普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-1

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

主　　编　高存明　韩际清

本册主编　邱万作　尹玉柱
审　　定　陈宏伯
编　　者　尹玉柱　张合钦　张　颉　李明照　胡廷国　刘　莉
　　　　　张玉宝　吴玉奇　王金霞　窦同明　王　强　尚凡青
　　　　　韩际清
责任编辑　龙正武
绘　　图　王俊宏
版式设计　王　喆
封面设计　李宏庆

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 2—1（B 版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著. —2 版. —北京：人民教育出版社，2007.6(2019.7 重印)

ISBN 978-7-107-18909-8

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… ②课… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033723 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修 2-1　B 版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　唐山市润丰印务有限公司
版　　次　2007 年 6 月第 2 版
印　　次　2019 年 7 月第 16 次印刷
开　　本　890 毫米×1 240 毫米　1/16
印　　张　8.5
字　　数　190 千字
定　　价　28.10 元

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书　数学选修2-1（B版）》的使用编写的教师教学用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1．努力体现普通高中数学课程标准实验教科书数学（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2．明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务．

3．指出相关内容的教学难点、重点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4．努力吸收教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务．

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价．

教材课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求．考虑到教学要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整．教材编写时，把练习和习题分为A，B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求，以满足条件较好学校的教学需要．

在教材分析中，首先分析内容结构、作用与地位，指出本章知识的重点和难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议．

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考．

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，以检查学生学习本章内容的效果．

在教科书中，我们已经对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修2-1中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材．

一、常用逻辑用语

编写的重点是命题成立的充分条件、必要条件和充要条件．让学生知道，过去数学课本中的表述，除数学符号外，基本上使用的是自然语言，自然语言虽然容易接受，但由于歧义性较大，往往给学习数学带来一些困难．我们在编写时，注意引导学生掌握常用逻辑用语的用法，使学生尽量能够搞清楚三个逻辑联结词和两个量词所表达的逻辑含义，从中体会用逻辑用语表达数学内容的准确性和简洁性．

这章编写的主要特色是，把集合与逻辑结合起来，通过集合的包含关系理解推出关系，通过集合的交、并、补运算理解逻辑联结词所表达的逻辑含义．

二、圆锥曲线与方程

这一章是数学2解析几何初步一章的继续，学习的重点仍是用坐标法研究图形（圆锥曲线）的性质．本章首先通过对直线和圆的方程的回顾，让学生理解曲线与方程之间的关系，并指出用方程研究曲

线性质的一般步骤．我们把学习的重点放在如何用坐标法和解方程研究圆锥曲线的性质，把代数中的二次方程问题和圆锥曲线结合起来．由于这一章是理科选学，主要是让学生体会坐标法（数形结合）这一重要思想在数学中的作用和地位，进一步了解坐标法及圆锥曲线的实际应用，使学生能够经常想到用图形去表达数量关系，并注意加强坐标法解题的训练．

三、空间向量与立体几何

本章内容的编写主要采取推广与类比的方法，共分两大节．第一大节集中讲解空间向量概念、运算和性质，经历由平面向量向空间向量的推广过程，让学生理解空间向量与平面向量的异同．通过共线向量定理、共面向量定理和空间向量分解定理的学习，让学生理解向量空间的基本结构，并将空间向量运算完全代数化，为将来学习理工科打下良好的数学基础．第二大节重点讨论空间向量在立体几何中的应用．通过例题让学生理解用向量代数方法研究立体几何的意义，使学生再一次体会坐标法的意义．在用向量代数方法解题的同时，也向学生指出综合法推理的一些优点，鼓励学生灵活选用不同的方法解决立体几何问题．

本册教师教学用书的编写，得到了山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室等单位的大力协助，在此表示谢意．

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时改进．

中学数学教材实验研究组

2005 年 7 月

目录

第一章 常用逻辑用语

Ⅰ 课程目标 ……………………………………………………（1）
一、知识与技能目标 ……………………………………………（1）
二、过程与方法目标 ……………………………………………（1）
三、情感、态度与价值观目标 …………………………………（1）
Ⅱ 教材分析 ……………………………………………………（2）
一、编写特色 ……………………………………………………（2）
二、内容结构 ……………………………………………………（2）
1. 内容编排 ……………………………………………………（2）
2. 地位与作用 …………………………………………………（2）
3. 重点与难点 …………………………………………………（2）
4. 本章知识结构 ………………………………………………（3）
三、课时分配 ……………………………………………………（3）
四、教法与学法建议 ……………………………………………（3）
Ⅲ 拓展资源 ……………………………………………………（8）
一、有关充要条件的证明 ………………………………………（8）
二、哥德巴赫猜想 ………………………………………………（9）
三、蜂窝猜想 ……………………………………………………（10）
四、数学家陈景润 ………………………………………………（10）

Ⅳ 教学案例 …… (11)
案例 1：1.1.2　量词 …… (11)
案例 2：1.2.2　"非"（否定） …… (13)
案例 3：1.3.1　推出与充分条件、必要条件 …… (15)
Ⅴ 习题参考答案与提示 …… (17)
Ⅵ 反馈与评价 …… (25)
一、知识与方法测试 …… (25)
二、评价建议 …… (28)

第二章　圆锥曲线与方程

Ⅰ 课程目标 …… (29)
一、知识与技能目标 …… (29)
二、过程与方法目标 …… (29)
三、情感、态度与价值观目标 …… (29)
Ⅱ 教材分析 …… (30)
一、编写特色 …… (30)
二、内容结构 …… (30)
1. 内容编排 …… (30)
2. 地位与作用 …… (31)
3. 重点与难点 …… (31)
4. 本章知识结构 …… (31)
三、课时分配 …… (32)
四、教法与学法建议 …… (32)
Ⅲ 拓展资源 …… (49)
一、圆锥曲线的光学性质及其应用 …… (49)
二、向量与解析几何 …… (50)
Ⅳ 教学案例 …… (52)
案例 1：2.2.1　椭圆的标准方程 …… (52)
案例 2：2.3.2　双曲线的几何性质 …… (56)
案例 3：2.4.1　抛物线的标准方程 …… (59)

Ⅴ 习题参考答案与提示 ……（64）
Ⅵ 反馈与评价 ……（78）
一、知识与方法测试 ……（78）
二、评价建议 ……（81）

第三章 空间向量与立体几何

Ⅰ 课程目标 ……（82）
一、知识与技能目标 ……（82）
二、过程与方法目标 ……（82）
三、情感、态度与价值观目标 ……（82）
Ⅱ 教材分析 ……（83）
一、编写特色 ……（83）
二、内容结构 ……（83）
1. 内容编排 ……（83）
2. 地位与作用 ……（84）
3. 重点与难点 ……（84）
4. 本章知识结构 ……（84）
三、课时分配 ……（84）
四、教法与学法建议 ……（85）
Ⅲ 拓展资源 ……（97）
法向量在立体几何中的应用 ……（97）
Ⅳ 教学案例 ……（101）
案例 1：3.1.2 空间向量的基本定理 ……（101）
案例 2：3.2.4 二面角及其度量 ……（103）
Ⅴ 习题参考答案与提示 ……（106）
Ⅵ 反馈与评价 ……（123）
一、知识与方法测试 ……（123）
二、评价建议 ……（128）

第一章

常用逻辑用语

Ⅰ 课程目标

一、知识与技能目标

1. 了解命题的概念，会判断命题的真假.

2. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义，会用符号语言表示全称命题和存在性命题，并能判断其真假. 能正确地对含一个量词的命题进行否定.

3. 通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.

4. 理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

5. 了解命题的逆命题、否命题、逆否命题，会分析四种命题的相互关系.

二、过程与方法目标

1. 通过对命题真假的判定，体会举反例的作用.

2. 通过概念教学，培养学生由具体到抽象的思维方法.

3. 通过学习常用逻辑用语的基础知识，体会逻辑用语在表述和论证中的作用.

4. 在学习和使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性.

5. 通过本章的学习，提高思维的深刻性、批判性，推理的准确性、严谨性，发展学生的理性思维能力.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过学习常用逻辑用语及其符号化表达方式，提高逻辑分析、数学表达和逻辑思维能力.

2. 通过本章的学习，体会数学的美，养成一丝不苟的科学态度.

3. 体会用对立统一的思想认识数学问题，培养学生的辩证唯物主义思想方法.

Ⅱ　教材分析

一、编写特色

1. 把常用逻辑用语作为基础数学语言来学习.
2. 用集合关系理解逻辑关系.
3. 注重由具体实例到数学化、符号化的精确表达. 提高学生的数学思维品质.
4. 强调本质，注意适度形式化. 出现真值表，以帮助学生正确地判断命题的真假.
5. 注意语言逻辑、形式逻辑与数理逻辑语言的区分与联系.

二、内容结构

1. 内容编排

本章主要包括：命题与量词，基本逻辑联结词和充分条件、必要条件与命题的四种形式三大节内容.

第一大节是命题与量词. 教科书首先从实例入手，复习初中学过的命题的概念，指出了表示命题的常用句型. 然后，给出了全称量词和存在量词的概念，介绍了用符号表示全称命题和存在性命题的方法.

第二大节是基本逻辑联结词. 教科书分别介绍了“或”“且”“非”的意义，给出了它们的记法. 并给出了判断由“或”“且”“非”组成的新命题的真假的方法. 还介绍了全称命题和存在性命题的否定形式.

第三大节是充分条件、必要条件与命题的四种形式. 教科书首先通过实例介绍了充分条件、必要条件、充要条件的概念. 接着，教科书介绍了四种命题的表示形式以及四种命题之间的关系.

2. 地位与作用

在数学中逻辑用语的作用是至关重要的. 学习数学，需要全面地理解概念，正确地进行表达、判断和推理. 命题之间的关系，以及命题成立的条件（充分条件、必要条件、充要条件），都离不开逻辑用语. 在日常生活中，为了使表达更加准确、清楚、简洁，我们常常要用一些逻辑用语. 因此，正确地使用逻辑用语是现代社会公民应具备的基本素质. 无论是进行思维、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维，使得思维清晰明了，说理有据.

在高中数学中，常用逻辑用语与其他内容有着密切联系，它是正确地进行表达、判断、推理的基础.

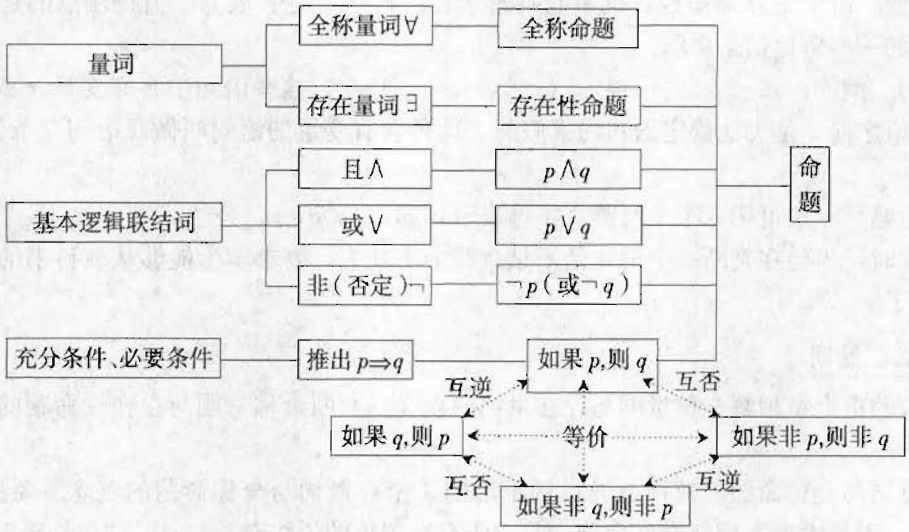
3. 重点与难点

本章的重点是基本逻辑联结词“或”“且”“非”，充分条件、必要条件与命题四种形式之间的逻辑关系. 学习常用逻辑用语，主要是利用逻辑用语准确地表达数学内容，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，发展学生的思维能力. 在这方面，学习逻辑联结词“或”“且”“非”，充分条件、必要条件与四种命题之间的关系等有关内容是十分必要的.

本章的难点是对一些代数命题真假的判定，对全称命题和存在性命题的否定. 通过对必修五个模块

的学习，学生对一些推理方法有了一定的掌握，相关技能和能力有了一定的提高，而本章所涉及的一些代数命题，用到的知识比较全面，有一定的综合性．另外，用符号语言表述，增加了问题的抽象性．因此，需要学生有一个逐步熟悉的过程．

4. 本章知识结构



三、课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　命题与量词	约 2 课时
1.2　基本逻辑联结词	约 3 课时
1.3　充分条件、必要条件与命题的四种形式	约 2 课时
本章小结	1 课时

四、教法与学法建议

1.1　命题与量词

本大节内容主要包括：命题的概念、命题真假的判断、全称量词、存在量词、全称命题与存在性命题．本大节的重点是全称量词和存在量词，难点是对全称命题和存在性命题真假的判定．

1.1.1　命题

1．本小节的重点是了解命题的定义，难点是判定一个句子是不是命题．初中数学为了便于学生接受，给命题下的定义是：判断一件事情的句子，叫做命题．教科书中给出的定义是：能判断真假的语句

叫命题．两种定义只是说法不同，其实质是一样的．

2．要判断句子是否是命题，首先，要看给出的句子的句型，一般地，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题．其次，要看能不能判断其真假，也就是判断其是否成立．不能判断真假的语句，就不能叫命题．例如，“这是一棵大树”“$x^2-1=0$”都不能叫命题．由于“大树”没有界定，就不能判断“这是一棵大树”的真假．由于x是未知数，也不能判断“$x^2-1=0$”是否成立．值得注意的是，在数学或其他科学技术中的一些猜想仍是命题．

3．开语句．例如：$x>5$，$x^2-1=0$，$(x+y)(x-y)=0$，这些语句中含有变量x或y，在没有给定这些变量的值之前，是无法确定语句的真假的．这种含有变量的语句叫做开语句（条件命题）．开语句不是命题．

4．一个命题，一般可用一个小写英文字母表示，如：p，q，r，….

5．在教学时，不要在判断一个语句是不是命题上下功夫，要求学生能够从教科书的例子了解命题的概念就可以了．

1.1.2 量词

1．本小节的重点是理解全称量词与存在量词的意义．判断全称命题与存在性命题的真假是本小节的难点．

2．全称量词与全称命题．教科书通过例子给出了全称量词与全称命题的概念．要注意结合例子，用集合的观点，引导学生去理解全称命题．与“所有”等价的说法有：“一切”“每一个”“任一个”等．由于自然语言的不同，同一个全称命题可以有不同的表述方法．注意：有时省去全称量词，仍为全称命题．例如：“正方形都是矩形”，省去了全称量词“所有”．因此，要结合具体问题做出正确的判断．判断一个全称命题为真命题，必须对限定集合中的每一个元素x验证$p(x)$成立，一般用代数推理给出证明．如果一个全称命题为真命题，那么给出的限定集合中的每一个元素x都具有性质$p(x)$．通过实例，让学生熟悉用符号语言表述全称命题．

3．存在量词与存在性命题．教科书通过例子给出了存在量词与存在性命题的概念．要注意结合例子，用集合的观点，引导学生去理解存在性命题．由于自然语言的不同，同一个存在性命题可以有不同的表述方法，要引导学生用符号语言表示存在性命题．要判断一个存在性命题为真，只要在限定集合M中，找到一个$x=x_0$，使$p(x_0)$成立即可；如果要证明存在性命题为假，就要证明在限定集合M中的每一个x，使$p(x)$不成立．

4．教科书为了让学生巩固概念，熟悉表达方式，设计了一个例题．例1是判断全称命题、存在性命题的真假．要注意引导学生总结全称命题、存在性命题的判定方法，并将这两类命题的判定方法进行类比．

5．存在性命题、全称命题的不同表示方法．同一个存在性命题、全称命题由于自然语言的不同，可以有不同的表示方法．例如：

全称命题“$\forall x\in A$，$p(x)$”可以表示为：

(1) 所有的$x\in A$，$p(x)$成立；

(2) 对一切$x\in A$，$p(x)$成立；

(3) 对每一个$x\in A$，$p(x)$成立；

(4) 任选一个$x\in A$，$p(x)$成立；

(5) 凡$x\in A$，都有$p(x)$成立．

存在性命题“$\exists x\in A$，$p(x)$”可以表示为：

(1) 存在 $x\in A$，使 $p(x)$成立；

(2) 至少有一个 $x\in A$，使$p(x)$成立；

(3) 对有些 $x\in A$，使 $p(x)$成立；

(4) 对某个 $x\in A$，使 $p(x)$成立；

(5) 有一个 $x\in A$，使 $p(x)$成立.

仅供教师教学时参考.

6. 教学中，要多结合实例引导学生去观察、比较，让学生自主获取知识. 另外，将全称命题、存在性命题进行类比，有利于学生更好地理解概念.

1.2 基本逻辑联结词

本大节主要包括：基本逻辑联结词“或”“且”“非”. 教科书主要介绍了由“或”“且”“非”组成的新命题的记法，以及由“或”“且”“非”组成的新命题的真假判断方法. 在命题的否定中，介绍了存在性命题、全称命题的否定.

本大节的重点是了解“或”“且”“非”的含义，学会用这些逻辑联结词有效地表达相关的数学内容. 难点是对存在性命题、全称命题的否定.

1.2.1 “且”与“或”

1. 本小节的重点是了解“且”与“或”的含义，能判定由“且”与“或”组成的新命题的真假. 难点是对“或”的含义的理解.

2. 逻辑联结词“且”与“或”的含义. “且”与自然语言中的“并且”“和”相当. “或”与自然语言中的“或者”“可能”是相当的. 但自然语言中的“或者”有两种用法：一是“不可兼”的“或”；二是“可兼”的“或”. 而我们仅研究可兼“或”在数学中的含义.

3. 命题 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 真假的判定. 要判定 $p\wedge q$ 的真假，关键是看 p，q 的真假，只有当命题 p，q 都为真时，$p\wedge q$ 才为真，其他三种情况 $p\wedge q$ 都为假. 要判断 $p\vee q$ 的真假，关键是看命题 p，q 的真假，只有当命题 p，q 都为假时，$p\vee q$ 才为假，其他三种情况，$p\vee q$ 都为真. 教科书把 $p\wedge q$，$p\vee q$ 叫新命题，没有给出复合命题的概念，意在降低教学的难度，避免简单命题、复合命题的讨论，主要目的是让学生学会用这些逻辑联结词有效地表达相关的数学内容.

4. 教学时，要通过实例引导学生去理解“且”“或”的含义；结合例子去总结判断 $p\wedge q$，$p\vee q$ 形式命题的真假的规律，切忌让学生死记硬背.

1.2.2 “非”(否定)

1. 本小节的重点是了解逻辑联结词“非”的含义. 难点是对命题的否定.

2. 逻辑联结词“非”的含义与日常生活中的“不是”“全盘否定”“问题的反面”相近. 而“非”命题，就是对命题的否定. 若命题 p 为真，则$\neg p$ 为假；若命题 p 为假，则$\neg p$ 为真. p 与$\neg p$ 的真假相反.

3. 存在性命题的否定. p：$\exists x\in A, p(x)$. $\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$. 否定存在性命题时，将存在量词变为全称量词，再否定它的性质. 例如：p：至少有一个质数不是奇数. $\neg p$：所有的质数都是奇数.

4. 全称命题的否定. q: $\forall x\in A$, $q(x)$. $\neg q$: $\exists x\in A$, $\neg q(x)$. 否定全称命题时，将全称量词变为存在量词，再否定它的性质. 有的命题省略了全称量词，否定时要特别注意. 如 p: 实数的绝对值是正数，如将 $\neg p$ 写成“实数的绝对值不是正数”就错了. 原因是 p 为假命题，$\neg p$ 也为假命题，这与 p, $\neg p$ 一个为真一个为假相矛盾. 正确的否定应为“有一个实数的绝对值不是正数”. 为了避免出错，可用真值表加以验证.

常用“都是”表示全称肯定，它的存在性否定为“不都是”，两者互为否定. 用“都不是”表示全称否定，它的存在性肯定可用“至少有一个是”来表示.

5. “且”命题、“或”命题的否定，符合德·摩根定律. 即

$$\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q);$$

$$\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q).$$

德·摩根定律除给出了写“且”“或”命题的否命题的方法外，还可以利用它判定 $p\wedge q$, $p\vee q$ 的否定是否正确. 例如，写出下列命题的否定：

(1) $p\wedge q$: $(a=0)\wedge(b=0)$;　　$\neg(p\wedge q)$: $(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$.

(2) $p\vee q$: $(a=0)\vee(b=0)$;　　$\neg(p\vee q)$: $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$.

仅供教师教学时参考.

6. 逻辑联结词“且”“或”“非”与集合的交、并、补运算有着密切的联系，可引导学生从集合的角度去进一步理解“且”“或”“非”的意义.

设 U 为全集，集合 $A=\{x|x\in p(x)\}$, $B=\{x|x\in q(x)\}$，用逻辑联结词重新定义如下：

$A\cap B=\{x|p(x)\wedge q(x)\}$;

$A\cup B=\{x|p(x)\vee q(x)\}$;

$\complement_U A=\{x|\neg p(x)\}$.

7. 对命题的否定学生不易理解，教学中，要多通过例子去解释，帮助学生突破难点，减少形式化的记忆.

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

本大节内容主要包括：充分条件、必要条件与命题的四种形式. 教科书通过研究“如果 p，则 q”形式命题为真，给出了充分条件、必要条件的定义，进而给出了充要条件的定义. 接着，教科书又研究了“如果 p，则 q”形式命题的四种形式，给出了四种命题之间的相互关系.

本节的重点是理解充分条件、必要条件与充要条件的意义，会分析四种命题之间的相互关系. 本节的难点是对充分条件、必要条件与充要条件的理解与判定.

1.3.1 推出与充分条件、必要条件

1. 本小节的重点是理解充分条件、必要条件的意义，难点是对充分条件、必要条件与充要条件的判定.

2. 本小节专门研究“如果 p，则 q”形式的命题，其中 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论. 而充分条件、必要条件与充要条件的知识与判断“如果 p，则 q”形式命题的真假相关.

3. 当命题“如果 p，则 q”为真时，就说由 p 成立可推出 q 成立，记作 $p\Rightarrow q$. 对这类代数命题真假的判定，常需要通过推理证明来完成.

4. 对充分条件、必要条件的教学，要多结合实例去说明，在学生有充分的感性认识的基础上，给出它们的定义. 对充分条件、必要条件的判定，首先要分清哪是条件 p，哪是结论 q，进而要看是由 $p\Rightarrow q$，还是由 $q\Rightarrow p$. 例如

$$p: a>3, q: a>5.$$

显然“如果 $a>3$，则 $a>5$”不成立，p 推不出 q；而 q 可以推出 p，即 $q\Rightarrow p$，则 q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件.

对充要条件的教学，要讲清“充要条件”有时又说成“当且仅当”或“等价”. 对于有关充要条件的证明问题，既要证充分性，又要证必要性. 因此，正确判定命题中谁是条件，谁是结论是非常关键的一环.

5. 在判定命题的条件时，除经常用到充分条件、必要条件、充要条件外，有时还涉及到充分不必要条件、必要不充分条件的概念，现给出它们的概念，仅供教师参考：

已知命题“如果 p，则 q”，若 $p\Rightarrow q$，且 q 推不出 p，则称 p 是 q 的充分不必要条件；

已知命题“如果 p，则 q”，若 $q\Rightarrow p$，且 p 推不出 q，则称 p 是 q 的必要不充分条件.

6. 从集合的角度去理解充分条件、必要条件、充要条件的概念.

设集合 $A=\{x\mid p(x)\}$，$B=\{x\mid q(x)\}$：

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件；

若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件，q 是 p 的充要条件.

7. 本小节的教学，要多结合例子去讲清概念，通过学生动脑思考、动手练习不断加深对概念的理解.

1.3.2 命题的四种形式

1. 本小节的重点是会分析四种命题的相互关系，难点是正确地写出原命题的否命题.

2. 本节是研究“如果 p，则 q”形式的命题的四种形式. 要注意推出符号“$\Rightarrow$”的意义，只有当“如果 p，则 q”形式的命题为真时，才用推出符号“$\Rightarrow$”，记作 $p\Rightarrow q$. 要注意向学生讲明，我们只研究“如果 p，则 q”形式的命题的四种形式.

3. 关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以如下表述：

(1) 交换原命题的条件和结论，所得到的命题是逆命题；

(2) 同时否定命题的条件和结论，所得到的命题是否命题；

(3) 交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得到的命题是逆否命题.

用符号语言可以表示为（课标没有要求使用此符号）：

(1) 原命题：$p\rightarrow q$（“如果 p，则 q”形式的命题，记为 $p\rightarrow q$）；

(2) 逆命题：$q\rightarrow p$；

(3) 否命题：$(\neg p)\rightarrow(\neg q)$；

(4) 逆否命题：$(\neg q)\rightarrow(\neg p)$.

4. 要讲清否命题与命题的否定的区别. 首先，只有“如果 p，则 q”形式的命题才有否命题，形式为“如果 $\neg p$，则 $\neg q$”. 其他形式的命题只有“否定”，而没有否命题. 其次，命题的否定式与原命题一真一假，而“如果 p，则 q”的否命题与原命题的真假可能相同也可能相反.

5. 学习了命题的四种形式之间的关系，我们再从命题的角度去理解充分条件、必要条件和充要条件. 设原命题为“如果 p，则 q”，则：

(1) 若原命题为真，则 p 是 q 的充分条件；

(2) 若逆命题为真，则 p 是 q 的必要条件；

(3) 若原命题和逆命题都为真，则 p 是 q 的充要条件.

6. 对本小节的教学，不要让学生去死记硬背形式化的定义及模式，而要通过例题教学，让学生去发现四种命题形式间的逻辑关系，并能用命题间的关系去验证写出的命题是否正确. 有时还利用互为逆否的两个命题间的等价性，在原命题不易证明时，证明其逆否命题.

Ⅲ 拓展资源

一、有关充要条件的证明

在解题教学中，经常遇到有关充要条件的问题，常见的题型主要有：(1) 判定给出的条件是充分条件、必要条件还是充要条件；(2) 给出结论成立的充分（或必要）条件，求参数的范围；(3) 寻求结论成立的充要条件. 解决这类问题一般需要通过推理论证得到结果. 对于充要条件的证明，既要证明充分性，又要证明必要性. 下面仅举几例说明.

例 1 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$. 若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要但非充分条件，求实数 m 的取值范围.

分析 要求 m 的取值范围，需建立 p 与 q 的联系. 从而，问题转化为解不等式问题. 解题的关键是如何利用$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要但非充分条件，即$\neg p$ 推不出$\neg q$ 且$\neg q\Rightarrow\neg p$.

解：由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，

所以$\neg p$：$A=\{x\mid x>10 或 x<-2\}$.

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$，得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$，

所以$\neg q$：$B=\{x\mid x<1-m 或 x>1+m\}$.

由$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要但非充分条件，则 B 是 A 的真子集，

$$\begin{cases}m>0\\1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 9.$$

例 2 （2002 年高考江苏卷）已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$：

(1) 当 $b>0$ 时，若 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant 1$，证明 $a\leqslant 2\sqrt{b}$；

(2) 当 $b>1$ 时，证明：$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$；

(3) 当 $0<b\leqslant 1$ 时，讨论：$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件.

(1) **证明**：依题设，$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\leqslant 1$.

因为 $f(x)=-b(x-\frac{a}{2b})^2+\frac{a^2}{4b}$，所以 $f(\frac{a}{2b})=\frac{a^2}{4b}\leqslant 1$.

因为 $a>0$，$b>0$， 所以 $a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(2) 证明：(必要性)

$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f(x)$，据此可以推出 $-1\leqslant f(1)$，

即 $a-b\geqslant -1$，所以 $a\geqslant b-1$.

$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(x)\leqslant 1$，因为 $b>1$，可以推出 $f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant 1$，

即 $a\times\frac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant 1$，所以 $a\leqslant 2\sqrt{b}$.

因此 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(充分性)

因为 $b>1$，$a\geqslant b-1$，$\forall x\in[0,1]$，可以推出

$$ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant -x\geqslant -1,$$

即 $ax-bx^2\geqslant -1$.

因为 $b>1$，$a\leqslant 2\sqrt{b}$，$\forall x\in[0,1]$，可以推出

$$ax-bx^2\leqslant 2\sqrt{b}x-bx^2\leqslant 1,$$

即 $ax-bx^2\leqslant 1$.

因此 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

综上，当 $b>1$ 时，$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(3) 解：当 $a>0$，$0<b\leqslant 1$ 时，$\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)=ax-bx^2\geqslant -b\geqslant -1,$$

即 $f(x)\geqslant -1$；

$$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f(1)\leqslant 1\Rightarrow a-b\leqslant 1,$$

即 $a\leqslant b+1$；

$$a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant (b+1)x-bx^2\leqslant 1,$$

即 $f(x)\leqslant 1$.

因此，当 $a>0$，$0<b\leqslant 1$ 时，$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $a\leqslant b+1$.

二、哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一．哥德巴赫是德国一位中学教师，也是一位著名的数学家，生于1690年，1725年当选为俄国彼得堡科学院院士．1742年，哥德巴赫在教学中发现，每个不小于6的偶数都是两个素数（只能被1和它本身整除的数）之和．例如：6=3+3，12=5+7等．

1742年6月7日哥德巴赫写信给当时的大数学家欧拉，提出了以下的猜想：

(1) 任何一个大于等于6之偶数，都可以表示成两个奇质数之和；

(2) 任何一个大于等于9之奇数，都可以表示成三个奇质数之和．

这就是著名的哥德巴赫猜想．欧拉在6月30日给他的回信中说，他相信这个猜想是正确的，但他不能证明．叙述如此简单的问题，连欧拉这样首屈一指的数学家都不能证明，这个猜想便引起了许多数

学家的注意．从哥德巴赫提出这个猜想至今，许多数学家都不断努力想攻克它，但都没有成功．当然曾经有人作了些具体的验证工作，例如：$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7=3+11$，$16=5+11$，$18=5+13$，…．有人对 33×108 以内且大于 6 之偶数一一进行验算，哥德巴赫猜想（1）都成立．但严格的数学证明尚待数学家的努力．

从此，这道著名的数学难题引起了世界上成千上万数学家的注意．200 年过去了，没有人证明它．哥德巴赫猜想由此成为数学皇冠上一颗可望不可及的“明珠”．到了 20 世纪 20 年代，才有人开始向它靠近．目前最佳的结果是中国数学家陈景润于 1966 年证明的，称为陈氏定理：“任何充分大的偶数都是一个质数与一个自然数之和，而后者仅仅是两个质数的乘积．”通常都简称这个结果为大偶数可表示为“$1+2$”的形式．

最终会由谁攻克“$1+1$”这个难题呢？现在还没法预测．

三、蜂窝猜想

4 世纪古希腊数学家佩波斯提出，蜂窝的优美形状，是自然界最有效劳动的代表．他猜想，人们所见到的截面呈六边形的蜂窝，是蜜蜂采用最少量的蜂蜡建造成的．他的这一猜想称为“蜂窝猜想”，但这一猜想一直没有人能证明．

美国密执安大学数学家黑尔宣称，他已破解这一猜想．蜂窝是一座十分精密的建筑工程．蜜蜂建巢时，青壮年工蜂负责分泌片状新鲜蜂蜡，每片只有针头大小．而另一些工蜂则负责将这些蜂蜡仔细摆放到一定的位置，以形成竖直六面柱体．每一面蜂蜡隔墙厚度及误差都非常小．6 面隔墙宽度完全相同，墙之间的角度正好是 120°，形成一个完美的几何图形．人们一直心存疑问，蜜蜂为什么不让其巢室呈三角形、正方形或其他形状呢？隔墙为什么呈平面，而不是呈曲面呢？虽然蜂窝是一个三维立体建筑，但每一个蜂巢都是六面柱体，而蜂蜡墙的总面积仅与蜂巢的截面有关．由此引出一个数学问题，即寻找面积最大、周长最小的平面图形．

1943 年，匈牙利数学家陶斯巧妙地证明，在所有首尾相连的多边形中，正多边形的周长是最小的．但如果多边形的边是曲线时，会发生什么情况呢？陶斯认为，正六边形与其他任何形状的图形相比，它的周长最小，但他不能证明这一点．而黑尔在考虑了周边是曲线时，无论是曲线向外凸，还是向内凹，都证明了由许多正六边形组成的图形周长最小．他已将 19 页的证明过程放在因特网上，许多专家都已看到了这一证明，认为黑尔的证明是正确的．

四、数学家陈景润

陈景润（1933—1996），中国数学家，中国科学院院士，福建闽侯人．陈景润出生在一个小职员的家庭，上有哥姐、下有弟妹，排行第三．因为家里孩子多，父亲收入微薄，家庭生活非常拮据．因此，陈景润一出生便似乎成为父母的累赘，一个自认为是不受欢迎的人．

上学后，由于瘦小体弱，常受人欺负．这种特殊的生活境况，把他塑造成了一个极为内向、不善言谈的人，加上对数学的痴恋，更使他养成了独来独往、独自闭门思考的习惯，因此竟被别人认为是一个“怪人”．陈景润毕业后选择研究数学这条异常艰辛的人生道路，与沈元教授有关．在他那里，陈景润第一次知道了哥德巴赫猜想，也就是从那里，从那一刻起，他就立志去摘取那颗数学皇

冠上的明珠.

1953 年，陈景润毕业于厦门大学，留校在图书馆工作，但始终没有忘记哥德巴赫猜想，他把数学论文寄给华罗庚教授，华罗庚阅后非常赏识他的才华，把他调到中国科学院数学研究所当实习研究员，从此他便有幸在华罗庚的指导下，向哥德巴赫猜想进军.

1966 年 5 月，一颗耀眼的新星闪烁于全球数学界的上空——陈景润宣布证明了哥德巴赫猜想中的“1+2”；1972 年 2 月，他完成了对“1+2”证明的修改. 令人难以置信的是，外国数学家在证明“1+3”时用了大型高速计算机，而陈景润却完全靠纸、笔和头脑. 如果这令人费解的话，那么他单为简化“1+2”这一证明过程就用去了 6 麻袋稿纸，则足以说明问题了.

1973 年，他发表的著名的“陈氏定理”，被誉为筛法的光辉顶点.

对于陈景润的成就，一位著名的外国数学家曾敬佩和感慨地说：他移动了群山！

Ⅳ　教学案例

案例 1：1.1.2　量词

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：

（1）正确地判断全称命题、存在性命题的真假；

（2）会用自然语言、符号语言表示两种命题.

2. 过程与方法目标：

（1）经历全称命题、存在性命题概念的形成过程，体验由特殊到一般的思维方法；

（2）通过实例体验两种命题的表述方法；

（3）学会判断全称命题、存在性命题真假的方法.

3. 情感、态度与价值观目标：

通过本节的学习使学生认识到两种命题在刻画现实问题、数学问题中的作用，从而激发学生的创新精神.

（二）教学重点与难点

重点：全称命题、存在性命题的概念以及真假的判断.

难点：用自然语言、符号语言表示两种命题.

（三）教学方法

本节内容是学习逻辑联结词、充要条件、命题的基础，在教学中要引导学生联系已有知识，采用让学生观察、抽象、概括的方式，进一步理解全称命题、存在性命题的概念，并判断其真假，引导学生参与教学过程，使数学学习成为再创造的过程.

（四）教学过程

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
复习引入	引例：判断下列语句是不是命题，如果是命题，判断其真假： ① $x^2-1=0$； ② $5x-1$ 是整数； ③ $5\times5-1$ 是整数； ④对所有整数 x，$x^2-1=0$； ⑤对所有整数 x，$5x-1$ 是整数.	教师提问，学生思考并回答.	复习旧知识，引出新知识.
概念形成	1．全称量词与全称命题 （1）如引例⑤短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫全称量词，并用符号“$\forall$”表示； （2）含有全称量词的命题，叫做全称命题. （3）引例中的④⑤可用符号表示为： p：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$； q：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数. （4）一般地，设 $p(x)$ 是某集合 M 的所有元素都具有的性质，那么全称命题就是形如“对 M 中的所有 x，$p(x)$”的命题. 简记为：$\forall x\in M$，$p(x)$. 2．存在量词与存在性命题 （1）如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加“有一个”的条件还可得到新命题： p_1：有一个整数 x，$x^2-1=0$； q_1：至少有一个整数 x，$5x-1$ 是整数. （2）短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述中也表示数量，逻辑中通常叫做存在量词，用符号“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题，叫存在性命题. （3）存在性命题的符号表示： p_1：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$； q_1：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数. （4）一般地，设 $q(x)$ 是某集合 M 的有一些元素 x 具有某性质的命题，那么存在性命题就是形如“存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$”的命题. 简记为：$\exists x\in M$，$q(x)$.	师生共同讨论. 教师点评： （1）全称量词及符号表示； （2）引导学生通过例子理解概念. 教师提出问题： （1）用符号表示引例④⑤； （2）举例说明对集合 M 中所有元素都具有的性质； （3）总结全称命题的一般形式及记法. 教师提出问题，让学生与全称命题进行比较. 教师点明：存在量词；存在性命题的概念. 教师提问：找出全称命题与存在性命题的异同点. 引导学生用符号语言表示命题. 师生共同讨论.	通过实例教师引导学生分析，通过学生归纳、抽象得到概念. 从而提高学生的抽象概括能力，发展学生的理性思维能力. 初步理解全称命题的定义及表示形式. 引导学生学会运用类比的方法学习新知. 让学生通过比较进一步加深对概念的理解. 提高学生文字语言、符号语言的转化能力. 让学生初步理解存在性命题的概念及表示形式.
概念深化	练习：判断下列语句是不是全称命题或存在性命题，如果是，用符号表示出来： ① 中国的所有江河流入太平洋； ② 0 不能作除数； ③ 任何一个实数除以 1，仍等于这个实数； ④ 每一个向量都有方向吗？	教师点评： ① 全称命题； ② 存在性命题； ③ 全称命题； ④ 不是命题. 注意全称命题、存在性命题的符号表示.	让学生通过练习进一步理解概念，并能进行初步的应用.

续表

教学环节	教 学 内 容	师生互动	设计意图
应用举例	例：试判断以下命题的真假： ① $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2=0$； ② $\forall x\in \mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$； ③ $\exists x\in \mathbf{Z}$，$x^3<1$； ④ $\exists x\in \mathbf{Q}$，$x^2=3$.	教师分析①，学生做其他三个．然后，引导学生总结如何去判断全称命题、存在性命题真假的方法． 学生自己动手解题． 教师提问：对全称命题、存在性命题如何判断其真假？	让学生养成独立思考问题、自主解决问题的习惯，学会解题后的自我反思． 把问题放给学生，培养学生独立学习的习惯．
	练习：练习B，2.	学生做题，教师提问．	进一步巩固所学知识、方法．
归纳总结	(1) 让学生回顾本节所学知识、方法； (2) 思考题：你能用所学知识解决章头问题吗？	学生回答，教师补充完善．通过学生做思考题，加深对所学知识的理解．	使学生养成归纳总结的习惯，教师帮助学生构建知识结构．
布置作业	习题1-1A，3，4.	学生独立完成．	巩固所学知识、方法．

案例2：1.2.2 “非”（否定）

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：

(1) 了解逻辑联结词“非”的意义，会写一个命题的否定命题，能判断否定命题的真假；

(2) 会对含有全称量词、存在量词的全称命题、存在性命题进行否定.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过对否定命题、全称命题与存在性命题的否定的学习，体会从特殊到一般的探索性学习方法；

(2) 通过学习，体会命题间的逻辑关系.

3. 情感、态度与价值观目标：

通过本节的学习，让学生体会探索的乐趣，培养学生的创新意识，提高学生的逻辑判断能力和逻辑思维能力.

