

(1) 一个数能被 6 整除，等价于这个数既是 2 的倍数又是 3 的倍数；

(2) 如果一个和数中的每个加数都能被数 a 整除，那么这个和数也能被 a 整除.

例 2 是一个几何中的组合问题，需要先从有限情形中归纳（是不完全归纳）出一个猜想，然后再用数学归纳法加以证明. 教学中可以让学生关注两个问题：

(1) 第一步证明应从 n 等于几开始，为什么？

(2) 第二步证明中从 $n=k$ 时到 $n=k+1$ 时是怎样过渡的？对 $n=k$ 时的假设在证明中起了什么作用？

通过这两个例题的教学，应让学生体会到：数学归纳法通过两步证明，代替了客观上无法实现的无限次验证，以“有限”步骤证明涉及“无限”的问题，这正是数学归纳法的威力所在. 教科书在例 2后面安排的“思考”，就是要引导学生自己去发现和体会数学归纳法的这种特殊作用.

（二）用数学归纳法证明不等式举例

教科书安排了 4 个例题，意图是使学生认识如何用数学归纳法证明含正整数 n（n 取无限多个值）的不等式.

1. 对例 1 的说明

例 1 是四个例题中比较简单的一个问题，通过它可以初步体会用数学归纳法证明不等式的过程. 问题中给出两个数列

$\{a_n=n^2\}$：1，4，9，16，25，36，49，64，81，….

$\{b_n=2^n\}$：2，4，8，16，32，64，128，256，512，….

要求学生先观察这两个数列，发现从第几项起 a_n 始终小于 b_n，然后证明发现的结论. 显然从第 5 项起 $a_n<b_n$，于是要证的结论即为 $n^2<2^n$（$n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant5$）.

用数学归纳法证明上述结论时，第一步应证明 $n=5$ 的情形. 本例中的难点在第二步中证明递推关

系时需要作如下变形

$$(k+1)^2=k^2+2k+1<k^2+2k+k=k^2+3k<k^2+k^2=2k^2<2\times 2^k=2^{k+1}.$$

教学中应引导学生认识到：这里将 k^2+2k+1 放大为 k^2+2k+k，是为了与归纳假设建立联系．在有关不等关系的问题中，适当进行放大或缩小是常用的变形．

2. 对例 2 的说明

例 2 是一个涉及正整数 n 的三角函数问题，它既与正弦函数、余弦函数的有界性有关，又与绝对值不等式有关．证明中主要难点是第二步的递推关系的证明，即由 $n=k$ 时的假设推导 $n=k+1$ 时的结论，这个过程包含较多相关知识，它可以表示为

$$\begin{aligned}|\sin(k+1)\theta|&=|\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta|\\&\leqslant|\sin k\theta\cos\theta|+|\cos k\theta\sin\theta|\\&=|\sin k\theta|\cdot|\cos\theta|+|\cos k\theta|\cdot|\sin\theta|\\&\leqslant|\sin k\theta|+|\sin\theta|\\&\leqslant k|\sin\theta|+|\sin\theta|.\end{aligned}$$

根据问题的内容，这里要用正弦的和角公式、正余弦函数的有界性，还要利用绝对值不等式．教学中，应引导学生根据问题的需要联系有关知识进行思考，并注意每一步证明的依据，明确证明过程中哪一步是利用了归纳假设，其他各步的理由何在．

3. 对例 3 的说明

例 3 中的贝努利不等式是一个经典不等式，利用它可以将二项式乘方缩小为 $1+nx$（或 $1+\alpha x$）的形式，从而使问题简单化，这在数值估计和证明不等式中很有用．一般地，贝努利不等式中的正整数 n 可以改为实数 α，即贝努利不等式的一般形式为：

当 α 是实数，并且满足 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$ 时，有 $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$ $(x>-1)$；

当 α 是实数，并且满足 $0<\alpha<1$ 时，有 $(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$ $(x>-1)$.

