普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-4

坐标系与参数方程

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4–4坐标系与参数方程（A版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．—2版．— 北京：人民教育出版社，2007.4（2019.7重印）

ISBN 978-7-107-19174-9

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人…②课… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033724 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-4 A版 坐标系与参数方程 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网　址 http://www.pep.com.cn

经　销 全国新华书店

印　刷 保定市中画美凯印刷有限公司

版　次 2007 年 4 月第 2 版

印　次 2019 年 7 月第 24 次印刷

开　本 890 毫米 ×1240 毫米　1/16

印　张 4

字　数 89 千字

定　价 9.50元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

编　　者：郭慧清　章建跃
责任编辑：章建跃　王　嵘　张唯一
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列 1～5 以及选修 1、2 中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过 1，几何中的度量却不受这种限制．

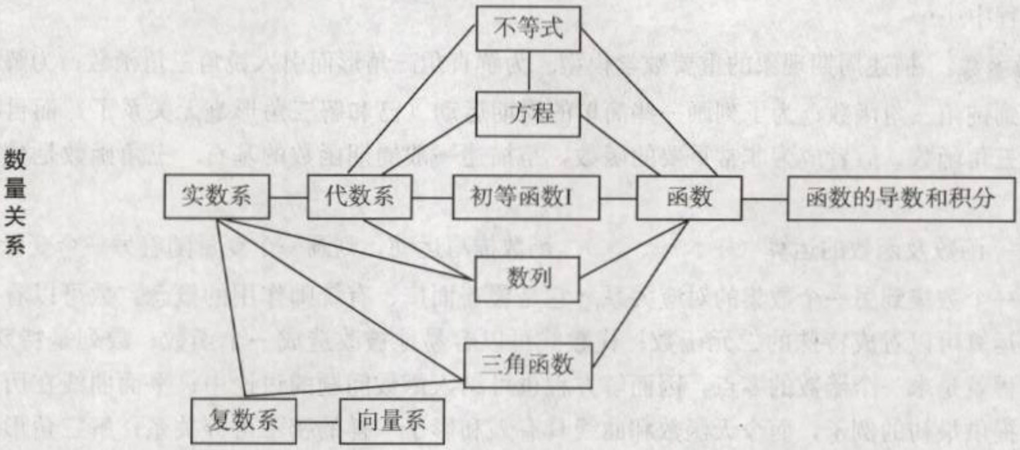
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成．

“数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系　实数及其运算和大小关系．实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发．

复数系　复数及其运算．由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）．

向量系　向量及其运算．直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对（x，y），而空间中向量的坐标是三实数组（x，y，z）．在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广．另一方面，在历史上，复数（$a+bi$）曾被推广到四元数（$a+xi+yj+zk$），而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量．从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分．当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）．

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙．

代数系　用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等．数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算．代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围．

方程　令两个含变数的代数式相等便得到方程．方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备．由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙．

不等式　把方程中的“＝”换成实数系所特有的“＞”（或“＜”）便得到不等式，因而两者有类似的地方．如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体．另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的“边界”．“＞”的性质比“＝”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式．

初等函数Ⅰ　令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y．这是人们知道的第一批函数中的一类．其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数．

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

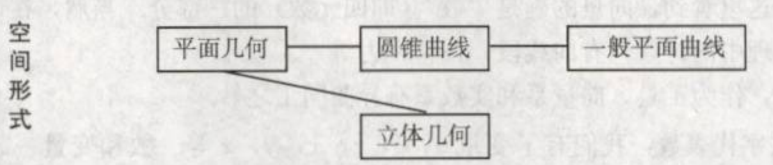
函数 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看 三角函数. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$. 如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算.

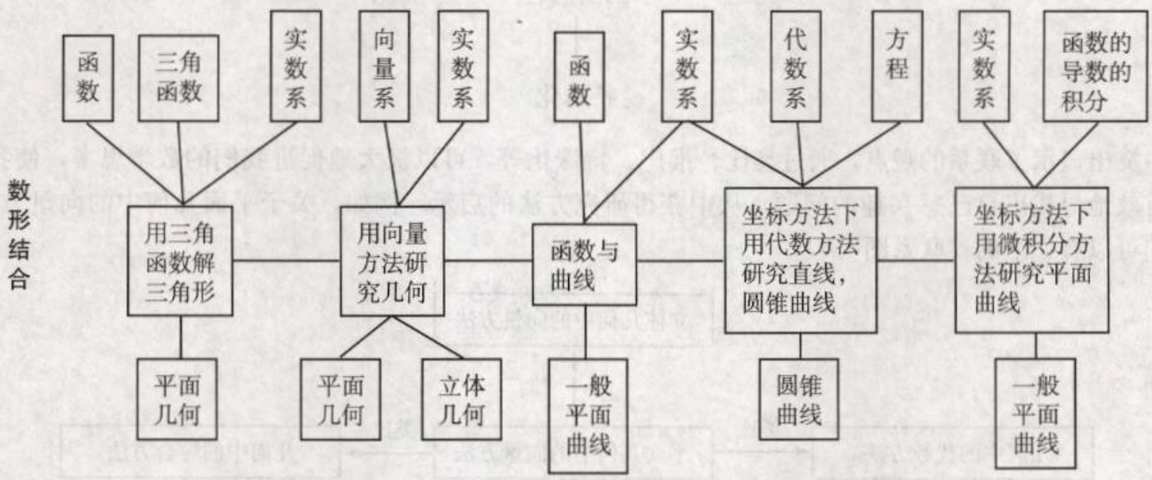
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看函数.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等.

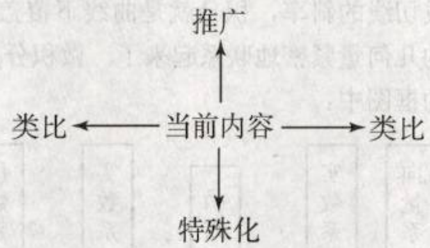
4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

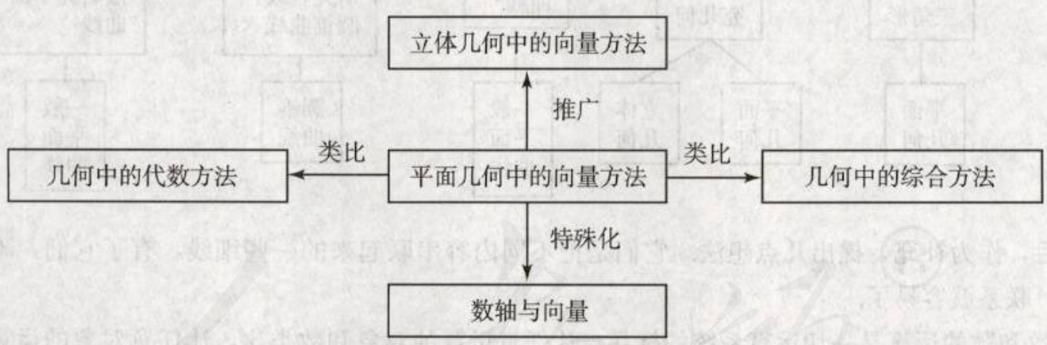
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合方法研究圆锥曲线”这样的问题.

说 明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1.“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情．

2.“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

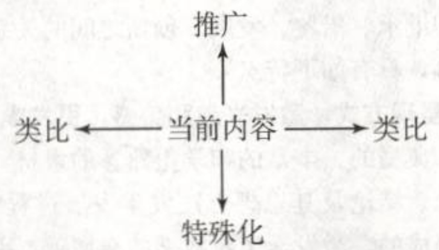
提问是创新的开始．“看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神．

3.“思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括．

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”．

4.“联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：



以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列 4 的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想．包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

(1) 课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图．主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）．说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(3) 重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是选修系列 4—4《坐标系与参数方程》的教师教学用书，包含“坐标系”和“参数方程”两讲内容. 全书共 18 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　坐标系	约 8 课时
第二讲　参数方程	约 10 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

Ⅰ 总体设计 1

Ⅱ 教科书分析 4

第一讲　坐标系 4

一、平面直角坐标系 5

二、极坐标系 7

三、简单曲线的极坐标方程 8

四、柱坐标系与球坐标系简介 10

第二讲　参数方程 19

一、曲线的参数方程 20

二、圆锥曲线的参数方程 23

三、直线的参数方程 27

四、渐开线与摆线 30

Ⅲ 自我检测题 40

第一讲自我检测题 40

第二讲自我检测题 42

Ⅳ 拓展资源 44

I 总体设计

一、课程与学习目标

（一）课程目标

坐标系是解析几何的基础．在坐标系中，可以用有序实数组确定点的位置，进而用方程刻画几何图形．为便于用代数的方法刻画几何图形或描述自然现象，需要建立不同的坐标系．极坐标系、柱坐标系、球坐标系等是与直角坐标系不同的坐标系，对于有些几何图形，选用这些坐标系可以使建立的方程更加简单．

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式．某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便．学习参数方程有助于学生进一步体会解决问题中数学方法的灵活多变．

本专题是解析几何初步、平面向量、三角函数等内容的综合应用和进一步深化．极坐标系和参数方程是本专题的重点内容，对于柱坐标系、球坐标系等只作简单了解．通过对本专题的学习，学生将掌握极坐标和参数方程的基本概念，了解曲线的多种表现形式，体会从实际问题中抽象出数学问题的过程，培养探究数学问题的兴趣和能力，体会数学在实际中的应用价值，提高应用意识和实践能力．

（二）学习目标

1. 坐标系

（1）回顾在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法，体会坐标系的作用．

（2）通过具体例子，了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况．

（3）能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化．

（4）能在极坐标系中给出简单图形（如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆）的方程．通过比较这些图形在极坐标系和平面直角坐标系中的方程，体会在用方程刻画平面图形时选择适当坐标系的意义．

（5）借助具体实例（如圆形体育场看台的座位、地球的经纬度等）了解在柱坐标系、球坐标系中刻画空间中点的位置的方法，并与空间直角坐标系中刻画点的位置的方法相比较，体会它们的区别．

2. 参数方程

（1）通过分析抛物运动中时间与运动物体位置的关系，写出抛物运动轨迹的参数方程，体会参数的意义．

（2）分析直线、圆和圆锥曲线的几何性质，选择适当的参数写出它们的参数方程．

（3）举例说明某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便，感受参数方程的优越性．

（4）借助教具或计算机软件，观察圆在直线上滚动时圆上定点的轨迹（平摆线）、直线在圆上滚动时直线上定点的轨迹（渐开线），了解平摆线和渐开线的生成过程，并能推导出它们的参数方程．

(5) 通过阅读材料，了解其他摆线（变幅平摆线、变幅渐开线、外摆线、内摆线、环摆线）的生成过程；了解摆线在实际中应用的实例（例如，最速降线是平摆线，椭圆是特殊的内摆线——卡丹转盘，圆摆线齿轮与渐开线齿轮，收割机、翻土机等机械装置的摆线原理与设计，星形线与公共汽车门）；了解摆线在刻画行星运动轨道中的作用.

3. 学习总结报告

报告应包括三方面的内容：

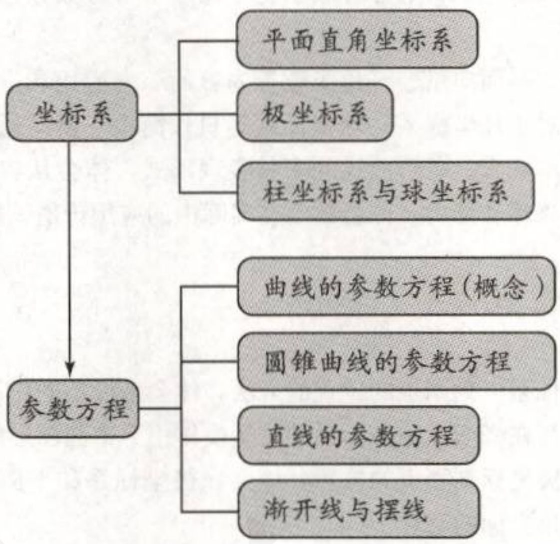
(1) 知识的总结：对本专题整体结构和内容的理解，进一步认识数形结合思想，思考本专题与高中其他内容之间的联系.

(2) 拓展：通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨参数方程、摆线的应用.

(3) 学习本专题的感受、体会.

二、内容安排

1. 本专题知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本专题分两讲. 第一讲，坐标系，内容包括：平面直角坐标系、极坐标系、简单曲线的极坐标方程、柱坐标系与球坐标系简介；第二讲，参数方程，内容包括：曲线的参数方程、圆锥曲线的参数方程、直线的参数方程、渐开线与摆线. 本专题是在学习直线与方程、圆与方程以及圆锥曲线与方程的基础上，对解析几何内容的进一步深化.

(1) 在“平面直角坐标系”中，教科书在学生已有知识基础上，着重介绍了“坐标法”和“坐标伸缩变换”，引导学生学习如何根据问题的几何特征选择适当的直角坐标系，建立曲线方程，进而通过方程研究相关问题，以进一步体会坐标法思想.

平面图形的伸缩变换在平面直角坐标系中可以用坐标伸缩变换表示. 教科书以学生熟悉的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与 $y=\sin x$ 的图象之间的关系为载体，从坐标伸缩变换的角度进行重新认识，引导学生进一步体会坐标法思想.

极坐标系是本专题的重点内容．用距离与方位刻画点的位置是生活中常用的方法，极坐标系就是这种方法的“数学化”．教科书在介绍极坐标系概念的基础上，从极坐标与直角坐标的互化、圆和直线的极坐标方程等角度引导学生认识极坐标系，并引导他们体会在不同的坐标系中，有序数组（坐标）所体现的几何含义不同，同一几何图形的方程也有不同的形式，从而认识根据问题的几何特征选择适当坐标系的必要性、重要性．

为了使学生对坐标系有一个相对完整的认识，教科书对柱坐标系、球坐标系作了简单介绍，以使学生能从更多角度了解用有序数组（坐标）刻画空间点的位置的方法．

（2）参数方程是本专题的另一个重要内容．在坐标系和参数方程中，数与形的结合、运动与变化、相对与绝对、分解与综合等思想方法十分突出，是培养学生辩证唯物主义观点的好素材．参数方程是综合性很强的内容，教科书以学生熟悉的内容（直线、圆、圆锥曲线等）为载体，引导学生从参数方程角度对它们进行重新认识，学习用参数方程思想研究曲线的基本思想方法．

（3）在解析几何的研究中，信息技术的作用是比较容易发挥的．教科书特别重视引导学生用信息技术进行探究活动，例如认识圆锥曲线参数方程中参数的几何意义，观察圆在直线上滚动时圆上定点的轨迹（平摆线）、直线在圆上滚动时直线上定点的轨迹（渐开线），了解平摆线和渐开线的生成过程等．

三、课时分配

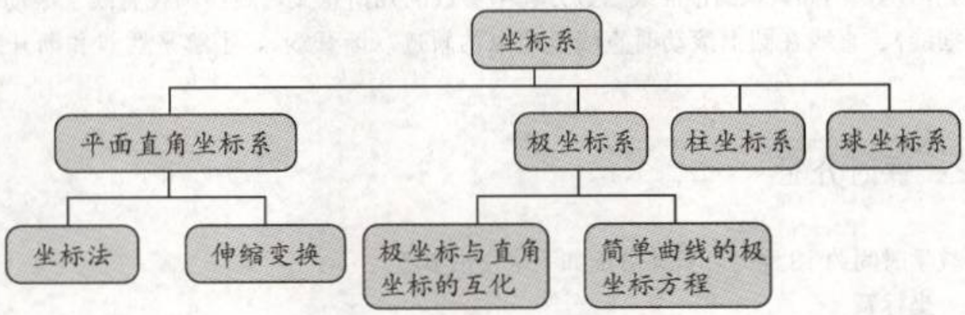
本专题教学时间约 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　坐标系	**8 课时**
一　平面直角坐标系	约 2 课时
二　极坐标系	约 2 课时
三　简单曲线的极坐标方程	约 2 课时
四　柱坐标系与球坐标系简介	约 2 课时
第二讲　参数方程	**10 课时**
一　曲线的参数方程	约 3 课时
二　圆锥曲线的参数方程	约 3 课时
三　直线的参数方程	约 2 课时
四　渐开线与摆线	约 2 课时

II 教科书分析

第一讲 坐标系

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 根据问题的几何特征选择坐标系；坐标法思想.
2. 平面直角坐标中的伸缩变换.
3. 极坐标系.
4. 直线和圆的极坐标方程.

难点：

1. 对伸缩变换中点的对应关系的理解.
2. 极坐标的不惟一性；曲线的极坐标方程.

三、编写意图与教学建议

本讲在回顾平面直角坐标系及其作用的基础上，介绍了极坐标系、柱坐标系和球坐标系. 在此过程中，教科书强调了平面和空间中点的位置可以用有序数组来刻画，但在不同的坐标系中，这些数所表示的几何含义是不同的，同一曲线在不同坐标系下的方程也有不同的形式，进而使学生懂得选择坐标系的重要意义.

极坐标系是本讲的重点内容，因而教科书用了比较大的篇幅从几个不同角度来引导学生学习这一内容，并利用“思考”“探究”等引导学生对极坐标的特点、极坐标与直角坐标的关系以及极坐标系下的直线、圆的方程进行讨论，以使学生通过自己的独立思考、积极探索而获得知识.

（一）平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

教科书在回顾坐标法基本思想的基础上，先借助典型事例引导学生经历用坐标法思想解决问题的基本过程，再以三角函数图象变换为例介绍平面直角坐标系中的伸缩变换，引导学生进一步认识直角坐标系，体会数形结合、数形互化的思想方法.

（1）“声响定位”的教学分析

① 教科书通过“思考”引导学生回顾平面直角坐标系的有关知识，其中重点是分析问题的几何特征，根据几何特征选择适当的直角坐标系并建立方程．问题的解决过程比较好地反映了坐标法的基本思想，而且让学生感受到数学的自然、有用．教学中可以先让学生独立思考并讨论解题思路，然后再让学生独立完成问题的解答．要把重点放在使学生体会平面直角坐标系在建立“点与坐标的对应”“曲线与方程的对应”中的关键作用，以及如何根据问题的几何特征选择坐标系上.

② 在得到声响位置 P 的坐标后，教科书用“距离”与“方位（角度）”描述了点 P 的位置，并提出“思考”（第 3 页)．这样不仅使学生注意到“距离”与“角度”可以用来刻画点的位置，而且还引导学生思考用直角坐标刻画点的位置与用角和距离刻画点的位置之间的差异，从而体会根据问题的特点选择不同的坐标系的必要性，为学习极坐标埋下“伏笔”.

完成“声响定位”教学后，应引导学生归纳总结坐标法解决问题的基本步骤.

（2）例题的教学分析

例 1 是用解析法解决平面几何证明问题．平面几何证明题抽象程度高，要求学生有较强的逻辑推理能力，不像代数运算那样可以“程序化”．而利用坐标法，可以把平面几何问题转化为代数问题，以代数运算代替几何证明．从本例的解决过程可以看到，对于某些几何证明，用坐标法有明显的优势.

本题证明中，用到斜率公式、两点间距离公式以及两直线垂直的条件．教学中可以引导学生在分析的过程中适当回顾一下这些知识.