（二）教学重点与难点

重点：写出所给命题的否定命题，并判断其真假.

难点：全称命题、存在性命题的否定及真假判断.

（三）教学方法

本节内容比较抽象，难以理解．在教学中需从具体例子入手，通过引导学生观察、比较、抽象、概括，形成理性概念．教师要善于创设问题情景，鼓励学生结合已有知识大胆地探究.

（四）教学过程

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
复习引入	（1）复习“且”“或”的含义； （2）复习如何判断由“且”“或”构成的新命题的真假.	教师提问，学生回答.	复习上节内容，引出本节内容.
概念形成	引例1： （1）函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π； （2）2不是奇数.	教师提问：这两个命题的反面是什么？其真假与原命题的真假有何关系？ 学生思考后回答.	通过对引例的分析、思考，总结“命题的否定”的含义，结合生活中的“不是”、“全盘否定”抽象出否定命题的概念.
	1. 否定命题的概念 对命题 p 加以否定，就得到一个新命题，记作 $\neg p$. 说明： （1）命题的否定是对命题的“全盘否定”； （2）p 与 $\neg p$ 的真假相反.	教师提问： （1）命题的否定是不是对命题的部分否定？ （2）p 与 $\neg p$ 的关系如何？ 学生思考后回答.	提高学生的抽象、概括能力，发展学生的理性思维能力. 通过提问，进一步加深学生对命题的否定的理解，学会如何判断否定命题的真假.
概念深化	思考与练习：写出下列命题的否定，并判断其真假： ①p：$y=\tan x$ 是奇函数； ②q：$\sqrt{(-2)^2}=-2$； ③r：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点是(1，0). 引例2： （1）有些三角形是直角三角形； （2）有些三角形不是直角三角形； （3）所有的质数都是奇数； （4）所有的质数不都是奇数.	学生板演，教师点评. 教师提出问题，学生回答. 问题1：写出它们的否定； 问题2：（1）（2）与（3）（4）的否定有什么本质的不同？ 问题3：你能总结出这两类问题的否定命题的写法吗？	通过练习，进一步提高学生的应用意识. 通过这四个例子，培养学生的观察、分析、概括、抽象能力，体会从特殊到一般的思维方法.
	2. 全称命题与存在性命题的否定 （1）一般地，存在性命题是： p：$\exists x\in A$，$p(x)$； 其否定命题为： $\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$. （2）一般地，全称命题是： q：$\forall x\in A$，$q(x)$； 其否定命题是： $\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg q(x)$.	教师在学生回答上述问题的基础上，给出结论. 教师强调：存在性命题的否定是全部否定；全称命题的否定是部分否定.	通过学生自主探索，教师的点拨、引导，得出结论. 从而培养学生的自学能力.
应用举例	例1. 写出下列命题的否定： （1）q：$b=0$； （2）p：$a=0$.	教师引导学生观察命题的结构，让学生分析，解答.	巩固所学知识与方法.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
	练习：练习 A，1.	学生完成.	
	例 2．写出下列命题的“非”，并判断其真假： (1) p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$； (2) q：所有的正方形都是矩形； (3) r：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$； (4) s：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$.	教师提问： 这四个命题的构成有什么特点？针对这一特点，应如何写出它们的否定命题？ 学生思考后回答，教师点评.	通过这一例题培养学生观察、分析问题的能力及抽象归纳理性思维能力.
	练习：练习 A，2，3.	学生做题.	检查掌握情况.
归纳总结	1. 知识： (1) 否定命题及其真假判断； (2) 全称命题、存在性命题否定的写法. 2. 方法： 从特殊到一般的思维方法.	学生总结，教师补充完善.	培养学生的自我归纳概括能力.
布置作业	习题 1-2 A，2，3(3)(4)，4.	学生独立完成.	进一步巩固所学知识方法.

案例 3：1.3.1　推出与充分条件、必要条件

（一）教学目标

1．知识与技能目标：

(1) 了解“如果 p，则 q”形式的命题，并能判断命题的真假；

(2) 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义；

(3) 掌握充分条件、必要条件、充要条件的判定方法.

2．过程与方法目标：

(1) 了解学习充分条件、必要条件、充要条件是判断数学命题真假的需要，学会用数学观点分析解决实际问题；

(2) 通过对充分条件、必要条件、充要条件的判定，提高分析问题、解决问题的能力.

3．情感、态度与价值观目标：

通过“$p\Rightarrow q$”与“$q\Rightarrow p$”的判断，使学生感受对立统一的思想，培养学生的辩证唯物主义观.

（二）教学重点与难点

本节的教学重点是充分条件、必要条件、充要条件的判定，难点是判定所给条件是充分条件、必要条件还是充要条件.

（三）教学方法

本节内容比较抽象，教学中，引导学生从熟悉的例子入手，通过判断命题的真假，突出命题中条件与结论的推出关系，让学生从不同角度，运用从特殊到一般的思维方法，归纳出条件与结论的推出关系，建立充分条件、必要条件的概念.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习命题“如果 p，则 q”，p 称为命题的条件，q 称为命题的结论. 还可以有以下说法“只要 p，就有 q”“要是 p，便 q”.	教师提出问题：举出在数学和日常生活中常遇到的命题形式. 教师点评.	温故知新.
概念形成	引例 1. 将下列命题改写为“如果 p，则 q”形式的命题： （1）平行四边形的两组对角相等； （2）两组对角相等的四边形是平行四边形. 引例 2： （3）如果四边形是正方形，则它的四边相等； （4）如果四边形的四边相等，则它是一个正方形； （5）如果 $a>0$，则 $a^2>0$（$a\in\mathbf{R}$）； （6）如果 $a^2+b^2=0$，则 $a=b=0$（a，$b\in\mathbf{R}$）. 1. 判断上述 6 个命题的真假. 2. 命题“如果 p，则 q”经过推理判断是真命题时，就说由 p 成立，推出 q 成立. 记作：$p\Rightarrow q$. 3. 充分条件： $p\Rightarrow q$，p 叫做 q 成立的充分条件. 如引例（1）（3）（5）（6）. 练习：判断下列命题的真假： （1）“四边形的两组对角相等”，则“四边形为平行四边形”； （2）“四边形的四边长相等”，则“四边形为正方形”. 4. 必要条件：$q\Rightarrow p$，则 p 叫 q 的必要条件. 5. 充要条件：$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 叫做 q 的充要条件. 例如： ①方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个不相等的实根的充要条件是 $\Delta=b^2-4ac>0$； ②$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$时，当且仅当 $AC^2+BC^2=AB^2$； ③$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$等价于 $AB=A'B'$，且 $AC=A'C'$，且 $BC=B'C'$.	教师提出问题，学生改写命题. 教师写出例子，让学生判断真假. 教师点评. 教师提问“如果 p，那么 q”在为真的情况下，p 与 q 的关系如何？ 教师提出问题，学生判断真假. 教师点评，并提出充分条件的概念. 教师提出问题： 引例（1）（3）（5）（6）反过来是否成立？ 师生共同引出必要条件的概念. 师生共同完成. 教师强调：特别注意“且”的含义.	让学生熟悉“如果 p，则 q”形式的命题. 使学生通过判断命题的真假，切身体会来自命题 p 与 q 的关系. 为学习充分条件、必要条件作准备. 通过实例的真假判断，弄清充分条件的实质. 让学生体会如何判断条件的充分性. 让学生体会如何判断条件的必要性. 弄清充要条件的实质以及充分、必要、充要条件三者之间的关系. 进一步巩固概念.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	6. 在数学中，含有变量 x 的语句 $p(x)$，$q(x)$，构成形如“若 $p(x)$，则 $q(x)$”的命题，应理解为“它是关于某集合 M 的一切元素 x 的全称命题”. 7. 命题的真假与充分性、必要性的关系： (1) 原命题为真，逆命题为假，则原命题的条件是结论成立的充分不必要条件； (2) 原命题为假，逆命题为真，则原命题的条件是结论成立的必要不充分条件； (3) 原命题为真且逆命题为真，则原命题的条件是结论成立的充要条件.	教师通过分析例子，引导学生共同总结出原命题、逆命题的真假与充分条件、必要条件、充要条件的关系.	帮助学生总结判断充分条件、必要条件、充要条件的规律.
应用举例	例 1. 在下列各题中，判断 p 是 q 的什么条件： (1) p：三角形全等； q：两三角形面积相等. (2) p：$a^2=4$； q：$a=2$. (3) p：$A\subseteq B$； q：$A\cap B=A$. 例 2. 已知 α 是 β 的充要条件，δ 是 γ 的必要条件，同时又是 β 的充分条件. 试求 α 与 γ 的关系.	师生共同分析后，由一学生板演解题步骤，教师及时纠正出现的问题. 教师对学生的做题情况及时作出评价. 由教师分析例 2，画出推出图. 学生完成，教师评价.	1. 通过例 1 让学生掌握判断充要条件的方法. 2. 通过例 2 提高学生解决综合问题的能力，以及分析问题的能力. 3. 练习的目的是巩固所学知识方法. 增加直观性，让学生学会解决这类问题的方法.
	巩固练习：练习 A，1，2，3.	学生做题.	
归纳总结	1. 知识：充分条件、必要条件与充要条件. 2. 判断充分条件、必要条件与充要条件的方法.	让学生回顾本节所学知识方法，教师对解题策略进行提炼.	让学生学会总结、反思，提高学生的数学素养.
布置作业	必做题： 习题 1-3A，1，3； 选做题： 习题 1-3B，1，2.	必做题：要求所有的学生都做. 选做题：要求基础较好的学生做.	实行分层布置作业有利于调动学生的学习积极性.

V 习题参考答案与提示

练习 A（第 3 页）

1. (1) (2) (4) 是命题；(3) (5) (6) 不是命题.

2. (1) 真；(2) 假；(3) 假；(4) 真；(5) 假.

练习 B（第 4 页）

1. (1) (2) 是命题.

2. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 假；(5) 真；(6) 真.

练习 A（第 6 页）

1. (1) 全称命题. $\forall x\in$ {中国的河流}，x 都流入太平洋；

   (2) 存在性命题，$\exists x\in \mathbf{R}$，x 不能作除数；

   (3) 全称命题. $\forall x\in \mathbf{R}$，$\frac{x}{1}=x$；

   (4) 全称命题. $\forall a\in\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}$ 是非零向量$\}$，$\boldsymbol{a}$ 有方向.

2. (1) 假；(2) 假；(3) 假；(4) 假.

3. (1) 所有正方形都是矩形；每一个正方形都是矩形；凡是正方形都是矩形.

   (2) 存在一个质数是偶数；至少有一个质数是偶数；有些质数是偶数.

练习 B（第 7 页）

1. (1) 是；(2) 是；(3) 是；(4) 是.

2. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 假.

习题 1－1A（第 7 页）

1. (1) 是命题，是真命题；

   (2) 是命题，是假命题；

   (3) 是命题，是真命题；

   (4) 是命题，是假命题；

   (5) 不是命题.

2. (1) $q\left(\frac{\pi}{2}\right)$：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$. 是真命题；

   (2) $\forall a\in \mathbf{R}$，$\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)=\cos a$. 是假命题. 如 $a=\pi$，$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，而 $\cos\pi=-1$，所以是假命题.

3. (1) 是命题，而且是存在性命题；

   (2) 是命题，而且是全称命题；

   (3) 是命题，而且是全称命题；

   (4) 是命题，而且是存在性命题.

4. (1) $\forall x\in \mathbf{R}$，x 能写成小数的形式；

   (2) $\exists x\in$ {凸 n 边形}，x 的内角和等于 2π；

   (3) $\forall x\in \mathbf{R}$，$-x$ 等于 x 的相反数；

   (4) $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^3>x^2$；

   (5) $\forall \alpha\in \mathbf{R}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

5. (1) 真；(2) 真；(3) 真；(4) 真；(5) 假.

6. 略.

习题 1－1B（第 8 页）

1. (1) $\forall x\in\mathbf{Q}$，x 都能写成分数的形式；

   (2) $\forall x\in\{n$ 边形$\}$，x 的内角和都等于$(n-2)\times180^\circ$；

   (3) $\forall a$，$b\in\mathbf{Q}$，在 a，b 之间都有另一个有理数；

   (4) $\exists a\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $ax=0$.

2. (1) 当 $x=0$ 时，$|x|=0$，所以命题是假命题；

   (2) 当 $x=0$ 时，$x^2-2x-3=-3<0$，所以命题是假命题；

   (3) 对一元二次方程 $x^2+x+1=0$，因为 $\Delta=-3<0$，所以方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根，所以命题是假命题.

3. (1) 当 $x=5$ 时，$2^5=32>5^2$，即 $p(5)$是真命题；

   (2) 当 $x=-1$ 时，$2^{-1}<1$. 即 $p(-1)$是假命题.

4. (1) 由 $x+1>x$，得 $x\in\mathbf{R}$；

   (2) 由 $x^2-5x+6>0$ 得　$\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$；

   (3) 由 $\sin x>\cos x$ 得　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$，所以　$\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. (1) 真；(2) 假.

练习 A（第 13 页）

1. (1) $p\wedge q$：28 是 2 的倍数且是 7 的倍数. 28 是 2 的倍数为真命题，28 是 7 的倍数为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

   (2) $p\wedge q$：11 是 143 的因数且是 1 001 的因数. 因为 11 是 143 的因数是真命题，11 是 1 001 的因数是真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

   (3) $p\wedge q$：$52<60$ 且 $62>60$. 因为 $52<60$ 为真命题，$62>60$ 为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

   (4) $p\wedge q$：2 是方程 $x-2=0$ 的根且是方程 $x+1=0$ 的根. 因为 2 是方程 $x-2=0$ 的根为真命题，2 是方程 $x+1=0$ 的根为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

   (5) $p\wedge q$：$\sqrt{(-1)^2}=-1$ 且 $|0|=0$. 因为 $\sqrt{(-1)^2}=-1$ 为假命题，$|0|=0$ 为真命题，所以 $p\wedge q$为假命题.

2. 略.

3. (1) $p\vee q$：28 是 2 的倍数或是 7 的倍数. 28 是 2 的倍数为真命题，28 是 7 的倍数为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

   (2) $p\vee q$：11 是 143 的因数或是 1 001 的因数. 因为 11 是 143 的因数是真命题，11 是 1 001 的因数是真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

   (3) $p\vee q$：$52<60$ 或 $62>60$. 因为 $52<60$ 为真命题，$62>60$ 为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

   (4) $p\vee q$：2 是方程 $x-2=0$ 的根或是方程 $x+1=0$ 的根. 因为 2 是方程 $x-2=0$ 的根为真命题，2 是方程 $x+1=0$ 的根为假命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

   (5) $p\vee q$：$\sqrt{(-1)^2}=-1$ 或 $|0|=0$. 因为 $\sqrt{(-1)^2}=-1$ 为假命题，$|0|=0$ 为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

4. (1) 因为 $m=m$ 为真，$m>m$ 为假，所以 $\forall m\in\mathbf{R}$，$m\geqslant m$ 为真；

(2) 因为 $0^2=0$ 为真，而且 $0\in\mathbf{R}$，所以 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$ 为真；

(3) 因为集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集为真，所以原命题为真.

5. 略.

练习 B（第 13 页）

1. (1) $p\wedge q$：27 是 3 的倍数且是 9 的倍数；$p\vee q$：27 是 3 的倍数或是 9 的倍数. 因为 p：27 是 3 的倍数是真命题，q：27 是 9 的倍数是真命题，所以 $p\wedge q$，$p\vee q$ 都是真命题.

(2) $p\wedge q$：$17<20$ 且 $17=20$；$p\vee q$：$17<20$ 或 $17=20$. 因为 p：$17<20$ 是真命题，q：$17=20$ 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题.

(3) $p\wedge q$：平行四边形对角线互相平分且相等；$p\vee q$：平行四边形对角线互相平分或相等. 因为 p：平行四边形对角线互相平分是真命题，q：平行四边形对角线相等是假命题，所以 $p\wedge q$是假命题，$p\vee q$ 是真命题.

2. (1) 真；(2) 假；(3) 真；(4) 真.

3. (1) 假；(2) 真.

练习 A（第 16 页）

1. (1) $\neg p$：2 不是方程 $x^2-4=0$ 的根；(假)

(2) $\neg p$：$\pi\neq 3.1415$. (真)

2. (1) $\exists n\in M$，$n\geqslant 12$；(真)

(2) $\forall m\in\{奇数\}$，使 $m\notin M$. (假)

3. (1) 至少存在一个分数不是有理数；(假)

(2) 所有三角形都不是锐角三角形；(假)

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x\neq x+2$；(假)

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，$2x+4<0$. (真)

练习 B（第 17 页）

1. (1) 2 不是质数；(假)

(2) 圆周率 π 不是无理数；(假)

(3) $1\,000\geqslant 100$. (真)

2. (1) A 中的所有队员没有一个北京人；

(2) A 中有些队员不是北京人；

(3) A 中有些队员是北京人；

(4) A 中的队员都是北京人.

3. (1) 存在实数 x，不是方程 $3x-5=0$ 的根；(真)

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$；(真)

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\neq 1$；(假)

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2\neq 0$. (假)

4. (1) 当 $a=0$，$b=2$ 时，方程 $ax=b$ 无解，或 $a=0$，$b=0$ 时，方程有无数解.

(2) 当 $x=-1$ 时，$|-1|\neq-1$；

(3) 当 $x=-1$ 时，$\sqrt{(-1)^2}\neq-1$.

习题 1-2 A（第 17 页）

1. (1) $p\wedge q$：2 不是奇数且 2 是质数；（真）$p\vee q$：2 不是奇数或 2 是质数.（真）

   (2) $p\wedge q$：$y=2^x$ 是单调函数且是递增函数；（真）$p\vee q$：$y=2^x$ 是单调函数或是递增函数.（真）

   (3) $p\wedge q$：$100>10$ 且 $10>100$；（假）$p\vee q$：$100>10$ 或 $10>100$.（真）

   (4) $p\wedge q$：数列$\{3n+2\}$是等差数列且是等比数列；（假）$p\vee q$：数列$\{3n+2\}$是等差数列或是等比数列.（真）

2. (1) ($x+1$ 是 x^3+x^2-x-1 的因式)$\wedge$($x+1$ 是 x^3+1 的因式)；

   (2) (1 是方程 $x-1=0$ 的根)$\vee$(2 是方程 $x-1=0$ 的根)；

   (3) (1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根)$\wedge$(-1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根).

3. (1) 存在正数的对数不都是正数；

   (2) 点 (3，4) 在圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 上；

   (3) $\exists x\in\mathbf{R}$，有 $3x\neq2x+x$；

   (4) $\forall x\in\mathbf{N}$，使 $x^2\neq x+2$.

4. (1) $\exists n\in M$，$n\leqslant1$；(2) $\forall n$ 是质数，$n\notin M$.

习题 1-2 B（第 18 页）

1. (1) $\triangle ABC$ 不是直角三角形；

   (2) $\triangle ABC$ 不是等腰三角形；

   (3) $\triangle ABC$ 是直角三角形且是等腰三角形；

   (4) $\triangle ABC$ 是直角三角形或是等腰三角形.

2. (1) 所有三角形不是直角三角形；

   (2) 所有锐角 α，使 $\sin\alpha\neq0$；

   (3) 在实数范围内，所有一元二次方程有解；

   (4) 所有人都会开车.

练习 A（第 21 页）

1. (1) 真；平行四边形 $\Rightarrow$ 它的一组对边相等.

   (2) 真；n 是奇数$\Leftrightarrow n$ 被 2 除余 1.

   (3) 真；设 x，y 为实数，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=0\Leftrightarrow x=y=0$.

   (4) 真；若 a，b，c 成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$.

2. (1) 设 x，y 为实数，“$x^2+y^2=0$”是“$x=0$，且 $y=0$”的充要条件；

   (2)“四边形的一组对边平行且相等”是“这个四边形是平行四边形”的充要条件；

   (3)“两个三角形相似”是“它们的对应角相等”的充要条件；

(4) “$\angle A=30°$” 是 “$\sin A=\frac{1}{2}$” 的充分条件，“$\sin A=\frac{1}{2}$” 是 “$\angle A=30°$” 的必要条件.

3. (1) 充分条件；(2) 必要条件；(3) 充分条件；(4) 充分条件；
(5) 必要条件；(6) 充要条件；(7) 充分条件；(8) 必要条件.

练习 B（第 22 页）

1. (1) 充分条件；(2) 充分条件；(3) 必要条件；(4) 充分条件.
2. (1) 假；(2) 真；(3) 假；(4) 假；(5) 真；(6) 真；(7) 真；(8) 真.

练习 A（第 23 页）

(1) 逆命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，若$\sqrt{n}\in \mathbf{N}$，则 n 是完全平方数；(真)
否命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，若 n 不是完全平方数，则$\sqrt{n}\notin \mathbf{N}$；(真)
逆否命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，若$\sqrt{n}\notin \mathbf{N}$，则 n 不是完全平方数.（真）
(2) 逆命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，若 $a^2=ab$，则 $a=b$；(假)
否命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，若 $a\neq b$，则 $a^2\neq ab$；(假)
逆否命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，若 $a^2\neq ab$，则 $a\neq b$.（真）
(3) 逆命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，若 $x^2+x-q=0$ 有实根，则 $q>0$；(假)
否命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，若 $q\leqslant 0$，则 $x^2+x-q=0$ 无实根；(假)
逆否命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，若 $x^2+x-q=0$ 无实根，则 $q\leqslant 0$.（真）
(4) 逆命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $xy=0$；(真)
否命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，若 $xy\neq 0$，则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$；(真)
逆否命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，则 $xy\neq 0$.（真）
(5) 逆命题：若四边形的对角线互相垂直，则四边形为菱形；(假)
否命题：若四边形不是菱形，则它的对角线不互相垂直；(假)
逆否命题：若四边形的对角线不互相垂直，则四边形不是菱形.（真）

练习 B（第 24 页）

(1) 逆命题：如果四边形的一组对边平行且相等，那么四边形为平行四边形；(真)
否命题：如果四边形不是平行四边形，那么它的一组对边不平行或不相等；(真)
逆否命题：如果四边形的一组对边不平行或不相等，那么它不是平行四边形.（真）
(2) 逆命题：设 $x\in \mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，那么$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$；(假)
否命题：设 $x\in \mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{CD}$，那么$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线；(假)
逆否命题：设 $x\in \mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，那么$\overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{CD}$.（真）
(3) 逆命题：如果一个函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，那么这个函数是偶函数；(真)
否命题：如果一个函数不是偶函数，那么它的图象不关于 y 轴成轴对称图形；(真)
逆否命题：如果一个函数的图象不关于 y 轴成轴对称图形，那么这个函数不是偶函数.（真）
(4) 逆命题：如果一个函数的图象关于坐标原点成中心对称图形，那么这个函数是奇函数；(真)

否命题：如果一个函数不是奇函数，那么它的图象不关于坐标原点成中心对称图形；（真）

逆否命题：如果一个函数的图象不关于坐标原点成中心对称图形，那么这个函数不是奇函数.（真）

习题 1－3 A（第 24 页）

1. （1）$p \Leftarrow q$；p 是 q 的必要条件；（2）$p \Leftrightarrow q$；p 是 q 的充要条件；
   （3）$p \Leftarrow q$；p 是 q 的必要条件；（4）$p \Rightarrow q$；p 是 q 的充分条件.
2. （1）$ab \neq 0$ 是 $a \neq 0$ 的充分条件，$a \neq 0$ 是 $ab \neq 0$ 的必要条件；
   （2）$(x+1)(y-2)=0$ 是 $x=-1$ 或 $y=2$ 的充要条件；
   （3）$\alpha=45°$ 是 $\tan\alpha=1$ 的充分条件，$\tan\alpha=1$ 是 $\alpha=45°$ 的必要条件；
   （4）集合 $A=\varnothing$ 是集合 $A \cup B=B$ 的充分条件，$A \cup B=B$ 是 $A=\varnothing$ 的必要条件.
3. （1）不正确；应为："n 是自然数" 是 "n 是整数" 的充分条件.
   （2）不正确；应为："x 是实数" 是 "x 是有理数" 的必要条件.
   （3）不正确；应为："$x^2>9$" 是 "$x>3$" 必要但不充分条件.
   （4）不正确；应为："m，n 都是奇数" 是 "$m+n$ 是偶数" 充分但不必要条件.
   （5）不正确；应为："$a>b$" 不是 "$a^2>b^2$" 的充分条件.
   （6）不正确；应为："$a>b$" 不是 "$|a|>|b|$" 的必要条件.
4. （1）数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（常数）；
   （2）$x \in A$ 且 $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$；
   （3）直线 l 垂直平面 α 中的任何一条直线 $\Leftrightarrow l \perp \alpha$.
5. （1）否命题：如果 $b^2-4ac \leqslant 0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有两个相等的实根或无实根；（真）
   逆命题：如果方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有两个不相等的实根，则 $b^2-4ac>0$；（真）
   逆否命题：如果方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有两个相等的实根或无实根，则 $b^2-4ac \leqslant 0$.（真）
   （2）否命题：如果 $x-y \neq 0$，则 $(x-y)(x+y) \neq 0$；（假）
   逆命题：如果 $(x-y)(x+y)=0$，则 $x-y=0$；（假）
   逆否命题： 如果 $(x-y)(x+y) \neq 0$，则 $x-y \neq 0$.（真）
6. （1）逆命题：如果 $(x-3)(x-7)=0$，则 $x=3$ 或 $x=7$；
   否命题：如果 $x \neq 3$ 且 $x \neq 7$，则 $(x-3)(x-7) \neq 0$；
   逆否命题：如果 $(x-3)(x-7) \neq 0$，则 $x \neq 3$ 且 $x \neq 7$.
   （2）逆命题：如果 ab 是奇数，则 a，b 都是奇数；
   否命题：如果 a，b 不都是奇数，则 ab 不是奇数；
   逆否命题：如果 ab 不是奇数，则 a，b 不都是奇数.

习题 1－3 B（第 25 页）

1. （1）充分；（2）充要；（3）充要；（4）充要.
2. （1）充分条件；（2）充要条件；（3）必要条件；（4）充分条件.
3. （1）设集合 $A=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q\}$，$A \subseteq B$ 是 $p \Rightarrow q$ 的充要条件；
   （2）四边形是菱形是它的四边相等的充要条件；

(3) 圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$过原点的充要条件是$a^2+b^2=r^2$；

(4) $\forall x$，$y\in\mathbf{N}$，$(x=0)\wedge(y=0)$的充要条件是$\sqrt{x}+|y|=0$.

4. (1) 假；(2) 真；(3) 真；(4) 真.

巩固与提高（第 27 页）

1. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真；(5) 假；(6) 真；(7) 假；(8) 真；(9) 真；(10) 假；(11) 假；(12) 真；(13) 真；(14) 真；(15) 假；(16) 假；(17) 真；(18) 真；(19) 假；(20) 真.

2. (1) 北京大学的有些学生不是中国公民；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，使$x^2\leqslant-1$；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，使$x^2+1\neq0$.

3. (1) (2) (3) (4) 中的条件与结论之间都具有推出关系，结论与条件之间也具有推出关系.

4. (1) 当$x=-1$时，$-1<0$；　　(2) 当$x=\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}>1$.

5. (1) $(x=1)\vee(x=3)\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$；

(2) $x=5\Rightarrow x^2=25$；

(3) $x\in A\cap B\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)$；

(4) $(x\in\mathbf{Z})\vee(x\in\mathbf{Q})\Rightarrow x\in\mathbf{R}$；

(5) $\exists x\in\mathbf{N}_+\Rightarrow(x\in\{质数\})\wedge(x\in\{偶数\})$；

(6) $\forall x\in\mathbf{Z}\Rightarrow(x\in\{奇数\})\vee(x\in\{偶数\})$；

(7) $\neg a\in\mathbf{Z}\Rightarrow a^2+1=0$；

(8) $\exists x\in A\cap B\Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

6. 逆命题：如果直线l垂直于平面α，则l垂直于平面α内的两条相交直线；（真）

否命题：如果直线l不垂直于平面α内的两条相交直线，则l不垂直于平面α；（真）

逆否命题：如果直线l不垂直于平面α，则l不垂直于平面α内的两条相交直线.（真）

自测与评估（第 28 页）

1. (1) (2) (4) (5) 是命题.

2. (1) 真；(2) 真；(3) 真；(4) 假.

3. $p\wedge q$：π是无理数且$\sqrt{5}$不是有理数；（真）

$p\vee q$：π是无理数或$\sqrt{5}$不是有理数；（真）

$\neg p$：π不是无理数.（假）

4. 逆命题：如果$a+b\neq1$，那么$a^2+2ab+b^2+a+b-2\neq0$；

否命题：如果$a^2+2ab+b^2+a+b-2=0$，那么$a+b=1$；

逆否命题：如果$a+b=1$，那么$a^2+2ab+b^2+a+b-2=0$.

5. (1) p是q的充分条件，q是p的必要条件；

(2) p是q的充分条件，q是p的必要条件；

(3) p 是 q 充分条件，q 是 p 必要条件.

6. 由题意知 $a\neq 0$，一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 有实根的充要条件是 $\Delta=4-4a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$.

设方程 $ax^2+2x+1=0$ ($a\neq 0$) 的根是 x_1，x_2，由

$x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{a}$，

可知，方程 $ax^2+2x+1=0$ ($a\neq 0$) 有一个负的实根 $\Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{a}<0 \end{cases}$

即 $a<0$；

方程 $ax^2+2x+1=0$ ($a\neq 0$) 有两个负的实根 $\Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant 1 \\ -\dfrac{2}{a}<0 \\ \dfrac{1}{a}>0 \end{cases}$

即 $0<a\leqslant 1$.

综上所述，一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件是 $a<0$ 或 $0<a\leqslant 1$.

7. (1) 存在正方形不是菱形；(假)

(2) $\forall x\in \mathbf{R}$，使 $4x-3\leqslant x$；(假)

(3) $\exists x\in \mathbf{R}$，$x+1\neq 2x$.（真）

8. (1) 当 $a=1$ 时，函数 $y=1$ 不是单调函数；

(2) 当 $x=0$ 时，$x^2+2x-3<0$；

(3) 当 $x=2^{11}$ 时，$x>2^{10}$，但 $x<2^{100}$.

9. (1) 当 $x=-3$ 或 $x=1$ 时，$x^2+2x-3=0$ 成立；

(2) 当四边形为正方形，满足题意；

(3) 当 $f(x)=0$，$x\in \mathbf{R}$ 时，满足题意.

10. 逆命题：如果直线 a 与平面 α 内任意直线都垂直，则 a 垂直于平面 α；(真)

否命题：如果直线 a 不垂直于平面 α，则 a 与平面 α 内某一直线不垂直；(真)

逆否命题：如果直线 a 与平面 α 内某一直线不垂直，则 a 不垂直于平面 α.（真）

Ⅵ 反馈与评价

一、知识与方法测试（100 分钟　满分 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列说法正确的是（　　）.

(A) 一个命题的逆命题为真，则它的否命题为假

(B) 一个命题的逆命题为真，则它的逆否命题为真

(C) 一个命题的逆否命题为真，则它的否命题为真

(D) 一个命题的否命题为真，则它的逆命题为真

2. 已知 p：$\varnothing \subseteq \{0\}$，$q$：$\{1\} \in \{1, 2\}$，由它们构成的新命题“$p \wedge q$”“$p \vee q$”“$\neg p$”中，真命题有（　　）.

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

3. “$a=1$”是“函数 $y=\cos^2(ax)-\sin^2(ax)$ 的最小正周期为 π”的（　　）.

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不是充分条件又不是必要条件

4. q 是 p 的充要条件的是（　　）.

(A) p：$3x+2>5$，q：$-2x-3>-5$

(B) p：$a>2$，$b<2$，q：$a>b$

(C) p：四边形的两条对角线互相垂直平分，q：四边形为正方形

(D) p：$a \neq 0$，q：关于 x 的方程 $ax=1$ 有唯一解

5. 两条直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是（　　）.

(A) $A_1A_2+B_1B_2=0$　　(B) $A_1A_2-B_1B_2=0$

(C) $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　(D) $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

6. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 函数 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）的图象过原点的充要条件是________.

8. “$x+y=7$”是“$x^2-y^2-6x+8y=7$”的________条件.

9. 命题“若方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均大于 0，则 $ac>0$”的一个等价命题是________________.

10. 下列命题中，真命题为________.（写出所有正确命题的序号）

① 40 能被 3 或 5 整除；

② 不存在实数 x，使 $x^2+x+1<0$；

③ 对任意实数 x，均有 $x+1>x$；

④ 方程 $x^2-2x+3=0$ 有两个不等的实根；

⑤ 不等式 $\dfrac{x^2-x+1}{|x|+1}<0$ 的解集为 $\varnothing$.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分）

11. (12 分) 写出命题“若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$，则 $x=2$ 且 $y=-1$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

12. (12 分) 写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1) p：$\forall m \in \mathbf{R}$，方程 $x^2+x-m=0$ 必有实根；

(2) q：$\exists x \in \mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1 \leqslant 0$.

13. （12 分）求使函数 $f(x)=(a^2+4a-5)x^2-4(a-1)x+3$ 的图象全在 x 轴上方成立的充要条件.

14. （14 分）已知 $m\in\mathbf{Z}$，关于 x 的一元二次方程

$x^2-4x+4m=0$，　①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$，　②

求方程①②的根都是整数的充要条件.

知识与方法测试参考答案

一、选择题

1. D.　2. B.　3. A.　4. D.　5. A.　6. C.

二、填空题

7. $c=0$.　8. 充分非必要.　9. 若 $ac\leqslant 0$，则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根不全大于 0.

10. ①②③⑤.

三、解答题

11. **解**：逆命题：若 $x=2$ 且 $x=-1$，则 $\sqrt{x-2}=(y+1)^2=0$；（真）

否命题：若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$，则 $x\neq 2$ 或 $x\neq -1$；（真）

逆否命题：若 $x\neq 2$ 或 $x\neq -1$，则 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$.（真）

12. **解**：（1）$\neg p$：$\exists m\in\mathbf{R}$，使方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根；

若方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则

$\Delta=1+4m<0$，即 $m<-\dfrac{1}{4}$，

所以当 $m=-1$，$\neg p$ 为真.

（2）$\neg q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1>0$；（真）

因为 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

所以 $\neg q$ 为真.

13. **解**：要使函数 $f(x)$ 的图象全在 x 轴的上方的充要条件是

$$\begin{cases}a^2+4a-5>0\\ \Delta=16(a-1)^2-4(a^2+4a-5)\times 3<0\end{cases}$$

解得　$1<a<19$.

又当 $a=1$ 时，$y=3$ 也符合条件.

所以使函数 $f(x)$ 的图象全在 x 轴的上方的充要条件是 $1\leqslant a<19$.

14. **解**：方程①有实数根 $\Leftrightarrow\Delta=16-16m\geqslant 0$，即 $m\leqslant 1$.

方程②有实数根 $\Leftrightarrow\Delta=16m+20\geqslant 0$，即 $m\geqslant -\dfrac{5}{4}$.

所以方程①②都有实数根 $\Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$.

因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=-1$，0，1.

当 $m=-1$ 时，方程①可化为 $x^2-4x-4=0$，无整数解；

当 $m=0$ 时，方程②可化为 $x^2-5=0$，无整数解；

当 $m=1$ 时，方程①②都有整数解.

综上所述，方程①②的根都是整数的充要条件是 $m=1$.

二、评价建议

1. 针对本章所学内容的特点，除在学完本章知识进行单元测试外，在平时的教学中，要结合学生的特点，通过课堂提问、学生练习、作业等，及时发现学生学习中存在的问题，采取灵活的策略及时解决问题. 另外，还要引导学生通过解决现实生活中、数学中的问题，提高学生运用逻辑用语的能力.

2. 本章内容比较抽象，学生不易掌握. 再加上逻辑用语还与其他数学知识有比较紧密的联系，教学中要注意控制难度，不要将知识拓展得太宽，加重学生的学习负担. 要随着学习的不断深入，逐渐地提高学生的运用能力.

第二章 圆锥曲线与方程

Ⅰ 课程目标

一、知识与技能目标

1. 结合已经学过的曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，了解两条曲线交点的求法.
2. 能根据曲线的已知条件求出曲线的方程，并初步学会通过方程来研究曲线的性质.
3. 了解圆锥曲线的实际背景，掌握椭圆和抛物线的定义、标准方程、几何图形及其简单性质.
4. 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道双曲线的有关性质.
5. 能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题（直线与圆锥曲线的位置关系）和实际问题.

二、过程与方法目标

1. 通过求曲线方程的教学，培养学生的转化能力和全面分析问题的能力，帮助学生理解研究圆锥曲线的基本方法.

2. 通过列举生活中的常见的与圆锥曲线有关的实例，经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程，让学生感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

3. 通过椭圆、双曲线和抛物线的标准方程的推导，使学生进一步掌握求曲线方程的一般方法，并渗透数形结合和等价转化的思想方法，提高运用坐标法解决几何问题的能力.

4. 通过学生自己总结椭圆、双曲线和抛物线之间的区别与联系，培养学生分析、归纳、推理等能力.

5. 通过圆锥曲线的学习，进一步体会数形结合的思想方法.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过曲线与方程概念的教学，培养学生事物之间相互联系、对立统一的辩证唯物主义观.

2. 通过让学生探索椭圆和抛物线的定义和标准方程，激发学生学习数学的积极性，培养学生的观

察能力、学习兴趣和创新意识.

3. 通过画圆锥曲线的几何图形让学生感知几何图形曲线美、简洁美、对称美，培养学生学习数学的兴趣.

4. 通过圆锥曲线的统一性的研究，可对学生进行运动、变化、对立、统一的辩证唯物主义思想教育.

Ⅱ 教材分析

一、编写特色

1. 本章的主题是用代数方法研究几何，培养学生用代数方法解几何问题的能力，同时培养学生的代数运算和等价变形能力.

2. 在曲线与方程一节，进一步说曲线方程的含义，总结求曲线方程的方法，给出用曲线研究方程的一般步骤.

3. 注意复习解方程和方程组的方法和技能.

4. 通过学习圆锥曲线的历史和应用，启发学生学习圆锥曲线的兴趣.

二、内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是研究曲线与方程的对应关系，圆锥曲线的定义、方程、几何性质，以及圆锥曲线在实际中的简单应用. 本章共分五大节.

第一大节是曲线与方程. 主要包括曲线方程的概念、由曲线求曲线方程和由方程研究曲线性质三大基本问题. 曲线与方程是在数学 2 第二章学习了直线方程与圆的方程的概念基础上来进一步研究的，在讨论曲线的方程和方程的曲线的概念后，介绍了坐标法和解析几何的思想，以及解析几何的基本问题，即由曲线的已知条件，求曲线方程；通过方程，研究曲线的性质.

第二、三、四大节分别研究椭圆、双曲线和抛物线这三种圆锥曲线. 每一大节又分两个小节内容，前一小节主要是学习圆锥曲线的定义和它们在直角坐标系中的标准方程，所谓标准方程就是曲线在标准位置时的方程，即曲线的中心或顶点在坐标原点，对称轴在坐标轴上时的方程；后一小节则是通过对标准方程的讨论得到的圆锥曲线的性质. 在解析几何里所讨论的曲线的性质通常包括：(1) 曲线的范围；(2) 曲线的对称性；(3) 曲线的截距（与坐标轴交点的坐标），以及不同曲线所具有的一些特殊性质.

