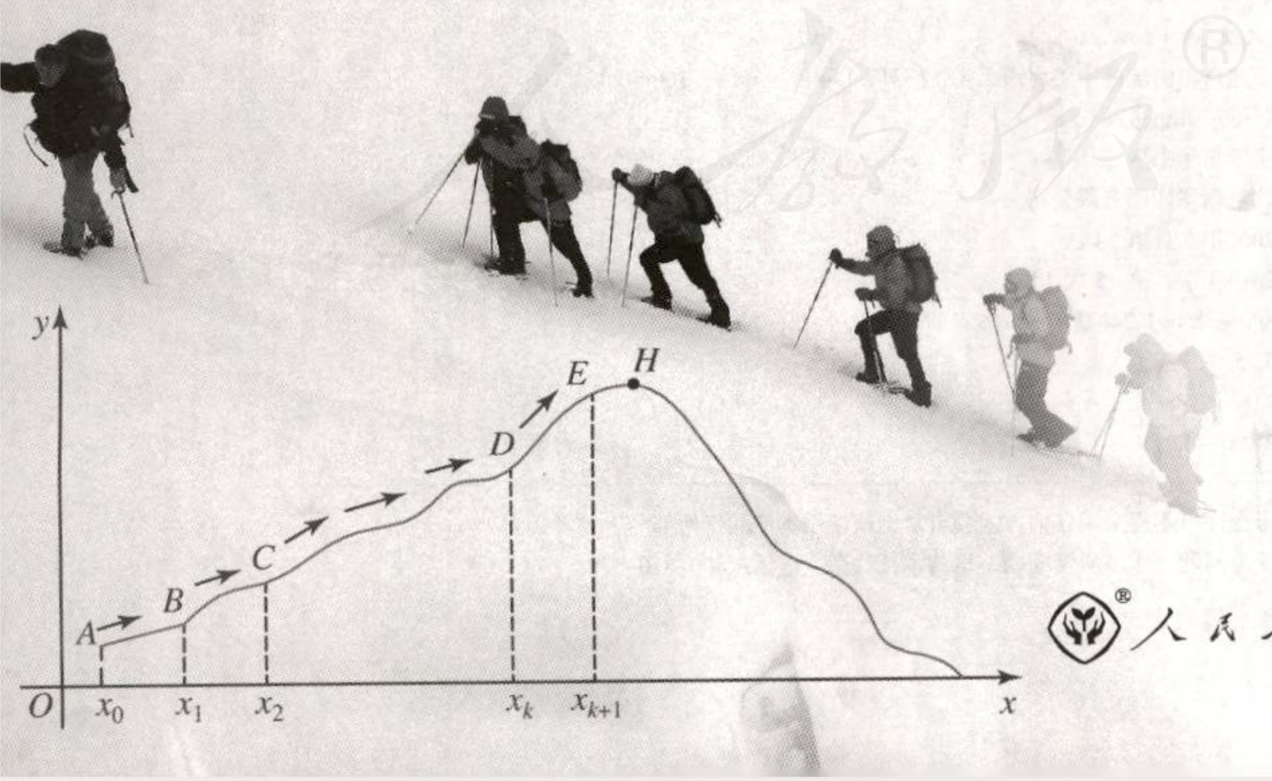
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编：高存明　韩际清
本册主编：罗声雄　杨长智
审　　定：李建才
编　　者：杨长智　张　雷　王　强　祝广文　孙光泽
张成刚　刘　莉　谷运英　刘　坦　韩际清
责任编辑：王旭刚
版式设计：王　喆
封面设计：李宏庆

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修2-2（B版）教师教学用书／人民教育出版社．课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著．—3版．—北京：人民教育出版社，2007.5（2019.7重印）
ISBN 978-7-107-19137-4

Ⅰ．①普…　Ⅱ．①人…　②课…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第031312号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修2-2　B版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京新华印刷有限公司
版　　次　2007年5月第3版
印　　次　2019年7月第15次印刷
开　　本　890毫米×1 240毫米　1/16
印　　张　5.25
字　　数　118千字
定　　价　21.90元

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书·数学选修2-2（B版）》的使用编写的教师教学用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“课程标准”中规定的教学任务．

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务．

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价．

教材的课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求．考虑到教学内容要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整．教材编写时，把练习、习题分为A、B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求．以满足条件较好学校的教学需要．

在教材分析中，首先分析内容结构、作用和地位，指出本节知识的重点和难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议．

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考．

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，以检查学生学习本章内容的效果．

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修2-2中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材．

一、导数及其应用

这一章编写时的主要想法是，充分借助于直观研究导数的性质和应用．全章自始至终通过设置的“爬山情景”，让学生体会“以直代曲”及“化曲为直”重要的微积分思想．导数可近似的看成“差商”和“微小直角三角形中两直角边的比”．尽量让学生了解导数的直观内涵．同文科必选的这一内容相比，理科内容加强了求导运算及导数在研究函数中的应用．

二、推理与证明

推理与证明设一章，在我国高中教材中还是首次．没有实际的教学经验供参考．但推理与证明已是学生熟悉的词语，因此，在编写时主要通过实例引起学生对“推理”的兴趣，并引导学生理解各种推理的作用．能够运用合情推理去探索、猜测和归纳出一些数学结论，并能证明结论的正确性．在编写中，

重点是通过分析一些定理的证明过程，总结并让学生掌握数学证明的一些基本方法.

三、数系的扩充与复数

这一章，由于教学时间只有4课时，编写时，主要是通过方程的求根，让学生了解引进复数的意义和作用，了解数学中的内部矛盾如何推动数系的扩充，了解数学中理性思维的重要性.

在教学中一定要贯彻“温故而知新”的原则. 基础不好难以继续学习，这是数学学习的重要特点，在教材编写中，主要知识点都采取循环方式编写，以达到牢固掌握所学的数学知识的目的.

数形结合是本套教材的重要特色. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直观，形少数时难入微. 形数结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离!”

这段分析精辟地阐述了数形之间的密切关系和相互作用. 教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

本册教师教学用书，得到山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室、山东省实验中学和山东师大附中等单位的大力协助，在此深表谢意.

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
2005年10月

目录

第三章 数系的扩充与复数

第一章

导数及其应用

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数.

2. 理解导数的概念及符号记法，体会导数的思想及其内涵.

3. 通过函数图象，直观地理解导数的几何意义，并能应用其解决简单的单调问题和极值问题.

4. 能根据导数定义求函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数. 能利用公式求简单函数的导数及简单复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

5. 利用导数的知识解决一些最优化问题.

6. 通过实例，从问题情境中了解定积分的实际背景，借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念，直观了解微积分基本定理的含义.

（二）过程与方法目标

1. 通过实例，体会化曲为直的极限思想.

2. 利用导数定义推导简单函数的导数公式，类推一般多项式函数的导数公式，体会由特殊到一般的思想.

3. 利用导数，解决实际问题，体会建模思想.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过具体实例，认识导数的工具性及其与实际问题的联系，感受和体会导数在解决实际问题中

的作用，培养学习兴趣.

2. 感受导数在解题中的作用，自觉形成将数学理论与实际问题相结合的思想.

3. 在解题过程中，逐步养成扎实严格、实事求是的科学态度.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 要让学生了解微积分是研究各种科学的工具，是学生终生学习数学的重要基础. 在中学数学中，微积分是研究以下初等函数和几何问题最有效的工具：平均值、单调性、极值、最值、求长度、面积、体积等，树立科学的世界观.

2. 通过直观说理学习微积分，通过平均速度和瞬时速度，平均变化率和瞬时变化率，割线与切线斜率的计算来理解导数的概念.

3. 通过数值的近似计算理解微积分思想.

4. 通过无穷小的代数运算理解导数的意义. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$，通过无穷小直角三角形的边角关系理解导数的几何意义.

5. 把积分作为导数的应用来学习. 教材向学生重点地讲解定积分的基本概念和微积分基本定理.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章内容分为两部分：一是导数的概念、运算及其应用；二是定积分的概念和微积分基本定理.

本章先让学生通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念及其几何意义，然后通过定义求几个简单函数的导数，从而得出导数公式及四则运算法则，最后利用导数的知识解决实际问题. 本章的第二部分，通过实例了解定积分的实际背景，了解定积分概念和微积分基本定理的含义.

2. 地位与作用

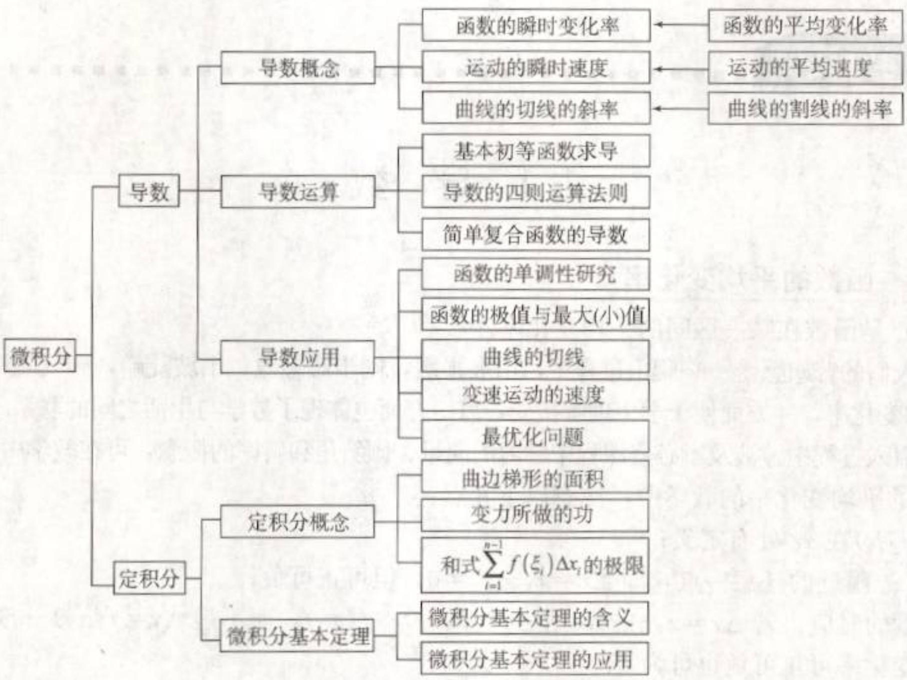
微积分的创立是数学发展中的里程碑. 它的发展和广泛应用，开创了近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，具有丰富的实际背景和广泛的应用.

3. 重点和难点

本章的重点是导数的运算和利用导数解决实际问题.

本章的难点是导数概念和定积分概念的理解.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 24 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　导数

　　1.1.1　函数的平均变化率　　2 课时

　　1.1.2　瞬时速度与导数　　2 课时

　　1.1.3　导数的几何意义　　2 课时

1.2　导数的运算

　　1.2.1　常数函数与幂函数的导数　　2 课时

　　1.2.2　导数公式表及数学软件的应用　　1 课时

　　1.2.3　导数的四则运算法则　　2 课时

1.3　导数的应用

　　1.3.1　利用导数判断函数的单调性　　2 课时

　　1.3.2　利用导数研究函数的极值　　2 课时

　　1.3.3　导数的实际应用　　3 课时

1.4　定积分与微积分基本定理

　　1.4.1　曲边梯形面积与定积分　　2 课时

　　1.4.2　微积分基本定理　　2 课时

本章小结　　2 课时

（四）教法与学法建议

1.1 导 数

1.1.1 函数的平均变化率

1. 本节重点是函数在某一区间的平均变化率.

2. 教材从人们的普遍感受——爬山过程中，山坡平缓，则步履轻盈；山坡陡峭，则气喘吁吁——出发，引入函数的平均变化率，一方面便于学生理解接受，另一方面也体现了数学与生活之间的联系.

3. 在定义引入过程中，涉及了必修课程中学习的向量、倾斜角和斜率的概念，可在教学中适当复习.

4. 在函数的平均变化率的教学中，注意以下几点：

(1) 函数 $f(x)$在 x_0 处有定义；

(2) x_1 是 x_0 附近的任意一点，即 $\Delta x=x_1-x_0\neq 0$，但可正可负；

(3) 改变量的对应：若 $\Delta x=x_1-x_0$，则 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$，而不是 $\Delta y=f(x_0)-f(x_1)$；

(4) 平均变化率可正可负也可为零.

5. 在理解函数的平均变化率定义的基础上，可由学生独立完成例 1，教师指导分析：(1) Δx 与 x_0 对平均变化率的影响；(2) 平均变化率的绝对值越大，曲线“越陡”——递增或递减的幅度越大. 例 2 可由教师引导学生完成. 另外可以适当补充练习，如：求函数 $f(x)=\sqrt{x}$在 $x=x_0(x_0>0)$附近的平均变化率.

1.1.2 瞬时速度与导数

1. 本节的重点是瞬时变化率、导数的概念，难点是对导数的理解及利用导数解决实际问题.

2. 复习函数的平均变化率，明确物体做变速运动时，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的过程中，物体运动的平均速度实质就是函数 $s=f(t)$在 $t=t_0$ 处的平均变化率.

3. 教材通过具体实例和给定时间变化量 Δt 的具体值分析了瞬时速度（或瞬时变化率）与平均速度（或平均变化率）的关系：瞬时速度是当 Δt 趋近于 0 时，平均速度所趋近的常数值. 这一分析过程所体现的无限逼近思想，又称极限思想.

4. 函数 $f(x)$在 x_0 处的瞬时变化率，通常称作函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 即

“$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$”或“$\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)$”.

5. 讲解导数概念时，需要讲清以下两点：

(1)“$\Delta x\to 0$”的意义：Δx 与 0 的距离要多近有多近，即 $|\Delta x-0|$ 可以小于给定的任意小的正数，但始终 $\Delta x\neq 0$；

(2) 当 $\Delta x\to 0$ 时，存在一个常数与$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限地接近.

6. $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点 x 都是可导的，具体是指：任给 $x_0\in(a, b)$，总有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$. 从而对开区间 (a, b) 内的每一个值 x_0，都有唯一的函数值 $f'(x_0)$

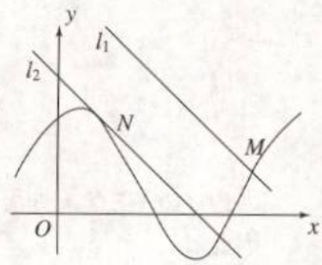
与 x_0 对应，所以在开区间（a，b）内，$f'(x)$ 构成一个新函数，此新函数称为导函数，通常简称导数，记作 $f'(x)$ 或 y'_x. 注意将其与 $f(x)$ 在某点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 区分开来.

7. 教材的两个例题，教师要帮助学生分析题意. 对于例 1，学生一般直接用物理知识解答，为应用新知识，可引导学生用导数求解.

1.1.3 导数的几何意义

1. 本节的重点和难点是导数的几何意义：曲线 $y=f(x)$ 在点（x_0，$f(x_0)$）的切线斜率等于函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

2. 在初中学习过圆的切线：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫圆的切线，唯一的公共点叫做切点.



圆是一种特殊的曲线，能否将圆的切线推广为一般曲线的切线：直线与曲线有唯一公共点时，这条直线叫做曲线过该点的切线. 显然这种推广是不妥当的.

如图所示的曲线，直线 l_1 虽然与曲线有唯一公共点 M，但不能说直线 l_1 与曲线相切；而直线 l_2 尽管与曲线有不止一个公共点，我们还是说直线 l_2 是这条曲线在点 N 处的切线. 因此，对于一般曲线，必须重新寻求曲线切线的定义.

3. 曲线 $y=f(x)$ 的割线 AB 的斜率是函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0，x_0+\Delta x]$ 的平均变化率，当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的最终位置为直线 AD 即曲线过点 A 的切线. 即用割线的极限位置上的直线来定义切线（有条件的学校，可借助多媒体动态演示上述变化）.

4. 在理解导数的几何意义的基础上，会求简单曲线在某点的切线斜率及切线方程.

1.2 导数的运算

1.2.1 常数函数与幂函数的导数

1. 本节重点是常数函数、幂函数的导数及其应用，难点是由常见幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$ 的求导公式发现规律，从而得到幂函数的求导公式.

2. 函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数可由学生依据定义独立推出，函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数可由教师指导推出.

3. 由几个常见幂函数的导数能否发现幂函数的求导公式，可先让学生思考交流，针对学生实际，教师再做一定的启发引导. 知识所限，不要求证明.

1.2.2 导数公式表及数学软件的应用

会使用导数公式表，会应用数学软件求函数的导数.

1.2.3 导数的四则运算法则

1. 本节重点是导数的四则运算的应用，难点是导数的四则运算法则的推导及形如 $f(ax+b)$ 的复合

函数的求导.

2. 教材根据定义给出了两函数和的导数的推导过程，其中用到了极限的四则运算，不必向学生介绍. 两函数差的导数的推导可要求学生作为练习完成.

3. (1) 关于函数积的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=f(x)g(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]\\&=f(x+\Delta x)\Delta g+g(x)\Delta f.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

因为 $f(x)$ 在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)\to f(x)$.

因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$

即 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

由函数积的导数公式得到 $[Cf(x)]'=Cf'(x)$，表明在求导时可以把函数的常数因子直接提出来.

(2) 关于函数商的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\&=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

因为 $g(x)$ 在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续，于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$g(x+\Delta x)\to g(x)$.

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

即 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

要求学生牢记四则运算法则，特别是积、商的导数公式不要弄错.

4. 例 1、例 2 是运算法则的直接运用，例 3 中 $y=\sin 2x$ 是一复合函数，暂不能直接求解，可运用倍角公式化为积的导数求解，例 4 中 $y=\tan x$ 虽是基本初等函数，但公式表中未给出，可将其用正弦函数和余弦函数表示，化为商的导数求解.

5. 例 5 是复合函数求导问题，题目比较抽象．建议教学时，首先通过实例讲解，让学生对求导法则有一个直观的了解，然后讲解例 5．至于对求导法则的证明，不作要求．对复合函数求导问题需要强调两点：(1) 选定中间变量要适当；(2) 要弄清每一步求导是哪个变量对哪个变量求导，不能混淆．

1.3 导数的应用

1.3.1 利用导数判断函数的单调性

1. 本节的重点是利用求导的方法判断函数的单调性．

2. 教材从函数图象出发给出了用导数的符号判别函数增减性的方法，比较直观，且容易理解接受．

3. 学生在学习数学 1 中的函数时，已经知道了单调函数的定义，并会用定义判断或证明函数在给定区间的单调性．学习本节后，会发现用导数判断函数在给定区间的单调性要简捷得多，也可以求单调区间．在教学时，要注意从学生已有知识出发，引导学生对两种方法进行比较．

4. 函数单调性判别法的证明要用到中值定理，中值定理不属于高中阶段的学习范围，故略去了函数单调性判别法的证明过程．

1.3.2 利用导数研究函数的极值

1. 本节的重点是利用导数知识求函数的极值．

2. 教材由山峰、山谷的实例，引入极大值、极小值、极值、极值点．在此基础上，借助函数图象，介绍了利用函数的导数求极值和最值的方法．

3. 利用函数的导数求极值时，首先要确定函数的定义区间；其次，为了清楚起见，可用导数为零的点，将函数的定义区间分成若干小开区间，并列成表格，判断导函数在各个小开区间的符号，如例题．

4. 求函数的最大值和最小值，需要先确定函数的极大值和极小值，因此，如何求函数的极大值和极小值是关键．

5. 注意区分函数的极值和最值：函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的，若有最大值或最小值，则只能有一个；函数的极值是就函数在某一点附近的小区间而言的，在函数的整个定义区间内可能有多个极大值或极小值．

6. 我们所讨论的函数是在闭区间上连续，在开区间内可导的函数．在闭区间上连续保证有最大值和最小值；在开区间内可导，才能用导数求解．

7. 对于可导函数，其定义域内的一点是极值点的必要条件是该点的导数值为零；其定义域内的一点是极值点的充分条件是该点两侧的导数值异号．另外，应注意：函数的不可导点也可能是极值点，例如函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 是函数的极小值点．

1.3.3 导数的实际应用

1. 本节的重点是利用导数知识解决实际生活中的最优化问题．

2. 解决最优化问题的关键是建立函数模型，因此需先审清题意，明确常量与变量及其关系，再写

出实际问题的函数关系式. 一般来说，对于实际问题还需要注明变量的取值范围.

1.4　定积分与微积分基本定理

1.4.1　曲边梯形面积与定积分

1. 本节重点是定积分的概念，体会如何把曲线围成区域的面积转化成矩形面积的和.

2. 例 1 把区间 $[0, 1]$ 等分为 n 个小区间，以矩形的左端点的纵坐标为高，求面积. 让学生思考以右端点的纵坐标为高求面积，两者作比较.

3. 例 2 是一个物理问题，体会如何用积分解决实际问题，体会积分的工具性.