第 4 页“探究”的意图，一方面是使学生意识到可以有不同的建立直角坐标系的方法，另一方面是让学生在建立不同的直角坐标系（例如以点 F 为坐标原点，OB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系）解决问题的过程中，体会根据几何特点选择适当的直角坐标系的一些规则．例如：

如果图形有对称中心，可以选对称中心为坐标原点；

如果图形有对称轴，可以选对称轴为坐标轴；

使图形上的特殊点尽可能多地在坐标轴上.

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

（1）内容安排的意图

平面几何图形的伸缩变换是常见的几何变换．将图形看成是点的运动轨迹，并在平面直角坐标系中用方程表示它，那么图形的伸缩变换就可以归结为坐标伸缩变换，这就是用代数方法研究几何变换．因此，本小节内容可以让学生从一个新的角度体会坐标法思想.

（2）概念引出方式

从代数角度研究“伸缩变换”比较抽象，学生一般不容易理解．因此，教科书以学生熟悉的正弦型曲线的图形伸缩变换为例，通过讨论由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin \omega x$ 和 $y=A\sin x$ 的过程中曲线上点的坐标的变化规律，从具体到一般、从直观到抽象地引出伸缩变换的概念，并概括出“伸缩变换”的代数表示，给出伸缩变换的定义．建立伸缩变换与函数图象变换之间的联系，可以使伸缩变换概念的学习建立在学生已有经验基础上，使得平面直角坐标中的坐标伸缩变换的学习具有坚实的

基础.

(3) 概念教学中要注意的问题

由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin \omega x$ 的过程，在三角函数中描述为“正弦曲线 $y=\sin x$ 上任意一点，保持纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$”，这是在作出函数 $y=\sin \omega x$ 的图象后，通过观察、直观而得到的. 本书中，借助如何从正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin 2x$ 的讨论，引导学生从平面直角坐标系内点及其坐标的对应关系的角度进一步思考“保持纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$的实质”. 这是一个关键步骤，教学中要注意给学生充分的思考时间，并先让学生自己写出坐标对应关系；然后指出实际上这就是一个平面直角坐标系中的压缩变换，是对三角函数中描述的函数图象变换的严格的代数表示.

对于由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin x$，由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin 2x$ 的教学，完全可以仿照上述过程，由学生独立完成.

从具体例证到给出伸缩变换的定义，是一个再概括的过程. 教学中要注意让学生经历这个再概括过程. 可以先让学生模仿已有叙述，自己试着给出定义，教师再引导学生对照教科书完善定义.

给出定义后，要注意对定义进行辨析. 例如可以给出一些点的坐标，让学生描述在一定的伸缩变换（例如$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=2y\end{cases}$等）下对应点的位置. 特别要让学生理解，平面图形的伸缩变换在这里归结成了坐标的伸缩变换，这是坐标法思想的体现. 有必要的话，可以与平面几何中的相似变换（在这里，相似变换实际上是横、纵坐标伸缩相同倍数的坐标变换）作比较.

教科书规定的坐标伸缩变换为 φ：$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x，(\lambda>0)，\\ y'=\mu\cdot y，(\mu>0)，\end{cases}$要提醒学生注意，变换中的系数均为正数；在伸缩变换下，平面直角坐标系保持不变，即是在同一坐标系下对坐标进行伸缩变换.

(4) 例 2 的教学分析

在例 2 中，用方程表示平面图形，用伸缩变换（代数形式）表示图形的伸缩变换，展示了坐标法思想. 教学时，要让学生注意“数”与“形”的对应关系，初步体会利用代数运算研究几何图形变换和性质的方法.

教学中，要引导学生注意变换的过程以及变换前后的曲线方程所对应的“新旧曲线”. 例如，直线 $2x+3y=0$ 经过变换$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$得到直线 $x'+y'=0$，是将方程 $2x+3y=0$ 中的 x，y 分别用$\frac{1}{2}x'$和$\frac{1}{3}y'$代换而得到的. 在伸缩变换下，直线仍然变为直线，这与我们的直觉是一致的. 实际上，这就是直线的一个特性，只是这里我们还没有利用伸缩变换研究几何性质——伸缩变换下的不变性. 在伸缩变换下，抛物线变为抛物线，双曲线变为双曲线，而椭圆可以变为圆，圆可以变为椭圆. 所以我们可以说圆是椭圆的特例.

教学中，有必要的话可以增加以下例子：

① 在同一平面直角坐标系中，求满足下列图形变换的伸缩变换：曲线 $4x^2+9y^2=36$ 变成曲线 $x'^2+y'^2=1$.（答案：$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$）

② 在同一平面直角坐标系中，经过伸缩变换$\begin{cases}x'=3x,\\ y'=y\end{cases}$后，曲线 C 变为曲线 $x'^2-9y'^2=9$，求曲线

C的方程并画出图象.（答案：$x^2-y^2=1$.）

（5）信息技术的应用

有条件的学校可以利用信息技术，向学生展示正弦型曲线的伸缩变换，让学生直观感受伸缩变换的几何意义. 在例2的教学中，也可以利用信息技术演示图形的伸缩变换. 在使用过程中，要特别注意展示在伸缩变换下，图形上点的坐标的对应关系.

（二）极坐标系

极坐标是用“距离”与“角度”来刻画平面上点的位置的坐标形式，这是一种新的方式. 教科书在回顾上一节“声响定位”的基础上，通过“思考”引导学生探究“如何确定学校建筑物位置”这个具体问题，让学生根据自己的生活经验，自然地认识到在某些情况下，用“距离”与“角度”刻画点的位置比用直角坐标更方便，从而引出极坐标系与极坐标的概念. 这样，在使学生认识数学与身边事物的联系的过程中，自然地引出了新知识.

极坐标系与平面直角坐标系一样，都是刻画点的位置和运动的参照物，是建立点的集合与坐标的集合的对应关系的桥梁. 因此，从集合映射的角度去比较这两种坐标系，可以获得点与坐标之间对应关系的整体认识.

1. 极坐标系的概念

（1）极坐标系的引入

教科书通过“如何确定或描述学校建筑物位置”引入极坐标系的概念. 教学中，可以先让学生独立思考第9页“思考”中的问题，回顾自己在为人指路时采用的方法，然后再给出自己的解答. 另外还可以让学生举出一些生活中用“距离”和“角度”刻画位置的事例. 在这个过程中，教师应引导学生注意到：用距离与角度刻画位置时，总是先固定一个位置作为基点，并以某个方向作为参照方向，例如“北偏东30°，距离100 m”等. 在此基础上，再让学生类比平面直角坐标系的建立过程，尝试建立极坐标系.

在给出极坐标系的相关概念后，可以让学生思考极坐标系与直角坐标系的区别.

（2）极坐标的多值性

在直角坐标系中，点与直角坐标是“一对一”的关系；在极坐标系中，由于终边相同的角有无数个，即点的极角不惟一，因此点与极坐标是“一对多”的关系. 多值性是极坐标与直角坐标的重要区别. 教学中，除让学生了解点的极坐标的多值性外，还要注意让学生思考如何限定极径和极角的范围，可以使平面内的点（除极点外）和极坐标形成“一对一”的关系. 具体教学中，在指出“给定平面内任意一点，也可以找到它的极坐标”后，可以提问：这里为什么只说“可以找到它的坐标”而不说“可以找到惟一的坐标”？在一定的思考后再让学生完成例1和例2之后的“思考”.

（3）例题的教学分析

例1与例2都是比较简单的问题，主要是为了让学生熟悉极坐标系. 教学中都可以让学生独立完成.

例1从“由点写极坐标”和“由极坐标找点”两个方面引导学生熟悉点与极坐标的对应关系.

例2要学生先建立极坐标系再写出与教学楼等建筑物对应的各点的极坐标. 根据所给条件的几何特征，本例中的极坐标系是惟一的.

2. 极坐标与直角坐标的互化

对于平面内的一个点，既可以建立平面直角坐标系利用直角坐标来刻画它，也可以建立极坐标系

利用极坐标来刻画它. 虽然在不同的坐标系下，这些数（坐标）所体现的几何含义不同，但是它们之间有内在联系（实际上，同一数学对象的不同表示之间一定有联系，建立这种联系是认识上的深化）. 因此，如何建立这种联系，实现两种坐标的互化，就成为要研究的问题之一.

讨论直角坐标与极坐标的关系，可以从定义出发：极坐标 $M(\rho,\ \theta)$ 中，ρ 是 M 到极点 O 的距离，θ 是以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的角，这使我们很自然地联想到"任意角"的定义，于是把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴为极轴，那么 $M(\rho,\ \theta)$ 与 $M(x,\ y)$ 之间的联系就可以用三角函数来表示：

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\ \sin\theta=\frac{y}{\rho},\ \tan\theta=\frac{y}{x},$$

由以上式子可以方便地得到两种坐标互化公式.

在上述过程中，以直角坐标系为纽带，从任意角概念得到启发而将极点置于原点，极轴与 x 轴的正半轴重合，再联系三角函数定义，是导出极坐标与直角坐标互化公式的关键. 这是引导学生学习联系地看待数学问题的机会，教学中要注意引导.

（3）例题的教学分析

例 3 和例 4 是极坐标与直角坐标互化的简单例题，可以由学生独立完成. 教科书第 12 页的旁白对直角坐标化为极坐标时表示法不惟一的问题作了说明，教学时可以适当地再举一些例子.

（三）简单曲线的极坐标方程

在平面直角坐标系中，平面曲线可以用方程 $f(x,\ y)=0$ 表示. 类似地，在极坐标系中，是否也可以用方程 $f(\rho,\ \theta)=0$ 来表示平面曲线呢？教科书在引导学生回顾直角坐标系下曲线与方程关系的基础上，用类比的方式引进曲线的极坐标方程.

像曲线的直角坐标方程一样，把曲线 C 看成是动点 P 的轨迹，那么极坐标方程 $f(\rho,\ \theta)=0$ 就反映了曲线 C 上动点 P 的运动规律. 曲线 C 与其极坐标方程的关系，与曲线 C 与其直角坐标方程的关系类似. 由于 ρ 与 θ 都有明确的几何特征，有些曲线所蕴含的运动规律用极坐标方程表示更简洁.

1. 圆的极坐标方程

（1）圆的极坐标方程

教科书通过"探究"要求学生写出"半径为 a，过极点且圆心在极轴上的圆上任意一点的极坐标 $(\rho,\ \theta)$ 满足的条件"，实际上就是求圆的极坐标方程. 教学中，可以引导学生类比直角坐标系下求圆的方程的过程，先作出图形，再根据几何条件建立关于 ρ 与 θ 的方程. 这里，要提醒学生，"设 $M(\rho,\ \theta)$ 为圆上除点 O，A 以外的任意一点"后，一般地要将点 M 与极点 O 连接起来，使 ρ，θ 得到明确表示，并把它们与其他条件联系起来，这样有利于发现相应的几何关系，借助这种几何关系就比较容易建立曲线的方程. 另外，在求方程的过程中，先排除 O，A 是为了构建"直径上的圆周角"，得到方程后还要验证 O，A 的坐标也满足方程.

教科书指出，"坐标适合等式①的点都在这个圆上"，教学时可作如下解释：

设点 $M_1(\rho_1,\ \theta_1)$ 的坐标适合等式①，即

$$\rho_1=2a\cos\theta_1,$$

于是

$$|OM_1|=|OA|\cos\theta_1,$$

这样，$\triangle OM_1A$ 是以 OA 为斜边的直角三角形. 所以点 M_1 在以 OA 为直径的圆上.

（2）极坐标方程的定义

在求出圆的极坐标方程后，教科书给出了曲线的极坐标方程的定义. 学生可能对曲线的极坐标方

程的定义中的“如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中至少有一个满足方程 $f(\rho, \theta)=0$”产生疑惑. 教学中可以先让学生思考，然后再引导他们从点的极坐标的多值性进行解释. 另外，还可以在后面求出“直线 l 经过极点，从极轴到直线 l 的角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线方程”后，再让学生进一步体会为什么是“至少有一个满足方程”.

在求出圆的极坐标方程后，可以让学生求出相应的直角坐标方程，并对两个方程及其求解过程进行比较，以使学生体会两者之间的差异，从而加深对选择坐标系重要性的认识.

(3) 例 1 的教学分析

例 1 的意图有两个，一是为了让学生熟悉求曲线极坐标方程的基本步骤；二是引导学生体会如何根据问题的几何特征建立适当的极坐标系，以使曲线的极坐标方程最简. 实际上，从圆的几何特征——圆上任意一点到圆心的距离都等于 r 出发可以想到，把极点放在圆心时，这个几何特征可以得到最简洁的表示：$\rho=r$. 这个方程的含义是“ρ 是定值，θ 是任意的”. 教学时可以与直角坐标系中圆的方程的最简形式 $x^2+y^2=r^2$ 以及直线方程的最简形式 $x=a$(或 $y=a$)作比较.

一般地，当曲线的几何特征是用距离及角度表示时，选择曲线的极坐标方程表示曲线往往更方便，得到的方程也更简单.

2. 直线的极坐标方程

教科书把直线的极坐标方程放在圆的极坐标方程之后，主要是因为它比较复杂.

(1) 过极点的直线的极坐标方程

教科书通过“探究”，让学生求过极点时的直线的极坐标方程. 直角坐标系下，由于垂直于 x 轴并且过点 (a, b) 的直线上任意一点的横坐标都是 a，纵坐标可以取任意值，因此其方程是 $x=a$. 同样，过极点的直线，由于其极角为定值而极径可以取任意非负数，因此这时的直线极坐标方程是 $\theta=\theta_0$ (θ_0 是实数)的. 另一方面，由于教科书规定平面内点到极点的距离为极径，因此极径是非负的，这样，在求过极点的直线极坐标方程时，只能用相应的两条射线方程的“组合”来表示，显然这是不方便的. 为了弥补这个不足，可以考虑允许极径取全体实数.

由于在过去的学习中，学生已经习惯了直线方程的“确定性”“惟一性”，而直线的极坐标方程不仅要考虑极径的取值范围，而且方程是不惟一的，所以学生会有理解上的困难. 教学时要引导学生思考，使他们认识产生这种差异的原因是由于极角的“多值性”.

(2) 例题的教学分析

本小节的例 2 是求另一种特殊位置——垂直于极轴的直线的极坐标方程. 由于有了前面的经验，本例的教学可以先要求学生独立完成，再进行全班交流. 在交流过程中，特别要注意让学生总结解题的基本步骤，即：

第一步，根据题意画出草图；

第二步，设 $M(\rho, \theta)$ 是直线上任意一点；

第三步，连接 OM；

第四步，根据几何条件建立关于 ρ, θ 的方程，并化简；

第五步，检验并确认所得方程即为所求.

例 3 实际上是一般形式的直线的极坐标方程. 教学时同样可以采用先让学生自己独立思考完成解答，然后全班交流的方式.

本题的解答可能会出现与教科书不同的过程. 例如，学生可能先利用已知条件 (ρ_1, θ_1) 和 α 表示出 $|OA|$，再在 $\triangle MOA$ 中利用正弦定理写出方程. 实际上这是从不同角度利用已知条件，但是最后的结果是一致的. 关键是要正确利用已知条件，联系相关知识建立直线上任意一点的极坐标与已知条件的

关系.

(3) 关于第 15 页“思考”

教科书安排“思考”的用意，是通过比较同一直线在不同坐标系下的方程，让学生体会适当选择坐标系的重要性. 实际上，极坐标系中的直线方程在形式上比直角坐标系下的直线方程复杂，其原因主要是直角坐标系是“正交”的，直线上点的坐标(x, y)与倾斜角α间的关系是直角三角形下的关系，表达上比较方便；极坐标系下，直线上点的坐标(ρ, θ)与倾斜角α之间的关系不是直角三角形下的关系，表达上相对比较复杂. 当然，这些不一定要求学生想到，也不一定向学生解释.

（四）柱坐标系与球坐标系简介

介绍柱坐标系与球坐标系，目的是使学生对坐标系有一个比较完整的认识，能更好地体会和理解坐标法思想. 在高中阶段，只对柱坐标系和球坐标系作简单介绍，不要求学生求空间曲线和曲面的方程，用坐标法研究空间曲线和曲面.

1. 柱坐标系

为了使学生感到引进柱坐标系的实际需要，教科书选择了确定圆形体育馆看台座位的位置这一现实问题. 从问题中所给的条件可以看到，我们需要用“与体育场中心O的距离”“看台距底层的高度”和“以正东方向为基准的方位角”等来描述位置A. 在极坐标系的学习中学生已经看到，涉及角度和距离的问题，可以考虑采用极坐标系进行解决，只是这里要刻画的是空间中点的位置，而极坐标系刻画的是平面内点的位置. 因此，只要在极坐标系的基础上作适当扩展，把看台距底层的高度也作为一个分量考虑进去，就可以描述位置A了. 这就是教科书第 16 页提出的“类比平面极坐标系”的根据. 另一方面，在《数学 2（必修）》中，学生学习了空间直角坐标系. 而空间直角坐标系可以看成是在平面直角坐标系的基础上增加竖坐标z而得到的. 这也是在极坐标系的基础上，通过引进竖坐标z而建立柱坐标系的一个基础.

教学中要注意利用教科书提供的问题情境，引导学生联系已有的关于坐标系的知识，通过学生自己的思考来建立坐标系刻画点A的位置，在此基础上再引出柱坐标系的定义. 给出定义后，应当提醒学生注意各坐标分量的取值范围.

教科书的边空给出了空间点P的直角坐标(x, y, z)与柱坐标(ρ, θ, z)的变换公式. 如果学生理解了柱坐标系与极坐标系、空间直角坐标系之间的关系，那么这个公式就容易理解了. 实际上，它的本质仍然是极坐标与直角坐标的互化.

因为“课标”对柱坐标系的要求很低，只要学生有所了解即可，因此教科书没有给练习和习题，只以“思考”的方式给了两个思考题. 教学中应注意把握这个尺度.

2. 球坐标系

球坐标系的教学可以类比柱坐标系的教学过程.

与柱坐标系的引入过程一样，教科书利用“怎样确定航天器的准确位置”这一问题，引导学生分析如何利用“离地面的距离r”“经度φ”和“纬度θ”来描述空间一点的位置. 根据地理中掌握的关于经度和纬度的意义，学生应该能够想到用第 17 页的方法建立坐标系来刻画航天器的位置. 同样的，在给出球坐标系的时候，要提醒学生注意坐标分量的取值范围.

四、教学设计案例

案例(一)　平面直角坐标系中的伸缩变换

1. 教学任务分析

学生在函数（特别是三角函数）的学习中，对函数图象的平移变换、伸缩变换有了一定的了解；在平面几何的学习中也接触过图形变换。但两者之间的联系并没有建立起来，特别是他们还不知道用代数方法表示图形伸缩变换的方法。本节课的教学任务是使学生在已有认识的基础上，明确在平面直角坐标系中，可以利用坐标伸缩变换研究平面图形的伸缩变化，使学生进一步理解坐标法.

2. 教学重点和难点

重点：通过实例概括坐标伸缩变换公式，了解利用坐标伸缩变换公式研究平面图形伸缩变化情况.

难点：理解图形伸缩变换与坐标变换之间的关系.