本章所研究的三种圆锥曲线，都是重要的曲线. 因为对这几种曲线研究的问题基本一致，方法相同，所以教材把这三种圆锥曲线的学习的重点放在了椭圆上，通过求椭圆的标准方程，使学生掌握推导出这一类轨迹方程的一般规律和化简的常用办法. 这样，在求双曲线、抛物线方程的时候，学生就可以独立地，或在教师的指导下比较顺利地完成. 在讨论椭圆的几何性质时，教材以椭圆为例，详细地说明了在解析几何中怎样利用方程研究曲线的范围、对称性、顶点、离心率等几何性质. 这样，学生在学习

双曲线和抛物线时，就可以练习使用这些方法，从而在掌握解析几何基本方法上得到锻炼和提高.

第五大节是直线与圆锥曲线. 重点介绍了利用坐标法来研究几何问题，如判断直线与圆锥曲线的交点个数、求直线与圆锥曲线相交弦的长度、确定圆锥曲线上的特殊点等. 用坐标法研究几何问题，是数学中一个很大的课题，问题的大小、深浅差别很大. 圆锥曲线这一部分可编选的题目很多，而且可以编出综合性很强的难题. 教学时，要注意控制教学要求，不要急于求成，不要一步到位；对不同的学生要区别对待，对于大多数学生不能要求过高，以保证他们达到课程标准所规定的基本要求.

2. 地位与作用

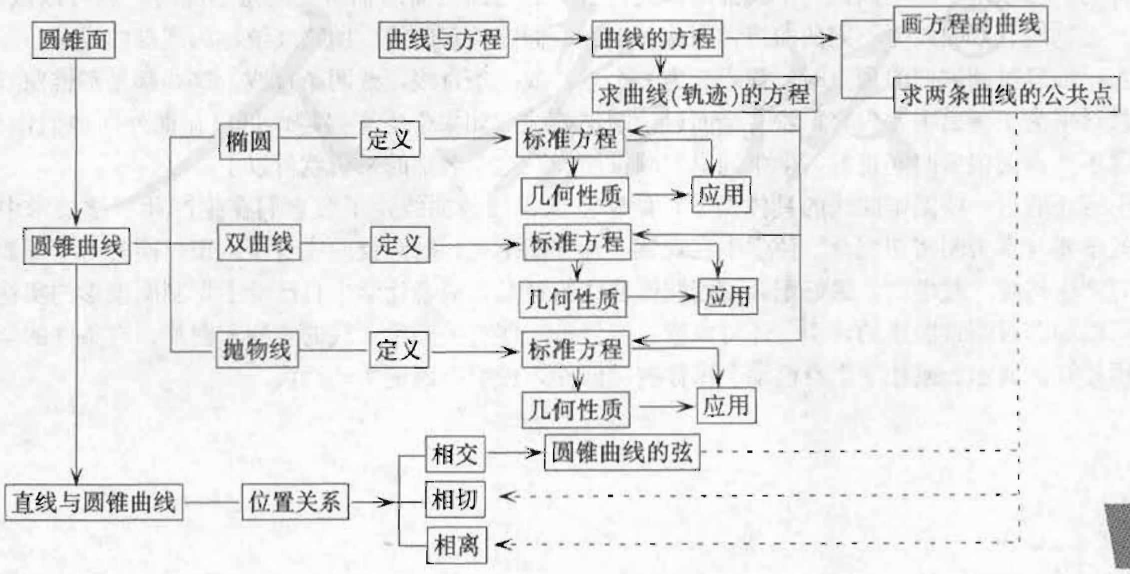
曲线可以看成是符合某种条件的点的轨迹，在解析几何里用坐标法研究曲线的一般程序是：建立适当的坐标系，求出曲线的方程；利用方程讨论曲线的几何性质，说明这些性质在实际中的应用. 在数学2第二章里，学生已经初步学习了这种方法，在“圆锥曲线与方程”这一章中，这种研究曲线的方法和过程以及它的优势体现得最突出. 因此，“圆锥曲线与方程”是解析几何的重点内容，特别是在对学生掌握坐标法的训练方面有着不可替代的作用.

3. 重点与难点

椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程和几何性质，在生产和科学技术中有着广泛的应用，同时，这些知识，包括坐标法，也是今后进一步学习数学的基础. 因此椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程和几何性质，以及坐标法是这一章的重点.

坐标法是借助坐标系，以代数中数与式的知识为基础来研究几何问题的一种数学方法. 因此，学习这一章时需要一定的代数知识作为基础，特别是对数式变形和解方程组的能力要求较高. 例如，在求椭圆和双曲线的标准方程时，会遇到比较复杂的根式化简问题；在解某些题目时，还会遇到由两个二元二次方程组成的方程组的问题等等. 这是教学的难点. 本章采取缺什么补什么的办法来补充这些知识，并且结合具体情况，分散在相关内容中. 例如，在由定义求椭圆、双曲线的标准方程时，遇到含有两个根式的等式化简问题，教材在这里详细地介绍如何化简这类方程；利用待定系数法求圆锥曲线的标准方程时，会遇到由两个二元二次方程组成的方程组，这时教材详细地讲解它们的解法. 教学时，要将这些内容当作新知识认真安排，组织练习，切不可以为是代数知识，不属于解析几何的教学任务一带而过. 教材对这两项内容采取循序渐进的方法逐步提高要求.

4. 本章知识结构



三、课时分配

本章教学时间约需 15 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 曲线与方程	约 3 课时
2.1.1 曲线与方程的概念	1 课时
2.1.2 由曲线求它的方程、由方程研究曲线的性质	2 课时
2.2 椭圆	约 4 课时
2.2.1 椭圆的标准方程	2 课时
2.2.2 椭圆的几何性质	2 课时
2.3 双曲线	约 3 课时
2.3.1 双曲线的标准方程	1 课时
2.3.2 双曲线的几何性质	2 课时
2.4 抛物线	约 3 课时
2.4.1 抛物线的标准方程	1 课时
2.4.2 抛物线的几何性质	2 课时
2.5 直线与圆锥曲线	1 课时
本章小结	1 课时

四、教法与学法建议

引　言

引言一是介绍古希腊的几何学家对几何学作出的杰出贡献，向学生介绍“圆锥曲线”这个名称的来历，即它们可以由一个平面截一个圆锥面得到，当平面与圆锥面的轴所成的角不同时，就可以截出圆、椭圆、抛物线、双曲线等不同的曲线，因此，把圆、椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线.

当平面经过圆锥面的顶点时，截线变为一个点，或一条直线，或两条直线，这些都是圆锥曲线的特例. 教科书为了突出主要内容，没有全面讨论圆锥截线. 如果学生有兴趣，可以在课外向他们作介绍，引言课不要占用很多时间讲解，学生知道“圆锥曲线”这个名称的来历就可以了.

引言还通过一些圆锥曲线的具体例子，使学生认识圆锥曲线，了解它们在生产和科学技术中的应用，教学要与章头图密切配合，使学生在观察照片和图形中，对圆锥曲线有所认识，同时对本章要学习的内容产生兴趣. 教学时，最好配合使用圆锥曲线的教具，或者让学生自己动手切割圆锥形的实物、胶泥等，以加深对圆锥曲线的认识. 还可以进一步展示一些有关圆锥曲线的实物和图片，有条件的学校可以利用计算机演示、或让学生自己动手操作有关课件，使引言课更生动活泼.

2.1 曲线与方程

2.1.1 曲线与方程的概念

1. 本小节介绍了曲线与方程、坐标法、轨迹方程的概念，理解曲线的方程和方程的曲线的意义，了解曲线与方程的对应关系.

2. 曲线的方程和方程的曲线，是解析几何的重要概念. 教科书首先利用学生已经熟悉的圆的方程和圆之间的关系，引进了曲线和方程的概念. 教学中要结合实例正确阐明曲线的点集与方程的解集之间的对应关系. 在建立了直角坐标系之后，平面内的点和有序实数对之间就建立了一一对应关系. 现在要求我们进一步研究平面内的曲线与含有两个变量的方程之间的关系. 平面内的曲线可以被理解为平面内符合某种条件的点的集合（或轨迹），也就是说：

(1) 曲线上的每个点都要符合某种条件；

(2) 每个符合条件的点都要在曲线上.

既然平面内的点与作为它的坐标的有序实数对之间建立了一一对应关系，那么对应于符合某种条件的一切点，它的坐标是应该有制约的，也就是说它的横坐标与纵坐标之间受到某种条件的约束. 所以探求符合某种条件的点的轨迹问题，就变为探求这些点的横坐标与纵坐标应受怎样的约束条件的问题. 两个变数 x，y 的方程 $f(x, y)=0$ 就标志着横坐标 x 与纵坐标 y 之间所受的约束. 一般由已知条件列出等式，再将点的坐标代入这个等式，就得到 x，y 的方程. 于是符合某种条件的点的集合，就变换到 x，y 的二元方程的解的集合. 当然要求两集合之间有一一对应的关系，也就是：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都在曲线上.

这样一来，一个二元方程就可以表示它的解所对应的点的全体组成的曲线；二元方程所表示的 x，y 之间的关系，就是以 (x, y) 为坐标的点所要符合的条件. 这样的方程就叫做曲线的方程；反过来，这条曲线就叫做这个方程的曲线.

由于曲线和方程的对应关系比较抽象，学生不易理解，教学时可先复习直线的方程和方程的直线的概念，再讲述教科书中的引例，使学生弄清曲线和方程的内在联系，从而归纳出曲线和方程的一般概念：

(1) “曲线上的点的坐标都是这个方程的解”，阐明曲线上没有坐标不满足方程的点，也就是说曲线上所有的点都符合这个条件而毫无例外；（纯粹性）

(2) “以这个方程的解为坐标的点都在曲线上”，阐明符合条件的所有点都在曲线上而毫无遗漏.（完备性）

只有同时具备了上述两个性质，才能称为“曲线的方程”和“方程的曲线”. 为了使学生完整地理解曲线和方程间的对应关系，还可举实例从反面加以说明.

例如，过点 $A(2, 0)$ 平行于 y 轴的直线 l（图 2-1）与方程 $|x|=2$ 之间的关系，只具备性质（1），而不具备性质（2）. 因此，$|x|=2$ 不是直线 l 的方程，l 也不是方程 $|x|=2$ 的直线，它只是方程 $|x|=2$ 所表示的图形的一部分.

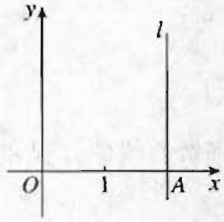


图 2-1

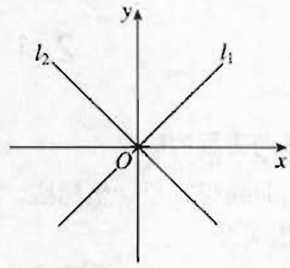


图 2-2

又如，到两坐标轴距离相等的点的轨迹与方程 $y=x$ 之间的关系，只具备性质(2)，而不具备性质(1)．因为到两坐标轴距离相等的点的轨迹有两条直线 l_1 和 l_2（图 2-2），直线 l_1 上的点的坐标都是方程 $y=x$ 的解，但直线 l_2 上的点（除原点外）的坐标不是方程 $y=x$ 的解，$y=x$ 只是直线 l_1 的方程，它不是所求轨迹的方程．

3．教科书在本小节内除介绍了曲线与方程的概念外，还介绍了坐标法的概念．

解析几何的方法就是坐标法，它的工具是坐标系．借助于坐标系研究几何图形的方法叫做坐标法．根据几何图形的特点，可以建立不同的坐标系，最常用的坐标系是直角坐标系和极坐标系．

解析几何是数学的一个分支，产生于17世纪初期．当时由于资本主义生产的发展，在促进自然科学和生产技术改进的过程中，相应地提出了许多数学问题．例如，在天文学中，开普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运行；在力学中，伽利略发现抛射体沿抛物线轨道运动；帕斯卡发现大气压力随高度的增加而递减的规律．科学和技术的发展所产生的许多问题，都需要人们对曲线进行研究和计算，从而导致了解析几何的产生和发展．

笛卡儿（René Descartes，1596—1650）是解析几何的奠基人，他开始把代数用到几何上去．在他所著的《几何学》一书中，开始曾应用代数解决几何作图问题，后来逐渐出现用方程表示曲线的思想．

笛卡儿说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何．这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题．我这样做是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何．"他断言曲线的次数与坐标轴的选择无关，并指出坐标轴要选得使最后得到的方程越简单越好．笛卡儿称那些可用唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线为几何曲线，其他如旋轮线、对数曲线、对数螺线等为机械曲线．后来莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）进一步用"代数曲线"和"超越曲线"代替"几何曲线"和"机械曲线"．笛卡儿的思想和工作大大推动了对曲线的深入研究，因为给定任何一个含 x 和 y 的代数方程，人们可以求出它的曲线；而且能进一步用代数方法研究这些曲线的性质；还能把这种形和数结合的方法推广到研究"超越曲线"上来．解析几何的产生对数学的发展，特别是对微积分的出现起了很大作用．恩格斯对笛卡儿的这一发现给予高度评价，说："数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了．"（引自恩格斯的《自然辩证法》）

4．本小节简要说明了曲线的交点问题．求曲线交点是建立在形与数的对应关系基础上，把形的问题转化为数来研究，是通过方程研究曲线的一个方面的应用，求两曲线 C_1：$F(x,\ y)=0$ 与 C_2：$G(x,\ y)=0$的交点，实际上是求方程组

$$\begin{cases}F(x,\ y)=0\\G(x,\ y)=0\end{cases}$$

的实数解．交点的个数实际上是方程组

$$\begin{cases}F(x,\ y)=0\\G(x,\ y)=0\end{cases}$$

实数解的个数．方程组有几组实数解，这两条曲线就有几个交点．若方程组无实数解，那么这两条曲线就没有交点．也就是说，两条曲线有交点的充要条件是，由两条曲线的方程所组成的方程组有实数解．

5．本小节的重点是了解曲线的方程、方程的曲线的概念，难点是了解曲线与方程的对应关系．

2.1.2 由曲线求它的方程、由方程研究曲线的性质

1．本小节介绍了求曲线方程的方法和解析几何研究的基本问题，重点讨论了求曲线的方程方法步骤和怎样由方程研究曲线的性质等问题．通过本小节的学习，要使学生了解解析几何的基本思想，了解用坐标法研究几何问题的初步知识和观点，初步掌握求曲线的方程和由方程研究曲线性质的方法，了解解析几何学的意义及其研究的基本问题．

2．"解析几何"是在坐标系的基础上，用代数方法研究几何问题的一门数学学科．"平面解析几何"研究的主要问题是：(1) 根据已知条件求出表示平面曲线的方程；(2) 通过方程研究平面曲线的性质，并画出曲线的图形．曲线和方程的概念是解析几何中最基本的内容，掌握了这个概念，才能用解析法研究几何图形的性质．由于解析几何开创了形、数结合的研究方法，使数学的发展进入了一个新阶段，解析几何就成为进一步学习数学、物理和其他一些学科的基础．

3．根据已知条件求出平面曲线的方程．教学中应注意下面一些问题：

(1) 在求方程之前，必须首先建立坐标系，否则，曲线不能转化为方程．在具体问题中有两种情况：一是所研究的问题已给定了坐标系，此时在给定的坐标系中求方程即可；二是原题中没有确定坐标系，此时必须首先选取适当的坐标系，坐标系选取得适当，可使运算过程简单，所得的方程也较简单．

(2) 先设出所求点的坐标 (x,y)，根据曲线上的点所要适合的几何条件列出等式，是求方程的重要一环，在这里常要用到一些基本公式，如两点间距离公式，点到直线的距离公式，直线斜率的公式等．因此先要了解学生对这些知识的掌握情况，必要时可结合教学内容作适当的复习．要仔细审题，分析已知条件和曲线的特征，抓住与曲线上任意点 M 有关的相等关系列出等式．

(3) 求得方程以后，按照严格的求曲线方程的步骤，应当证明以所得方程的解为坐标的点都在曲线上．但在多数情况下，化简前后方程的解集相同，因而所得的方程就是曲线的方程，教科书中的第四个步骤可以省略．但是如果化简前后方程的解集不同，则应删去增加的解，或补上失去的解．

(4) 关于求曲线方程的问题，贯穿于这一章的全过程，教科书配备了一些求轨迹方程的习题，以逐步提高学生求曲线方程的能力．由于求曲线方程时所给条件是多种多样的，解法也比较灵活，教学时应着重培养学生全面分析问题的能力，至于解法步骤则可灵活掌握．

4．根据曲线的方程研究曲线的几何性质，主要包括以下几个方面：

(1) 研究曲线的组成和范围．即看一下所求的曲线是由哪些基本的曲线组成的．如所举例题中的曲线是由两个方程所表示的曲线组成的．在某些情况下可以根据方程求得方程所表示曲线的大致范围．

(2) 研究曲线与坐标轴是否相交．如果相交，求出交点的坐标，因为曲线与坐标轴的交点是确定曲线位置的关键点．

(3) 研究曲线的对称性．在讨论曲线的对称性之前，应先复习对称的概念和关于 x 轴、y 轴、原点

对称的点的坐标之间的关系，然后说明“以 $-x$ 代 x，或以 $-y$ 代 y，或同时以 $-x$ 代 x、以 $-y$ 代 y，方程不变，则图形关于 y 轴、x 轴、原点对称”的道理，这与在数学 1 第二章中证明函数的奇偶性类似，那时只是没有关于 x 轴对称的情况.

容易证明，如果曲线具有上述三种对称性中的任意两种，那么它一定还具有另一种对称性. 例如，如果曲线关于 x 轴和原点对称，那么它一定关于 y 轴对称. 事实上，设点 $P(x, y)$ 在曲线上，因为曲线关于 x 轴对称，所以点 $P_1(x, -y)$ 必在曲线上. 因为曲线关于原点对称，所以 P_1 关于原点的对称点 $P_2(-x, y)$ 必在曲线上. 因为 $P(x, y)$，$P_2(-x, y)$ 都在曲线上，所以曲线关于 y 轴对称.

(4) 研究曲线的变化趋势，即 y 随 x 增大而增大或减小的变化情况.

(5) 根据方程画出曲线的大致形状，在画曲线时，可充分利用曲线的对称性，通过列表描点的方法先画出曲线在一个象限的图象，然后根据对称性画出整条曲线.

5. 本小节教学的重点是使学生初步掌握求曲线方程的方法，以及领悟坐标法和解析几何的思想. 难点是求曲线方程的方法.

2.2 椭　圆

2.2.1 椭圆的标准方程

1. 本节教材整体来看是两大块内容：一是椭圆的定义；二是椭圆的标准方程. 椭圆是圆锥曲线这一章所要研究的三种圆锥曲线中首先遇到的，所以教材把用坐标法对椭圆的研究放在了重点位置上. 学好椭圆对于学生学好圆锥曲线是非常重要的.

2. 对于椭圆定义的教与学注意以下三点：

(1) 椭圆是常见的曲线，对椭圆的定义的引入，要注意借助于直观、形象的模型或教具，让学生从感性认识入手，逐步上升到理性认识，形成正确的概念. 为了使学生掌握椭圆的本质特征，以便得出椭圆的定义，教科书介绍了一种画椭圆的方法，通过画图过程，揭示椭圆上的点所要满足的条件. 教师可事先准备好一根细线及两根钉子，在给出椭圆在数学上的严格定义之前，教师先在黑板上取两个定点（两定点之间的距离小于细线的长度），再让两名学生按教师的要求在黑板上画一个椭圆. 画好后，教师再在黑板上取两个定点（两定点之间的距离大于细线的长度），然后再请刚才两名学生按同样的要求作图. 学生通过观察两次作图的过程，总结出经验和教训，教师因势利导，让学生自己得出椭圆的严格的定义. 这样，学生对这一定义就会有深刻的了解.

(2) 对于椭圆的定义的理解，要抓住椭圆上的点所要满足的条件，即椭圆上点的几何性质，可以对比圆的定义来理解. 另外要注意到定义中对“常数”的限定，即常数要大于 $|F_1F_2|$. 这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即：“当常数等于 $|F_1F_2|$ 时轨迹是一条线段；当常数小于 $|F_1F_2|$ 时无轨迹.”这样有利于集中精力进一步研究椭圆的标准方程和几何性质. 但讲解椭圆的定义时注意不要忽略这两种特殊情况，以保证椭圆定义的准确性.

(3) 为了加深学生对椭圆定义的理解，教科书习题 2－2A 第 1 题设计了用两组同心圆画椭圆的方法，可结合教科书提供的配套课件，让学生进行实践.

3. 根据椭圆的定义求标准方程，应注意下面几点：

(1) 曲线的方程依赖于坐标系，曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不

同，所以为了使方程简单，必须注意坐标系的选择．求椭圆的方程时，建立适当的坐标系，是求曲线方程首先应该注意的地方．应让学生观察椭圆的图形或根据椭圆的定义进行推理，发现椭圆有两条互相垂直的对称轴，以这两条对称轴作为坐标系的两轴，不但可以使方程的推导过程变得简单，而且也可以使最终得出的方程形式整齐和简洁．

（2）在求方程时，设椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为 $2a(a>0)$，这是为了使焦点及长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以便导出的椭圆的方程形式简单．令 $a^2-c^2=b^2$ 是为了使方程的形式整齐而便于记忆，同时 b 还有特定的几何意义．b 的几何意义将在下一小节说明．

（3）带根式的方程的化简是学生感到困难的，特别是由点 M 适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数．化简时，为了避免对式子进行两次平方，教材是通过分母有理化进行化简的，化简过程不仅简单，而且从③式还可引申出椭圆另一特征性质：到焦点与到定直线的距离比等于常数．

（4）在学习曲线和方程的概念时，我们知道，求得椭圆的方程以后，一般应证明所求得的方程确是椭圆的方程，就是说，要证明坐标适合方程的点在椭圆上．由于椭圆方程的化简过程是等价变形，而证明过程较繁，所以教科书不要求也没有给出证明，对学生不作要求．

4．讲解了焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程后，教师要让学生研究教科书上的思考与讨论，让他们自己研究焦点在 y 轴上的标准方程，然后鼓励学生探索椭圆的两种标准方程的异同点，加深对椭圆的认识．

中心在原点、焦点分别在 x 轴上，y 轴上的椭圆标准方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),\quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

相同点是：形状相同、大小相同；都有 $a>b>0$，$a^2=b^2+c^2$．

不同点是：两种椭圆相对于坐标系的位置不同，它们的焦点坐标也不同．椭圆的焦点在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ 标准方程中 x^2 项的分母较大；椭圆的焦点在 y 轴上 $\Leftrightarrow$ 标准方程中 y^2 项的分母较大．

另外，形如 $Ax^2+By^2=C$ 的方程中，只要 A，B，C 同号且 $A\neq B$ 时，就是椭圆方程，它可以化为 $\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$．例如，可将方程 $2x^2+3y^2=5$ 化成椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1,$$

这时 $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$，$b=\sqrt{\frac{5}{3}}$．

5．例 1 是利用待定系数法求椭圆的方程，由已知条件，求椭圆的标准方程的解题模式是：先确定焦点的位置，设出标准方程（若不能确定焦点的位置，则应分类讨论），再用待定系数法确定 a，b 的值．

例 2 实质上是初步根据方程研究椭圆的简单的几何性质，不是标准方程的要先将方程化为椭圆的标准方程，确定 a^2 和 b^2，然后根据 a，b，c 的关系求出 c，写出焦点坐标．

例 3 是利用椭圆的定义求椭圆的方程，教学时应注意以下几点：（1）求曲线方程时，坐标系的选择没有通用的方法，要根据具体情况而定；（2）利用定义求曲线方程，解题过程主要包括以下三步：第一步是建立恰当的坐标系后根据题目的条件列出所求动点满足的几何关系式，第二步根据某些已知曲线的定义确定动点的轨迹形状，第三步是利用待定系数法求曲线的方程；（3）求出曲线的方程后，要注意检

查一下方程的曲线上的点是否都符合题意，如果有不符合题意的点，应在所得方程后注明限制条件.

6. 本小节的重点是椭圆的定义及椭圆标准方程的两种形式. 难点是椭圆标准方程的建立和推导. 关键是掌握建立坐标系与根式化简的方法.

2.2.2 椭圆的几何性质

1. 根据曲线的方程，研究曲线的几何性质，并正确地画出它的图形，是解析几何的基本问题之一. 根据曲线的条件列出方程，如果说是解析几何的手段，那么根据曲线的方程研究它的性质、画图就可说是解析几何的目的，在第一节学习曲线和方程时已指出. 对于这个问题，本节结合椭圆的方程进行了具体阐述.

本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几个性质，掌握标准方程中的 a，b 以及 c，e 的几何意义，a，b，c，e 之间的相互关系；同时，要通过对椭圆的标准方程的讨论，使学生知道在解析几何中是怎样用代数方法研究曲线的性质的.

2. 在解析几何中讨论曲线的范围，就是确定方程中两个变量的取值范围. 教科书中是用解不等式的方式来讨论的. 如果将椭圆的标准方程变形为

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

则这个椭圆的方程可以分成 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 两个函数式，讨论椭圆的范围，就是讨论这两个函数的定义域和值域，这个问题学生不会有困难. 这也是讨论椭圆范围的一种方法.

确定了曲线的范围以后，用描点法画曲线的图形时就可以不取曲线范围以外的点了.

3. 对于椭圆的对称性的研究，在上一节中已初步接触，对于对称的有关结论学生已比较熟悉，研究完对称性以后应强调：x 轴，y 轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心，即椭圆的中心. 进而说明椭圆的中心是焦点连线的中点，对称轴是通过两个焦点的直线以及焦点连线的中垂线，与坐标系无关，因而是曲线的固有性质.

4. 关于求曲线的截距，相当于求曲线与坐标轴的交点. 对椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 来说，它与坐标轴的交点就是它的顶点：

令 $y=0$，得到关于 x 的方程，解这个方程，求出 x 的值，就是曲线与 x 轴交点的横坐标，即曲线在 x 轴上的截距；

令 $x=0$，得到关于 y 的方程，解这个方程，求出 y 的值，就是曲线与 y 轴交点的纵坐标，即曲线在 y 轴上的截距.

通过求椭圆的顶点，得到 a，b 的几何意义，a 是长半轴的长，b 是短半轴的长. 由 $c^2=a^2-b^2$，可得“已知椭圆的四个顶点，求焦点”的几何作法. 只要以 B_1 或 B_2 为圆心，a 为半径，作弧交长轴于两点，这两点就是焦点.

讨论了曲线的范围、对称性和截距以后，再进行描点画图，只要描出较少的点，就能得到较准确的图形（如例 1).

另外，根据椭圆的几何性质，用下面的方法可以快捷地画出反映椭圆基本形状和大小的草图：以椭圆的长轴、短轴为邻边画矩形；由矩形四边的中点确定椭圆的四个顶点；用曲线将四个顶点连成一个椭圆. 画图时要注意它们的对称性及顶点附近的平滑性. 对于此法可向学生介绍一下.

5. 离心率的概念比较抽象，教师可直接给出离心率的定义，先分析离心率 e 的取值范围：

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$.

再结合图表分析离心率的大小对椭圆形状的影响：

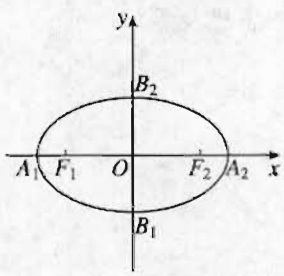
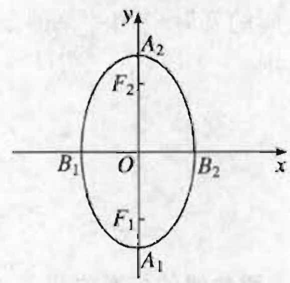
(1) 当 e 趋近于 1 时，c 趋近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁平；

(2) 当 e 趋近于 0 时，c 趋近于 0，从而 b 趋近于 a，因此椭圆越接近于圆.

为了教学方便，本教科书中规定椭圆与圆是两种不同的曲线，因此椭圆的离心率满足不等式 $0<e<1$. 当 $e=0$ 时，图形就变为圆了.

6. 椭圆的几何性质可分为两类：一类是与坐标系无关的本身固有性质，如长、短轴长、焦距、离心率；一类是与坐标系有关的性质，如顶点、焦点、中心坐标. 对于第二类性质，只要将 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的有关性质中横坐标 x 和纵坐标 y 互换，就可以得出 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的有关性质.

7. 教科书中着重讲第一个标准方程的椭圆的性质，掌握了第一个标准方程的椭圆的性质后，就容易理解第二个标准方程的椭圆的性质. 在进行复习时，教师可列出下面的图表，提出问题，由学生解答和小结.

方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$
图形		
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$，$-a\leqslant y\leqslant a$
对称性	关于 x 轴，y 轴，坐标原点对称	关于 x 轴，y 轴，坐标原点对称
顶点	$A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$ $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$	$A_1(0,\ -a)$，$A_2(0,\ a)$ $B_1(-b,\ 0)$，$B_2(b,\ 0)$
离心率	$e=\frac{c}{a}\ (0<e<1)$	

8. 例 2 介绍了椭圆在航天领域应用的例子，题中说明这个卫星运行的近地点、远地点及轨道的焦点在同一条直线上. 所有的卫星的近地点、远地点、焦点都是这样吗？为什么它们一定是这样呢？这个问题可以用坐标法来证明，即可以证明椭圆上到焦点的距离最大和最小的点，恰是椭圆长轴的两个端点.

我们用椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

来证明.

设点 $P(x_0, y_0)$是椭圆上的任意一点（图 2-3），r 是点 P 与椭圆左焦点 $F_1(-c, 0)$的距离，则

$$\begin{aligned} r^2 &=(x_0+c)^2+y_0^2 \\ &=x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2 \\ &=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2+2cx_0+c^2+b^2 \\ &=\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2 \\ &=\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2. \end{aligned}$$

因为 $r>0$，所以 $r=\frac{c}{a}x_0+a$.

又因为$-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以当 $x_0=a$ 时，r 最大，$x_0=-a$ 时，r 最小，即点$(a, 0)$，$(-a, 0)$与焦点 $F_1(-c, 0)$的距离，分别是椭圆上的点与焦点 F_1 的最大距离和最小距离.

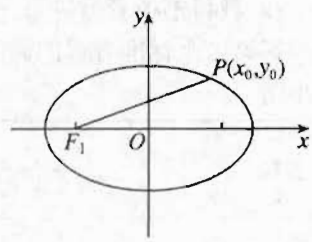


图 2-3

9. 本小节的重点是利用椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质. 难点是椭圆的几何性质的实际应用. 关键是注意数形结合、方程的思想及等价转化思想的运用.

2.3 双曲线

2.3.1 双曲线的标准方程

1. 双曲线的定义、标准方程与椭圆类似，教科书的处理方法也相仿，也就是说，本小节在数学思想和方法上没有新内容. 因此，这一小节的教学，建议采用类比的教学方法，参照椭圆的标准方程来讲解. 教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，特别是它们的不同点.

2. 双曲线的标准方程是在其定义的基础上推导的，所以我们对双曲线的定义应给予重视. 双曲线的定义与椭圆定义类似，在理解时应注意：

(1) 定义中的条件$|F_1F_2|>2a$ 的限定. 若$|F_1F_2|=2a$，则动点的轨迹为两条射线；若$|F_1F_2|<2a$，则轨迹不存在.

(2) 定义中的关键词“绝对值”. 事实上，若去掉定义中“绝对值”三个字，动点轨迹只能是双曲线的一支.

(3) 双曲线是平面内的点的集合，$||PF_1|-|PF_2||=2a(2a<|F_1F_2|=2c)$，如果 $2a=|F_1F_2|$，双曲线将变成两条射线.

3. 推导双曲线的标准方程时，要注意以下几点.

(1) 在推导双曲线的标准方程时，由于学生有推导椭圆的标准方程的基础，所以可以让学生自己挑

选坐标系，推导出双曲线的标准方程.

（2）与建立椭圆的标准方程一样，建立双曲线的标准方程，是从“平面内到两定点的距离差的绝对值是常数（与椭圆不同，这个常数要大于0且小于$|F_1F_2|$)的点M的轨迹”这个双曲线的定义出发，推导出它的标准方程. 推导过程说明，双曲线上任意一点的坐标都适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；但关于坐标适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的点都在双曲线上，同椭圆一样，教科书中未加证明.

（3）根据双曲线定义求双曲线的标准方程，思想方法与推导过程和椭圆完全类似. 但应注意椭圆标准方程的推导中，是令$b^2=a^2-c^2$；而在双曲线标准方程的推导过程中，是令$b^2=c^2-a^2$. a，b，c之间的关系与椭圆中不同，不要搞混. 引入$b^2=c^2-a^2$不仅是化简的需要，而且还有实际的几何背景，$2b$就是虚轴的长.

4. 中心在原点，焦点在x轴、y轴上的双曲线标准方程分别是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0),$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0).$$

要让学生比较这两种标准方程的双曲线的异同：

相同点是：它们的形状、大小相同，都有$c^2=a^2+b^2$；

不同点是：两种双曲线相对于坐标系的位置不同，它们的焦点坐标也不同. 双曲线的焦点在x轴上$\Leftrightarrow$标准方程中x^2项的系数为正；双曲线的焦点在y轴上$\Leftrightarrow$标准方程中y^2项的系数为正.

5. 在椭圆与双曲线的标准方程中，前者$a>b>0$，后者a，b无大小关系. 根据椭圆与双曲线标准方程判定焦点在哪条坐标轴上，前者是根据x^2，y^2项分母的大小来判定，后者是根据x^2，y^2项系数的正负来判定. 形如$Ax^2+By^2=C$的方程，只要A，B符号相反，$C\neq0$就是双曲线方程. 它可以化为$\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$.

6. 在讲授过程中，可抓住与椭圆标准方程的异同，在教师指导下由学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系：

椭圆	双曲线
根据$\lvert MF_1\rvert+\lvert MF_2\rvert=2a$	根据$\lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert=\pm2a$
因为 $a>c>0$ 所以 令$a^2-c^2=b^2(b>0)$	因为 $c>a>0$ 所以 令$c^2-a^2=b^2(b>0)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ a$不一定大于$b)$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

7. 例1的求双曲线标准方程的题目，求双曲线的标准方程需要“定量”和“定位”. 要求出双曲线的标准方程，就要求出a^2，b^2两个“待定系数”，于是需要两个独立的条件，按条件列出关于a^2，b^2的方程组，解得a^2，b^2的具体数值后，再按位置特征写出标准方程，因此“定量”是指a，b，c等数值

的确定；“定位”则是指除了中心在原点以外，判断焦点在哪条坐标轴上，以便在使方程的右边为1时，确定方程的左边哪一项为正，哪一项为负，同时也就确定了 a^2，b^2 在方程中的位置.

例2是双曲线的定义和标准方程在解决实际问题中的应用，了解利用爆炸声的时间差确定爆炸点的准确位置，是双曲线的一个重要应用. 需要注意的是：(1) 求曲线方程，若没有坐标系，一定要先建立坐标系；(2) 所求的爆炸点的轨迹是双曲线的一支；(3) 利用两个不同的观测点得同一炮弹爆炸声的时间差，可以确定爆炸点所在的双曲线的方程，但不能确定爆炸点的准确位置，如果再增设一个观测点 C，利用 B，C（或 A，C）两处测得的爆炸声的时间差，可以求出另一个双曲线的方程，解这两个方程组成的方程组，就能确定爆炸点的准确位置. 这是双曲线的一个重要应用.

8. 本小节教学的重点是双曲线的定义及其标准方程. 难点是双曲线标准方程的推导. 教学中要注意启发学生的学习兴趣，在学生力所能及的情况下，尽量让学生自己去解决问题，培养学生的思考问题、分析问题和解决问题的能力.

2.3.2 双曲线的几何性质

1. 本小节主要介绍了用坐标法研究双曲线的几何性质，教学时可以类比椭圆几何性质的研究方法，引导学生自主探究双曲线的几何性质，包括范围、对称性、顶点、离心率. 要重点指出椭圆与双曲线几何性质的区别与联系.

2. 双曲线的范围.

由双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $x^2\geqslant a^2$. 当 $|x|\geqslant a$ 时，y 才有实数值；对于 y 的任何值，x 都有实数值. 要讲清在直线 $x=-a$，$x=a$ 之间没有图象，当 x 的绝对值无限增大时，y 的绝对值也无限增大，所以曲线是无限伸展的，不像椭圆那样是封闭曲线.

3. 双曲线的对称性.

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可逐一提问，让学生回答双曲线具有的对称性，并说明原因.

4. 双曲线的顶点.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有两个顶点 $(a,0)$，$(-a,0)$. 当 $x=0$ 时，方程 $y^2=-b^2$ 无实数根，所以它与 y 轴无交点，$2b$ 是双曲线的虚轴的长. 因为学生没有学过共轭双曲线，所以对虚轴不好理解，往往把虚轴与椭圆的短轴混淆，教学中要提醒他们注意. 另外，双曲线只有两个顶点，而椭圆有四个顶点，这与椭圆不同.

5. 双曲线的渐近线.

对圆锥曲线来说，渐近线是双曲线的特有性质，利用双曲线的渐近线来画双曲线特别方便，而且较为精确，只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线，就能画出它的近似图形. 椭圆是封闭曲线，没有渐近线，而双曲线有两条渐近线，作出双曲线的渐近线就完全地掌握双曲线的变化趋势. 教学双曲线的渐近线时，应注意以下问题：

(1) 使学生明确双曲线的渐近线是哪两条直线. 过双曲线实轴的两个端点与虚轴的两个端点分别作对称轴的平行线，它们围成一个矩形，其两条对角线所在直线即为双曲线的渐近线，画双曲线时，应先画出它的渐近线.

(2) 使学生理解“渐近”两字的含义. 当双曲线的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，接近的程度是无限的，也可以这样理解：当双曲线上的动点 M 沿着双曲线无限远离双曲线的中心时，点 M

到这条直线的距离逐渐变小而无限趋近于 0.

(3) 使学生掌握根据双曲线的标准方程求出它的渐近线方程的求法. 最简单且实用的方法是：把标准方程中“1”用“0”替换得出的两条直线方程，即双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$即 $y=\pm\frac{b}{a}x$；双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的渐近线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$，即 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

(4) 使学生掌握根据双曲线的渐近线方程求出双曲线方程的求法. 简单且实用的方法是：如果两条渐近线的方程为 $Ax\pm By=0$，那么双曲线的方程为$(Ax+By)(Ax-By)=m$，这里 m 是待定系数，其值可由题目中的已知条件确定.

下面给出渐近线的比较严格的定义和双曲线的渐近线的证明，供教师教学时参考.

若曲线上的点到某一直线的距离为 d，当点趋向于无穷远时，d 趋近于 0，则这条直线称为该曲线的渐近线.

先取双曲线在第一象限内的部分进行证明，这一部分的方程可写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,(x>a).$$

设 $M(x, y)$是它上面的点，$N(x, Y)$是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上与 M 有相同横坐标的点，则 $Y=\frac{b}{a}x$.

因为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}<\frac{b}{a}x=Y$，所以

$$\begin{aligned}|MN|&=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})\\&=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\\&=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.\end{aligned}$$

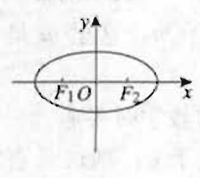
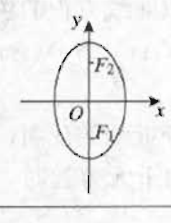
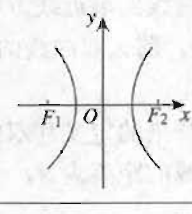
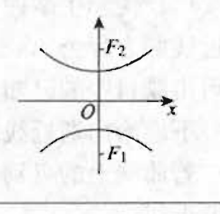
设$|MQ|$是点 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，则$|MQ|<|MN|$. 当 x 逐渐增大时，$|MN|$逐渐减小，x 无限增大，$|MN|$接近于 0，于是$|MQ|$也接近于 0，就是说，双曲线在第一象限的部分从射线 ON 的下方逐渐接近于射线 ON.

