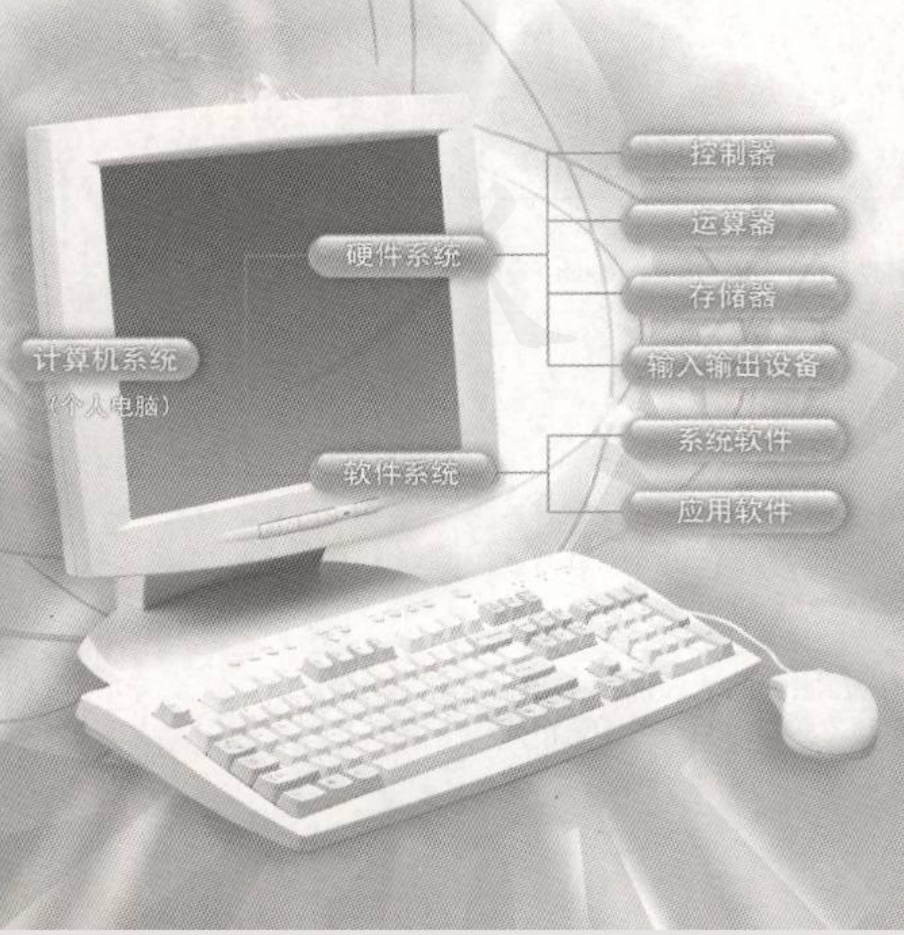
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 1-2

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　高存明　韩际清

本册主编　陈宏伯　祝广文
审　　定　高尚华
编　　者　杨长智　祝广文　张成钢　孙光泽
　　　　　王　强　尹玉柱　高常华　刘　莉
　　　　　周晓颖　韩际清　高尚华
责任编辑　龙正武
版式设计　王　喆
封面设计　李宏庆

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修1-2 B版 教师教学用书／人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著. —3版. —北京：人民教育出版社，2007.6（2018. 7重印）
ISBN 978-7-107-19136-7

Ⅰ. ①普…　Ⅱ. ①人… ②课…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 031321 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修 1-2　B版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京天宇星印刷厂
版　　次　2007 年 6 月第 3 版
印　　次　2018 年 7 月第 14 次印刷
开　　本　890 毫米 × 1240 毫米　1/16
印　　张　5.5
字　　数　120 千字
定　　价　22.40 元

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书　数学选修1-2（B版）》的使用编写的教师教学用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务．

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务．

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价．

教材的课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求．考虑到教学内容要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整．教材编写时，把练习、习题分为A，B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求，以满足条件较好学校的教学需要．

在教材分析中，首先分析内容结构、作用与地位，指出本章知识的重点与难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议．

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考．

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出简单的反馈与评价，给出了评价建议，以检查学生学习本章内容的效果．

在教科书中，我们已经对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修1-2中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材．

一、统计案例

这一章首先在章前语中，通过介绍两个实际例子，引起学生学习统计的兴趣．全章分为2节，每节讨论一种统计方法．每节编写的特点是，把一个个案例直接呈现在同学面前，通过探究案例，解决问题，使同学们了解这两种统计方法的基本思想、解决步骤及其初步应用．在这一章的编写中，注意引导学生使用现代计算技术来处理数据．

二、推理与证明

推理与证明专设一章，在我国高中教材中还是首次．没有实际的教学经验供参考．但推理与证明已是学生熟悉的词语，因此，在编写时主要通过实例引起学生对“推理”的兴趣，并引导学生理解各种推理的作用．能够运用合情推理去探索、猜测和归纳出一些数学结论，并能证明结论的正确性．在编写中，重点是通过分析一些定理的证明过程，总结并让学生掌握数学证明的一些基本方法．

三、数系的扩充与复数的引入

这一章，由于教学时间只有几个课时，编写时，主要是通过方程的求根，让学生了解引进复数的意义和作用，了解数学中的内部矛盾如何推动数系的扩充，了解数学中理性思维的重要性.

四、框图

框图是“课程标准”中的新内容，在我国高中数学教学内容中也是首次，没有教学经验. 编写时，根据“课程标准”的精神，选定内容，主要通过实例，让学生进一步学习程序框图，了解工程流程和结构图. 在应用框图的过程中理解它们的特征，初步掌握它们的用法.

在教学中一定要贯彻“温故而知新”的原则. 基础不好难以继续学习，这是数学学习的重要特点，在教材编写中，主要知识点都采取循环方式编写，以达到牢固掌握所学的数学知识的目的.

数形结合是本套教材的重要特色. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直观，形少数时难入微. 数形结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离!”

这段分析精辟地阐述了数形之间的密切关系和相互作用. 教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

本册教师教学用书，得到山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室、山东省实验中学和山东师大附中等单位的大力协助，在此深表谢意.

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时改进.

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
2005年10月

目录

第一章　统计案例

第二章　推理与证明

第四章　框图

第一章

统计案例

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过典型案例，学习常见的统计方法，并能用这些方法解决一些实际问题.
2. 通过对典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及其初步应用.
3. 通过对典型案例的探究，进一步了解回归分析的基本思想、方法及其初步应用.
4. 结合具体的实际问题，了解解决非线性回归问题的思路.
5. 通过独立性检验的学习，加深对统计推断的认识.
6. 通过回归分析的学习，提高对现代计算技术应用于统计方法的认识.

（二）过程与方法目标

1. 经历数据处理的过程，培养学生对数据的直观感觉，认识统计方法的特点，体会统计方法应用的广泛性.
2. 结合数学建模活动，给学生提供一定的实践活动，选择某个案例让学生亲自实践，使学生会将所学的方法进行初步的实际应用.
3. 初步经历案例学习的过程，学习一些重要的统计思想与方法，并通过反思体会案例学习的必要性.

（三）情感、态度与价值观目标

现代社会是信息化的社会，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，做出合理的决策. 本章提供了处理数据的方法，通过对数据的收集、整理和分析，增强学生的社会实践能力，培养学生分析问题、解决问题的能力.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 遵循课标理念，完全通过实例了解统计的基本思想和方法. 教材中没有探讨统计方法的理论根据，但教师一定要从理论上了解统计思想方法，不然很难把握实例的讲解.

2. 教材通过具体例子让学生了解事件独立的概念，为理解独立性检验打下基础.