3. 教学基本流程

由正弦曲线的横向伸缩变换概括为点的坐标的横向伸缩变换

↓

由正弦曲线的纵向伸缩变换概括为点的坐标的纵向伸缩变换

↓

由正弦曲线的伸缩变换概括为点的坐标的伸缩变换

↓

给出平面直角坐标系中坐标伸缩变换的定义

↓

例2与第8页的“思考”

↓

小结与布置作业

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
(1) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin 2x$?	从学生熟悉的正弦曲线的伸缩变换入手，启发学生由关注图形的横向伸缩变换转为关注图形上的点的坐标的横向伸缩变换，并思考如何利用坐标变换来表示图形变换.	教师提出问题后，用信息技术工具在同一坐标系中作出两个函数的图象（教科书中图 1-4），启发学生将图象的横向伸缩变换用语言表示出来.

续表

问　题	设计意图	师生活动
(2) 你能回答第 5 页“思考”中的问题吗？	引导学生观察、思考两个图象上的对应点之间的坐标关系.	教师在两个图象上找出一对对应点并测出其坐标，移动点的位置，学生观察对应点的坐标，思考对应点的坐标之间的关系.
(3) 如果 $P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$ 分别是曲线 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$上的点，这两个点的坐标之间有什么关系？	引导学生得出$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=y,\end{cases}$并明确它可以用来表示由曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin 2x$ 的图象横向伸缩变换.	教师提出问题，学生写出坐标之间的关系. 教师指出$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=y\end{cases}$是一个坐标压缩变换.
(4) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=\sin\frac{1}{2}x$？你能写出对应的坐标变换公式吗？	使学生完整地理解图象横向伸缩变换与坐标横向伸缩变换之间的关系.	教师提出问题，学生思考后回答问题. 教师引导学生获得图象横向的伸与缩与坐标横向的伸与缩之间的对应关系.
(5) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin x$？	使学生明确可以用坐标变换$\begin{cases}x'=x,\\ y'=3y\end{cases}$来表示正弦曲线$y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin x$ 的图象纵向伸缩变换.	教师提出问题后，用信息技术画出两个函数的图象（教科书中图 1-5)，学生观察图象后，教师启发学生用坐标变换来表示此处的图象变换.
(6) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin 2x$？	使学生认识三角函数 $y=\sin x$ 的图象经伸缩变换得到 $y=A\sin\omega x$ 的图象，可以概括为坐标伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=3y.\end{cases}$	教师提出问题后，先让学生回答在三角函数图象变换中的表述，然后引导他们写出对应的坐标变换公式，完整体会用坐标的伸缩变换来表示图象的伸缩变换的思想.
(7) 如果把前面研究过的问题一般化，你会有什么想法？	体会从特殊到一般的归纳思想，给出平面直角坐标系中的坐标伸缩变换的定义.	教师提出问题后，启发学生思考，并尝试着回答问题，然后教师给出平面直角坐标系中的坐标伸缩变换的定义，并交待注意事项（特别是注意 λ，μ 都是正数).
(8) 阅读第 7 页例 2，你能发现什么结论？你能证明自己的发现吗？	给学生思考与发现的机会，体会“获取信息—发现结论—证明结论”的数学思维过程.	教师将例 2 的内容做成幻灯片供学生阅读，然后让学生回答自己的发现，最后让学生尝试证明：在伸缩变换下，①直线变成直线；②当 $\lambda\neq\mu$ 时圆变成椭圆.
(9) 对第 8 页的“思考”，你有什么结论？你能证明你的结论吗？	让学生进一步体会用坐标伸缩变换研究图形伸缩变换的思想方法.	给学生思考时间，让学生写出结论和证明过程，然后让学生进行交流，最后教师抽取典型答案进行评讲.
(10) 通过本节课的学习，你发现可以通过怎样的方式来研究平面上的图形的伸缩变换？	小结本节课的内容，加深学生对坐标法思想的认识.	教师提出问题后，让学生先交流，然后让部分学生回答，最后教师进行概括.
(11) 作业：第 8 页习题 1.1 第 4，5 题.		

案例（二） 极坐标系（第 1 课时）

1. 教学任务分析

在以往的学习中，学生对直角坐标系已经非常熟悉．在实际中，所给出的条件经常用“方位角”和“距离”表示，这时用直角坐标刻画点的位置就不方便．因此需要建立一种以“角度”和“距离”为参照的坐标系，即极坐标系．

本节教学的基本任务是使学生认识极坐标系．具体的，要使学生能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化．

2. 教学重点和难点

重点：认识极坐标系的重要性，能用极坐标刻画点的位置，能进行极坐标与直角坐标的互化．

难点：理解用极坐标刻画点的位置的基本思想，认识点与极坐标之间的对应关系．

3. 教学基本流程

建立问题情境，体会引进新坐标系的必要性

↓

给出极坐标系的概念

↓

例1、例2的教学，极坐标系与直角坐标系的区别

↓

极坐标与直角坐标的互化公式

↓

例3、例4的教学

↓

小　结

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
（1）现实生活中，经常需要用方位和距离刻画点的位置．你能完成第 9 页的第一个“思考”吗？	引入学习极坐标系概念的必要性，形成用角和距离刻画点的位置的直觉．	教师提出问题，引导学生思考如何用角和距离刻画点的位置． 学生先独立完成“思考”，再进行全班交流，可以进行“为同学指路”的表演．

续表

问　题	设计意图	师生活动
(2) 你能回答第 9 页的第二个“思考”中的问题吗?	引导学生通过类比尝试自己建立极坐标系.	教师引导学生回顾建立直角坐标系的过程，坐标 x，y 的意义，以及用直角坐标刻画点的位置的方法；再让学生自己尝试建立用角和距离刻画点的位置的坐标系，并说明为什么可以这样做.
(3) 给出极坐标系的有关概念(极点、极轴、极径、极角、极坐标等).		
(4) 例 1 和例 2.	初步熟悉极坐标系的有关概念.	由学生独立完成后，请一名同学给出答案.
(5) 直角坐标系下，点与它的坐标一一对应. 在极坐标系下，点与它的极坐标是否也有一一对应的关系?	通过比较，辨析极坐标系，进一步认识极坐标系的特点.	教师提出问题，并要求学生完成第 10 页“思考”. 学生给出“思考”的答案后，教师可以提问：“联系三角函数的有关知识，由‘思考’得到启发，你认为极坐标有怎样的特点?”再让学生思考、回答.
(6) 你能给出第 11 页“思考”的解答吗?	引导学生认识建立两种坐标之间关系的基本思想.	教师提出问题后，可以启发学生回忆象限角、三角函数定义等，然后让学生独立推导极坐标与直角坐标的互化公式.
(7) 例 3 和例 4.	熟悉并记忆互化公式.	学生独立完成.
(8) 小结：极坐标系与哪些知识有联系? 极坐标与直角坐标在刻画点的位置时有什么区别?	整理知识，在比较中加深对极坐标系有关概念的认识.	学生独立思考后回答，教师补充完善. 特别注意极坐标系与日常生活经验、三角函数等知识的联系.

五、习题解答

习题 1.1 (第 8 页)

1. 解：设两定点为 A，B，以线段 AB 的中点为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则 A，B 的坐标分别为$(-3, 0)$，$(3, 0)$.

   设动点为 $P(x, y)$，由已知得到
$$|PA|^2+|PB|^2=26,$$
   即
$$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=26,$$
   整理得
$$x^2+y^2=4.$$
   这就是点 M 的轨迹方程. 这是以 AB 的中点为圆心，2 为半径的圆.

2. 解：以直线 l 为 x 轴，过点 A 与 l 垂直的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，则点 A 的坐标为$(0, 3)$.

   设$\triangle ABC$ 的外心为 $P(x, y)$，因为 P 是线段 BC 的垂直平分线上的点，所以 B，C 的坐标分别为$(x-2, 0)$，$(x+2, 0)$.

   因为 P 也在线段 AB 的垂直平分线上，所以$|PA|=|PB|$，即
$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{2^2+y^2},$$
   整理得

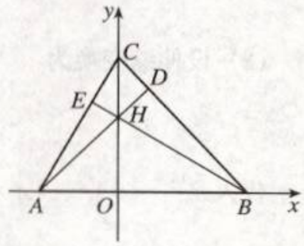
$$x^2-6y+5=0.$$

这就是所求的轨迹方程.

3. 证法一：如图，AD，BE，CO 分别是三角形 ABC 的三条高，取边 AB 所在的直线为 x 轴，边 AB 上的高 CO 所在的直线为 y 轴建立直角坐标系.

设 A，B，C 的坐标依次为 $(-a,0)$，$(b,0)$，$(0,c)$，则

$$k_{AC}=\frac{c}{a},\ k_{BC}=-\frac{c}{b}.$$



(第 3 题)

因为

$$AD\perp BC,\ BE\perp AC,$$

所以

$$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{b}{c},\ k_{BE}=-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{a}{c}.$$

由直线的点斜式方程，得直线 AD 的方程为

$$y=\frac{b}{c}(x+a),\qquad ①$$

直线 BE 的方程为

$$y=-\frac{a}{c}(x-b),\qquad ②$$

由方程①与②，解得 $x=0$.

所以，AD，BE 的交点 H 在 y 轴上. 因此，三角形的三条高线相交于一点.

证法二：同上建立直角坐标系，设 A，B，C 的坐标依次为 $(-a,0)$，$(b,0)$，$(0,c)$，BC 边与 AC 边的高线交于点 $H(x,y)$，则

$$\overrightarrow{BH}=(x-b,y),\ \overrightarrow{AH}=(x+a,y),\ \overrightarrow{BC}=(-b,c),\ \overrightarrow{AC}=(a,c).$$

因为

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0,$$

所以

$$a(x-b)+cy=0.\qquad ①$$

因为

$$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0,$$

所以

$$(-b)(x+a)+cy=0.\qquad ②$$

①−②得到 $(a+b)x=0$. 因为 $a+b\neq0$，所以 $x=0$.

所以点 H 在 AB 边的高线上，即△ABC 的三条高线交于一点.

4. (1) $x'^2+y'^2=1$；(2) $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{3}=1$；(3) $y'^2=\frac{3}{2}x'$.

5. 解：以 $\begin{cases}x'=3x,\\ y'=y\end{cases}$ 代入 $x'^2+9y'^2=9$ 得到

$$(3x)^2+9y^2=9,$$

化简得到

$$x^2+y^2=1.$$

这就是曲线 C 的方程.（图略）

6. 解：(1) 设伸缩变换为

$$\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y,\end{cases}$$

代入 $2x'-y'=4$ 得到

$$2\lambda x-\mu y=4. \quad ①$$

将①与 $x-2y=2$（即 $2x-4y=4$）比较，得 $\lambda=1$，$\mu=4$. 故所求的伸缩变换为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=4y.\end{cases}$$

（2）设伸缩变换为

$$\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y,\end{cases} \quad (\lambda>0,\ \mu>0)$$

代入 $x'^2-16y'^2-4x'=0$ 得

$$(\lambda x)^2-16(\mu y)^2-4\lambda x=0,$$

即

$$\lambda^2x^2-16\mu^2y^2-4\lambda x=0. \quad ①$$

将①与 $x^2-y^2-2x=0$ 比较，得 $\lambda=2$，$\mu=\frac{1}{2}$. 故所求的伸缩变换为

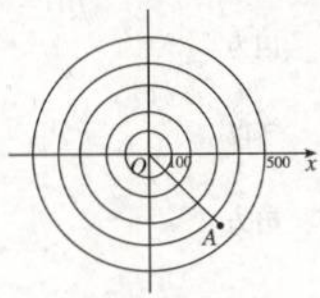
$$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$$

习题 1.2（第 12 页）

1. 解：由图得各点的极坐标分别为：

$A(3,\ 0)$，$B\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$C\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$D\left(1,\ \frac{5\pi}{6}\right)$，$E(2.5,\ \pi)$，$F\left(5,\ \frac{4\pi}{3}\right)$，$G\left(4,\ \frac{5\pi}{3}\right)$.

2. 解：以广东省汕尾市为极点，正东方向为极轴（单位长度为 1 公里）建立极坐标系，如图所示，则该台风中心所在位置的极坐标为 $A\left(440,\ \frac{7\pi}{4}\right)$.



（第 2 题）

3. 解：因为 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，所以 A，O，B 三点共线，所以 A，B 两点间的距离为

$$|AB|=3+1=4.$$

4. 解：由直角坐标与极坐标互化公式

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$$

分别将极坐标 $\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$\left(2,\ \frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(4,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pi\right)$ 代入上述公式，得各点的直角坐标分别为

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，$(-1,\ \sqrt{3})$，$(0,\ 4)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$.

5. 解：由直角坐标与极坐标互化公式

$$\rho^2=x^2+y^2,\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0),$$

分别将直角坐标 $(3,\ \sqrt{3})$，$\left(0,\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$，$\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$，$(-2,\ -2\sqrt{3})$ 代入上述公式，得各点的极坐标分别为 $\left(2\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{3\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$，$\left(4,\ \frac{4\pi}{3}\right)$.

习题 1.3（第 15 页）

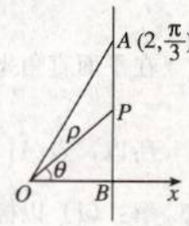
1. 解：(1) 表示圆心在极点，半径为 5 的圆；（图略）

(2) 表示过极点，倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$的直线；（图略）

(3) 表示过极点，圆心在$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 1 的圆.（图略）

2. 解：(1) $\theta=\frac{\pi}{3}$ $(\rho\in\mathbf{R})$；

(2) 如图示，设过点 $A\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$且与极轴垂直的直线与极轴交于点 B，点 $P(\rho,\ \theta)$是直线上任一点.



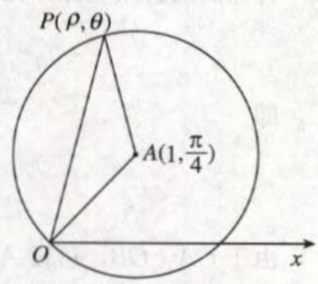
（第 2(2)题）

因为$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$OA=2$，所以 $OB=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，从而

$$\cos\theta=\frac{OB}{OP},\ \text{即}\ \cos\theta=\frac{1}{\rho},$$

所以，所求的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=1$.

(3) 如图示，设 $P(\rho,\ \theta)$是圆上任一点.



（第 2(3)题）

当 O，A，P 三点不共线时，在$\triangle OPA$ 中利用余弦定理得到

$$OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=AP^2,$$

所以

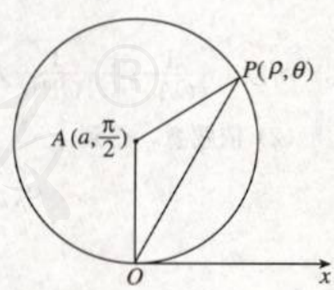
$$1+\rho^2-2\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

即

$$\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right). \qquad ①$$

当 O，A，P 三点共线时，点 P 的坐标为$\left(0,\ \frac{3\pi}{4}\right)$或$\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$，这两点的坐标满足①，所以①就是所求的圆的极坐标方程.

(4) 如图示，设 $P(\rho,\ \theta)$是圆上任一点.



（第 2(4)题）

当 O，A，P 三点不共线时，在$\triangle OPA$ 中利用余弦定理得到

$$OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=AP^2,$$

所以

$$a^2+\rho^2-2a\rho\sin\theta=a^2,$$

即

$$\rho=2a\sin\theta. \qquad ②$$

当 O，A，P 三点共线时，点 P 的坐标为$(0,\ 0)$或$\left(2a,\ \frac{\pi}{2}\right)$，这两点的坐标满足②，所以②就是所求的圆的极坐标方程.

3. 解：(1) $\rho\cos\theta=4$；　(2) $\rho\sin\theta=-2$；

(3) $2\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$；　(4) $\rho^2\cos 2\theta=16$.

4. 解：(1) $y=2$；　(2) $2x+5y-4=0$；

(3) $(x+5)^2+y^2=25$；　(4) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

5. 解：以极点为直角坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系，把直线的极坐标方程 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$化为直角坐标方程，得到

$$x+y=1,$$

把点 A 的极坐标$\left(2,\ \frac{7\pi}{4}\right)$化为直角坐标，得到$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

在平面直角坐标系下，由点到直线的距离公式，得点 $A(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$到直线 $x+y=1$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以，点 $A\left(2,\ \frac{7\pi}{4}\right)$到直线 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 解：(1) 以椭圆中心 O 为直角坐标原点，长轴所在的直线为 x 轴建立直角坐标系，则椭圆的直角坐标方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

将椭圆的直角坐标方程化为极坐标方程，得

$$\frac{(\rho\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(\rho\sin\theta)^2}{b^2}=1,$$

即

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}.$$

由于 $OA\perp OB$，可设 $A(\rho_1,\ \theta_1)$，$B\left(\rho_2,\ \theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\rho_1{}^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta_1+a^2\sin^2\theta_1},\ \rho_2{}^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta_1+a^2\cos^2\theta_1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}&=\frac{1}{\rho_1{}^2}+\frac{1}{\rho_2{}^2}\\&=\frac{b^2\cos^2\theta_1+a^2\sin^2\theta_1+b^2\sin^2\theta_1+a^2\cos^2\theta_1}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.\end{aligned}$$

所以，$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$为定值.

(2) 依题意，得到

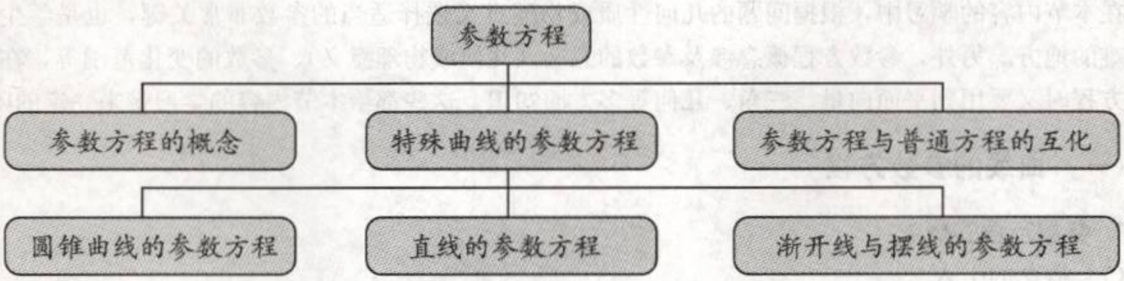
$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta_1+a^2\sin^2\theta_1)(b^2\sin^2\theta_1+a^2\cos^2\theta_1)}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)^2\ \frac{\sin^2 2\theta_1}{4}+a^2b^2}}.\end{aligned}$$

当且仅当 $\sin^2 2\theta_1=1$，即 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$时，$S_{\triangle AOB}$有最小值$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$；

当 $\sin^2 2\theta_1=0$，即 $\theta_1=0$ 或 π 时，$S_{\triangle AOB}$有最大值$\frac{ab}{2}$.

第二讲 参数方程

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 根据问题的条件引进适当的参数，写出参数方程，体会参数的意义.
2. 分析直线、圆和圆锥曲线的几何性质，选择适当的参数写出它们的参数方程.

难点：

根据几何性质选取恰当的参数，建立曲线的参数方程.