其他象限内，也可以证明类似的结论. 所以我们把两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线.

6. 双曲线的离心率.

与椭圆一样，我们把比值 $e=\frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率，椭圆的离心率是描述椭圆扁平程度的一个重要数据，双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数据. 由于$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，当 e 的值从接近于 1 逐渐增大时，$\frac{b}{a}$ 的值就从接近于 0 逐渐增大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔，就是说双曲线的“张口”逐渐增大.

7. 椭圆与双曲线标准方程、图形和性质对比，如下表：

	椭圆		双曲线	
方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$
图形				
顶点坐标	$(\pm a,\ 0)(0,\ \pm b)$	$(0,\ \pm a)(\pm b,\ 0)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ \pm a)$
对称轴	$x=0$，$y=0$			
焦点坐标	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$
对称中心	$(0,\ 0)$			
离心率	$e=\frac{c}{a}$且$0<e<1$		$e=\frac{c}{a}$且$e>1$	
渐近线方程			$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

8. 本小节教学的重点是双曲线的几何性质，双曲线各元素之间的相互依存关系，特别是双曲线的渐近线性质. 难点是有关双曲线的离心率、渐近线的问题. 关键是要注意数形结合、方程思想及等价转化思想的运用.

2.4 抛物线

2.4.1 抛物线的标准方程

1. 抛物线是学生非常熟悉的一种曲线，但对它是满足什么条件的动点的轨迹却很陌生. 本小节主要介绍了抛物线的定义和焦点在 x 轴上的标准方程.

2. 关于抛物线的定义，教学时应注意以下几点：

(1) 可以通过多媒体设备展示与抛物线有关的实物的形象，同时也可让学生举出生活中与抛物线有关的物体和现象，加强知识与实际的联系，增强学生的学习兴趣；

(2) 教科书中介绍了一种抛物线的画法，教师可指导学生自己动手画出抛物线的图象，以增强学生

的动手实践能力；

(3) 对抛物线定义的理解，应注意定点不在定直线上，否则轨迹是一条直线．

3. 由抛物线的定义导出它的标准方程时，可先让学生考虑怎样选择坐标系．由定义可知直线 KF 是曲线的对称轴；所以把 KF 作为 x 轴可以使方程不出现 y 的一次项．因为线段 KF 的中点适合条件，所以它在抛物线上．因而以 KF 的中点为原点，就不会出现常数项．这样建立坐标系，得出的方程形式比较简单．

4. 在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离 $|KF|=p(p>0)$，这就是抛物线方程中参数 p 的几何意义．因为抛物线的顶点是 KF 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 都可根据 p 求出．

5. 本节教学的重点是抛物线的定义及标准方程；难点是建立标准方程时坐标系的选取．

2.4.2 抛物线的几何性质

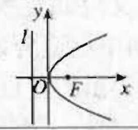
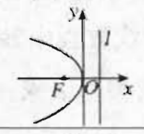
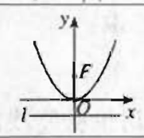
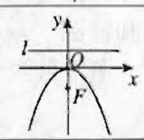
1. 抛物线对学生来说是比较熟悉的，有了讨论椭圆、双曲线几何性质的基础，再讨论抛物线的几何性质（范围、对称性、顶点、离心率）不会遇到什么障碍．但要注意：抛物线的性质和椭圆、双曲线比较起来，差别较大，它的离心率等于1，它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴和一条准线．它没有中心，通常称抛物线为无心圆锥曲线，而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线．

2. 对于抛物线的四种标准方程，应要求学生熟练地掌握．教师给出各种标准形式的抛物线方程，要求学生说出开口方向、焦点坐标、对称轴和准线方程；反之，教师在黑板上画出各种类型的抛物线（指顶点在原点，以 x 轴或 y 轴为对称轴）的示意图，可要求学生说出抛物线方程的类型．最后让学生自己填写下面两张表格．

表格一

方程	顶点坐标	焦点坐标	对称轴方程	准线方程	图形
$y^2=2px$ $(p>0)$					
$y^2=-2px$ $(p>0)$					
$x^2=2py$ $(p>0)$					
$x^2=-2py$ $(p>0)$					

表格二

图形	顶点坐标	焦点坐标	对称轴方程	准线方程	标准方程
					
					
					
					

3. 已知抛物线的标准方程，求它的焦点坐标和准线方程时，首先要判断抛物线的对称轴和开口方向. 一次项的变量如为 x（或 y），则 x 轴（或 y 轴）是抛物线的对称轴；一次项系数的符号决定开口方向. 例如，抛物线的方程为 $x^2=-2y$，则 y 轴为对称轴，开口方向和 y 轴的正方向相反.

这样在由已知条件求抛物线的标准方程时，首先要根据已知条件确定抛物线标准方程的类型，再求出方程中的参数 p.

4. 抛物线不是双曲线的一支，这可以从以下三个方面来理解：

(1) 从圆锥曲线的定义来看，虽然双曲线与抛物线有其共同点，但由于比值 e 的取值不同，从而双曲线与抛物线上的点的性质存在着差异；

(2) 曲线的延伸趋势不相同，当抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点趋于无穷远时，它在这一点切线的斜率接近于 x 轴所在直线的斜率，也就是抛物线接近于与 x 轴平行；而双曲线上的点趋近于无穷远时，它的切线的斜率接近于它的渐近线的斜率；

(3) 双曲线有渐近线而抛物线没有渐近线.

5. 抛物线的离心率是定值 1，它说明所有的抛物线都相似，即所有的抛物线形状都相同.

6. 过圆锥曲线的一个焦点且与它的对称轴垂直的弦叫做圆锥曲线的“正焦弦”（有的书上也称之为“通径”）. 过抛物线的焦点且与 x 轴垂直的直线交抛物线于 A，B 两点，如图 2－4 所示，则可求得 $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$，$B\left(\frac{p}{2}, -p\right)$，通径的长 $|AB|$ 等于 $2p$. 从而可以根据顶点和通径的端点 A，B，作出抛物线的近似图形（图 2－4），要使学生掌握这种画抛物线草图的方法. 我们还可以看出，p 刻画了抛物线开口的大小，p 值越大，开口越宽；p 值越小，开口越窄.

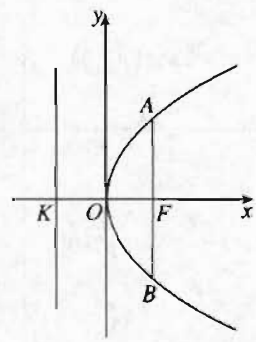


图 2－4

7. 例 2 是关于抛物线的实际应用问题，教学时可让学生阅读教科书的“圆锥面与圆锥曲线”这篇材料，了解圆锥曲线的光学性质及其在生活中的广泛应用.

下面简单介绍一下抛物线的光学性质：

过抛物线上一点可以作一条切线，过切点所作垂直于切线的直线叫做抛物线在这点的法线，抛物线的法线有一条重要性质：经过抛物线上一点作一直线平行于抛物线的对称轴，那么经过这一点的法线平分这条直线和这点与焦点连线的夹角（图 2－5）.

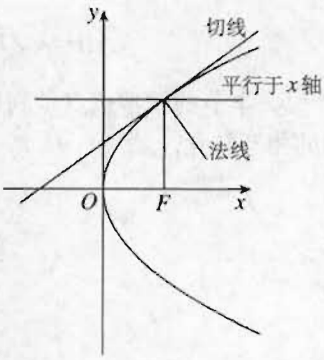


图 2－5

抛物线的这一性质在技术上有着广泛的应用．例如，在光学上，如果把光源放在抛物镜的焦点 F 处，射出的光线经过抛物镜的反射，变成了平行光线，汽车前灯、探照灯、手电筒就是利用这个光学性质设计的；反过来，也可以把射来的平行光线集中于焦点处，太阳灶就是利用这个原理设计的.

8. 本节教学的重点是抛物线的几何性质．难点是抛物线几何性质的运用．关键是正确地根据方程讨论曲线的几何性质，并注意椭圆、双曲线、抛物线的性质的联系与区别.

2.5 直线与圆锥曲线

1. 直线与圆锥曲线的位置关系是圆锥曲线知识应用方面的重点内容，有关内容包括：直线与圆锥曲线位置关系的判定，直线和圆锥曲线相交时弦长计算，弦的中点及与之相关的问题等．本小节的内容体现了解析几何的主要思想和方法．学习本节课，可以巩固前面所学的圆锥曲线的性质以及直线的基本知识，从而培养学生的逻辑思维能力，运算能力，分析问题、解决问题的能力以及化归的思想.

2. 例 1 利用坐标法解决直线与圆锥曲线的位置关系问题．直线 l：$Ax+Bx+C=0$ 与圆锥曲线 C：$f(x, y)=0$的位置关系可分为：相交、相切、相离．这三种位置关系的判定条件可引导学生归纳为：

设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，圆锥曲线 C：$f(x, y)=0$，由

$$\begin{cases}Ax+By+C=0\\ f(x, y)=0\end{cases}$$

消去 y(或 x)，得到关于 x(或 y)的方程 $ax^2+bx+c=0$，此时方程组的解的个数与方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的个数是一致的．当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一个一元二次方程，此时方程的解的个数（即为直线与圆锥曲线交点的个数）可由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判断如下：

(1) $\Delta>0\Leftrightarrow$直线 l 与圆锥曲线 C 相交；

(2) $\Delta=0\Leftrightarrow$直线 l 与圆锥曲线 C 相切；

(3) $\Delta<0\Leftrightarrow$直线 l 与圆锥曲线 C 相离.

注意：当直线平行于抛物线的对称轴时，直线与抛物线只有一个公共点；当直线平行于双曲线的渐近线时，直线与双曲线相交且只有一个公共点，所以直线与抛物线、双曲线有一个公共点是直线与抛物线、双曲线相切的必要条件，但不是充分条件.

3. 直线与圆锥曲线的位置关系，还可以利用数形结合、以形助数的方法来解决.

4. 例 3 是求弦长问题．连接圆锥曲线上两个点的线段称为圆锥曲线的弦．求弦长的一种求法是将直线的方程与圆锥曲线的方程联立，求出两交点的坐标，然后运用两点间的距离公式；另外一种求法是如果直线的斜率为 k，被圆锥曲线截得弦 AB 两端点坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则弦长公式为：

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}.$$

5. 本节的教学重点是利用坐标法解决直线与圆锥曲线的位置关系问题，难点是几何图形和代数方程的相互转化.

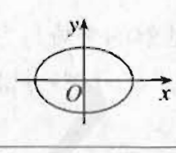
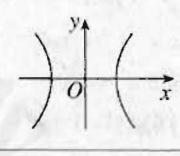
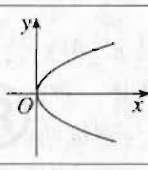
本章小结

1. 本章在数学 2 第二章研究了直线和圆的方程的基础上，研究了直角坐标系中曲线和方程之间的对应关系，然后根据所求曲线的定义，得出了几种圆锥曲线的方程，并通过方程讨论了椭圆、双曲线和抛物线的性质及应用，重点突出了坐标法的运用.

2. 曲线和方程的关系，反映了现实世界空间形式和数量关系之间的某种联系. 我们将曲线看作适合某种条件 P 的点 M 的集合：$P=\{M|P(M)\}$.

在建立坐标系后，点集 P 中任一元素 M 都有一个有序数对(x, y)和它对应，(x, y)是某个二元方程$f(x, y)=0$ 的解，也就是说，它是解的集合 $Q=\{(x, y)|f(x, y)=0\}$中的一个元素；反之，对于解集 Q 中任一元素(x, y)，都有一点 M 与它对应，点 M 是点集 P 中的一个元素. P 和 Q 的这种对应关系是曲线和方程的关系.

3. 由椭圆、双曲线、抛物线的几何条件求其标准方程，并通过分析标准方程研究这三种曲线的几何性质. 三种曲线的标准方程（各取其中一种）和图形、性质如下表：

	椭圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离和等于常数	与两个定点的距离差的绝对值等于常数	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$	$y^2=2px(p>0)$
图形			
顶点坐标	$(\pm a, 0)$，$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
对称轴	x 轴，长轴长 $2a$ y 轴，短轴长 $2b$	x 轴，实轴长 $2a$ y 轴，虚轴长 $2b$	x 轴
焦点坐标	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$(\frac{p}{2}, 0)$
离心率 $(e=\frac{c}{a})$	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
准线			$x=-\frac{p}{2}$
渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

4. 椭圆、双曲线、抛物线的统一性：

(1) 从图形的生成看：三种曲线又可以看成不同的平面截圆锥面所得到的截线，因此它们又统称圆锥曲线；

(2) 从方程的形式看：在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二元二次的，所以称它们为二次曲线；

(3) 从点的集合（或轨迹）的观点来看：椭圆、双曲线、抛物线都是与定点和定直线距离的比是常数 e 的点的集合（或轨迹），这个定点是它们的焦点，定直线是它们的准线，只是由于离心率 e 的不同，而分为椭圆、双曲线和抛物线三种曲线. 当 $0<e<1$ 时，它的轨迹是椭圆；当 $e=1$ 时，它的轨迹是抛物线；当 $e>1$ 时，它的轨迹是双曲线.

5. 本章中应注意运用和掌握的数学思想方法：

(1) 数形结合思想；

(2) 转化的思想；

(3) 待定系数法、配方法、分析法等.

Ⅲ 拓展资源

一、圆锥曲线的光学性质及其应用

一只很小的灯泡发出的光，会分散地射向各方，但把它装在圆柱形手电筒里，经过适当调节，就能射出一束比较强的平行光线，这是为什么呢？

原来手电筒内，在小灯泡后面有一个反光镜，镜面的形状是一个由抛物线绕它的轴旋转所得到的曲面（图 2－6），叫做抛物面，人们已经证明，抛物线有一条重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴，探照灯（图 2－7）也是利用这个原理设计的.

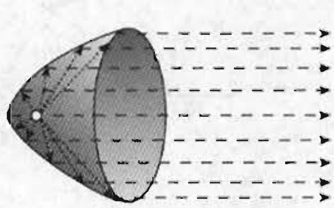


图 2－6

图 2－7

应用抛物线的这个性质，也可以使一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物线的反射集中于它的焦点. 人们应用这个原理设计了一种加热水和食物的太阳灶（图 2－8）. 在这种太阳灶上装有一个旋转抛物面形的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高.

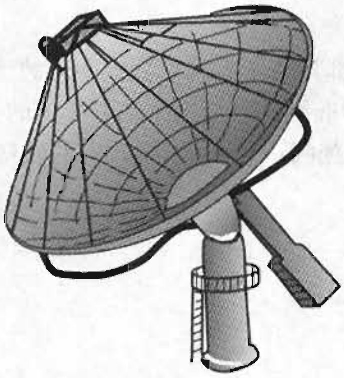


图 2－8

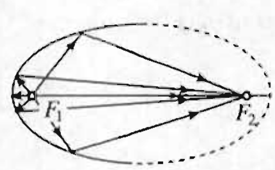


图 2－9

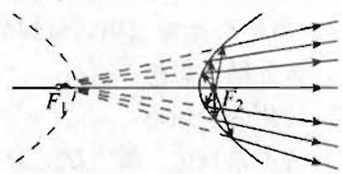


图 2－10

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同，从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上（图 2－9）；从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦点射出的一样（图 2－10）. 椭圆、双曲线的光学性质也被人们广泛地应用于各种设计中.

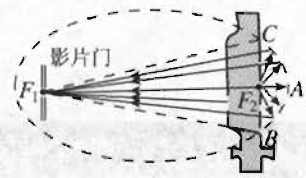


图 2－11

如图 2－11，电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它是旋转椭圆面. 为了使片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，灯丝 F_2 与片门 F_1 应位于椭圆的两个焦点处，这就是利用椭圆光学性质的一个实例.

二、向量与解析几何

向量用于解析几何中，能够把复杂的几何推理转化为简单的代数运算，能够充分体现数学中的数形结合思想，使许多解析几何问题的求解思路清晰，目标明确，易于掌握，也为解决平面解析几何问题开辟了一条新途径.

例 1 已知 $B(-3,0)$，$C(3,0)$，$\triangle ABC$ 中的 BC 边上的高的长度为 3，求 $\triangle ABC$ 的垂心的轨迹方程.

解：如图 2－12，设垂心为 $H(x,y)$，则 $A(x,\pm 3)$，连接 BH，有 $BH \perp CA$.

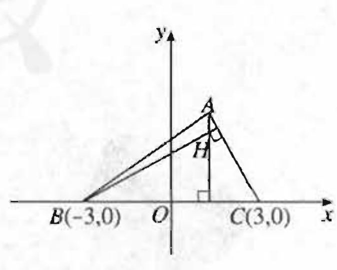


图 2－12

因为 $\overrightarrow{BH}=(x+3,y)$，$\overrightarrow{CA}=(x-3,\pm 3)$，

所以 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

所以 $(x+3)(x-3)\pm 3y=0$，即 $x^2\pm 3y-9=0$.

因为 H，B，C 三点不共线，

所以 $x^2\pm 3y-9=0\,(y\neq 0)$ 为所求轨迹方程.

例 2 如图 2－13，等轴双曲线的两个顶点分别为 A，B，垂直于双曲线实轴的直线与双曲线交于

M，N 两点，求证：$MA \perp NB$，$MB \perp NA$.

证明：设双曲线方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$，

则 $A(-a, 0)$，$B(a, 0)$，$MN \perp Ox$.

设 $M(x, y)$，则 $N(x, -y)$，

所以 $\overrightarrow{MA}=(-a-x, -y)$，$\overrightarrow{NB}=(a-x, y)$，

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NB}=(-a-x) \cdot (a-x)+(-y) \cdot y=x^2-a^2-y^2.$$

而 $M(x, y)$ 在双曲线上，

所以 $x^2-y^2=a^2$.

因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NB}=0$，

所以 $MA \perp NB$.

同理可证 $MB \perp NA$.

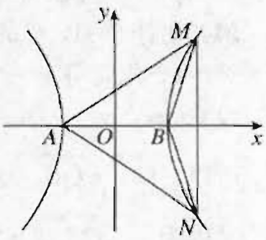


图 2-13

例 3 （2001 年全国高考题）设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点为 F，经过 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，点 C 在抛物线的准线 l 上，$BC /\!/ x$ 轴，证明直线 AC 经过原点 O.

证明：如图 2-14，设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$.

由题可知 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，$C\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$，

$$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p}, 0-y_1\right)=\left(\frac{p^2-y_1^2}{2p}, -y_1\right),$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}, y_2-y_1\right)=\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{2p}, y_2-y_1\right).$$

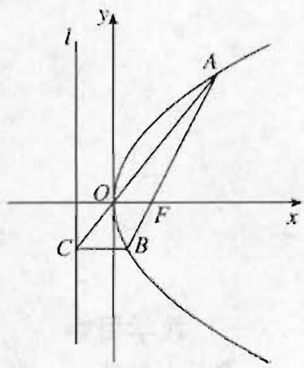


图 2-14

由 A, F, B 三点共线知 $\overrightarrow{AF} /\!/ \overrightarrow{AB}$，

所以 $\frac{p^2-y_1^2}{2p}(y_2-y_1)-\frac{y_2^2-y_1^2}{2p}(-y_1)=0(y_1 \neq y_2)$.

所以 $y_1 \cdot y_2=-p^2$.

又因为 $\overrightarrow{AO}=\left(-\frac{y_1^2}{2p}, -y_1\right)$，

$$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p}, y_2-y_1\right)=\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p}, -\frac{p^2}{y_1}-y_1\right)$$

$$=\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p}, -\frac{p^2+y_1^2}{y_1}\right),$$

而 $\left(-\frac{y_1^2}{2p}\right)\left(-\frac{p^2+y_1^2}{y_1}\right)-\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p}\right)(-y_1)=0$，

所以 $\overrightarrow{AO} /\!/ \overrightarrow{AC}$.

又因为 直线 AO，直线 AC 有公共点 A，

所以 A，O，C 三点共线.

通过以上几个例子可以看出，当题目中含有“垂直”“平行（共线）”等内容时，可利用向量法解

题，尤其是“垂直”，无论在条件中还是在结论中，都可以用向量法求解.

例 4 给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点. 设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小.

解：由题意知，C 的焦点为 $F(1,0)$，直线 l 的斜率为 1，所以 l 的方程为 $y=x-1$，将 $y=x-1$ 代入 $y^2=4x$ 化简得 $x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$.

又因为 $|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}=4\sqrt{51}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=-\dfrac{3\sqrt{51}}{204}$，

所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi-\arccos\dfrac{3\sqrt{51}}{204}$.

Ⅳ 教学案例

案例 1：2.2.1 椭圆的标准方程

（一）教学目标

1. 知识与技能：

使学生理解椭圆的定义，掌握椭圆的标准方程的推导及标准方程.

2. 过程与方法：

通过椭圆概念的引入与椭圆标准方程的推导过程，培养学生分析探索能力，熟练掌握解决解析几何问题的方法——坐标法.

3. 情感、态度与价值观：

通过椭圆定义及标准方程的学习，渗透数形结合的思想，启发学生研究问题时，抓住问题本质，严谨细致思考，规范得出解答，体会运动变化、对立统一的思想.

（二）教学重点与难点

重点：椭圆的定义和椭圆的标准方程.

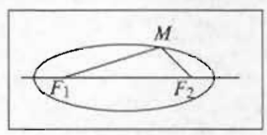
难点：椭圆的标准方程的推导，椭圆的定义中常数加以限制的原因.

（三）教学方法

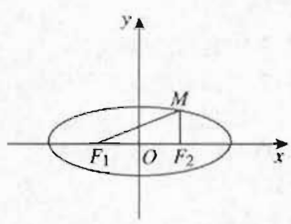
1. 用模型结合多媒体课件演示椭圆，再给出椭圆的定义，最后加以强调，加强概念的形成过程教学.

2. 对椭圆标准方程的推导，可采用观察、分析、归纳、抽象、概括、自主探究、合作交流的教学方法，调动学生参与课堂教学的主动性和积极性.

（四）教学过程

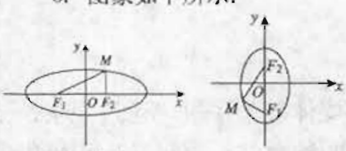
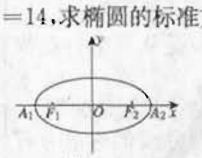
教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 曲线与方程； 2. 圆的定义.	问题 1：前面，大家学习了曲线的方程等概念，什么叫做曲线的方程？求曲线方程的一般步骤是什么？其中哪几个步骤必不可少？ 假设上述问题学生的回答基本正确，否则，教师给予纠正. 问题 2：当 $a>0$ 时，$\sqrt{f(x)}=a$ 与 $f(x)=a^2$ 是同解方程吗？ 当 $a>0$ 时，$f(x)=a^2 \Leftrightarrow (\sqrt{f(x)}-a)(\sqrt{f(x)}+a)=0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=a$. 提出这一问题以便说明标准方程推导中要注意同解变形. 问题 3：圆的几何特征是什么？你能否类似地提出一些轨迹命题作广泛的探索？ 一般学生能回答："平面内到一定点的距离为常数的点的轨迹是圆." 对同学提出的轨迹命题如： "到两定点距离之和等于常数的点的轨迹." "到两定点距离平方差等于常数的点的轨迹." "到两定点距离之差等于常数的点的轨迹." 教师要加以肯定，以鼓励同学们的探索精神.	这样便于学生温故而知新，在已有知识基础上去探求新知识.
概念的形成	椭圆的定义.	若同学们提出了"到两定点距离之和等于常数的点的轨迹"，那么动点轨迹是什么呢？这时教师示范，引导学生绘图： 取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画图板上的 F_1 和 F_2 两点，当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆.  教师进一步追问："椭圆，在哪些地方见过？"同学们会有各种回答，如"立体几何中圆的直观图""人造卫星运行轨道"等. 在此基础上，引导学生概括椭圆的定义： 平面内到两定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $\|F_1F_2\|$）的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做焦距.	通过实例演示，让学生对椭圆的特征有初步认识，再让学生给椭圆下定义应是水到渠成.
概念的深化	概念中应说明的两点： 1. 平面内； 2. $\|F_1F_2\|<$常数.	学生开始只强调主要几何特征——到两定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数，教师在演示中要从两个方面加以强调： (1) 将穿有铅笔的细线拉到图板平面外，得到的不是椭圆，而是椭球形，使学生认识到需加限制条件："在平面内"； (2) 这里的常数有什么限制吗？教师边演示边提示学生注意：若常数$=\|F_1F_2\|$，则是线段 F_1F_2；若常数$<\|F_1F_2\|$，则轨迹不存在；若常数$>\|F_1F_2\|$，则轨迹为椭圆. 所以要轨迹是椭圆，还必须加上限制条件——此常数大于$\|F_1F_2\|$.	结合实际模型演示，形象直观地说明椭圆定义中的必备条件.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">椭圆标准方程的推导</td>
<td>1. 椭圆的标准方程
(1) 建系设点
以过两定点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系．设 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，$M(x, y)$为椭圆上任意一点，则有 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$．


(2) 点的集合
由定义不难得出椭圆集合为：$P=\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}$．
(3) 代数方程
因为 $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，
$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，
得方程
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$．
(4) 化简方程
整理得
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，
表示椭圆的标准方程，它表示的椭圆的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$．这里 $c^2=a^2-b^2$．</td>
<td>由椭圆的定义，可以知道它的基本几何特征．但对椭圆还具有哪些性质，我们还一无所知，所以需要用坐标法先建立椭圆的方程．
如何建立椭圆的方程？根据求曲线方程的一般步骤，可分：(1) 建系设点；(2) 点的集合；(3) 代数方程；(4) 化简方程等步骤．
建立坐标系应遵循简单和优化的原则，如使关键点的坐标、关键几何量（距离、直线斜率等）的表达式简单化，注意充分利用图形的对称性，使学生认识到下列选取方法是恰当的．
化简方程可请一个反应比较快、书写比较规范的同学板演，其余同学在下面完成，教师巡视，适当给予提示：
(1) 椭圆方程的化简过程，从表达式的结构特征入手，利用根式有理化加以解决．
(2) 为使方程对称和谐而引入 b，同时 b 还有几何意义，下节课还要讲．由 $2a>2c$ 可得 $a^2-c^2>0$，令 $a^2-c^2=b^2$，则得方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．
关于证明所得的方程是椭圆方程，因教材中对此要求不高，可从略．</td>
<td>因为已回顾复习了求曲线轨迹方程的一般方法，因而可比较顺利地按照步骤写出过程，便于培养学生严谨规范的解决数学问题．
培养学生善于观察分析，从整体上把握问题．</td>
</tr>
<tr>
<td>2. 两种标准方程的比较
(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$
表示焦点在 x 轴上的椭圆，焦点是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，这里 $c^2=a^2-b^2$．
(2) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
表示焦点在 y 轴上的椭圆，焦点是 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，这里 $c^2=a^2-b^2$，只须将 (1) 中方程的 x，y 互换即可得到．</td>
<td>引导学生归纳．
教师指出：
在两种标准方程中，因为 $a^2>b^2$，所以可以根据分母的大小来判定焦点在哪一个坐标轴上．</td>
<td>让学生体会问题的本质所在，只是位置的不同，图形是一致的．</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	教科书中例 1.	例 1（1）中，从焦点坐标可以看出焦点在 x 轴上，可用待定系数法. 例 1（2）中，除待定系数法外，还有其他方法吗？教师启发，学生讨论交流. 例 1（2）可以考虑用椭圆的定义求出 $2a$，然后由 $b^2=a^2-c^2$，确定 b^2 的值.	通过应用举例，进一步理解椭圆的定义，熟练掌握求椭圆标准方程的方法.
	巩固练习：写出适合下列条件的椭圆的标准方程：$a=4$，$c=\sqrt{15}$，焦点在 y 轴上.	巩固练习：由学生回答，方程为 $\frac{y^2}{16}+x^2=1$.	
归纳小结	1. 定义：椭圆是平面内与两定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数（大于 $\|F_1F_2\|$）的点的轨迹. 2. 标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 3. 图象如下所示.  4. 焦点：$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$；$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$. 5. 数形结合的思想和待定系数法.	学生回顾本节内容，对所学知识进行总结归纳，教师对思想方法进行指导、提炼.	让学生学会学习，学会反思，学会总结.
布置作业	1. 练习 A. 2. 如图所示，在椭圆上的点中，A_1 与焦点 F_1 的距离最小，$\|A_1F_1\|=2$，A_2 与 F_1 的距离最大，$\|A_2F_1\|=14$，求椭圆的标准方程.  （第 2 题） 3. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一点 $M_1(2.4, 4)$ 与焦点的距离. 4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：(1) 椭圆经过两点 $P(-2\sqrt{2},0)$，$Q(0,\sqrt{5})$；(2) 长轴是短轴的 3 倍，经过点 $P(3,0)$. 5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$，$F_2$ 是它的焦点，过 F_1 的直线被椭圆截得的线段 AB 长为 m，求 $\triangle ABF_2$ 的周长.	学生独立完成，教师抽查批改作业.	巩固本节课所学知识，培养学生自觉学习的习惯，同时给学有余力的学生留出自由发展的空间.

案例2：2.3.2　双曲线的几何性质

（一）教学目标

1. 知识与技能：

理解并掌握双曲线的几何性质，能根据这些几何性质解决一些简单问题，从而培养学生分析、归纳、推理等能力.

2. 过程与方法：

在与椭圆的性质类比中获得双曲线的性质，进一步体会数形结合的思想，掌握利用方程研究曲线性质的基本方法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节课的学习使学生进一步体会曲线与方程的对应关系，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

（二）教学重点与难点

重点：双曲线的几何性质及初步运用.

难点：双曲线的渐近线、离心率的应用.

（三）教学方法

本节课主要通过数形结合，类比椭圆的几何性质，运用现代化多媒体教学手段，通过观察、分析、归纳出双曲线的几何性质．教学过程中，可采取设疑提问，重点讲解，归纳总结，引导学生积极思考，自我解决问题，鼓励学生合作交流、思考探索.

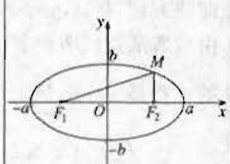
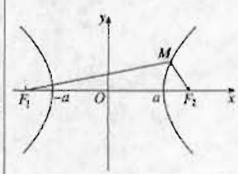
（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问导入新课	1. 椭圆的几何性质. 2. 双曲线的两种标准方程.	1. 椭圆有哪些几何性质？是如何探讨的？请一名同学回答. 应为：范围、对称性、顶点、离心率，是从标准方程探讨的. 2. 双曲线的两种标准方程是什么？再请一名同学回答. 应为：中心在原点、焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；中心在原点，焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. 下面我们类比椭圆的几何性质来研究双曲线的几何性质.	以旧引新让学生类比椭圆的几何性质，不难得到双曲线的几何性质.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>类比联想得出性质</td>
<td>双曲线的几何性质：
1. 范围；
2. 对称性；
3. 顶点；
4. 渐近线；
5. 离心率.</td>
<td>

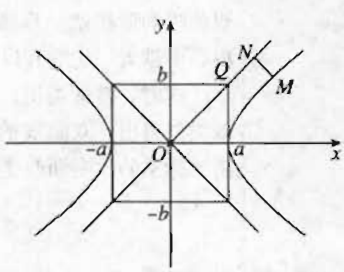
1. 引导学生完成下列关于椭圆与双曲线性质的表格（让学生回答，教师引导、启发、订正并板书）

<table>
<tr><th></th><th>椭圆</th><th>双曲线</th></tr>
<tr><td>方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>b>0)$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>0,\ b>0)$</td></tr>
<tr><td>a，b，c 关系</td><td>$c^2=a^2-b^2$
$(a>b>0)$</td><td>$c^2=a^2+b^2$
$(a>0,\ b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$</td><td>$|x|\geqslant a$，$y\in\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td>对称轴：x 轴，y 轴
对称中心：原点</td><td>对称轴：x 轴，y 轴
对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$
$(0,\ -b)$，$(0,\ b)$
长轴长为 $2a$
短轴长为 $2b$</td><td>$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$
实轴为长 $2a$
虚轴为长 $2b$</td></tr>
</table>

2. 导出渐近线（性质 4）

在学习椭圆时，以原点为中心，$2a$，$2b$ 为邻边的矩形，对于估计椭圆的形状，画出椭圆的简图都有很大作用，试问对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，仍以原点为中心，$2a$，$2b$ 为邻边作一矩形（板书图形），那么双曲线和这个矩形有什么关系？这个矩形对于估计和画出双曲线简图有什么指导意义？这些问题不要求学生回答，只引起学生类比联想.

接着再提出问题：当 a，b 为已知时，这个矩形的两条对角线所在直线的方程是什么？



</td>
<td>类比联想得到双曲线的前 3 个性质.</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
类比联想得出性质		请一名同学回答. 应为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，并画出两条对角线，进一步引导学生. 从上图观察得出结论：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近. 我们把两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线的渐近线. 现在来看看实轴在 y 轴上的双曲线的渐近线方程是怎样的？由于焦点在 y 轴上的双曲线方程是由焦点在 x 轴上的双曲线方程，将 x,y 字母对调所得到，自然前者渐近线方程也可由后者渐近线方程将 x,y 字母对调而得，所以双曲线的渐近线的方程是 $x=\pm\frac{b}{a}y$，即 $y=\pm\frac{a}{b}x$. 定义：直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线，直线 $y=\pm\frac{a}{b}x$，叫做双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线. 这样，我们就完满地解决了画双曲线远处趋向问题，从而可比较精确地画出双曲线. 例如：画双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$，先作渐近线 $y=\pm\frac{4}{5}x$，再描几个点，就可以随后画出比较精确的双曲线草图. 3. 顺其自然介绍离心率(性质 5) 由于正确认识了渐近线的概念，对于离心率的直观意义也就容易掌握了，为此，介绍一下双曲线的离心率以及它对双曲线的形状的影响. (1)双曲线的焦距与实轴长的比 $e=\frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率，且 $e>1$. (2)由于 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}$，所以 e 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔，从而得出：双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔.（可由多媒体课件演示） 这时，教师指出：焦点在 y 轴上的双曲线的几何性质可以类似得出，双曲线的几何性质与坐标系的选择无关，即不随坐标系的改变而改变.	通过图形，形象直观地得到渐近线的定义，及双曲线与其渐近线的位置关系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
性质的应用	例 1. 已知双曲线的焦点在 x 轴上，中心在原点，如果焦距为 8，实轴长为 6，求此双曲线的标准方程及其渐近线的方程. 例 2. 求双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的实轴长和虚轴长，顶点坐标、焦点坐标、渐近线方程.	分析：可用待定系数法，直接求出 a，b，c. 学生独立完成，教师巡视，注意个别指导. 学生多思考、交流，教师分析、解答，教师板书. 注意首先化为标准方程，直接求得 a，b，c. 再利用双曲线的有关性质，解决所求问题.	例 1 是直接根据条件写出双曲线方程，运用性质得到渐近线方程，巩固双曲线的定义. 例 2，对非标准形式的双曲线方程，首先要化为标准形式；进一步加强对几何性质的运用，熟练掌握知识方法.
课堂练习	练习 A，1，2.	学生独立完成，教师指导.	巩固所学知识方法.
归纳小结	1. 双曲线的几何性质. 2. 双曲线的讨论中经常涉及四个量 a，b，c，e 的几何意义及数量关系. 3. 数形结合的思想的运用.	学生可以讨论、交流；教师点拨引导、完善.	帮助学生总结知识规律，便于学生拓展提高，掌握.
布置作业	1. 练习 B，1，2. 2. 习题2－3B，4. 3. 求以椭圆 $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 的焦点为顶点，而以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程.	学生课下独立完成.	进一步巩固本节所学知识方法.

案例 3：2.4.1 抛物线的标准方程

（一）教学目标

1. 知识与技能：

使学生掌握抛物线的定义，理解焦点、准线方程的几何意义，能够根据已知条件写出抛物线的标准方程.

2. 过程与方法：

掌握开口向右的抛物线标准方程的推导过程，进一步理解求曲线方程的方法——坐标法. 通过本节课的学习，培养学生在解决数学问题时能够具备观察、类比、分析、计算的能力.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的学习，让学生体验研究解析几何的基本思想，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，进一步体会数形结合的思想.

（二）教学重点与难点

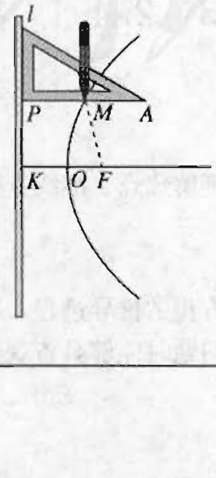
重点：抛物线的定义；根据具体条件求出抛物线的标准方程；根据抛物线的标准方程求出焦点坐标、准线方程.

难点：抛物线的标准方程的推导.

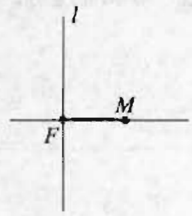
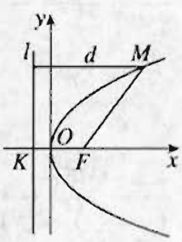
（三）教学方法

本节课可采用探究性设计方法，教学中可利用多媒体课件、教具演示，创设问题情景，激发学生求知欲望，引导学生参与教学过程，体会数学思想方法的应用，展示思路的形成过程，总结规律方法，提高学生分析问题和解决问题的能力.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提高	1. 求轨迹方程的一般方法——坐标法. 2. 离心率.	1. 已知轨迹条件，怎样建立轨迹方程？ 已知曲线，求方程的一般步骤如下：(1) 建立适当的直角坐标系，用(x, y)表示曲线上任一点M的坐标；(2) 写出曲线上的点M所要适合的条件；(3) 用点M的坐标表示这个条件，得出方程$f(x, y)=0$；(4) 把方程$f(x, y)=0$化简；(5) 证明化简后的方程就是所求的曲线方程. 如果方程化简的每一步都同解，那么最后一步证明可以省略. 2. 在平面内到一定点的距离和到一条定直线距离的比是常数e的点的轨迹，当$e<1$时是什么图形？(椭圆) 当$e>1$时是什么图形？(双曲线) 当$e=1$时是什么图形？	让学生回顾已学习的知识，有利于本节课的顺利进行.
新课导入	展示抛物线的几何画法.	当$e=1$时，它又是什么曲线呢？即：在平面内到一定点的距离与到一条定直线距离相等的点的轨迹是什么图形？ 演示“拉线教具”：观察与定点F的距离等于到定直线l的距离的动点M的轨迹，画出的是适合条件的点M的集合$P=\{M\|\ \|MF\|=d\}$，这里d是动点M到定直线l的距离. 画出的曲线叫抛物线.  	使学生看到曲线上任一点到定点和到定直线的距离之比等于常数是圆锥曲线的一个共同的本质属性，明确抛物线与椭圆、双曲线之间的联系.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="3">新课讲授</td><td>1. 定义</td><td>平面内到一定点和到一条不过此点的定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线．定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线．</td><td></td></tr>
<tr><td>2. 概念的深化</td><td>概念理解：
平面内有：(1) 一定点 F——焦点；
(2) 一条不过此点（给出的定点）的定直线 l——准线；
想一想：若定点 F 在定直线 l 上，那么动点的轨迹是什么图形？（是过 F 点与直线 l 垂直的一条直线——直线 MF，不是抛物线.）
(3) 动点到定点的距离 $|MF|$；
(4) 动点到定直线的距离 d；
(5) $|MF|=d$；
(6) 动点 M 的轨迹——抛物线.