4. 定义的讲解应注意求和之后的极限要存在，此外应注意数学符号的特点.

1.4.2　微积分基本定理

1. 本节重点是微积分的基本定理.

2. 通过实际问题，引出微积分基本定理，推导的难度比较大，可以让学生只作了解.

3. 例 1、例 2 是根据定理求面积，注意例 2 中在 $[\pi, 2\pi]$ 上的积分为负值，在 $[0, 2\pi]$ 上的积分为 0，不等于我们所求的阴影部分的面积.

4. 求定积分计算过程中，主要是要找到被积函数的原函数.

三、拓展资源

（一）谈谈微积分学

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着. 在数学中引入了变量的概念后，就有可能把运动现象用数学加以描述了. 由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，一门新的数学分支继解析几何之后产生了，这就是微积分学. 微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中最大的一个创造.

微积分学的建立

从微积分成为一门学科来说，是在 17 世纪，但是，微分和积分的思想在古代就已经产生了.

公元前 3 世纪，古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着近代积分学的思想. 作为微分学基础的极限理论，早在古代已有比较清楚的论述. 比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”. 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 这些都是朴素的也是很典型的极限概念.

到了17世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素．归结起来，大约有四种主要类型的问题：第一类是研究运动的时候直接出现的，也就是求即时速度的问题．第二类问题是求曲线的切线的问题．第三类问题是求函数的最大值和最小值问题．第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力．

17世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作，如法国的费马、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格；英国的巴罗、瓦里士；德国的开普勒；意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论，为微积分的创立作出了贡献．

17世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作．他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）．

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源．牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的．牛顿在1671年写了《流数法和无穷级数》，这本书直到1736年才出版，他在这本书里指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合．他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数．牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度求给定时间内经过的路程（积分法）．

德国的莱布尼茨是一个博学多才的学者．1684年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》．就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义．它已含有现代的微分符号和基本微分法则．1686年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献．他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响．现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的．微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力．

前面已经提到，一门科学的创立决不是某一个人的业绩，它必定是经过多少人的努力后，在积累了大量成果的基础上，最后由某个人或几个人总结完成的．微积分也是这样．不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立．英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百年．其实，牛顿和莱布尼茨分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的．比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼茨早10年左右，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿早三年．他们的研究各有长处，也都各有短处．那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论从1699年始延续了一百多年．应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的．他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊．牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的也不能自圆其说．这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生．直到19世纪初，法国科学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚实基础，才使微积分进一步的发展开来．任何新兴的、具有无量前途的科学成就都吸引着广大的科学工作者．在微积分的历史上也闪烁着这样的一些明星：瑞士的雅科布·贝努利和他的兄

弟约翰·贝努利、欧拉、法国的拉格朗日、柯西……

欧氏几何也好，上古和中世纪的代数学也好，都是一种常量数学，微积分才是真正的变量数学，是数学中的大革命．微积分是高等数学的主要分支，不只是局限在解决力学中的变速问题，它驰骋在近代和现代科学技术园地里，建立了数不清的丰功伟绩．

微积分的基本内容

研究函数，从量的方面研究事物的运动变化是微积分的基本方法．这种方法叫做数学分析．

本来从广义上说，数学分析包括微积分、函数论等许多分支学科，但是现在一般已习惯于把数学分析和微积分等同起来，数学分析成了微积分的同义词，一提数学分析就知道是指微积分．微积分的基本概念和内容包括微分学和积分学．微分学的主要内容包括：极限理论、导数、微分等．积分学的主要内容包括：定积分、不定积分等．

微积分是与应用联系着发展起来的，最初牛顿应用微积分学及微分方程从万有引力定律导出了开普勒行星运动三定律．此后，微积分学极大地推动了数学的发展，同时也极大地推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展，并在这些学科中有越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展．

（二）高中数学新课程中微积分内容与传统内容的区别

高中数学新课程中微积分的内容与传统内容有很大的区别，首先是从结构上，不再是以往的“数列—数列的极限—函数的极限—函数的连续—导数—导数的应用—不定积分—定积分”这样的顺序，略去了对一般极限的学习．其次是在内容的选择上，把重点放在导数及其应用上．对于希望在理工（包括部分经济类）方面发展的学生，相对于希望在人文、社会方面发展的学生来说，提高了导数计算方面的要求．还增加了定积分的背景和微积分基本定理的直观意义等内容，这是因为导数是微积分的核心概念，变化率的思想在现实世界中随处可见．再次是在内容的安排上，更加关注微积分的现实背景及其应用、微积分的基本思想、微积分与其他学科的联系．

微积分是人类智慧的最高成就之一，微积分的方法是数学中一个强有力的工具、精美的范例；在众多领域和现实社会中有着广泛的应用；对于辩证思维、崇尚数学的理性精神的培育具有独到的教育意义；等等．因此，在高中数学课程中设置微积分有其独特的价值和作用．也正因为如此，迄今为止，无论是发达国家，还是发展中国家，都在中学数学中设置了这一内容．关键是如何针对中学生的认知水平，改变以往微积分内容的设置模式，设计出既能体现数学本质，又能适合高中学生学习和有利于其未来发展的微积分课程．

但由于长期以来受大学微积分课程设置模式的影响，高中数学课程中设置微积分内容始终是“数列→数列的极限→函数的极限→函数的连续→导数→导数的应用→不定积分→定积分”的模式．事实上是大学微积分的一种缩编和简单下放，对于在中学设置微积分的意义和作用缺乏深入的思考和研究．这就导致了不容忽视的问题：由于过度关注一般极限的定义，直接影响了对微积分思想方法的认识和理解；由于中学生的认知水平和其他一些原因，教学中大都将微积分作为一种规则来学习，更是影响了对微积分思想方法的认识和理解；课程中缺乏微积分的背景材料、应用问题，以及与现实社会联系的实例，导致了学生学得盲目、学得枯燥乏味，还加重了负担，教师和学生都觉得不受用；到了大学，大学教师还抱怨微积分学习炒了“夹生饭”．

总之，一方面是社会的发展、数学的发展，需要在中学学习微积分，另一方面是中学数学微积分的教与学存在着种种问题. 为此，在反复思考、研究的基础上，新课程在微积分的内容、处理和要求上，都有了很大的变化. 我们期待着在新课程的实施中去认识、实践它，不断地完善它. 通过微积分的学习，真正达到其教育目标，提高现代社会中未来人才应该具备的素质.

（三）数学新课程对微积分内容处理的变化

为了更好地体现课程改革“进一步提高未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会的需要”的总目标，针对传统微积分处理方式带来的一些问题，例如：

把微积分作为大学微积分内容的一种缩编和简单下放，先讲一般极限概念，把导数作为一种特殊极限来讲，这就不可避免地会使形式化的极限概念成为学生学习不可逾越的障碍，教师教得费劲，学生学得乏味，更重要的是严重影响了对导数思想和本质的认识与理解.

新课程对微积分的处理有了很大的变化，主要表现在：

突出概念的本质. 例如：不是在学习一般极限的基础上，把导数作为一种特殊的极限（增量比的极限）来处理，而是直接通过实际背景和具体应用实例——速度、膨胀率、效率、增长率等反映导数思想和本质的实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，认识和理解导数概念，在对实际背景问题研究的基础上，抽象概括出导数的概念.

强调导数在研究事物的变化率、变化的快慢，研究函数的基本性质和优化问题中，是一种强有力的工具，并通过与初等方法比较，感受和体会导数在处理上述问题中的一般性和有效性，导数作为一种通法的意义和作用.

淡化计算. 针对以往这部分教学中的问题，以及“课程标准”对这部分内容的定位——强调对导数本质的认识，不仅作为一种规则，更作为一种重要的思想、方法来学习.

注重使学生学会数学思考的一种方式——几何直观. 反复通过图形去认识和感受导数的几何意义，加强对导数概念的认识和理解，同时在用导数的几何意义去解决问题的过程中（如：导数的正与负为什么体现了函数的增与减的变化，导数绝对值的大小为什么体现了函数增、减的快慢，等等），学会一种数学思考的数学学习的方式.

关注联系. 例如，与函数的联系、算法思想的渗透，以及与信息技术的整合，等等.

四、教学案例

案例 1：1.2.1　常数函数与幂函数的导数

（一）教学目标

1. 知识与技能

能由定义求导数的三个步骤推导常数函数与幂函数的导数.

2. 过程与方法

在教学过程中，注意培养学生归纳、探求规律的能力.

3. 情感、态度与价值观

教学的核心问题是让学生通过定义求导数的三个步骤，推导常数函数与幂函数的导数，通过学生的主动参与，师生、生生的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发学生的求知欲，培养探索精神.

（二）教学重点和难点

1. 教学重点：利用前面已学的求导数的三个步骤对常数函数与幂函数进行探究.

2. 教学难点：用从特殊到一般的规律来探究公式.

（三）教学方法

以教师为主导，以学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认知规律出发，进行启发、诱导、探索，充分调动学生的积极性，发挥学生的主体作用.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 按定义求导数有哪几个步骤？ 2. 用导数定义求函数 $y=C$ 的导数.	问题 1：由学生回答. 问题 2：让学生上黑板演示，教师作出评价.	不论自变量取何值，对应的函数值应均为 C，避免如下错误： $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ $=x+\Delta x-x=\Delta x$.
概念形成	【问题 1】常数函数的导数是什么？常数函数的导数为零. 【问题 2】运用导数定义，求下列几个幂函数的导数： (1) $y=x$； (2) $y=x^2$； (3) $y=x^3$； (4) $y=\dfrac{1}{x}$； (5) $y=\sqrt{x}$. 【问题 3】通过以上五个幂函数的求导过程，你有没有发现求幂函数的导函数的规律？ 【问题 4】幂函数 $y=x^\alpha$ ($\alpha\in$ **Q**) 的导数是什么？ 结论：$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$. 练习：求以下几个幂函数的导数： (1) $y=x^8$； (2) $y=x^{12}$； (3) $y=x^{\frac{4}{3}}$.	学生回答，教师总结. 给学生足够的时间，放手让学生解答，最后教师适当的点拨、完善. 教师提出问题，学生思考、回答，允许相互讨论，教师根据学生的回答，进一步完善. 学生口答，教师对学生的回答进行评价.	$C'=0$ 可以用几何图形加以说明，因为 $y=C$ 的图象是平行于 x 轴的直线，其上任意一点的切线，即此直线，所以切线斜率都是 0. 让学生在求导数的过程中发现规律. 让学生通过自己的思考，真正领会数学中从特殊到一般的思想. 目的是通过这一组题目的解答，使学生对幂函数的导数记忆更牢固，要求学生能熟练地掌握.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1 求下列函数的导数： (1) $y=\sqrt[3]{5}$；(2) $y=\sqrt[4]{x^3}\ (x>0)$；(3) $y=x^{-6}$. 解：(1) $y'=(\sqrt[3]{5})'=0$； (2) $y'=(\sqrt[4]{x^3})'=(x^{\frac{3}{4}})'$ $=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$； (3) $y'=(x^{-6})'=-6x^{-7}$. 例2 质点运动方程是 $S=\frac{1}{t^5}$，求质点在 $t=2$ 时的速度. 解：因为 $S=\frac{1}{t^5}$，所以 $S'=(t^{-5})'=-5t^{-6}$. 所以 $S'\|_{t=2}=-5\times2^{-6}=-\frac{5}{64}$. 答：质点在 $t=2$ 时的速度是 $-\frac{5}{64}$.	学生独立解决，再讨论交流，然后教师对学生的回答进行评价．在练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导．	进一步巩固所学知识，有助于保持学生学习的热情和信心，教师及时了解学生掌握的情况，以便进一步调整自己的教学．
课堂练习	教科书第16页，练习A组.		强化知识，会应用两个导数公式解决有关问题．
归纳总结	(1) 常数函数 $y=C$ 的导数； (2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbf{Q})$ 的导数.	学生自己归纳总结．	归纳要点，使学生有清晰的认知结构．
布置作业	教科书第16页，练习B组.		

案例2：1.2.3 导数的四则运算法则

（一）教学目标

1. 知识与技能

了解函数的和、差、积、商的导数公式的推导；掌握一个函数的和、差、积、商的求导法则；能正

确运用两个函数的和、差、积、商的求导法则及已有的导数公式求某些简单函数的导数.

2. 过程与方法

利用学生已掌握的导数的定义，得出一个简单的两个函数的和的导数，从而提出问题，引入新课，通过学生的猜想，尝试探究出函数的和、差、积、商的求导法则，使学生加深对求导法则的理解.

3. 情感、态度与价值观

通过学生的主动参与，师生、生生的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发学生的求知欲，培养探索精神.

（二）教学重点和难点

重点：掌握函数的和、差、积、商的求导法则.

难点：学生对积和商的求导法则的理解和运用.

（三）教学方法

在教学中运用尝试探索、类比联想、变式练习等方法进行.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 复习：$(x^n)'=nx^{n-1}$，$(x^3)'=3x^2,(x^2)'=2x$. 2. 提出问题：怎样求函数 $y=x^3+x^2$ 的导数？ 3. 回顾导数的定义： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. 4. 学生尝试利用导数定义求 $f(x)=x^3+x^2$ 的导数. 5. 探究： $(x^3)'=3x^2$， $(x^2)'=2x$， $(x^3+x^2)'=3x^2+2x$ 这三个导数之间的关系. 6. 猜想： $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$.	学生口答. 教师提出问题，学生思考并回答. 根据学生回答的结果，提出以下的探究和猜想. 由学生大胆进行猜想，对多种不同的猜想，教师作出评价并完善.	激活学生头脑中的原有知识，为引入新课做准备. 巩固利用导数定义求导的步骤和方法. 通过学生的猜想，尝试探究函数的和、差的求导法则.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	【问题 1】如何证明以上猜想？ 即 $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$？ 证明完成后，可以让学生自己总结. 【问题 2】设 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的，则 $[f(x)g(x)]'=$________. 若将 $g(x)$ 当做一个常数函数呢？ $[cf(x)]'=$________. 练习：求 $y=x\sin x$ 的导数. 【问题 3】设 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的，且 $g(x)\neq 0$，则 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________. 练习：求 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的导数.	放手让学生独立处理，有利于深化、活用数学知识，加深对知识的理解. 学生尝试证明法则 2 时可能存在一定障碍，教师应及时指导学生，注意导数定义的形式. 学生自己动手，寻找答案，教师对一些常见错误形式进行强调.	可以推广到任意有限个函数，即 $[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f'_1(x)\pm f'_2(x)\pm\cdots\pm f'_n(x)$. 避免学生出现 $[f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)$ 这样的错误.
应用举例	例 1　求多项式函数：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数. 例 2　求 $y=\sin 2x$ 的导数. 例 3　求 $y=\tan x$ 的导数. 例 4　求 $y=x-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ 的导数.	学生练习，教师点拨.	对所学知识灵活运用，例 4 在求导之前，应利用代数、三角恒等变形对函数进行化简，然后再求导，这样可以减少运算量，提高运算速度，减少差错.
练习反馈	教科书第 21 页，练习 A，1，2；第 22 页，练习 B，1，3.	学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导.	巩固所学知识，进一步促进认知结构的内化，并且可使学生对自己的学习进行自我评价.
归纳总结	1. 两个常用函数的求导公式. 2. 函数和（或差）的求导法则. 3. 函数积的求导法则. 4. 函数商的求导法则.	先由学生自己总结，再由师生共同归纳完善.	学生自己从知识、方法两方面进行总结，提高学生的概括、归纳能力.
布置作业	教科书第 22 页，习题1-2 A，1，2，5，6.		

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 5 页）

1. （1）乙跑得快；（2）乙较快.

2. $\frac{7}{3}$，$\frac{13}{3}$，$\frac{17}{3}$.

3. $\frac{23}{12}$，$\frac{25}{12}$.

练习 B（第 5 页）

1. 甲厂治污效果较好.

2. 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 的平均变化率较大.

练习 A（第 10 页）

1. $2a+v_0$.
2. $S_{max}=40.816$ m.
3. 导数为 a.
4. 常值函数.

练习 B（第 10 页）

1. 216.5 m.
2. $y'|_{x=1}=2a+b$，$y'|_{x=2}=4a+b$.

练习 A（第 12 页）

1. $x=0.3$，$k=0.6$；$x=1$，$k=2$；$x=3$，$k=6$.
2. （1）4；（2）2；（3）3；（4）-1.

练习 B（第 12 页）

1. $2x+y+2=0$.
2. $y-y_0=(2x_0+3)(x-x_0)$.

习题 1-1A（第 13 页）

1. （1）10 m/s；　（2）14 m/s；　（3）16 m/s.

2. （1）a；　（2）$-\frac{1}{(x+2)^2}$.

3. $f'(x)=2(x-1)$, $f'(0)=-2$, $f'(2)=2$.

习题 1-1B（第 13 页）

1. 一个是函数；一个是具体的数值，是 $x=x_0$ 时，$f'(x)$的值.
2. 与 x 有关；令 $\Delta x\to 0$ 时，x 不改变.
3. $x+y+1=0$，$x-y-1=0$.
4. $2x-4y-1=0$ 或 $14x-4y-49=0$.

练习 A（第 16 页）

1. 常值函数的瞬时变化率为 0，$y=x$ 的瞬时变化率为 1.
2. (1) $y'=15x^{14}$；(2) $y'=-3x^{-4}$；(3) $y'=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$；(4) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.
3. $y'|_{x=2}=80$.
4. $12x-y-16=0$.

练习 B（第 16 页）

1. (1) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$；(2) $y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$.
2. $x-2y+1=0$，$x-2\sqrt{2}y+2=0$.
3. 略.
4. $a=\pm 1$.

练习 A（第 18 页）

1. $5x^4$，$12x^{11}$，$-3x^{-4}$，$0.3x^{-0.7}$，$108x^{107}$.
2. $-\sin x$，$\cos x$，$2^x\ln 2$，$\frac{1}{x}$，e^x.
3. $6x-y-5=0$.

练习 B（第 18 页）

1. (1) $\frac{1}{32}$；(2) 0；(3) 0.
2. $x+y-\frac{\pi}{2}=0$.
3. $x-2\sqrt{3}y+3=0$.

练习 A（第 21 页）

1. (1) $y'=7x^6+6x^5-15x^4$；　　(2) $y'=1-x^{-2}$；
   (3) $y'=3x^2+\sin x$；　　(4) $y'=2x-2\sin x$.

2. (1) $9x^2-30x+2$;

(2) $60x^3+120x^2-21$;

(3) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$;

(4) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

3. (1) $18x+30$;

(2) $40(5x-7)^7$.

4. $(x^2-x-2)e^x$,点为$(2,-e^2)$,$(-1,\frac{5}{e})$.

练习 B（第 22 页）

1. $2ax+b$.

2. (1) $y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(2) $y'=1+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(3) $y'=\frac{2adx-bcx^2+bd}{(cx^2+d)^2}$;

(4) $y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$;

(5) $y'=3\cos(3x+5)$;

(6) $y'=2x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x^2+1)$.

3. $9x-y-14=0$.

4. (1) $y'=-3\sin(3x+5)$;

(2) $y'=\omega\cos(\omega t+\varphi)$;

(3) $y'=\frac{5}{5x+4}$;

(4) $y'=\frac{2}{3}\times 9^x\ln 3$.

习题 1-2A（第 22 页）

1. (1) $5x^4+3x^2+1$;

(2) $3x^2+\cos x$;

(3) $3x^2\sin x+x^3\cos x$;

(4) $9x^2-26x-1$;

(5) $\frac{-12x}{(3+x^2)^2}$;

(6) $\frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4}+1)$;

(2) 0.

3. (1) $y=4x-4$;

(2) $3x-4y-1=0$.

4. $\frac{3}{4}\pi$.

5. $x-y=0$.

6. $2x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

7. 使 $f'(x)=0$ 的 x 值是$\frac{\pi}{2}$和$\frac{3\pi}{2}$，过这两点的曲线的切线平行于 x 轴.

8. $15x-y-16=0$ 或 $15x-y+16=0$.

9. $y=21$ 和 $y=-6$.

10. (1) $y'=30(3x-5)^9$;

(2) $y'=\frac{25}{5x+7}$;

(3) $y'=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$;

(4) $y'=-\frac{3}{2}(1+3x)^{-\frac{3}{2}}$.

11. (1) $y'=(2x-1)(2-3x)^2(17-30x)$; (2) $y'=3\sin 5x+5(3x+2)\cos 5x$;
(3) $y'=e^{2x}(2\cos 3x-3\sin 3x)$; (4) $y'=2^x e^x(1+\ln 2)$.