3. 通过探索与研究让学生理解 χ^2 统计量.

4. 在回归分析的教学中，加强代数方法的分析和应用.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是独立性检验与回归分析，分为两大节.

第一大节是独立性检验. 教材首先通过例 1 学生所熟悉的实例介绍两个事件独立的含义. 接着通过例 2，介绍 2×2 列联表和非常有用的 χ^2 统计量及其表达式，运用 2×2 列联表和 χ^2 表达式得到的数据进行独立性检验，使学生初步理解独立性检验的思想和方法. 然后通过例 3 至例 6 四个案例，应用例 2 讲的方法进行独立性检验，使学生进一步理解独立性检验的思想和方法.

第二大节是回归分析. 它是在必修课程数学 3 中的一元线性回归分析的基础上来讲的. 教材首先通过例 1 对数学 3 中讲到的两个变量的相关性、散点图、回归直线方程等知识进行复习，进一步引出线性模型，求出 a 与回归系数 b 的估计值 $\hat{a}$，$\hat{b}$，说明这是一个很好的估计，得到 Y 对 x 的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$，然后对例 1 的 (2) 进行预测. 接着通过例 2 提出了相关性检验的思想，说明当有把握认为两个量 x 与 Y 之间具有线性相关关系时，求回归直线方程才是有意义的，着重介绍了相关性检验的方法与步骤. 例 3 着重介绍了应用计算器来进行相关性检验、求回归直线方程的系数的计算方法及其必要性. 例 4 着重介绍非线性回归问题，通过适当的变量替换转化为线性回归问题，从而使问题得到解决.

2. 地位与作用

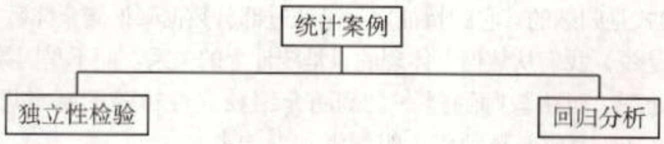
统计是研究如何合理的收集、整理、分析数据的学科. 它可以为人们制定计划、做出决策提供依据. 在日常生活中，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，做出合理的决策. 为了体现统计方法重点在于应用这一特点，实现“课程标准”中提出的目标，教材主要是通过案例来进行教学的.

3. 重点和难点

重点是独立性检验与回归分析的基本思想与方法.

难点是独立性检验与回归分析的初步应用.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　独立性检验	4 课时
1.2　回归分析	4 课时
本章小结	2 课时

（四）教法与学法建议

1.1　独立性检验

1. 本节的重点和难点是独立性检验的思想、方法及其初步应用.

2. 独立性检验这种统计方法，以前高中数学教材没有涉及过. 对于文科学生选修教材，如何来呈现这部分内容？这是个新的课题.

学习独立性检验这种统计方法，需要对事件的独立性的含义有所理解. 希望在理工、经济等方面发展的学生选修 2-3，他们在学习这部分统计案例之前，学习了有关计数原理和概率的知识，对事件的独立性的了解比较透彻，而希望在人文、社会科学等方面发展的学生选修本册教科书 1-2，由于缺少一些概率知识，因而可以通过例 1 学生所熟悉的实例介绍两个事件相互独立的含义，为学生学习后续教材作些准备.

3. 有了例 1 的基础，可以通过教材例 2，探究患慢性气管炎是否与吸烟有关这个实例，着重介绍独立性检验的含义、方法和思想，介绍 2×2 列联表和非常有用的 χ^2 统计量及其表达式，然后运用 2×2 列联表和 χ^2 表达式得到的数据对例 2 的内容进行独立性检验. 接着可以通过教材例 3 至例 6 选用的四个案例，应用上述例 2 讲的方法进行独立性检验，使学生进一步理解独立性检验的方法，能够应用这种统计方法进行独立性检验，体会其统计思想与应用价值.

4. 关于构造 χ^2 统计量的思路，这是个难点. 教材在“探索与研究”中对其进行了介绍. 在教学时，如果有可能，可以组织一些学生在课后进行研究.

在教学独立性检验时，学生应以掌握方法为主，会实际应用就可以了. 对于 χ^2 统计量大小的界定，χ^2 统计量分布研究得到的两个临界值，我们可以只告诉学生结果，使其能够应用进行操作. 其理论基础不作要求.

5. 本章教学通过案例进行是非常必要的，一方面是因为这种统计方法的数学化超出了学生的理解水平，具体的案例容易帮助学生理解问题和方法的实质；另一方面是因为高中阶段统计教学的主要目标是使学生在处理数据过程中学习一些常用的方法，运用所学知识、方法去解决简单的实际问题，进一步

体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，而这些目标的实现需要学生亲自实践.

6. 统计的基本思维模式是归纳的，它的特征之一是通过部分数据来推测全体数据的性质，因此，统计推断是可能犯错误的，也就是说，我们从数据上体现的只是统计上的关系，而不是因果关系（如例 2 与例 6）.

7. 对于例题案例的处理，可由教师通过一个例题介绍独立性检验的基本思想和方法，其余的由学生通过自主学习或合作学习来完成，教师作为组织者和参与者.

1.2 回归分析

1. 本节的重点和难点是回归分析的思想、方法及其初步应用.

2. 本节是必修数学 3 中变量的相关性的延伸，在教学中可以首先引导学生对两个变量的相关性加以复习、回顾. 散点图、回归直线方程等知识，如果学生遗忘，可以通过例 1 进行复习.

3. 在教学例 1 时，可以根据例 1 给出的数据得到的散点图，说明 x 与 Y 之间有近似的线性相关关系，这时可以用一个回归直线方程来反映这种关系. 接着进一步说明在实际测量数据时由于种种原因可能会产生误差，从而引出线性模型，求出 a 与回归系数 b 的估计值 $\hat{a}$，$\hat{b}$，使得全部误差的平方和达到最小，说明这是一个很好的估计，最后得到求 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 的计算公式. 然后求出 Y 对 x 的回归直线方程，对例 1 的（2）进行预测.

4. 在教学例 2 时，应着重说明进行相关性检验的必要性，相关性检验的方法与步骤.

5. 鉴于进行相关性检验、求出回归直线方程的系数，需要进行大量繁杂的计算，在教学例 3 时，应着重引导学生如何应用计算器来完成上述工作，应鼓励学生尽量用计算器来实施上述计算.

6. 在现实生活中，相关性关系是大量存在的，而函数关系是一种理想的关系模型. 相关关系是一种更为一般的关系，除了线性相关的模型以外，还存在着大量非线性相关的例子. 在教学例 4 时，着重说明可以通过适当变量代换，把非线性回归方程转化成线性的，然后对它们进行研究.

7. 本章介绍的独立性检验与回归分析所做的线性相关性检验的思想，实际上都是假设检验的思想. 课程标准在统计案例中有一节是假设检验，还有一节聚类分析，审查委员在审查教材时考虑到学生的负担与接受能力，把这两节删去了. 为了使教师了解假设检验的思想，我们在本册教师教学用书中本章“拓展资源”部分，介绍了上述两节内容. 建议老师们抽时间看一下，会有助于本章的教学.

8. 前面已经说过，本章教学内容的特点是通过一个个实际案例，让学生理解独立性检验与回归分析这两种统计方法的基本思想、方法及其应用. 在教学时，应尽量提供学生感兴趣的实际例子，多给学生提供实践的机会. 本章在习题里也提供了一些实际案例，可结合数学建模活动，让学生亲自实践.

三、拓展资源

（一）假设检验

假设检验是统计推断的一个重要组成部分. 在统计中，我们常常把需要考察的一个命题称为假设，

然后根据样本去推断假设是否成立.