</td><td>加深对定义的理解.</td></tr>
<tr><td>3. 方程的推导过程</td><td>推导抛物线的标准方程（开口向右）.（重点）
1. 要把抛物线上的点 M 的集合 $P=\{M \mid |MF|=d\}$ 表示为集合 $Q=\{(x, y) \mid f(x, y)=0\}$，首先要建立坐标系，为了使推导出的方程尽量简化，应如何选择坐标系？


建立适当的直角坐标系应遵循两点：①若曲线是轴对称图形，则可选它的对称轴为坐标轴；②曲线上的特殊点，可选作坐标系的原点.
过焦点 F 作准线 l 的垂线交 l 于点 K，启发学生思考回答问题：
(1) 如何确定 x 轴（或 y 轴）？（以对称轴为坐标轴）
由抛物线的定义知直线 KF 是抛物线的对称轴.
(2) 如何确定坐标原点？（曲线上的特殊点，可作为坐标系的原点）
因为线段 KF 的中点适合条件——到点 F 的距离等于到直线 l 的距离，所以它又在抛物线上，以线段 KF 的中点为坐标原点.
(3) 怎样建立坐标系才使方程的推导简化？
取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，x 轴与 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系.</td><td>通过教师的分步设问，引导学生展示思维过程，让学生体会分析解决问题的方法.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th colspan="3">师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="9">新课讲授</td><td rowspan="9">3. 方程的推导过程</td><td colspan="3">2. 开口向右的抛物线标准方程:(教师引导得出结论)——将几何问题用代数方法表示.</td><td rowspan="9">如何建系体现最优化方案，通过严谨细致的分析，展现知识的发生、发展形成的过程，进一步加强过程性教学.</td></tr>
<tr><td>步骤</td><td>推导过程</td><td>引导及分析
(电脑给出提示或注意)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1. 建立适当的直角坐标系，用(x,y)表示曲线上任一点M的坐标.</td><td>建立直角坐标系，取经过焦点F且垂直于准线l的直线为x轴，x轴与直线l相交于点K，以线段KF的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系.</td><td>焦点F即定点；
准线l即定直线；
直线l不过定点F.</td></tr>
<tr><td>设焦点到准线的距离$|KF|=p$ $(p>0)$（p为参数），那么，焦点F的坐标为$(\frac{p}{2},\ 0)$. 准线l的方程为$x=-\frac{p}{2}$.</td><td>根据已知给出曲线上特殊点的坐标和已知直线的方程.</td></tr>
<tr><td>设抛物线上的任一点$M(x,\ y)$，点M到直线l的距离为d.</td><td></td></tr>
<tr><td>2. 写出曲线上的点M所要适合的条件.</td><td>根据定义，抛物线就是集合$P=\{M\mid |MF|=d\}$.</td><td>①动点M到定点F的距离$|MF|$；
②动点M到定直线l的距离d；
③平面内到一定点和到一条不过此点的定直线的距离$|MF|=d$.</td></tr>
<tr><td>3. $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$用点$M$的坐标表示这个条件，得出方程$f(x,\ y)=0$.</td><td>因为$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$，所以$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.</td><td>①根据两点间的距离公式：动点$M(x,\ y)$与定点$F(\frac{p}{2},\ 0)$的距离$|MF|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；
②点$M(x,y)$到直线l: $x+\frac{p}{2}=0$的距离d怎样表示是一个难点. 利用点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离公式或者点$P(x_0,y_0)$到垂直于x轴的直线$x=x_0$的距离为$d=|x-x_0|$.</td></tr>
<tr><td>4. 把方程$f(x,\ y)=0$化简.</td><td>两边平方，化简得
$y^2=2px(p>0)$. ①</td><td>即抛物线的标准方程（如果选取坐标系使得抛物线的顶点在原点，对称轴和一个坐标轴重合，这时推导出来的抛物线方程称为标准方程）.</td></tr>
<tr><td>5. 证明化简后的方程就是所求的曲线方程.</td><td>方程①的推导过程表明，抛物线上的点的坐标都是这个方程式的解. 还可以证明，以方程①的解为坐标的点都在此抛物线上.</td><td>因为方程化简的每一步都同解，最后一步证明可以省略.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲授	3. 方程的推导过程	3. 标准方程 $y^2=2xp$ ($p>0$) 的特点：(用代数方法研究几何问题) p 的几何意义：焦点到准线的距离； 焦点：($\frac{p}{2}$，0)，在 x 轴的正半轴上； 准线：$x=-\frac{p}{2}$； 顶点：坐标原点 (0，0)； 开口方向：向右.	可由教师引导提问，学生回答．总结完善知识结构体系.
巩固练习		根据抛物线的标准方程，说出抛物线的焦点坐标和准线方程： $y^2=8$；$y^2=6x$；$y^2=\frac{2}{5}x$；$y^2=3.2x$. 学生自己完成，教师课堂指导.	加深对抛物线的标准方程中 p 的几何意义的理解.
解题反思	p 值的意义：(重点) (1) 表示焦点到准线的距离； (2) $p>0$ 为常数； (3) p 值等于一次项系数绝对值的一半； (4) 准线与对称轴垂直，垂足与焦点关于原点对称，它们与原点的距离等于一次项系数的绝对值的$\frac{1}{4}$，即$\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$.	教师启发，学生总结交流，教师归纳指导.	在解题教学中，根据知识内容形成规律方法.
例题讲解	例 1，例 2.	由于题目都比较简单，可由学生独立完成．也可以让两位同学到黑板上板演. 最后总结：要确定抛物线的标准方程，关键在于确定 p 值及抛物线开口方向.	例 1 为已知焦点坐标求标准方程、准线方程. 例 2 为已知焦点到准线的距离求标准方程、焦点坐标、准线方程. 巩固所学知识、规范解题步骤.
课堂练习	练习 A，1，2，3，4.	学生完成，教师指导. 问题一：练习 A，3 题用的是什么方法？ 问题二：练习 A，4 题，该题目从已知条件上分析还有其他情况吗？学生回答，师生交流.	巩固本节课所学知识，培养学生认真思考，善于总结完善的良好学习品质.
归纳总结	1. 抛物线的定义、焦点、准线. 2. 参数 p ($p>0$，焦点到准线的距离). 3. 抛物线的四种标准方程. 4. 解题.	师生共同总结、交流、完善.	帮助学生总结知识方法，便于系统掌握.
布置作业	练习 B，1，2，3.	学生课下独立完成、教师进行批改.	进一步巩固本节所学知识方法.

V　习题参考答案与提示

练习 A（第 35 页）

1. 将 A，B，C，D 四点坐标分别代入方程检验知：点 A，D 在曲线上；点 B，C 不在曲线上.
2. $b=0$.
3. $r^2=5$.
4. **解**：由方程组 $\begin{cases}2x+5y-15=0\\ y=-\dfrac{10}{x}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=10\\ y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\ y=4\end{cases}$ 则交点坐标为 $(10,\ -1)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{2},\ 4\right)$.

练习 B（第 36 页）

1. (1) 在；(2) 不在.
2. 不是；三角形的中线是一条线段而不是一条直线.
3. **解**：设圆的方程为 $x^2+y^2-1+\lambda(x^2+y^2-4x-4y-1)=0$，将点 $(2,\ 1)$ 代入方程得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，则圆的方程为 $3x^2+3y^2-4x-4y-3=0$.

练习 A（第 38 页）

1. 不是. 应是 $|y|=2$.
2. $|x|=4$.
3. **解**：利用点到直线及两点间距离公式得 $x^2-8y+16=0$，即 $y=\dfrac{1}{8}x^2+2$，此方程表示抛物线；顶点坐标为 $(0,\ 2)$；对称轴方程为 $x=0$.

练习 B（第 38 页）

1. $x^2+y^2-x-3y-4=0$（$(x,\ y)\neq(-2,\ 1)$ 且 $(x,\ y)\neq(3,\ 2)$）.
2. $x^2+y^2=k$，表示以 $(0,\ 0)$ 为圆心，$R=\sqrt{k}$ 为半径的圆（以两互相垂直的直线为坐标轴，建立坐标系）.
3. $x^2+y^2=8.5$（以 AB 所在线为 x 轴，中垂线为 y 轴，建立坐标系）.

习题 2－1A（第 38 页）

1. 圆的方程为 $x^2+y^2=25$，$(-4,\ -3)$ 和 $(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$ 在圆上；$(7,\ -3\sqrt{2})$ 和 $(2,\ 4)$ 不在圆上.
2. 是.
3. $x=\dfrac{9}{2}$（表示通过点 $\left(\dfrac{9}{2},\ 0\right)$ 且平行于 y 轴的直线）.

4. $x^2+y^2-8x-4y+10=0$（除点（3，5），（5，−1）外）．

习题 2－1 B（第 38 页）

1. 不是．应为 $x=2$，$y\in[0, 3]$．
2. 提示：将 A，B 两点代入方程 $ax^2+bx^2=4$，解得 $a=4$，$b=1$．
3. （1，−2），（49，−14）．

练习 A（第 42 页）

1. 所画 $\triangle F_1DE$ 的周长为定值 $4a$．
2. (1) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$；(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；(3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$；(4) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{20}=1$．
3. 6．
4. (1) $(4, 0)$，$(-4, 0)$；(2) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$．

练习 B（第 43 页）

1. ①知 $a=5$，② 知 $b=3$，③椭圆上一点坐标．
2. **解**：设 A 点坐标为 (x, y)，则 $\frac{y}{x-6}\cdot\frac{y}{x+6}=-\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1(x\neq\pm6)$，此点的轨迹是椭圆（除长轴端点）．

练习 A（第 46 页）

1. (1) $2a=18$；$2b=6$；$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；$F_1(-6\sqrt{2}, 0)$，$F_2(6\sqrt{2}, 0)$；$A_1(-9, 0)$，$A_2(9, 0)$，$B_1(0, -3)$，$B_2(0, 3)$；

   (2) $2a=10$；$2b=6$；$e=\frac{4}{5}$；$F_1(0, -4)$，$F_2(0, 4)$；$A_1(0, -5)$，$A_2(0, 5)$，$B_1(-3, 0)$，$B_2(3, 0)$；

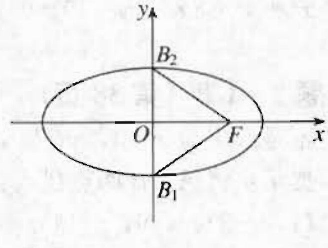
   (3) $2a=10$；$2b=\frac{5}{2}$；$e=\frac{\sqrt{15}}{4}$；$F_1\left(0, -\frac{5\sqrt{15}}{4}\right)$，$F_2\left(0, \frac{5\sqrt{15}}{4}\right)$；$A_1(0, -5)$，$A_2(0, 5)$，$B_1\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$，$B_2\left(\frac{5}{4}, 0\right)$；

   (4) $2a=1$；$2b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；$e=\frac{\sqrt{5}}{5}$；$F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}, 0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}, 0\right)$；$A_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，$A_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$B_1\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$B_2\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$．

2. (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；(3) $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$；(4) 略；(5) 略．
3. **解**：由 $\triangle FB_1B_2$ 是等边三角形，得 $FB_1=B_1B_2=2b$，所以 $2a=4b$．

由 $a^2-b^2=c^2$，解得 $a^2=48$，$b^2=12$.

所以椭圆标准方程为：$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$.



（第 3 题）

练习 B（第 46 页）

1. （1）无数个；$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$，$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{11}=1$.

（2）一个；$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$，设椭圆方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，由条件得

$$\begin{cases}a^2-b^2=5\\ \frac{16}{b^2}+\frac{5}{a^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=25\\ b^2=20\end{cases}$$

2. **解**：建立直角坐标系，使 A，B，F_2 在 x 轴上，F_2 为椭圆的右焦点.

设椭圆标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，则

$$a-c=|OA|-|OF_2|=|F_2A|,$$
$$a+c=|OB|+|OF_2|=|F_2B|.$$

解得 $a=7\ 782.5$，$c=972.5$，因此 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{8\ 755\times 6\ 810}\approx 7\ 721.5$.

所以运行轨道的近似方程为$\frac{x^2}{7\ 782.5^2}+\frac{y^2}{7\ 721.5^2}=1$.

习题 2－2A（第 47 页）

1. 略.

2. （1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$；（2）$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；（3）$\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 或 $x^2+\frac{y^2}{16}=1$；

（4）$\frac{x^2}{136}+\frac{25y^2}{136}=1$ 或$\frac{25x^2}{904}+\frac{y^2}{904}=1$.

3. （1）$2a=8$；$2b=5$；$F_1\left(0,\ -\frac{\sqrt{39}}{2}\right)$，$F_2\left(0,\ \frac{\sqrt{39}}{2}\right)$；$A_1(0,\ -4)$，$A_2(0,\ 4)$，$B_1\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$，

$B_2\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$；

（2）$2a=\frac{2}{m}$；$2b=\frac{1}{m}$；$F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2m},\ 0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2m},\ 0\right)$；$A_1\left(-\frac{1}{m},\ 0\right)$，$A_2\left(\frac{1}{m},\ 0\right)$，$B_1\left(0,\ -\frac{1}{2m}\right)$，

$B_2\left(0,\ \frac{1}{2m}\right)$.

4. $k=1$.

5. **解**：在$\triangle F_1PF_2$ 中使用余弦定理

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\,|PF_2|},$$

可得 $|PF_1||PF_2|=\frac{20}{3}$.

再由正弦定理可得$\triangle F_1PF_2$的面积为$\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

6. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$；离心率为$e=\frac{1}{2}$.

7. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

8. **证明**：(1) 因为椭圆关于坐标原点成中心对称，所以原点O为AB的中点. 又知O为F_1F_2的中点，所以四边形AF_1BF_2为平行四边形.

(2) 我们不妨设$S_{AF_1BF_2}=ab$，令A的坐标为(m, n)，

则 $S_{AF_1BF_2}=2\times\frac{1}{2}\times 2c\times|n|=ab$.

所以 $|n|=\frac{ab}{2c}$. 又因为$|n|\leqslant b$，即$\frac{ab}{2c}\leqslant b$成立.

所以 $\frac{c}{a}=e\geqslant\frac{1}{2}$. (*)

由椭圆离心率$0<e<1$知(*)成立，则假设成立.

9. $\frac{x^2}{3.45\times 10^{17}}+\frac{y^2}{3.31\times 10^{17}}=1$.

10. 约为33.26 m.

习题2-2B（第48页）

1. 原方程化为$\frac{x^2}{\frac{5m+12}{3m+7}}+\frac{y^2}{\frac{5m+12}{3m+4}}=1$，条件$\begin{cases}\frac{5m+12}{3m+7}>0\\ \frac{5m+12}{3m+4}>0\end{cases}\Rightarrow m>-\frac{4}{3}$或$m<-\frac{12}{5}$.

2. **解**：$|PF_1|+|PA|=(2a-|PF_2|)+|PA|$

$$=2a-(|PF_2|-|PA|)\geqslant 2a-|AF_2|=6-\sqrt{2}.$$

(当且仅当F_2，A，P共线且点A位在点P，F_2之间时取等号)

$|PF_1|+|PA|=2a-|PF_2|+|PA|\leqslant 2a+|AF_2|=6+\sqrt{2}$.

(当且仅当P，F_2，A共线且F_2位在A、P之间时取等号)

3. 若$\angle PF_1F_2$为直角，则点P坐标为$\left(-\sqrt{5}, \frac{4}{3}\right)$或$\left(-\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\right)$；

若$\angle PF_2F_1$为直角，则点P坐标为$\left(\sqrt{5}, \frac{4}{3}\right)$或$\left(\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\right)$；

若$\angle F_1PF_2$为直角，则点P坐标为$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

4. **解**：在Rt$\triangle ABC$中得$BC=\sqrt{2}$，

由$AB+AC+BC=4a=2+\sqrt{2}$，得$a=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，

所以　$AC+AD=2a=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$（其中 D 为另一个焦点），所以　$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以焦距 $2c=\sqrt{AC^2+AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5. **解**：(1)　因为　$|PF_1|+|PF_2|=4$，

方法一　$|PF_1||PF_2|=|PF_1|(4-|PF_1|)=-|PF_1|^2+4|PF_1|$
$=-(|PF_1|-2)^2+4$.

因为　$2-\sqrt{3}\leqslant|PF_1|\leqslant2+\sqrt{3}$，当 $|PF_1|=2$ 时取最大值为 4.

方法二　$|PF_1||PF_2|=a^2-e^2x_0^2=4-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot x_0^2$，当 $x_0=0$ 时，取最大值为 4.

方法三　$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$.

(2) $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|PF_1|^2+(4-|PF_1|)^2$
$=2|PF_1|^2-8|PF_1|+16$
$=2(|PF_1|-2)^2+8$,

因为　$2-\sqrt{3}\leqslant|PF_1|\leqslant2+\sqrt{3}$，当 $|PF_1|=2$ 时，取最小值为 8.

练习 A（第 51 页）

1. (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；(2) $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$；(3) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$；(4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$.
2. (1) $F_1(0,\ -6)$，$F_2(0,\ 6)$；(2) 点 P 与焦点 F_2 距离为 16.
3. **解**：以线段 AB 的中点为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴的正方向，建立直角坐标系 xOy.

$|PB|-|PA|=340\times4=1\ 360$，即可看为

$2a=1\ 360\Rightarrow a=680$，

$2c=1\ 400\Rightarrow c=700$，

所以　$b^2=27\ 600$.

因此方程为　$\frac{x^2}{462\ 400}-\frac{y^2}{27\ 600}=1$ $(x<0)$.

练习 B（第 51 页）

1. **解**：双曲线方程化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{3}{m}}=1$，$c^2=\frac{4}{m}$，则　$m=1$.
2. **解**：椭圆的焦点为 $(2\sqrt{3},0)$，$(-2\sqrt{3},0)$，所以　$m=6$.

练习 A（第 56 页）

1. (1) $2a=4$；$2b=4$；$F_1(-2\sqrt{2},0)$，$F_2(2\sqrt{2},0)$；$e=\sqrt{2}$；$y=\pm x$；

(2) $2a=18$；$2b=6$；$F_1(0,\ -3\sqrt{10})$，$F_2(0,\ 3\sqrt{10})$；$e=\frac{\sqrt{10}}{3}$；$y=\pm3x$；

(3) $2a=8$；$2b=10$；$F_1(-\sqrt{41},\ 0)$，$F_2(\sqrt{41},\ 0)$；$e=\dfrac{\sqrt{41}}{4}$；$y=\pm\dfrac{5}{4}x$；

(4) $2a=20$；$2b=12$；$F_1(-2\sqrt{34},\ 0)$，$F_2(2\sqrt{34},\ 0)$；$e=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$；$y=\pm\dfrac{3}{5}x$.

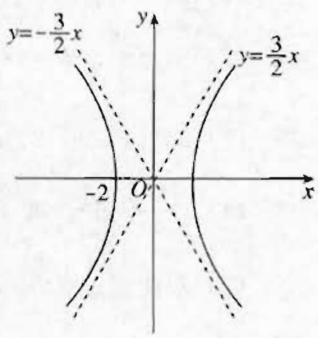
2. **解**：由焦点坐标得 $c=5$ 且在 x 轴上，

由 $3x-4y=0$，可得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$.

因此 $\begin{cases}a^2+b^2=25\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2=16\\ b^2=9\end{cases}$

所以双曲线标准方程：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，$e=\dfrac{5}{4}$.

3. 渐近线方程为：$y=\pm\dfrac{3}{2}x$.



（第 3 题）

练习 B（第 56 页）

1. (1) $\dfrac{4y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$；(2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{27}=1$.

2. **解**：设点 M 为 $(x,\ y)$，则有距离乘积值

$$A=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}.$$

因为点 M 在双曲线上，由 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，

所以 $A=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为定值.

因此第一问的值为 $\dfrac{18}{5}$.

3. **解**：因为 $B(0,\ b)$，$A(-a,\ 0)$，$F(c,\ 0)$，所以

$$\overrightarrow{BA}=(-a,\ -b),\ \overrightarrow{BF}=(c,\ -b).$$

从而有

$$-ac+b^2=3ac,$$

又因为 $b^2=c^2-a^2$，因此

$$c^2-a^2-4ac=0,$$
$$e^2-4e-1=0,$$

所以

$$e=2+\sqrt{5}\text{ 或 }e=2-\sqrt{5}\text{（舍）}.$$

因此 $e=2+\sqrt{5}$.

习题 2－3A（第 56 页）

1. 略.

2. (1) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$; (2) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$; (3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

(4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$; (5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{44}-\frac{x^2}{176}=1$.

3. (1) $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$; (2) 2.

4. (1) $2a=\frac{8}{3}$; $2b=4$; $F_1\left(-\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0\right)$; $A_1\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, $A_2\left(\frac{4}{3}, 0\right)$; $y=\pm\frac{3}{2}x$.

(2) $2a=4$; $2b=2\sqrt{m}$; $F_1(-\sqrt{4+m}, 0)$, $F_2(\sqrt{4+m}, 0)$; $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$; $y=\pm\frac{\sqrt{m}}{2}x$.

5. (1) $\frac{x^2}{9a^2}-\frac{y^2}{25a^2}=1$ $(a\neq 0)$ 或 $\frac{y^2}{25b^2}-\frac{x^2}{9b^2}=1$ $(b\neq 0)$;

(2) 双曲线过点 $M(1, 3)$ 代入上式，得 $\frac{9y^2}{56}-\frac{25x^2}{56}=1$.

6. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. **解**：$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{2}$.

$(|AF_1|-|AF_2|)^2=20$， ①

$|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1||AF_2|\cos\angle F_1AF_2=32$， ②

$\frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\sin\angle F_1AF_2=2\sqrt{2}$， ③

解①②③可得 $\cos\angle F_1AF_2=-\frac{1}{17}$，

所以 $\angle F_1AF_2=\pi-\arccos\frac{1}{17}$.

8. **解**：设点 P 的坐标为 (x, y)，则 $A(3, 0)$，$B(-3, 0)$，$C(-5, 2\sqrt{3})$.

因为 $|PB|=|PC|$，所以 点 P 在 BC 的中垂线上.

因为 $k_{BC}=-\sqrt{3}$，BC 中点 $D(-4, \sqrt{3})$，

所以 直线 PD 方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$. ①

又因为 $|PB|-|PA|=4$，

所以 点 P 必在以 A，B 为焦点的双曲线的右支上，双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant 0)$. ②

联立①②，解得 $x=8$ 或 $x=-\frac{32}{11}$（舍去），所以 $y=5\sqrt{3}$.

所以 P 点坐标为 $(8, 5\sqrt{3})$.

习题 2－3B（第 58 页）

1. $\begin{cases} m^2-1>0 \\ m-2<0 \end{cases} \Rightarrow m<-1$ 或 $1<m<2$.

2. **解**：焦点坐标为：$(0, -4\sqrt{3})$，$(0, 4\sqrt{3})$，即 $c=4\sqrt{3}$.

又$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a^2+b^2=c^2=48$，解得 $a^2=12$，$b^2=36$.

所以双曲线方程为$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{36}=1$.

3. **解**：(1) 设点 P 坐标为(x, y)，则$\frac{y}{x+6}\cdot\frac{y}{x-6}=\frac{4}{9}$，得轨迹方程为$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1(x\neq\pm6)$；

(2) 同(1)可得$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36a}=1(x\neq\pm6)$，$a>0$ 时为双曲线，$a=-1$ 时为圆，a 取其他值时为椭圆.

4. **解**：设 M 点坐标为(x, y)，则 $x^2+y^2=25$，从而 $y^2=25-x^2$.

又因为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 所以 $x^2=\frac{369}{25}$，因此

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|&=\frac{1}{2}\sqrt{(x-5)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+5)^2+y^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(x-5)^2+25-x^2}\cdot\sqrt{(x+5)^2+25-x^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{50-10x}\cdot\sqrt{50+10x}=16.
\end{aligned}
$$

练习 A（第 60 页）

1. (1) $y^2=8x$；(2) $y^2=6x$.
2. (1) $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$，$x=-\frac{5}{2}$；(2) $F\left(\frac{a}{4}, 0\right)$，$x=-\frac{a}{4}$.
3. $y^2=8x$.
4. $y^2=24x$.

练习 B（第 61 页）

1. **解**：方法一　设点 $M(x, y)$，由题意知点 M 在 $x=-6$ 的右侧，

所以　$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+2=|x+6|$，化简整理得 $y^2=16x$.

方法二　由题意知：M 到直线 $x+4=0$ 的距离与到点$(4, 0)$的距离相等，

所以　M 点的轨迹是以$(4, 0)$为焦点，$x+4=0$ 为准线的抛物线.

所以　$p=8$，因此其方程为 $y^2=16x$.

2. **解**：方法一　因为　$y^2=12x$，所以　$p=6$.

点 M 在抛物线上，可设 $M\left(\frac{t^2}{12}, t\right)$ $(t\in\mathbf{R})$.

$\left(\frac{t^2}{12}-3\right)^2+t^2=81$，解之得 $t^2=72$，即 $t=\pm6\sqrt{2}$.

因此点 M 坐标为$(6, \pm6\sqrt{2})$.

方法二　设点 $M(x, y)$，由抛物线的定义知：

点 M 到准线 $x=-3$ 的距离等于它到焦点的距离，即 $x+3=9$，

所以　$x=6$，$y=\pm6\sqrt{2}$.

因此点 M 的坐标为 $(6, \pm 6\sqrt{2})$.

3. **解**：设 M 点坐标为 $\left(\frac{t^2}{6}, t\right)$ $(t \in \mathbf{R})$,

所以 $|MA|^2=\left(\frac{t^2}{6}-4\right)^2+t^2=\frac{1}{36}t^4-\frac{1}{3}t^2+16$

$=\frac{1}{36}(t^2-6)^2+15.$

所以 当 $t^2=6$ 时，$|MA|_{\min}=\sqrt{15}$. 因此 M 点坐标为 $(1, \pm\sqrt{6})$.

练习 A（第 63 页）

1. $y^2=8x$；图略.
2. 图略. 抛物线的开口大小随着 x 的系数增大而变宽.
3. **解**：$\triangle OAB$ 为正三角形且 A, B 在抛物线上，所以 A, B 关于 x 轴对称.
   设 $A(6t^2, 6t)$，则 $B(6t^2, -6t)$，由题意得 $|OA|=|OB|$,
   所以 $t=\pm\sqrt{3}$，因此边长为 $12\sqrt{3}$.

练习 B（第 64 页）

1. **解**：设 l_{AB}：$x=a(a>0)$，所以可解得交点的纵坐标为 $y_1=2\sqrt{a}$ 或 $y_2=-2\sqrt{a}$.
   因此 $|AB|=|y_1-y_2|=4\sqrt{a}=4\sqrt{3}$,
   即 $a=3$，即 $x=3$.
2. **证明**：方法一 抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

   设过点 F 的直线方程为 PQ：$x=my+\frac{p}{2}$，代入抛物线方程得 $y^2-2pmy-p^2=0$.

   设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，因此 $y_1y_2=-p^2$.

   设点 M 坐标为 $\left(-\frac{p}{2}, y'\right)$，由 M, O, P 三点共线，得 $\frac{y'}{-\frac{p}{2}}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1}$,

   得 $y'=-\frac{p^2}{y_1}$，即 $M\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1}\right)$.

   又因为 Q 点坐标 $\left(x_2, -\frac{p^2}{y_1}\right)$，所以 $k_{MQ}=0$.

   所以 MQ // 对称轴 x 轴.

   方法二 设抛物线方程为 $y^2=2px$，则过抛物线焦点的直线为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$ $(k\neq 0)$.

   先求交点 P, Q 的坐标，解方程组 $\begin{cases} y^2=2px \\ y=k\left(x-\frac{p}{2}\right) \end{cases}$ 得 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 的坐标

   $x_1=\frac{p(k^2+2-2\sqrt{k^2+1})}{2k^2}$, $y_1=\frac{p(1-\sqrt{k^2+1})}{k}$；$x_2=\frac{p(k^2+2+2\sqrt{k^2+1})}{2k^2}$, $y_2=\frac{p(1+\sqrt{k^2+1})}{k}$.

再解交点 M 的坐标(x_3, y_3)，直线 OP 的方程为 $y=\frac{2k(1-\sqrt{k^2+1})}{k^2+2-2\sqrt{k^2+1}}x$，而准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，则 $x_3=-\frac{p}{2}$代入上式得 $y_3=\frac{p(1+\sqrt{k^2+1})}{k}$，因为 $y_3=y_2$，所以直线 MQ//抛物线对称轴.

3. **解**：设抛物线的方程为 $y^2=2px$，点 $A(2, y_0)$，则 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，从而

$$\overrightarrow{FA}=\left(2-\frac{p}{2}, y_0\right),$$

因此

$$4-p+y_0^2=16,$$

又因为 $y_0^2=4p$，因此 $p=4$. 所以所求方程为

$$y^2=8x.$$

习题 2－4A（第 64 页）

1. 略.
2. (1) $y^2=8x$；(2) $y^2=x$ 或 $x^2=8y$.
3. **解**：方法一　设动点坐标为 (x, y)，由题意知

$\sqrt{(x-0)^2+(y+4)^2}-1=|y-3|$,

化简整理得　$x^2=-16y$.

方法二　由题意知：动点到$(0, -4)$的距离比到 $y=3$ 的距离大 1，即与到直线 $y=4$ 的距离相等，由抛物线定义知动点的轨迹为抛物线，易知 $p=8$.

因此其方程为 $x^2=-16y$.
4. (1) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，$x=-\frac{3}{2}$；(2) $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$，$y=\frac{5}{2}$；(3) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$，$y=-\frac{2}{3}$；

(4) $\left(-\frac{a}{4}, 0\right)$，$x=\frac{a}{4}$.
5. **解**：$y^2=-12x$ 的准线方程为 $x=3$，由题意知 P 点到 $x=3$ 的距离等于 9，所以 $x_p=-6$，$y_p=\pm6\sqrt{2}$，得 $P(-6, \pm6\sqrt{2})$.
6. **解**：双曲线$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{16}=1$ 的中心为 $(0, 0)$，左顶点为 $(-2\sqrt{3}, 0)$，得 $p=4\sqrt{3}$，所以抛物线的方程为 $y^2=-8\sqrt{3}x$.
7. **解**：因为顶点在原点，对称轴为 x 轴，所以可设抛物线方程为：$y^2=-2px$. 准线方程为：$x=\frac{p}{2}$，点 P 到焦点距离为 5，即点 $P(-4, m)$ 到 $x=\frac{p}{2}$的距离为 5，所以$\frac{p}{2}+4=5$，$p=2$.

方程为 $y^2=-4x$，将 $P(-4, m)$代入 $y^2=-4x$，得 $m=\pm4$，所以 m 的值为±4.
8. **解**：焦点在直线 $x-2y+1=0$ 上，且对称轴为坐标轴，顶点在原点，所以其焦点坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$或 $(-1, 0)$，则 $p=1$ 或 2. 所以方程为 $x^2=2y$ 或 $y^2=-4x$.
9. **解**：因为 P 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以可设 P 点坐标为$(t, t^2)(t\in\mathbf{R})$，由点到直线距离公式得

P 到直线距离为：$d=\dfrac{|2t-t^2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{(t-1)^2+3}{\sqrt{5}}$.

因此，当 $t=1$ 时，d 取得最小值，P 点的坐标为(1, 1).

习题 2－4B（第 65 页）

1. **解**：设动点 M 坐标为(x, y)，由题意知 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|4-y|$，化简整理得 $x^2=-4(y-3)$.

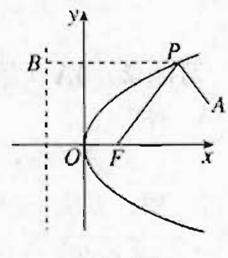
2. **解**：设直线与圆的两交点为 A，B，由题意知：

$$\begin{cases}x+y=0\\x^2+y^2+4y=0\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}或\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$$

所以 $A(0, 0)$，$B(2, -2)$，抛物线顶点在 (0, 0) 且过点 (2, −2).

可设方程为 $x^2=-2py$，将 (2, −2) 代入得 $p=1$，抛物线方程为：$x^2=-2y$.

3. **解**：(1) 由题意知：$|PF|=|PB|$，



（第 3 题）

所以 $|PF|+|PA|=|PB|+|PA|$，当 B, P, A 三点共线时 $|PF|+|PA|$ 有最小值.

所以 $y_p=3$，$x_p=\dfrac{9}{4}$，即点 P 的坐标为$\left(\dfrac{9}{4},3\right)$.

(2) 设 P 点坐标为$(t^2, 2t)(t\in\mathbf{R})$，则 $|PM|^2=(t^2-m)^2+(2t-0)^2$.

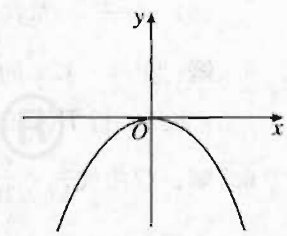
令 $t^2=u(u\geqslant 0)$，

$$|PM|^2=u^2+(4-2m)u+m^2$$
$$=[u+(2-m)]^2+m^2-(2-m)^2.$$

①当 $m<2$ 时，上式在$[0, +\infty)$上为增函数，当 $u=0$ 时，$|PM|_{\min}=|m|$，此时点 P 的坐标为 (0, 0)；

②当 $m\geqslant 2$ 时，上式在$(-\infty, m-2]$上为减函数，上式在$[m-2, +\infty)$上为增函数，所以当 $u=m-2$ 时，$|PM|_{\min}=2\sqrt{m-1}$，此时 P 点坐标为$(m-2, 2\sqrt{m-2})$.

4. **解**：建立如图所示的坐标系，设抛物线方程为 $x^2=-2py$，过点 (6, −4)，所以 $p=\dfrac{9}{2}$，抛物线方程为 $x^2=-9y$. 当水面上升 1 m 时，即当 $y=-3$ 时，此时 $x=\pm 3\sqrt{3}$，所以水面宽为 $6\sqrt{3}\approx 10.4$ m.



（第 4 题）

练习 A（第 70 页）

1. **解**：$\begin{cases}y=kx+2\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y，得 $(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$，

$\Delta=144k^2-24(2+3k^2)=72k^2-48$，

①当 $\Delta>0$，即：$k>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时，相交；

②当 $\Delta=0$，即：$k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时，相切；

③当 $\Delta<0$，即：$-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$时，相离.

2. **解**：设直线 l 的方程为 $y=2x+b$，代入 $y^2=4x$，得 $4x^2+(4b-4)x+b^2=0$.

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{5}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=5$，得 $b=-2$.

因此直线方程为 $y=2x-2$.

3. **解**:抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. 设过点 F 的直线方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，代入抛物线方程得 $y^2-2pmy-p^2=0$，所以 $y_1y_2=-p^2$，得$|y_1||y_2|=p^2$.

练习 B（第 70 页）

1. **解**：设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,所以 $x_1+x_2=6$,$y_1+y_2=2$.

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1\\ \frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{9}=1\end{cases}$ 两式相减得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{36}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{9}=0$,

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}$.

所以 直线方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-3)$，即 $3x+4y-13=0$.

2. **证明**：不妨设抛物线方程为 $y^2=2px$，弦 AB 与对称轴交于$C(x,0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$.

因为 A，B，C 三点共线，所以 $x=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$.（*）

将 $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$，$x_2=\frac{y_2^2}{2p}$代入(*)式，得 $x=-\frac{1}{2p}y_1y_2$.

因为 $OA\perp OB$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 因此 $y_1y_2=-4p^2$，$x=2p$.

所以结论成立.

习题 2-5A（第 70 页）

1. **解**：设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，得 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=4$.

$\begin{cases}x_1^2+4y_1^2=36\\ x_2^2+4y_2^2=36\end{cases}$ 两式相减得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，即直线的斜率为$-\frac{1}{2}$.

所以直线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$，即 $x+2y-8=0$.

2. **解**:设直线 $x=t(|t|\leqslant 2)$，则 P 点的坐标为$\left(t,\ \sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\right)$，$Q$ 点的坐标为$\left(t,\ -\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\right)$.

$$l_{AP}:y=\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\frac{x+2}{t+2};\quad ①$$

$$l_{BQ}:y=-\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\frac{x-2}{t-2}.\quad ②$$

由①②得 $t=\frac{4}{x}$，③

将③代入①化简整理得 $x^2-2y^2=4$. 因此，M 点的轨迹为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

3. **解**：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=x+m\end{cases}$ 消去 y，得 $5x^2+8mx+4m^2-4=0$，由弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，

得 $|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$. 因此当 $m=0$ 时，$|AB|_{\max}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

4. **解**：$p=4$，焦点 $F(2,0)$.

l_{AB}：$y=2(x-2)$ 代入抛物线方程 $y^2=8x$，得 $x^2-6x+4=0$.

因此 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=10$.

5. $a=\pm1$.

习题 2－5B（第 71 页）

1. **解**：设抛物线方程为 $y^2=2px$，则 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=2x+1\end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2+(4-2p)x+1=0$.

因为 $|PQ|=\sqrt{15}$，由弦长公式得 $p=6$ 或 $p=-2$.

所以 $y^2=12x$ 或 $y^2=-4x$.

2. $k<-\frac{\sqrt{6}}{2}$或$k>\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. **解**：①若斜率不存在，则显然不合题意.

②当 $k=0$，$y=4$. 当 $k\neq0$，设直线方程斜率为 k，

则 $\begin{cases}y^2=8x\\ y-4=k(x-2)\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(8k-4k^2-8)x+(4-2k)^2=0$.

由判别式为零得 $k=1$，

所以方程为 $x-y+2=0$.

4. **解**：由题可设 $A\left(|AF|\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2},\ |AF|\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$，代入 $y^2=2px$（$p>0$），

得 $|AF|^2-2\sqrt{2}p|AF|-2p^2=0$，所以 $|AF|=\sqrt{2}p+2p$.

同理可设 $B\left(\frac{p}{2}-|BF|\cdot\cos\frac{\pi}{4},\ -|BF|\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$，解得 $|BF|=2p-\sqrt{2}p$.

所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\sqrt{2}p+2p}{2p-\sqrt{2}p}=3+2\sqrt{2}$.

5. **解**：由题意得双曲线实轴长为 2，弦 PQ 长为 4. 如果直线 l 的斜率 k 存在，则可设通过点 $A(\sqrt{3},0)$ 的直线方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$，代入双曲线方程可得 $(2-k^2)x^2+2\sqrt{3}k^2x-3k^2-2=0$.

求 x_2-x_1，$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. 再利用距离公式，求得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 从而求得 l 的方程为

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{3})$. 可以验证直线 $x=\sqrt{3}$也符合题意.

6. (1) 椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

(2) 所求直线 PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$.

巩固与提高（第 73 页）

1. (1) C; (2) D; (3) A.

2. (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; (2) $4a$；(3) $(\pm\sqrt{2}, 1)$; (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<k<\frac{\sqrt{3}}{2}$; (5) -3.

3. **解**：双曲线焦点$(4,0)$，$(-4,0)$，设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，点 P 在椭圆上，与两焦点的距离和为 $2a=16$，所以 $a^2=64$，$b^2=48$. 因此椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

4. **解**：椭圆有 $c=4$，$e=\frac{4}{5}$，因此双曲线的离心率 $e=\frac{14}{5}-\frac{4}{5}=2$，所以 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，双曲线方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$.

5. **解**：椭圆的左顶点 $A(-2, 0)$，设过 A 点的一条边所在直线方程为 $y=k(x+2)$，则过 A 点的另一边为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$，由弦长公式得 $|AB|^2=\frac{16(1+k^2)}{(2k^2+1)^2}$，$|AC|^2=\frac{16k^2(1+k^2)}{(k^2+2)^2}$. 又因为$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 $|AB|^2=|AC|^2$，得 $(k^2-1)(4k^4+7k^2+4)=0$，解得 $k^2=1$，因此 $BC^2=AB^2+AC^2=\frac{64}{9}$. 所以斜边 BC 长为$\frac{8}{3}$.