三、编写意图与教学建议

参数方程不仅可以用来表示曲线，同时还可以用来描述事物运动变化的规律. 在以往的学习中，学生接触的都是形如 $f(x, y)=0$ 的方程（如直线的方程、圆锥曲线的方程等），它们直接表示了曲线上点的坐标 x，y 之间的关系. 那么为什么还要学习参数方程呢？教学中可以从以下几个方面适当给予说明：

第一，在求曲线方程时，会遇到一些很难直接确定 x，y 之间关系的问题，有时甚至不可能建立直接联系，但利用参数建立它们的间接联系会比较容易. 平抛运动轨迹、炮弹弹道曲线等都是很好的例证. 实际上，引进一个参数就等于多了一根解决问题的拐杖，就有了一座连接曲线上点的坐标 x，y 的桥梁，这对于解决诸如炮弹射程、飞行时间、命中确定目标的发射角或投放物质的时机等都有实际意义.

第二，参数方程能够明确地揭示质点的运动规律，是描述“运动”“变化”的有效工具. 实际上，质点在平面上运动时，它的位置与时间有关，也就是质点的坐标 x，y 是时间 t 的函数：

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t). \end{cases}$$

物理中，把这种方程组叫做“运动方程”，时间 t 为参变量. 舍去物理意义，数学中将这种运动方程叫做曲线的参数方程，变量 t 叫做参数.

第三，有时参数方程的形式比普通方程简单，而且所选择的参数也有明确的物理或几何意义，可

以给研究问题带来方便. 例如，圆的渐开线的参数方程

$$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$$

中，参数 φ 就是过切点 B 的半径与 x 轴的夹角. 而它的普通方程

$$x\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}+y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}-r=0$$

不仅不容易求，形式复杂，而且难以理解.

在本节内容的学习中，根据问题的几何性质或物理意义选择适当的参数非常关键，也是学生会感到困难的地方. 另外，参数方程概念涉及参数的意义（几何或物理意义）、参数的变化范围等，在建立参数方程时又要用到平面向量、三角、几何等多方面知识，这些都给本节内容的学习带来一定的困难.

（一）曲线的参数方程

1. 参数方程的概念

（1）概念的引入

教科书借助“探究”给出一个问题情境，通过分析平抛运动中运动物体的位置与时间的关系，引导学生体会在描述物体运动规律时引进时间 t 的必要性. 在解决这个问题时，首先要建立平面直角坐标系，这个坐标系的建立需要一定的空间想象力. 实际上，在只考虑救援物资投出机舱时所受的水平方向的作用力和地心引力而不考虑其他作用力时，物体就作平抛运动. 假设从出舱时开始，经过 t 个单位时间后，物质的位置在点 $M(x，y)$ 处，那么，x 表示物质的水平位移量，y 表示物质距地面的高度. 由于 x，y 是由两种不同的运动（水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动）得到的，因此直接建立它们的关系比较困难. 从问题的实际意义可以看到，x，y 都与时间 t 有直接关系，因此借助 t 来建立它们的关系就是一个水到渠成的想法了. 教学中，可以先引导学生回顾已经学过的物理知识，让他们分析“平抛运动是水平方向的匀速直线运动与竖直方向的自由落体运动的合成”的数学含义，再让他们根据物理知识写出水平方向的匀速直线运动方程 $x=100t$，竖直方向的自由落体运动方程 $y=500-\frac{1}{2}gt^2$，进而得到平抛物体的运动方程

$$\begin{cases}x=100t,\\y=500-\frac{1}{2}gt^2.\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

在得到上述方程后，可以引导学生对它作一定的分析.

第一，方程组中有 3 个变量，其中的 x，y 表示点的坐标，变量 t 叫做参变量，而且 x，y 分别是 t 的函数，这样的方程组才叫做参数方程.

第二，由物理知识可知，物体的位置由时间 t 惟一决定，从数学角度看，这就是点 M 的坐标 x，y 由 t 惟一确定. 这样，当 t 在容许值范围内连续变化时，x，y 的值也随之连续地变化，于是就可以连续地描绘出点的轨迹.

第三，要向学生指出平抛物体运动轨迹上的点与满足方程组的有序数对$(x，y)$之间有一一对应关系，但不要求证明.

（2）补充问题

与平抛运动类似，还可以用斜抛运动来引入参数方程的概念. 例如，可以从研究炮弹发射后的弹道曲线引出参数方程的概念：

以炮弹射出的位置为原点，与弹道曲线共面的水平方向为 x 轴建立直角坐标系. 设炮弹的发射角为 α，发射的初速度为 v_0，不计空气阻力，把弹道曲线看成是质点 M 以速度 v_0 运动的轨迹，质点M 的

运动分解为两个方向上的运动，即沿 Ox 方向以 $v_x=v_0\cos\alpha$ 作匀速直线运动，沿 Oy 方向以 $v_y=v_0\sin\alpha$作竖直上抛运动. 设炮弹在时刻 t 的位置在 $M(x, y)$，则按匀速直线运动和竖直上抛运动的位移公式，可得弹道曲线的参数方程：

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t,\\ y=y_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}\ (t\text{ 为参数})$$

其中 g 是重力加速度（取 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$）.

(3) 参数方程与普通方程的同异点

曲线 C 的普通方程 $F(x, y)=0$ 直接给出了曲线上点的坐标 x，y 之间的关系，由于是一个方程中含有 x 与 y 两个变量，因此自由变量有一个，而且给定其中任意一个变量的值，都可以由方程 $F(x, y)=0$ 确定另一个变量的值. 曲线 C 的参数方程$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t)\end{cases}$ （t 为参数）借助参数 t 间接给出了曲线上点的坐标 x，y 间的关系，由于是两个方程中含有 x，y，t 三个变量，因此自由变量也只有一个，而且给定参数 t 的一个值，就可以由方程组$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t)\end{cases}$ （t 为参数）求出惟一对应的 x，y 的值. 一般来说，参数方程中参数的变化范围是有限制的，例如，上述平抛运动曲线方程和弹道曲线方程中，参数 t 表示时间，它一定要大于 0 而小于物体落地时间.

(4) 例 1 的教学分析

例 1 的目的是为了让学生熟悉曲线的参数方程. 与以往在解析几何中确定点与曲线位置关系的方法一样，点是否在曲线上等价于是否存在参数 t 使点的坐标同时是参数方程中两个方程的解. 教学时，可以让学生先独立完成解答，然后再让他们叙述答案并说明理由.

2. 圆的参数方程

(1) 关于求参数方程的说明

利用参数求轨迹的参数方程是本讲的重要课题. 教科书以求直线、圆、圆锥曲线等的参数方程为例，引导学生学习求曲线参数方程的基本方法，同时使他们体会普通方程和参数方程是同一曲线的两种不同表达形式. 教学中，要向学生说明求曲线参数方程的主要步骤：

第一步，画出轨迹草图，设 $M(x, y)$是轨迹上任意一点的坐标. 画图时要注意根据几何条件选择点的位置，以利于发现变量之间的关系.

第二步，选择适当的参数. 参数的选择要考虑以下两点：一是曲线上每一点的坐标 x，y 与参数的关系比较明显，容易列出方程；二是 x，y 的值可以由参数惟一确定. 例如，在研究运动问题时，通常选时间为参数；在研究旋转问题时，通常选旋转角为参数；此外，离某一定点的“有向距离”、直线的倾斜角、斜率、截距等也常常被选为参数.

第三步，根据已知条件、图形的几何性质、问题的物理意义等，建立点的坐标与参数的函数关系式. 证明可以省略.

(2) 圆的参数方程

圆的参数方程的建立，与匀速圆周运动、三角函数等知识都有密切的联系. 教科书先安排“圆的参数方程”，是因为圆的参数方程的探求过程比较简单. 同时，圆的参数方程中参数的几何意义较明确，这对学生体会如何根据问题的几何特点或物理意义选择适当的参数比较有利.

教科书以匀速圆周运动为引子，目的是引导学生从“旋转”而想到用“旋转角”为参数. 当然，学生如果能够联系到三角函数定义，也能够想到圆周上点 M 的坐标 x，y 可以用任意角的余弦和正弦来表示. 在求得参数方程

$$\begin{cases}x=r\cos\omega t,\\ y=r\sin\omega t\end{cases}$$

后，应指出 r，ω 都是定值，t 是参数．因为 t 的实际意义是时间，所以 t 的取值范围是 $\{t \mid t\geqslant 0\}$．

如果取 θ 为参数而将参数方程表示为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

那么参数 θ 的几何意义是半径 OM 绕原点 O 逆时针旋转所转过的角度．

因此，选择不同的参数可以得到不同形式的圆的参数方程．到底选择怎样的参数，应当根据问题中的条件以及实际需要来决定．

（3）圆的参数方程的一般形式

以上是圆心在原点的圆的参数方程，它对应的普通方程是 $x^2+y^2=r^2$．那么，圆心在点 $O'(x_0, y_0)$，半径为 r 的圆的参数方程又是怎样的呢？这个问题可以让学生进行探究．

不难得出，这时的圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta,\\ y=y_0+r\sin\theta.\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})$$

与它对应的圆的普通方程是 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$．

（4）对例题的教学分析

例 2 的条件表明，点 M 的运动是由点 P 的运动引起的，而点 P 绕圆心 O 作圆周运动，所以，点 M 的运动是由点 P 绕圆心 O 的“旋转角”θ 决定的．这样选择 θ 为参数是合适的．教学中，可以先让学生独立分析问题的条件，引导他们思考如何选择参数更有利于问题的解决．由于本例难度不大，所以在分析后可以让学生独立完成解答．

实际上，本题也可用如下方法求解：

设 $M(x, y)$，$P(x_0, y_0)$，那么

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=4,\\ 2x=x_0+6,\\ 2y=y_0,\end{cases}$$

将 $x_0=2x-6$，$y_0=2y$ 代入 $x_0^2+y_0^2=4$，可得点 M 的轨迹方程是

$$(x-3)^2+y^2=1.$$

教学时可以让学生对上述两种方法进行比较，体会引进参数 θ 的意义．

3. 参数方程和普通方程的互化

（1）第 24 页“思考”的解释

教科书通过第 24 页的“思考”引出参数方程与普通方程互化的课题．因为由参数方程直接判断曲线的类型不太容易，而化为普通方程后，曲线的类型就比较容易识别了，因此考虑将参数方程化为普通方程是非常自然的．本“思考”的答案是：

设 $Q(a, 0)$，那么 M 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\dfrac{a}{2},\\ y=\sin\theta.\end{cases}$$

化为普通方程，即为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=1.$$

因此，无论 Q 在什么位置，点 M 的轨迹都是半径为 1 的圆（圆心随 a 的变化而移动）.

（2）参数方程化为普通方程

普通方程是相对于参数方程而言的，适当选择参数，普通方程可以化为参数方程；同样地，消去参数，参数方程就化为普通方程.

有时，为了判定曲线的类型，研究曲线的几何性质，需将参数方程化为普通方程. 消去参数的常用方法有：

① 代入法. 先由一个方程中求出参数的表达式（用直角坐标变量表示），再代入另一个方程. 教科书例 3（1）用的就是代入法.

② 利用代数或三角函数中的恒等式消去参数. 教科书例 3（2）就用此法. 例如对于参数方程

$$\begin{cases} x=a\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\cos\theta, \\ y=a\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\sin\theta, \end{cases}$$

如果 t 是常数，θ 是参数，那么可以利用公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$；如果 θ 是常数，t 是参数，那么适当变形后可以利用 $(m+n)^2-(m-n)^2=4mn$.

教学中可以引导学生对上述基本方法进行适当归纳.

需要注意的是，并不是所有参数方程都能化为普通方程. 在化参数方程为普通方程时，坐标 x，y 的变化范围不能扩大或缩小，即对应曲线上点的坐标不能有增减. 教科书对此没有要求，有兴趣的老师可以参阅附录.

对于例 3，教学中要强调转化过程的等价性. 实际上，坐标 x，y 的取值范围是由参数方程给定的，所以为了防止转化过程中出现范围的变化，也可以先由参数方程讨论 x，y 的变化范围，再对方程进行转化. 本例的（1）是一条射线，（2）是抛物线的一部分.

（3）普通方程化为参数方程

从普通方程化为参数方程，必须先指定参数或给出参数与 x，y 中之一的函数关系. 同一个普通方程，由于选择的参数不同，得到的参数方程也不同. 教科书例 4 就是这样的问题.

例 4 的教学中，要提醒（1）（2）两个小题的差异，并由此体会对于同一条曲线可以选取不同的参数而得到不同形式的参数方程.

另一方面，本例也涉及转化的等价性问题：

第（1）小题从 $y^2=4\sin^2\varphi$ 得到的应该是 $y=\pm 2\sin\varphi$，进一步再由参数 φ 的任意性而得到简化形式 $y=2\sin\varphi$，这是学生在以往的学习经验中较少遇到的情况；

第（2）小题中，从 $x^2=9(1-t^2)$ 得到 $x=\pm 3\sqrt{1-t^2}$，需要考虑 x 的两种取值情况，实际上它们分别对应了椭圆在 y 轴的左、右两部分，因此参数方程是由两部分组成的，这也是学生在过去的学习中较少遇到的.

（二）圆锥曲线的参数方程

安排本节内容的目的是以学生熟悉的圆锥曲线为载体，进一步学习建立参数方程的基本步骤，加深对参数方程的理解，体会参数法的应用，同时引导学生从不同角度认识圆锥曲线的几何性质.

圆锥曲线的参数方程中的参数都有确定的几何意义，但它们的几何意义不像圆的参数方程中的参数那样明确. 因此，有条件的学校要充分利用信息技术，从参数连续变化而形成圆锥曲线的过程中认识参数的几何意义.

圆锥曲线的参数方程的探求与应用，与代数变换、三角函数及向量等都有密切联系，教学中要注意这种联系.

1. 椭圆的参数方程

(1) 参数 φ（离心角）的几何意义

教科书通过推广前一节例 4，得出椭圆的参数方程（与椭圆的标准方程相对应）. 这个参数方程实际上是通过纯粹的代数和三角变换得到的，参数 φ 的几何意义并不明确. 为此，教科书利用“思考”，引导学生类比圆的参数方程中参数的几何意义，探究椭圆参数方程中参数的几何意义.

应当说，由学生独立获得椭圆参数方程中参数的几何意义是困难的. 因此教科书采用了直接讲解的方法. 教学中也可以采用教师讲解的方法，只要学生能够理解就可以了.

如图 2-1，设点 M 为椭圆上任一点，过点 M 作平行于 x 轴的直线，该直线与以原点 O 为圆心，b 为半径的圆相交于点 B（点 B 与点 M 所在的象限相同，或点 B 与点 M 同在坐标轴的一条半轴上）. 连接 OB，则 x 轴正半轴沿逆时针方向旋转到 OB 的位置时所转过的角度即为参数 φ（称为离心角）.

由此可见，参数 φ 不是 x 轴正半轴沿逆时针方向旋转到 OM 的位置时所转过的角度（称为 OM 的旋转角），这一点与圆的参数方程中的参数有着显著差异. 离心角 φ 容易与点 M 和中心 O 连线的倾斜角 $\angle xOM$ 混淆，可以通过图形帮助学生正确理解 φ 的几何意义.

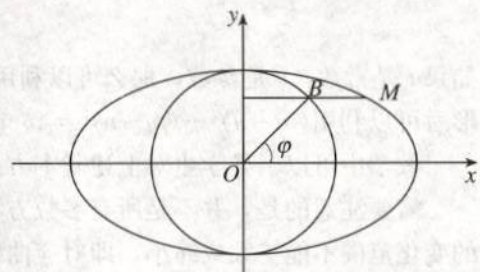


图 2-1

(2) 与有关知识的联系

从几何变换的角度看，通过伸缩变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{a}x, \\ y'=\dfrac{1}{b}y, \end{cases}$$

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可以变成圆 $x'^2+y'^2=1$. 利用圆 $x'^2+y'^2=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x'=\cos\varphi, \\ y'=\sin\varphi, \end{cases}(\varphi\text{ 是参数})$$

可以得到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases}(\varphi\text{ 是参数})$$

仔细研究上述变换过程，也可以从中得出参数 φ 的几何意义.

上述过程不要求学生了解.

(3) 椭圆规的构造原理

第 28 页的“探究”介绍了椭圆规，要求学生探究一下它的构造原理. 实际上，椭圆规就是椭圆的参数方程的应用.

如第 28 页图 2-9，建立平面直角坐标系，设点 M 的坐标为 (x, y)，x 轴位于点 B 右侧的射线绕点 B 逆时针旋转到 BM 的位置时所转过的角记为 φ，则

$$x=|AM|\cdot\cos\varphi=a\cos\varphi,\ y=|BM|\cdot\sin\varphi=b\sin\varphi.$$

所以点 M 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases}(\varphi\text{ 是参数})$$

这是椭圆的参数方程. 因此，点 M 画出的轨迹是椭圆.

(4) 例题的教学分析

例 1 是应用椭圆参数方程解决问题的典型例子. 本例中，学生可以感受到曲线的参数方程在代数“消元”变形中具有重要作用. 实际上，如果用直角坐标，则点 $M(x, y)$ 到直线 $x+2y-10=0$ 的距离

的表达式中有两个变量，虽然可以借助椭圆方程转化为一个变量的，但是表达式比较复杂．利用参数方程，椭圆上点的坐标只含一个参变量 φ，距离表达式可以得到简化，而且可以用上三角变换，从而拓广了解决问题的途径．因此本题体现了参数方程的优势．

本例的教学中，因为用到较多的三角知识，需要适当进行复习．

（5）第 29 页“思考”的教学建议

这个“思考”是从“联系”的角度提出来的．线性规划问题是在可行域中确定点的坐标，使目标函数取得最大值或最小值．这里的目标函数是 $z=x-2y$，可行域是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上点的集合．具体解答如下：

设 $M(5\cos\varphi,\ 4\sin\varphi)$是椭圆上一点，则

$$\begin{aligned} z&=5\cos\varphi-8\sin\varphi\\ &=\sqrt{89}\cos(\varphi+\varphi_0), \end{aligned}$$

其中 φ_0 满足 $\cos\varphi_0=\frac{5}{\sqrt{89}}$，$\sin\varphi_0=\frac{8}{\sqrt{89}}$.

当 $\varphi+\varphi_0=0$ 时，z 有最大值$\sqrt{89}$．此时，

$$5\cos\varphi=5\cos(-\varphi_0)=\frac{25}{\sqrt{89}};\ 4\sin\varphi=4\sin(-\varphi_0)=-\frac{32}{\sqrt{89}}.$$

即当点 M 位于$\left(\frac{25}{\sqrt{89}},\ -\frac{32}{\sqrt{89}}\right)$时，$z$ 取最大值$\sqrt{89}$.

同理，当 $\varphi+\varphi_0=\pi$ 时，z 有最小值$-\sqrt{89}$．此时，

$$5\cos\varphi=5\cos(\pi-\varphi_0)=-\frac{25}{\sqrt{89}};\ 4\sin\varphi=4\sin(\pi-\varphi_0)=\frac{32}{\sqrt{89}}.$$

即当点 M 位于$\left(-\frac{25}{\sqrt{89}},\ \frac{32}{\sqrt{89}}\right)$时，$z$ 取最小值$-\sqrt{89}$.