例 1 假设鸡群中感染某种疾病的概率为$\frac{1}{2}$，并且每只鸡是否受感染是相互独立的. 现在任意地抽取 7 只鸡，问它们都没有感染此疾病的概率是多少?

分析：我们先来介绍多个事件相互独立的含义.

设有 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，已知 $P(A_1)=p_1$，$P(A_2)=p_2$，…，$P(A_n)=p_n$. 粗略地说，如果其中每一事件的发生与否不受其他事件影响，就可以认为这 n 个事件是相互独立的. 如果把事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，那么 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的概率

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=p_1p_2\cdots p_n.$$

日常生活中经常会遇到相互独立的事件，例如，多名战士打靶，每人是否命中可以认为是相互独立的；一群高中学生练习投篮，每人是否投中也可以认为是相互独立的.

假定有三个小孩在玩掷骰子的游戏，每人掷一次，自然可以认为他们能否掷出 6 点是相互独立的. 由于每个小孩掷出 6 点的概率等于$\frac{1}{6}$，因此

$$P(\text{“三个小孩都掷出 6 点”})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}.$$

解：题目给出

$$P(\text{“1 只鸡受感染”})=\frac{1}{2},$$

由于事件“1 只鸡受感染”的对立事件是“1 只鸡未受感染”，根据对立事件的概率计算公式，有

$$P(\text{“1 只鸡未受感染”})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

因为这 7 只鸡是否受感染是相互独立的，由上面的分析，可得

$$P(\text{“7 只鸡未受感染”})=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}=0.007\ 8.$$

现在对例 1 的结果作进一步的分析.

上述事件“7 只鸡未受感染”的概率很小，不到千分之八. 我们称这样的事件为小概率事件. 我们还把“小概率事件在一次试验中实际上不可能发生”称为实际推断原理，并在日常生活中经常自觉或不自觉地使用它. 例如，尽管报上偶有报道楼房坍塌的消息，但人们每天都在家中放心地睡大觉，就是因为“楼房坍塌”是一个小概率事件. 又如，不少人喜欢买名牌商品，其中的主要原因是认为名牌商品中出现次品的概率很小，买一次一般碰不上次品.

小概率事件不是不可能事件，它是有可能发生的，只是它发生的概率很小，人们就认为它在一次试验中不会发生. 反过来，在一次试验中就能发生的事件很难让人相信是小概率事件. 例如，去商场给电子表配电池，售货员告诉你，这种品牌的电池质量很好，有百分之九十九的把握能用上一年，结果不到一个月表就不走了. 你一定会想，难道百分之一的倒霉事一次就会遇到? 从而怀疑“99%的电池质量很好”这种说法. 这里就包含了实际推断原理和假设检验的初步思想. 下面通过例子来进一步阐明它.

例 2 假设鸡群中感染某种疾病的概率为$\frac{1}{2}$，并且每只鸡是否受感染是相互独立的. 新发现了一种血清，可能对预防这种疾病有效，为此对任意挑选的 7 只健康的鸡注射了这种血清. 过一段时间后发现，这 7 只鸡都未受感染，试问这种血清是否有效?

解：稍微想一下，可能觉得血清是有效的，全部7只鸡都未得病．但仔细一想，鸡群中有一半的鸡即使不注射血清也不致于受感染，假如所挑选的7只鸡正好属于这一半鸡，注射不注射血清无所谓，岂不反映不出这种血清的效力了吗？这一问题是用下面的假设检验方法来解决的．

1．首先作一统计假设：这种血清无效．

2．然后在上述假设成立的条件下，用统计方法及概率方法进行推理，看看会出现什么结果．

参看例1，我们可以推出

$$P(\text{“7只鸡未受感染”})=0.0078.$$

3．最后用实际推断原理进行推断．上述2表明，“7只鸡未受感染”是小概率事件，它在一次试验中实际上不可能发生．但现在它竟然发生了，表明应该否定原先的假设：这种血清无效，从而认为血清对预防该病是有效的．

例3　据调查，某地市场上的假冒品牌香烟占15%，某商家声称他商店里卖的香烟全是真货．一顾客决定在他的商店里随机挑选20包烟，如果没有买到一包假烟，就相信商家的说法．试分析该顾客的做法是否合理？

分析：如何作统计假设，要看问题的具体要求是什么？或者说，我们非常希望哪一种陈述能实现．这时，通常应把这一陈述的否定作为统计假设，希望最后能推翻它，从而得到令人满意的结果．如果最后不能推翻统计假设，则可以说，“不能拒绝”原来的假设，一般就接受它了．

此外，确定统计假设有时要考虑数学上处理的方便程度．

解：1．作统计假设：商店里有假烟．

2．在上述假设成立的条件下，计算该顾客买到全部真烟的概率．

由于事件“买到一包真烟”的对立事件是“买到一包假烟”，根据对立事件的概率计算公式，我们有

$$P(\text{“买到一包真烟”})=1-15\%=0.85.$$

因为该顾客的20包烟是随机挑选的，可以认为每包烟是不是真烟是相互独立的事件，所以

$$P(\text{“买到20包真烟”})=0.85^{20}=0.039.$$

3．顾客随机地买20包烟全是真烟的概率不到百分之四，是小概率事件，在一次试验中（买20包烟）实际上不可能发生．现在居然小概率事件发生了，表明原先的假设“商店里有假烟”不成立，于是，我们以0.961的概率推断商店里没有假烟．

当然，如果顾客买的烟中发现有假烟，自然就认为假设成立，即商店里有假烟．

该顾客的做法是合理的．

实际推断原理关于小概率的值没有统一界定，因为这是一个实际问题．通常可以把概率小于0.05的事件作为小概率事件，有时也把概率小于0.01（甚至更小）的事件作为小概率事件．

举例来说，如果对人类用的药作假设检验，“小概率”就应该定得严一点；而对家禽、家畜用的药作假设检验，“小概率”可以定得宽一点；对农药（农作物用的药）可以定得更宽一点．但是，“小概率”一般不要超过0.10．

例4　某厂生产了一大批轴承，规定：当次品率不超过5%时可以出厂．一采购员决定：从中随机抽取6个轴承进行检查，如果次品数超过1个，就拒收这批轴承；如果次品数小于等于1，就接受这批轴承．现已经算出，当次品率为5%时正好抽到1个次品轴承的概率是0.2321．试问采购员的决策是否合理？

解：我们用实际推断原理和假设检验方法来分析采购员的决策．

1．首先作统计假设：轴承的次品率为5%．

2. 在上述假设成立的条件下，计算该采购员抽到不止 1 个次品轴承的概率.

由于事件“抽到不止 1 个次品”的对立事件是“抽到的次品数小于等于 1”，我们先来计算后者的概率.

事件“抽到的次品数小于等于 1”可以分解成两个互斥事件“没有抽到次品”与“正好抽到 1 个次品”的并，应用概率的加法公式，有

$$
\begin{aligned}
&P(\text{“抽到的次品数小于等于 1”}) \\
&=P(\text{“没有抽到次品”})+P(\text{“正好抽到 1 个次品”}).
\end{aligned}
$$

因为 6 个轴承是随机抽取的，每个轴承是不是次品可以认为是相互独立的，而 P(“抽到 1 个正品”) $=1-P$(“抽到 1 个次品”) $=1-5\%=0.95$，所以

$$P(\text{“没有抽到次品”})=0.95^6=0.735\,1.$$

题目已经给出

$$P(\text{“正好抽到 1 个次品”})=0.232\,1,$$

因此

$$
\begin{aligned}
P(\text{“抽到的次品数小于等于 1”})&=0.735\,1+0.232\,1 \\
&=0.967\,2.
\end{aligned}
$$

再次应用对立事件的概率计算公式，可得

$$
\begin{aligned}
&P(\text{“抽到不止 1 个次品”}) \\
&=1-P(\text{“抽到的次品数小于等于 1”}) \\
&=1-0.967\,2=0.032\,8.
\end{aligned}
$$

这表明，“抽取 6 个轴承，次品超过 1 个”是小概率事件.