6. **解**：$\begin{cases}y^2=4x\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，由弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=20$，得 $k=\pm\frac{1}{2}$，直线 AB 的方程为 $x-2y-1=0$ 或 $x+2y-1=0$.

7. **解**：设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$M(m, n)$，所以 $x_1+x_2=2m$，$y_1+y_2=2n$，

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$ 两式相减，得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$.

因为$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，所以$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{n}{m}=-\frac{b^2}{a^2}$.

假设 $AB\perp OM$，则 $k_{AB}k_{OM}=-1$，得 $a^2=b^2$ 与已知矛盾，所以不能垂直.

8. **解**：设 $A(x_1, \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1)$，$B(x_2, -\frac{2\sqrt{5}}{5}x_2)$，$P(x, y)$. 由 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$有

$$(x_1-x_2)^2+\frac{4}{5}(x_1+x_2)^2=20.$$

化简得 $5(x_1-x_2)^2+4(x_1+x_2)^2=100$.

又由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$可知

$$x=x_1+x_2,$$

$$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}(x_1-x_2).$$

因此 $x_1=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}y\right)$，$x_2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}y\right)$. 从而有

$$5\cdot\frac{5}{4}y^2+4x^2=100.$$

化简得 P 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

自测与评估（第 74 页）

1. (1) $2\sqrt{5}$；(2) $x^2=\sqrt{2}y$ 或 $y^2=-4x$；(3) $(5,0)$，$(-5,0)$；(4) $2a+2b$.
2. $P(3,4)$ 或 $P(-3,-4)$或 $P(-3,4)$或 $P(3,-4)$.
3. **解**：抛物线方程为 $y^2=-12x$，设 $P(-12t^2,12t)$，由点 $A(a,0)$，则

$$|AP|^2=(12t^2+a)^2+144t^2=144\left(t^2+\frac{a+6}{12}\right)^2-36-12a.$$

所以 $f(a)$的表达式为：$f(a)=\begin{cases}2\sqrt{-3a-9} & (a\leqslant 6)\\ |a| & (a>6)\end{cases}$

4. $\frac{x^2}{\frac{32}{5}}-\frac{y^2}{\frac{18}{5}}=1.$
5. **解**：①当 k 不存在时，$x=0$ 满足条件；

②当 $k=0$ 时，$x=p$ 满足条件；

③当 k 存在且 $k\neq 0$ 时，

$\begin{cases}y^2=2px\\ y=kx+p\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(2pk-2p)x+p^2=0$，$\Delta=0$ 解得 $k=\frac{1}{2}$，直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+p$.

6. (1) $k<4$，$(0,\pm\sqrt{5})$；(2) $4<k<9$，$(0,\pm\sqrt{5})$.

Ⅵ 反馈与评价

一、知识与方法测试（100 分钟　满分 100 分）

一、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 抛物线 $y=4ax^2$ $(a\neq 0)$ 的焦点坐标为（　　）.

(A) $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$　(B) $\left(0, \frac{1}{16a}\right)$　(C) $\left(0, -\frac{1}{16a}\right)$　(D) $\left(\frac{1}{16a}, 0\right)$

2. 若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1, 0)$, $F_2(3, 0)$，则其离心率为（　　）.

(A) $\frac{3}{4}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{4}$

3. 双曲线与椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$共焦点，且一条渐近线方程是$\sqrt{3}x-y=0$，则此双曲线方程为（　　）.

(A) $y^2-\frac{x^2}{3}=1$　(B) $\frac{y^2}{3}-x^2=1$　(C) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　(D) $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

4. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点F 作倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的弦AB，则 $|AB|$ 的值为（　　）.

(A) $\frac{8}{3}\sqrt{7}$　(B) $\frac{16}{3}$　(C) $\frac{8}{3}$　(D) $\frac{16}{3}\sqrt{7}$

5. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, m>b>0)$的离心率互为倒数，那么以 a，b，m 为边长的三角形一定是（　　）.

(A) 锐角三角形　(B) 直角三角形　(C) 钝角三角形　(D) 等腰三角形

6. 给出下列曲线①$4x+2y-1=0$，②$x^2+y^2=3$，③$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，④$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，其中与直线 $y=-2x-3$有交点的所有曲线是（　　）.

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①②③　(D) ②③④

7. 若椭圆的对称轴在坐标轴上，短轴的一个端点与两个焦点组成一个正三角形，焦点到椭圆上点的最短距离为$\sqrt{3}$，这个椭圆方程为（　　）.

(A) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　(B) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$

(C) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$　(D) 以上都不对

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$A$，$F$ 分别是它的左顶点和右焦点，设 B 点坐标为（0，b），则$\angle ABF$ 等于（　　）.

(A) 45°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 120°

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 已知方程$\frac{x^2}{2+\lambda}-\frac{y^2}{1+\lambda}=1$表示双曲线，则 λ 的取值范围为____________.

10. 抛物线的焦点为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的左焦点，顶点在椭圆中心，则抛物线方程为________________________.

11. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，如果 $PF_1\perp PF_2$，则点 P 到 x 轴的距离为____________.

12. 已知圆 C：$(x+1)^2+y^2=25$ 及点 $A(1, 0)$，Q 为圆上一点，AQ 的垂直平分线交 CQ 于 M，

则点 M 的轨迹方程为________________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 44 分）

13. （10 分）求直线 $y=\frac{1}{3}x+2$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 的两个交点和原点构成的三角形的面积.

14. （10 分）设 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点，已知 P，F_1，F_2 是一个直角三角形的三个顶点，且 $|PF_1|>|PF_2|$，求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

15. （12 分）过点 $A(4,\ -2)$ 任作一直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 交于不同的两点 P，Q. 问：抛物线 $y^2=2x$ 上是否存在点 B，使 $\angle PBQ$ 总等于 $90°$？证明你的结论.

16. （12 分）M 是抛物线 $C: y^2=4ax(a>0)$ 上的动点，当 M 到 $A(1,\ 0)$ 的距离 $|MA|$ 最小时，M 的位置为 M_0，若 $|M_0A|<1$，求 a 的取值范围.

知识与方法测试参考答案

一、选择题

1. B. 2. C. 3. C. 4. B. 5. B. 6. D. 7. C. 8. C.

二、填空题

9. $(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$. 10. $y^2=-4\sqrt{5}x$. 11. $\frac{16}{5}$. 12. $\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{21}=1$.

三、解答题

13. **解**：由 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+2 \\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $x^2-4x-24=0$，设两个交点为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $|x_1-x_2|=$

$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{7}$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.

14. **解**：由已知得 $|PF_1|+|PF_2|=6$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$.

根据直角的不同位置，分两种情况：

若 $\angle PF_2F_1=90°$，则 $|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，即 $|PF_1|^2=(6-|PF_1|^2)+20$，

解得 $|PF_1|=\frac{14}{3}$，$|PF_2|=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$.

若 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$. 即 $20=|PF_1|^2+(6-|PF_1|)^2$，

解得 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$.

15. **解**：设存在直线 $l: x-4=m(y+2)$，由 $\begin{cases} y^2=2x \\ x-4=m(y+2) \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4(m+2)=0$.

设 $B(x_0,\ y_0)$，$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，所以 $k_{PB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{2}{y_1+y_0}$，$k_{QB}=\frac{2}{y_2+y_0}$.

由 $PB\perp QB$ 得 $k_{PB}\cdot k_{QB}=-1$， 所以 $\dfrac{4}{(y_1+y_0)(y_2+y_0)}=-1$，

即 $y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2=-4$.

将 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4(m+2)$ 代入得 $-4(m+2)+2my_0+y_0^2=-4$，

即 $2m(y_0-2)+y_0^2-4=0$. ①

令 $y_0=2$，则①式恒成立，且当 $y_0=2$ 时，$x_0=2$.

所以存在满足题设的点 $B(2, 2)$.

16. **解**：设 $M(x, y)$，则 $y^2=4ax$，所以 $|MA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2(1-2a)x+1}$，

即 $|MA|=\sqrt{[x-(1-2a)]^2+4a(1-a)}$.

因为 $x\geqslant 0$，

所以 若 $1-2a<0$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，则当 $x=0$ 时，$|MA|$ 取最小值 1.

若 $1-2a\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则当 $x=1-2a$ 时，$|MA|$ 取最小值 $2\sqrt{a(1-a)}$.

由 $\begin{cases}0<a\leqslant\dfrac{1}{2}\\2\sqrt{a(1-a)}<1\end{cases}$ 得 $0<a<\dfrac{1}{2}$，即 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

二、评价建议

1. 笔试评价：可针对每一节内容进行一次小测验，在学完本章内容后进行一次综合性测试. 考查应该注重知识的理解和应用，体现课程标准的要求，不应该追求区分度，不宜过多考查记忆性的内容，其中一部分笔试可逐步采取开卷的形式，这样一方面避免引导学生死记硬背，另一方面也可以减轻学生心理负担.

2. 在学习椭圆、双曲线、抛物线的定义时，要充分利用教科书中提供的课件，引导学生实践探究. 教师要用记录卡片的形式记录学生学习探究的情况，如遇到的疑难问题及其解答，在探究活动中最出色的表现，被否定过的观点，通过努力最后解决的难题，从中了解学生对知识与技能的学习情况.

3. 在学习了圆锥曲线的一种形式的标准方程和几何性质后，建议教师组织学生以小组讨论形式得出其他形式的标准方程和相应的几何性质，在分组讨论的过程中，教师应该记录学生在讨论活动中的表现和进步等情况.

4. 圆锥曲线与实际生活有着密切的联系，学习过程中，要让学生提前搜集与一些圆锥曲线有关的资料，了解它们在生产和科学技术中的应用，教师要引导学生在学习档案中收录一些重要资料. 在学习本章后，教师要指导学生结合搜集的材料写出有关小论文，并进行评选，选出优秀的论文在班级中进行交流.

第三章

空间向量与立体几何

I 课程目标

一、知识与技能目标

1. 了解空间向量的概念，体会向量及其运算由平面向空间推广的过程.
2. 了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.
3. 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
4. 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直.
5. 理解直线的方向向量与平面的法向量.
6. 能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直、平行关系.
7. 能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理.
8. 能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

二、过程与方法目标

1. 通过本章的学习、研究，能在平面向量的基础上，加深领悟向量处理问题的两种方法——向量法，坐标法.

2. 经历概念的形成过程、解题的思维过程，体验数形结合思想的指导作用.

3. 经历用向量方法解决某些简单的几何问题，体会向量是一种处理几何问题的工具，鼓励学生灵活选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过大量实例，体会向量语言或运算在解决数学问题中的工具作用.

2. 向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，通过本章的学习，体会它们之间的联系.

3. 本章的学习较多地运用了几何直观、类比、特殊到一般等思维方法，教学时应引导学生运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程，并应注意维数增加所带来的影响.

4. 通过本章学习，逐步认识向量的科学价值、应用价值和文化价值，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心.

Ⅱ 教材分析

一、编写特色

1. 让学生体会由平面向量扩展为空间向量的过程，体会平面向量与空间向量的相同点与区别.
2. 让学生体会如何把空间的基本性质转化为向量表示.
3. 建立空间向量的基本结构：空间向量基本定理、共面向量定理、共线向量定理.
4. 贯彻用代数的通性、通法解决几何问题，设未知数列方程解方程.
5. 给出用向量解决立体几何问题的一般方法.

二、内容结构

1. 内容编排

本章主要包括：空间向量及其运算，空间向量在立体几何中的应用两大节.

第一大节，空间向量及其运算. 教材立足平面向量基础，把平面向量的概念及线性运算推广到空间，引导学生运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程. 接着讲了空间向量的基本定理（向量共线的条件，向量共面的条件，空间向量基本定理），它是将几何问题转化为向量表达式，进而把学习的重点转到使用向量代数方法解决立体问题的奠基性定理. 空间向量的数量积是平面向量的数量积的一种推广，接着把向量数量积的计算坐标化，通过向量的坐标运算获得空间向量平行和垂直的条件，推导空间直角坐标系上的度量公式，包括求向量的长度和夹角公式.

第二大节是空间向量在立体几何中的应用，教材先给出位置向量的概念，然后引出直线的向量参数方程，用向量方法求证直线与直线平行，直线与平面平行，平面与平面平行，用向量运算求证两条直线垂直或求两条直线所成的角，引入平面的法向量，证明了线面垂直的判定定理，并通过向量的平行或垂直条件来讨论平面的平行或垂直. 这一部分是立体几何位置关系判断的核心内容，也是用向量方法处理几何问题的具体体现. 三垂线定理的论证是用向量方法证明几何定理的又一体现. 空间角（直线与直线，直线与平面，平面与平面），空间距离（点与点，点与线，点与面，线与线，线与面，面与面），在搞清各自定义的同时，都是以向量为工具来进行的度量计算，其中直线的方向向量，平面的法向量是解决以上问题的桥梁. 本大节对学生理解向量概念和运用向量解决问题十分重要.

2. 地位与作用

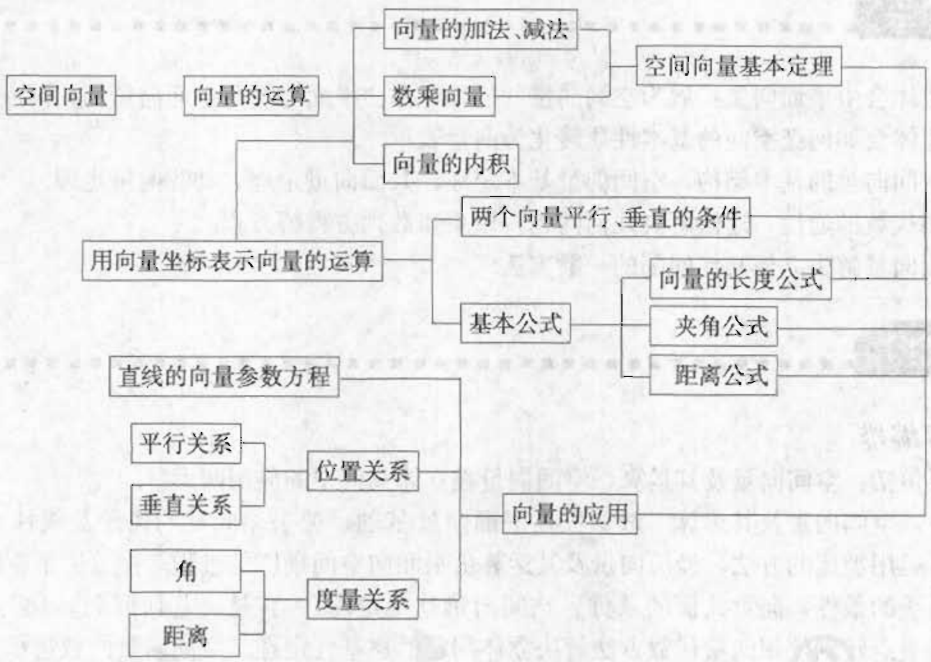
向量是数学中重要的基本概念，它既是代数对象，又是几何对象. 作为代数对象，向量可以运算. 作为几何对象，向量有方向，可以刻画直线与平面之间的位置关系；向量有长度，可以刻画长度、面积、体积等几何度量问题. 向量由大小和方向两个因素确定，大小反映了向量数的特征，方向反映了向量形的特征，因此是集数形于一身的数学概念，是数学中数形结合思想的体现，它应成为高中数学的基础知识，同样它在物理学、工程、经济学及其他科学技术中都有着广泛地应用.

3. 重点与难点

重点是向量的线性运算和数量积运算及其应用.

难点是空间向量的共线条件、共面条件和空间向量分解定理，理解了这些定理就能很好地掌握空间向量的各种知识及其关系.

4. 本章知识结构



三、课时分配

本章教学时间约需 13 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　空间向量及其运算　约 6 课时

3.1.1　空间向量的线性运算　1 课时

3.1.2　空间向量的基本定理　2 课时

3.1.3　两个向量的数量积　1 课时

3.1.4　空间向量的直角坐标运算　2 课时

3.2　空间向量在立体几何中的应用　约 6 课时

3.2.1　直线的方向向量与直线的向量方程　1 课时

3.2.2 平面的法向量与平面的向量表示 2 课时
3.2.3 直线与平面的夹角 1 课时
3.2.4 二面角及其度量 1 课时
3.2.5 距离 1 课时
本章小结 1 课时

四、教法与学法建议

3.1 空间向量及其运算

本大节主要包括空间向量的概念，空间向量的线性运算，空间向量的基本定理，两个向量的数量积，空间向量的直角坐标运算.

3.1.1 空间向量的线性运算

本小节主要包括空间向量的概念，空间向量的加法、减法和数乘向量运算.

1. 本小节在数学 4 第二章平面向量的基础上，类比地引入了空间向量的概念、表示方法、相同或相等关系，空间向量的加法、减法、数乘及这三种运算的运算律. 最后举例说明了这些知识的应用.

2. 通过本小节的教学，应使学生达到如下要求：

（1）理解空间向量概念，掌握空间向量的几何表示法和字母表示法；

（2）会用图形说明空间向量加法、减法、数乘向量及它们的运算律；

（3）能运用空间向量的运算意义及运算律解决简单的立体几何中的问题.

3. 本小节的重点是空间向量的运算和运算律，难点是应用向量解决立体几何中的问题.

4. 空间向量的定义、表示方法及其相等关系都与平面向量相同，可在复习平面向量的定义、表示方法及其相等关系后直接给出，然后说明：平面向量仅限于研究同一平面内的平移，而空间向量研究的是空间中的平移；平面上，若以两个同向向量为对边可构成平行四边形，则这两个向量相等，在空间这个结论同样成立.

关于两个向量的比较，我们只限于研究它们是否相等，而不研究它们哪个大哪个小，原因是每个向量都由长度和方向两个因素构成，其中长度虽可比较大小，但方向无法比较大小，所以，一般地说，向量不能比较大小.

5. 对于空间任意两向量都是共面向量的认同，学生可能会受向量的基线位置关系的干扰. 可先让学生弄清向量与向量的基线的区别，同一向量在平移前后向量相同或相等，但基线不同；在此基础上，紧扣向量相同或相等概念，用教科书中图 3－3 解决疑问，还可进一步强调：由于空间任意两个向量都可转化为共面向量，所以凡涉及空间两个向量的问题，平面向量中有关结论仍适用于它们（到空间向量的分解定理和坐标表示及坐标运算时才会显现它们的区别）；最后须说明：图 3－3 中，由于 O 点可以是空间任意一点，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 确定的平面不是一个，而是一个互相平行的平面的集合. 但研究问题时，一般只要在其中一个平面内考虑即可.

6. 空间向量加法、减法、数乘向量的意义及运算律与平面向量类似，教学时要加强直观说理，结合式与图之间的互相转换加深理解，切实掌握，但不要求严格证明.

关于图 3-5，建议在用它引导学生验证理解加法结合律后，再运用此图说明：

(1) 首尾相接的若干向量（如图中的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$）之和，等于由起始向量的始点指向末尾向量的终点的向量（如图中的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$），常把这个和向量叫做“封口向量”. 因此，求空间若干向量之和时，可通过平移将它们转化为首尾相接的向量.

(2) 首尾相接的若干向量若构成一个封闭图形，则它们的和为 $\mathbf{0}$.

(3) 两个向量相加的平行四边形法则在空间仍成立，因此求始点相同的两个向量之和时，可考虑用平行四边形法则.

7. 例 1 是向量算式的化简问题. 教学时，一要注意交待解题格式，二要注意强调每步观察所涉及的向量在图形中的位置特点，思考可用知识，选择解题方法的过程，强化数形结合思想，此外结合本例还应说明以下两点：

第一，第 (1) 小题的解答中，化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 时是转化为用三角形法则来化简的，这是因为图中存在现成的以 $\overrightarrow{AB}$ 终点为始点且与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量 $\overrightarrow{BC}$. 但观察到 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 始点相同，也应想到是否可用平行四边形法则化简. 若要用平行四边形法则，则图中是否具备运用的条件（图中本身就有现成的平行四边形）. 应以图中是满足三角形法则，还是平行四边形法则来观察或构造图形.

就此小题，还可说明：始点相同的三个不共面向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所示向量，这是平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广.

第二，第 (3) 小题的解答中，利用 (1) 中的思想方法和数乘向量的几何意义将 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})$ 通过构图化简为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CM}$（其中 M 为 CB' 中点）. 本小题可先让同学解答，共同讨论，以求最佳求解路径.

8. 例 2 是向量运算在立体几何中的简单应用. 通过引导学生分析所证目标，借助图形进行向量运算，一方面 $\overrightarrow{MN}$ 可看作 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ 的封口向量；另一方面又可看作 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ 的封口向量. 然后利用 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{CN}$ 使问题获证. 难点是寻求表示 $\overrightarrow{MN}$ 的思路.

3.1.2 空间向量的基本定理

本小节主要包括向量共线的条件，向量共面的条件，空间向量分解定理.

1. 本小节教科书类比平面向量有关知识，给出了空间向量共线或平行的定义、表示和空间共线向量定理. 介绍了空间向量与平面平行(共面)的概念及表示，共面向量定理及其简单应用. 引入空间向量基本定理，介绍了空间向量的基底的概念，举例说明用空间三个不共面向量表示出给定的向量的方法.

2. 通过本小节的教学，应使学生达到下列要求：

(1) 了解共线或平行向量概念，向量与平面平行(共面)的意义，掌握它们的表示法；

(2) 理解共线向量定理，共面向量定理和空间向量分解定理，理解空间任一向量可用空间不共面的三个已知向量唯一线性表示，会在简单问题中选用空间三个不共面向量作基底，表示其他的向量；

(3) 会用以上知识解决立体几何中有关的简单问题.

3. 本小节的重点是空间向量共线和共面的条件，空间向量分解定理，难点是对这些定理条件的理

解与运用，空间向量分解定理的空间作图.

4. 由于空间向量的平行(共线)的定义，共线向量定理等与平面向量完全相同，都是平面向量的相关知识向空间的推广，所以本小节的教学应继续紧扣推广这一重要环节，因此教学中应注意以下几点：

(1) 继续明确：当我们说 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线时，表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的两基线既可能是同一直线，也可能是平行直线；当我们说 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，也具有同样的意义.

(2) 要引导学生运用确定平面的条件判定这类空间向量问题一定能转化为平面向量问题，因此才可以说空间的上述概念“与平面一样”，平面内的上述定理“在空间也成立”，从而确认把上述平面内的概念、定理推广到空间的合理性与正确性.

(3) 为了学生后续学习的方便，宜将共线向量定理中的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互换，即将 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 换成 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 换成 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(4) 不必要求学生会证明共线向量定理，只要求他们理解此定理在空间仍成立，对于有兴趣探索其证明方法的学生，可引导他们先把定理分解为两个命题：

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$：

① $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow$存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

② 存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Rightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

再引导他们分别根据确定平面的条件及命题的已知条件将问题转化为平面问题，仿照平面内证明此定理的方法进行论证.

(5) 关于共线向量定理的应用，应引导学生明确两个方面：

① 当已知空间向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，根据必要性可得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 是唯一确定的实数，就是说，必要性是共线向量的性质定理；

② 当存在唯一实数 λ，使空间两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，可以根据充分性判定 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，就是说充分性是空间向量共线的判定定理，这里应要求学生注意：如果要用此结论判定 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的基线平行，还需 $\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{b}$）的基线上有一点不在 $\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{a}$）的基线上. 明确这两方面，有益于他们面临具体问题时灵活运用此定理.

(6) 在 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 中，对于确定的 λ 和 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示空间中与 $\boldsymbol{a}$ 平行或共线且长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|$ 的所有向量.

5. 关于共面向量的意义和共面向量定理的教学，可用对比法教学，但需注意以下问题：

(1) 共面向量与共线向量的定义对象不同，但定义形式相同，可用对比教学向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面 α 平行，是用 $\boldsymbol{a}$ 的基线 l 与 α 平行或在 α 内定义的，因此，$\boldsymbol{a}/\!/\alpha$ 与 $l/\!/\alpha$ 既有联系也有区别，要引导学生注意其共同点与不同点；

(2) 教学共面向量定理前，应结合实例（图 3－9）说明空间三个向量既可能共面，也可能不共面，使学生看到学习此定理的必要性；

(3) 共面向量定理中，条件的必要性实际上就是平面向量基本定理，因此，教学共面向量定理，可在复习平面向量基本定理的基础上，引导学生明确：该定理说的是三个向量共面的性质；它在空间也成立，进而指出研究空间向量时，常需判定若干向量共面；

(4) 共面向量定理的证明中，证明必要性时，因已知条件和求证结论与平面向量基本定理吻合，学生不难接受，证明充分性时，可将教科书中的作图（图 3－10）证明叙述如下：

因为 $x\boldsymbol{a}$、$y\boldsymbol{b}$ 分别与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线，

所以 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$ 都在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 确定的平面内.

又因为 $xa+yb$ 是以 xa，yb 为邻边的平行四边形的一条对角线所表示的向量，并且此平行四边形在 a，b 确定的平面内，

所以 $p=xa+yb$ 在 a，b 确定的平面内，即 p 与 a，b 共面．

向量问题的表述学生比较生疏，教学中应注意适当训练．

当 p，a，b 都是非零向量时，共面向量定理实际上也是 p，a，b 三条基线共面的充要条件，但用于判定时，还需证明其中一直线上有一点在另两条直线确定的平面内．

6．空间向量分解定理

空间向量分解定理与平面向量基本定理类似．区别在于基底中多了一个向量，从而分解结果中也多了一"项"，证明的思路，步骤也基本相同．因此为了充分调动学生参与教学过程，可将空间向量分解定理与平面向量基本定理进行对比教学．

（1）复习平面向量基本定理及其证明，并将其证明过程归纳为：

①平移：将 e_1，e_2，a 平移到同一个始点；

②平行投影：过 a 平移后所得向量的终点，分别作 e_1，e_2 平移后所在直线的平行线，并与这两条直线分别相交，得 a 在 e_1，e_2 方向上的分向量；

③依据共线向量定理，分别用 e_1，e_2 表示 a 在 e_1，e_2 方向上的分向量；

④求分向量的和，代入，定理得证．

（2）引导学生比较空间向量基本定理与平面向量基本定理的相似之处与不同之处，思考空间向量基本定理的证明是否可仿照平面向量基本定理的证明思路进行．

在仿照平面向量基本定理进行证明时，第①步平移，学生容易进行；困难在于第②步作"平行投影"，但通过实际作图，学生是不难理解的．

（3）对于 $p=xa+yb+zc$ 的唯一性，只要求学生知道和承认，不要求学生学会证明．既可以从定理的证明过程（包括作图过程）逐步证明每步都唯一（相等的向量视为一个向量），可得最终的结论唯一．也可这样证明：

设另有不同于 x，y，z 的实数 x'，y'，z'，使 $p=x'a+y'b+z'c$ 成立，

则因为 $p=xa+yb+zc$，

所以 $xa+yb+zc=x'a+y'b+z'c$，

所以 $(x-x')a+(y-y')b+(z-z')c=\mathbf{0}$．

又因为 a，b，c 不共面，

所以 $x-x'=0$ 且 $y-y'=0$ 且 $z-z'=0$，

所以 $x=x'$ 且 $y=y'$ 且 $z=z'$，

所以 $p=xa+yb+zc$ 唯一．

（4）空间向量基本定理说明，用空间三个不共面的已知向量组 $\{a, b, c\}$ 可以线性表示出空间任意一个向量，而且表示的结果是唯一的．

对于基底 $\{a, b, c\}$ 除了应知道 a，b，c 不共面，还应明确：

① 空间任意三个不共面向量都可以作为空间向量的一个基底；

② 由于 $\mathbf{0}$ 可视为与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面，所以，三个向量不共面就隐含着它们都不是 $\mathbf{0}$；

③ 一个基底是指一个向量组，一个基向量是指基底中的某一个向量，二者是相关联的不同概念．

7. 例 1 是共面向量定理的应用，通过分析条件与结论，应明确证题目标，探求$\overrightarrow{MN}$可用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 两向量表示的关系式，可从图形中借助三角形法则或平行四边形法则一步步达到目标.

可适当引申：条件不变，结论变为：求证 $MN\parallel$平面 $AA'B'B$.

例 2，例 3 是空间向量分解定理的应用.

选定空间不共面的三个向量作基向量，并用它们表示出指定的向量，是用向量解决立体几何问题的一项基本功，教学时，应引导学生结合已知和所求观察图形，联想相关的运算法则和公式等，表示所需向量.

如例 3，最终要求用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示出$\overrightarrow{OG}$，据此观察图形，可见$\overrightarrow{OG}$在$\triangle OMG$中，联想到向量加法的三角形法则，可得$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}$.

与最终目标比较可知$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{MG}$都不是目标要求的向量，故应分别将它们作为新的需表示的向量，结合已知观察图形，考察它们分别可用什么向量表示.

由于 M 是 OA 中点，故可得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，这已符合目标要求. 依题意$\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$，但$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$，而$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

这样，就将所涉及的向量都转化为符合最终目标要求的向量了.

3.1.3 两个向量的数量积

1. 本小节在平面向量的夹角和向量长度的概念的基础上，引入了空间向量的夹角和向量长度的概念和表示方法，介绍了空间两个向量的数量积（内积，点积）的概念、计算方法、性质和运算律，并举例说明，利用内积解决问题的基本方法步骤.

2. 通过本小节的教学，应使学生达到下列要求：

（1）掌握空间向量夹角和模的概念及表示方法，掌握两个向量的数量积的概念、性质、计算方法及运算律；

（2）掌握两个向量的数量积的主要用途，会用它解决立体几何中的一些简单问题.

3. 本小节的重点是两个向量的数量积的计算方法及其应用，难点是两个向量数量积的几何意义以及把立体几何问题转化为向量计算问题.

4. 由于空间任意两个向量都可转化为共面向量，所以空间两个向量的夹角的定义、取值范围、两个向量垂直的定义和表示符号及向量的模的概念和表示符号等，都与平面向量相同.

对于表示两个向量的夹角的符号$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的教学，除了要求学生理解$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$外，还应引导学生明确以下几点：

（1）防止将$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$与表示点的符号$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$混淆；

（2）防止混淆下图中的两个向量的夹角：图 3 - 1 的$\angle AOB=\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，图 3 - 2 的$\angle AOB=\pi-\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，就是说$\langle-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\langle\overrightarrow{OA},-\overrightarrow{OB}\rangle=\pi-\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$.

这也是以后求立体几何中两个向量夹角时常会遇到的情况.

5. 空间两个向量的数量积的意义，与平面上两个向量的数量积的意义实际上是一样的. 学生只要理解任意两个向量共面，就可把空间两个向量的数量积转化为平面内两个向量的数量积.

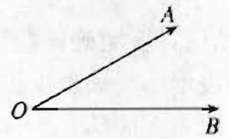


图 3－1

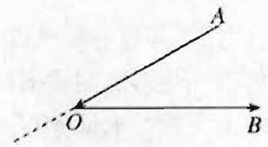


图 3－2

6. 数量积的运算律可只要求学生类比平面向量数量积运算律记忆，会用，不要求学生会证明. 以下的证明，仅供教师参考.

(1) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$的证明：

当$\lambda=0$时，等式显然成立.

当$\lambda\neq 0$时，因为 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=|\lambda|(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)$

所以 若$\lambda>0$，则$|\lambda|=\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

若$\lambda<0$，则$|\lambda|=-\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\lambda[|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)]=\lambda(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

综上所述，得 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 的证明：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明：

分配律等价于各个向量和的投影等于各个向量投影的和.

如图 3－3，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量为$\boldsymbol{a}_0$，作轴 l 与$\boldsymbol{a}$ 共线.

则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 又设$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}$确定平面$\alpha$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}$确定平面$\beta$，分别过 B，C 作 $BD\perp OA$ 于 D，$CE\perp OA$ 于 E.

则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$， $OE=OD+DE$.

即 $\boldsymbol{a}_0\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{c}$.

上式两边同乘$|\boldsymbol{a}|$，则得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

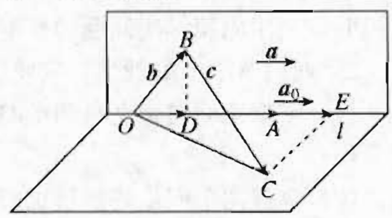


图 3－3

7. 本小节安排了三个例题，目的在于说明用向量解决立体几何中一些典型问题的基本思考方法，因此，教学时要注重引导学生分析题意，寻求解题思路，可按如下过程引导学生思考：

(1) 如何把已知的几何条件转化为向量表示？

(2) 一些未知的向量能否用基向量或其他已知向量表示？

(3) 如何对已经表示出来的向量进行运算，才能获得需要的结论？

3.1.4 空间向量的直角坐标运算

本小节主要内容：空间向量的坐标表示，空间向量的坐标运算，平行向量、垂直向量坐标之间的关系，两个向量夹角与向量长度的坐标计算公式.

本小节的重点是向量的坐标运算，夹角公式，距离公式，空间向量平行和垂直的条件. 难点是向量坐标的确定，公式的应用.

1. 通过复习空间直角坐标系，空间任一点 P 的坐标确定的办法如下：过 P 分别作三个坐标平面的

平行平面（或垂面），分别交坐标轴于 A，B，C 三点，$|x|=OA$，$|y|=OB$，$|z|=OC$. 当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 方向相同时，$x>0$，反之 $x<0$. 同理可确定 y，z，可以长方体为模型复习讲解.

2. 空间向量的坐标表示，其唯一性可由向量分解定理的唯一性得到证明，由此可说明相等的向量其坐标是唯一的.

3. 空间向量的坐标运算，加法、减法和数量积同平面向量类似，具有类似的运算法则，教学中可类比推广，但能不能推广则是学生疑点所在，教师应抓住空间向量的坐标表示这一根本去突破. 即向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面上是用唯一确定的有序实数对表示 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，而在空间则用唯一确定的有序实数组表示 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$，这就是说一个向量在平面和空间中的表达方式不同，实质没有改变. 向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$，在二维、三维空间都是这样定义的，不同点仅是向量在维数不同时具有不同的表达形式：

在平面　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$；

在空间　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

4. 空间向量平行和垂直的条件，可类比平面向量，对比记忆. 坐标表示为

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\lambda b_1 \\ a_2=\lambda b_2 \\ a_3=\lambda b_3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

它是空间直角坐标系中，论证线线平行、垂直的依据.

5. 夹角公式，长度公式.

向量长度公式是表示向量的长度，其形式与平面向量长度公式一致，教学时可用类比的方法进行. 它的几何意义是表示长方体对角线的长度.

夹角公式

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

刻画了两向量的位置，为空间向量在立体几何中的应用奠定了理论基础.

6. 本小节共有 3 个例题，基本上都是公式的直接运用.

例 3（2）中 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上正投影的数量公式

$$|\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

应作为一公式记忆.

3.2 空间向量在立体几何中的应用

本大节包括：直线的方向向量与直线的向量方程；平面的法向量与平面的向量表示，直线与平面的夹角，二面角及其度量，距离.

3.2.1 直线的方向向量与直线的向量方程

本小节包括：用向量表示直线或点在直线上的位置，用向量方法求证直线与直线平行、直线与平面

平行、平面与平面平行，用向量运算求证两条直线垂直或求两条直线所成的角.

重点：直线的方向向量，平行关系的论证，用向量运算求证两条直线垂直或求两条直线所成的角.

难点：直线的方向向量，平面 α 的共面向量的选取及其表示.

1. 直线的向量方程是由定点 A 和直线的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 确定的. 在平面内可类比直线方程的点斜式：直线的方向向量、斜率都是刻画直线方向的量，只是从不同角度引入，它们有一定关系，斜率为 k 的直线，其方向向量为 $(1, k)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}=(a, b)$ 的直线不一定存在斜率. 在空间中，用方向向量刻画直线较为方便.

(1) 关于空间直线的向量方程导出，因为学生的空间观念比较薄弱，对向量等式的变形也不够熟悉，所以导出过程宜详不宜略，可按如下步骤导出：

因为 $l /\!/ \boldsymbol{a}$,

所以 对于 l 上任意一点 P，存在唯一的 t，满足 $\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$. (∗)

又因为 对空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\boldsymbol{a}$,

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$. ①

若在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$. (∗∗)

又因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$. ②

上述推导意在帮助学生理解掌握表达式①，②.

这里，应注意：表达式（∗），（∗∗）既是表示式①，②的基础，也是常用的直线参数方程的表示形式.

(2) 对于空间直线的参数表示式①，②的理解掌握，还应做两项工作：

①依据曲线与方程的知识说明它们确实是空间符合已知条件的直线的方程；

②引导学生分析方程①，②的特点，以便他们能准确记忆方程.

表示式①中，因为 $t\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AP}$，所以 $\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$ 是据三角形法则得到的.

表示式②中，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的始点相同，且可还原为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$，使其仍符合三角形法则.

2. 用向量方法求证直线与直线平行、直线与平面平行、平面与平面平行.

平行关系的向量论证，应引导学生复习线线、线面、面面平行的判定定理，将这种位置关系的判断转化为向量间的代数运算，体现向量的工具性作用.

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，则

$$l_1 /\!/ l_2\ (\text{或 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合}) \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1=\lambda\boldsymbol{v}_2\ (\boldsymbol{v}_2\neq\boldsymbol{0}).$$

已知两个非零向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 与平面 α 共面，一条直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}$，则由共面向量定理

$$l /\!/ \alpha \text{ 或在 } \alpha \text{ 内} \Leftrightarrow \text{存在两个实数 } x,\ y,\ \text{使 } \boldsymbol{v}=x\boldsymbol{v}_1+y\boldsymbol{v}_2.$$

例 2 中，式子 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 只是说明 $\overrightarrow{MN}$ 与 AD' 共面，必须说明线 MN 上有一点不在平面 AD' 内，才能获证 $MN /\!/$ 平面 AD'.

式子$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}$只是说明$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{AD'}$共线，应说明直线 MN 上有一点不在直线 AD' 上，才能获证 $MN /\!/ AD'$.

从运用中体会线线平行与向量共线，线面平行与向量共面的异同，教学时要注意引导学生分析题意，寻求解题思路，可按以下过程引导学生思考：

(1) 如何把已知的几何条件转化为向量表示？

(2) 一些未知的向量能否用基向量或其他已知向量表示？

(3) 如何对已经表示出来的向量进行运算，才能获得需要的结论？

3. 用向量运算求证两条直线垂直或求两条直线所成的角.

首先应明确两直线 l_1 与 l_2 所成的角的定义及范围 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，而直线 l_1，l_2 的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 所成的角 $0\leqslant\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle\leqslant\pi$.

由于 l_1，l_2 的夹角 θ 与$\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$相等或互补，因此

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}\right|.$$

两条直线垂直是两直线所成角的一种特殊情况

$$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle=0.$$

教材设计例 3，例 4 是论证直线垂直关系和求两直线所成角的直接运用，要引导学生从方法上思考此类问题：

(1) 如能建立空间直角坐标系，有关向量可用坐标表示；

(2) 建坐标系不便，可选取基向量表示其他向量.

3.2.2 平面的法向量与平面的向量表示

本小节主要是平面的法向量及法向量的应用.

通过本小节学习，使学生达到以下要求：

(1) 理解平面的法向量的概念，并会求平面的法向量；

(2) 了解平面法向量的应用，并能用法向量论证相关的立体几何问题（如平面与平面平行，平面与平面垂直）；

(3) 掌握正射影的概念，并能作出简单图形 F 在某一平面内的正射影 F'，并说出其图形的形状；

(4) 掌握三垂线定理及其逆定理，并能应用此定理解题.

重点：平面法向量的概念及应用，正射影的概念，三垂线定理及逆定理.

难点：平面法向量的理解及灵活运用，三垂线定理的证明思路及三垂线定理的应用.