习题 1-2B（第 23 页）

1. (1) $y'=2\cos 3x\cos 2x-3\sin 3x\sin 2x$; (2) $y'=\cos x+\cos 2x$;
(3) $y'=3x^2+12x+11$; (4) $y'=4x^3-3x^2-4x$.
2. $10x-y-16=0$.
3. $2x-y-\frac{\pi}{2}+1=0$.
4. (1) $y'=100x-80$; (2) $y'=567(7x-4)^{80}$;
(3) $y'=\frac{9}{4}(3x-5)^{-\frac{1}{4}}$; (4) $y'=2e^{2x+1}$.
5. -1 m/s，$t=2$.
6. 第 5 秒时 $q'_5=23$，第 7 秒时 $q'_7=31$，$t=10$.
7. 略.

练习 A（第 26 页）

1. A.
2. 单调增区间$\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$，单调减区间$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.
3. $(-\infty, -1)$，$(-1, +\infty)$ 均为单调减区间.
4. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$，$(1, +\infty)$ 单调增区间，$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ 单调减区间.

练习 B（第 27 页）

1. 单调增区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$，单调减区间$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.
2. 单调增区间$(-\infty, 1]$，$\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$，单调减区间$\left[1, \frac{13}{3}\right]$.
3. 略.

练习 A（第 30 页）

1. (A) 极值点 x_1，x_2，x_3；最值点 a，x_2，x_3；
(B) 极值点 x_1，x_2，x_3；最值点 x_1，b；
(C) 极值点 x_1，x_2；最值点 a，b.
2. (1) 当 $x=\frac{7}{2}$时，有极小值$-\frac{25}{4}$；(2) 当 $x=1$ 时，有极小值 -1；
(3) 当 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时，有极大值$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，当 $x=\frac{4}{3}\pi$ 时，有极小值$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.
3. 略.

4. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时有极小值 $\frac{2}{3}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时有极大值 $\frac{4}{3}$.

练习 B（第 30 页）

1. 当 $x=2$ 时，有最大值 4；当 $x=1$ 时，有最小值 -1.

2. 当 $x=3$ 时，有最大值 4；$\frac{2}{3}\leqslant a<2$，当 $x=0$ 时，有最小值 $4-9a$，$0<a<\frac{2}{3}$，当 $x=2$ 时，有最小值 $3a-4$.

3. 当 $a>0$ 时，单调增区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$，单调减区间为 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

当 $x=-\frac{b}{2a}$，有最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，单调增区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$，单调减区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

当 $x=-\frac{b}{2a}$，有最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

4. $a<0$ 时有极值，极值点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}, \frac{2}{\sqrt{-a}}+2\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{-a}}, -\frac{2}{\sqrt{-a}}+2\right)$.

练习 A（第 33 页）

1. 略.

2. $\frac{l^2}{16}$.

3. $x=y=\frac{l}{2}$.

练习 B（第 34 页）

1. 腰长为 $\frac{3}{4}p$，底为 $\frac{p}{2}$.

2. 当 $h=d=6\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ 时，所用材料最省.

3. 13.27 m.

4. $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

习题 1-3A（第 34 页）

1. (1) 在 $\mathbf{R}$ 上单调增；　(2) 单调增区间 $[4, +\infty)$，单调减区间 $(-\infty, 4]$；

(3) 在 $\mathbf{R}$ 上单调增；　(4) 单调增区间 $(-\infty, 0]$，$\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$，单调减区间 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.

2. 略.

3. （1）$x=1$ 为极小值点，极小值为 2；　（2）$x=1$ 为极大值点，极大值为 6.

4. （1）$x=1$ 时取极小值为 3，$x=-\frac{1}{3}$时取极小值为$\frac{113}{27}$；

（2）$x=-1$ 和 $x=1$ 为极大值点，极大值为 1；$x=0$ 为极小值点，极小值为 0；

（3）$x=1$ 为极大值点，极大值为-3；$x=-1$ 为极小值点，极小值为 -7；

（4）$x=-\frac{1}{2}$为极大值点，极大值为$\frac{15}{4}$；$x=1$ 为极小值点，极小值为-3.

5. （1）$x=\frac{3}{2}$时，取得最小值为$-\frac{1}{4}$；$x=0$ 时，取得最大值为 2；

（2）$x=0$ 时，取得最小值为 0；$x=4$ 时，取得最大值为 8 ；

（3）$x=1$ 不在区间 $[-2, 0]$ 内，所以，$x=0$ 时，取得最小值-1，$x=-2$ 时，取得最大值 7；

（4）$x=0$ 时，取得最小值 -3；$x=\frac{7}{4}$时，取得最大值$\frac{25}{8}$.

6. 底边长为 40 cm 时，容积最大.

7. 边长为 6 cm.

习题 1-3B（第 35 页）

1. $x=\frac{4-\sqrt{13}}{3}$为极大值点，$x=\frac{4+\sqrt{13}}{3}$为极小值点；既无最大值也无最小值；

单调增区间$\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{13}}{3}\right]$，$\left[\frac{4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$；单调减区间$\left[\frac{4-\sqrt{13}}{3}, \frac{4+\sqrt{13}}{3}\right]$.

2. $x=2$ 时，取得最小值-12；$x=-1$ 时，取得最大值 15.

3. 最大位移为$\frac{9}{4}$ cm，最大速度为 3 cm/s.

4. 80.

5. $\frac{\pi}{4}$.

6. 最大高度 2 160 m，最远水平距离 4 988 m.

练习 A（第 39 页）

1. 表示直线 $y=1$，$x=a$，$x=b$，$y=0$ 所围成图形的面积.

2. 等分为 3 份时，值为$\frac{8}{3}$；等分为 5 份时，值为$\frac{77}{25}$.

3. $\frac{3}{2}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

练习 B（第 39 页）

1. $\frac{32}{3}$.　　2. $\frac{1}{4}$.　　3. $k\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=k\cdot(b-a)\cdot\frac{b+a}{2}$.

练习 A（第 43 页）

1. （1）9；（2）$\frac{26}{3}$；（3）$\frac{14}{3}$；（4）0.

2. $\frac{16}{3}$.　3. $\frac{4}{3}$.

练习 B（第 43 页）

1. 1.

2. （1）$\frac{2}{3}$；（2）$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

3. $\frac{1}{4}$.

4. ln 2，$\frac{1}{2}$.

5. 略.

习题 1-4A（第 43 页）

1. （1）156；（2）$\frac{21}{2}$；（3）$\frac{2}{5}$；（4）2ln 2.

2. （1）$\frac{243}{5}$；（2）$\frac{728}{3}$；（3）$\frac{99}{4}$；（4）80.

3. （1）$\frac{32}{3}$；（2）$\frac{9}{2}$.

习题 1-4B（第 44 页）

1. （1）$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$\frac{1}{3}$；（3）$\frac{1}{3}$.

2. （1）0；（2）2；（3）$-\frac{4}{3}$；（4）$\frac{3}{2}+\ln 2$.

本章小结

Ⅲ　巩固与提高（第 46 页）

1. （1）略；（2）$v=6-2t$；（3）3 s.

2. （1）6.8；（2）$\frac{20}{3}$ s.

3. （1）$1\,000(10x+3)^{99}$；（2）$16x+14$；（3）$\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}$；

（4）$\frac{3}{3x-2}$；（5）$\frac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2}$；（6）$-3\sin(3x-\pi)$.

4. （1）$\frac{1}{4}\times 5^{-\frac{3}{4}}$；（2）15；（3）13；（4）38；（5）$-\frac{1}{3}$；（6）$\frac{1}{2}$.

5. (1) $6x-y-2=0$；　(2) $x-y-1=0$；　(3) $27x-y-27=0$；　(4) $x-3y+4=0$.

6. (1) 单调增区间$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$，单调减区间$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$；

(2) 单调增区间$[-1, 1]$，单调减区间$(-\infty, -1]$，$[1, +\infty)$；

(3) 单调增区间$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$，$\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$；单调减区间$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$；

(4) 单调增区间$\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

单调减区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

7. (1) 极大值点$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，极小值点$\frac{\sqrt{3}}{3}$；

单调增区间$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$，单调减区间$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$；

(2) 极大值点 $x=0$；单调增区间$(-\infty, 0]$，单调减区间$[0, +\infty)$.

8. 极大值点 $x=2$，极小值点 $x=3$；

单调增区间 $(-\infty, 2]$，$[3, +\infty)$，单调减区间 $[2, 3]$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0.35$(m).

10. 略.

11. (1) 102.4；　(2) 0；　(3) $\frac{2a^5}{5}$；　(4) $\frac{32}{3}$.

12. (1) $\frac{1}{6}$；　(2) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Ⅳ　自测与评估（第 48 页）

1. (1) D；　(2) C；　(3) B；　(4) B；　(5) C；　(6) D；　(7) B；　(8) A.

2. (1) 极大值点 $x=\frac{2}{3}$，极小值点 $x=-2$；

(2) 单调增区间$\left[-2, \frac{2}{3}\right]$，单调减区间$(-\infty, -2]$，$\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$；

(3) $x=-2$ 时取最小值 0，$x=-5$ 时取最大值 63；

(4) 略.

3. (1) $6(3+2x)^2$；　(2) $-6(3-2x)^2$.

4. 122.5 m.

5. 33.5 m.

6. 68.

7. $\frac{8}{3}$.

六、反馈与评价

（一）知识与方法测试

一、选择题（每题5分，共30分）

1. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$（　　）.

（A）与 x_0 和 h 都有关　　（B）仅与 x_0 有关而与 h 无关

（C）仅与 h 有关而与 x_0 无关　　（D）与 x_0 和 h 均无关

2. 已知 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{[f(x)]^2-[f(x_0)]^2}{x-x_0}=$（　　）.

（A）$f'(x_0)$　　（B）$f(x_0)$　　（C）$f(x_0)f'(x_0)$　　（D）$2f(x_0)f'(x_0)$

3. 下列函数中，导数为$\dfrac{1}{x}$（$x\in(0,+\infty)$,其中 k 为大于零的常数）的函数是（　　）.

（A）$\ln(x+k)$　　（B）$\ln kx$　　（C）$\ln\dfrac{k}{x}$　　（D）$\ln\dfrac{x+k}{k^2}$

4. $y=f(x^2)$，则 $y'=$（　　）.

（A）$2xf'(x^2)$　　（B）$2xf'(x)$　　（C）$4x^2f(x)$　　（D）$f'(x^2)$

5. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值点为（　　）.

（A）0　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

6. $y=x-\ln(1+x)$的单调增区间为（　　）.

（A）$(-1,0)$　　（B）$(-1,+\infty)$　　（C）$(0,+\infty)$　　（D）$(1,+\infty)$

二、填空题（每题5分，共20分）

7. 若函数 $f(x)=x^3$，则$[f(-2)]'=$________.

8. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内恒有 $f'(x)<0$，则此函数在 $[a,b]$ 上的最小值是________.

9. $\int_1^2(x+x^{-1})\mathrm{d}x=$________.

10. 设函数 $f(x)=ax^3-(ax)^2-ax-a$ 在 $x=1$处取得极值-2，则 $a=$________.

三、解答题（共50分）

11. （10分）求下列函数的单调区间：

（1）$y=2x^3+3x^2-12x+1$；　　（2）$y=(x+1)^2(x+2)$.

12. （10分）曲线 $y=\dfrac{3}{2}x^2$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行？

13. （10分）求由曲线 $y=\sqrt{x}$与直线 $x=4$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积.

14. (10 分) 求函数 $f(x)=3x^3-9x+5$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

15. (10 分) 要设计一个容积为 V 的圆柱形水池，已知底的单位面积造价是侧面的单位面积造价的一半，问：如何设计水池的底半径和高，才能使总造价最少？

知识与方法测试参考答案

一、1. B； 2. D； 3. B； 4. A； 5. B； 6. C.

二、7. 0； 8. $f(b)$； 9. $\frac{3}{2}+\ln 2$； 10. 1.

三、11. (1) 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增；在 $(-2,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 在 $(-\infty,-\frac{5}{3})$ 上单调递增；在 $(-\frac{5}{3},-1)$ 上单调递减；在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

12. $(1,\frac{3}{2})$.

13. $\frac{16}{3}$.

14. 最大值为 11，最小值为 −1.

15. 当水池的高与底面半径的比为 1∶2 时，总造价最少.

（二）评价建议

1. 除针对本章所学的知识进行本章总的测试外，还可在学习过程中进行两次阶段性诊断测试，第一次是学完 1.1、1.2 节之后，第二次是学完 1.3、1.4 节之后.

2. 本章的重点是理解导数的概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等性质中的作用，了解定积分的概念，为进一步学习微积分打下基础. 因此能够体会导数的思想及其内涵，感受导数在解决实际问题中的作用是这一章的基本要求.

第二章

推理与证明

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解合情推理的含义，能利用归纳推理和类比推理等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

2. 掌握演绎推理的基本模式，体会它们的重要性，并能运用它们进行一些简单的推理.

3. 了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

4. 了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程与特点.

5. 了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

6. 了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

7. 阅读和欣赏欧几里得《原本》、牛顿力学体系等实例，体会公理化思想，并初步了解计算机在自动推理领域和数学证明中的作用.

（二）过程与方法目标

在本模块中，学生将通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明和间接证明；感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯.

（三）情感、态度和价值观目标

1. 结合已学过的数学实例和日常生活中的实例，使学生体会数学与其他学科以及实际生活的联系.

2. 通过合情推理与演绎推理的学习，让学生了解数学不单是现成结论的体系，结论的发现过程也是数学的重要内容，从而形成对数学较为完整的认识. 学习合情推理有助于培养学生进行归纳时的严谨作风，从而形成实事求是、力戒浮夸的思维习惯.

3. 通过本章的学习，有助于发展学生的数学思维能力，提高学生的数学素养.

4. 通过本章的学习，有助于发展学生的创新意识和创新能力.

5. 通过对数学证明以及数学文化的了解，有助于学生认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过实例，讲解推理证明过程和主要方法. 引导学生理解各种推理的作用.

2. 用基本逻辑用语，理解逻辑推理的主要方法. 重点理解命题“如果…，则…”的意义.

3. 注意语言逻辑、形式逻辑与数理逻辑的区别.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是合情推理与演绎推理，直接证明和间接证明，全章共分为三大节：第一大节学习合情推理与演绎推理，首先通过实例引出推理的概念，接着通过大量的实例学习归纳推理和类比推理两种合情推理. 第二大节学习直接证明（综合法、分析法）和间接证明（反证法），通过具体的例子学习分析法和综合法的特点以及反证法的思维过程. 第三大节学习另一种直接证明的方法——数学归纳法.

本章最后在“阅读与欣赏”中安排了两篇文章，一篇是《〈原本〉与公理化思想》，另一篇是《数学证明的机械化——机器证明》. 通过学习这两篇文章，体会公理化思想，同时初步了解计算机在自动推理领域和数学证明中的作用，有助于学生认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

2. 地位和作用

“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 推理一般包括合情推理和演绎推理. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养. 证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，演绎推理或者逻辑证明能力的培养是高中数学课程的重要目标. 通过本章的学习，有助于发展学生的思维能力，提高学生的数学素养，让学生感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，从而架起数学与生活的桥梁，形成严谨的理性思维和科学精神.

3. 重点和难点

本章的重点是合情推理、演绎推理以及证明方法——直接证明和间接证明.

本章的难点是对数学归纳法的理解. 数学归纳法具有证明的功能，它将无穷的归纳过程，根据归纳

推理转化为有限的特殊（直接验证和演绎推理相结合）的过程，因此，理解数学归纳法对学生有一定的困难．

4. 本章知识结构

（三）课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1　合情推理与演绎推理	
2.1.1　合情推理	2 课时
2.1.2　演绎推理	1 课时
2.2　直接证明与间接证明	
2.2.1　综合法与分析法	1 课时
2.2.2　反证法	1 课时
2.3　数学归纳法	2 课时
本章小结	1 课时

（四）教法与学法建议

2.1　合情推理和演绎推理

2.1.1　合情推理

1. 合情推理：前提为真时结论可能为真的推理，是一种或然性的推理．是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉的推测某些结果的推理过程．它包含归纳推理和类比推理．

2. 归纳推理：按照逻辑学的传统观点，归纳推理是以个别性知识为前提而推出一般性结论的推理．

归纳推理的前提是一些关于个别事物或现象的判断，而结论是关于该类事物或现象的普遍性的判断．归纳推理的结论超过了前提所判定的范围，因此，在归纳推理中，前提和结论之间的联系不是必然的，而是或然的，在前提真实的情况下，结论未必真．

3．类比推理是根据两个（或两类）对象在一些属性上相同或相似，从而推出它们在其他属性上也相同或相似的推理形式．

4．归纳推理与类比推理的特点与区别：类比推理的结论也是或然的，归纳推理是由特殊到一般的推理，类比推理则是由个别到个别的推理，或是由一般到一般的推理．

2.1.2 演绎推理

1．演绎推理的特征是：当前提为真时，结论必然为真．

2．演绎推理是由一般性的真命题推出特殊命题为真的推理，是一种必然性推理．本节主要介绍了演绎推理的三种基本模式，它们都是数学中常用到的演绎推理规则，所以有必要掌握它们，并能运用它们进行一些简单的推理．

3．三段论是演绎推理的主要形式，是本节的重点，也是难点，它是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理．三段论式推理常用的一种格式，可以用以下形式来表示：

$$\begin{array}{l} M\text{——}P\ (M\text{ 是 }P) \\ \underline{S\text{——}M(S\text{ 是 }M)} \\ S\text{——}P(S\text{ 是 }P) \end{array}$$

三段论推理的根据，用集合论的观点来讲，就是：若集合 M 的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中所有元素都具有性质 P．

三段论的形式中包括三个判断：第一个判断为大前提，它提供了一个一般的原理；第二个判断叫小前提，它指出了一个特殊情况；这两个判断联合起来，揭示了一般原理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论．

在实际使用三段论推理时，为了简洁起见，大家经常略去大前提或者小前提，有时甚至这两者都略去，例如“25 能被 5 整除”这个推理，就省略了大前提和小前提．

4．关系推理和完全归纳推理比较容易理解，结合课本的例 3、例 4 讲解即可．

5．演绎推理与合情推理的比较：

合情推理中的归纳、类比都是具有创造性的或然推理．不论是由大量的特例，经过分析、概括、发现规律的归纳，还是由两系统的已知属性，通过比较、联想而发现未知属性的类比，它们的共同特点是，结论往往超出前提控制的范围．所以它们是“开拓型”或“发散型”的思维方法．也正因为结论超出了前提的管辖范围，前提就无力保证结论必真，所以归纳类比只是或然性推理．演绎推理所得结论完全蕴涵于前提之中，所以，它是“封闭型”或“收敛型”的思维方法．只要前提真实，逻辑形式正确，结论必然是真实的．演绎推理形式化程度远比归纳、类比高，即用演绎法时，一个命题由其他命题推出，其根据是形式结构之间的联系，而与这些命题的具体内容无关，这一点由三段论的形式就可以清楚地看到．

2.2 直接证明与间接证明

1. 本节内容是对学生已学过的基本证明方法的总结. 在教学中，应通过实例，引导学生认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性. 教学重点是综合法、分析法、反证法的逻辑思维过程及逻辑思维方法，难点是三种证明方法的应用，应注意对证明的技巧性不宜作过高要求.

2. 证明是引用一些真实的命题来确定某一命题真实性的思维形式. 任何证明都由论题、论据、论证三部分组成. 论题是指需要确定真实性的那个命题. 论据是指被用来作为证明的理由. 论据一般来自两个方面：一是已经规定了的真实命题，如定义和公理；二是已经证明了的真实命题，如定理、推论、公式、性质、法则等. 论证就是证明的过程，是指从论据推出论题的过程，它表明了论据与论题的必然的逻辑联系.

证明过程其实也就是推理过程，就是把论据作为推理的前提，应用正确的推理形式推出论题的过程.

3. 数学常用的证明方法有直接证明与间接证明.

(1) 直接证明是由论题的已知条件和已知定义、公理、定理等作为论据，利用逻辑推理法则直接推出论题结论真实性的证明方法.

综合法：从题设的已知条件出发，运用一系列有关已确定真实性的命题作为推理的依据，逐步推演而得到要证明的结论，这种证明方法叫综合法. 综合法的推理方向是由已知到求证，表现为由因导果.

分析法：分析法的推理方向是由结论到已知，论证中步步寻求使其成立的充分条件，如此逐步归结到已知的条件或已经成立的事实，表现为执果索因.

(2) 间接证明不是从正面论证论题的真实性，而是通过证明它的等价命题，间接地达到目的. 最常见的间接证法是反证法. 关于反证法，法国数学家阿达玛曾说过："这种证法在于表明，若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾." 这是对反证法的精辟的概括. 即假设结论的反面成立，在已知条件和"否定结论"这个新条件下，通过逻辑推理，得出与公理、定理、题设、临时假定相矛盾的结论或自相矛盾，从而断定结论的反面不能成立，即证明了命题的结论一定是正确的，这种证明方法就叫做反证法.