3. 采购员一次抽取 6 个轴承检查，发现次品数大于 1，这意味着小概率事件竟然在一次试验中发生了，根据实际推断原理，应该拒绝原来的假设：次品率为 5%.

那么次品率会不会小于 5%呢？现在采购员在次品率等于 5%时至少发现了 2 个次品. 假定次品率小于 5%，这批轴承中总的次品数只会更小，从抽出的 6 个轴承中至少发现 2 个次品只会更困难，或者说，P(“抽到不止 1 个次品”) 只会比 0.032 8 更小. 所以说，次品率只能比 5%大. 经过这样的分析，最后可以得出结论：

这批轴承的次品率超过 5%，拒收是合理的.

如果抽取 6 个轴承，经检查，次品数小于等于 1，表明小概率事件没有发生. 采购员没有理由拒绝原来的假设：轴承的次品率为 5%，可以认为这批轴承的次品率为 5%，通常就应该接受它们了.

（二）聚类分析

聚类分析又称为群分析，它是研究个体（或对象）分类问题的一种统计方法. 所谓类，粗浅地讲，是指相似个体的集合，同一类中个体之间的相似性要比与其他类的个体的相似性大，而不同类之间具有较明显的差别.

在古老的分类学中，人们主要依靠经验和专业知识实现分类，很少用到数学. 随着生产技术和科学的发展，分类越来越细，光凭经验和专业知识常常很难进行分类，于是分类学引进了统计知识，形成了数值分类学. 近年来，随着计算机技术和多元分析方法的迅速发展，聚类分析又从数值分类学中逐渐分离出来形成一个相对独立的分支.

例 1　设有 5 个销售员 w_1，w_2，w_3，w_4，w_5，他们的销售业绩由两个变量 x，y 描述，具体数据如下表所示：

销　售　员	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
销售量 x(百件)	1	2	3.5	7	9
回收款项 y(万元)	5	4	2	3	3

现在只考虑一个指标销售量（单位：百件），试对这 5 个个体(销售员)进行分类.

分析：为了便于理解聚类分析的思想方法和计算步骤，我们编选了这个很简单的案例：样本只有 5 个个体，只考虑一个变量 x，具体的数据也相对简单，题意是要对 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3.5$，$x_4=7$，$x_5=9$ 进行分类.

首先要考虑的问题是，对这 5 个样本数据，如何来度量它们之间的相似程度. 我们知道，如果把这 5 个数标在数轴上，就得到了 5 个点. 这样问题便转化为设法度量 5 个点之间的接近程度，最自然的方法是考虑它们之间的距离.

例如，设 x_1 和 x_2 的距离为 d_{12}，则

$$d_{12}=|x_1-x_2|=|1-2|=1,$$

意思是销售员 w_1 和 w_2 的销售量的差别是 1 百件，而 $d_{15}=|x_1-x_5|=|1-9|=8$，意思是 w_1 和 w_5 的销售量的差别是 8 百件. 显然，比较起来，就销售量而言，w_1 和 w_2 比 w_1 和 w_5 要“相似”得多.

还有别的度量 5 个点接近程度的方法，这里就不涉及了.

其次，在分类过程中，一定会遇到处理类与类之间的距离问题，这里介绍两种度量类与类之间接近程度的方法：最短距离法、最长距离法，别的方法就不涉及了.

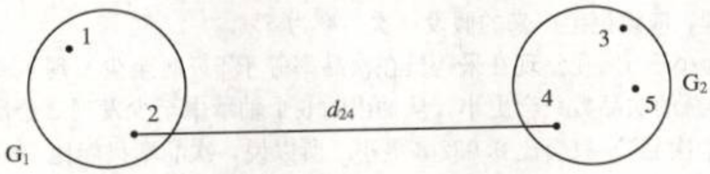


图 1-1

图 1-1 中，G_1，G_2 表示两个类，1，2，3，4，5 表示个体，从图上可以直观地看出，2 与 4 的距离 d_{24} 最短. 最短距离法就是把属于不同类的最近的两个个体的距离作为这两个类的距离，于是类 G_1 与类 G_2 的距离就是 d_{24}.

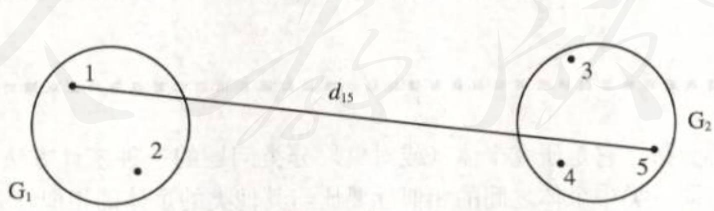
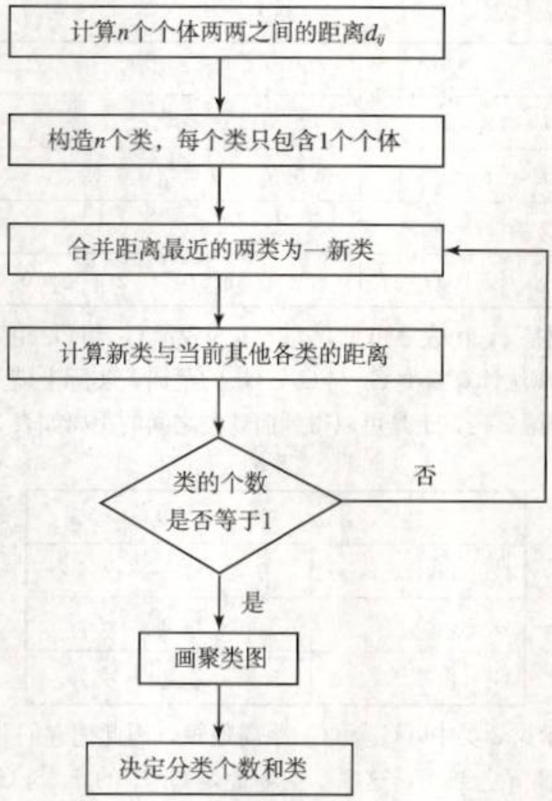


图 1-2

图 1-2 中，G_1，G_2，1，2，3，4，5 意义同上，1 与 5 的距离 d_{15} 最长. 最长距离法就是把属于不同类的最远的两个个体的距离作为这两个类的距离，于是，类 G_1 与类 G_2 的距离就是 d_{15}.

搞清楚了如何度量个体与个体、类与类之间的接近程度，整个聚类分析的过程可以用下面的框图来表示.



解法 1：用最短距离法.

对 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3.5$，$x_4=7$，$x_5=9$ 分类，个体间距离采用数据之差的绝对值，首先把它们分成 5 类，即$G_1=\{x_1\}$，$G_2=\{x_2\}$，$G_3=\{x_3\}$，$G_4=\{x_4\}$，$G_5=\{x_5\}$，两两之间距离 d_{ij} 用表 1 表示.

表 1

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$G_1=\{x_1\}$	0				
$G_2=\{x_2\}$	1	0			
$G_3=\{x_3\}$	2.5	1.5	0		
$G_4=\{x_4\}$	6	5	3.5	0	
$G_5=\{x_5\}$	8	7	5.5	2	0

在表 1 中，除对角线上的数 0 外，最小数是 1，即

$$d_{12}=1,$$

表示个体 x_1 和 x_2 距离最短，因此把 G_1 和 G_2 并成一个新类 G_6，$G_6=\{x_1, x_2\}$.