1. 平面法向量的定义是从向量 $\boldsymbol{n}$ 的基线与平面垂直引入的.

由立体几何线面垂直关系可得：平面 α 的一个法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量，一个平面的所有法向量都是共线向量，求平面的法向量只须求出一个即可.

如例 1，待定 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$往往是以其中一个未知量表示其他两个未知量 $y=\frac{a}{b}x$，$z=\frac{a}{c}x$. 对 x 赋以特殊值 bc，求得 $\boldsymbol{n}=(bc, ac, ab)$.

2. 利用平面法向量的性质证明直线与平面垂直的判定定理.

应向学生讲清如何将几何条件转化为向量语言，应从步骤上强调：

(1) 选取以直线和平面内的直线为基线的向量；

(2) 通过已知向量表示未知向量，或选用基向量表示其他向量；

(3) 通过向量运算去证明，以加强几何位置关系与向量关系的相互转化.

3. 平面的向量表示.

让学生弄清过点 A，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面 α 的向量表达式为

$$\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{（其中 } M \text{ 为动点）.} \quad (*)$$

须从以下两个方面说明：

一方面，若 $\boldsymbol{n}\perp\alpha$，平面内的任意点 M 满足

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \text{（易证）.}$$

另一方面，满足（$*$）式的所有点都在 α 内.

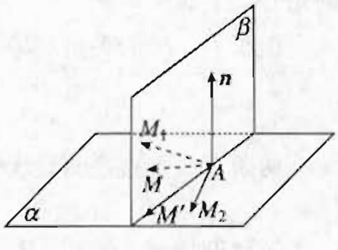


图 3－4

如果任取两点 M_1，M_2 与 A 不共线，且 $\overrightarrow{AM_1}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AM_2}\cdot\boldsymbol{n}=0$，则 $\boldsymbol{n}\perp$ 平面 AM_1M_2（记为 α）.

设 M 为满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 的任一点，过 M，$\boldsymbol{n}$ 的平面记为 β，$\alpha\cap\beta=AM'$，显然 $\overrightarrow{AM'}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

在 β 内，同时满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AM'}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

所以 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{AM'}$ 为共线向量．因此 M 一定在平面 α 内.

在空间直角坐标系中，假定 $A(x_0，y_0，z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A，B，C)$，$M(x，y，z)$，则过点 A 且与 $\boldsymbol{n}$ 垂直平面 α 的坐标表达式为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这实质是平面 α 的方程.

4. 利用平面的法向量论证平面与平面垂直、平行，应先复习平面与平面平行、垂直的相关判定定理.

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则

$$\alpha /\!/ \beta \text{（}\alpha \text{ 与 } \beta \text{ 重合）} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2\text{；} \quad \text{（图 3－5）}$$

$$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0. \quad \text{（图 3－6）}$$

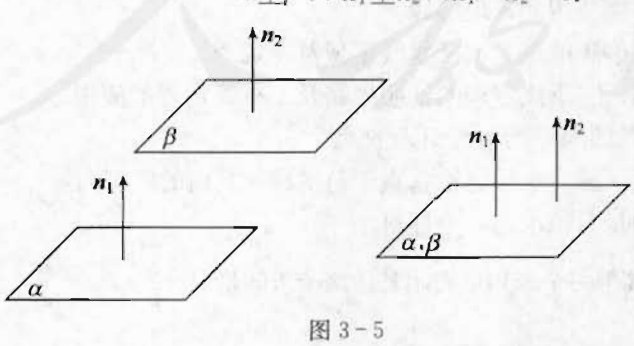


图 3－5

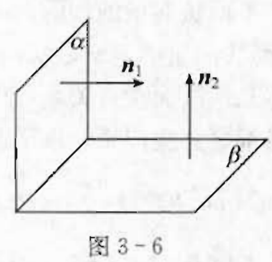


图 3－6

5. 通过平行射影引出正射影的概念，然后给出如何作一个点，一条线（线段），一平面图形在平面

α 内的正射影.

6. 三垂线定理：实质是证明线线垂直，利用线面垂直判定与线面垂直性质定理过程的简化. 应结合条件和结论，给出图 3-7. 从图中理解定理，领会$\triangle ABC$所在平面是推证三垂线定理及逆定理的关键.

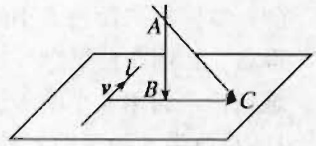


图 3-7

7. 结合例题体会三垂线定理（逆定理）的证题思路，归纳总结：一定平面，二找垂线，三证垂直.

3.2.3 直线与平面的夹角

本小节主要是直线与平面所成的角.

通过本小节学习使学生达到以下要求：

(1) 理解斜线和平面所成的角的定义，体会夹角定义的唯一性，合理性；

(2) 会求直线 AB 与平面 α 的夹角 θ.

重点：斜线和平面所成的角（或夹角），如何求斜线与平面所成的角.

难点：斜线与平面所成的角的求解，公式 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$ 的灵活运用.

1. 讲清 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$ 推导过程，得到这一结论，应作一些探讨.

因为 $0\leqslant\cos\theta_2\leqslant1$，　　所以 $\cos\theta\leqslant\cos\theta_1$.

因为 θ_1 和 θ 都是锐角，所以 $\theta_1\leqslant\theta$，当且仅当 $\theta_2=0$ 时，$\theta=\theta_1$.

使学生真正体会其变形的目的.

2. 斜线和平面所成的角的概念教学中，应讲清斜线在平面上的射影是过斜足和垂足的一条直线，而不是线段，在今后学习和解题中大量用到的是斜线段及它在平面上的射影线段.

新教材体现了向量的工具性，设向量$\overrightarrow{AB}$在平面 α 内的射影为$\overrightarrow{A'B'}$，则直线 AB 与平面 α 夹角为 θ，易证 $|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.（图 3-8）

若平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{AB}|}\right|$，即 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{AB}|}$.（图 3-9）

即将线面关系的论证问题变为有序的计算问题.

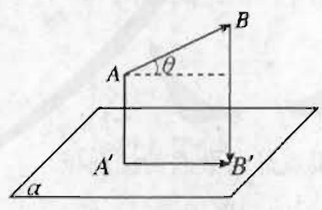


图 3-8

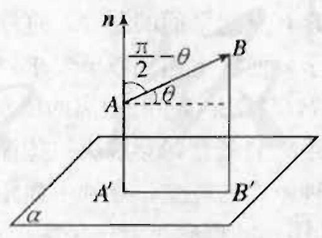


图 3-9

3.2.4 二面角及其度量

本小节主要内容有二面角的概念，二面角的平面角.

通过本小节教学，使学生达到以下要求：

(1) 掌握二面角的概念，二面角的平面角的定义，会找一些简单图形中的二面角的平面角；

(2) 掌握求二面角大小的基本方法、步骤.

重点：二面角的概念，二面角的平面角的定义.

难点：二面角大小的求法.

1. 在数学 2 的基础上进一步加深理解二面角，是为了研究两个平面的相对位置，教学时可通过一些实例（由学生列举），以培养学生的空间想象能力，概念引入之后，可类比平面几何中角的概念作对比分析，使学生在熟悉的知识层面上，建构新的知识框架.

2. 二面角的度量是学习二面角的一个实质性问题，教学时，运用化归思想，将二面角的大小运用平面角的大小来确定. 首先对于给定的二面角，它的棱是确定的，要注意本教材与数学 2 中定义形式不同，但实质是一样的. 前者定义形式比较直观，便于理解，后者在求二面角大小时便于表述.

教科书中约定二面角的范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，可从两个半平面“重合”“相交”和“共面”各种形态加以说明.

3. 用向量的方法求二面角的大小.

方法一　分别在二面角 α-l-β 的面 α，β 内，并且沿 α，β 延伸的方向作向量 $\boldsymbol{n}_1\perp l$，$\boldsymbol{n}_2\perp l$，则我们可用 $\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$ 度量这个二面角的大小

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},$$

$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 的选取建立在现有图形中的已知或构图论证，可参考教材图 3－46.

方法二　通过法向量求解.

设 $\boldsymbol{m}_1\perp\alpha$，$\boldsymbol{m}_2\perp\beta$，则 $\langle\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2\rangle$ 与该二面角相等或互补.

此方法的运用适宜于：

(1)在空间直角坐标系下，平面 α，β 的法向量便于确定；

(2)二面角的大小便于定性(锐角，钝角)，如例 3，从图中便于直观获得平面 SAB 与 SCD 的夹角为锐角；

(3)具体求解过程中，先求 $\boldsymbol{m}_1$ 与 $\boldsymbol{m}_2$ 的基线所成锐角或直角 θ，$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2|}{|\boldsymbol{m}_1||\boldsymbol{m}_2|}$.

若二面角为锐角，则为 θ.

若二面角为钝角，则为 $\pi-\theta$.

3.2.5　距离

本小节主要内容有点到平面的距离，直线到与它平行的平面的距离，两个平行平面的距离.

通过本小节教学，使学生达到以下要求：

(1) 理解图形 F_1 与图形 F_2 的距离的概念；

(2) 掌握四种距离的概念，会解决一些简单的距离问题.

本节重点是四种距离的概念，点到平面距离的求法. 难点是求平面的法向量.

1. 两个图形的距离的概念可看作是两个点集的元素间距离的最小值.

这里的图形指的是任意的几何图形，而教科书中以点、线、面为主，两个图形的距离的概念是定义四种距离的理论基础，教学时，通过直观的图形作出具体形象的解释.

2. 计算两点间的距离及线段的长是几何度量最基本的课题，计算任何图形之间的距离都可以转化为求两点间的距离，回顾以前学习过的测量与计算两点间距离的方法，从用尺子度量到相似测量和计算，从勾股定理到勾股定理的坐标形式（距离公式），从解直角三角形到用正弦定理、余弦定理解任意

三角形，人们在总结上述方法的基础上，建立了平面与空间的向量结构．本节重点举例说明如何用向量运算求两点之间的距离，其基本思路是利用长度与内积的关系，将求长度变为向量的内积运算．

3．点到面的距离的概念，应先引用结论：过一点垂直于平面的直线只有一条，进而证明垂线段最短．这种定义方法符合距离的概念，同时也实际上给出了找点到面的距离的方法，教学时要注重体现概念的这种形成过程．

4．直线到与它平行平面的距离，两平行平面的距离的定义方式大致相同，实质是从直线（平面）上任一点作平面（另一平面）的垂线，由于垂线段相等，定义的给出就比较简单了．教学时，应通过实例说明在具体解题时点的选择的重要性．

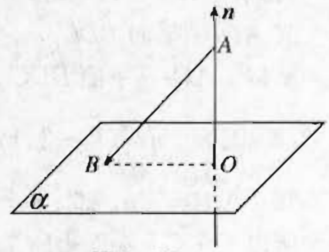


图 3－10

结合教材例 2，在空间直角坐标系中求点 A 到平面 α 距离的步骤：

（1）待定平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$，令 $\boldsymbol{n}_0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$；

（2）在平面 α 内任取一点 B，计算 $\overrightarrow{AB}$；

（3）计算 $d=|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_0|$．

Ⅲ 拓展资源

法向量在立体几何中的应用

已知平面 α，如果一个向量 $\boldsymbol{n}$ 的基线与平面 α 垂直，则向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面 α 的法向量或说向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 α 正交．法向量的引进，对空间夹角与距离问题以及线面与面面位置关系的研究，提供了一个很方便、实用的工具，其思路明确，易于下手，过程较为程序化，易于掌握．以下举例说明，仅供教学时参考．

1．利用法向量证明直线与平面平行和垂直

证明直线与平面平行，转化为证明直线的方向向量与平面的法向量垂直．证明直线与平面垂直，转化为证明直线的方向向量与平面法向量平行，然后根据直线与平面平行或垂直的有关概念得出结论，达到解决问题的目的．

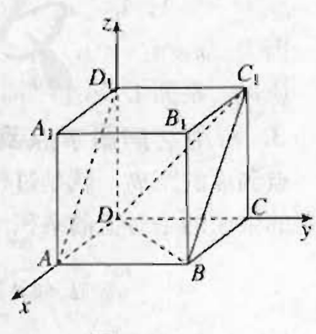


图 3－11

例 1　已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，求证：

（1）AD_1∥平面 BDC_1；

（2）$A_1C\perp$平面 BDC_1．

证明：以 D 为坐标原点，建立如图 3－11 所示空间直角坐标系 $Dxyz$．

设正方体的棱长为 1，则有 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$D_1(0,0,1)$，$A_1(1,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDC_1 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC_1}$．

所以 $\begin{cases}(x, y, z)\cdot(1, 1, 0)=0\\(x, y, z)\cdot(0, 1, 1)=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x+y=0\\y+z=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 1)$.

(1) $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=(1, -1, 1)\cdot(-1, 0, 1)=0$，知 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD_1}$.

又 $AD_1\not\subset$平面 BDC_1，

所以 $AD_1\parallel$平面 BDC_1.

(2) 因为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$，

知 $\overrightarrow{A_1C}=-\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{A_1C}$.

所以 $A_1C\perp$平面 BDC_1.

2. 利用法向量证明平面与平面平行和垂直

证明平面与平面平行，转化为证明这两个平面的法向量平行.

证明平面与平面垂直，转化为证明这两个平面的法向量互相垂直.

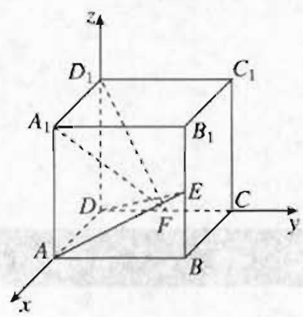


图 3 - 12

例 2 已知：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，CD 的中点.

求证：平面 $DEA\perp$平面 A_1FD_1.

证明：如图 3 - 12 所示，建立空间直角坐标系 $Dxyz$.

令 $DD_1=2$， 则有 $D(0, 0, 0)$，$D_1(0, 0, 2)$，$A(2, 0, 0)$，$A_1(2, 0, 2)$，$F(0, 1, 0)$，$E(2, 2, 1)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$分别是平面 DEA，A_1FD_1 的法向量，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DE}$.

所以 $\begin{cases}(x_1, y_1, z_1)\cdot(2, 0, 0)=0\\(x_1, y_1, z_1)\cdot(2, 2, 1)=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x_1=0\\2y_1+z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=-1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(0, -1, 2)$，同理可得$\boldsymbol{n}_2=(0, 2, 1)$.

因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(0, -1, 2)\cdot(0, 2, 1)=0$，知 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$.

所以 平面 $DEA\perp$平面 A_1FD_1.

3. 利用法向量求点到平面的距离

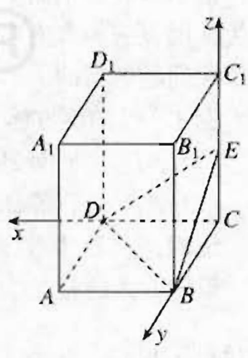


图 3 - 13

点到面的距离，就是过该点的某一斜线段 AB 和斜线与该平面的法向量的夹角的余弦的绝对值的乘积. 即

$$d=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

例 3 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，$AA_1=2$，点 E 为 CC_1 中点，求点 D_1 到面 BDE 的距离.

解：以 C 为原点，建立如图 3－13 所示坐标系 $Cxyz$，

则 $C(0, 0, 0)$、$B(0, 1, 0)$、$D(1, 0, 0)$、$E(0, 0, 1)$、$D_1(1, 0, 2)$，

$\overrightarrow{ED}=(1, 0, -1)$，$\overrightarrow{EB}=(0, 1, -1)$.

设平面 BDE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，

则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{ED}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB}$，

所以 $\begin{cases}x-z=0\\y-z=0\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$.

又因为 $\overrightarrow{D_1E}=(0, 0, 1)-(1, 0, 2)=(-1, 0, -1)$，

所以 D_1 到面 BDE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-1+0-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 利用法向量求两异面直线间的距离

求两异面直线间的距离可先求得两直线的公共“法向量”$\boldsymbol{n}$，然后在两直线上各取一点，求出过这两点的向量$\overrightarrow{AB}$，它在法向量上的射影长的绝对值就是两异面直线间的距离 $d=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$.

例 4 在例 3 中，求 BD_1 与 DE 之间的距离.

解：$\overrightarrow{DE}=(0, 0, 1)-(1, 0, 0)=(-1, 0, 1)$，

$\overrightarrow{BD_1}=(1, 0, 2)-(0, 1, 0)=(1, -1, 2)$.

设 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BD_1}$，$\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，

所以 $\begin{cases}-x+z=0\\x-y+2z=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=z\\y=3z\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1, 3, 1)$.

因为 $\overrightarrow{DD_1}=(0, 0, 2)$，

所以 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{11}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

因此 BD_1 与 DE 之间的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

5. 利用法向量求线面夹角

斜线与平面所成的角和斜线与该平面的法向量所成的角互余，或与该平面的法向量所成的角的补角互余，故要求斜线与平面所成的角，只要求斜线与该平面的法向量所成的角即可.

通常记斜线 AB 与平面 α 所成角为 θ $\left(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}，即 \quad \sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}.$$

例 5 在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，侧棱 $AA_1=2$，D，E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G：

(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）；

(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.

解：(1) 如图 3－14 所示，建立空间直角坐标系 $Cxyz$.

设 $CA=2a$，则 $A(2a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2a,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，

$A_1(2a,\ 0,\ 2)$，$E(a,\ a,\ 1)$、$G\left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$.

所以 $\overrightarrow{GE}=\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(0,\ -2a,\ 1)$.

得 $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\dfrac{2}{3}a^2+\dfrac{2}{3}=0$，解得 $a=1$.

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(2,\ -2,\ 2)$，$\overrightarrow{GE}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$.

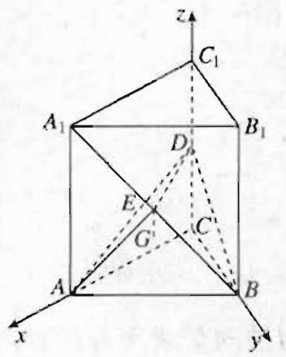


图 3－14

记 A_1B 与平面 ABD 所成角为 θ，则

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{GE}|}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{GE}|}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

所以 $\theta=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

(2)A_1 到平面 AED 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$（过程略）.

6. 利用法向量求面面夹角

平面与平面所成的二面角和两平面的法向量所成的角相等或互补.

例 6 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在 BB_1，DD_1 上，且 $AE\perp A_1B$，$AF\perp A_1D$，$AB=4$，$AD=3$，$AA_1=5$，求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成角的正弦值.

解：以 A 为原点建立空间直角坐标系 $Axyz$，如图 3－15 所示，

则 $B(4,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 3,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ 5)$，$D_1(0,\ 3,\ 5)$，$B_1(4,\ 0,\ 5)$.

设 $E(4,\ 0,\ z_1)$，$F(0,\ 3,\ z_2)$，

因为 $\overrightarrow{DA_1}=(0,\ -3,\ 5)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-4,\ 0,\ 5)$，

由 $\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，即 $0-9+5z_2=0$，

所以 $z_2=\dfrac{9}{5}$.

又因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$-16+0+5z_1=0$，

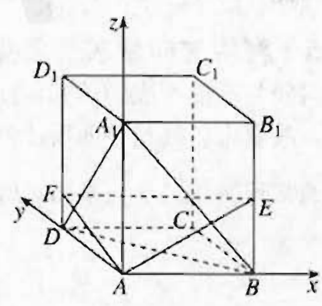


图 3－15

所以 $z_1=\frac{16}{5}$.

所以 $\overrightarrow{AF}=\left(0,\ 3,\ \frac{9}{5}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(4,\ 0,\ \frac{16}{5}\right)$.

设面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,\ y,\ z)$，

所以 $\begin{cases}3y+\frac{9}{5}z=0\\4x+\frac{16}{5}z=0\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-\frac{4}{5}z\\y=-\frac{3}{5}z\end{cases}$

令 $z=5$，得 $\boldsymbol{n}_1=(-4,\ -3,\ 5)$.

设面 BDD_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$，

因为 $\overrightarrow{BD}=(0,\ 3,\ 0)-(4,\ 0,\ 0)=(-4,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,\ 0,\ 5)$，

所以 $\begin{cases}-4x+3y=0\\5z=0\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=\frac{3}{4}y\\z=0\end{cases}$

令 $y=4$，得 $\boldsymbol{n}_2=(3,\ 4,\ 0)$.

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-24}{5\sqrt{2}\times 5}=-\frac{12\sqrt{2}}{25}$.

因此所求二面角为 $\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$ 或 $\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$，

而 $\sin\theta=\sin\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{12\sqrt{2}}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{337}}{25}$.

从上述例题可以看出应用平面的法向量解决立体几何题，一般按以下程序进行：

(1) 建立空间直角坐标系并写出相应的点与向量的坐标；

(2) 由法向量的定义求出平面的法向量；

(3) 由向量代数的有关知识判定平面的法向量与对应向量的共线、垂直，或者求出两个向量的夹角；

(4) 根据题目的要求得出问题的结果.

Ⅳ 教学案例

案例 1：3.1.2 空间向量的基本定理

(一) 教学目标

1. 知识与技能：

了解空间向量分解定理及其意义，会利用空间向量基本定理解决简单问题.

2. 过程与方法：

(1) 通过空间向量分解定理的得出过程，体会由特殊到一般，由低维到高维的思维方法；

(2) 通过本节学习，体验用基底表示空间任一向量的方法.

3. 情感、态度与价值观：

通过本节的学习，培养学生的理性精神.

（二）教学重点与难点

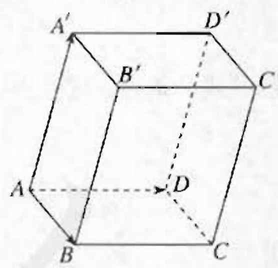
重点：空间向量分解定理的应用.

难点：空间向量分解定理的理解.

（三）教学方法

本节内容是在学习了空间向量线性运算的基础上，进一步学习向量的坐标运算的基础. 教学中要引导学生联系已有知识，在本节课的教学中，采用让学生观察、抽象、概括的方式，自主得出定理；在定理的运用中，引导学生分析思路，总结规律，体验解题方法.

（四）教学过程

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
复习提问	(1) 向量加法的运算法则； (2) 平行向量基本定理； (3) 共面向量定理.	学生回答.	复习旧知识，引出新知识.
定理形成	创设情境： 如下图，平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{e}_3$. 用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{AD'}$，$\overrightarrow{AC'}$.  空间向量分解定理 如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 说明：(1) 定理中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为不共面向量； (2) $\boldsymbol{p}$ 是空间中的任一向量，且实数对 x，y，z 是唯一的； (3) 空间中任意三个不共面向量都可作为一组基底.	教师提出问题. 学生动手解题. 教师提问：上例的结果中$\overrightarrow{AC}=$？你能得出怎样的结论？ 学生思考，回答. 教师完善. 教师：该定理的证明涉及到存在性和唯一性两方面. 证明时既要证明存在性，又要证明唯一性，而唯一性的定理往往要用反证法，要说清 $x=x'$，$y=y'$，$z=z'$ 的真正道理，以便学生在解题中应用.	通过学生动手实践观察、比较，抽象概括得出定理，让学生体会由特殊到一般的思维方法，发展学生的理性思维能力. 让学生了解存在性、唯一性问题，要证明两个方面，有利于开拓学生的视野.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
应用举例	例 2. 小结：解题关键是找所求向量与基底间的关系，然后通过向量的线性运算用基底表示出来.	教师提问：$\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{DB'}$ 与图中表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段有何关系？能否用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示？用怎样的法则运算？ 学生思考，回答，学生完成题目，并归纳解题方法.	通过分步设问，引导学生体会解题思路的形成过程，培养学生独立分析解决问题的能力.
课堂练习	练习 A，1，2；练习 B，1，2.	学生独立完成.	让学生及时巩固所学方法.
应用举例	例 3. 说明：(1) 空间四边形与平行六面体是立体几何中的基本图形； (2) 求解过程：通过共线，三角形法则，多边形法则进一步沟通知求关系、直观性强，便于操作.	教师：让学生根据例 2 的方法把 $\overrightarrow{OG}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示出来. 学生动手解题，教师及时点拨.	用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{OG}$ 是例 2 的延伸，方法比较容易，因此让学生自己完成.
课堂练习	练习 A，3，4.	学生完成，教师指正.	巩固所学知识方法.
归纳小结	(1) 学习了空间向量分解定理，要注意应用条件； (2) 学会用基底表示空间任一向量的方法.	师生共同完成.	使学生养成归纳总结的习惯，不断提高自己的反思构建能力.
布置作业	习题 3-1A，1；习题 3-1B，1.	学生独立完成.	巩固所学知识方法.

案例 2：3.2.4　二面角及其度量

（一）教学目标

1. 知识与技能：

掌握二面角、二面角的平面角的定义，会求简单二面角的大小.

2. 过程与方法：

在教学过程中体现的主要数学能力及数学思想方法有：

(1) 空间想象能力：认识空间平面的位置关系，遵循从实图和简单的几何体着手，从平面几何的角过渡到二面角，逐步培养和发展学生的几何直观和空间想象能力；

(2) 转化的思想方法：在三维与二维空间的转化以及面面角与线线角的转化过程中，体现出转化的思想方法；

(3) 逻辑思维与运算能力：通过对二面角大小的求解，加强算中有证，以证助算，以培养学生的逻辑思维能力及运算能力.

3. 情感、态度与价值观：

体验概念的形成过程，及概念的合理性，培养创新意识和数学应用意识，提高学生学习数学的兴趣，并注意在学习中培养学生的协作精神.

（二）教学重点与难点

重点：二面角的概念，二面角的平面角.

难点：二面角的平面角的求解.

（三）教学方法

启发探究.

（四）教学过程

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
复习提问	（1）直线与直线所成的角； （2）直线与平面所成角的定义.	学生回答.	复习旧知识，引出新知识. 体会研究空间问题的思想方法.
概念的形成	创设情境 （1）打开的书本通过教材页面的变换，体会面与面的位置关系的不同（或通过一矩形硬纸板沿某一线折叠后形成的图形）； （2）赤道面与人造卫星轨道平面.	教师提出问题由学生动脑想动手做，并回答观察到的现象. 学生回答，教师完善.	通过学生动手观察，比较抽象，让学生体验从实际中，不断抽象、概括以便形成概念的雏形.
	二面角的概念及记法 概念：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 记法：二面角 α-l-β.	二面角的定义：可类比于平面几何中角的定义： 射线—半平面， 顶点—棱.	通过比较加深概念的理解，完善新知识与旧知识的联系.
	二面角 α-l-β 的平面角 在二面角 α-l-β 的棱上任取一点 O，在两半平面内分别作射线 $OA\perp l$，$OB\perp l$，则 $\angle AOB$ 叫做二面角 α-l-β 的平面角.	教师提出问题： 如何度量二面角的大小？数学 2 是怎样刻画两平面垂直的？ 教师提问： O 点既然是 l 上的任意点，由线线所成角定义及等角定理，OA，OB 是不是一定相交于 l 上一点？ 由学生回答，教师指导.	通过数学 2 中面面垂直的定义方法推广为度量二面角大小的一般方法，使学生比较自然地接受二面角的平面角这一定义的合理性.
	扩展 （1）分别在二面角 α-l-β 的面 α，β 内，沿 α，β 延伸的方向作向量 $\boldsymbol{n}_1\perp l$，$\boldsymbol{n}_2\perp l$，则可用 $\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$ 作为二面角的大小； （2）设 $\boldsymbol{m}_1\perp\alpha$，$\boldsymbol{m}_2\perp\beta$，则角 $\langle\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2\rangle$ 与该二面角相等或互补.	教师提问： 若二面角 α-l-β 给定，$\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ 分别是 α，β 的法向量，$\langle\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2\rangle$ 与二面角大小有何关系？	让学生在探索中，培养自己的思维能力，完善学生用向量的知识来解决空间问题的知识结构.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
应用举例	例 1. 归纳： 1. 理解题意，几何问题向量化； 2. 构造向量关系； 3. 运算. 例 2. 归纳： 1. $S'=S\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{S'}{S}$； 2. 利用三垂线定理求作二面角的平面角. 例 3. 归纳： 1. 建立坐标系，表示点的坐标； 2. 给定平面的法向量； 3. 求出两法向量所成锐角 θ， $\cos\theta=\frac{\|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}$； 4. 通过二面角的图形特征或已知要求，确定二面角的大小为 θ 或 $\pi-\theta$.	教师引导学生回答： （1）二面角的大小与哪两个向量所成的角有关？ （2）如何将几何信息向量化？ （3）运算 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$， 点出$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle$， $\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\rangle$，$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}\rangle$ 它们之间的相互关系. 在图示中，引导学生体会产生二面角的平面角的过程. 教师引导，学生回答： （1）平面 SAB 与平面 SCD 所成二面角的特点； （2）图中 SA，AB，AD 两两垂直，且有已知的长度关系； （3）若恰当建立空间坐标系，点的坐标能不能表示出来？	通过设问，使学生基本形成解决此类问题的思维程序，了解应注意的问题. 加深概念的理解及应用意识. 通过分析图形特征，得出解决此问题的方法.
课堂练习	练习 A，1，2，3，4.	学生完成，教师指导.	巩固所学知识方法.
归纳小结	1. 学会求作二面角的平面角； 2. 利用投影面积公式 $\cos\theta=\frac{S'}{S}$； 3. 通过与棱垂直的向量求 $\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$； 4. 通过平面的法向量求 $\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，往往与二面角的性态结合（是锐角，还是钝角）.	师生共同完成.	使学生养成归纳总结的习惯，不断提高自己的理性思维水平及反思构建能力.
布置作业	练习 B，1，2.	学生独立完成.	巩固所学知识方法.

V 习题参考答案与提示

练习 A(第 81 页)

1. 与$\overrightarrow{AB}$相等的向量有$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{D'C'}$；与$\overrightarrow{AD}$相等的向量有$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{A'D'}$；与$\overrightarrow{AA'}$相等的向量有$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{DD'}$.

2. (1) $\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{DB}$；　(3) $\overrightarrow{DB'}$；　(4) $\overrightarrow{BD'}$；　(5) $\overrightarrow{AC'}$.

3. (1) $\overrightarrow{AD}$；　(2) $\overrightarrow{AG}$；　(3) $\overrightarrow{MD}$. 图略.

练习 B(第 82 页)

1. (1) $\overrightarrow{MN}$；　(2)$\overrightarrow{AD}$.

2. $\frac{5}{6}\boldsymbol{a}+\frac{9}{2}\boldsymbol{b}-\frac{7}{6}\boldsymbol{c}$.

3. (1) $x=1$；

   (2) $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$.

   因为 E 为上底面 $A'C'$的中心，所以$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

   即$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

练习 A（第 85 页）

1. 两向量共线，则两向量的基线平行或重合，即两直线不一定重合；两向量共面，则两向量的基线共面或异面，即两直线不一定共面.

2. 能.

3. $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 共面.

   因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，所以 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 不共线，又因为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$. 所以由共面向量定理得 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 共面.

4. $\overrightarrow{OC}$.

5. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$， $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$， $\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$， $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

练习 B（第 85 页）

1. 证明：因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，现检验是否存在唯一一对实数 x，y 值，使

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

即 $-3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}=(x-y)\boldsymbol{i}+(-2x+3y)\boldsymbol{j}+(x+2y)\boldsymbol{k}$，得 $\begin{cases}x-y=-3\\-2x+3y=7\\x+2y=0\end{cases}$

解此方程组，得 $x=-2$，$y=1$. 由共面向量定理得 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

2. 共面.（提示：证 $3\boldsymbol{p}-5\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}$）

3. (1) $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{A'D}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DC'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$；

(2) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$.

练习 A（第 88 页）

1. (1) BC，$B'C'$，CD，$C'D'$；

(2) 60°，150°，90°.

2. (1) 0°； (2) 180°； (3) 90°； (4) 180°.

3. (1) 0； (2) 1； (3) 1； (4) $\sqrt{3}$.

练习 B（第 88 页）

1. 证明：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)|\boldsymbol{a}|=\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)|\boldsymbol{b}|=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA'}$，

因此原式成立.

2. (1) $\frac{a^2}{2}$；(2) $-\frac{a^2}{2}$；(3) $-\frac{a^2}{2}$；(4) $\frac{a^2}{4}$；(5) $-\frac{a^2}{4}$；(6) $\frac{a^2}{4}$.

3. 解：因为 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

(1) $\overrightarrow{AC'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\overrightarrow{DB'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$.

$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=1$，$|\overrightarrow{DB'}|=|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{3}$.

$$\cos\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'}}{|\overrightarrow{AC'}|\cdot|\overrightarrow{DB'}|}=\frac{1}{3}.$$

因为 $\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle=\arccos\frac{1}{3}$.

(2)$\overrightarrow{BD'}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AD}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=1$.

练习 A（第 92 页）

1. (1) $(3, 4, -5)$；　(2) $(-2, 5, 3)$；　(3) $(8, 0, 1)$；　(4) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0\right)$；

   (5) $(8, 0, 0)$；　(6) $(0, 8, 0)$.

2. (1) $(8, -1, 1)$；　(2) $(-1, 12, -7)$；　(3) 7；　(4) -121.
3. (1) $(-8, 8, 4)$；　(2) $(-6, -9, -2)$.
4. (1) 平行；　(2) 平行；　(3) 平行；　(4) 不平行.
5. (1) 垂直；　(2) 垂直；　(3) 不垂直；　(4) 不垂直.
6. $\boldsymbol{n}=k(1, 1, 1)$.
7. (1) $\frac{1}{2}$；　(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
8. $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{33}$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{6}$.

练习 B（第 93 页）

1. (1) 9；　(2) -454.
2. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，所以$\frac{x}{1}=\frac{-2}{y}=\frac{5}{-3}$，得 $x=-\frac{5}{3}$，$y=\frac{6}{5}$.
3. 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$-2\times(-8)+xy=0$，得 $xy=-16$.
4. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=178+2\times(-10+60)+29=307$，

   $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=178-2\times(-10+60)+29=107$.

5. (1) $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\arccos\frac{2\sqrt{145}}{145}$；　(2) $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\arccos\frac{\sqrt{10}}{25}$.

习题 3－1A（第 93 页）

1. 略.
2. 平行于 x 轴的向量的 y 坐标为 0，z 坐标为 0；平行于 y 轴的向量的 x 坐标为 0，z 坐标为 0；平行于 z 轴的向量的 x 坐标为 0，y 坐标为 0.
3. $x=1$，$y=\frac{4}{3}$.
4. **证明**：因为向量 $(1, 0, -1)$ 与向量 $(0, 1, 1)$ 不共线，而 $(1, 1, 0)=(1, 0, -1)+(0, 1, 1)$，由共面向量定理得，向量 $(1, 0, -1)$、向量 $(1, 1, 0)$ 和向量 $(0, 1, 1)$ 共面.
5. 与 xOy 坐标面平行.
6. $\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OF}=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OH}=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
7. (1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(5, -3, 6)$；

   (2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-3+1)\times7+(2-3)\times(-2)+5\times1=-7$；

(3)因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(-3,2,5)-(1,-3,0)+(7,-2,1)=(3,3,6)$,

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\sqrt{3^2+3^2+6^2})^2=54$.

(4)$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|)^2=(\sqrt{(-3)^2+2^2+5^2}+\sqrt{1^2+(-3)^2}+\sqrt{7^2+(-2)^2+1^2})^2$

$=102+4\sqrt{95}+12\sqrt{15}+12\sqrt{57}$.

8. $\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$.

9. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

10. (1)$\dfrac{\sqrt{455}}{455}$； (2)$\dfrac{11\sqrt{595}}{595}$.

11. **解**：$\overrightarrow{AC}=(1,3,5)$，$\overrightarrow{AB}=(2,5,0)$.

$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上投影的数量为

$$|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle=|\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{17\sqrt{29}}{29}.$$

12. **解**：设向量为(x,y,z)，则$\begin{cases}3x+2y=0\\2y+5z=0\end{cases}$ 得 $3x-5z=0$.

取 $x=1$，得 $z=\dfrac{3}{5}$，$y=-\dfrac{3}{2}$，即可得向量$\left(1,-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{5}\right)$.

习题 3－1B(第 94 页)

1. (1)$\boldsymbol{x}=(1,1,-1)$；　(2) $\boldsymbol{x}=(1,1,1)$.

2. 是.

3. 共面.

4. (1) $\left(\dfrac{\sqrt{38}}{19},-\dfrac{3\sqrt{38}}{38},\dfrac{5\sqrt{38}}{38}\right)$；　(2) $\left(0,-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

5. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$或$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6. **解**：$\overrightarrow{AB}=(6,-5,5)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3,6)$，$\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}=(6+x,-5-3x,5+6x)$.

要使$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$垂直，只需满足$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC})=0$，即

$6(6+x)+(-5)\times(-5-3x)+5\times(5+6x)=0$，得 $x=-\dfrac{86}{51}$.

所以存在实数 x，使$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$垂直.

练习 A(第 96 页)

1. $A(5, -9, 3)$， $B(5, 0, 3)$， $C(5, 6, 3)$， $D(5, 15, 3)$;图略.

2. **解**：设 $C(x_0, y_0, z_0)$，则$\overrightarrow{BC}=(x_0-3, y_0-4, z_0)$，$\overrightarrow{OA}=(3, 4, 5)$.

因为 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$，所以 $(x_0-3, y_0-4, z_0)=(6, 8, 10)$.

即$\begin{cases}x_0-3=6\\y_0-4=8\\z_0=10\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_0=9\\y_0=12\\z_0=10\end{cases}$ 即 $C(9, 12, 10)$.

3. $Q(4, 3, 4)$， $P\left(-\frac{4}{5}, 3, \frac{4}{5}\right)$.

练习 B (第 97 页)

1. 质点 1 s 后到达点 $A_1(5, 3, 12)$，3 s 后到达点 $A_2(5, 9, 20)$，5 s 后到达点 $A_3(5, 15, 28)$.
2. $C\left(\frac{19}{5}, \frac{37}{5}, 5\right)$.
3. $D(1, 2, 0)$.
4. $D(2, 0, 5)$.

练习 A (第 98 页)

1. **证明**：设$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$.

因为 $|BM|=\frac{1}{3}|BD|$，$|AN|=\frac{1}{3}|AE|$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

又知点 M 不在平面 CDE 内，所以 MN//平面 CDE.

2. **证明**：因为 $\frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OB}=\frac{OG}{OC}=\frac{OH}{OD}=k$，所以 $EH \mathrel{\underline{\parallel}} kAD$，$EF \mathrel{\underline{\parallel}} kAB$，$FG \mathrel{\underline{\parallel}} kBC$，$GH \mathrel{\underline{\parallel}} kCD$.

即$\overrightarrow{EH}=k\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{FG}=k\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{GH}=k\overrightarrow{CD}$.

又知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$.

因为 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$，$E$，$F$，$H$ 三点不共线，所以 点 E，G，F，H 共面.

3. **证明**：$\overrightarrow{AB}=(-1, 3, -5)$，$\overrightarrow{AC}=(-3, 5, -5)$，$\overrightarrow{AD}(-2, 2, 0)$，

则$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=(-1, 3, -5)=\overrightarrow{AB}$.

又因为$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AD}$不共线，所以点 A，C，D 不共线，所以四点 A，B，C，D 共面.

练习 B（第 99 页）

1. **证明**：因为 E，F，G，H 分别为 AB，BC，CD，DA 的中点，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$，四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

2. **证明**：因为 N 为 CA' 的中点，所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA'})$.

又因为 M 为 BB' 的中点，$\overrightarrow{MB'}=-\overrightarrow{MB}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{B'A'})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B'A'})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

所以 $MN/\!/BD$，$MN=\frac{1}{2}BD$.