本讲中只重点证明指数是正整数的情形，用数学归纳法证明这种情形比较容易，对贝努利不等式的一般情形只是顺带提及．

4. 对例 4 的说明

例 4 要证明的不等式形式简洁和谐，而且研究不等式时可以经常使用它讨论问题．教学中应提醒学生，证明时要利用 n 个正数的乘积为 1 的条件，并对什么是归纳假设和由它要递推的目标心中有数．

例 4 可以再次说明：使用数学归纳法证明不等式，难点往往出现在由 $n=k$ 时命题成立推出 $n=k+1$ 时命题成立．为完成这步证明，不仅要正确使用归纳假设，还要灵活利用问题中的其他条件以及相关知识．

通过本例，可以引导学生体会全面分析问题．本例中，分为两种情况（n 个数全相等，n 个数不全相等），是从整体考虑问题；然后再分情况进行讨论，是逐一考虑各部分问题．第二步中把乘积 a_1a_2 看作一个数，是为了能够使用归纳假设，得出

$$a_1a_2+a_3+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant k.$$

用这个式子再加 $a_1+a_2-a_1a_2\geqslant 1$，是为得出

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant k+1.$$

这样的变形完全是根据递推的目标产生的，如此理解就不会感到变形的来源神秘了．

5. 对第53页“探究”的说明

问题（1）引导学生通过回顾例4体会使用数学归纳法中变形的作用，这种作用为实现递归创造了转化条件.

问题（2）是一个扩充性问题，供学生进行拓展学习用，它可以体现先后学习的不同内容之间的联系.

利用例4证明的不等式，可以进而证明均值不等式. 考虑 n 个正数 $\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$，$\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$，…，$\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$（$a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 是正数），显然它们之积等于1，于是它们之和应不小于 n，即

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\geqslant n.$$

由此可知，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

这里提供了对一般的均值不等式的一种证法.

四、习题答案

习题4.1（第50页）

1.（1）当 $n=1$ 时，$1=1$，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant1$）时命题成立，即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$.

当 $n=k+1$ 时，$1+3+5+\cdots+(2k-1)+2(k+1)-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$. 所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切正整数成立.

2.（1）当 $n=1$ 时，$1=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant1$）时命题成立，即 $1+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\=&\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\=&\frac{1}{6}(k+1)(k+2)[2(k+1)+1].\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切正整数成立.

3.（1）当 $n=1$ 时，$1\times4=1\times2^2$，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant1$）时命题成立，即 $1\times4+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1\times4+\cdots+k(3k+1)+(k+1)[3(k+1)+1]\\=&k(k+1)^2+(k+1)[3(k+1)+1]\end{aligned}$$

$$=(k+1)(k^2+4k+4)=(k+1)[(k+1)+1]^2.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切正整数成立.

4.（1）当 $n=1$ 时，因为 $x^{2\times1-1}+y^{2\times1-1}=x+y$ 能被 $x+y$ 整除，所以命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant1$）时命题成立，即 $x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除.

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}&=x^{2k+1}+y^{2k+1}\\&=x^{2k-1}x^2+y^{2k-1}x^2+y^{2k-1}y^2-y^{2k-1}x^2\\&=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})+y^{2k-1}(y-x)(x+y).\end{aligned}$$

上式前后两部分都能被 $x+y$ 整除，所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切正整数成立.

5. 凸 n 边形有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条对角线. 下面证明这个命题.

（1）当 $n=3$ 时，三角形没有对角线，即三角形有 0 条对角线，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant3$）时命题成立，即凸 k 边形有 $\frac{1}{2}k(k-3)$ 条对角线.

当 $n=k+1$ 时，凸 $(k+1)$ 边形的对角线条数为

$$\frac{1}{2}k(k-3)+(k-2)+1=\frac{1}{2}(k^2-k-2)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-3].$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切正整数成立.

6. 这样的 n 条直线把平面分成的区域数目为 $f_n=1+\frac{n}{2}(n+1)$. 下面证明这个命题.