按照分析中的框图，用最短距离法计算新类 G_6 与此时其他类的距离，实际上是在表 1 中第 1，2 列的后三个数字中取数小的一列，即第 2 列，可以得到下列表 2.

表 2

	G_6	G_3	G_4	G_5
$G_6=\{x_1, x_2\}$	0			
$G_3=\{x_3\}$	1.5	0		
$G_4=\{x_4\}$	5	3.5	0	
$G_5=\{x_5\}$	7	5.5	2	0

按照框图，现在类的个数是 4，由表 2 可见，$d_{36}=1.5$ 表示 G_3 和 G_6 距离最短，因此把它们并成新类 $G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$，用最短距离法计算新类 G_7 与 G_4，G_5 的距离，实际上就是在表 1 中第 1，2，3 列的后两个数字中取数小的一列，即第 3 列，于是可以得到前 3 类之间的距离如表 3 所示.

表 3

	G_7	G_4	G_5
$G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$	0		
$G_4=\{x_4\}$	3.5	0	
$G_5=\{x_5\}$	5.5	2	0

由表 3 可见，$d_{45}=2$ 表示这 3 类中，G_4 和 G_5 距离最短，因此把它们并成新类 $G_8=\{x_4, x_5\}$，用最短距离法算出 G_7 与 G_8 的距离 $d_{78}=3.5$，这 3.5 实际上是 G_7 中的 x_3 与 G_8 中的 x_4 的距离，由表 1 容易看出，G_7 中别的个体与 G_8 中别的个体的距离都比 3.5 长. 于是得到表示 G_7 与 G_8 距离的表 4.

表 4

	G_7	G_8
$G_7=\{x_1, x_2, x_3\}$	0	
$G_8=\{x_4, x_5\}$	3.5	0

现在只剩下两类，只需把它们并成新类 G_9 即可，然后按照框图，可以画出聚类图如图 1-3 所示，图下方的标尺标明了并类的距离.

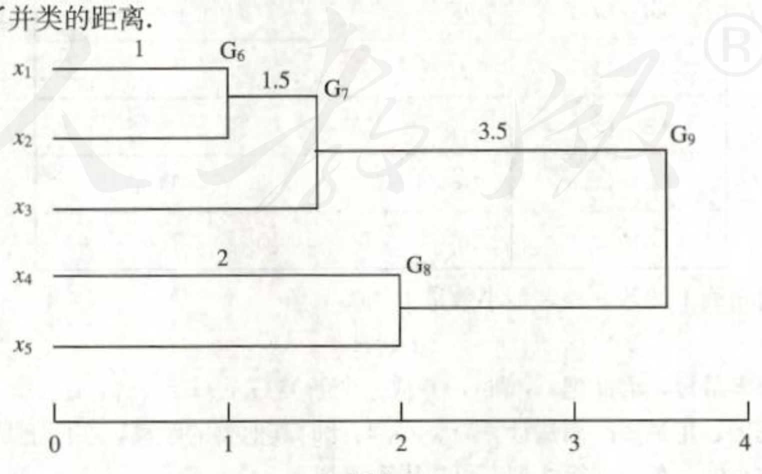


图 1-3

框图中最后一个框：决定分类个数和类通常是根据具体问题由图 1-3 确定. 从图上看，分两类比较合适，即 G_7 与 G_8 两类，它们之间的差别较大，这相当于在标尺的 3 处切一刀，回到例 1 的实际问题，就是把 w_1，w_2，w_3 分成一类，这类的销售员销售量较低；把 w_4，w_5 分成一类，这类的销售员销售量较高.

如果想分成三类，可在标尺 1.8 处切一刀，则得到 G_7，G_4，G_5 三类. 意味着把销售员 w_4，w_5 再分成两类，因为 w_4 与 w_5 的销售量相差 200 件，这样分也说得过去.

解法 2：用最长距离法.

与上述解法 1 的差别仅是计算新类与当前各类距离的方法不同，用的是不同类个体间的相距最远的距离，而并类步骤完全一样. 因此对于表 1～4，相应地有表 5～8，反映出了用最长距离法的整个并类过程.

表 5

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$G_1=\{x_1\}$	0				
$G_2=\{x_2\}$	1	0			
$G_3=\{x_3\}$	2.5	1.5	0		
$G_4=\{x_4\}$	6	5	3.5	0	
$G_5=\{x_5\}$	8	7	5.5	2	0

表 6

	G_6	G_3	G_4	G_5
$G_6=\{x_1, x_2\}$	0			
$G_3=\{x_3\}$	2.5	0		
$G_4=\{x_4\}$	6	3.5	0	
$G_5=\{x_5\}$	8	5.5	2	0

表 7

	G_6	G_7	G_3
$G_6=\{x_1, x_2\}$	0		
$G_7=\{x_4, x_5\}$	8	0	
$G_3=\{x_3\}$	2.5	5.5	0

表 8

	G_7	G_8
$G_7=\{x_4, x_5\}$	0	
$G_8=\{x_1, x_2, x_3\}$	8	0

最后把 G_7，G_8 并成类 G_9，分类过程结束，画出聚类图如图 1-4 所示.

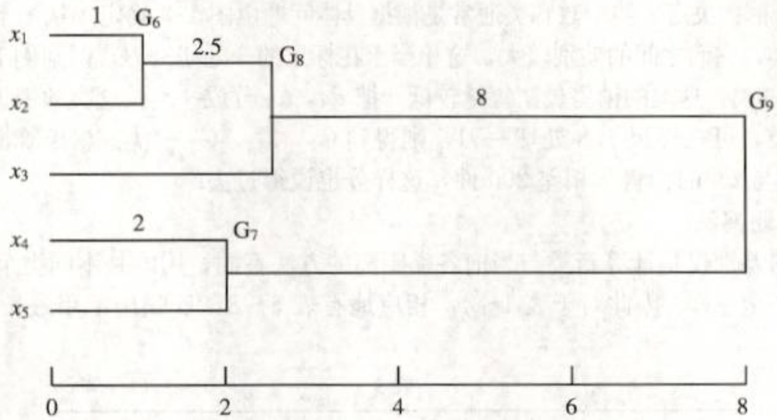


图 1-4

图 1-4 与图 1-3 这两个聚类图很相像，但并类的距离不一样. 从图 1-4 看，如分两类，可在标尺的 6 处切一刀，得到 G_7 与 G_8 两类，它们之间的差别较大，结果和用最短距离法一样.

但我们要注意分三类的情况，这时可以在标尺的 2.2 处切一刀，得到 G_6，G_3，G_7 三类，意味着把销售员 w_1，w_2 分一类，w_3 分一类，w_4，w_5 分一类，可以解释为按照销售量的小、中、大对销售员分类，似乎也说得过去.

例 2 （继续讨论例 1）设 5 个销售员 w_1，w_2，w_3，w_4，w_5 的销售业绩数据同例 1，现在考虑两个指标：销售量 x，回收款项 y. 试用最短距离法对该 5 个销售员进行分类.