2. 双曲线的参数方程

由于学生独立探究双曲线参数方程比较困难，所以教科书也采用直接讲述的方法，介绍了得出双曲线的参数方程的过程．不过，求双曲线的参数方程要比求椭圆的参数方程的过程复杂．在推导过程中，用到了正割函数，由于本套教科书没有介绍过这一三角函数，因此教学中不必补充，只把 sec 作为一个记号处理就可以了．对于教科书中介绍的公式

$$\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1,$$

教学中不要作过多要求，因为它只是为了说明双曲线的参数方程与普通方程的互化而使用的，教科书也是从 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ 推导出来的．

（1）参数 φ（离心角）的几何意义

如图 2-2，当点 M 为双曲线右支上任一点时，过点 M 作平行于 x 轴的直线，该直线与以原点 O 为圆心，b 为半径的圆在点 B 处的切线相交于点 B'，连接 OB'，则 x 轴正半轴沿逆时针方向旋转到 OB' 的位置时所转过的角度即为双曲线的参数方程中的参数 φ（离心角）．

如图 2-3，当点 M 为双曲线左支上任一点时，过点 M 作平行于 x 轴的直线，该直线与以原点 O 为圆心，b 为半径的圆在点 B 处的切线相交于点 B'，作出点 B' 关于原点 O 的对称点 B''，连接 OB''，则 x 轴正半轴沿逆时针方向旋转到 OB'' 的位置时所转过的角度即为双曲线的参数方程中的参数 φ.

如同椭圆的参数方程一样，参数 φ 不是 x 轴正半轴沿逆时针方向旋转到 OM 的位置时所转过的角度（称为 OM 的旋转角）．

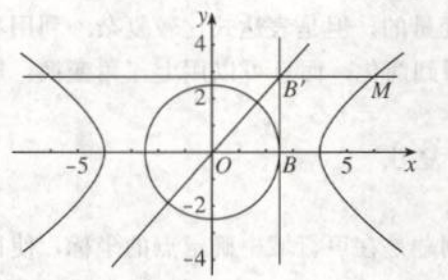


图 2-2

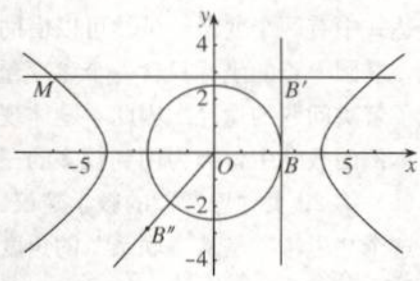


图 2-3

(2) 例题的教学分析

例 2 的目的是让学生熟悉用双曲线的参数方程解决问题. 本例只要根据题目所给的条件，按部就班地写出直线方程，求出交点坐标，再由平行四边形面积公式写出面积表达式，可以获得相应的结论. 本题的难点在于运算比较复杂，用到三角变换知识比较多.

在完成例 2 的教学后，可引导学生总结得出以下表格：

点所在的曲线	$x^2+y^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
点的坐标	$(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$	$(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$	$(a\sec\varphi,\ b\tan\varphi)$

3. 抛物线的参数方程

(1) 抛物线的参数方程的探究及参数的几何意义

教科书以抛物线 $y^2=2px$ 为例，介绍抛物线的参数方程. 从抛物线的形状可以发现，当 α 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内变化时，角 α 的终边与抛物线有惟一交点. 这样，取 α 为参数探求抛物线的参数方程是比较容易想到的.

值得注意的是，求抛物线的参数方程时需要利用其普通方程，采用“解方程组”的方法来推导，这与椭圆、双曲线的参数方程的推导有差异. 另一方面，抛物线的参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{2p}{\tan^2\alpha}, \\ y=\dfrac{2p}{\tan\alpha}. \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}) \qquad ①$$

并不包括定点. 因此，为了使参数方程能够包括抛物线上所有点，我们令 $t=\frac{1}{\tan\alpha}$，得到

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt. \end{cases}$$

将 $t=0$ 代入上述方程可得 $(x,\ y)=(0,\ 0)$，正好把抛物线的顶点补上. 这样与 $y^2=2px$ 对应的抛物线的参数方程就是

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt. \end{cases} (t \text{ 为参数}) \qquad ②$$

上述过程，不仅得到了抛物线的参数方程，而且还可以让学生体会完整、全面地讨论问题的方法. 通过这样的教学，可以逐步培养学生严密地思考和严谨地推理的习惯.

由上述过程可以看到，参数方程①中的参数 α 是 x 轴正半轴到 OM（M 为抛物线上的点）所成的角；参数方程②中参数 t 表示抛物线上除顶点外的任意一点与原点连线的斜率的倒数.

(2) 关于“思考”的教学分析

第 33 页“思考”是让学生进一步认识曲线的参数方程的不惟一性，进一步认识根据问题的几何特征选择参数的方法.

根据抛物线的定义得出抛物线的参数方程的过程如下：

如图 2-4，设点 $M(x, y)$是抛物线

$$y^2=2px \qquad (p>0)$$

上的任一点，点 M 到准线 $x=-\frac{p}{2}$的距离为 t，则有

$$x=t-\frac{p}{2}.$$

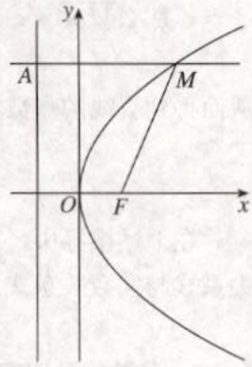


图 2-4

由于

$$|MF|=t\Leftrightarrow(t-p)^2+y^2=t^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2pt-p^2}.$$

所以，抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=t-\frac{p}{2},\\ y=\sqrt{2pt-p^2},\end{cases}(t\text{ 为参数})\quad 和\quad \begin{cases}x=t-\frac{p}{2},\\ y=-\sqrt{2pt-p^2}.\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

(3) 例题的教学分析

例 3 是利用抛物线的参数方程解决问题. 本例的条件中涉及两个垂直的条件，利用抛物线的参数方程，垂直条件得到了非常简洁的表示. 因此，通过解答本例，学生可以体会到参数方程的力量. 另外，本例的解答中，因为涉及到线段的垂直、共线等，所以向量知识的应用也是非常关键的. 为了使学生能够顺利解答本例，教学中应当引导学生适当复习向量垂直、平行的坐标表示等方面的知识.

第 34 页的“探究”可以看成是例 3 的变式，其解答如下：

由例 3 可得

$$|OA|=\sqrt{(2pt_1^2)^2+(2pt_1)^2}=2p|t_1|\sqrt{t_1^2+1},$$
$$|OB|=\sqrt{(2pt_2^2)^2+(2pt_2)^2}=2p|t_2|\sqrt{t_2^2+1}.$$

所以，$\triangle AOB$ 的面积为

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=2p^2|t_1t_2|\sqrt{(t_1^2+1)\cdot(t_2^2+1)}\\&=2p^2\sqrt{t_1^2+t_2^2+2}=2p^2\sqrt{(t_1+t_2)^2+4}\\&\geqslant 4p^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $t_1=-t_2$，即当点 A，B 关于 x 轴对称时，$\triangle AOB$ 的面积最小，最小值为 $4p^2$.

（三）直线的参数方程

直线是学生最熟悉的几何图形. 在《数学 2（必修）》中学生已经学习了直线的几种方程. 教科书先引导学生回顾了用倾斜角的正切表示的直线的点斜式方程，这是为推导直线的参数方程做准备（从代数变换的角度看，教科书第 35 页的直线参数方程②就是这一方程的变形）. 在提出“如何建立直线的参数方程?”后，教科书引导学生借助向量工具探究直线的参数方程.

1. 直线的参数方程的建立

在直角坐标系中，给定一点 $M_0(x_0, y_0)$以及倾斜角 α，可以惟一确定一条直线 l，也就是说直线方程可以由点 M_0 的坐标 x_0，y_0 和倾斜角 α 表示. 现在的问题是，选择怎样的参数 t，才能使直线上任

意一点 M 的坐标 x，y 与点 M_0 的坐标 x_0，y_0 和倾斜角 α 联系起来呢？从另一个角度看，倾斜角 α 可以与方向联系，点 M 与 M_0 可以用距离或有向线段$\overrightarrow{M_0M}$数量的大小联系，这种“方向”“有向线段数量大小”启发我们想到利用向量工具（向量的坐标表示）建立直线的参数方程.

由直线 l 的倾斜角 α 可得，直线 l 的方向向量是 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$. 设 $M(x,\ y)$为直线 l 上的任意一点，那么$\overrightarrow{M_0M}/\!/\boldsymbol{e}$，从而必有实数 t，使$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$，即

$$(x-x_0,\ y-y_0)=t(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$

从而得到直线的参数方程：

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases} \quad ①$$

在上述推导中，共线向量定理起关键作用. 教学中要引导学生回顾平面向量的知识，并注意向量关系式与实数关系式之间的等价转化.

2. 参数的几何意义

直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{e}$ 满足$|\boldsymbol{e}|=1$，由$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$ 得到

$$|t|=|\overrightarrow{M_0M}|=|M_0M|.$$

故直线参数方程中参数 t 的几何意义是：$|t|$表示参数 t 对应的点 M 到定点 M_0 的距离. 当$\overrightarrow{M_0M}$与 $\boldsymbol{e}$ 同向时，t 取正数；当$\overrightarrow{M_0M}$与 $\boldsymbol{e}$ 反向时，t 取负数.

3. 直线的参数方程辨析

首先，从上述分析过程可以看到，参数 t 可以理解为直线 l 上有向线段$\overrightarrow{M_0M}$的数量，这是参数 t 的几何意义的另一种说法. 实际上，参数 t 的几何意义可以与数轴上点 A 的坐标 a 的意义作类比，即：$a=\pm|OA|$，当 A 在 O 的右侧时取“+”；当 A 在 O 的左侧时取“−”. 所以，数轴上点 A 的坐标就是有向线段$\overrightarrow{OA}$的数量.

其次，如果把直线的普通方程 $y-y_0=\tan\alpha(x-x_0)$写为

$$\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{x-x_0}{\cos\alpha},$$

令上述比例式的比值为 t，即

$$\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=t,$$

由此即得直线的参数方程.

另外，在得到直线的参数方程后，应当注意 α，x_0，y_0 都是常数，t 是参数.

4. 直线参数方程的其他形式

有时直线参数方程也可以写为

$$\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt.\end{cases} \quad ②$$

这一形式与①的区别在于参数 t 没有明确的几何意义，而且 $a^2+b^2=1$ 一般不成立.

有时利用②式解题比较简洁.

例题 动点 M 作等速直线运动，它在 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 9，12，运动开始时，点 M 位于 $A(1,\ 1)$，求点 M 的轨迹的参数方程.

点 M 的轨迹的参数方程可以直接写为：

$$\begin{cases}x=1+9t,\\ y=1+12t.\end{cases}\quad (t\text{ 为参数})$$

5. 例题的教学分析

本小节共有 4 个例题，它们都能较好地体现直线的参数方程的优越性.

(1) 例 1 是求直线与曲线交点的距离问题，这样的问题用直线的参数方程解决比较方便. 本题的解答中，为了将普通方程化为参数方程，先判定点 $M(-1,\ 2)$在直线上，并求出直线的倾斜角，这样才能用参数 t 的几何意义求相应的距离.

实际上，在求直线 l 与曲线 C：$f(x,\ y)=0$ 交点的距离时，把直线 l 的参数方程①代入 $f(x,\ y)=0$，可以得到一个关于 t 的方程

$$f(x_0+t\cos\varphi,\ y_0+t\sin\varphi)=0. \qquad ③$$

假设方程③的解为 t_1，t_2，对应的直线 l 与曲线 C 的交点为 A，B，那么由参数 t 的几何意义可得

$$|AB|=|t_1-t_2|.$$

这样的求法比用普通方程求出交点坐标，再用距离公式求交点距离简便.

本题解答后，教科书提出了“探究”（第 36 页）. 本“探究”的结论比较重要，在解题时可以作为基本结论使用，教学时要引导学生认真解答. 答案如下：

弦 M_1M_2 的长 $|M_1M_2|=|t_1-t_2|$；

线段 M_1M_2 的中点 M 对应的参数 $t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$.

(2) 例 2 中，关键要求出直线的斜率. 分析问题的条件，如果设经过 M (2，1) 的直线的倾斜角为 α，那么直线的参数方程可以写为

$$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha.\end{cases}$$

其中点 M 所对应的参数 $t=0$. 将上述参数方程代入椭圆方程得到一个关于 t 的一元二次方程，由于点 M 在椭圆内，所以方程一定有两个实根 t_1，t_2，由上面“探究”的结论，有 $t_1+t_2=2t=0$. 由此就可以方便地得出直线斜率的值.

本例的解法对一般圆锥曲线也适用.

如果把“中点”改为“三等分点”，例如，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，那么有

$$t=\frac{t_1+2t_2}{3},$$

于是 $t_1=-2t_2$. 借助上述关于 t 的一元二次方程同样可以求直线的斜率.

(3) 例 3 是用直线的参数方程解决实际问题的一个例子. 解决它的关键是将实际问题转化为数学问题. 由“距台风中心 250 km 以内的地方都属于台风侵袭的范围”可知，只要台风中心进入以 O 为圆心，250 km 为半径的圆内，城市 O 就受影响. 又台风中心在过 $P(300,\ 0)$，倾斜角为 135°的直线 l 上运动，所以台风影响城市 O 的时间范围对应于直线 l 在圆内的部分. 这就是教科书给出的解法的依据. 本例中的参数 t 表示时间，是一个物理量.

第 38 页“思考”的解答：容易知道，城市 O 受台风侵袭的时间长度是

$$|t_1-t_2|=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}-\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{2}\approx 6.6.$$

如果台风侵袭的半径以 10 km/h 不断增大，只要将圆 O 的方程改为

$$x^2+y^2=(250+10t)^2,$$

以下仍沿用教科书的方法，可以得到解答.

(4) 例 4 实际上是用解析法证明椭圆的一条几何性质．证明过程中，如果用直线的普通方程，那么运算非常复杂；用直线的参数方程则可以大大简化运算（实际上无需具体求出 A，B，C，D 的坐标）．

由于《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》对韦达定理不作要求，因此教科书在“边空”中给出了一元二次方程根与系数关系的表达式．韦达定理在解析几何中的应用很多，可以大大简化代数运算，因此教学时可以根据需要补充韦达定理的内容．

把椭圆改为双曲线，结论仍然成立．

（四）渐开线与摆线

1. 渐开线

(1) 圆的渐开线的参数方程

教科书利用“探究”，引导学生通过实际操作获得圆的渐开线．教学中应当安排这个活动，以使学生在实际画图的过程中，体会渐开线上动点所满足的几何条件，为建立圆的渐开线的参数方程做好准备．有条件的学校要尽量使用计算机画图，使学生有更多机会、更深入细致地观察圆的渐开线的形成过程，以对这种曲线形成良好的直觉．

导出圆的渐开线的参数方程的关键就是将“切线 BM 的长就是$\overset{\frown}{AB}$的长”用坐标表示出来．根据三角函数知识，如果取$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角 φ（以弧度为单位）为参数，那么$\overset{\frown}{AB}$的长、点 B 的坐标都能容易地得到表示，而且渐开线上任意一点 M 由 φ 惟一确定．另外，由 BM 是圆的切线知 $BM\perp OB$，因此 BM 的方向可以与 OB 的方向建立联系．由上述分析可以看到，利用向量可以比较方便地建立点 M 的坐标 x，y 与参数 φ 的关系式．

圆的渐开线的参数方程不能化为普通方程．

(2) 第 41 页“思考”的说明

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2&=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\cdot(\sin\varphi,\ -\cos\varphi)\\&=\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi(-\cos\varphi)=0,\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{e}_2\perp\boldsymbol{e}_1$，即$\overrightarrow{BM}/\!/\boldsymbol{e}_2$．

当 φ 的终边在坐标轴上时，容易得到$\overrightarrow{BM}$与$\boldsymbol{e}_2$同向．

下面可以按参数 φ 在不同的象限，分情况证明$\overrightarrow{BM}$与$\boldsymbol{e}_2$同向．

① 当 φ 在第一象限时，如图 2-5，由于 $\sin\varphi>0$，$-\cos\varphi<0$，$(\sin\varphi,\ -\cos\varphi)$是第四象限的点的坐标，所以$\overrightarrow{BM}$与$\boldsymbol{e}_2$同向；

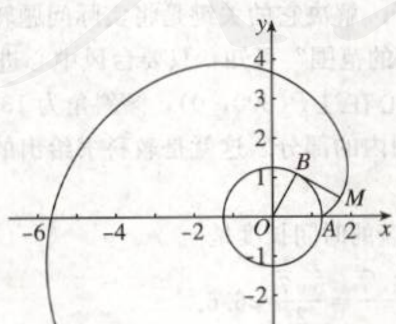


图 2-5

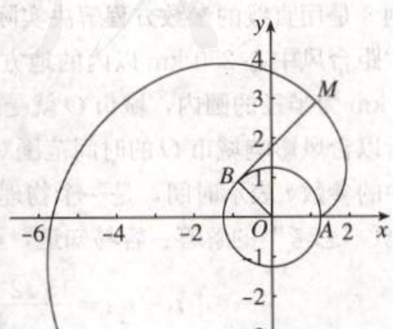


图 2-6

② 当 φ 在第二象限时，如图 2-6，由于 $\sin\varphi>0$，$-\cos\varphi>0$，$(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ 是第一象限的点的坐标，所以 $\overrightarrow{BM}$ 与 e_2 同向；

③ 当 φ 在第三象限时，如图 2-7，由于 $\sin\varphi<0$，$-\cos\varphi>0$，$(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ 是第二象限的点的坐标，所以 $\overrightarrow{BM}$ 与 e_2 同向；

④当 φ 在第四象限时，如图 2-8，由于 $\sin\varphi<0$，$-\cos\varphi<0$，$(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ 是第三象限的点的坐标，所以 $\overrightarrow{BM}$ 与 e_2 同向.

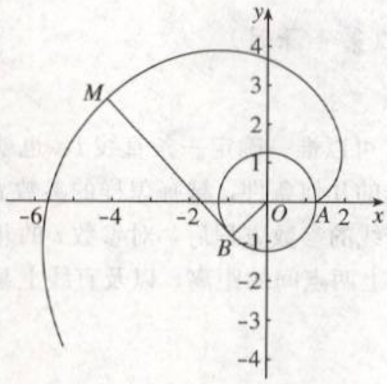


图 2-7

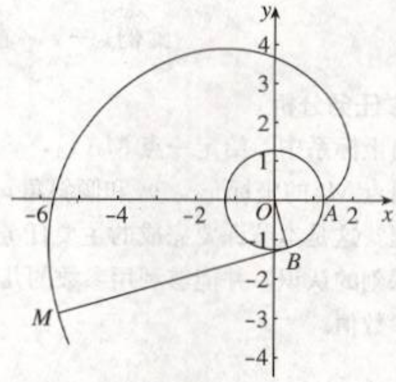


图 2-8

2. 摆线

摆线也是借助圆的运动形成的一种曲线. 教科书先在“思考”中构建一个实际问题情境引出摆线，然后将它抽象为动点轨迹问题. 手工作摆线比作圆的渐开线复杂，但学生对摆线的现实背景更熟悉，摆线的形状也更容易想象. 教学中可以在分析动点满足的几何条件的基础上，利用计算机作出图形以引导学生观察.