（1）当 $n=1$ 时，平面被分为 $1+1=2$ 个区域，$f_1=2=1+\frac{1}{2}(1+1)$，命题成立.

（2）假设 $n=k$（$k\geqslant1$）时命题成立，即有 $f_k=1+\frac{k}{2}(k+1)$.

当 $n=k+1$ 时，第 $k+1$ 条直线与前面 k 条直线有 k 个不同交点，即它被前面 k 条直线截成 $k+1$ 段，其中每一段都把它所在的原区域一分为二，也即使原区域数目增加 $k+1$. 于是，

$$f_{k+1}=f_k+(k+1)=1+\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)=1+\frac{k+1}{2}(k+2).$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）可知，对任意正整数 n，命题都成立.

习题 4.2（第 53 页）

1.（1）当 $n=3$ 时，左边 $=(1+2+3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=11$，右边 $=3^2+3-1=11$，左边 = 右边，即命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant3$）时命题成立，即 $(1+2+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\geqslant k^2+k-1$.

当 $n=k+1$ 时，

$$(1+2+\cdots+k+k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(1+2+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+(1+2+\cdots+k)\frac{1}{k+1}+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

$\geqslant k^2+k-1+\frac{1}{2}k(k+1)\frac{1}{k+1}+\frac{3}{2}k+\frac{25}{12}$

$>k^2+3k+1=(k+1)^2+(k+1)-1.$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对大于 2 的一切正整数成立.

2.（1）当 $n\geqslant 17$ 时，有 $2^n>n^4$.

① 当 $n=17$ 时，$2^{17}=131\ 072>83\ 521=17^4$，命题成立.

② 假设当 $n=k$（$k\geqslant 17$）时命题成立，即 $2^k>k^4$.

当 $n=k+1$ 时，$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^4>k^4+17k^3>k^4+4k^3+6k^2+4k+1=(k+1)^4$.

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由①②知，命题对一切不小于 17 的正整数成立.

（2）当 $n\geqslant 3$ 时，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$.

① 当 $n=3$ 时，$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3$，命题成立.

② 假设当 $n=k$（$k\geqslant 3$）时命题成立，即 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)<k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)<k+1.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由①②知，命题对一切不小于 3 的正整数成立.

3.（1）当 $n=2$ 时，$\frac{1}{2^2}<\frac{2-1}{2}$，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant 2$）时命题成立，即 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^3+k^2-1}{k(k+1)^2}<\frac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}=\frac{(k+1)-1}{k+1}.$$

所以当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对任意大于 1 的正整数成立.

4. 不妨设 $a<b<c$，$a=b-d$，$c=b+d$.

（1）当 $n=2$ 时，$a^2+c^2=(b-d)^2+(b+d)^2=2b^2+2d^2>2b^2$，命题成立.

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant 2$）时命题成立，即 $a^k+c^k>2b^k$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&a^{k+1}+c^{k+1}=a^{k+1}+ac^k-ac^k+c^{k+1}\\&=a(a^k+c^k)-(a-c)c^k\\&=a(a^k+c^k)+2dc^k\\&>2ab^k+2dc^k=2(b-d)b^k+2dc^k\\&>2(b-d)b^k+2db^k=2b^{k+1}.\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由（1）（2）知，命题对一切大于 1 的正整数成立.

5.（1）当 $n=1$ 时，$\frac{1\times 2}{2}<\sqrt{1\times 2}<\frac{(1+1)^2}{2}$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ ($k\geqslant 1$) 时命题成立，即 $\frac{k(k+1)}{2}<a_k<\frac{(k+1)^2}{2}$.

当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{k(k+1)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)},$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)<a_{k+1}<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2},$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}<a_{k+1}<\frac{(k+2)^2}{2}.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由 (1) (2) 知，命题对一切正整数成立.