解：把销售量作为横坐标，回收款项作为纵坐标，就可以把 w_1，…，w_5 当成 5 个点标在平面直角坐标系上，这样就可以用平面上两点之间的距离来度量它们的接近程度. 例如，设 w_1 和 w_2 的距离为 d_{12}，有

$$\begin{aligned} d_{12} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-1)^2+(4-5)^2} = 1.414; \end{aligned}$$

设 w_4 和 w_5 的距离为 d_{45}，有

$$\begin{aligned} d_{45} &= \sqrt{(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2} \\ &= \sqrt{(9-7)^2+(3-3)^2} = 2 \end{aligned}$$

等等，类似例 1，先分 5 类，即 $G_1=\{w_1\}$，$G_2=\{w_2\}$，$G_3=\{w_3\}$，$G_4=\{w_4\}$，$G_5=\{w_5\}$. 各类之间的距离 d_{ij} 可用表 9 表示.

表 9

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$G_1=\{w_1\}$	0				
$G_2=\{w_2\}$	1.414	0			
$G_3=\{w_3\}$	3.905	2.5	0		
$G_4=\{w_4\}$	6.325	5.099	3.640	0	
$G_5=\{w_5\}$	8.246	7.071	5.590	2	0

以下的并类方法和步骤与例 1 的解法 1 完全类似，就是数据不同，这里略去不写，留作同学练习. 最后得到的聚类图如图 1-5 所示.

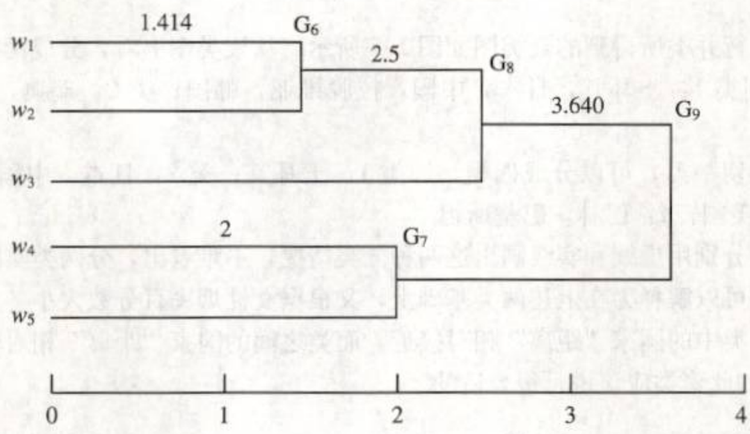


图 1-5

图 1-5 类似于图 1-4，如在标尺 3 处切一刀，就分成两类，这两类的差别较大，即 w_1，w_2，w_3 分成一类，w_4，w_5 分成另一类. 在散点图上的示意图如图 1-6 所示. 这样的结果可以解释为：综合两个指标的情况，G_8 中销售员的销售业绩差一些，G_7 中销售员的销售业绩好一些.

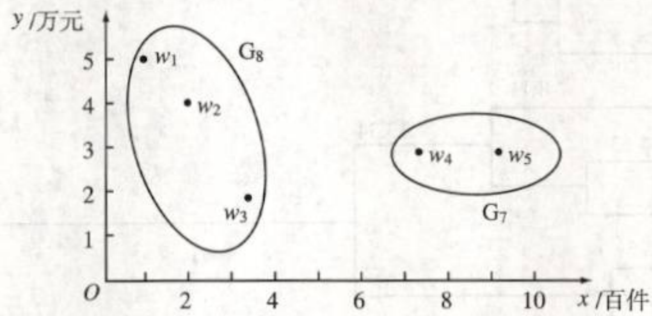


图 1-6

从散点图上看，例 2 的 5 个个体分成三类也比较合适，即 G_6，G_3，G_7，相当于在聚类图 1-5 的标尺 2.1 处切一刀. 这时销售员 w_1，w_2 为一类（回收款项较多），w_3 为另一类（销售量居中，回收款项较少），w_4，w_5 为第三类（销售量较多）.

例 3 下面是 10 个国家关于人口吸烟情况的统计数据，其中第一行是国名，第二行是男性烟民占男性人口的百分数，第三行是女性烟民占女性人口的百分数：

韩国	拉脱维亚	土耳其	中国	日本	美国	巴基斯坦	芬兰	巴林	瑞典
68.2	67.0	63.0	61.0	59.0	28.1	27.4	27.0	24.0	20.0
6.3	12.0	24.0	7.0	14.8	23.5	4.4	19.0	6.0	24.0

试根据这些数据用最短距离法对上述 10 国作聚类分析.

解：把男性烟民百分数作为横坐标，女性烟民百分数作为纵坐标，就可以把 10 个国家当成 10 个点

标在平面直角坐标系上，采用两点之间的距离度量这 10 个点的接近程度. 以下的聚类分析步骤与例 2 是完全一样的. 由于现在有 10 个个体，同学们可以用一张大点的纸把这些距离用表格的形式表示出来，然后进行并类.

用最短距离法进行并类所得到的聚类图如图 1-7 所示. 从聚类图上看，分成两类很合适，可在标尺 20 处切一刀，就得到类 1：土耳其，日本，中国，拉脱维亚，韩国；类 2：瑞典，芬兰，美国，巴林，巴基斯坦.

如果在标尺 9 处切一刀，可以分成四类，即类 1：土耳其；类 2：日本，中国，拉脱维亚，韩国；类 3：瑞典，芬兰，美国；4：巴林，巴基斯坦.

在散点图 1-8 上分别用虚线和实线画出这两种分类情况，不难看出，分两类实际上对应着男性烟民百分数大小；分四类可以解释为在上述两类基础上，又根据女性烟民百分数大小各分成两类. 从图上可以很直观地看出，各类中的国家“距离”相对接近，而类之间的国家“距离”相对较远，就吸烟情况而言，把这 10 个国家如此聚类应该说是很合适的.

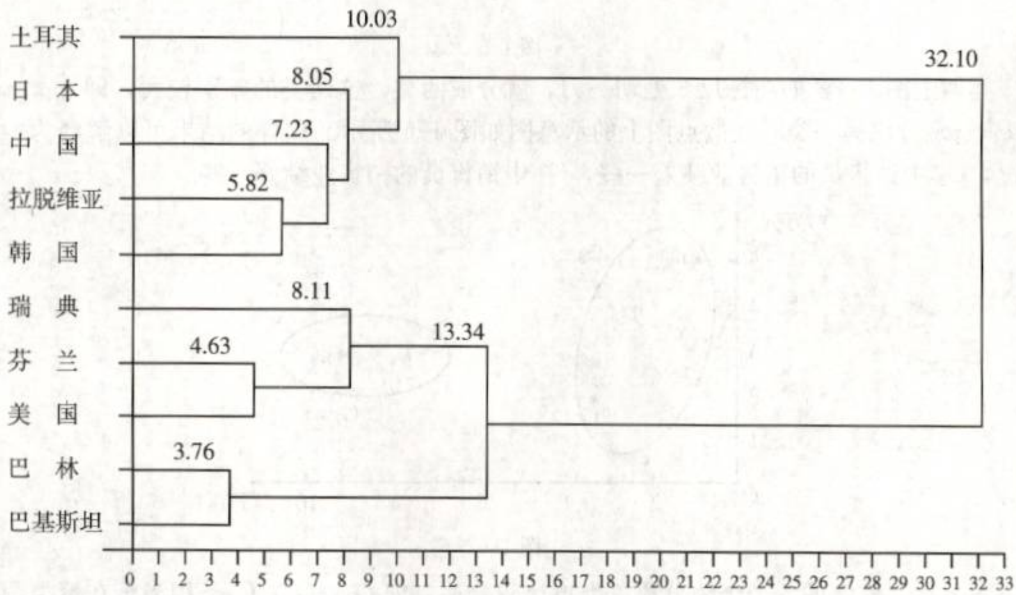


图 1-7

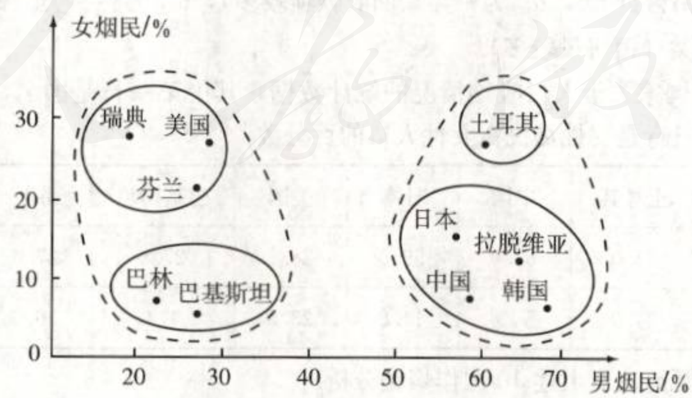


图 1-8

四、教学案例

案例1：1.1　独立性检验（第一课时）

（一）教学目标

1. 知识与技能

(1) 通过对典型案例的探究，了解两个事件相互独立的含义，初步了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及其应用；