(1) 摆线的参数方程

在分析摆线上动点满足的几何条件时，正确理解“一个圆沿一条定直线无滑动地滚动”的意思是关键. 如图 2-9，假设圆周上定点 M 的起始位置是圆与定直线的切点 O，圆保持与定直线相切向右滚动，点 M 就绕圆心 B 作圆周运动. 如果点 M 绕圆心 B 转过 φ 弧度后，圆与直线相切于 A，那么线段 OA 的长等于 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长，即 $OA=r\varphi$；如果点 M 绕圆心 B 运动一周回到切点的位置 E，那么 OE 的长恰等于圆周长. 这就是所谓“无滑动地滚动”的意思.

从上述分析可以看到，在圆周沿定直线无滑动滚动的过程中，圆周上定点 M 的位置可以由圆心角 φ 惟一确定，因此以 φ 为参数是非常自然的.

摆线的参数方程也不能化为普通方程.

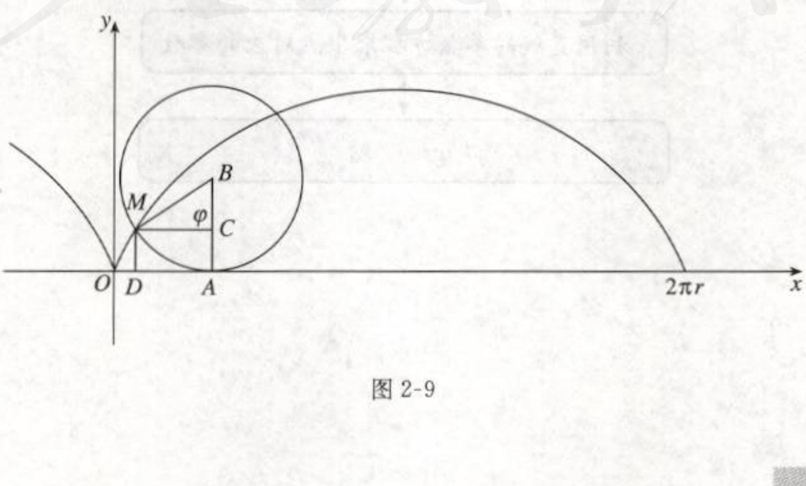


图 2-9

(2) 第 42 页“思考”的说明

参数 φ 的取值范围是$[0, +\infty)$；

一个拱的宽度是 $2\pi r$，高度是 $2r$（其中 r 是滚动圆的半径）.

四、教学设计案例

案例(一) 直线的参数方程(第 1 课时)

1. 教学任务分析

在直角坐标系中，给定一点 $M_0(x_0, y_0)$以及倾斜角 α，可以惟一确定一条直线 l，也就是说直线方程可以由点 M_0 的坐标 x_0，y_0 和倾斜角 α 表示. 根据直线的几何条件，选择怎样的参数 t 写出直线的参数方程？这是本节课要完成的主要任务. 另外，得到直线的参数方程后，对参数 t 的几何意义应当有比较深刻的认识，并能够利用参数的几何意义写出直线上两点间的距离，以及直线上某些特殊点所对应的参数值.

2. 教学重点和难点

重点：

分析直线的几何条件，选择适当的参数写出直线的参数方程.

难点：

从直线的几何条件联系到向量法，并选择“有向线段的数量”为参数.

3. 教学基本流程

直线的几何条件

↓

根据直线的几何条件确定参数

↓

求出直线的参数方程

↓

对直线的参数方程的辨析

↓

利用直线的参数方程求中点对应的参数

↓

小　结

4. 教学情景设计

问　题	问题设计意图	师生活动
(1) 在平面直角坐标系中，确定一条直线的几何条件是什么?	引导学生分析直线的几何条件，为选择参数做准备.	教师提问，学生独立思考并回答. 确定直线的几何条件可以有多种表现方式，教师要注意帮助学生把条件归结到“定点”和“倾斜角”上.
(2) 根据直线的几何条件，你认为应当怎样选择参数?	引导学生从“几何条件”思考参数的选择.	教师要注意引导学生思考选择怎样的参数才能把点 M 的坐标与倾斜角 α 和 M_0 的坐标联系起来. 可以在如下两个问题上适当点拨：(1) 把 $\overrightarrow{M_0M}$ 看成有向线段，那么点 M 的位置可以由它的数量惟一确定；(2) $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向可以利用倾斜角 α 确定的方向向量来表示.
(3) 你能写出直线的参数方程吗?	引导学生根据上面的分析导出直线的参数方程.	学生独立思考并写出参数方程后再全班交流. 教师可以提出如下问题引导学生：(1) 如何利用倾斜角 α 写出直线 l 的单位方向向量 $\boldsymbol{e}$? (2) 如何用 $\boldsymbol{e}$ 和 M_0 的坐标表示直线上任意一点 M 的坐标?
(4) 第 36 页“思考”.	辨析直线的参数方程.	学生独立思考后作出回答. 教师可以在“几何意义”的含义上作适当引导：t 的几何意义是指它表示怎样的几何元素，它与其他几何元素之间的关系，等等.
(5) 例 1.	初步学会用直线的参数方程解决问题.	教师引导学生分析：根据直线的参数方程中参数的几何意义，求直线与曲线交点的距离问题宜于用直线的参数方程. 教师可以提出如下问题进行引导：(1) 写出直线 l 的参数方程需要哪些条件? (2) 交点 A，B 与参数 t 有什么关系? (3) 如何利用参数求 $\|AB\|$? (4) 点 M 到交点 A，B 的距离与参数 t 有什么关系?
(6) 第 36 页“探究”.	从例 1 概括出一些一般性结论.	教师提醒学生注意联系例 1 的解题过程思考如何得出“探究”的结论. 可以提如下问题来引导：(1) M_0，M_1，M_2 的位置有几种? 如何根据这种位置关系及对应的参数值写出 $\|M_1M_2\|$? (2) 用向量表示的中点坐标公式是什么? 由此你能想到用 t_1，t_2 表示 t 的方法吗?
(7) 小结：与直线的参数方程有联系的知识有哪些?	明确直线的参数方程与相关知识的联系，建立良好的认知结构.	教师引导学生总结. 可以从以下几个方面引导：(1) 与普通方程 $y-y_0=\tan\alpha(x-x_0)$ 的联系；(2) 与向量知识的联系；(3) 用参数 t 表示的点的坐标、直线与曲线交点间的距离、与中点或定比分点对应的参数 t，等等；(4) 参数 t 的几何意义与数轴上点的坐标的几何意义的类比.

案例(二)　直线的参数方程(第 1 课时)

1. 教学任务分析

选择直线的参数方程的参数比较困难. 究其原因，是从确定直线的几何条件（例如给定一点 $M_0(x_0, y_0)$ 和倾斜角 α）较难联想到“距离”，更难联想到利用向量选择参数. 一个可以选择的、比较自然的思路是：联系数轴上点的坐标的几何意义，以平面直角坐标系中直线 l 上的定点 M_0 为原点，原坐标系的单位长度为单位长度，规定一个方向（例如，向上或向右的方向为正），那么直线 l 就成了数轴. 这时，直线 l 上任一点就可由其坐标 t 惟一确定. 因此可以选择坐标 t 为直线参数方程中的参数.

从而，建立直线的参数方程就转化为建立坐标 t 与坐标 x_0，y_0 及倾斜角 α 之间关系的问题．由此再进一步联系向量法就比较自然了．

本节课的教学任务是联系数轴、向量等知识，求出直线的参数方程，并进行简单应用，让学生体会直线参数方程在解决问题中的作用．

2. 教学重点和难点

重点：联系数轴、向量等知识，写出直线的参数方程．

难点：通过向量法，建立参数 t（数轴上的点的坐标）与点在直角坐标系中的坐标 x、y 之间的联系．

3. 教学基本流程

回顾数轴概念，理解数轴上点的坐标的几何意义

↓

理解平面直角坐标系中任意一条直线l均可作为数轴

↓

确定直线l为数轴时，点的坐标t为直线参数方程的参数

↓

利用平面向量共线定理建立联系，得出直线的参数方程

↓

例1，第38页的“探究”

↓

小结与布置作业

4. 教学情景设计

问　题	设计意图	师生活动
（1）数轴是怎样建立的？数轴上点的坐标的几何意义是什么？	回顾数轴概念，通过向量共线定理理解数轴上的数的几何意义，为选择参数作准备．	教师提问后，让学生思考并回答问题．教师引导学生明确：如果数轴原点为 O，数 1 所对应的点为 A，数轴上点 M 的坐标为 t，那么①单位向量$\overrightarrow{OA}$为数轴的方向向量，且$\overrightarrow{OM}=t\cdot\overrightarrow{OA}$；②当$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{OA}$方向一致时，$t>0$；当$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{OA}$方向相反时，$t<0$；当 M 与 O 重合时，$t=0$；③$\lvert OM\rvert=\lvert t\rvert$．
（2）如果把平面直角坐标系中的一条直线作为数轴，那么直线上任意一点就有两种坐标．怎样选取单位长度和方向才有利于建立这两种坐标之间的联系？	使学生明确平面直角坐标系中的任何直线都可以在规定了原点、单位长度、正方向后成为数轴，为建立直线参数方程作准备．	教师提出问题后，引导学生思考并得出以下结论：选取直线 l 上的定点 M_0 为原点，与直线 l 平行且方向向上（l 的倾斜角不为 0 时）或向右（l 的倾斜角为 0 时）的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定直线 l 的正方向及在直线 l 上进行度量的单位长度后，直线 l 就变成了数轴．这时，直线 l 上的点就有了两种坐标（一维坐标和二维坐标）．在规定数轴的单位长度和方向时，与平面直角坐标系的单位长度和方向保持一致，有利于建立两种坐标之间的联系．

续表

问　题	设计意图	师生活动
(3) 当点 M 在直线 l 上运动时，点 M 满足怎样的几何条件？	将直线 l 作为数轴，获得几何条件：$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$，并由此认识到可选取点 M 在数轴上的坐标 t 作为参数来探求直线 l 的参数方程.	让学生充分思考提问后，教师引导学生将直线 l 变成数轴，同时可以借助信息技术工具的演示让学生认识到：直线 l 上的点 M 运动就等价于向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 变化，但无论向量怎样变化，都有 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{e}$. 因此点 M 在数轴上的坐标 t 决定了点 M 的位置，从而可以选取 t 作为参数来获取直线 l 的参数方程.
(4) 如何确定直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{e}$？	获取结论：$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.	教师启发学生思考确定直线的要素，明确直线 l 的方向可以由直线的倾斜角 α 来确定，因而直线 l 的方向向量可以由倾斜角 α 来确定. 为实现用倾斜角 α 表示方向向量 $\boldsymbol{e}$，教师可启发学生将方向向量 $\boldsymbol{e}$ 的起点平移到坐标系原点，再根据三角函数定义写出 $\boldsymbol{e}$ 的终点的坐标，从而获得 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.
(5) 如果点 M_0，M 的坐标分别为 $(x_0,\ y_0)$，$(x,\ y)$，怎样将 x，y 用参数 t 表示出来？	得出直线的参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}$ (t 为参数)	教师启发学生回顾向量的坐标表示，待学生通过独立思考并写出参数方程后再全班交流. 教师可以提出如下问题让学生加强认识：①直线的参数方程中哪些是变量？哪些是常量？②参数 t 的取值范围是什么？③参数 t 的几何意义是什么？
(6) 对于第 36 页例 1，在学习直线参数方程前你会怎样求解？利用直线参数方程求解有什么好处？	让学生体会直线参数方程的使用场合，初步学会用直线的参数方程解决问题.	先让学生不用直线参数方程进行求解，让学生体会到难度后，教师引导学生分析：根据直线的参数方程中参数的几何意义，求直线上两点间的距离或直线被曲线所截得的弦的长度时宜于用直线的参数方程. 学生用直线参数方程求解时，教师应引导学生关注以下问题：①如何写出直线 l 的参数方程？②如何求出交点 A，B 所对应的参数 t_1，t_2？③ $\|AB\|$ 与 t_1，t_2 有什么关系？
(7) 你认为第 36 页“探究”中的问题该怎样回答？	从例 1 概括出一些一般性结论.	教师提醒学生注意联系数轴和例 1 的解题过程思考如何得出“探究”的结论. 可以提如下问题来引导：①数轴上两点之间的距离如何表示？这种表示与本题有什么关系？②数轴上两点的中点所对应的坐标如何表示？由此你能想到用 t_1，t_2 表示 t 的方法吗？
(8) 与直线的参数方程有联系的知识有哪些？	小结本节课内容，明确直线的参数方程与相关知识的联系，建立良好的认知结构.	教师可以从以下几个方面引导学生总结：①与普通方程 $y-y_0=\tan\alpha(x-x_0)$ 的联系；②与向量知识的联系；③用参数 t 表示的点的坐标、直线上两点间的距离，直线被曲线所截得的弦的长、与中点或定比分点对应的参数 t，等等；④参数 t 的几何意义与数轴上点的坐标的几何意义的类比.
(9) 作业	第 39 页第 1，3 题.	

五、习题解答

习题 2.1（第 26 页）

1. 解：取投放点为原点，飞机飞行航线所在直线为 x 轴，过原点和地心的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，得到被投放物资的轨迹方程为

$$\begin{cases} x=100t, \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \quad (t\text{ 是参数，表示时间})$$

令 $x=1\,000$，解得 $t=10$.

当 $t=10$ 时，由方程得到

$$y=-\frac{1}{2}\times g\times 10^2\approx-\frac{1}{2}\times 9.8\times 10^2=-490.$$

即飞机投放救灾物资时的飞行高度约为 490 m.

2. 解法一：设经过时间 t，动点的位置是 $M(x, y)$，那么有

$$x-2=3t,\ y-1=4t.$$

于是点 M 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=1+4t. \end{cases} \quad (\text{以时间 } t \text{ 为参数})$$

解法二：设 $M(x, y)$是直线上任意一点，它离 $M_0(2, 1)$的有向距离为 t. 根据已知条件，由速度合成的知识可知：

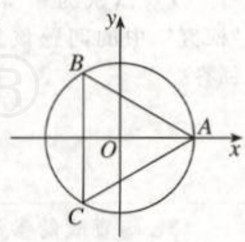
$$x-2=\frac{3}{5}t,\ y-1=\frac{4}{5}t.$$

于是点 M 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+\dfrac{3}{5}t, \\ y=1+\dfrac{4}{5}t. \end{cases} \quad (\text{以位移 } t \text{ 为参数})$$

3. 解：不妨设△ABC 的外接圆的半径为 1，建立如图的平面直角坐标系，使点 B，C 关于 x 轴对称，那么外接圆的参数方程是

$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta\text{ 是参数})$$



（第 3 题）

A，B，C 的坐标分别为$(1, 0)$，$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设点 $M(\cos\theta, \sin\theta)$，则

$$\begin{aligned} &|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2 \\ =&[(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta]+\left[\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]+\left[\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \\ =&6\ (\text{定值}). \end{aligned}$$

4. 解：(1) $2x-y-7=0$，直线；

(2) $y=2x^2$，$x\in[-1, 1]$，以$(-1, 2)$，$(1, 2)$为端点的一段抛物线弧；

(3) $x^2-y^2=4$，双曲线；

(4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，椭圆.

5. 解：(1) $\begin{cases} x=t^2-3t+1, \\ y=t-1; \end{cases}$ (t 为参数)　(2) $\begin{cases} x=a\cos^4\varphi, \\ y=a\sin^4\varphi. \end{cases}$ (φ 为参数)

习题 2.2（第 34 页）

1. 解：因为 $2a=15\ 565$，$2b=15\ 443$，所以 $a=7\ 782.5$，$b=7\ 721.5$. 所求的椭圆参数方程为

$$\begin{cases} x=7\ 782.5\cos\varphi, \\ y=7\ 721.5\sin\varphi. \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数})$$

2. 证明：设 $M(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$，$P(x_P,\ 0)$，$Q(x_Q,\ 0)$.

因为 P，Q 分别为 B_1M，B_2M 与 x 轴的交点，所以

$$K_{B_1P}=K_{B_1M},\ K_{B_2Q}=K_{B_2M}.$$

由斜率公式并计算得

$$x_P=\frac{a\cos\varphi}{1+\sin\varphi},\ x_Q=\frac{a\cos\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

所以 $|OP|\cdot|OQ|=|x_P\cdot x_Q|=a^2$（定值）.

3. 证明：设等轴双曲线的普通方程为 $x^2-y^2=a^2$ $(a>0)$，则它的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\varphi}, \\ y=a\tan\varphi. \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数})$$

设 $M\left(\dfrac{a}{\cos\varphi},\ a\tan\varphi\right)$ 是双曲线上任意一点，则点 M 到两渐近线 $y=x$ 及 $y=-x$ 的距离之积是

$$\frac{\left|\dfrac{a}{\cos\varphi}-a\tan\varphi\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\cdot\frac{\left|\dfrac{a}{\cos\varphi}+a\tan\varphi\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|\dfrac{a^2}{\cos^2\varphi}-a^2\tan^2\varphi\right|}{2}$$

$$=\frac{a^2}{2}\ (\text{常数}).$$

4. 证明：设点 A，B 的坐标分别为 $(2pt_1^2,\ 2pt_1)$，$(2pt_2^2,\ 2pt_2)$，则点 C 的坐标为 $(2pt_2^2,\ -2pt_2)$.

直线 AB 的方程为 $y-2pt_1=\dfrac{1}{t_1+t_2}(x-2pt_1^2)$，所以点 D 的坐标为 $(-2pt_1t_2,\ 0)$；

直线 AC 的方程为 $y-2pt_1=\dfrac{1}{t_1-t_2}(x-2pt_1^2)$，所以点 E 的坐标为 $(2pt_1t_2,\ 0)$.

因为 DE 的中点为原点 $O(0,\ 0)$，所以抛物线的顶点 O 平分线段 DE.

5. 解：直线 OA 的方程为 $y=kx$，直线 OB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$.

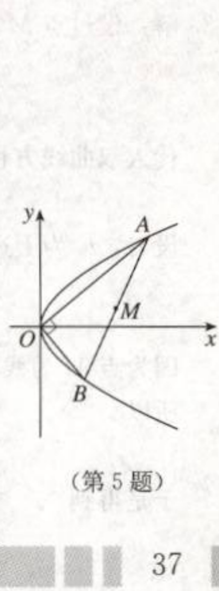
解方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得点 A 的坐标是 $\left(\dfrac{2p}{k^2},\ \dfrac{2p}{k}\right)$；

解方程组 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}x, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得点 B 的坐标是 $(2pk^2,\ -2pk)$.