6. (1) 当 $n=2$ 时，$|\sin(\alpha_1+\alpha_2)|=|\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\sin\alpha_2|<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ ($k\geqslant 2$) 时命题成立，即

$$|\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)|<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_k.$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}|\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})|&=|\sin(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\cos\alpha_{k+1}+\cos(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\sin\alpha_{k+1}|\\&\leqslant|\sin(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)|+|\sin\alpha_{k+1}|\\&<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_k+\sin\alpha_{k+1}.\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由 (1) (2) 知，命题对一切大于 1 的正整数成立.

7. (1) 当 $n=2$ 时，$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ ($k\geqslant 2$) 时命题成立，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2.$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{k+1}^2)\\&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)b_{k+1}^2+a_{k+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)+\\&\quad a_{k+1}^2b_{k+1}^2\\&\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2+2|a_{k+1}b_{k+1}|\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_k^2)(b_1^2+\cdots+b_k^2)}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2\\&\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k)^2+2|a_{k+1}b_{k+1}|\sqrt{(a_1b_1+\cdots+a_kb_k)^2}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2\\&=(|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k|+|a_{k+1}b_{k+1}|)^2\\&\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k+1}b_{k+1})^2.\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由 (1) (2) 知，命题对一切不小于 2 的正整数成立，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

8. (1) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$.

(2) ① 当 $n=1$ 时，$a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1^2$，命题成立.

② 假设当 $n=k$ ($k\geqslant 2$) 时命题成立，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\geqslant k^2.$$

当 $n=k+1$ 时，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+(a_1+a_2+\cdots+a_k)\frac{1}{a_{k+1}}+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\geqslant k^2+1+2\sqrt{a_{k+1}\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)}$$

$$\geqslant k^2+1+2\sqrt{k^2}=(k+1)^2.$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题成立.

由①②知，命题对一切正整数成立.

III 自我检测题

一、选择题

1. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，且 $c\neq 0$，则下列命题正确的是（　　）.

(A) 如果 $a>b$，那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$　　(B) 如果 $ac<bc$，那么 $a<b$

(C) 如果 $a>b$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(D) 如果 $ac^2<bc^2$，那么 $a<b$

2. 不等式 $|x-1|+|x-2|\geqslant 3$ 的解集是（　　）.

(A) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　(B) $[1,2]$

(C) $(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$　　(D) $[0,3]$

3. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，不等式 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 中等号成立的充要条件是（　　）.

(A) $ab>0$　　(B) $ab\geqslant 0$　　(C) $ab<0$　　(D) $ab\leqslant 0$

4. 二维形式的柯西不等式可用（　　）表示.

(A) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ ($a,b\in\mathbf{R}$)

(B) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ab+cd)^2$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)

(C) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)

(D) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant(ac+bd)^2$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)

5. 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两组实数，

$$S_1=a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1,$$
$$S_2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n,$$

那么（　　）成立.

(A) $S_1>S_2$　　(B) $S_1<S_2$　　(C) $S_1\geqslant S_2$　　(D) $S_1\leqslant S_2$

6. 用数学归纳法证明 $n^2<2^n$（n 为自然数且 $n\geqslant 5$）时，第一步应（　　）.

(A) 证明 $n=1$ 时，$n^2<2^n$　　(B) 证明 $n=0$ 时，$n^2<2^n$

(C) 证明 $n=6$ 时，$n^2<2^n$　　(D) 证明 $n=5$ 时，$n^2<2^n$

二、填空题

7. 设对于任何实数 x，不等式 $|x+3|\geqslant m+4$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

8. 不等式 $|2x-1|+|3x+2|\geqslant 8$ 解集是________.

9. 函数 $y=2\sqrt{x-2}+3\sqrt{4-x}$ 的最大值是________.

10. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实数，b_1，b_2，…，b_n 是 a_1，a_2，…，a_n 的任一排列，则乘积的值 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 不会超过__________.