(2) 通过本节知识的学习，进一步提高学生对统计思想的认识，提高学生对教材知识的了解，并能解决一些实际问题.

2. 过程与方法

(1) 通过探索、研究、归纳等形式，掌握知识之间的联系；

(2) 进行辩证唯物主义思想和数学应用意识的教育，提高学习数学的积极性.

3. 情感、态度与价值观

(1) 结合教学内容培养学生学习数学的兴趣，激励学生勇于创新；

(2) 通过对 2×2 列联表的探索，体验认识事物的规律，体会解决问题后成功的喜悦.

（二）教学重点与难点

重点：独立性检验的思想和方法.

难点：独立性检验的初步应用.

（三）教学方法

从学生的认知规律出发，让学生自主学习，运用讲授法、讨论法，充分调动学生的积极性，让学生对独立性检验的思想与方法加以了解.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
情感激励	教师提供名人名言，哲理性文字或数学名人名句，数学史中的典型问题.		“亲其师，信其道”，通过这一环节，一方面让学生了解数学知识及做人的道理，另一方面缩短师生间的距离.
课题引入	由章前图的画面，探索男人和女人对晕机情况的分析. 要分析解决上述问题，首先要了解两个事件是否独立.	学生积极回答教师提出的问题，教师总结.	好的开端是成功的一半，通过章前图引起学生对本章（节）内容的兴趣，为下面的教学作好铺垫.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲解	研究例 1，探讨两个事件相互独立的含义. 接着由前面的问题（或用课本上的例 2）引出 2×2 列联表，介绍卡方统计量，得出公式 $\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}\cdot n_{2+}\cdot n_{+1}\cdot n_{+2}}$. 由例题的基本步骤掌握独立性检验的基本过程： 1. 计算 χ^2； 2. 作判断： 由 χ^2 与两个临界值作比较，若比临界值大，则拒绝 H_0，即拒绝独立性. 为了提高检验效果，2×2 列联表中的数据要大于 5.	特殊案例可由学生通过教师的设计得出，教师最后归纳出一般性的结论. 分组讨论交流，教师巡视，由学生发言、互相补充，教师作出总结.	波利亚曾指出："学习任何东西最好的途径是自己去发现."为了有效地学习，应该在教师所创设的问题情境下尽可能的让学生自己去发现，去学习知识. 从实际问题中提炼出一般性的规律，再用此规律去解决具体的问题.
例题讲解	解决课本上的例 2. 在教学中始终注意统计思想的应用，例题中始终给出的只是部分数据，但其反映的问题不只是这些.	教师带领学生共同审题，分析题目，理清解题思路，其余由学生自己独立完成.	
课堂小结	1. 独立性检验的思想方法. 2. 独立性检验的应用.	学生回答，教师总结.	使学生对本节知识有一个清晰的认识，从宏观上把握所学内容.
布置作业	1. 认真阅读本节课例 1、例 2 有关内容. 2. 完成习题 1-1A 中第 1、2、3 题.		通过作业，发现学生掌握新知识的程度，培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高学生综合运用数学知识的能力.

案例 2：1.2　回归分析（第二课时）

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系；

（2）能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程；

(3) 会进行相关性检验，了解回归分析的基本思想与方法.

2. 过程与方法

(1) 通过复习线性回归方程，探究相关性检验的基本思想；

(2) 通过本节的学习，培养学生类比、迁移、化归的能力，解决问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

培养学生积极参与、大胆探索的精神.

（二）教学重点与难点

重点：回归分析的思想与方法.

难点：回归分析的初步应用.

（三）教学方法

以学生为主体，形成完整的知识结构，教师讲解为辅，师生共同将知识深入探究，增强实践性、直观性，采用多媒体辅助教学，注重计算器的使用.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问	1. 散点图. 2. 回归直线方程. 通过例 1 完成这些内容.	教师提出问题，学生积极思考，回答问题.	此内容的设计为下面相关性检验的步骤作好铺垫.
提出问题	由例 2，通过散点图寻求线性相关关系，根据一组成对数据，求出回归直线方程. 能否反映此组成对数据的变化规律呢？提出相关性检验的思想.	学生分析研究，讨论交流. 教师引导，得出结论.	维果斯基的“最近发展区”理论指出：认知发展的真实水平与认知发展的潜在水平之间存在差异，通过前面的复习与现在提出的问题可引发学生积极思考，主动提取原认知结构.
概念形成	1. 检验统计量. 2. r 具有的性质. 3. 检验的步骤.	学生独立思考并练习，教师巡视，最后教师总结.	提高学生的应用能力.
应用举例	1. 通过例 2，作相关性检验. 2. 对例 2 作回归分析.	教师点拨，学生自行解决，并对例题用的方法进行思考.	让学生构建自己的解题思维模块，而且解后反思可起到举一反三的效果.
课堂小结	1. 相关性检验的思想与步骤. 2. 回归分析的应用.	学生回答，教师对学生的回答进行评价.	引导学生对所学数学知识、思想方法进行小结.
布置作业	课后习题 1-2A 第 2 题.		通过作业，发现学生掌握新知识的程度，培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高学生综合运用数学知识的能力.

五、习题参考答案与提示

习题 1-1A（第 8 页）

1. 略.

2. 略.

3. 由公式，$\chi^2=\dfrac{1\,000\times(252\times276-248\times224)^2}{500\times500\times476\times524}=3.14$.

   因为 $3.14<3.841$，所以血清试验与否和预防感冒无关.

4. 由公式，$\chi^2=\dfrac{460\times(26\times200-184\times50)^2}{210\times250\times76\times384}=4.8$.

   因为 $4.8>3.841$，所以有 95%的把握说小麦种子灭菌与否跟发生黑穗病有关.

5. 由公式，$\chi^2=\dfrac{72\times(28\times20-16\times8)^2}{36\times36\times44\times28}=8.42$.

   因为 $8.42>6.635$，所以有 99%的把握说大学生的性别与是否看营养说明有关.

6. 由公式，$\chi^2=\dfrac{300\times(114\times18-132\times36)^2}{150\times150\times246\times54}=7.32$.

   因为 $7.32>6.635$，所以有 99%的把握说新措施对防治猪白痢有效.

习题 1-2A（第 19 页）

1. (1) 散点图略.

   (2)

序号	x	Y	x^2	y^2	xy
1	1.4	12	1.96	144	16.8
2	1.6	10	2.56	100	16
3	1.8	7	3.24	49	12.6
4	2	5	4	25	10
5	2.2	3	4.84	9	6.6
Σ	9	37	16.6	327	62

于是，

$\bar{x}=\dfrac{1}{5}\times9=1.8$，$\bar{y}=\dfrac{1}{5}\times37=7.4$.