4. 证明的规则：

规则 1　论题要明确. 论题是证明的基本目标，只有把论题清楚、明确地表述出来，才能使证明有的放矢.

规则 2　论题应当始终同一. 根据同一律的要求，在证明过程中，论题应当始终同一，不得中途变更. 违反这条规则的常见错误是偷换论题.

规则 3　论据要真实. 论据是确定论题真实性的理由，如果论据是假的，那就不能确定论题的真实性. 违反这条规则的逻辑错误，叫做虚假论据.

规则 4　论据不能靠论题来证明. 论题的真实性是靠论据来证明的，如果论据的真实性又要靠论题来证明，那么结果什么也没有证明. 违反这条规则的逻辑错误，叫循环论证.

规则 5　论据必须能推出论题. 证明过程应该合乎推理形式，遵守推理规则，论据必须是推出论题的充足理由. 否则，从论据就推不出论题. 违反这条规则的逻辑错误，叫做不能推出.

2.3　数学归纳法

1. 本节先由具体例子引出数学归纳法，然后举例说明数学归纳法的应用.

2. 本节重点是数学归纳法及其应用. 难点是对数学归纳法的原理的了解. 关键是讲清数学归纳法的两个步骤及其作用.

3. 在学习等差数列时，是通过等差数列的前几项满足的关系式得出通项公式的，像这种由一系列有限的特殊事例得出一般结论的推理方法，通常叫做归纳法. 根据考察的对象是全部还是部分，归纳法又分为：完全归纳法和不完全归纳法. 显然，等差数列的通项公式是通过不完全归纳法得出的，这个结论是正确的，但并不是所有由不完全归纳法得出的结论都是正确的，这是因为只考察了部分情况，结论不一定具有普遍性.

在数学中，像等差数列通项公式这样与正整数有关的命题有很多，由于正整数有无限多个，因而不可能对所有正整数加以验证. 如果只对一部分正整数加以验证，所得结论不一定正确. 要是找到把所有结论递推下去的依据，就可以把结论推广到所有的正整数. 这就是数学归纳法的基本思想，即先验证使结论有意义的最小正整数 n_0，如果当 $n=n_0$ 时，命题成立，再假设当 $n=k(k\geqslant n_0，k\in \mathbf{N}^*)$ 时，命题成立，如果能证明当 $n=k+1$ 时命题也成立，那么就可以递推出对所有不小于 n_0 的正整数 n_0+1，n_0+2，n_0+3，…命题都成立.

4. 用数学归纳法进行证明时，要分两个步骤，缺一不可.

(1) 证明了第一步，就获得了递推的基础，但仅靠这一步还不能说明结论的普遍性. 在第一步中，考察结论成立的最小正整数就足够了，没有必要再考察几个正整数，即使命题对这几个正整数都成立，也不能保证命题对其他正整数也成立.

(2) 证明了第二步，就获得了递推的依据，但没有第一步就失去了递推的基础. 只有把第一步和第二步结合在一起，才能获得普遍性的结论. 因此，完成了一、二两步后，还要做一个总的结论.

在第二步中，在递推之前，$n=k$ 时结论是否成立是不确定的，因此用假设二字，这一步的实质是证明命题对 $n=k$ 的正确性可以传递到 $n=k+1$ 时的情况. 有了这一步，联系第一步的结论（命题对 $n=n_0$ 成立），就可以知道命题对 n_0+1 也成立，进而再由第二步可知 $n=(n_0+1)+1$ 即 $n=n_0+2$ 也成立……这样递推下去就可以知道对于所有不小于 n_0 的正整数都成立. 在这一步中，$n=k$ 时命题成立，可以作为条件加以运用，而 $n=k+1$ 时的情况则有待利用归纳假设、已知的定义、公式、定理加以证明，不能直接将 $n=k+1$ 代入命题.

三、拓展资源

（一）逻辑简史

一、逻辑学的产生

逻辑学是一门古老的科学，从它产生到如今，已经有了两千多年的历史．逻辑学的发源地有三个，这就是古代的中国、印度和希腊．

中国在春秋战国时期，逻辑思想曾有很大发展，史称“明辩之学”，主要内容表现在后期墨家、荀况、韩非等人的著述中．其中，以《墨经》和《正名篇》对逻辑学的贡献最为卓著．例如，《墨经》提出了“以名举实，以辞抒意，以说出故”的光辉思想，这里所谓“名”，相当于概念，所谓“辞”相当于判断（或命题），所谓“说”相当于推理，它说明，在人们的思维和论证过程中，概念是用来反映事物的，判断是用来表达思想认识的，推理是用来推导事物的因果联系的，这是对概念、判断、推理的本质和作用所作的精辟的说明．又如，《墨经》说“或谓之牛，或谓之非牛，是争彼也．是不俱当，不俱当，必或不当”．这就是说，“是牛”和“不是牛”这两个论断不能都成立，必有一个不能成立．这里实际上表述了矛盾律的思想．

古代印度的逻辑学说，名曰“因明”．“因”之推理的依据，“明”即通常所说的“学”，“因明”就是古代印度关于推理的学说．主要代表著作有：陈那的《因明正理门论》、商羯罗主的《因明入正理论》等．这些著作主要研究了推理和论证的方法，形成了古代印度特有的逻辑理论和体系．例如，陈那提出“三支论式”，认为每一个推理形式都是由“宗”、“因”、“喻”这三部分组成的．这里所谓“宗”相当于三段论的结论，所谓“因”相当于三段论的小前提，所谓“喻”相当于三段论的大前提．如：

宗：此山有火

因：此山有烟

喻：凡有烟的地方都有火

可见，“三支论式”虽与三段论有所不同，但是它们在推理形式上是基本一致的．

古代希腊是逻辑学的主要诞生地．对逻辑学进行了全面的研究并且在理论上有系统建树的，是古希腊哲学家亚里士多德．他著有：《范畴篇》、《解释篇》、《前分析篇》、《后分析篇》、《论辩篇》和《论缪篇》，后来合称《工具论》．亚里士多德在这些著作中主要研究了概念、逻辑和定义的问题，判断及其种类和关系，三段论学说，逻辑证明的理论，辩论的方法和驳斥诡辩的方法等．此外，亚里士多德在其主要哲学著作《形而上学》中，明确地指出了矛盾律和排中律，同时也涉及到同一律．亚里士多德的逻辑，由于是以对概念（即词项）的研究为基础的，所以，现在人们把它称为“词项逻辑”．亚里士多德的重大贡献奠定了西方逻辑学发展的基础．从此以后，亚里士多德的逻辑学说得到了不断的丰富和发展，直到今天，我们所学的普通逻辑（形式逻辑），其主要内容都可以从亚里士多德的著作中找到它们的原型．

二、逻辑学的发展

在亚里士多德之后，古希腊斯多噶学派以及欧洲中世纪的一些逻辑学家，主要研究了假言推断、选言判断、联言判断以及由它们所组成的推理形式，并且提出了推理的规则和逻辑公式，充实了亚氏逻辑的内容．由于这部分内容是建立在对判断（即命题）进行研究的基础上的，所以人们把它称为“命题逻辑”．

17世纪，随着经验自然科学的兴起和发展，英国哲学家弗兰西斯·培根提出了科学归纳法，奠定了归纳逻辑的基础．培根的主要著作是《新工具》，在这部著作中，培根批评了亚氏的演绎推理（主要是三段论），陈述了他所提出的“三表法”和“排除法”．所谓“三表”，就是“存在和具有表”、“差异表”、“程度表”．通过这些表，把观察到的事物现象加以整理和排列．所谓“排除”，就是从三表中把那些不相干的性质舍弃掉，进而找到事物之间的因果联系，发现事物的一般规律．培根认为，这才是“真正的归纳法”．

在培根以后，英国哲学家约翰·穆勒继承并发展了培根的归纳逻辑，在他所著的《逻辑体系：归纳和演绎》（我国近代学者严复译为《穆勒名学》）中，系统地阐述了寻求现象间因果联系的五种归纳方法，即契合法、差异法、契合差异并用法、共变法和剩余法，逻辑史上通称为“穆勒五法”．

公元1662年，法国出版了亚诺德和尼柯尔合著的《波尔·罗亚尔逻辑》（原名《逻辑学或思维术》，我国有人译为“王港逻辑”）．这是一本逻辑学教学书，共有四大部分，分别讨论了概念、判断、推理和方法问题．至此，演绎、归纳和一般方法融为一体的传统逻辑便基本定型了．

18世纪到19世纪，德国古典哲学家康德、黑格尔等人也曾研究逻辑问题．康德第一次使用了“形式逻辑”这个名称，并对逻辑问题有不少论述，不过，他把逻辑规律和逻辑形式都看成是先于经验的东西．如他说：形式逻辑“是一种理性的科学，同时从它的形式和内容看，是一种关于思想的必然规律的先验的科学”．黑格尔批评了旧逻辑中的形式主义和形而上学，用极大的精力研究了人类辩证思维的形式和规律，在逻辑史上提出了第一辩证逻辑的体系．虽然他的辩证逻辑体系是建立在唯心主义基础上的，是头足倒置的，但是，其中却包含有不少合理的内核和深刻的思想．

19世纪中叶以后，马克思、恩格斯和列宁对逻辑学有许多精辟的论述．他们运用辩证唯物主义的观点和方法研究逻辑问题，一方面在批判黑格尔辩证逻辑体系中的唯心主义的同时，吸收了其中的合理因素，为科学的辩证逻辑奠定了坚实的基础；另一方面又在批评旧形式逻辑中的唯心主义和形而上学的同时，科学地阐明了形式逻辑的某些基本原理，对丰富和发展形式逻辑作出了重要贡献．

三、现代逻辑的诞生和发展

早在17世纪末，德国哲学家莱布尼茨就提出了用数学方法处理演绎逻辑，把推理变成逻辑演算的光辉思想，因而它成了数理逻辑（即现代形式逻辑）的奠基人．一百多年以后，英国数学家布尔建立了“逻辑代数”（即布尔代数），把莱布尼茨的思想变成现实，成为数理逻辑的早期形式．随后，弗雷格、罗素和怀德海等人建立了命题演算和谓词演算这样两个数理逻辑基础演算，使数理逻辑进一步系统和完善起来，发展成为一门新兴的学科．罗素和怀德海的巨著《数学原理》，就是这方面的主要成果和标志．到20世纪30年代，数理逻辑已经完全成熟，40年代以来，又得到了迅速的发展．其表现是：数理逻辑的主要分支“集合论”、“证明论”、“递归论”和“模型论”等应运而生并发展起来；在命题演算和谓词演算的基础上，发展了模态逻辑、多值逻辑、时态逻辑、相干逻辑、模糊逻辑和规范逻辑等非标准的逻辑分支；数理逻辑在现代技术科学中得到广泛

的应用，有力地推动了电子计算机的不断发展，人工智能的产生正是数理逻辑的一个伟大的历史性成果.

恩格斯曾说过："每一时代的理论思维，从而我们时代的理论思维，都是一种历史的产物，在不同的时代具有非常不同的形式，并因而具有非常不同的内容. 因此，关于思维的科学，和其他任何科学一样，是一种历史的科学，关于人的思维的历史发展的科学."逻辑学从词项逻辑向命题逻辑的发展，从演绎逻辑向归纳逻辑的发展，从传统逻辑向现代逻辑的发展，正好说明了这一点. 为了学好普通逻辑，理解和掌握其基本内容及其来龙去脉，学点逻辑史是很有必要的.

（二）爱因斯坦与哥德尔的故事

爱因斯坦和哥德尔相识于 1933 年，当时哥德尔只有 27 岁，而爱因斯坦已 54 岁. 作为第三帝国（1933 年至 1945 年纳粹统治的德国）的难民，在第二次世界大战期间来到美国，他们都讲德语. 从 20 世纪 40 年代起，他们就是普林斯顿高等研究院的教授，他们的办公室离得很近，每天一起步行上班，两人之间有着深厚的友谊.

尽管爱因斯坦是物理学家，哥德尔是数学家，但是，他们都具有超越其学科领域的智慧. 他们在科学上的密切关系源于两人深刻的性格差异. 爱因斯坦是一个自信而坚定不移的人，而哥德尔往往在争论之前就退却了. 哥德尔两次罹患神经衰弱. 在最好的情况下，哥德尔是一个体弱的人，最糟糕的时候，他则深受忧郁症的困扰. 1948 年，哥德尔开始研究广义相对论，他成功地建立了一个新的宇宙模型. 通过构造理论的精确解——能够计算重力场之力的场方程——哥德尔获得了上述原创性和逻辑上首尾一致的结果. 论证的出发点十分简单，但具有完全令人信服的权威. 哥德尔一生勤奋治学，只发表过几篇逻辑学论文，但都是鸿篇巨制. 发表于 1931 年的论文《论数学原理和有关系统的形式不可判定命题》就是其中的一篇. 该文论证了后来以他的名字命名的不完全性定理.

公理化的方法带给数学的影响，犹如数学方法对物理学的影响：数学如何将物理学的内容统一在一个架构之内，公理化方法也就如何将数学的内容整合在一个框架之下. 正如物理学家急切地寻找一切物理现象的最终理论，数学家也梦想着将其理论建立在一个稳固的基础上. 而公理化就是其中最成功的方法——找出所有数学体系的最根本的元素（比如运算方法，运算元素）之后，用纯逻辑的方法一步一步地推导，将过去所有通过直觉发现的数学定理一个接一个地"证明"出来. 这样，所有的数学内容就用必真的逻辑保证了其正确性.

公理化方法的威力是如此的巨大，以至于 20 世纪最伟大的数学家希尔伯特将其后半生的精力投入到寻找使全部数学首尾一贯的公理之中. 然后，数学家们便可以无忧无虑地在这个基础上建立自己的体系了. 材料都已经准备好了，剩下的由数学家去玩吧！然而，这个欲将全部数学公理化的梦想被哥德尔的不完全性定理彻底粉碎了. 哥德尔的不完全性定理，大意是说，任何一个理论系统，都存在不可判断的命题，同时系统的矛盾性不可能在本系统获得证明. 它是 20 世纪数学的里程碑，它开创了现代逻辑发展的新时期，同时，它还意味着计算机绝不可能按程序化的方式来解决所有的数学问题. 为表彰哥德尔的功绩，1951 年在授予哥德尔爱因斯坦勋章时，大数学家冯·诺伊曼说："库尔特·哥德尔在现代逻辑方面的成就是无与伦比的、不朽的——确实，它们不只是一座纪念碑，而且是一座其意义由于受时间、空间限制还未显现的里程碑."

广义相对论的主要思想——空间与时间的融合——并不难理解. 毕竟，在日常生活中空间和时间是

融合的．人们通过确定事件是在何时何地发生的来确定事件本身．在三维地图上，三个数字足以指定某地的空间位置：经度、纬度和高度．如果再加上时间，就可以在时空中精确地确定事件．进一步，如果一个事件可以用4个数字来定义，那么一系列事件就可以用一系列这样的4个数字来定义．在广义相对论中，这样的系列称为世界线．

这样，广义相对论在时空几何与时空中运动物体的行为之间建立起深刻的联系．想象在垫子上放一块大理石，轻轻推动大理石，它将沿直线运动．如果再在垫子上放置一个滚木球，对滚木球上的大理石施以同样的推动，它将沿下陷的表面滚动，其运动轨迹由直线变成了曲线．该木球的重量使垫子这个介质变形了，而变形的介质影响了大理石的运动．

四、教学案例

案例1：2.1.1　合情推理

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义．

（2）能利用归纳进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用．

2. 过程与方法

（1）通过探索、研究、归纳、总结形成本节的知识结构．

（2）让学生认识到数学既是演绎的科学，又是归纳的科学，数学结论和数学证明的发现主要是靠合情推理．

3. 情感、态度与价值观

（1）结合本节内容，强调推理与其他学科以及实际生活的联系，体会推理的意义及重要性．

（2）体会合情推理有助于培养学生进行归纳的严谨作风，从而形成实事求是、力戒浮夸的思维习惯．

（二）教学重点和难点

重点：合情推理的定义及归纳推理的定义．

难点：归纳推理的基本方法，如何提高数学思维能力．

（三）教学方法

以教师为主导，以学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认识规律出发进行启发，运用讨论法、讲授法调动学生积极性．引导学生在学习过程中体会知识的价值，感受知识的无穷魅力．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课引导	我们看过侦探小说《福尔摩斯探案集》中，描写推理的一个片段（教科书第二章的引言）. 【问题1】生活中还有哪些例子也涉及到推理？	教师提出问题，学生思考并积极回答习题.	通过思考问题，可使学生初步感受到推理的意义和价值.
举例说明	物理上曾有过美好的愿望： 制造不消耗能量的机器——永动机，最早是法国人亨内考设计的方案失败，后有采用“螺旋汲水器”设计方案失败，利用“轮子惯性”方案失败，利用“水的浮力”方案失败，利用“同性磁极的排斥作用”方案失败. 得出结论：任何永动机设计方案都要失败. 法国化学家拉瓦锡根据硫酸有氧元素，硝酸有氧元素，碳酸中有氧元素，硫酸、硝酸、碳酸都是酸，得出结论：一切酸中都含有氧元素.	教师写出前提条件，引导学生说出结论.	使学生感知推理是人的一种思维方式，这不仅在数学中有着不可替代的作用，而且在物理、化学、生物、医学、政治等各个领域都有着广泛的应用.
概念形成及深化	一、基本概念 1. 推理：在日常生活中，我们经常会自觉或不自觉地根据一个或几个已知事实（或假设）得出一个判断，这种思维方式就是推理. 根据推理定义知，从结构上说，推理一般有两部分组成，一部分是已知的事实（或假设）叫做前提，一部分是由已知推出的判断，叫做结论，形式为 $\dfrac{a /\!/ b,\ b /\!/ c}{a /\!/ c}$ 了解推理的一般形式，常用连接词将前提和结论逻辑的连接，常用的有“因为……，所以……”，“根据……，可知……”，“如果……，那么……”. 2. 推理分类：合情推理与演绎推理. 合情推理：根据已有的事实和正确的结论，（包括定义、公理、定理等），实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程. 分类：归纳推理和类比推理是数学中常用的合情推理. 归纳推理（归纳）：是从个别事实中概括出一般性的一种推理模式. 举例说明（推导等差数列的通项公式）.	教师通过上面的例子讲解基本概念，学生通过例子理解概念. 教师讲解推理的各种分类.	强化理解归纳推理的思维方式，提高逻辑推理能力. 使学生对推理有一个系统的认识.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="2">概念形成及深化</td><td>学习等差数列时，如何推导其通项公式呢？
$a_1=a_1+0d$.
$a_2=a_1+d=a_1+1d$.
$a_3=a_2+d=a_1+2d$.
……
$a_n=a_1+(n-1)d$
这种根据一类事物的部分对象具有的某种性质，推出这类事物的所有对象都具有这种性质的推理，叫做归纳推理. 归纳是从特殊到一般的过程.
根据归纳推理的定义，我们可以得出归纳推理的一般模式：集合 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，
x_1 具有性质 F，
x_2 具有性质 F，
……
x_n 具有性质 F，
集合 A 中所有元素具有性质 F.</td><td>教师引导学生复习等差数列通项的推导过程.</td><td>通过已经学过的实例理解归纳推理的步骤，过渡自然而流畅，学生易于理解和记忆.</td></tr>
<tr><td>二、通过例题写出归纳推理一般步骤
$6=3+3$，
$8=3+5$，
$10=3+7=5+5$，
$12=5+7$，
$14=3+11=7+7$，
$16=3+13=5+11$，
……
任何一个大于 4 的偶数都可以表示为两个奇质数之和，这就是著名的哥德巴赫猜想，简称“1+1”，这个猜想至今没有人能回答它的正确性.
归纳推理的一般步骤：
(1) 通过观察个别情况发现某些相同的性质；
(2) 从已知的相同性质中推出一个明确表述的一般性命题.</td><td>教师展示大屏幕，学生思考并作答.</td><td>通过著名的哥德巴赫猜想，我国数学家陈景润的贡献，提高学生学习的兴趣，体会成功的喜悦，培养坚韧不拔、勇于攀登的精神，并进一步巩固归纳推理的步骤.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
例题讲解	三、基本例题巩固归纳过程 例1　用推理的形式表示等差数列 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的前 n 项和 S_n 的归纳过程. 例2　设 $f(n)=n^2+n+41$，$n\in \mathbf{N}_+$，计算 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，…，$f(10)$的值，同时作出归纳推理，并用 $n=40$ 验证猜想是否正确. 说明：(1) 由归纳推理所得的结论虽然未必可靠，但它由特殊到一般，由具体到抽象的认识性能，提供科学的发现方法，确实是非常有用的； (2) 一般地，如果归纳的个别情况越多，越具有代表性，那么推广的一般性的命题就越可靠.	教师展示大屏幕显示例题，先让学生讨论并作答，教师完善.	通过例题巩固归纳推理的过程，同时了解归纳推理的可靠性，培养学生分析问题解决问题的能力.
归纳总结	四、小结 (1) 推理、合情推理、归纳推理的定义； (2) 归纳推理的一般模式； (3) 归纳推理的一般步骤； (4) 归纳推理的特点.	先请一位学生总结，其他学生补充，教师完善，用多媒体展示出来.	巩固本节课所学的知识，培养学生运用所学知识、方法解决实际问题的能力.
反馈练习	五、课堂练习及课后作业 (1) 练习：教科书第 56 页，练习 A，1，2. (2) 作业：教科书第 56 页，练习 B，1，2.	课堂练习要求每个学生都能完成；作业，第一题都做，第二题学有余力的同学做.	巩固知识，发现和弥补教学中的不足，教师及时调控、讲解，帮助学生完善知识结构.