3. (1) 点 M 在平面 ABC 内；(2) 点 M 不在平面 ABC 内.

练习 A（第 101 页）

1. **证明**：不妨设正方体的棱长为 1，建立以 D 为原点 O 的空间直角坐标系$[O;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DD'}]$，由已知条件可得

$E\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$，$F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$，$A'(1,\ 0,\ 1)$，$D(0,\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A'D}=(-1,\ 0,\ -1)$，

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A'D}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\cdot(-1,\ 0,\ -1)=\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}=0$，

所以 $EF\perp A'D$.

2. **证明**：设$\frac{AM}{AD'}=\frac{BN}{BD}=k$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BD}-k\overrightarrow{AD'}$.

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{b}+k(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-k(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=(1-k)\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=[(1-k)\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{c}]\cdot(-\boldsymbol{a})=-(1-k)\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $MN\perp AD$.

3. **解**：因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $OC\perp OD$，SO 为棱锥的高. 以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OS}$ 分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

因为菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60^\circ$，

所以 $OB=AB\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，$OA=AB\cdot\sin 30^\circ=1$，$OC=OA=1$，$OD=OB=\sqrt{3}$.

E, F 分别为 SA 和 SC 的中点,

所以 $B(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$, $F\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$, $D(0,\ \sqrt{3},\ 0)$, $E\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{DE}\left(-\frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$.

$$\cos\langle\overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=-\frac{2}{11}.$$

所以异面直线 BF 与 DE 所成的角为 $\arccos\frac{2}{11}$.

练习 B（第 102 页）

1. **解**：设正方体的棱长为 1.

(1) $E\left(1,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$, $F\left(0,\ \frac{5}{8},\ 1\right)$, $G\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$;

(2) $\overrightarrow{EG}=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{FG}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF}=\left(-1,\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right)$,

$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FG}=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ -\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,

所以 $EG\perp FG$，即$\triangle EGF$ 为直角三角形.

2. **证明**：$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,

所以$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$，即四边形 $MNPQ$ 为平行四边形.

因为$|\overrightarrow{MQ}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{QP}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$，因为$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AC}|$,

所以$|\overrightarrow{MQ}|=|\overrightarrow{QP}|$，即四边形 $MNPQ$ 为菱形.

$$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DA})$$

$$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{DC}|\cos 120^\circ-|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{DA}|\cos 120^\circ)=0,$$

即 $MQ\perp QP$，所以四边形 $MNPQ$ 为正方形.

3. **解**：因为正四面体 $OABC$，所以$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

因为 M, N，分别为 OA, BC 的中点,

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$.

$$\cos\langle\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\right||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\sqrt{\frac{1}{4}(|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})}\cdot|\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{\sqrt{3|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos 60^\circ}}=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{\sqrt{2}|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\pi}{4}$，即 MN 与 OB 所成的角为$\frac{\pi}{4}$.

同理可得 MN 与 OC 所成的角为$\frac{\pi}{4}$.

4. **解**：以 D 为原点 O 建立空间直角坐标系 $[O;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DD'}]$.

由已知条件可得 $E\left(a,\ \frac{a}{2},\ 0\right)$，$F\left(0,\ a,\ \frac{a}{2}\right)$，$B(a,\ a,\ 0)$，$D'(0,\ 0,\ a)$.

$\overrightarrow{EF}=\left(-a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD'}=(-a,\ -a,\ a)$.

$$\cos\langle\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{BD'}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD'}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{BD'}|}=\frac{(-a)\times(-a)+\frac{a}{2}\times(-a)+\frac{a}{2}\times a}{\sqrt{(-a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+(-a)^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

所以$\langle\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{BD'}\rangle=\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$，即直线 EF 与 BD'所在的角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

练习 A(第 105 页)

1. **解**：点 B，C 确定的位置向量$\overrightarrow{BC}$是平面 ADM 的法向量，因为 $AB=AC$，$BD=CD$，M 为 BC 中点，所以 $BC\perp AM$，$BC\perp DM$，$AM\cap DM=M$，从而 $BC\perp$平面 ADM；
平面 ABC 与平面 ADM 垂直，平面 BDC 与平面 ADM 垂直，因为平面 ABC，平面 BDC 都经过了平面 ADM 的垂线 BC，由面面垂直的判定定理可得结论.

2. $\overrightarrow{BB'}$ 为平面 ABC 的一个法向量，$\overrightarrow{BD'}$ 为平面 $AB'C$ 的一个法向量.

3. **解**： 设平面 ABC 的一个单位法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则 $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$.　①

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1,\ 0)$，　$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 1)$.

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x_0+y_0+z_0)\cdot(-1,\ 1,\ 0)=-x_0+y_0=0$，　②

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_0+y_0+z_0)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=-x_0+z_0=0$，　③

由①②③得 $|x_0|=|y_0|=|z_0|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $x_0=y_0=z_0$.

所以 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$是平面 ABC 的一个单位法向量.

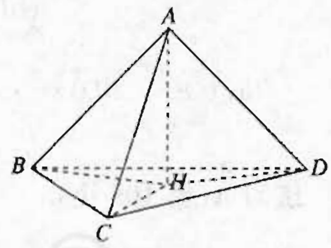
4. **证明**：因为 $AC=BC$，D 为 AB 的中点，所以 $CD\perp AB$，即 $OC\perp AB$.
又因为 $PO\perp$平面 ABC，OC 为 PC 在平面 ABC 内的射影，由三垂线定理得 $AB\perp PC$.
5. **证明**：因为 $PA\perp$底面 AC，所以 AB 为 PB 在底面 AC 内的射影.
$BC\perp PB$，由三垂线定理的逆定理可得 $BC\perp AB$.
又因为底面 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $ABCD$ 是矩形.

练习 B（第 105 页）

1. 对角面 $BDD'B'$的法向量为$\overrightarrow{AC}$，对角面 $ACC'A'$的法向量为$\overrightarrow{BD}$.

因为$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以面 $BDD'B'\perp$面 $ACC'A'$.

2. $\pm\left(\frac{20\sqrt{769}}{769},\ \frac{15\sqrt{769}}{769},\ \frac{12\sqrt{769}}{769}\right)$.
3. (1) AC，BC，AB；　(2) BC；　(3) $\mathrm{Rt}\triangle PCA$，$\mathrm{Rt}\triangle PCB$，$\mathrm{Rt}\triangle ACB$.
4. **证明**：过 A 作 $AH\perp$平面 BCD，垂足为 H，连接 BH，CH，DH.
因为 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，由三垂线定理的逆定理得 $BH\perp CD$，$CH\perp BD$.
所以 H 为$\triangle BCD$ 的垂心，从而 $DH\perp BC$，由三垂线定理得 $AD\perp BC$.



（第 4 题）

练习 A（第 108 页）

1. (1) 3；　(2) 10；　(3) 0；　(4) 2.5.

2. BD_1 与平面 AC 所成角为$\angle DBD_1$，$\cos\angle DBD_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

BD_1 与平面 BA_1 所成角为$\angle D_1BA_1$，$\cos\angle D_1BA_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

BD_1 与平面 BC_1 所成角为$\angle D_1BC_1$，$\cos\angle D_1BC_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. BD_1 与面 AC，面 A_1C_1 所成角的余弦均为$\frac{\sqrt{30}}{6}$，

BD_1 与面 A_1D，面 B_1C 所成角的余弦均为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

BD_1 与面 A_1B，面 D_1C 所成角的余弦均为$\frac{\sqrt{30}}{6}$.

练习 B（第 108 页）

1. 证明：由公式①有

$$\cos\angle PAB=\cos\angle PAM\cdot\cos\angle BAM,$$
$$\cos\angle PAC=\cos\angle PAM\cdot\cos\angle CAM,$$

又因为$\angle PAB=\angle PAC$,因此

$$\cos\angle PAM\cdot\cos\angle BAM=\cos\angle PAM\cdot\cos\angle CAM,$$

又$\angle PAM\neq\frac{\pi}{2}$,所以

$$\cos\angle BAM=\cos\angle CAM.$$

因此$\angle BAM=\angle CAM$.

2. 45°.

3. **证明**：设$\angle BAC$的平分线为AD，平面α经过AD，平面α的法向量为$\boldsymbol{n}$，AB，AC与平面α成的角为θ_1，θ_2.

在AB，AC上分别取单位向量$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{e}_2$，由向量加法的平行四边形法则得$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

在角平分线AD上，因$\boldsymbol{n}\perp$平面α，则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，即$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=0$，所以$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2$.

因为$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{e}_1|}\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1|}{|\boldsymbol{n}|}$，$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)\right|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{e}_2|}\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1|}{\boldsymbol{n}}$,

所以$\sin\theta_1=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)\right|=\sin\theta_2$，$\theta_1$，$\theta_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则$\theta_1=\theta_2$.

所以原命题正确.

练习 A（第 111 页）

1. **解**：取BC的中点D，因为正三棱锥S-ABC的棱长都为1，

所以　$SD\perp BC$，$AD\perp BC$.

设$\langle\overrightarrow{SD},\overrightarrow{AD}\rangle=\theta$，则

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{SD}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{\left(\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2\right)\\&=\frac{4}{3}\left(|\overrightarrow{SB}||\overrightarrow{AB}|\cos 60^\circ+\frac{1}{2}|\overrightarrow{SB}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ+\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cos 120^\circ+\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2\right)\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以$\theta=\arccos\frac{1}{3}$，即侧面与底面的夹角为$\arccos\frac{1}{3}$.

2. **解**：因为$AC\perp AB$，$BD\perp AB$，AC，BD分别在二面角的两个面内，且二面角为90°，

所以　$AC\perp BD$，即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

$$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{|\overrightarrow{CD}|^2}=\sqrt{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2}=\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2}=7\sqrt{2},$$

所以　CD 长为 $7\sqrt{2}$.

3. **解**：设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$.

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+2y=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+3z=0$，得 $x=2y$，$x=3z$.

令 $x=6$，则 $y=3$，$z=2$.

所以平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(6,\ 3,\ 2)$，平面 xOy 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,\ 0,\ 1)$，平面 yOz 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,\ 0,\ 0)$，平面 zOx 的法向量 $\boldsymbol{n}_3=(0,\ 1,\ 0)$，

$\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_1\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}=\dfrac{2}{7\times1}=\dfrac{2}{7}$.

同理可得 $\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{6}{7}$，$\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}_3\rangle=\dfrac{3}{7}$.

所以　平面 xOy，yOz，zOx 与平面 ABC 夹角的余弦分别为 $\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{6}{7}$，$\dfrac{3}{7}$.

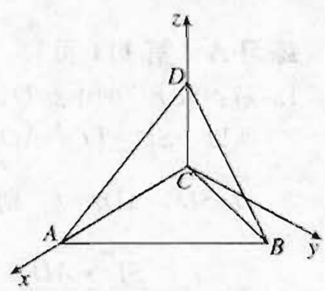
4. (1) 30°；(2) 60°；(3) 30°.

练习 B（第 111 页）

1. (1) $\dfrac{1}{3}$；(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. **解**：以 C 为坐标原点，CD 所在直线为 z 轴，CA 所在直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $CD\perp$ 平面 ABC，所以 $\triangle ABC$ 在平面 xOy 内.



（第 2 题）

由已知可得 $C(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，$B(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0)$.

平面 ADC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\ 0,\ 1)$，

$\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$.

设平面 BAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$，则 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

所以　$(x,\ y,\ z)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=-x+z=0$，

$$(x,\ y,\ z)\cdot(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0)=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,$$

得 $\begin{cases}x=z\\x=\sqrt{3}y\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=3$，$z=3$，得 $\boldsymbol{n}_2=(3,\ \sqrt{3},\ 3)$.

所以　$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{(0,\ 1,\ 0)\cdot(3,\ \sqrt{3},\ 3)}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以　$\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle\approx67.8^\circ$，即二面角 $B-AD-C$ 的大小为 67.8°.

练习 A（第 114 页）

1. 平面.
2. 与 α，β 距离均为 2 cm 的平面.
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

练习 B（第 114 页）

1. $OA=6\sqrt{5}$ cm，$OB=4\sqrt{13}$ cm，$OD=13$ cm.
2. P 到这个正三角形各边的距离均为 $\frac{\sqrt{39}}{3}$ cm.
3. **解**：$\overrightarrow{AB}=(-1,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,-2,5)$，$\overrightarrow{OC}=(0,0,5)$.

   设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

   即 $(-1,2,2)\cdot(x,y,z)=-x+2y+2z=0$，

   $(-2,-2,5)\cdot(x,y,z)=-2x-2y+5z=0$，

   得 $\begin{cases}x-2y-2z=0\\2x+2y-5z=0\end{cases}$

   令 $z=k$，得 $x=\frac{7k}{3}$，$y=\frac{k}{6}$，$\boldsymbol{n}=(\frac{7k}{3},\frac{k}{6},k)$.

   因此 $\boldsymbol{n}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{n}_0=\left(\frac{14}{\sqrt{233}},\frac{1}{\sqrt{233}},\frac{6}{\sqrt{233}}\right)$.

   所以　点 O 到平面 ABC 的距离 $d=|\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}_0|=\frac{30\sqrt{233}}{233}$.

习题 3－2A(第 115 页)

1. $60°$.
2. (1) $\arctan\frac{3}{5}$；　(2) $\frac{\pi}{2}$；　(3) $\arctan\frac{3}{4}$.
3. (1) $60°$；　(2) $45°$；　(3) $0°$；　(4) $90°$.
4. **解**:因为　AB 是圆的直径,所以　$AM\perp BM$.

   $PA\perp$ 平面 ABM，PM 在平面 ABM 内的射影为 AM.

   由三垂线定理可得 $PM\perp BM$，所以　$\angle AMP$ 的大小即为所求.

   在 $\mathrm{Rt}\triangle AMB$ 中，$AM=4\sin 30°=2$.

   在 $\mathrm{Rt}\triangle PAM$ 中，$\tan\angle PMA=\frac{3}{2}$，　所以　$\angle PMA=\arctan\frac{3}{2}$.

   所以　平面 PBM 与平面 ABM 的夹角为 $\arctan\frac{3}{2}$.

5. $\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

6. 经过$\triangle ABC$的外心且垂直于平面ABC的直线.

7. **解**：(1) 以B为坐标原点O，建立空间直角坐标系$[O;\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BE}]$.

则$B(0,\ 0,\ 0)$，$C(6,\ 0,\ 0)$，$D(3,\ 6,\ 0)$，$E(0,\ 0,\ 5)$，$A(0,\ 6,\ 0)$，

$\overrightarrow{CD}=(-3,\ 6,\ 0)$，$\overrightarrow{CE}=(-6,\ 0,\ 5)$，$\overrightarrow{BE}=(0,\ 0,\ 5)$.

设平面CDE的法向量$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则$\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

即$(-3,\ 6,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)=-3x+6y=0$，

$(-6,\ 0,\ 5)\cdot(x,\ y,\ z)=-6x+5z=0$，

得$\begin{cases}x=2y\\ x=\frac{5}{6}z\end{cases}$

令$x=10k$，得$z=12k$，$y=5k$，则$\boldsymbol{n}=(10k,\ 5k,\ 12k)$.

所以　$\boldsymbol{n}$的单位向量$\boldsymbol{n}_0=\left(\frac{10}{\sqrt{269}},\ \frac{5}{\sqrt{269}},\ \frac{12}{\sqrt{269}}\right)$.

点B到平面CDE的距离$d=|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_0|=\frac{12\times5\sqrt{269}}{269}=\frac{60\sqrt{269}}{269}$.

(2) 由 (1) 知平面CDE的单位法向量$\boldsymbol{n}_0=\left(\frac{10}{\sqrt{269}},\ \frac{5}{\sqrt{269}},\ \frac{12}{\sqrt{269}}\right)$.

平面ACD的法向量为$\boldsymbol{m}=(0,\ 0,\ 1)$，

$$\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}_0\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}_0}{|\boldsymbol{m}|\ |\boldsymbol{n}_0|}=\frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{269}},\ \frac{5}{\sqrt{269}},\ \frac{12}{\sqrt{269}}\right)}{1\times1}=\frac{12\sqrt{269}}{269}.$$

所以　平面CDE与平面ACD所成角为$\arccos\frac{12\sqrt{269}}{269}$.

习题 3－2B（第 115 页）

1. **解**：作$\angle BOC$的平分线OD，交BC于D.

因为　$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=60°$.

所以　OA在平面OBC内的射影在OD上，所以　$\angle AOD$即为所求.

由$\cos\angle AOB=\cos\angle AOD\cdot\cos\angle BOD$，得$\cos 60°=\cos\angle AOD\cdot\cos 30°$.

即$\cos\angle AOD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以　$\angle AOD=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

交线OA与平面OBC所成的角为$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. **解**：(1) 因为　平面$ABC\perp$平面DBC，$\angle CBA=\angle CBD=120°$，平面$ABC\cap$平面$DBC=BC$.

所以　过A作$AE\perp BC$，交CB的延长线于E，从而$AE\perp$平面DBC，则$AE\perp DB$.

所以　$\angle ADE$为AD所在直线和平面BCD所成角.

因为　$\angle ABE=\angle DBE$，$AB=DB$，$EB=EB$，所以　$\triangle AEB\cong\triangle DEB$.

所以　$AE=DE$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中$\angle ADE=45°$.

即 AD 所在直线和平面 BCD 所成的角为 $45°$.

$$(2)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos60°+|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BC}|\cos 120°.$$

因为　$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BD}|$，所以　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$.

所以　AD 所在直线与直线 BC 成的角为 $90°$.

(3) 过 A 作 $AF\perp BD$ 交 BD 于 F，连接 EF.

因为　$AE\perp$平面 DBC，EF 是 AF 在平面 DBC 内的射影，

所以　$EF\perp BD$，则$\angle AFE$ 的补角即为所求角的大小.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中，$AE=AB\cdot\sin(180°-120°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$，$EB=AB\cdot\cos(180°-120°)=\dfrac{1}{2}AB$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFB$ 中，$EF=EB\cdot\sin(180°-120°)=\dfrac{1}{2}AB\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$\tan\angle AFE=\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{\sqrt{3}}{4}AB}=2$，则$\angle AFE=\arctan 2$，

所以　二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $\pi-\arctan 2$.

3. $3\sqrt{3}$ cm.

4. **解**：以 A 为坐标原点 O，建立空间直角坐标系 $[O;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}]$.

设正方体的边长为 $2a$，则 $A(0,0,0)$，$E(2a,0,a)$，$D'(0,2a,2a)$，$F(a,2a,0)$，$A'(0,0,2a)$.

(1) $\overrightarrow{AE}=(2a,0,a)$，　$\overrightarrow{D'F}=(a,0,-2a)$.

$$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{D'F}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D'F}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{D'F}|}=\frac{(2a,0,a)\cdot(a,0,-2a)}{\sqrt{(2a)^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+(-2a)^2}}=\frac{2a^2-2a^2}{5a^2}=0,$$

所以　$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{D'F}$，即 AE 与 $D'F$ 的夹角为 $90°$.

(2) 因为　$D'A'\perp$平面 $A'ABB'$，$AE\subset$平面 $A'ABB'$，

所以　$D'A'\perp AE$，又 $D'F\perp AE$，$D'F\cap D'A'=D'$.

所以　$AE\perp$平面 $A'D'F$.

5. $BC=\sqrt{100-24\sqrt{3}}$ cm.

巩固与提高（第 118 页）

1. (1) 真；　(2) 假；　(3) 真；　(4) 真；　(5) 假；　(6) 假.

2. (1) 平面；　(2) 1∶9；　(3) $\sqrt{2a^2+b^2}$；　(4) $\arctan\sqrt{2}$；　(5) 垂直.

3. **证明**：因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)$.

4. 90°.

5. 略.

6. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$. 由已知$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，

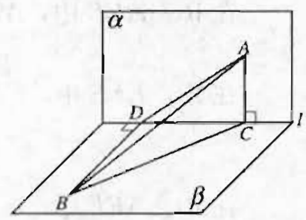
$$|\overrightarrow{AC'}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}$$
$$=\sqrt{1^2+1^2+1^2+2\times1\times1\times\cos60^\circ+2\times1\times1\times\cos60^\circ+2\times1\times1\times\cos60^\circ}=\sqrt{6}.$$

7. $CD=18\sqrt{2}$.

8. (1) 90°；(2) 45°.

9. $\sqrt{313}$ cm.

10. 已知：直二面角$\alpha-l-\beta$，线段AB与平面α，β所成角均为30°.



（第10题）

求：线段AB与l所成的角.

解：过A在面α内作$AC\perp l$交l于C，

过B在面β内作$BD\perp l$交l于D，

因为 直二面角$\alpha-l-\beta$，所以 $AC\perp\beta$，$BD\perp\alpha$，

则$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，$\angle BAD=\angle ABC=30^\circ$.

设$AB=a$，则$AC=\frac{a}{2}$，$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BD=\frac{a}{2}$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\cos\angle ADC=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{CD}|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\rangle+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{3}}{a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=45^\circ$，即线段$AB$与$l$所成的角为$45^\circ$.

11. 30°.

12. **解**：(1) $AC'=\sqrt{5},BD'=\sqrt{11}$；

(2)$AC=\sqrt{2},BD'=\sqrt{11}$,

设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c},\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=120^\circ,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

$$\cos\langle\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{\sqrt{11}\times\sqrt{2}}=\frac{-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{22}}$$

$$=\frac{-1+1+3\times1\times\cos120^\circ+3\times1\times\cos120^\circ}{\sqrt{22}}$$

$$=\frac{-3\sqrt{22}}{22},$$

所以　BD'与AC夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{22}}{22}$.

13. **解**：设D坐标为(x, y, z)，因为平行四边形$ABCD$，所以　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

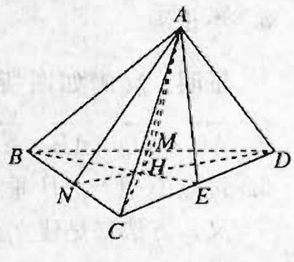
即$(-2, 4, 1)-(1, -3, 0)=(-3, 1, 1)-(x, y, z)$.

整理得$(-3, 7, 1)=(-3-x, 1-y, 1-z)$，

所以　$\begin{cases}-3=-3-x\\7=1-y\\1=1-z\end{cases}$　　解得$\begin{cases}x=0\\y=-6\\z=0\end{cases}$　即$D(0, -6, 0)$.

14. 已知：三棱锥A-BCD，$BC\perp CD$，$BC=6$ cm，$CD=8$ cm，平面ABC，平面ABD，平面ACD与底面BCD所成角为60°，$AH\perp$平面BCD.

求：AH的长.



（第14题）

解：连接HB，HC，HD，过点A作$AM\perp BD$交BD于M，连接HM，过点A作$AN\perp BC$交BC于N，连HN，过点A作$AE\perp CD$交CD于E，连接HE.

因为　$AH\perp$平面BCD，HE是AE在平面BCD内的射影.

所以　$HE\perp CD$，即$\angle AEH=60^\circ$，所以　$HE=\frac{\sqrt{3}}{3}AH$.

同理可得$HM=\frac{\sqrt{3}}{3}AH$，$HN=\frac{\sqrt{3}}{3}AH$，$HM\perp BD$，$HN\perp BC$.

$V_{A\text{-}BCD}=V_{A\text{-}HBC}+V_{A\text{-}HCD}+V_{A\text{-}HBD}$，

即$\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times AH=\frac{1}{3}\times S_{\triangle HBC}\times AH+\frac{1}{3}\times S_{\triangle HCD}\times AH+\frac{1}{3}\times S_{\triangle HBD}\times AH$，

也即$\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}\times6\times HN+\frac{1}{2}\times8\times HE+\frac{1}{2}\times10\times HM$，

所以　$48=(6+8+10)\times\frac{\sqrt{3}}{3}AH$，　得$AH=2\sqrt{3}$ cm.

自测与评估（第119页）

1. A.

2. $\overrightarrow{BA}=(-2, -1, -1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1, -1, 0)$.

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$.

$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$.

3. **解**：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(1,1,1)$.

设所求单位向量为$\boldsymbol{e}=(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{e}=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{e}=0$.

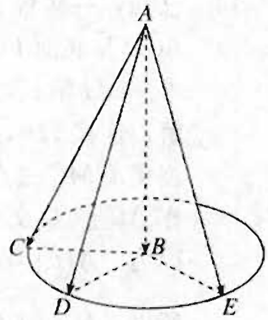
所以 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\-x+y=0\\x+y+z=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{6}\\y=\frac{\sqrt{6}}{6}\\z=-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{6}\\y=-\frac{\sqrt{6}}{6}\\z=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$

即与$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{OC}$都垂直的单位向量为$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

4. $A'(3,1,8)$，$B'(3,3,6)$，$C'(2,3,6)$.

5. 不正确.

证明：反例如图所示，AB垂直于圆锥的底面，满足$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$，但$A$，$C$，$D$，$E$不共面.



（第5题）

6. 过点B且与AB垂直的平面.（提示：方法一是利用数量积的几何意义；方法二是建立空间直角坐标系，求M的轨迹方程.）

7. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}a^2$；$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$；$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2$.

8. $54.6°$.

9. **证明**：如果$AD^2+BC^2=CD^2+AB^2$（$*$），等价于$AD^2-CD^2=AB^2-BC^2$.

因为 $AD^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}$，$BC^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}$，

$CD^2=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}$，$AB^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}$.

所以 （$*$）$\Leftrightarrow(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{CA}=0$

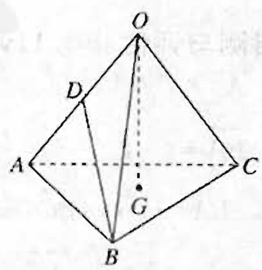
$\Leftrightarrow(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

以上过程全部为等价，可以逆推，证明完毕.

10. **解**：(1)如图，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO})\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，



（第10题）

$\cos\langle\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

所以　异面直线 BD 与 AC 所成角的大小的 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)易知 O 在底面 ABC 上的投影 G 为 $\triangle ABC$ 的中心.

因此　$OG=\sqrt{OC^2-GC^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

所以　$V_{O\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot|OG|=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

11. **解**：(1) 如图所示，连接 AC，且底面 $ABCD$ 为正方形.

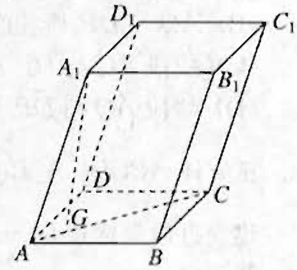
因为　$\angle BAA_1=\angle DAA_1$，

所以　A_1 在底面 $ABCD$ 上的投影 G 落在 AC 上.

于是　AA_1 与底面所成角为 $\angle CAA_1$.

可得　$\cos\angle CAA_1=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=\dfrac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}}{3\sqrt{2}\cdot5}$

$=\dfrac{5\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}+5\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}}{3\sqrt{2}\cdot5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



(第 11 题)

因此　AA_1 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°.

另解：$\cos\angle CAA_1=\dfrac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(2)$V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot|GA_1|=9\cdot5\cdot\sin\angle GAA_1=\dfrac{45\sqrt{2}}{2}$.

12. $2\sqrt{2}$.

Ⅳ　反馈与评价

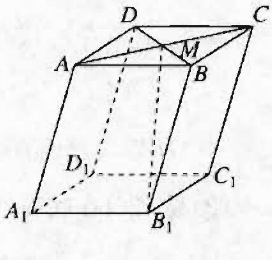
一、知识与方法测试（100 分钟　满分 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AC 与 BD 的交点，若 $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是（　　）.

(A) $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　　(B) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　　　(D) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



（第 1 题）

2. 三棱锥的三条侧棱两两垂直，长分别为 2，2，3，则其顶点到底面的距离为（　　）.

(A) $\frac{7}{3}$　　(B) $\sqrt{17}$　　(C) $\frac{3}{11}\sqrt{22}$　　(D) $\frac{\sqrt{17}}{3}$

3. 在四面体 $ABCD$ 中，P 在面 ABC 内，Q 在面 BCD 内，且满足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$，若 $\frac{x}{y}=\frac{s}{t}$，则线段 AQ 与 DP 的关系是（　　）.

(A) AQ 与 DP 所在直线是异面直线

(B) AQ 与 DP 所在的直线平行

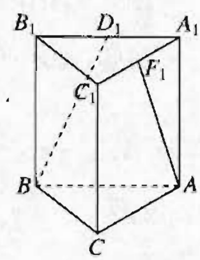
(C) 线段 AQ 与 DP 必相交

(D) 线段 AQ 与 DP 延长后相交

4. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 所在直线为 x，y，z 轴建立直角坐标系 $Dxyz$，且 MN 是 AB_1 与 BC_1 的公垂线，M 在 AB_1 上，N 在 BC_1 上，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　　）.

(A) $\left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　　　　(B) $\left(\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$

(C) $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$　　　　(D) $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$



（第 5 题）

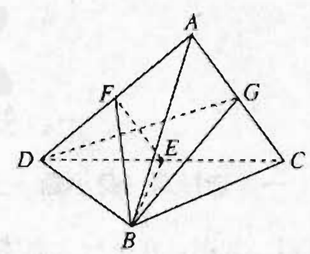
5. 如图：$A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱，$\angle BCA=90^\circ$，点 D_1，F_1 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点. 若 $BC=CA=CC_1$，则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{30}}{15}$　　(D) $\frac{\sqrt{15}}{10}$

6. 在直角坐标系中，设 $A(-2,\ 3)$，$B(3,\ -2)$，沿 x 轴把直角坐标平面折成大小为 θ 的二面角后，$|AB|=4\sqrt{2}$，则 θ 的值为（　　）.

(A) 30°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 120°

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）



（第 8 题）

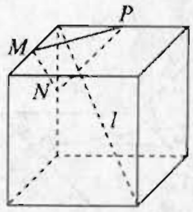
7. 已知四面体 $P-ABC$，$\angle PAB=\angle BAC=\angle PAC=60^\circ$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AP}|=3$，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}|=$________.

8. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$CD=DA$，E，F，G 分别是 CD，DA 和对角线 AC 的中点，则平面 BEF 与平面 BDG 的位置关系是________.

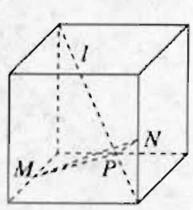
9. 平面 α，β，γ 相交于一点 O，且两两垂直，点 P 是平面 α，β，γ 外任一点且 PO 与平面 α，β，γ

所成的角是 x，y，z，则 $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=$________.

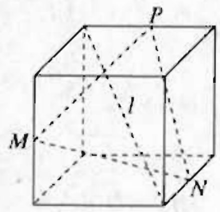
10. 下列五个正方体图形中，l 是正方体的一条对角线，点 M，N，P 分别为其所在棱的中点，能得出 $l\perp$ 面 MNP 的图形的序号是________（写出所有符合要求的图形）.



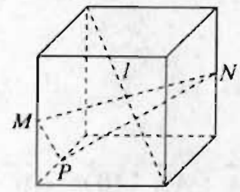
①



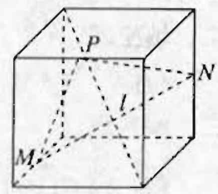
②



③



④



⑤

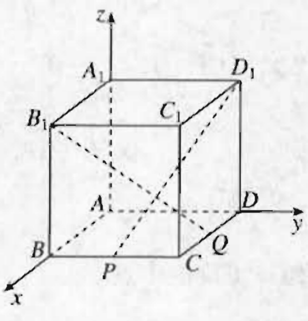
三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分）

11. （12 分）在 120° 二面角的棱上，有两个点 A，B，AC，BD 分别是在这个二面角的两个面内垂直于 AB 的线段. 已知 $AB=4$ cm，$AC=6$ cm，$BD=8$ cm. 求 CD 的长.

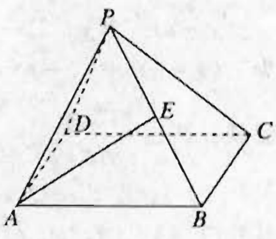
12. （12 分）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P，Q 分别是 BC，CD 上的动点，且 $|PQ|=\sqrt{2}$，建立如图所示的坐标系：

(1) 确定 P，Q 的位置，使得 $B_1Q\perp D_1P$；

(2) 当 $B_1Q\perp D_1P$ 时，求二面角 C_1-PQ-A 的大小.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. （12 分）如图所示，PD 垂直于正方形 $ABCD$ 所在平面，$AB=2$，E 是 PB 的中点，$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

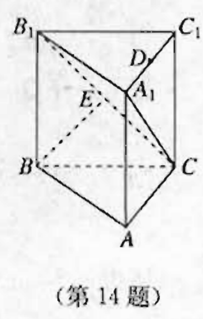
(1) 建立适当的空间坐标系，写出点 E 的坐标；

(2) 在平面 PAD 内求一点 F，使 $EF\perp$ 平面 PCB.

14. （14 分）如右图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是以 $\angle ABC$ 为直角的等腰直角三角形，$AC=2a$，$BB_1=3a$，D 为 A_1C_1 的中点，E 为 B_1C 的中点：

(1) 求直线 BE 与 A_1C 所成的角；

(2) 在线段 AA_1 上是否存在点 F，使 $CF\perp$ 平面 B_1DF，若存在，求出 $\overrightarrow{AF}$；若不存在，说明理由.



（第 14 题）

知识与方法测试参考答案

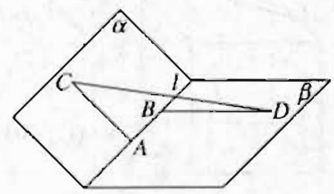
一、选择题

1. A． 2. C. 3. C. 4. C. 5. A. 6. C.

二、填空题

7. $\sqrt{31}$. 8. 垂直. 9. 2. 10. ①④⑤.

三、解答题



(第11题)

11. 解：由 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=120°$，

所以

$$|\overrightarrow{CD}|^2=\overrightarrow{CD}^2$$

$$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$$

$$=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

$$=36+16+64+2\times6\times8\times\frac{1}{2}$$

$$=164,$$

所以 $|\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{41}$，即 CD 的长为 $2\sqrt{41}$.

12. 解：(1) 设 $P(2,y,0)$，$Q(x,2,0)$，$x>0$，$y>0$.

由于 $B_1(2,0,2)$，$D_1(0,2,2)$，$\overrightarrow{B_1Q}=(x-2,2,-2)$，$\overrightarrow{D_1P}=(2,y-2,-2)$，

所以 $2(x-2)+2(y-2)+4=0$，即 $x+y-2=0$. ①

又因为 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$， ②

①与②联立解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

所以 $P(2,1,0)$，$Q(1,2,0)$，即 P，Q 分别为 BC，CD 的中点.

(2) 当 $B_1Q\perp D_1P$ 时，P，Q 分别为 BC，CD 的中点.

由于 $C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

在 $\triangle C_1PQ$ 中 $PQ=\sqrt{2}$，$C_1P=\sqrt{5}$，$C_1Q=\sqrt{5}$，

所以 PQ 边上的高 $h=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

得 $S_{\triangle C_1PQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$.

记 C_1-PQ-A 的大小为 θ，

则 $\cos(\pi-\theta)=\frac{S_{\triangle PCQ}}{S_{\triangle C_1PQ}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$，

所以 $\theta=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

即二面角 C_1-PQ-A 的大小为 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

13. **解**：(1) 以 DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系.
$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$.

设 $P(0,0,2m)$，　$E(1,1,m)$，　所以 $\overrightarrow{AE}=(-1,1,m)$，　$\overrightarrow{DP}=(0,0,2m)$.

所以　$\cos\langle\overrightarrow{PD},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{2m^2}{\sqrt{1+1+m^2}\cdot 2m}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，　得　$m=1$.

因此　点 E 坐标是 $(1,1,1)$.

(2) 因为　$F\in$ 平面 PAD，所以　可设 $F(x,0,z)$，　$\overrightarrow{EF}=(x-1,-1,z-1)$.

又因为　$EF\perp$ 平面 PCB，所以　$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{CB}$.

所以　$(x-1,-1,z-1)\cdot(2,0,0)=0$，即 $x=1$.

因为 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{PC}$，

所以　$(x-1,-1,z-1)\cdot(0,2,-2)=0$，得 $z=0$.

所以　点 F 的坐标是 $(1,0,0)$，即点 F 是 AD 的中点.

14. **解**：(1) 以 B 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为　$AC=2a$，$\angle ABC=90^\circ$，所以　$AB=BC=\sqrt{2}a$.

所以　$B(0,0,0)$，　$C(0,\sqrt{2}a,0)$，　$A(\sqrt{2}a,0,0)$，

$A_1(\sqrt{2}a,0,3a)$，　$C_1(0,\sqrt{2}a,3a)$，　$B_1(0,0,3a)$，

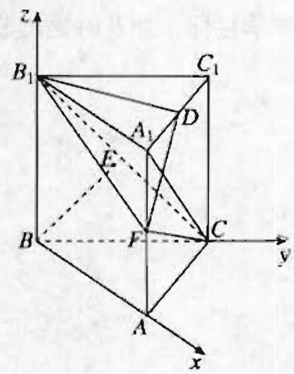
$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,3a\right)$，　$E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$，

$\overrightarrow{CA_1}=(\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a,3a)$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$，

$|\overrightarrow{CA_1}|=\sqrt{13}a$，$|\overrightarrow{BE}|=\frac{\sqrt{11}}{2}a$.

因为　$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{BE}=0-a^2+\frac{9}{2}a^2=\frac{7}{2}a^2$.

所以　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{CA_1}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{7\sqrt{143}}{143}$.



（第 14 题）

(2) 假设存在点 F，使 $CF\perp$ 平面 B_1DF，其实只要 $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{B_1F}$ 且 $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{B_1D}$. 不妨设 $AF=b$.

则 $F(\sqrt{2}a,0,b)$，　$\overrightarrow{CF}=(\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a,b)$，$\overrightarrow{B_1F}=(\sqrt{2}a,0,b-3a)$，$\overrightarrow{B_1D}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$.

因为　$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{B_1D}=a^2-a^2=0$，　所以　$\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{B_1D}$ 恒成立.

$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{CF}=2a^2+b(b-3a)=0$，　得 $b=a$ 或 $b=2a$.

故当 $AF=a$ 或 $2a$ 时，　$CF\perp$ 面 B_1DF.

二、评价建议

1.“双基”的书面评价．由于本章是数学 2 立体几何的延伸，应对数学 2 中相应章节的基础知识和基本技能作一诊断性评价测试，应侧重点、线、面之间的位置关系．主要内容为：平面的基本性质，空间中的平行关系及垂直关系．在学习过程中可进行两次阶段诊断性评价测试，第一次侧重考查空间向量及其运算，把好运算关；第二次侧重空间向量在立体几何中的应用，主要考查以向量为工具对空间点、线、面之间的位置关系的准确刻画及角、距离的求解．

2．数学能力的评价．通过本章内容的学习，培养学生的空间想象能力是主要目的之一．将空间图形中难以论证求解的问题，借助向量工具，转化为可操作的程序化运算，将形与数紧密结合起来，在命制测试题时，既可从一些熟悉的几何体，如四面体、正方体、长方体、平行六面体等有形的图形中获得感知，又可进行抽象的向量运算，获得准确的结论．

3．学生自我建构，自我评价．学生学习的一个重要环节是对所学知识与方法的一个自我建构，因此可让学生对本章内容写出学习小结．例如，平行关系、垂直关系、距离、角度，通过小论文的方式，请学生参与评议，评出优秀论文．必要时教师可以对优秀论文加以指导，推荐到相应数学杂志上发表．借此激发学生学习数学的兴趣．

需要注意的是，我们教学和学习过程中的评价，不能仅仅为了评价而评价，评价的目的要更有利于教学和学习活动的有效开展．应该通过对学生学习过程和结果的综合评价，反思我们的教学活动是否偏离了教学目标，并及时提出改进措施．