三、解答题

11. 设 a，b，c 是不全相等的正数，证明：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

12. 已知 $n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$，证明：

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1.$$

13. 设 m，$n\in\mathbf{R}_+$，$m+n=p$，求证：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{4}{p}$. 指出等号成立的条件.

14. 对于任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，试比较 $n!$ 与 2^{n-1} 的大小，证明你的结论.

参考答案及说明

一、选择题

1. D. 本题检测不等式的基本性质.
2. C. 本题检测解含有绝对值的不等式.
3. B. 本题检测绝对值三角不等式.
4. C. 本题检测二维形式的柯西不等式.
5. D. 本题检测排序不等式.
6. D. 本题检测数学归纳法.

二、填空题

7. $(-\infty,\ -4]$. 本题检测解含有绝对值的不等式.

8. $\left(-\infty,\ -\frac{9}{5}\right]\cup\left[\frac{7}{5},\ +\infty\right)$. 本题检测解含有绝对值的不等式.

9. $\sqrt{26}$. 本题检测二维形式的柯西不等式，函数的定义域为 $2\leqslant x\leqslant 4$，当 $x=\frac{34}{13}$时，$2\sqrt{4-x}=3\sqrt{x-2}$，函数取得最大值$\sqrt{26}$.

10. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$. 本题检测排序不等式，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 是顺序和.

三、解答题

11. 因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ca$，且这三个式子不能同时取等号，所以

$$2(a^2+b^2+c^2)>2(ab+bc+ca),$$

即

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

说明：本题检测证明不等式的能力.

12. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1.$

所以$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1.$

说明：本题检测证明不等式的能力.

13. 根据柯西不等式，得

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)\geqslant\left(\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}+\sqrt{n\cdot\frac{1}{n}}\right)^2=4,$$

于是

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{4}{m+n}=\frac{4}{p}.$$

当$m=n=\frac{p}{2}$时等号成立.

说明：本题检测灵活运用柯西不等式的能力.

14. 对于任意的$n\in\mathbf{N}_+$，有$n!\geqslant 2^{n-1}$. 可用数学归纳法证明此结论.

(1) 当$n=1$时，$1!=2^{1-1}$. 所以，结论成立.

(2) 假设当$n=k$ $(k\geqslant 1)$时结论成立，即$k!\geqslant 2^{k-1}$.

当$n=k+1$时，$(k+1)!=k!(k+1)\geqslant 2^{k-1}(k+1)\geqslant 2^{k-1}\cdot 2=2^k$.

所以，当$n=k+1$时结论成立.

由(1)(2)知，结论对一切正整数成立.

说明：本题检测发现规律和运用数学归纳法进行证明的能力.

Ⅳ 拓展资源

1. 关于一类定值问题

我们知道，对两个正实数x，y，如果它们的和S是定值，则当且仅当$x=y$时它们的积P取得最大值；如果它们的积P是定值，当且仅当$x=y$时它们的和S取得最小值. 我们可以从曲线与方程的角度来理解以上关于两个正实数的极值性质. 由于两个实数x，y的和为定值以及积为定值的事实都可以用平面直角坐标系中的一条曲线或直线来表达，这样对于以上的极值问题就可以从解析几何的角度来理解.

(1) 如果两个正数x，y的和为定值S，由于方程$x+y=S$在平面直角坐标系中表示一条直线，这条直线在第一象限内的点(x, y)满足$x>0$，$y>0$. 双曲线$xy=a$（a为参数）在第一象限与直线$x+y=S$相交、相切或相离，其中与直线$x+y=S$有公共点且使a取最大值的双曲线是在点$\left(\frac{S}{2}, \frac{S}{2}\right)$与直线相切的双曲线，此时参数$a$的值是$a=\frac{S}{2}\times\frac{S}{2}$. 即在第一象限内，直线$x+y=S$上的点当$x=y=\frac{S}{2}$时，$xy$取最大值，最大值等于$\frac{S^2}{4}$.