案例 2：2.2.1　综合法与分析法

(一) 教学目标

1. 知识与技能

(1) 了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法；

(2) 了解分析法和综合法的思维过程和特点.

2. 过程与方法

(1) 通过对实例的分析、归纳与总结的过程，发展学生的理性思维能力；

(2) 通过实际演练，使学生体会证明的必要性，并发展他们的分析问题、解决问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

通过本节课的学习，了解数学直接证明的两种基本方法，感受逻辑证明在数学及日常生活中的作

用，养成言之有理、论证有据的好习惯，发展学生的思维能力，逐步形成理性思维和科学精神.

（二）教学重点和难点

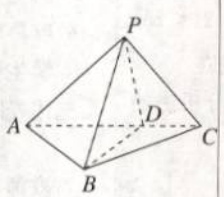
教学的重点：分析法和综合法的思维过程及特点.

教学的难点：分析法和综合法的应用.

（三）教学方法

以教师为主导，学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认知规律出发，进行启发、诱导、探索，运用分组讨论方法、引导探究法等，充分调动学生的积极性，层层设疑，发挥学生的主体作用，引导学生在自主学习与分组讨论交流中体会知识的价值，感受知识的无穷魅力，培养团队合作精神.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
展示实例提出问题	例 1　如图，在四面体 $P\text{-}ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$PA=PB=PC$，D 是 AC 的中点. 求证：PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在平面.  证明：连接 BD，因为 BD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边上的中线，所以 $DA=DC=DB$. 又因为 $PA=PB=PC$，PD 是 $\triangle PAD$，$\triangle PBD$，$\triangle PCD$ 的公共边，所以 $\triangle PAD\cong\triangle PBD\cong\triangle PCD$. 于是 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC$，而 $\angle PDA=\angle PDC=90°$，因此，$\angle PDB=90°$，可见 $PD\perp AC$，$PD\perp BD$，由此可知 PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面. 【问题 1】请同学们思考一下本题的步骤有哪几步？若用符号如何表示它们间的推理关系？ (1) 由已知 BD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线，推出 $DA=DB=DC$，记为 P_0（已知）$\Rightarrow P_1$； (2) 由 $DA=DB=DC$ 及已知条件，推出三个三角形全等，记为 $P_1\Rightarrow P_2$； (3) 由三个三角形全等，推出 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90°$，记为 $P_2\Rightarrow P_3$； (4) 由 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90°$，推出 $PD\perp\triangle ABC$ 所在平面，记为 $P_3\Rightarrow P_4$（结论）. 这个证明步骤用符号表示是： P_0（已知）$\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_4$（结论）.	教师展示电脑大屏幕，显示例 1，学生动脑思考，然后调动学生积极发言，给出本题的做法. 做法可能很多，教师都应给予肯定和表扬，选出其中的一种显示在大屏幕上. 师生共同分析做出解答. 师问生答.	根据学生的知识结构回顾旧知，引入新知，过渡自然，符合学生的认知规律. 活跃课堂气氛，培养学生学习数学的兴趣. 培养学生分析、归纳、总结问题的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲解	【问题2】上述证明方法应用的是哪一种证明方法？其主要特点是什么？ 综合法，其要求特点是从原因导出结果的思维方法，即从已知条件出发，经过逐步推理，最后达到待证的结论.	学生思考并回答.	培养学生思考、分析、归纳的习惯，以及团队协作精神.
	【问题3】若从待证结论出发，一步一步寻求结论成立的充分条件，最后达到题解的已知条件或已被证明的事实，这是什么证明方法？ 分析法： 下面我们来看一下例2，请同学们自己做出解答. 例2　求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.	教师展示大屏幕，显示例2，学生自己动手做.	
	证明：因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}$和$2\sqrt{5}$都是正数，所以为了证明$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$，只需证明$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$. 展开得$10+2\sqrt{21}<20$，即$\sqrt{21}<5$. 只需证明$21<25$，因为$21<25$成立，所以不等式$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$成立.	因为有前例，所以较容易写出.	
	【问题4】类比综合法的符号表示，写出分析法的步骤的符号表示. B(结论) $\Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_n = A$(已知)	学生分组讨论然后选代表回答.	
	【问题5】通过上述两个例子，请总结一下分析法和综合法的思维过程及特点. 从上面的例子可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”，其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件. 综合法的特点是：从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”，其逐步推理，实际上是寻找它的必要条件.	教师展示大屏幕与学生一起完善答案.	让学生了解综合法和分析法的思考过程及特点，体会它们之间的联系.
	【问题6】分析法和综合法各有其特点，在实际解题时，用哪一种方法较好？ 从寻求解题思路来看，分析法执果索因，常常根底渐近，有希望成功；综合法由因导果，往往枝节横生，不容易奏效. 就表达过程而论，分析法叙述繁琐，文辞冗长；综合法形式简洁，条理清晰. 即分析法利于思考，综合法便于表达. 因此在实际解题时，常常把分析法和综合法结合起来运用，先以分析法为主寻求解题思路，再用综合法有条理地表述解题过程.	此为难点，所以教师分析并解答.	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
反馈训练	下面请同学们做两个练习： 练习1　求证：$\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2.$ 练习2　求证：当一个圆与一个正方形周长相等时，这个圆的面积比正方形的面积大.	教师利用大屏幕显示练习. 学生做练习，教师巡视，选有代表性的做法用实物投影仪显示分析.	让学生体会在实际解题时综合法和分析法的灵活应用，培养学生应用所学知识、方法解决实际问题的能力.
归纳总结	(1) 直接证明的两种基本方法：分析法和综合法； (2) 分析法和综合法的思维过程及特点.	先请一位学生总结，其他学生补充，教师完善，并用多媒体展示出来.	让学生养成善于总结的好习惯，并对本节的知识研究线索有一个全面的认识.
布置作业	(1) 认真阅读本节教材第63～65页的内容； (2) 必做题：教科书第65页，练习A，1，2； (3) 选做题：教科书第65页，练习B，1，2.	书面作业第一个层次要求所有的学生完成，第二层次要求学有余力的同学完成.	(1) 巩固知识，发现教学中的不足； (2) 培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高综合运用数学知识的能力； (3) 通过练习发现学生掌握新知识的程度，教师及时调控讲解，帮助学生完善知识结构.

五、习题参考答案与提示

探索与研究（第55页）

$F+V-E=2.$

练习A（第56页）

1. 设 $f(n)$ 为 n 个点可连的弦的条数，则 $f(2)=1$，$f(3)=3$，$f(4)=6$，$f(5)=10$，…，$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}.$

2. 当 $n=1$ 时，原式 $=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$，

当 $n=2$ 时，原式 $=\sqrt{1\,111-22}=\sqrt{1\,089}=33$，

当 $n=3$ 时，原式 $=\sqrt{111\,111-222}=\sqrt{110\,889}=333$，

猜测 $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}$.

练习 B（第 56 页）

1. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. 不正确，验证 $n=6$ 就不正确.

探索与研究（第 58 页）

在立体几何中，和平面几何相类似的勾股定理是 $S^2_{\triangle MNL}=S^2_{\triangle OMN}+S^2_{\triangle ONL}+S^2_{\triangle OML}$.

证明：设 $OM=a$，$ON=b$，$OL=c$，则

$$S^2_{\triangle OMN}+S^2_{\triangle ONL}+S^2_{\triangle OML}=\left(\frac{1}{2}ab\right)^2+\left(\frac{1}{2}bc\right)^2+\left(\frac{1}{2}ac\right)^2=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{4},$$

$$S^2_{\triangle MNL}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}\sin\angle MLN\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2)(b^2+c^2)\sin^2\angle MLN. \qquad (*)$$

因为 $\cos\angle MLN=\dfrac{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)-(a^2+b^2)}{2\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$，

所以 $\sin^2\angle MLN=1-\cos^2\angle MLN=1-\dfrac{c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$

$$=\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}.$$

代入（$*$）式得

$$S^2_{\triangle MNL}=\frac{1}{4}(a^2+c^2)(b^2+c^2)\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{4}.$$

所以 $S^2_{\triangle MNL}=S^2_{\triangle OMN}+S^2_{\triangle ONL}+S^2_{\triangle OML}$.

练习（第 59 页）

(1) 一个平面若和两个平行平面中的一个相交，则必和另一个也相交，此结论成立.

(2) 若两个平面同时垂直第三个平面，则这两个平面也互相平行，此结论不成立.

练习 A（第 61 页）

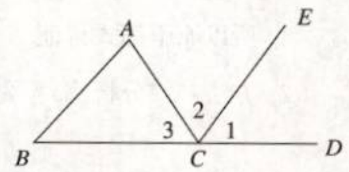
1. $\left.\begin{array}{l}\text{因为 } AB\parallel CD,\\ \text{所以 } \angle1=\angle2.\end{array}\right\}$ 三段论推理

$\left.\begin{array}{l}\angle1=\angle2,\\ \text{又因为 } \angle2=\angle3,\\ \text{所以 } \angle1=\angle3.\end{array}\right\}$ 关系推理

2. 略.

练习 B（第 61 页）

1. 已知：$\triangle ABC$，求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.



（第 1 题）

证明：延长 BC 到 D，得 $\angle ACB$ 的外角 $\angle ACD$，过点 C 在 $\angle ACD$ 内作 $CE/\!/AB$（如图），则 $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle A$.

又因为 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，

所以 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

第一步的大前提是：若两直线平行，则同位角、内错角相等.

小前提是：$CE/\!/AB$.

第二步的大前提是：平角是 180°.

小前提是：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$.

2. 若 $x<0$，则 $f(x)$ 的各项均为正，所以 $f(x)>0$.

若 $x=0$，则 $f(x)=10$.

若 $0<x\leqslant 1$，则 $f(x)=x^8+x^2(1-x^3)+1-x>0$.

若 $x>1$，则 $f(x)=x^5(x^3-1)+x(x-1)+1>0$.

综上，$f(x)$ 恒为正数.

习题 2-1A（第 62 页）

1. 猜想：$\frac{1}{2}[n(n+1)-(n-1)n]=n$.

证明：左边 $=\frac{1}{2}[n^2+n-(n^2-n)]=\frac{1}{2}\times 2n=n=$ 右边.

2. 略.

3. （1）不正确；　　（2）不正确；

（3）不正确；　　（4）正确.

习题 2-1 B（第 62 页）

1. $(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$.

2. 正确. 因为这两步遵循三段论推理，即“$b\Rightarrow c$，$a\Rightarrow b$，则 $a\Rightarrow c$”.

3. 略.

练习 A（第 65 页）

1. 因为 $\log_n(n+1)=\frac{1}{\log_{n+1}n}>0$ $(n>1)$，

所以要证原式成立，只需证明 $\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n<1$，

而 $\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n<\left[\frac{\log_{n+1}(n+2)+\log_{n+1}n}{2}\right]^2$

$$=\left[\frac{\log_{n+1}n(n+2)}{2}\right]^2$$

$$<\frac{1}{4}\log_{n+1}^2\left(\frac{2n+2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times 2^2=1,$$

所以原不等式得证.

2. 方法一（分析法）：要证$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$成立，只需证明

$$\frac{a}{a+m}>\frac{c}{c+m}-\frac{b}{b+m}，即\frac{a}{a+m}>\frac{m(c-b)}{(c+m)(b+m)}.$$

因为 $a<b+c$，$a>c-b$，$(c+m)(b+m)-m(a+m)=bc+m(b+c-a)$，

又因为 a，b，c，m 均大于零，且 $b+c-a>0$，

所以$(c+m)(b+m)-m(a+m)>0$，

即$(c+m)(b+m)>m(a+m)$.

所以$\frac{1}{a+m}>\frac{m}{(c+m)(b+m)}$.

所以$\frac{a}{a+m}>\frac{m(c-b)}{(c+m)(b+m)}$.

所以原不等式得证.

方法二（综合法）：因为$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{a}{a+b+m}+\frac{b}{a+b+m}=\frac{a+b}{a+b+m}$，

$\frac{a+b}{a+b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{(a+b-c)m}{(a+b+m)(c+m)}>0$，

所以$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$，

所以原不等式得证.

练习 B（第 65 页）

1. 方法一：要证$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$（$a\geqslant 3$）成立，

只需证明$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$，

两边平方得 $2a-3+2\sqrt{a(a-3)}<2a-3+2\sqrt{(a-2)(a-1)}$，

所以只需证明$\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-2)(a-1)}$，

两边平方得 $a^2-3a<a^2-3a+2$，

即　$0<2$，

所以原不等式得证.

方法二：因为$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$，

$$\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}=\frac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}},$$

$$\sqrt{a}>\sqrt{a-2}，\sqrt{a-1}>\sqrt{a-3},$$

所以$\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}>0$.

所以$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}<\dfrac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$.

所以$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.

所以原不等式成立.

2. 因为 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$,

所以 $3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$,

即 $3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,

所以 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

练习 A(第 67 页)

1. 假设 a 与 b 不平行，因为 a，b 在同一平面上，所以 $a\cap b=M$.

所以 $M\in a$，$M\in b$.

而 $a/\!/c$，$b/\!/c$，这与过直线外一点 M 有且只有一条直线与直线 c 平行矛盾，所以假设不成立，于是 $a/\!/b$.

2. 假设$\sqrt{p}$是有理数，设$\sqrt{p}=\dfrac{n}{m}$（m，n 是互质的正整数），

所以 $p=\dfrac{n^2}{m^2}$.

当 $m=1$ 时，$p=n^2$ 不满足质数定义；

当 $m\neq1$ 时，$\dfrac{n}{m}$为不能整除的分数.

所以 $p=\dfrac{n^2}{m^2}$也为不能整除的分数.

而 p 是质数，也是整数，与已知矛盾.

所以假设不成立，$\sqrt{p}$为无理数.

练习 B（第 68 页）

1. 假设当 $x>\dfrac{1}{2}$时，$x^2+2x-1=0$，则 $(x+1)^2=2$,

所以 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

当 $x=-1-\sqrt{2}$时，$x<0$，与已知 $x>\dfrac{1}{2}$矛盾；

当 $x=\sqrt{2}-1$ 时，$x<\dfrac{1}{2}$，与已知 $x>\dfrac{1}{2}$矛盾.

所以假设不成立，原不等式成立.

2. 假设 $\lg 2=\dfrac{n}{m}$(m，n 为互质的正整数)，那么 $10^{\frac{n}{m}}=2$，得 $2^m=10^n$.

因为 2^m 的尾数为 2，4，6，8，10^n 的尾数为 0，

所以 2^m 不可能与 10^n 相等.

所以假设不成立，lg 2 是无理数.

习题 2-2A（第 68 页）

1. 因为 $x\neq-1$，所以 $(x+1)^2>0$.

所以要证 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\dfrac{1}{3}$ 成立，

则只需证明 $3(x^2-6x+5)+(x^2+2x+1)\geqslant0$，

即 $4x^2-16x+16\geqslant0$.

因此，只需证明 $4(x-2)^2\geqslant0$，

因为 $4(x-2)^2\geqslant0$，

所以原不等式得证.

2. 要证 $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，只需证明 $(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2>(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$，

展开得 $13+2\sqrt{42}>13+2\sqrt{40}$.

所以只需证明 $\sqrt{42}>\sqrt{40}$，

即 $42>40$.

因为 $42>40$ 成立，

所以原不等式得证.

3. 假设过一点 P 与一平面 α 垂直的直线不只一条 PA，还有一条 $PB\perp\alpha$.

因为 $PA\perp\alpha$，所以 $PA/\!/PB$. 而 $PA\cap PB=P$，所以产生矛盾.

所以假设不成立，原命题得证.

4. 设方程 $x^2+2px+2q=0$ 的有理根为 $x=\dfrac{m}{n}$（m，n 是互质的整数）. 代入方程得

$$\frac{m^2}{n^2}+2p\frac{m}{n}+2q=0，即 m^2+2pmn+2qn^2=0.$$

所以 $m^2=-2(pmn+qn^2)$. 因为 m^2 为偶数，所以 m 也为偶数.

设 $m=2k(k\in\mathbf{Z})$，则

$$4k^2+2pn2k+2qn^2=0，$$

所以 $qn^2=-2k^2-2pnk=-2(k^2+pnk)$ 为偶数.

因为 q 为奇数，所以 n^2 为偶数，则 n 为偶数.

因为 m 也为偶数，而假设的 m，n 为互质的整数，

所以产生矛盾，假设不成立，原命题成立.

习题 2-2B（第 68 页）

1. 要证 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，

只需证明 $(ac)^2+(bd)^2+2abcd\leqslant(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2$，

即 $2abcd\leqslant(bc)^2+(ad)^2$.

由基本不等式知此式显然成立，

所以原不等式得证.

2. 此推理没有注意到比例性质应用的前提条件，犯了推理过程中论据不充分的错误.

$\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y}=\dfrac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\dfrac{1}{2}$需满足 $x+y+z\neq 0$；

$\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1$ 需满足 $x\neq y$.

3. 已知：三棱锥 $V\text{-}ABC$ 为正三棱锥.

求证：$VC\perp AB$，$VB\perp AC$，$VA\perp BC$.

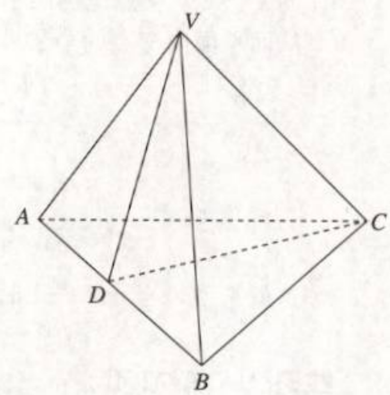
证明：因为三棱锥 $V\text{-}ABC$ 是正三棱锥，

所以侧面是等腰三角形，底面 ABC 为等边三角形.

取 AB 中点 D，连 VD，CD，则 $VD\perp AB$，$CD\perp AB$.

所以 $AB\perp$面 VCD. 所以 $VC\perp AB$.

同理可证：$VB\perp AC$，$VA\perp BC$.



（第 3 题）

4. 假设 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是有理数 m，则 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}=m$，

所以 $a\sqrt{c}=m-b\sqrt{d}$.

两边平方得

$$a^2c=m^2+b^2d-2mb\sqrt{d}.$$

因为 a，b，c，d 是有理数，a^2c，m^2，b^2d 均为有理数，而 $2mb\sqrt{d}$ 是无理数，且 $2mb\sqrt{d}=m^2+b^2d-a^2c$，

所以有理数 $m^2+b^2d-a^2c$ 不可能等于无理数 $2mb\sqrt{d}$.

所以假设不成立，原命题成立.

5. 假设结论不成立，则

$$|f(1)|<\frac{1}{2}，|f(2)|<\frac{1}{2}$$

同时成立.

所以
$$\begin{cases}|f(1)|=|1+2a|<\dfrac{1}{2}\\|f(2)|=|4+3a|<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-\dfrac{3}{4}<a<-\dfrac{1}{4}\\-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{7}{6}\end{cases}$$

所以 $a\in\varnothing$，与已知 $a\in\mathbf{R}$ 矛盾.

所以假设不成立，原命题正确.

练习（第 71 页）

1. 演绎推理.

2. 猜测 n 个圆最多有 n^2-n 个交点.

证明：第一步略.