设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$x=\frac{\dfrac{2p}{k^2}+2pk^2}{2}=\frac{p}{k^2}+pk^2,\ y=\frac{\dfrac{2p}{k}-2pk}{2}=\frac{p}{k}-pk.$$

所以，线段 AB 的中点 M 的轨迹的参数方程是



（第 5 题）

$$\begin{cases}x=\dfrac{p}{k^2}+pk^2,\\ y=\dfrac{p}{k}-pk.\end{cases}\quad(k\text{ 为参数})$$

习题 2.3（第 39 页）

1. 解：(1) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t;\end{cases}$ (t 为参数)

(2) 将直线 l 的参数方程中的 x，y 代入 $x-y-2\sqrt{3}=0$，得 $t=-(10+6\sqrt{3})$．所以，直线 l 和直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M_0 的距离为 $|t|=(10+6\sqrt{3})$；

(3) 将直线 l 的参数方程中的 x，y 代入 $x^2+y^2=16$，得 $t^2+(1+5\sqrt{3})t+10=0$．

设上方程的两根为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=-(1+5\sqrt{3})$，$t_1t_2=10$．

可知 t_1，t_2 均为负值，所以 $|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=1+5\sqrt{3}$．

所以两个交点到点 M_0 的距离的和为 $1+5\sqrt{3}$，积为 10．

2. 解：设过点 $P(2,0)$ 的直线 AB 的倾斜角为 α，由已知可得：

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

所以，直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+\dfrac{3}{5}t,\\ y=\dfrac{4}{5}t.\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

代入 $y^2=2x$，整理得

$$8t^2-15t-50=0.$$

中点 M 的相应参数是

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{15}{16}.$$

所以点 M 的坐标是 $\left(\dfrac{41}{16},\dfrac{3}{4}\right)$．

3. 解：设过点 $M(2,1)$ 的直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha.\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

代入双曲线方程，整理得

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)t^2+2(2\cos\alpha-\sin\alpha)t+2=0.$$

设 t_1，t_2 为上述方程的两个根，则

$$t_1+t_2=\frac{4\cos\alpha-2\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}.$$

因为点 M 为线段 AB 的中点，由 t 的几何意义可知 $t_1+t_2=0$，

所以

$$4\cos\alpha-2\sin\alpha=0.$$

于是得到

$$k=\tan\alpha=2.$$

因此，所求直线的方程为

$$y-1=2(x-2)，即\ 2x-y-3=0.$$

4. 解：直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}（t\ 为参数）$$

代入 $y^2=2px$，得到

$$t^2-2\sqrt{2}(4+p)t+8(4+p)=0.$$

由根与系数的关系，得到

$$t_1+t_2=2\sqrt{2}(4+p)，\ t_1t_2=8(4+p).$$

因为 $|M_1M_2|^2=|AM_1|\cdot|AM_2|$，所以

$$(t_1-t_2)^2=|t_1|\cdot|t_2|=t_1t_2,$$

即 $(t_1+t_2)^2=5t_1t_2$，所以

$$[2\sqrt{2}(4+p)]^2=5\times8(4+p),$$

即 $4+p=5$，即 $p=1$.

习题 2.4（第 42 页）

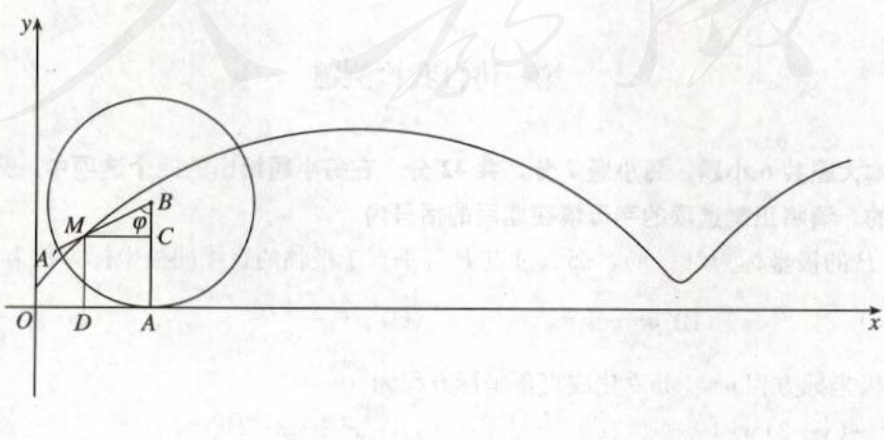
1. 解：因为基圆的直径是 225 cm，所以基圆的半径是 112.5，齿廓线 AB 所在的渐开线的参数方程为

$$\begin{cases}x=112.5(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\ y=112.5(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{cases}（\varphi\ 是参数）$$

2. 解：将 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$ 分别代入 $\begin{cases}x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi,\\ y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi,\end{cases}$ 得到 A，B 两点的坐标分别为 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，$\left(-\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$. 由两点间的距离公式得

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{\pi^2+1}.$$

3. 解：设轮子的圆心为 B，BM 的延长线与直线轨道垂直时的一个垂足 O 为原点，直线轨道为 x 轴建立直角坐标系（如图所示）.



（第 3 题）

设圆滚动使点 M 绕圆心 B 转过 φ 角后点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$\begin{aligned} x&=OD=OA-DA=OA-MC\\ &=a\varphi-b\sin\varphi,\\ y&=DM=AC=AB-CB=a-b\cos\varphi. \end{aligned}$$

所以，点 M 的轨迹方程为

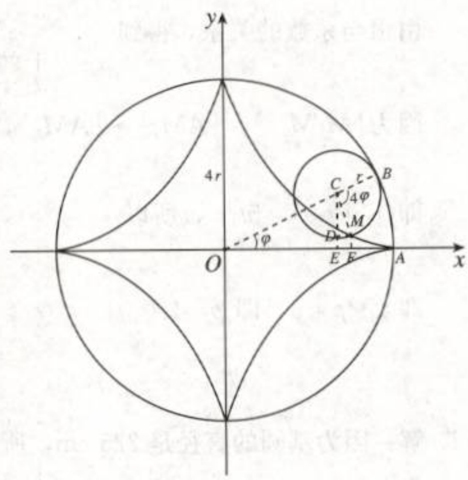
$$\begin{cases} x=a\varphi-b\sin\varphi,\\ y=a-b\cos\varphi. \end{cases}\quad(\varphi\text{ 是参数})$$

4. 解：如图示建立直角坐标系，设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，此时 $\angle BOA=\varphi$.

因为 $OB=4CB$，所以，$\angle BCM=4\varphi$，$\angle MCD=\dfrac{\pi}{2}-3\varphi$.

由于

$$\begin{aligned} x&=OF=OE+EF\\ &=3r\cos\varphi+r\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\varphi\right)\\ &=3r\cos\varphi+r\cos 3\varphi\\ &=3r\cos\varphi+r(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)\\ &=4r\cos^3\varphi,\\ y&=FM=ED=EC-DC\\ &=3r\sin\varphi-r\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\varphi\right)\\ &=3r\sin\varphi-r\sin 3\varphi\\ &=3r\sin\varphi-r(3\sin\varphi-4\sin^3\varphi)\\ &=4r\sin^3\varphi. \end{aligned}$$



(第 4 题)

所以，点 M 的参数方程为

$$\begin{cases} x=4r\cos^3\varphi,\\ y=4r\sin^3\varphi. \end{cases}\quad(\varphi\text{ 是参数})$$

III 自我检测题

第一讲自我检测题

一、选择题：本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项的字母填在题后的括号内.

1. 已知点 P 的极坐标为 $(1,\ \pi)$，那么过点 P 且垂直于极轴的直线的极坐标方程为（　　）.

(A) $\rho=1$　　(B) $\rho=\cos\theta$　　(C) $\rho=-\dfrac{1}{\cos\theta}$　　(D) $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$

2. 曲线的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化成直角坐标方程为（　　）.

(A) $x^2+(y+2)^2=4$　　(B) $x^2+(y-2)^2=4$

(C) $(x-2)^2+y^2=4$　　(D) $(x+2)^2+y^2=4$

3. 已知点 A，B 的极坐标分别为$\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$和$\left(-3,\ \frac{\pi}{12}\right)$，则 A 和 B 之间的距离等于（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2}$　(C) $\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

4. 在同一坐标系中，将曲线 $y=2\sin 3x$ 变为曲线 $y=\sin x$ 的伸缩变换是（　　）.

(A) $\begin{cases}x=3x', \\ y=\frac{1}{2}y'\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x'=3x, \\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x=3x', \\ y=2y'\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x'=3x, \\ y'=2y\end{cases}$

5. 柱坐标$\left(2,\ \frac{2\pi}{3},\ 1\right)$对应的点的直角坐标是（　　）.

(A) $(-1,\ \sqrt{3},\ 1)$　(B) $(1,\ -\sqrt{3},\ 1)$　(C) $(\sqrt{3},\ -1,\ 1)$　(D) $(-\sqrt{3},\ 1,\ 1)$

6. 极坐标系内曲线 $\rho=2\cos\theta$ 上的动点 P 与定点 $Q\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$的最近距离等于（　　）.

(A) $\sqrt{2}-1$　(B) $\sqrt{5}-1$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

7. 在极坐标系中，以$\left(\frac{a}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$为圆心，$\frac{a}{2}$为半径的圆的方程是__________.

8. 若直线的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则极点到该直线的距离是__________.

9. 在极坐标中，过点$\left(1,\ \frac{\pi}{8}\right)$和点$\left(\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{8}\right)$的直线的倾斜角是__________.

10. 球坐标$\left(2,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$对应的点的直角坐标是__________.

三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 17 分，共 34 分. 解答应写出文字说明或演算步骤.

11. 通过平面直角坐标系中的平移变换与伸缩变换，可以把椭圆$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ 变为中心在原点的单位圆，求上述平移变换与伸缩变换，以及这两种变换的合成的变换.

12. 在平面直角坐标系中，以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 设椭圆的长轴长为 10，中心为(3, 0)，一个焦点在直角坐标原点.

(1) 求椭圆的直角坐标方程，并化为极坐标方程；

(2) 当椭圆的过直角坐标原点的弦的长度为$\frac{640}{91}$时，求弦所在直线的直角坐标方程.

参考解答

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	B	C	B	A	A

二、填空题：

7. $\rho=a\sin\theta$.　8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　9. $\frac{5\pi}{8}$.　10. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}\right)$.

三、解答题：

11. 先通过平移变换$\begin{cases}x'=x+1,\\y'=y-1\end{cases}$把椭圆$\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$变为椭圆$\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$，再通过伸缩变换$\begin{cases}x''=\dfrac{x'}{3},\\y''=\dfrac{y'}{2}\end{cases}$把椭圆$\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$变为单位圆$x''^2+y''^2=1$. 由上述两种变换合成的变换是$\begin{cases}x''=\dfrac{1}{3}(x+1),\\y''=\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$

12. (1) 由已知，得到$a=5$，$c=3$，故$b=\sqrt{a^2-c^2}=4$. 所以，椭圆的直角坐标方程为

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

由于$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入上式得到

$$\frac{(\rho\cos\theta-3)^2}{25}+\frac{(\rho\sin\theta)^2}{16}=1,$$

即
$$25\rho^2=(16+3\rho\cos\theta)^2,$$
即
$$5\rho=16+3\rho\cos\theta,$$

所以，椭圆的极坐标方程为$\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\theta}$.

(2) 设过直角坐标原点的弦的倾斜角为θ，弦的两端分别为$P_1(\rho_1,\ \theta)$，$P_2(\rho_2,\ \theta+\pi)$，则有

$$\rho_1=\frac{16}{5-3\cos\theta},\ \rho_2=\frac{16}{5+3\cos\theta}.$$

由于$\rho_1+\rho_2=\dfrac{640}{91}$，所以，$\dfrac{16}{5-3\cos\theta}+\dfrac{16}{5+3\cos\theta}=\dfrac{640}{91}$，

即
$$\frac{1}{25-9\cos^2\theta}=\frac{4}{91}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\text{或}\theta=\frac{2\pi}{3}.$$

所以，所求直线的直角坐标方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x$.

第二讲自我检测题

一、选择题：本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项的字母填在题后的括号内.

1. 曲线$x=1+t^2$，$y=4t-3$与x轴交点的直角坐标是（　　）.

(A) (1，4)　　(B) $\left(\dfrac{25}{16},\ 0\right)$　　(C) (1，−3)　　(D) $\left(\pm\dfrac{25}{16},\ 0\right)$

2. 直线$\begin{cases}x=2+3t,\\y=-1+t\end{cases}$上对应$t=0$，$t=1$两点间的距离是（　　）.

(A) 1　　(B) $\sqrt{10}$　　(C) 10　　(D) $2\sqrt{2}$

3. 直线$\begin{cases}x=3+t\sin 20^\circ,\\y=-t\cos 20^\circ\end{cases}$（$t$为参数）的倾斜角是（　　）.

(A) 20°　　(B) 70°　　(C) 110°　　(D) 160°

4. 椭圆$\begin{cases}x=3+3\cos\varphi,\\ y=-1+5\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$是参数）的两个焦点坐标是（　　）.

(A) $(-3,\ 5)$，$(-3,\ -3)$　　(B) $(3,\ 3)$，$(3,\ -5)$

(C) $(1,\ 1)$，$(-7,\ 1)$　　(D) $(7,\ -1)$，$(-1,\ -1)$

5. 直线$\begin{cases}x=1+2t,\\ y=2+t\end{cases}$（$t$是参数）被圆$x^2+y^2=9$截得的弦长等于（　　）.

(A) $\frac{12}{5}$　　(B) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$　　(C) $\frac{9}{5}\sqrt{2}$　　(D) $\frac{9}{5}\sqrt{10}$

6. 在方程$\begin{cases}x=\sin\theta,\\ y=\cos 2\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）所表示的曲线上的点是（　　）.

(A) $(2,\ -7)$　　(B) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　　(C) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$　　(D) $(1,\ 0)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分．把答案填在题中的横线上.

7. 直线$x+y=1$的一个参数方程是__________.

8. 椭圆$\begin{cases}x=5+3\cos\theta,\\ y=-2+4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）的离心率是__________.

9. 将参数方程$\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）转化为直角坐标方程是__________.

该曲线上的点与定点$A(-1,\ -1)$距离的最小值是__________.

10. O是坐标原点，P是椭圆$\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$是参数）上离心角为$-\frac{\pi}{6}$所对应的点，那么直线$OP$的倾角的正切值是__________.

三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 17 分，共 34 分．解答应写出文字说明或演算步骤.

11. 已知直线l经过点$P(1,\ 1)$，倾斜角$\alpha=\frac{\pi}{6}$.

(1) 写出直线l的参数方程；

(2) 设l与圆$x^2+y^2=4$相交于两点A、B，求点P到A，B两点的距离之积.

12. 圆的直径AB上有两点C，D，且$|AB|=10$，$|AC|=|BD|=4$，P为圆上一点，求$|PC|+|PD|$的最大值.

参考解答

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	B	C	B	B	C

二、填空题：

7. $\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$（$t$是参数）　8. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.　9. $(x-1)^2+y^2=1$；$\sqrt{5}-1$.　10. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

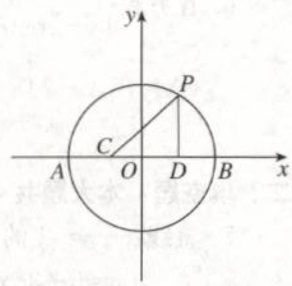
三、解答题：

11. 解：(1) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=1+\dfrac{1}{2}t; \end{cases}$ (t 是参数)

(2) 因为点 A，B 都在直线 l 上，所以可设它们对应的参数分别为 t_1，t_2，则点 A，B 的坐标分别为

$$A\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}t_1,\ 1+\frac{1}{2}t_1\right),\ B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}t_2,\ 1+\frac{1}{2}t_2\right).$$

以直线 l 的参数方程代入圆的方程 $x^2+y^2=4$ 整理得到



$$t^2+(\sqrt{3}+1)t-2=0. \qquad ①$$

因为 t_1，t_2 是方程①的解，从而 $t_1t_2=-2$.

所以，

$$|PA|\cdot|PB|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}t_1\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_2\right)^2+\left(\frac{1}{2}t_2\right)^2}$$
$$=|t_1t_2|=2.$$

12. 解：如图建立直角坐标系．因为 $|AB|=10$，所以圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=5\cos\theta, \\ y=5\sin\theta. \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$$

因为 $|AC|=|BD|=4$，所以 C，D 的坐标为

$$C(-1,\ 0),\ D(1,\ 0).$$

因为点 P 在圆上，所以可设点 P 的坐标为

$$P(5\cos\theta,\ 5\sin\theta).$$

所以，

$$|PC|+|PD|=\sqrt{(5\cos\theta+1)^2+(5\sin\theta)^2}+\sqrt{(5\cos\theta-1)^2+(5\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{26+10\cos\theta}+\sqrt{26-10\cos\theta}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{26+10\cos\theta}+\sqrt{26-10\cos\theta})^2}=\sqrt{52+2\sqrt{26^2-100\cos^2\theta}},$$

当 $\cos\theta=0$ 时，$(|PC|+|PD|)_{\max}=\sqrt{52+52}=2\sqrt{26}$.

所以，$|PC|+|PD|$ 的最大值为 $2\sqrt{26}$.

IV 拓展资源

一、曲线的极坐标方程的定义

在直角坐标系中，曲线方程的概念建立在下列对应关系上：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都在曲线上.

但在广义极坐标系中，平面内的任意一点可有 $(\rho,\ \theta+2n\pi)$，$(-\rho,\ \theta+(2n+1)\pi)$（其中 n 为整数）等无数对有序实数对作为它的极坐标，因此以上对应关系的含义也就有所不同．有时曲线上的点的极

坐标都是它的方程的解；有时曲线上的点的极坐标不一定都是它的方程的解．例如，点 $P\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$适合等速螺线方程 $\rho=\theta$，点 P 的两组坐标$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$，$\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi\right)$（$n$ 为整数）中，除$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$外都不适合方程 $\rho=\theta$. 因此在广义极坐标系中曲线方程的定义与直角坐标系中相应的定义是有所不同的.

如果曲线 C 上的点与某个方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 的解建立了如下的对应关系：

(1) 曲线 C 上任一点的坐标中至少有一个的极坐标满足方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$；

(2) 坐标满足方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 的点都在曲线 C 上，那么方程 $\varphi(\rho,\ \theta)=0$ 叫做曲线 C 的方程.

用极坐标与直角坐标来表示点和曲线时，两者的特点是：

(1) 在平面直角坐标系内，点与有序实数对$(x,\ y)$一一对应；在极坐标系内，虽然一个有序实数对$(\rho,\ \theta)$只与一个点对应，但一个点却可与无限多个有序实数对对应，所以点与有序实数对没有一一对应关系.

(2) 在直角坐标系内，曲线和它的方程是一一对应的（可互化的方程认为是同一方程）；在极坐标系内，虽然一个方程只能与一条曲线对应，但一条曲线却可与多个方程对应.

例如，方程 $\rho=1$ 和 $\rho^2=1$ 表示同一个圆；

$\theta=\alpha$ 和 $\theta=\alpha+n\pi$（n 为非零整数，ρ 可取负值）表示同一条直线，但它们之间不可互化.

所以曲线和它的极坐标方程不是一一对应的.

(3) 在直角坐标系内，曲线上的每一点的坐标一定适合它的方程；在极坐标系内，曲线上一点的所有坐标不一定都适合方程.

(4) 在直角坐标系中，求两曲线的公共点，只要求出它们的方程的公共解就可以了；在极坐标中，一般来说，通过解极坐标方程组也能得到两曲线的公共点，但有时方程组的公共解不能给出两曲线的全部交点.