(2) 如果两个正数x，y的积为定值P. 在平面直角坐标系中，$xy=P$（P为定值）表示一条双曲线，双曲线在第一象限内的点满足$x>0$，$y>0$. 直线$x+y=a$（a为参数）与此双曲线相交、相切或相离，其中与双曲线$xy=P$有公共点且使a取最小值的直线是在点$(\sqrt{P}, \sqrt{P})$与双曲线相切的直线，此时参数a的值是$a=\sqrt{P}+\sqrt{P}=2\sqrt{P}$. 即在第一象限内，双曲线$xy=P$上点当$x=y=\sqrt{P}$时，$x+y$取最小值，最小值等于$2\sqrt{P}$.

2. 均值不等式

一般形式的均值不等式：n个正数的算术平均不小于它们的几何平均. 即

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

证明：设 $A=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$，$G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$，如果 a_1，a_2，a_3，…，a_n 都相等，则显然$A=G$.

如果 a_1，a_2，a_3，…，a_n 不全相等，不妨设 a_1 是其中最小的数，设 a_2 是其中最大的数，$A=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$. 分别用$A$与$a_1+a_2-A$代换$a_1$和$a_2$，连同$a_3$，$a_4$，…，$a_n$组成$n$个数. 这样代换使最小数变大，最大数变小，但$n$个数的和不变，从而算术平均不变. 因为

$$a_1<A<a_2,$$

所以

$$A(a_1+a_2-A)-a_1a_2=(A-a_1)(a_2-A)>0,$$

即

$$A(a_1+a_2-A)>a_1a_2.$$

所以

$$\sqrt[n]{A(a_1+a_2-A)a_3a_4\cdots a_n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\cdots a_n}.$$

即代换后的几何平均变大. 以上这种代换，使n个数中的最小数变换到A，这样最多经过$n-1$次，就使所有数都变换成A，这时几何平均达到最大值$\sqrt[n]{AA\cdots A}$，即等于A. 由此可知，由于a_1，a_2，a_3，…，a_n 不全相等，就有

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}<A=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}.$$

综上得

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

利用以上不等式，可以容易得到

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n},$$

即n个正数的调和平均不大于它们的几何平均. 若记

$$H=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}},$$

则有 $H\leqslant G\leqslant A$，通常这个不等式也被称为关于n个正数的基本不等式.

3. 不等式$|x-a|+|x-b|\geqslant c$或$|x-a|+|x-b|\leqslant c$（不妨设$a<b$）的一般解

一般地，解$|x-a|+|x-b|\geqslant c$或$|x-a|+|x-b|\leqslant c$（不妨设$a<b$）型的不等式，可以分（1）$x\leqslant a$；（2）$a<x<b$；（3）$x\geqslant b$三种情况讨论来求得解集.

对于不等式

$$|x-a|+|x-b|\geqslant c,$$

不妨设$a<b$，可得：

（1）当$c\leqslant b-a$时，不等式的解集是$\mathbf{R}$；

（2）当$c>b-a$时，不等式的解集是

$$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}(a+b-c)\right]\cup\left[\frac{1}{2}(a+b+c),\ +\infty\right).$$

对于不等式

$$|x-a|+|x-b|<c,$$

也不妨设 $a<b$，可得：

(1) 当 $c\leqslant b-a$ 时，不等式的解集是$\varnothing$；

(2) 当 $c>b-a$ 时，不等式的解集是

$$\left(\frac{1}{2}(a+b-c),\ \frac{1}{2}(a+b+c)\right).$$

以上的结论可以从绝对值的几何意义来考察. $|x-a|+|x-b|$ 的几何意义是数轴上坐标为 x 的点到坐标为 a 和 b 的两点的距离之和. 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，距离之和等于坐标为 a 和坐标为 b 的两点之间的距离，此距离等于 $b-a$. 当 $x<a$ 或 $x>b$ 时，距离之和大于 $b-a$，且如果 $x<a$，则 x 越小，距离之和越大；如果 $x>b$，则 x 越大，距离之和越大. 所以，$|x-a|+|x-b|$的最小值是 $b-a$. 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时取最小值.