在第二步中，假设当 $n=k$ 时，命题成立，即平面上 k 个圆最多有 $f(k)=k^2-k$ 个交点. 当平面内有 $k+1$ 个圆时，任取其中一个圆，记为圆 P. 由上述假设，除圆 P 外的其他 k 个圆的交点个数最多 $f(k)=k^2-k$. 因为每两个圆都相交于两点，所以圆 P 与其他 k 个圆都交于两点（有 $2k$ 个交点）；又因为每三个圆都无公共点，所以上面的 $2k$ 个交点两两不相同，且与平面内的其他的 k^2-k 个交点也两两不同，即增加一个圆，交点数增加 $2k$ 个，

从而平面内交点的个数最多是

$$\begin{aligned}f(k+1)&=f(k)+2k\\&=(k^2-k)+2k\\&=k^2+k\\&=(k^2+2k+1)-(k+1)\\&=(k+1)^2-(k+1).\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

练习 A（第 72 页）

1. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1),$$

那么

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\=&\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\=&\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\=&\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1].\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

2. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

那么 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\=&(2^k-1)+2^k\\=&2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

3. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&x^{2k+2}-y^{2k+2}\\=&x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}-x^2\cdot y^{2k}+x^2\cdot y^{2k}\end{aligned}$$

$$=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2).$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$，x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，

由此可知，$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$ 也能被 $x+y$ 整除.

所以，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

练习 B（第 72 页）

1. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1)$，

那么 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\
&=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2\\
&=\frac{1}{3}(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]\\
&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\\
&=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)\\
&=\frac{1}{3}(k+1)(4k^2+8k+3)\\
&=\frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1].
\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

2. 在第二步中，假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时，命题成立，当平面内有 $k(k\geqslant 2)$ 条直线时，交点个数 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)$. 那么当平面内有 $k+1$ 条直线时，其中 k 条直线，交点个数是 $\frac{1}{2}k(k-1)$，增加的一条直线与上述 k 条直线相交，增加了 k 个点，因此

$$\begin{aligned}
f(k+1)&=f(k)+k=\frac{1}{2}k(k-1)+k\\
&=\frac{1}{2}k(k+1)\\
&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1].
\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

习题 2-3A（第 73 页）

1. 略.
2. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2),$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\
=&\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\
=&\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\\
=&\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2].
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

3. (1) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\
=&(k^2+k)+2(k+1)\\
=&(k^2+3k+2)\\
=&(k^2+2k+1)+(k+1)\\
=&(k+1)^2+(k+1).
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

(2) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$2+2\times3+2\times3^2+\cdots+2\times3^{k-1}=3^k-1,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&2+2\times3+2\times3^2+\cdots+2\times3^{k-1}+2\times3^k\\
=&(3^k-1)+2\times3^k\\
=&3\cdot3^k-1\\
=&3^{k+1}-1.
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

4. 略.

5. (1) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k\cdot k,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)\\
=&(-1)^k k+(-1)^{k+1}(2k+1)\\
=&(-1)^{k+1}(2k+1-k)\\
=&(-1)^{k+1}(k+1).
\end{aligned}
$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

(2) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

习题 2-3B（第 73 页）

1. 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{k-1}a_k),$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2$$
$$=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2+a_{k+1}{}^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_ka_{k+1}).$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

2. (1) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}$$
$$=x^{2k+1}+y^{2k+1}$$
$$=x^2x^{2k-1}+x^2y^{2k-1}-x^2y^{2k-1}+y^2y^{2k-1}$$
$$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-y^{2k-1}(x^2-y^2).$$

由此可知 $x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}$ 也能被 $x+y$ 整除.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

(2) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 k^3+5k 能被 6 整除，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$(k+1)^3+5(k+1)$$
$$=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$$
$$=(k^3+5k)+3k^2+3k+6$$
$$=(k^3+5k)+3[k(k+1)+2].$$

因为 (k^3+5k) 能被 6 整除，而 $k(k+1)$ 必为偶数，于是 $3[k(k+1)+2]$ 能被 6 整除. 由此可知，$(k^3+5k)+3[k(k+1)+2]$ 也能被 6 整除.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

(3) 在第二步中，假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 能被 13 整除，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$$
$$=4^{2k+3}+3^{k+3}$$
$$=4^2\cdot 4^{2k+1}+4^2\cdot 3^{k+2}-4^2\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k+2}$$
$$=4^2(4^{2k+1}+3^{k+2})-3^{k+2}(4^2-3)$$
$$=4^2(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\cdot 3^{k+2}.$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时，$4^2(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\cdot 3^{k+2}$ 也能被 13 整除.

3. 在第二步中，假设当 $n=k(k\geqslant 4)$ 时，等式成立，即 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-3)(k\geqslant 4)$.

当凸多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 增加一个顶点 A_{k+1} 成为凸（$k+1$）边形时，增加的对角线条数为 $k-1$ 条. 所以

$$
\begin{aligned}
f(k+1)&=f(k)+k-1\\
&=\frac{1}{2}k(k-3)+k-1\\
&=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}\\
&=\frac{k^2-k-2}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k-2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}.
\end{aligned}
$$

所以，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

4. n 条直线最多把平面划分的区域个数 $f(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，一条直线把平面分成 2 个区域，又 $f(1)=\frac{1+1+2}{2}=2$，所以命题成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，直线把平面分成 $f(k)=\frac{k^2+k+2}{2}$ 区域.

当 $n=k+1$ 时，即平面内增加一条直线时，与原来 k 条直线最多有 k 个交点，这 k 个交点把这条直线分成了 $k+1$ 段，每段把原来的区域分成两部分. 即第 $k+1$ 条直线把平面划分的区域增加了 $k+1$ 个部分，

所以
$$
\begin{aligned}
f(k+1)&=f(k)+k+1=\frac{k^2+k+2}{2}+(k+1)\\
&=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}.
\end{aligned}
$$

所以，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

本章小结

Ⅲ　巩固与提高（第 75 页）

1. 猜想：$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\cdots+[(n-1)^2+(2n-1)]=(n-1)^3+n^3$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，所以左 $=$ 右，等式成立.

(2) 假设 $n=k$（$k\in \mathbf{N}_+$）时等式成立，即

$$
\begin{aligned}
&[(k-1)^2+1]+[(k-1)^2+2]+[(k-1)^2+3]+\cdots+[(k-1)^2+(2k-1)]\\
&=(k-1)^3+k^3,
\end{aligned}
$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=(k^2+1)+(k^2+2)+\cdots+(k^2+2k-1)+(k^2+2k)+(k^2+2k+1)\\
&=[(k-1)^2+1+2k-1]+[(k-1)^2+2+2k-1]+\cdots+[(k-1)^2+2k-1+2k-1]
\end{aligned}
$$

$+(k^2+2k)+(k+1)^2$

$=[(k-1)^2+1]+[(k-1)^2+2]+\cdots+[(k-1)^2+2k-1]+(2k-1)^2+(k^2+2k)+(k+1)^2$

$=(k-1)^3+k^3+(2k-1)^2+(k^2+2k)+(k+1)^2$

$=2k^3+3k^2+3k+1$

$=k^3+(k+1)^3$

所以 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上得猜想成立.

另：$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\cdots+[(n-1)^2+(2n-1)]$

$=(2n-1)(n-1)^2+(1+2+3+\cdots+2n-1)$

$=(n-1)^3+n^3$.

2. 因为 $f(1)=2$，

所以 $f(2)=f(1+1)=f^2(1)=4=2^2$，

$f(3)=f(1+2)=f(1)\cdot f(2)=8=2^3$，

$f(4)=f(1+3)=f(1)\cdot f(3)=16=2^4$，

$f(5)=f(1+4)=f(1)\cdot f(4)=32=2^5$，

……

猜想：$f(n)=2^n$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=2$ 显然成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，$f(k)=2^k$，

则当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=2^k\cdot 2=2^{k+1}$，

所以等式成立.

由 (1)(2) 知，$f(n)=2^n$ 成立.

3. 两平行平面与第三平面相交，所得的同旁的二面角的平面角相等，内错的二面角的平面角相等，同旁内二面角的平面角互补. 均为真命题.

4. 因为 $a^6+b^6-(a^4b^2+a^2b^4)$

$=a^4(a^2-b^2)+b^4(b^2-a^2)$

$=(a^2-b^2)(a^4-b^4)$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)^2$，

又因为 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$，

所以 $(a^2-b^2)^2(a^2+b^2)>0$，

即 $a^6+b^6>a^4b^2+a^2b^4$.

5. 要证原式成立，则需要证明 $ax^2+by^2\geqslant a^2x^2+b^2y^2+2abxy$，

即需要证明 $(a-a^2)x^2+(b-b^2)y^2\geqslant 2abxy$，

即 $a(1-a)x^2+b(1-b)y^2\geqslant 2abxy$. （*）

因为 $a+b=1$，

所以（*）式可变形为 $abx^2+aby^2\geqslant 2abxy$，

即 $ab(x^2+y^2)\geqslant 2abxy$，

因为 a，b 均为正数，所以要证原式成立，只需证明 $x^2+y^2\geqslant 2xy$.

因为对于一切 x，$y\in\mathbf{R}$，$x^2+y^2\geqslant 2xy$ 显然成立.

所以原不等式得证.

6. 假设方程 $f(x)=0$ 有整数根 n，则 $an^2+bn+c=0$ 成立.

所以 $n(an+b)+c=0$.

因为 c 为奇数，

所以 $n(an+b)$ 也为奇数，且 n 与 $an+b$ 都必须为奇数.

因为已知 a，b 为奇数，又 n 为奇数，

所以 $an+b$ 为偶数，这与 $an+b$ 为奇数矛盾，

所以假设不成立，原命题成立.

7. 假设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴至少有两个交点，则设交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，…，$(x_n,0)$ $(n\geqslant 2)$，且 $x_1>x_2>\cdots>x_n$，则 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$，…，$f(x_n)=0$. 而这与函数 $f(x)$ 对其定义域内任意两个实数 a，b，当 $a<b$ 时，都有 $f(a)<f(b)$ 矛盾，所以假设不成立，原命题成立.

8. (1) ①当 $n=1$ 时，左边 $=1\times2\times3=6$，右边 $=\frac{1}{4}\times1\times2\times3\times4=6$，

所以左边 = 右边，等式成立.

②假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3).$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)\\&=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4).\end{aligned}$$

所以 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上得原等式成立.

(2) ①当 $n=1$ 时，左边 $=2^2=4$，右边 $=\frac{2}{3}\times1\times2\times3=4$，

所以左边 = 右边，等式成立.

②假设 $n=k$ 时，等式成立，即 $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)$，

那么，当 $n=k+1$ 时，左边 $=2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2+[2(k+1)]^2$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)+4(k+1)^2\\&=\frac{2}{3}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{2}{3}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&=\frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

$=$右边，

所以 $n=k+1$ 时，等式成立.

综上得原等式成立.

9. (1) ①当 $n=1$ 时，$x^2-1=(x+1)(x-1)$ 显然能被 $x+1$ 整除，命题成立.

②假设 $n=k$ 时，$x^{2k}-1$ 能被 $x+1$ 整除.

当 $n=k+1$ 时，$x^{2(k+1)}-1=x^{2k}\cdot x^2-1=x^{2k}\cdot x^2-x^2+x^2-1=x^2\cdot(x^{2k}-1)+x^2-1$.

由 $n=1$ 和 $n=k$ 时知，$x^{2k}-1$，x^2-1 均能被 $x+1$ 整除，

所以 $x^{2(k+1)}-1$ 也能被 $x+1$ 整除.

所以 $n=k+1$ 时，命题成立.

综上得原命题成立.

(2) ①$n=1$ 时，$6+1=7$ 显然能被 7 整除.

②假设 $n=k$ 时，$6^{2k-1}+1$ 能被 7 整除.

则当 $n=k+1$ 时，$6^{2(k+1)-1}+1=6^{2k-1}\cdot 36+1=6^{2k-1}\cdot 36+36-36+1=(6^{2k-1}+1)\cdot 36-35$.

因为 $6^{2k-1}+1$ 和 35 均能被 7 整除，所以 $(6^{2k-1}+1)\cdot 36-35$ 能被 7 整除.

所以 $n=k+1$ 时，命题成立.

综上得原命题成立.

(3) ①当 $n=1$ 时，$1\times2\times3=6$ 显然能被 6 整除.

②假设 $n=k$ 时，$k(k+1)(2k+1)=2k^3+3k^2+k$ 能被 6 整除.

则当 $n=k+1$ 时，$(k+1)(k+2)(2k+3)=2k^3+3k^2+k+6(k^2+2k+1)$.

因为 $2k^3+3k^2+k$，$6(k^2+2k+1)$ 都能被 6 整除，

所以 $2k^3+3k^2+k+6(k^2+2k+1)$ 能被 6 整除，即当 $n=k+1$ 时命题仍然成立.

综上得 $n(n+1)(2n+1)$能被 6 整除.

10. $S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$,

$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$,

$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$,

……

猜想，$S_n=\frac{n}{n+1}$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时公式成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$.

则当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}.$$

所以当 $n=k+1$ 时，公式成立.

综上得猜想 $S_n=\frac{n}{n+1}$成立.

Ⅳ 自测与评估（第 76 页）

1. 猜想：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+3+4+\cdots+n)=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，左边$=(-1)^{1+1}\times1^2=1$，右边$=(-1)^{1+1}\times\frac{1\times2}{2}=1$，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}$成立，

那么当 $n=k+1$ 时，$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2$

$$=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k+2}\frac{k+1}{2}[-k+2(k+1)]$$

$$=(-1)^{k+2}\frac{k+1}{2}(k+2).$$

所以 $n=k+1$ 时，等式也成立，即公式成立.

综上得猜想正确.

2. 在立体几何中，两个相交平面对顶的二面角的平面角相等.（真）

3. 由 $AB\neq0$ 知 $A\neq0$ 且 $B\neq0$，所以要证明 $\lg\frac{|A|+|B|}{2}\geqslant\frac{\lg|A|+\lg|B|}{2}$ 成立，只需证明：$\lg\frac{|A|+|B|}{2}\geqslant\frac{1}{2}\lg|AB|=\lg\sqrt{|AB|}$，只需证明$\frac{|A|+|B|}{2}\geqslant\sqrt{|AB|}$. 对于正数 $|A|$，$|B|$，此式显然成立，所以原不等式得证.

4. 略.

5. (1) 当 $n=2$ 时，左边$=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$显然成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

又因为$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}=\sqrt{k}+\frac{1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k+1}}-\frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{k+1}}>0$，

所以$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

即$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

综上得原不等式成立.

六、反馈与评价

本章课后作业情况、测验成绩等作为评价的一个方面.

第三章

数系的扩充与复数

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解引进复数的必要性，了解数集的扩充过程：自然数集(**N**)→整数集(**Z**)→有理数集(**Q**)→实数集(**R**)→复数集(**C**).

2. 理解在数系的扩充中由实数集扩展到复数集出现的一些基本概念. 例如：虚数单位、复数、虚数、纯虚数、共轭复数、实部、虚部等. 理解复数相等的充要条件.

3. 了解复数的代数表示法及其几何意义.

4. 掌握进行复数代数形式的四则运算法则，了解复数代数形式的加法、减法运算的几何意义. 注意在不同数集中运算法则的联系和区别.

（二）过程与方法目标

1. 通过各种实例，了解数的概念的发展，再现知识产生的过程.

2. 通过引入虚数单位 i 的性质与研究实数的性质类比，归纳出复数的概念.

3. 通过例题和习题的训练，引导学生从实数的运算入手，由具体到抽象总结出运算规律，提高学生的运算能力.

4. 使用现代信息技术展示复数的几何意义，培养学生的直观思维能力.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 复数知识是现代科技中普遍使用的一种运算工具，是进一步学习高等数学的基础，培养和发展学生的运算能力，打好数学基础是高中阶段的基本要求.

2. 通过数系的扩充过程，让学生感受人类认识问题、发展科学的艰辛历程，要求学生对待学习要有谦虚谨慎的态度.

3. 在教学过程中，充分展示每一数学问题的关键，给学生讲清楚所面临的问题是什么和怎样解决问题. 激发学生的好奇心，培养学生学习数学的兴趣，引导学生发现和提出问题，并独立思考和研究问题，鼓励学生创造性地解决问题.

4. 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过方程的求根，体会数系扩充的必要性. 了解数学中的内部矛盾如何推动数系的扩充.

2. 揭示复数、点的坐标、向量的坐标之间的联系，建立复数加、减法运算与向量加法运算之间的联系.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章是在小学、初中和高中所学知识的基础上，介绍复数的概念、复数的代数形式的运算和数系的扩充等内容.

本章共分两大节，第一大节是“数系的扩充与复数的概念”，第二大节是“复数的运算”. 在第一大节中，首先简要地展示了数系的扩充过程，回顾了数的发展，并指出当数集扩充到实数集时，由于负数不能开平方，因而大量代数方程无法求解，于是就产生了要开拓新数集的要求，从而自然地引入虚数单位 i，复数由此而产生，接着，介绍了复数的有关概念和复数的几何表示. 主要涉及的概念有：复数、虚数、纯虚数、共轭复数、实部、虚部、复数的相等、复数的模等. 在第二大节中，介绍了复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则，同时指出了复数加法、减法的几何意义，复平面上两点间的距离公式，沟通了“数与形”之间的联系，提供了用“形”来帮助处理“数”和用“数”来帮助处理“形”的工具.

本章有两条主线：一条主线是以复数代数形式来表述复数的概念. 规定了加、乘两种运算法则，然后把减、除法分别定义为加、乘法的逆运算来推导出其运算法则. 利用把复数的代数形式 $a+bi$ 看成由 a 和 bi 两个非同类项组成的一个数，这样多项式的运算法则几乎可以全部搬过来照用不误，于是复数就与多项式、方程联系起来，从而能帮助解决一些多项式中因式分解、解方程等数学问题. 另一条主线是用复平面上的点或向量来描述复数. 由此引出了复数运算的几何意义，使复数在平面几何、解析几何中得到了广泛应用. 这两条主线在教材中是交替安排的，这样能加强学生的“形与数”结合观念，使学生在看到代数形式时就能联想到几何图形，看到几何图形就能联想到对应的复数，有利于学生深入理解复数概念，开阔学生的思路，培养和提高用“数形结合”观点来处理问题的能力.

本套教材还有两个特点希望老师讲解时注意. 第一个特点是较全面地讲述了数系扩充的背景；第二个特点是复数除法运算的引入是首先引入了复数的倒数的概念. 教学中要引导学生充分地认识到新概念

的产生过程，使学生知道它们的来龙去脉，并在头脑中形成完整的知识体系，引导学生认识到复数来源于实际生活中，又反过来为实际服务．

2. 地位和作用

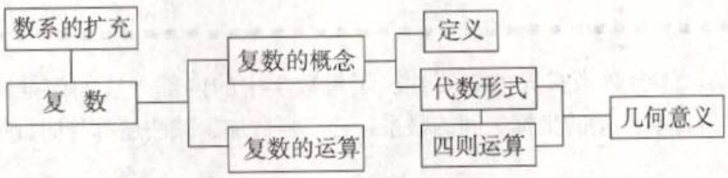
在中学里，学习一些复数的基础知识是十分必要的．这不仅可以使高中毕业生对于数的概念初步地有一个较为完整的认识，而且也给他们运用数学知识解决问题增添了新的工具，同时也为他们进一步学习高等数学、力学和电学打下了一定的基础．

3. 重点和难点

本章教材中，复数的概念，复数的代数表示方法是整个内容的出发点，复数的加、减、乘、除运算（代数形式）是本章的中心内容，也是本章教材的重点．

复数的概念（如复数相等的条件）、复数的向量表示、复数的模都与以前学过的实数概念中的相关内容不尽相同，这些内容学生不易接受和掌握，是本章中的难点．

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　数系的扩充与复数的概念	
3.1.1　实数系	1 课时
3.1.2　复数的概念	1 课时
3.1.3　复数的几何意义	1 课时
3.2　复数的运算	
3.2.1　复数的加法与减法	1 课时
3.2.2　复数的乘法	1 课时
3.2.3　复数的除法	1 课时
本章小结	1 课时

（四）教法与学法建议

3.1　数系的扩充与复数的概念

3.1.1　实数系

1. 教学重点和难点

教学重点是从数的发展理解数系的扩充过程，体会人类认识问题的过程，掌握数系的完整体系．教

学难点是理解实数体系.

2. 本小节内容是这一章的引言，起着承前启后的作用. 在这一小节中，首先简明扼要地对已经学过的数集因生产与科学发展的需要而逐步扩充的过程作了概括；然后说明，数集的每一次扩充，对数学学科本身来说，也解决了在原有数集中某种运算不是永远可以实施的矛盾，使得某些代数方程在新的数集中能够有解. 复数最初正是由于解方程的需要而产生的，后来由于在科学技术中得到应用而进一步发展. 教学中应重视增进学生对数系的了解，对各数系产生的背景的认识.

3. 在讲解数集的扩充时，为了使学生透彻理解各数集，可以通过列举大量的具体的数来进行理解.

3.1.2 复数的概念

1. 教学重点和难点. 教学重点是复数的概念与复数的相等. 教学难点是复数概念的引入.