例如，求等速螺线 $\rho=\theta$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$的交点的极坐标（ρ 可取负值）. 解方程组

$$\begin{cases}\rho=\theta,\\ \theta=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$$

只能得到一个交点$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$. 但实际上它们的交点有无数个$\left(\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \frac{\pi}{4}+n\pi\right)$（$n$ 为整数）. 它们可以通过解方程组

$$\begin{cases}\rho=\theta,\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi\end{cases}$$

而得到. 另外极点也是它们的交点. 因为极点的坐标为$(0,\ \theta)$（其中 θ 可取任何实数），当极点的极坐标取$(0,\ 0)$时，它满足方程 $\rho=\theta$；当极点的极坐标取$\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$时，满足方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$，所以极点也是它们的交点.

二、关于直角坐标与极坐标互化公式的证明

直角坐标与极坐标的互化公式

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\tag{1}$$

的证明应分三种情形来考虑：

(1) 当 $\rho>0$ 时，即课本中所给出的证明；

(2) 当 $\rho<0$ 时，$-\rho>0$，所以取点 $M(\rho,\ \theta)$ 关于极点的对称点 $M'(-\rho,\ \theta)$，于是点 M' 的直角坐标为 $(-x,\ -y)$，由(1)知

$$\begin{cases}-x=-\rho\cos\theta,\\ -y=-\rho\sin\theta,\end{cases}$$

即互化公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 成立.

(3) $\rho=0$，此时 M 为极点，θ 可取任意实数值，而原点的坐标为 $(0,\ 0)$. 又由于 $|\cos\theta|\leqslant 1$，$|\sin\theta|\leqslant 1$，所以有

$$\begin{cases}0=0\cdot\cos\theta,\\ 0=0\cdot\sin\theta,\end{cases}$$

即互化公式仍成立.

三、极坐标系中曲线的对称性

(1) 点的对称

像直角坐标系一样，我们可以根据点的坐标来判定它关于极轴($\theta=0$ 或 $\theta=\pi$)、极垂线（过极点且垂直于极轴的直线叫做极垂线，它的方程是 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$）或极点的对称点的坐标.

设 $P(\rho,\ \theta)$ 是平面内的一点，点 P 关于极轴的对称点为 $(\rho,\ -\theta)$ 或 $(-\rho,\ \pi-\theta)$；关于极垂线的对称点为 $(\rho,\ \pi-\theta)$ 或 $(-\rho,\ -\theta)$；关于极点的对称点为 $(\rho,\ \pi+\theta)$ 或 $(-\rho,\ \theta)$.（略去各点的一般表示式）

(2) 曲线对称性的判别

设方程 $\phi(\rho,\ \theta)=0$ 确定曲线 C，根据点关于极轴、极垂线、极点对称的条件，可以得出关于判定曲线 C 的对称性的充分条件.

条　件	曲线的对称性
以 $-\theta$ 代 θ（或以 $-\rho$ 代 ρ，同时以 $\pi-\theta$ 代 θ）时，曲线的方程不变	曲线关于极轴对称
以 $-\rho$ 代 ρ，同时以 $-\theta$ 代 θ，（或以 $\pi-\theta$ 代 θ）时，曲线的方程不变	曲线关于极垂线对称
以 $-\rho$ 代 ρ（或以 $\pi+\theta$ 代 θ）时，曲线的方程不变	曲线关于极点对称

下面以曲线 C 关于极轴对称为例，给出曲线 C 对称的充要条件：

设点 $P(\rho,\ \theta)$ 为曲线 C 上任一点，那么它关于极轴的对称点 P_1 的极坐标为 $(\rho,\ 2n\pi-\theta)$，$(-\rho,(2n+1)\pi-\theta)$（n 为整数）. 若其中至少存在一个，满足曲线 C 的方程，则曲线 C 就关于极轴对称.

像直角坐标系中曲线方程的对称性一样，三种对称的条件，只要具备两种，则另一种也必然具备.

四、由极坐标方程讨论曲线的性质

像直角坐标系中一样，可根据极坐标方程探讨曲线的一些性质. 通常讨论的内容如下：

1. 范围

如果 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 时，ρ 才有对应的实数值，且 $\beta-\alpha<\pi$，那么曲线在直线 $\theta=\alpha$ 到直线 $\theta=\beta$ 之间.

2. 与直线 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的交点（仅讨论 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的情形）

一般可将 $\theta=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\pi$，$\theta=\frac{3\pi}{2}$ 分别代入方程，求出 ρ 的值，便得交点的坐标. 再考察 ρ 是否有可能等于 0，确定曲线是否过极点.

3. 对称性

前面已经讨论了曲线关于极轴、极垂线或极点对称的问题.

4. 周期性

在含有三角函数的极坐标方程中，可讨论曲线变化的周期性.

例：画出曲线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$ 的图形.

解：先讨论曲线的性质：

(1) 范围

因为 $\cos 2\theta\geqslant 0$ 时，ρ 才有实数值与 θ 对应，所以

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant 2\theta\leqslant\frac{\pi}{2}，即-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},$$

所以，曲线在由直线 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 到直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的区域内.

因为 $|\cos 2\theta|\leqslant 1$，所以 $|\rho|\leqslant a$ $(a>0)$，即曲线在 $\rho=a$ 的圆内.

(2) 与直线 $\theta=0$ 的交点

因为当 $\theta=0$ 时，$\rho=\pm a$，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $\rho=0$，所以曲线过极点，与直线 $\theta=0$ 的另两个交点是 $(a,0)$，$(-a,0)$.

(3) 对称性

因为 $a^2\cos 2(-\theta)=a^2\cos 2\theta=\rho^2$，所以曲线关于极轴对称；

因为 $(-\rho)^2=\rho^2=a^2\cos 2\theta$，所以曲线关于极点对称.

由上述对称性，可知曲线关于极垂线对称.

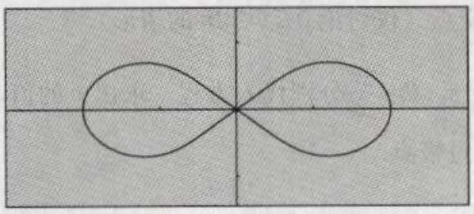
(4) 周期性

$\cos 2\theta$ 以 π 为周期，故只需考虑 θ 从 0 变到 π 时相应的图形. θ 继续变化，重复得到这个图形.

θ	2θ	$\cos 2\theta$	$a^2\cos 2\theta$	ρ
0	0	1	a^2	a
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$	$0.93a$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a^2$	$0.71a$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0

根据上述讨论，可先画出当 θ 从 $0\sim\frac{\pi}{4}$ 范围内变化时，ρ 取正值的相应图形，然后根据对称性画出整个图形.

(5) 以 $a=2$ 为例，曲线的图形如下：



五、关于曲线的参数方程

曲线的参数方程可定义如下：

在平面上取定直线坐标系，设有曲线 C 及参数方程

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中参数 t 在$[a, b]$上变化（这里闭区间也可以换成其他区间形式），$f(t)$，$g(t)$都是在$[a, b]$上的单值连续函数. 如果曲线 C 上的点与参数方程(1)的解建立了如下对应关系：

① 对于每一个适合条件 $a\leqslant t_0\leqslant b$ 的 t_0，通过参数方程(1)所确定的点 $M_0(f(t_0), g(t_0))$在曲线 C 上；

② 对于曲线 C 上任一点 $M_1(x_1, y_1)$，都至少存在一个 $t_1(a\leqslant t_1\leqslant b)$，有$\begin{cases} x_1=f(t_1), \\ y_1=g(t_1), \end{cases}$ 则(1)式叫做曲线 C 在直角坐标系中的参数方程.

一般来说，如果能消去曲线的参数方程中的参数 t，那么就可得到曲线的普通方程. 但要注意，消去 t 的过程要求不减少也不增加曲线上的点，即要求参数方程和消去 t 后得到的普通方程是等价的.

例 1 化曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=t^2, & (2) \\ y=t^6 & (3) \end{cases}$$

（其中参数 $t\in\mathbf{R}$）为普通方程.

解：由(2)两边立方，得

$$x^3=t^6. \tag{4}$$

将(4)代入(3)，得

$$y=x^3. \tag{5}$$

但是普通方程(5)与所给参数方程并不等价，因为方程(5)所表示的曲线方程上的点增加了. 在方程(5)中加上限制条件 $x\geqslant 0$ 后，它才与所给的参数方程等价.

化曲线的普通方程为参数方程，一般先选定函数关系 $x=f(t)$(或 $y=g(t)$)，然后代入普通方程求出函数关系 $y=g(t)$(或 $x=f(t)$). 在选定 $f(t)$时，必须注意它的值域与普通方程中 x 的允许范围相一致；对求出的 $g(t)$，也应该使其值域与普通方程中 y 的允许范围相一致.

例 2 化椭圆方程

$$17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$$

为参数方程.

解：为确定 x 的变化范围，首先解出 y，得到

$$y=2(x-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-(x-1)^2}.$$

应有$(x-1)^2\leqslant 4$，即$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$，于是可令$\frac{x-1}{2}=\cos\theta$，所以

$$x=1+2\cos\theta.$$

将 $x=1+2\cos\theta$ 代入普通方程，可解得

$$y=4\cos\theta\pm\sin\theta.$$

因为参数方程

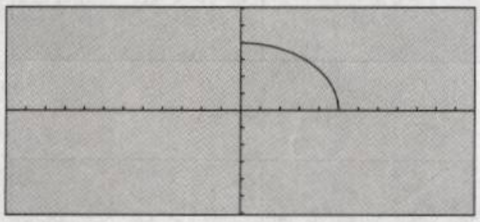
$$\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=4\cos\theta+\sin\theta\end{cases}\text{和}\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=4\cos\theta-\sin\theta\end{cases}$$

是等价的，所以其中任一个都可作为所给椭圆的参数方程.

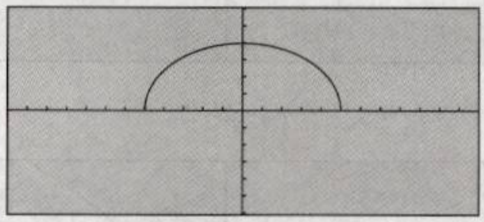
六、利用信息技术研究曲线参数方程中参数的意义

1. 参数 φ 的取值与椭圆上的点的对应关系

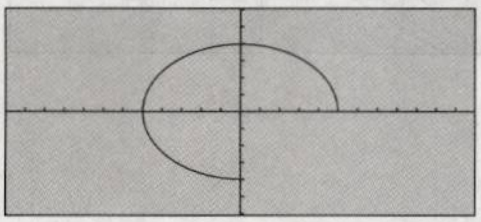
下面以椭圆参数方程 $\begin{cases}x=5\cos\varphi,\\ y=4\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 是参数）为例说明.



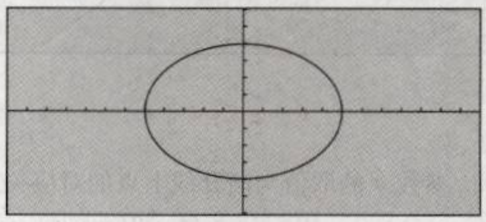
$\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$



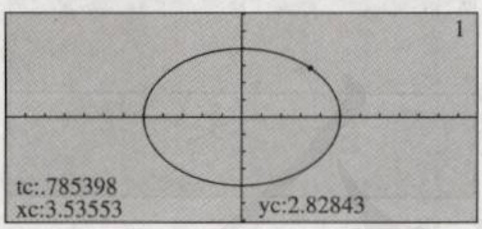
$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$



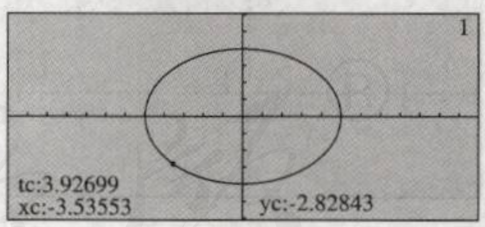
$\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\right)$



$(0\leqslant\varphi<2\pi)$



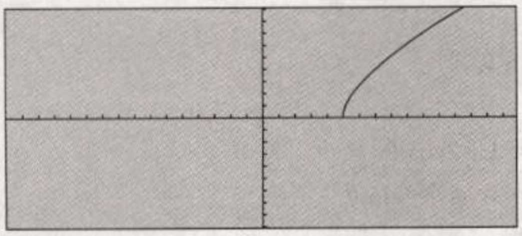
$\left(\varphi=t_C=\dfrac{\pi}{4}\right)$



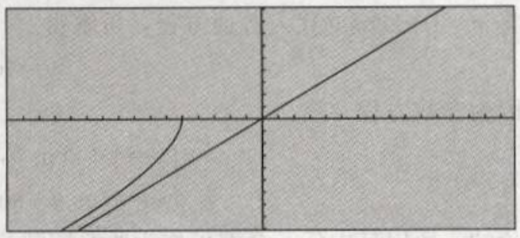
$\left(\varphi=t_C=\dfrac{5\pi}{4}\right)$

2. 参数 φ 的取值与双曲线上的点的对应关系

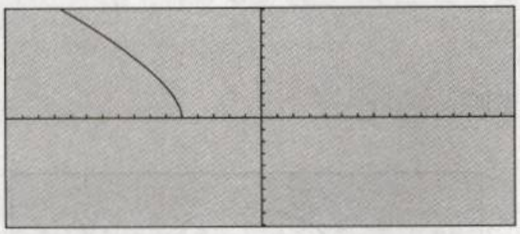
下面以双曲线参数方程 $\begin{cases}x=5\sec\varphi,\\ y=4\tan\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 是参数）为例说明.



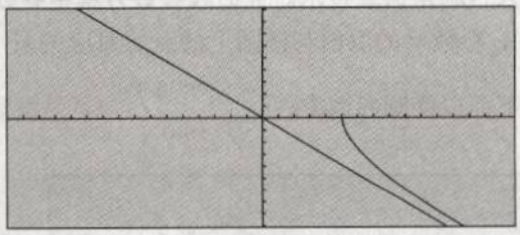
$(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$



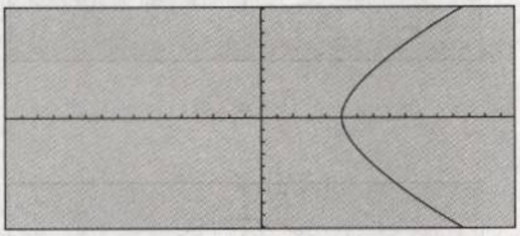
$(\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi)$



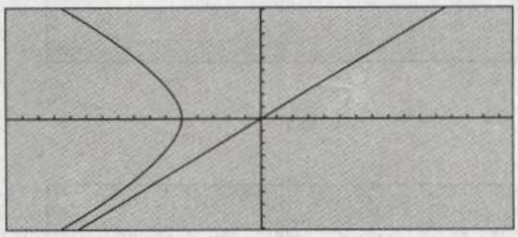
$(\pi\leqslant\varphi<\frac{3\pi}{2})$



$(\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi)$



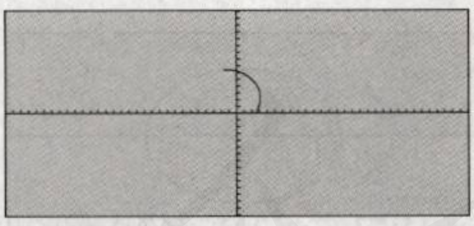
$(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$



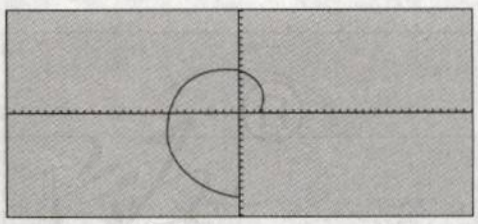
$(\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2})$

3. 参数 φ 的取值与渐开线上点的对应关系

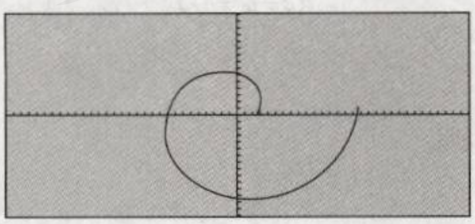
下面以渐开线参数方程$\begin{cases}x=2(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\ y=2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$（$\varphi$ 是参数）为例说明.



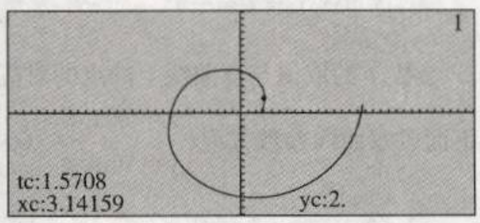
$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$



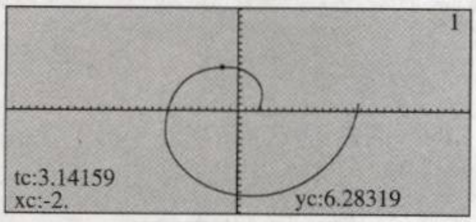
$(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$



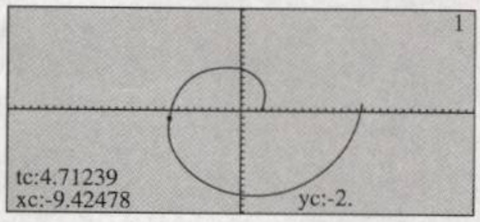
$(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{2})$



$(\varphi=t_C=\frac{\pi}{2})$



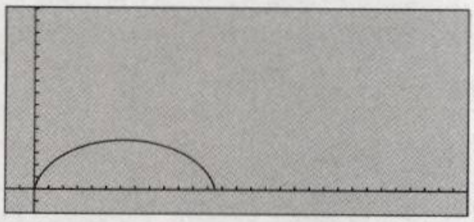
$(\varphi=t_C=\pi)$



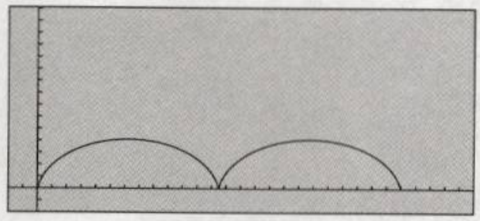
$(\varphi=t_C=\frac{3\pi}{2})$

4. 参数 φ 的取值与摆线上点的对应关系

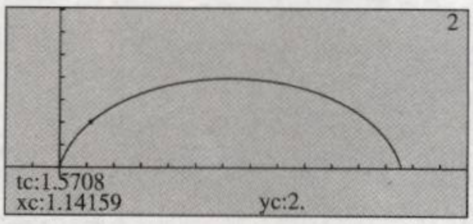
下面以摆线参数方程 $\begin{cases} x=2(\varphi-\sin\varphi), \\ y=2(1-\cos\varphi) \end{cases}$ （φ 是参数）为例说明.



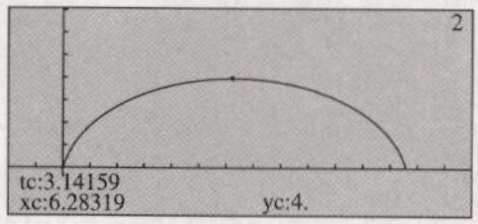
$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$



$(0\leqslant\varphi\leqslant 4\pi)$



$(\varphi=t_C=\frac{\pi}{2})$



$(\varphi=t_C=\pi)$