当 $c\leqslant b-a$ 时，任何 x 都有$|x-a|+|x-b|\geqslant b-a\geqslant c$. 所以，$|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 的解集为 $\mathbf{R}$，而$|x-a|+|x-b|<c$ 无解. 当 $c>b-a$ 时，有两个点满足$|x-a|+|x-b|=c$. 当 $x<a$ 时，$x_1=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 当 $x>b$ 时，$x_2=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 在(x_1, x_2)中，$|x-a|+|x-b|<c$，在$(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$中，$|x-a|+|x-b|\geqslant c$.

如果结合解析几何中椭圆的知识和复数知识，则以上结论便一目了然了.

4. 切比雪夫不等式

切比雪夫不等式是可以应用排序不等式证明的一个重要不等式：

(1) 如果 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，等号成立.

(2) 如果 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，等号成立.

证明：(1) 由排序不等式，得

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}.$$

又

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

把以上 n 个式子相加，即得

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

至于等号成立的条件，可由排序不等式等号成立的条件得到.

(2) 证明与(1)类似.

5. 皮亚诺公理

意大利数学家皮亚诺（G. Peano，1858—1932）总结了正整数的有关性质，提出了关于正整数的五条公理，后人称之为“皮亚诺公理”.

皮亚诺公理的内容如下：

任何一个满足下列条件的非空集合叫做正整数集合，记作 $\mathbf{N}_+$：

(1) $1\in\mathbf{N}_+$；

(2) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，则有且仅有一个正整数称为 k 的后继数，记作 $k+1$，$k+1\in\mathbf{N}_+$. 这就是说，如果 $k=h$，那么 $k+1=h+1$；

(3) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，则 $k+1\neq 1$. 这就是说，任何一个正整数的后继数都不是 1；

(4) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，$h\in\mathbf{N}_+$，且 $k+1=h+1$，则 $k=h$. 这就是说，对于每一个正整数，只能是某一个正整数的后继数或者根本不是后继数；

(5) 设 M 是正整数的一个子集，且它具有下列性质：

① $1\in M$；

② 若 $k\in M$ 则 $k+1\in M$.

那么 M 是全体正整数的集合，即 $M=\mathbf{N}_+$.

这五条公理对正整数集合进行了刻画和约定，由它们可以推出正整数的各种性质.

皮亚诺公理中第五条也叫做归纳公理. 设 P 是一个有关正整数的命题，我们把使 P 成立的所有正整数组成的集合记为 M，如果要证明命题 P 对于所有正整数都成立，只要证明 $M=\mathbf{N}_+$ 即可. 为此，根据归纳公理，首先证明 $1\in M$（数学归纳法中的第一步“奠基”正是进行这样的证明）；其次证明若 $k\in M$ 则 $k+1\in M$（数学归纳法中的第二步“假设与递推”正是进行这样的证明），这样即可得到 $M=\mathbf{N}_+$，从而证明了命题 P 对于一切正整数成立. 不难看出归纳公理是数学归纳法的理论根据，数学归纳法的两个证明步骤恰是验证这条公理所说的两个性质.

6. 第二数学归纳法

前面我们重点讨论了数学归纳法及其在证明不等式中的运用，由于各种命题的实际需要，数学归纳法还有其他变化形式，下面我们简单介绍第二数学归纳法.

对于有些与正整数有关的命题，用普通数学归纳法证明起来有困难，但是用稍加改造过的数学归纳法就能顺利地进行证明. 有一种改造过的数学归纳法叫做第二数学归纳法，用它证明命题 P 对任意正整数 n 成立的步骤如下：

(1)【奠基】证明对 $n=1$ 命题 P 成立；

(2)【假设与递推】假设对正整数 $n\leqslant k$（k 是正整数，$k\geqslant 1$）命题 P 成立，证明对 $n=k+1$ 命题 P 成立，

由 (1) (2) 知命题 P 对任意正整数成立.