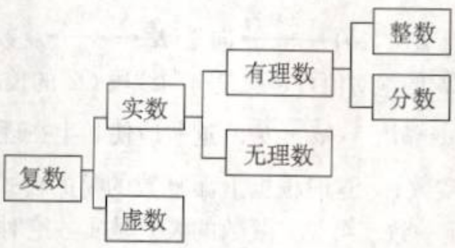
2. 复数的概念是在引入虚数单位 i 之后自然地得出的. 扩充到复数集后，方程 $x^2=-1$ 的解才存在.

3. 在引入 i 的概念后，教材只提加、乘运算，不提减法与除法，是因为把减法、除法定义为加法、乘法的逆运算，即在四则运算中突出加、乘. 这样处理更为科学、合理，分清了主次.

4. 自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 之间有如下的包含关系：

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}.$$

引导学生总结出数系的分类表：



5. 实数 a，b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部与虚部，要强调在写复数代数形式 $a+bi$ 时，必须注明 a，$b\in\mathbf{R}$.

6. 对于两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$，$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$，$b=d$，这是一项规定，即复数相等的定义. 由这个定义即得推论：$a+bi=0\Leftrightarrow a=0$，$b=0$.

7. “复数不能比较大小”的确切含义是指：不论怎样定义两个复数之间的一个关系，都不能使这种关系同时满足实数集中大小关系的四条性质：

(1) 对于任意实数 a，b 来说，$a<b$，$a=b$，$b<a$ 这三种情况有且只有一种成立；

(2) 如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

(4) 若 $a<b$，$c>0$，则 $ac<bc$，若 $a<b$，$c<0$，则 $ac>bc$.

关于两个不全是实数的复数不能比较大小的问题，教材上没有要求给出证明，它的证明超出中学数学要求的范围. 但这个问题是学生在学习中感兴趣的一个问题，可在学生知识允许的范围内举例作些说明. 但应注意的是在复数集中虽没有大小之分，但有等与不等之分.

通过“数的概念的发展”的教学，使学生认识到数的概念的每一步发展都是生产实践和科学发展的需要，以此对学生进行辩证唯物主义教育.

3.1.3 复数的几何意义

1. 教学重点和难点. 教学重点是复数的几何意义及复数的模. 教学难点是复数的模的几何意义.

2. 在讲复数集与复平面内所有点组成的集合一一对应时，要注意：

(1) 任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定. 这就是说，复数的实质是有序实数对.

(2) 复数 $z=a+bi$ 用复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示. 复平面内的点 Z 的坐标是 (a, b)，而不是 (a, bi). 也就是说，复平面内的纵坐标轴上的单位长度是 1，而不是 i. 由于 $i=0+1\cdot i$，所以用复平面内的点 $(0, 1)$ 表示 i 时，这点与原点的距离是 1，等于纵轴上的单位长度. 这就是说，当我们把纵轴上的点 $(0, 1)$ 标上虚数 i 时，不能认为这一点到原点的距离就是虚数单位 i，或者 i 就是纵轴的单位长度.

(3) 当 $a=0$ 时，对于任何 $b\neq 0$，$a+bi=0+bi$ 是纯虚数，所以纵轴上的点 $(0, b)$ $(b\neq 0)$ 都是表示纯虚数.

(4) 复数 $z=a+bi$ 中的 z，书写时小写，复平面内的点 $Z(a, b)$ 中的 Z，书写时大写. 要学生注意.

3. 模相等且方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的. 因此，任何向量都可通过平移，把起点移到原点. 这样，任何一个复数 $z=a+bi$ 和复平面内一点 $Z(a, b)$ 对应，任何一点 $Z(a, b)$ 又可以和以原点为起点、点 $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应. 这些对应都是一一对应，即

$$\text{复数 } z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点 } Z(a, b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{向量 } \overrightarrow{OZ} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复数 } z=a+bi\,(a, b\in \mathbf{R}).$$

4. 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，又叫做向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的绝对值，也就是有向线段 OZ 的长度 $|OZ|$. 它也叫做复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值. 它的计算公式是 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. 这些应使学生在理解的基础上牢固地掌握.

当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就是实数 a，这时根据上面复数的模的公式，应有 $|a|=\sqrt{a^2}$. 这与以前关于实数绝对值及算术平方根的规定一致. 可见，复数的模就是实数绝对值概念的扩充. 复数的模与实数绝对值一样，也是非负实数. 因此，复数的模是可以比较大小的.

5. 在进行共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的教学时，可以提一下当 $b=0$ 时的特殊情形，即实轴上的点关于实轴本身对称，例如，5 与 5 也是互为共轭复数. 当 $b\neq 0$ 时，$a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做互为共轭虚数. 可见，共轭虚数是共轭复数的特殊情形.

6. 在讲解教材的例 3 时，要结合图形，帮助学生理解什么时候图形是圆，什么时候图形是圆面（曲线所包围的平面部分），周界什么时候画成实线，什么时候画成虚线.

7. 通过例题、习题的综合训练，加强学生的“数形结合”观念，提高学生灵活运用和综合运用数学知识的能力.

3.2 复数的运算

3.2.1 复数的加法与减法

1. 教学重点和难点. 教学重点是复数的加法与减法的法则. 教学难点是复数的加法与减法的几何意义.

2. 在复数的加法与减法中，重点是加法．教材首先规定了复数的加法法则．在讲这个规定时，应通过下面几个方面，使学生逐步理解这个规定的合理性：

(1) 当 $b=0$，$d=0$ 时，与实数加法法则一致；

(2) 验证实数加法运算律在复数集中仍然成立；

(3) 符合向量加法的平行四边形法则．

3. 复数的加法满足交换律、结合律．

4. 复数的加法可按向量的加法法则来进行，讲解时注意与物理中力的合成、向量的加法进行类比．

5. 讲过复数加法可按向量加法的平行四边形法则来进行后，可以指出向量加法还可按三角形法则来进行：如教材中图 3-5 所示，求$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$的和，可以看作是求$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{Z_1Z}$的和．这时先画出第一个向量$\overrightarrow{OZ_1}$，再以$\overrightarrow{OZ_1}$的终点为起点画出第二个向量$\overrightarrow{Z_1Z}$，那么，由第一个向量起点 O 指向第二个向量终点 Z 的向量$\overrightarrow{OZ}$，就是这两个向量的和向量．

6. 复数的相反数是推导复数减法法则的关键，如果用减法是加法的逆运算则感觉缺少理论支撑．但是，如果把减法规定为加法的逆运算，并按加法法则求出差，则会与复数减法的几何意义一致，容易被学生理解和接受．教学时教师要灵活掌握．

7. 对两复数减法的几何意义，可简单叙述为：连接两向量的终点，方向指向被减向量得到的向量，就是两复数的差对应的向量．

8. 把复数的加（减）法，从形式上加以归纳，就得出了与多项式加（减）法相类似的结论，即实部与实部、虚部与虚部分别相加（减）．

3.2.2　复数的乘法

1. 教学重点和难点．教学重点是复数的乘法法则以及有关运算律．教学难点是复数中有关 i，$(1+\mathrm{i})^2$，$(1-\mathrm{i})^2$ 的运算．

2. 复数的代数形式相乘，与加减法一样，指出可按与多项式类似的办法进行，而不必去记公式．

3. 复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律．

4. 根据乘法法则得出“两个共轭复数的乘积等于这个复数模的平方”，即公式 $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$，通常也写成$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\bar{z}}$．这是连接复数与实数的重要桥梁，这个公式很重要．

5. 教材在讲解复数的乘方时，根据复数乘法满足交换律与结合律，先把实数集中正整数指数幂的运算律，推广到复数集中来．在这个基础上，对虚数单位 i 的正整数指数幂的运算律进行了归纳总结．

6. 在复数集中任何实系数一元二次方程都是有解的．当实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根的判别式 $\Delta<0$ 时，其求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}}{2a}$．

3.2.3　复数的除法

1. 教学重点和难点．教学重点是复数的除法法则．教学难点是复数的除法运算．

2. 为了引入复数的除法，教材首先定义了复数的倒数，这里虽然没有规定复数的除法是乘法的逆运算，但其实质和以往教材中的规定是一样的，都是将复数除法运算转化为利用共轭复数来进行乘法运算．

3. 应当着重向学生指出：复数除法的运算法则不必死记硬背，只要记住两个复数相除就是先把它们的商写成分数的形式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，再把结果化简即可．

三、拓展资源

数系的扩充——复数的引入

我们知道，在实数范围内，对方程 $x^2+1=0$ 是无能为力的，只有把实数集扩充到复数集才能解决．对于复数 $z=a+bi$（a，b 都是实数）来说，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时叫虚数，当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，叫做纯虚数．可是，历史上引进虚数，把实数集扩充到复数集可不是件容易的事，那么，历史上是如何引进虚数的呢？

16 世纪意大利米兰学者卡当（1501—1576）在 1545 年发表的《重要的艺术》一书中，公布了三次方程的一般解法，被后人称为“卡当公式”．他是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家，并且在讨论是否可以把 10 分成两部分，使它们的乘积等于 40 时，他把答案写成 $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$．尽管他认为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 这两个表示式是没有意义的、想象的、虚无飘渺的，但他还是把 10 分成了两部分，并使它们的乘积等于 40．给出“虚数”这一名称的是法国数学家笛卡儿（1596—1650），他在《几何学》（1637 年发表）中使“虚的数”与“实的数”相对应，从此，虚数才流传开来．

数系中发现一颗新星——虚数，于是引起了数学界的一片困惑，很多大数学家都不承认虚数．德国数学家莱布尼茨（1664—1716）在 1702 年说：“虚数是神灵遁迹的精微而奇异的隐避所，它大概是存在和虚妄两界中的两栖物．”瑞士数学大师欧拉（1707—1783）说：“一切形如 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$ 的数学式子都是不可想象的数，因为它们所表示的是负数的平方根．对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它们纯属虚幻．”然而，真理性的东西一定可以经得住时间和空间的考验，最终占有自己的一席之地．法国数学家达兰贝尔（1717—1783）在 1747 年指出，如果按照多项式的四则运算规则对虚数进行运算，那么它的结果总是 $a+\sqrt{-1}b$ 的形式（a，b 都是实数）．法国数学家棣莫佛（1667—1754）在 1730 年发现了 $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$，这就是著名的棣莫佛定理．欧拉在 1748 年发现了有名的关系式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，并且是他在《微分公式》（1777 年）一文中第一次用 i 来表示 -1 的平方根，首创了用符号 i 作为虚数的单位．“虚数”实际上不是想象出来的，而是确实存在的．挪威的测量学家成塞尔（1745—1818）在 1779 年试图给这种虚数以直观的几何解释，并首先发表其作法，然而没有得到学术界的重视．

德国数学家高斯（1777—1855）在 1806 年公布了虚数的图象表示法，即所有实数能用一条数轴表示，同样，虚数也能用一个平面上的点来表示．在直角坐标系中，横轴上取对应实数 a 的点 A，纵轴上取对应实数 b 的点 B，并过这两点引平行于坐标轴的直线，它们的交点 C 就表示复数 $a+bi$．像这样，各点都对应复数的平面叫做“复平面”，后来又称“高斯平面”．高斯在 1831 年，用实数组（a，b）代表复数 $a+bi$，并建立了复数的某些运算，使得复数的某些运算也像实数一样地“代数化”．他又在 1832 年第一次提出了“复数”这个名词，还将表示平面上同一点的两种不同方法——直角坐标法和极坐标法加以综合．统一于表示同一复数的代数式和三角式两种形式中，并把数轴上的点与实数一一对

应，扩展为平面上的点与复数一一对应．高斯不仅把复数看作平面上的点，而且还看作是一种向量，并利用复数与向量之间一一对应的关系，阐述了复数的几何加法与乘法．至此，复数理论才比较完整和系统地建立起来了．

经过许多数学家长期不懈的努力，深刻探讨并发展了复数理论，才使得在数学领域游荡了 200 年的幽灵——虚数揭去了神秘的面纱，显现出它的本来面目，原来虚数不虚．虚数成为数系大家庭中的一员，从而实数集扩充到了复数集．

随着科学和技术的进步，复数理论已越来越显出它的重要性，它不但对于数学本身的发展有着极其重要的意义，而且为证明机翼上升力的基本定理起到了重要作用，并在解决堤坝渗水的问题中显示了它的威力，也为建立巨大水电站提供了重要的理论依据．

四、教学案例

案例 1：3.1.2　复数的概念

（一）教学目标

1. 知识与技能

使学生了解学习复数的必要性，掌握复数有关概念、复数分类，初步掌握虚数单位的概念和性质．

2. 过程与方法

通过类比引入、分类讨论、化归与转化等数学思想方法的使用，培养学生分析问题、解决问题的能力．

3. 情感、态度与价值观

感受人类理性思维对数学发展所起的重要作用，进行历史唯物主义教育与辩证唯物主义教育．

（二）教学重点和难点

重点：虚数单位；复数集的构成；复数相等的应用．

难点：复数的概念；虚数与纯虚数的区别．

（三）教学方法

本节课主要是概念的引入、深化、理解、应用，因此采用教师引导、学生探究、师生共同总结的教学方法．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 历史上是怎样发现虚数的. 2. 数系扩充的脉络是：自然数系→有理数系→实数系. 3. 矛盾冲突到了一定的阶段，就有必要引入新的数集了，为了解决方程 $x^2=-1$ 没有实根的矛盾，我们把它的根记为 $\pm\sqrt{-1}$，那么这是一个怎样的数呢？	1. 用三分钟左右时间带领学生回到卡当、笛卡儿、高斯时代，感受虚数的发展史. 2. 以师问生答的方式回顾已经学习过的数集是怎样过渡的. 3. 很自然地提出新的问题让学生思考，当然我们只能暂时把根“记”为 $\pm\sqrt{-1}$，有关下文，待新授.	1. 用讲小故事的方式，让学生感到学习虚数是必要的，并增强他们的学习动力. 2. 用旧的问题类比，引入新问题，引起学生的学习兴趣.
概念形成	1. 记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，称 i 为虚数，则 $\mathrm{i}^2=-1$；因而方程 $x^2=-1$ 的根为 $\pm\mathrm{i}$. 一般地，方程 $x^2=-a$（$a>0$）的根呢？ 2. 学生求解两个一元二次方程： （1）$x^2+4=0$；（2）$x^2-x+1=0$. 3. 学生求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根. 4. 若将上述方程的根的形式进行归纳，能得出什么结论？（复数的代数形式） 5. 由此引出复数的概念：对实数 a 和 b，形如 $a+bi$ 的数叫做复数. 其中 a 叫做复数的实部，b 叫做复数的虚部，i 叫做虚数单位. 复数通常用小写英文字母 z 表示，即 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）. （1）强调：a，$b\in\mathbf{R}$ 的重要性. （2）思考题：复数与实数有什么联系？	1. 教师定义 i 的意义，提问学生三个问题：（1）i 的平方是多少？ （2）方程 $x^2=-1$ 的根是多少？ （3）一般地，方程 $x^2=-a$（$a>0$）的根呢？ 2. 引导学生对虚数单位 i 进行剖析，揭示它所满足的两条常用性质. 3. 让学生自己解两个方程，总结 $\Delta<0$ 时，两种常见题型的解法步骤，教师完善. 4. 从特殊到一般，类比上面的求解过程，由学生完成求根公式的推导，师生共同归纳总结. 5. 引导学生从形式上认识复数的特点，引出复数概念.	1. 由浅入深地提出问题，并解决问题，从一个在实数集中不可解的方程，变为在复数集中可解的方程. 2. 从形式上初步认识复数.
概念深化	1. 当 $b=0$ 时，复数就成为实数；当 $b\neq0$ 时，$a+bi$ 叫做虚数. 当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，bi 叫做纯虚数. 2. 复数所构成的集合叫做复数集，常用 $\mathbf{C}$ 表示，复数集即 $\mathbf{C}=\{z\mid z=a+bi,\ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}\}$. 3. 复数的分类： $\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\ (b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (a=0,\ b\neq0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq0,\ b\neq0)\end{cases}\end{cases}$ 注意分清复数分类中的界限： 设 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）， （1）$z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow b=0$； （2）$z$ 是虚数 $\Leftrightarrow b\neq0$； （3）z 为纯虚数 $\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0$； （4）$z=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$.	1. 启发学生对实部与虚部分别等于 0 时进行分析，看复数的变化. 2. 由实数的分类启发学生对复数尝试分类，教师总结补充. 3. 探讨复数的构成，明了两要素：实部，虚部. 4. 教师提问：实部、虚部一定为实数吗？什么时候两复数相等？学生思考后回答，教师补充. 5. 由于实数可以表示在数轴上，所以两实数可以比较大小. 教师提问：两复数间能比较大小吗？为什么？学生小组讨论后，由组长发言，教师提炼总结.	学生初步接触复数，会造成认识上的空白，而这些内容正是为填补这些空白而预设的. 这样安排，有利于学生循序渐进地从多方位认识复数、理解复数；符合学生的认知规律.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	1. 强调复数的实部与虚部都是实数. 2. 两个复数相等：当且仅当它们实部和虚部分别相等. 3. 强调两个实数之间可以比较大小，但两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小.		
练习巩固	1. 求下列复数的实部与虚部，并判断它们中哪些是实数、虚数、纯虚数？ $3+4i$，$-0.5i$，3，0. 2. 求方程 $x^3-1=0$ 的根，归纳代数基本定理.	1. 学生练习. 2. 教师启发：使用因式分解法转化为一次方程和二次方程分而解之. 进一步联想和引申：是否四次方程在复数集内有四个根呢？五次方程呢？……	1. 巩固所学基本概念. 2. 了解代数基本定理.
应用举例	例 1　实数 x 取何值时，复数 $z=(x-2)+(x+3)i$（1）是实数？（2）是虚数？（3）是纯虚数？ 例 2　求适合下列方程的 x 和 $y(x, y\in\mathbf{R})$ 的值. （1）$(x+2y)-i=6x+(x-y)i$； （2）$(x+y+1)-(x-y+2)i=0$. 例 3　求解三次方程 $x^3+1=0$.	1. 学生完成解答，教师巡回指导，并根据发现的普遍性问题集体予以纠正. 2. 强调： （1）用“且”连结的，应从交集上解决. （2）复数的相等，应从方程组中解决. （3）善于用“转化”的思想处理高次方程.	对重点的概念强化练习，以期达到熟能生巧的程度. 同时点出解题过程中存在的问题和题目中所蕴含的数学方法和思想，以使学生学有所悟，学有所获.
巩固练习	教科书第 85 页，练习 A，1，2，3.	课堂练习.	进一步巩固所学知识、方法.
归纳总结	1. 数学方法：类比归纳、分类讨论. 2. 数学思想：化归与转化. 3. 数学知识：复数有关概念.	学生总结，教师补充完善.	培养学生自觉回顾、善于总结的习惯，锻炼语言表达能力；更加系统地完善知识结构，构建方法体系.
布置作业	教科书第 86 页，练习 B，1，2，3.	学生练习.	巩固本节所学，为下节课的学习做好铺垫.

案例 2：3.2.1　复数的加法与减法

（一）教学目标

1. 知识与技能

掌握复数加法、减法的运算法则，能够熟练地进行加减运算；了解复数加减法的几何意义，能用平

行四边形法则和三角形法则解决一些简单的问题.

2. 过程与方法

培养学生类比归纳、数形结合的思想方法.

3. 情感、态度与价值观

培养学生良好的思维品质（思维的严谨性、深刻性、灵活性），感受为真理而执着追求的精神，进行辩证唯物主义教育.

（二）教学重点和难点

教学重点是加减法运算法则，教学难点是加法与减法的几何意义.