普通数学归纳法的根据是皮亚诺公理中的归纳公理，第二数学归纳法的根据是什么呢？

首先，我们看最小数原理，即**任何一个非空的正整数集合中都有一个最小的数**. 例如，集合 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ 中有最小数 3. 我们可以设非空的正整数集合的元素个数为 n，然后用普通数学归纳法证明最小数原理，这留给读者完成.

现在用反证法解释第二数学归纳法的合理性.

假设完成了第二数学归纳法的 (1) (2) 两步证明后，命题 P 对有些正整数仍不成立，那么根据最小数原理可知，不满足命题 P 的全部数中一定有一个最小数（记为 m）. 由第二数学归纳法的 (1)，对 $n=1$ 命题 P 成立，所以 $m\neq 1$. 于是 $m-1$ 也是正整数，而且 $m-1$ 满足命题 P. 但是由第二数学归纳法的 (2)，通过对 $n=1$，…，$m-1$ 命题 P 成立可以得出对 $n=m$ 命题 P 成立，这与假设矛盾. 因此完成了第二数学归纳法的 (1) (2) 两步证明后，命题 P 对任意正整数都成立.

由以上可知，用最小数原理可解释第二数学归纳法的合理性，用普通数学归纳法可以证明最小数原理，因此普通数学归纳法仍是第二数学归纳法的基础.

比较两种数学归纳法，可以发现，与普通数学归纳法相比，第二数学归纳法的第（2）步中的归纳假设是对不大于 k（$k\in \mathbf{N}_+$，$k\geqslant 1$）的所有正整数 n（$n\leqslant k$）作出的，而普通数学归纳法是对 $n=k$ 作出假设，显然第二数学归纳法的假设条件更强．有的命题用普通数学归纳法证明有一定难度，但是用第二数学归纳法却较容易证明．这里的原因在于第二数学归纳法中使用了条件更强的归纳假设，所以有时更容易证明从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的递推关系．请看下面的例子．

例 有两堆棋子，数目相同，两人游戏的规则是：两人轮流取棋子，每人可以从一堆中任意取棋子，但不能同时从两堆取，取得最后一颗棋子的人获胜，求证后取棋子者一定可以获胜．

设每堆棋子数目为 n，你可以先试试用普通数学归纳法能证明上述结论吗？

下面用第二数学归纳法证明．

证明：设每堆棋子数目为 n．

（1）当 $n=1$ 时，先取棋子者只能从一堆里取 1 颗，这样另一堆里留下的 1 颗就被后取棋子者取得，所以结论是正确的．

（2）假设当 $n\leqslant k$（$k\geqslant 1$）时结论正确，即这时后取棋子者一定可以获胜．

考虑当 $n=k+1$ 时的情形．

先取棋子者如果从一堆里取 $k+1$ 颗，那么另一堆里留下的 $k+1$ 颗就被后取棋子者取得，所以结论是正确的．

先取棋子者如果从一堆里取棋子 m（$1\leqslant m\leqslant k$）颗，这样，剩下的两堆棋子，一堆有 $k+1$ 颗，另一堆有 $k+1-m$ 颗，这时后取棋子者可以在较多的一堆里取 m 颗，使两堆棋子数目都是 $k+1-m$ 颗，这时就变成了 $n=k+1-m$ 的问题，而不论 m 是 $1\sim k$ 的哪个整数，$n=k+1-m$ 都是不大于 k 的正整数，由归纳假设可知，这时后取棋子者一定可以获胜．

于是，当 $n=k+1$ 时结论正确．

由（1）（2）知，根据第二数学归纳法，无论每堆棋子的数目是多少，后取棋子者都能获胜．

通过上例，可以看到归纳假设“当 $n\leqslant k$（$k\geqslant 1$）时结论正确”在此的独特作用，由此可见第二数学归纳法的威力．

如有兴趣，你可以想一想：当两堆棋子数目不同时，谁有必胜把握？