（三）教学方法

使用多媒体教学辅助手段，从感性和理性的角度认识复数的加减运算，引导学生思考、探索，从解决问题的过程中建构新的知识体系.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 复数、点、向量之间的对应关系. 2. 实数可以进行加减乘除四则运算，且运算的结果仍为一个实数，那么复数呢？ 3. 多项式的加、减方法，合并同类项原则.	教师用多媒体展示问题，学生回答，教师补充.	复习旧知识，为新知识的学习作准备.
概念形成	1. 引例：已知 $m=3x+4y$，$n=5x-6y$，求 $m+n$，$m-n$. 2. 复数的加法运算： 设 $z_1=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），$z_2=c+di$（c，$d\in\mathbf{R}$）；定义 $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$. 显然，两个复数的和也是一个复数. 3. 请用复数的加法定义证明：加法运算满足：(1) 交换律，(2) 结合律. 4. 复数的减法运算： 加法定义后，让学生做下列练习题： $(3+4i)+(-3+4i)$； $(4+3i)+(4-3i)$； $(3+4i)+(-3-4i)$. (1) $a+bi$ 的相反数； (2) 运算法则：转化为加法运算.	1. 学生完成引例，会感觉比较轻松. 教师可进一步提问：多项式的加法遵循什么原则？ 学生回答：合并同类项. 2. 教师继续提问：两个复数的加法运算法则可不可以这样进行呢？ 学生推导，教师巡回指导并给予提示，然后由教师总结加法法则. 3. 将学生分成三个小组分别推导复数加法的运算律，教师总结补充. 4. 教师进一步引导学生从相反数的概念入手，利用转化的思想，化减法运算为加法运算. 推导复数的减法运算法则.	教师给出定义，学生练习，引导学生将旧的知识与新的知识进行联系，使前后的知识得到连贯，成为一个有机的整体. 在学生动手做一些练习的基础上，有了感性认识再抽象相反数就较简单.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+(-c-di)$ $=(a-c)+(b-d)i.$ 可见，两个复数的差也为一个复数. 5. 复数的加减运算就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减.	5. 让学生联系已学过的知识，用一句话描述复数的加、减法运算法则. 6. 引导学生观察：两个复数的和、差仍为一个复数. 即复数的运算对加减法是封闭的.	
概念深化	从复数的几何意义出发，再看复数的加减运算： 1. 当两复数的对应向量共线时，可直接运算. 2. 当两复数的对应向量不共线时，加法运算可类比于向量加法的平行四边形法则；减法运算类比于向量减法的三角形法则. 3. 将所得和向量或差向量移至起点坐标原点时，该向量的终点坐标就对应所求复数的坐标. 4. 做教科书上的练习，也可根据学生的实际情况，自编部分练习题.	1. 教师引导，学生观察并思考：把复数表示为向量时，能否按照向量加减运算的平行四边形法则和三角形法则来进行？学生作图验证猜想，教师补充说明. 2. 强调：只有将和、差向量平移至以原点为起点时，其终点才能对应该复数.	1. 体会从数形结合的角度来认识复数的加减法法则，培养学生的形象思维能力. 2. 通过练习，巩固复数的加、减法运算.
应用举例	例 1　已知：$z_1=3+2i$，$z_2=1-4i$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2. 例 2　计算$(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)$.	学生回答，教师指正.	熟悉法则使用.
巩固练习	教科书第 92 页，练习 A，1，2，3.	学生练习.	巩固本节所学.
归纳总结	1. 知识方面：复数加减法运算法则及几何意义. 2. 数学思想方法方面：类比归纳、数形结合. （演示课件）	学生总结，教师补充.	从不同的角度总结，既学到知识，又学到了数学方法，也有利于教师反思教学中存在的问题，以便及时反馈，使知识更加系统化.
布置作业	教科书第 92 页，练习 B，1，2，3.		巩固本节课所学知识及方法.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 83 页）

1. 不是．封闭是指两个自然数四则运算的结果仍是自然数．而在自然数中任取两个数四则运算的结果不一定是自然数．例如 $3-5$，$3\div5$ 的结果就不是自然数，所以，自然数对四则运算不是封闭的．

2. 不满足．按规定法则可得，$(a*b)*c=\frac{a+b}{2}*c=\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b+2c}{4}$，

   而 $a*(b*c)=a*\frac{b+c}{2}=\frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}=\frac{2a+b+c}{4}$，只有当 $a=c$ 时两式才能相等．

3. 例如，减法运算、除法运算、乘方运算．

4. 显然当 N 是 10 的整数次幂时，$\lg N$ 是整数；

   下面证明当 N 不是 10 的整数次幂时，$\lg N$ 是无理数．用反证法：

   假设 $\lg N$ 不是无理数，则 $\lg N$ 是有理数，不妨设 $\lg N=\frac{m}{n}$，m，$n\in\mathbf{Z}$，$n\neq0$，

   所以　$N=10^{\frac{m}{n}}$，$N^n=10^m$，

   因为　N 是正整数，m，n 是整数，

   所以　只有 N 是 10 的整数次幂，这与 N 不是 10 的整数次幂矛盾．

   所以　$\lg N$ 是无理数．

   综上可知，$\lg N$ 不是整数就是无理数．

练习 B（第 83 页）

1. 用反证法．假设 $\sin 20°$ 是有理数．

   因为　$\sin 60°=3\sin 20°-4\sin^3 20°$，

   所以　$\sin 60°$ 是有理数，而 $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为无理数，显然矛盾．

   所以　$\sin 20°$ 为无理数．

2. 先画一个长为 2、宽为 1 的矩形，其对角线长为 $\sqrt{5}$，以此矩形的对角线为正方形边长，用直尺和圆规作出正方形．图略．

练习 A（第 85 页）

1. 是实数的有：$2+\sqrt{2}$，0.618，0，$i^2=-1$．

   是虚数的有：$3i$，i，$5+2i$，$3-\sqrt{2}i$，$(1+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{2}i$．

所给的 $2+\sqrt{2}$，0.618，3i，0，i，i^2，5+2i，$3-\sqrt{2}i$，$(1+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{2}i$ 全部都是复数.

2. 见下表：

复数	实部	虚部
$-3+2i$	-3	2
$3+7i$	3	7
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
-8	-8	0
$-6i$	0	-6

3. (1) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}x-2y=3\\2x+3y=-3\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=\frac{3}{7}\\y=-\frac{9}{7}\end{cases}$

(2) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}3x+y+3=0\\x-y-3=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$

(3) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}x+y-3=0\\x-y-1=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

练习 B（第 86 页）

1. $\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.
2. 当其为实数时，有 $x^2+3x+2=0$，则 $x=-1$ 或 -2；
当其为虚数时，有 $x^2+3x+2\neq0$，则 $x\neq-1$ 且 $x\neq-2$；
当其为纯虚数时，有 $\begin{cases}x^2+x-2=0\\x^2+3x+2\neq0\end{cases}$，则 $x=1$.
3. 由 $x^2-10x+40=0$，配方得 $(x-5)^2=-15$.
所以　$x-5=\pm\sqrt{15}i$.
所以　方程的解为 $x_1=5+\sqrt{15}i$，$x_2=5-\sqrt{15}i$.

练习 A（第 88 页）

1. 图略.
2. (1) $b=0$，$a\in\mathbf{R}$；
   (2) $a=0$，$b\in\mathbf{R}$；
   (3) $b>0$，$a\in\mathbf{R}$；
   (4) $a>0$，$b\in\mathbf{R}$.
3. (1) 5； (2) 13； (3) $\frac{5}{2}$； (4) $\sqrt{3}$.
4. (1) $8+5\mathrm{i}$； (2) $7\mathrm{i}$； (3) 3； (4) $-3+3\mathrm{i}$； (5) $-\frac{1}{3}$； (6) $-6\mathrm{i}$. 图略.

练习 B（第 89 页）

1. (1) 以(0，0)为圆心，以 1 为半径的圆；
   (2) 以(0，0)为圆心，分别以 1，2 为半径的两个圆所夹的圆环面，不包括边界.
2. 图略.
3. (1) 直线 $x=2$ 右边的区域，不包括边界；
   (2) 直线 $x=y$；
   (3) 以(0，0)为圆心，分别以 2，5 为半径的两个圆所夹的圆环面，包括边界.

习题 3-1 A（第 89 页）

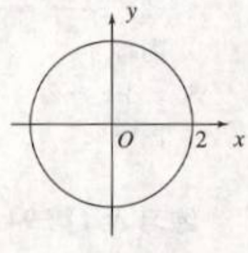
1. (1) 并集； (2) $\varnothing$； (3) 真子集； (4) 虚数集.
2. 见下表：

复数	实部	虚部
$-5+5\mathrm{i}$	-5	5
$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0
i	0	1
0	0	0

3. 不是，不是.
4. 图略.
5. (1) 图略；
   (2) $\sqrt{2}$，13，41，4，$\sqrt{5}$；
   (3) $-1-\mathrm{i}$，$-5+12\mathrm{i}$，$40-9\mathrm{i}$，$-4\mathrm{i}$，$\sqrt{5}\mathrm{i}$.
6. (1) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}3x+2y=17\\5x-y=-2\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$

(2) 由复数相等的条件可得$\begin{cases}3x-4=0\\2y+3=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

(3) 由复数相等的条件可得$\begin{cases}x+y=-5\\-xy=24\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=-8\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\y=-8\end{cases}$



（第 7 题）

7. 由复数模的意义可知，表示复数 $x+y\mathrm{i}$ 的点满足 $x^2+y^2=4$，所以点的集合为$\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=4\}$，其图形如图所示.

8. (1) 以原点为圆心，以 5 为半径的圆；
   (2) 以原点为圆心，以 1 为半径的圆的外部；
   (3) 以原点为圆心，以 1 为半径的圆面，不包括边界；
   (4) 以(0，0)为圆心，分别以 3，5 为半径的两个圆所夹的圆环面，包括边界.

习题 3-1 B（第 90 页）

1. (1) 复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$ 是纯虚数，需$\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}=0$，且 $n^2+3n-4\neq0$，解得 $n=4$ 且 $m\neq4$，$m\neq-1$；
   (2) 复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$ 是实数，需 $n^2+3n-4=0$ 且 $m^2-3m-4\neq0$，解得 $n=1$ 或 $n=-4$ 且 $m\neq4$，$m\neq-1$.
2. (1) 直线 $y=0$ 与 $y=2$ 之间的条形区域，不包括边界；
   (2) 以(0，0)为圆心，以 4 为半径的圆的内部在第一象限的部分，不包括边界.
3. 因为 x 是实数，所以有$\begin{cases}2x^2-5x+2=0\\x^2-x-2=0\end{cases}$，所以 $x=2$.

练习 A（第 92 页）

1. (1) $9+10\mathrm{i}$；　(2) $-2-\mathrm{i}$；　(3) 0；　(4) $5-4\mathrm{i}$；　(5) $7+2\mathrm{i}$；　(6) $3+12\mathrm{i}$.
2. (1) $1+3\mathrm{i}$；　(2) $-7+7\mathrm{i}$；　(3) 8；　(4) $2-2\mathrm{i}$；　(5) $-4+10\mathrm{i}$；　(6) $-8+13\mathrm{i}$.
3. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以

$$z-\bar{z}=2b\mathrm{i}.$$

因为　$b\in\mathbf{R}$，

所以　当 $b=0$ 时，$z-\bar{z}$ 为 0；当 $b\neq0$ 时，$z-\bar{z}$ 为纯虚数.

所以　$z-\bar{z}$ 为 0 或纯虚数.

练习 B（第 92 页）

1. (1) $z_1+z_2=(2+\mathrm{i})+(-1+3\mathrm{i})=1+4\mathrm{i}$；
   (2) $z_1+z_2=(1+2\mathrm{i})+(-1-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}$.
   图略.
2. (1) $z_1-z_2=(5+3\mathrm{i})-(-1+4\mathrm{i})=6-\mathrm{i}$；

(2) $z_1-z_2=-3\mathrm{i}-(-3+\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}$.

图略.

3. $z_1+z_2-z_3=(5+3\mathrm{i})+(-1+4\mathrm{i})-(-4+\mathrm{i})=8+6\mathrm{i}$.

图略.

练习 A（第 94 页）

1. (1) $19+17\mathrm{i}$；(2) 2；(3) $8+4\mathrm{i}$；(4) $-2-11\mathrm{i}$；(5) $-117+44\mathrm{i}$；(6) $-7-6\sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. (1) $\bar{z}=3-4\mathrm{i}$，　$z\bar{z}=25=|z|^2$；

   (2) $\bar{z}=-3-4\mathrm{i}$，　$z\bar{z}=25=|z|^2$；

   (3) $\bar{z}=5-12\mathrm{i}$，　$z\bar{z}=169=|z|^2$；

   (4) $\bar{z}=-5-12\mathrm{i}$，　$z\bar{z}=169=|z|^2$.

3. $-\mathrm{i}$，1，1，i，i.

练习 B（第 95 页）

1. 根据公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 算得结果为 2.

2. 设 $z=m+n\mathrm{i}$，m，$n\in\mathbf{R}$，$n\neq0$，

   则 $a(m+n\mathrm{i})^2+b(m+n\mathrm{i})+c=0$，

   所以 $\begin{cases}a(m^2-n^2)+bm+c=0\\2amn+bn=0\end{cases}$

   将 $\bar{z}=m-n\mathrm{i}$（m，$n\in\mathbf{R}$，$n\neq0$）代入方程，得

   $$a(m-n\mathrm{i})^2+b(m-n\mathrm{i})+c=[a(m^2-n^2)+bm+c]-(2amn+bn)\mathrm{i}=0$$

   成立，

   所以 $x=\bar{z}$ 也是该方程的根.

3*. 当 $n=3m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\omega^n=\omega^{3m}=(\omega^3)^m=1$；

   当 $n=3m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\omega^n=\omega^{3m+1}=(\omega^3)^m\cdot\omega=\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$；

   当 $n=3m+2(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\omega^n=\omega^{3m+2}=(\omega^3)^m\cdot\omega^2=\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

练习 A（第 96 页）

(1) $\dfrac{18}{65}-\dfrac{1}{65}\mathrm{i}$；　(2) $\dfrac{9}{17}-\dfrac{2}{17}\mathrm{i}$；　(3) $-1+\mathrm{i}$；　(4) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；　(5) $-\mathrm{i}$；　(6) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

练习 B（第 96 页）

1. 0.

2. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则

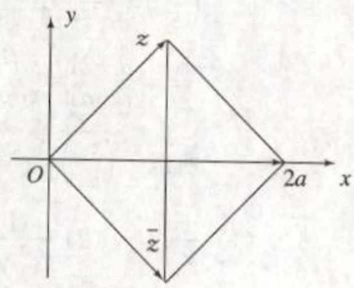
   $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，

所以$\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}$是实数.

习题 3-2 A（第 97 页）

1. (1) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}\mathrm{i}$；　(2) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$；　(3) $2b+2a\mathrm{i}$.

2. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，则
$$z+\bar{z}=2a.$$
因为　$2a\in\mathbf{R}$，
所以　一个复数与它的共轭复数的和等于这个复数的实部的 2 倍.



(第 2 题)

3. 设 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，
所以 $|z-\bar{z}|=|2b\mathrm{i}|=|2b|$.
图略.

4. 根据复数加减法的几何意义可知，
向量$\overrightarrow{OC}$对应的复数为 $z_1+z_2=(-3+\mathrm{i})+(5-3\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$；
向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$对应的复数为 $z_2-z_1=(5-3\mathrm{i})-(-3+\mathrm{i})=8-4\mathrm{i}$；
向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$对应的复数为 $z_1-z_2=(-3+\mathrm{i})-(5-3\mathrm{i})=-8+4\mathrm{i}$.

5. (1) $0.02+0.23\mathrm{i}$；　(2) $-25\mathrm{i}$；　(3) $a+b$；　(4) $a^4+b^4+2a^2b^2$.

6. (1) $x^2+4=(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})$；
(2) $a^4-b^4=(a+b)(a-b)(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$；
(3) $a^2+2ab+b^2+c^2=(a+b)^2+c^2=(a+b+c\mathrm{i})(a+b-c\mathrm{i})$；
(4) $x^2+2x+3=(x+1)^2+2=(x+1+\sqrt{2}\mathrm{i})(x+1-\sqrt{2}\mathrm{i})$.

7. (1) 10；　(2) $-\mathrm{i}$；　(3) $a^3+3a^2b\mathrm{i}-3ab^2-b^3\mathrm{i}$.

8. (1) $\frac{11}{146}+\frac{5}{146}\mathrm{i}$；　(2) $-1-8\mathrm{i}$；　(3) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$；　(4) $-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

习题 3-2 B（第 97 页）

1. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c, d\in\mathbf{R})$，则$\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$.

(1)
$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})}\\&=\overline{(a+c)+(b+d)\mathrm{i}}\\&=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}\\&=(a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}+\overline{z_2}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overline{z_1-z_2}&=\overline{(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})}\\&=\overline{(a-c)+(b-d)\mathrm{i}}\\&=(a-c)-(b-d)\mathrm{i}\\&=(a-b\mathrm{i})-(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}-\overline{z_2}.\end{aligned}$$

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$

$=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$

(4) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$,

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$,

$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{a-b\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}}=\dfrac{(a-b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}{(c-d\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$

所以 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

2. (1) $\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{(\mathrm{i}-2)(-1+\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}}=\dfrac{(\mathrm{i}-2)(-1+\mathrm{i})}{-2+\mathrm{i}}=-1+\mathrm{i}.$

3. $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{5+10\mathrm{i}}+\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{25}$,

$z=\dfrac{25}{4+2\mathrm{i}}=5-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}.$

4. $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=5-12\mathrm{i}.$

因为 $x，y\in\mathbf{R}$

所以 $\begin{cases}x^2-y^2=5\\2xy=-12\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

所以 $z=3-2\mathrm{i}$ 或 $z=-3+2\mathrm{i}.$

5. 设 $z=a+b\mathrm{i}$ 且 $a，b\in\mathbf{R}$，$z\neq0$，则有

$$\begin{cases}z+\dfrac{4}{z}=\dfrac{a(a^2+b^2+4)}{a^2+b^2}+\dfrac{b(a^2+b^2-4)}{a^2+b^2}\mathrm{i}\\(a-2)^2+b^2=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=0 \text{ 或 } a^2+b^2=4\\a^2+b^2-4a=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}b=0\\a=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=\pm\sqrt{3}\end{cases}$

所以 $z=4$ 或 $z=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}.$

本章小结

Ⅲ 巩固与提高（第99页）

1. (1) 假； (2) 真； (3) 真； (4) 假； (5) 真； (6) 真； (7) 假； (8) 真；
(9) 假； (10) 真； (11) 假； (12) 真； (13) 假； (14) 真； (15) 真； (16) 真.

2. (1) 5； (2) $11+8\mathrm{i}$； (3) $23-14\mathrm{i}$； (4) $4+2\mathrm{i}$； (5) i； (6) $-2-\mathrm{i}$； (7) $1+2\mathrm{i}$.

3. (1) $z^3=(x+y\mathrm{i})^2(x+y\mathrm{i})=(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)(x+y\mathrm{i})=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}.$

实部为 x^3-3xy^2，虚部为 $3x^2y-y^3$.

(2) $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y\mathrm{i}}=\frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$.

实部为$\frac{x}{x^2+y^2}$，虚部为$-\frac{y}{x^2+y^2}$.

4. (1) 直线； (2) 椭圆.

Ⅳ 自测与评估（第 100 页）

1. 设复数为 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，

则$\begin{cases}a^2+b^2=3^2=9\\a=\sqrt{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=\pm\sqrt{7}\end{cases}$

所以 $z=\sqrt{2}\pm\sqrt{7}\mathrm{i}$.

2. (1) $\begin{cases}x^2-xy-2y=0\\y-xy=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$，

所以 当$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$时，$z_1$，$z_2$ 都是实数.

(2) $\begin{cases}x+y=2x-y\\x^2-xy-2y=y-xy\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$，

所以 当$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}$时，$z_1$，$z_2$ 互为共轭复数.

3. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则 $|z_1|^2=a^2+b^2=5^2=25$，

所以 $z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=3a-4b+(4a+3b)\mathrm{i}$.

因为 $z_1\cdot z_2$ 为纯虚数，所以 $3a-4b=0$，$4a+3b\neq0$.

联立解得 $\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$

所以 $z_1=4+3\mathrm{i}$ 或 $-4-3\mathrm{i}$.

4. 设复数为 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，由题意得

$\begin{cases}a^2+b^2=8\\(a-2)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$

所以 $z=2+2\mathrm{i}$ 或 $-2-2\mathrm{i}$.

5. 证法一：当 $x=\mathrm{i}$ 时，$f(x)=6\mathrm{i}+11-5\mathrm{i}-5-\mathrm{i}-6=0$；

当 $x=-\mathrm{i}$ 时，$f(x)=-6\mathrm{i}+11+5\mathrm{i}-5+\mathrm{i}-6=0$.

因此，$x=\mathrm{i}$ 与 $x=-\mathrm{i}$ 是方程 $6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6=0$ 的两根.

所以 $f(x)$含因式$(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$，可被 x^2+1 整除.

证法二：$f(x)=6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6$

$=6x^5+6x^3+11x^4+11x^2-6x^2-6-x^3-x$

$=(x^2+1)(6x^3+11x^2-x-6)$

因此，$f(x)$可被 x^2+1 整除.

6. 正确. $(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^2=\cos^2 A-\sin^2 A+2\sin A\cos A\mathrm{i}=\cos 2A+\mathrm{i}\sin 2A$.

六、反馈与评价

针对本章所学内容的特点，除在学完本章知识进行单元测试外，在平日的教学中，要结合学生的特点，通过课堂提问、学生练习、作业等，及时发现学生学习中存在的问题，采取灵活的策略及时解决问题.