$\hat{b}=\dfrac{62-5\times1.8\times7.4}{16.6-5\times1.8^2}=-11.5$，

$\hat{a}=7.4+11.5\times1.8=28.1$.

Y 对 x 的回归直线方程为

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=28.1-11.5x.$$

图象略.

(3) 当 $x=1.9$ 时，

$$\hat{y}=28.1-11.5\times1.9=6.25.$$

2. (1) 散点图略.

(2) 作相关性检验：

① 作统计假设：x 与 Y 不具有线性相关关系.

② 由小概率 0.05 与 $n-2=4$ 在附表中查得

$$r_{0.05}=0.811.$$

③ 使用计算器进行计算.

按键：

MODE　3　1　（进入线性回归计算状态）

SHIFT　CLR　1　=　（将计算器存储器设置成初始状态）

5 , 7.25 DT 10 , 8.12 DT 15 , 8.95 DT 20 , 9.90 DT

25 , 10.96 DT 30 , 11.80 DT

继续按下表按键.

按键	显示结果
SHIFT S-VAR ▶ ▶ 3 =	0.999308638
SHIFT S-VAR ▶ ▶ 1 =	6.274666667
SHIFT S-VAR ▶ ▶ 2 =	0.184114285

④ $|r|=0.999>0.811$，

即　$|r|>r_{0.05}$，

从而有 95% 的把握认为 x 与 Y 之间具有线性相关关系，求 Y 对 x 的回归直线方程有意义.

(3) 由上表立即可得

$$\hat{y}=6.27+0.18x,$$

这就是题目要求的 Y 对 x 的回归直线方程.

(4) 当 $x=27$ 时

$$\hat{y}=6.27+0.18\times27=11.13.$$

3. (1) 作相关性检验：

①作统计假设：x 与 Y 不具有线性相关关系.

②由小概率 0.05 与 $n-2=5$ 在附表中查得

$$r_{0.05}=0.754.$$

③使用计算器进行计算.

按键：

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ （进入线性回归计算状态）

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ （将计算器存储器设置成初始状态）

15 $\boxed{,}$ 330 $\boxed{\text{DT}}$ 20 $\boxed{,}$ 345 $\boxed{\text{DT}}$ 25 $\boxed{,}$ 365 $\boxed{\text{DT}}$ 30 $\boxed{,}$ 405 $\boxed{\text{DT}}$

35 $\boxed{,}$ 445 $\boxed{\text{DT}}$ 40 $\boxed{,}$ 450 $\boxed{\text{DT}}$ 45 $\boxed{,}$ 455 $\boxed{\text{DT}}$

继续按下表按键.

按键	显示结果
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	0.971864996
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	256.7857143
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	4.75

④ $|r|=0.97>0.754$，

即 $|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 x 与 Y 之间具有线性相关关系，求 Y 对 x 的回归直线方程有意义.

由上表立即可得

$$\hat{y}=256.79+4.75x,$$

这就是题目要求的 Y 对 x 的回归直线方程.

当 $x=32$ 时，

$$\hat{y}=256.79+4.75\times32=408.79.$$

4. 电压 U 随时间 t 的变化规律公式为 $u=Ae^{bt}$，两边取自然对数，得 $\ln u=\ln A+bt$ 与线性回归直线方程相对照，只要取

$$v=\ln u,\ a=\ln A,$$

就有 $v=a+bt$，

经变量代换得下表：

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	4.61	4.32	4.01	3.69	3.4	3.00	2.71	2.3	2.3	1.61	1.61

作相关性检验：

① 作统计假设：t 与 v 不具有线性相关关系.

② 由小概率 0.05 与 $n-2=9$ 在附表中查得

$$r_{0.05}=0.602.$$

③ 使用计算器进行计算.

按键：

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ （进入线性回归计算状态）

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ （将计算器存储器设置成初始状态）

0 $\boxed{,}$ 4.61 $\boxed{\text{DT}}$ 1 $\boxed{,}$ 4.32 $\boxed{\text{DT}}$ 2 $\boxed{,}$ 4.01 $\boxed{\text{DT}}$ 3 $\boxed{,}$ 3.69 $\boxed{\text{DT}}$

4 $\boxed{,}$ 3.4 $\boxed{\text{DT}}$ 5 $\boxed{,}$ 3.00 $\boxed{\text{DT}}$ 6 $\boxed{,}$ 2.71 $\boxed{\text{DT}}$ 7 $\boxed{,}$ 2.30 $\boxed{\text{DT}}$

8 $\boxed{,}$ 2.30 $\boxed{\text{DT}}$ 9 $\boxed{,}$ 1.61 $\boxed{\text{DT}}$ 10 $\boxed{,}$ 1.61 $\boxed{\text{DT}}$

继续按下表按键.

按键	显示结果
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	−0.995045802
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	4.616363636
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	−0.313090909

④ $|r|=0.995>0.632$，

即 $|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 t 与 v 之间具有线性相关关系，求 v 对 t 的回归直线方程有意义. 由上表立即可得

$$\hat{v}=4.616-0.313t.$$

所以 $\ln\hat{u}=4.616-0.313t$.

所以 $\hat{u}=e^{4.616-0.313t}=101.01e^{-0.313t}$.

这就是题目要求的 U 对 t 的回归曲线方程.

本章小结

Ⅳ　自测与评估（第 21 页）

1. 由题写出 2×2 列联表：

	患有色盲	未患有色盲	合计
男人	38	442	480
女人	6	514	520
合计	44	956	1 000

$\chi^2=\dfrac{1\,000(38\times514-6\times442)^2}{44\times956\times480\times520}=27.14>6.635.$

所以有 99%的把握说色盲与性别有关.

2.（1）略.

（2）作相关性检验：

① 作统计假设：x 与 Y 不具有线性相关关系.

② 由小概率 0.05 与 $n-2=8$ 在附表中查得

$$r_{0.05}=0.632.$$

③ 使用计算器进行计算.

按键：

MODE　3　1　（进入线性回归计算状态）

SHIFT　CLR　1　=　（将计算器存储器设置成初始状态）

10　,　62　DT　20　,　68　DT　30　,　75　DT　40　,　81　DT

50　,　89　DT　60　,　95　DT　70　,　102　DT　80　,　108　DT

90　,　115　DT　100　,　122　DT

继续按下表按键.

按键	显示结果
SHIFT　S-VAR　▶　▶　3　=	0.99980936
SHIFT　S-VAR　▶　▶　1　=	54.93333333
SHIFT　S-VAR　▶　▶　2　=	0.668484848

④ $|r|=0.999\,8>0.632$，

即　$|r|>r_{0.05}$，

从而有 95%的把握认为 x 与 Y 之间具有线性相关关系，求 Y 对 x 的回归直线方程有意义.

（3）由上表立即可得

$$\hat{y}=54.9+0.668x.$$

六、反馈与评价

1. 本章课后作业情况、测验成绩作为评价的一个方面.

2. 本章内容在现实生活中有很多应用，引导学生根据所学知识开展研究性学习，让学生学会分析、处理数据，写一篇有价值的小论文.

第二章

推理与证明

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解合情推理的含义，能利用归纳推理和类比推理等进行简单的推理，体会合情推理在数学发现中的作用.

2. 掌握演绎推理的基本模式，体会它们的重要性，并能运用它们进行一些简单的推理.

3. 了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

4. 了解分析法和综合法这两种直接证明的基本方法，了解分析法和综合法的思考过程与特点.

5. 结合实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程与特点.

6. 阅读和欣赏欧几里得《原本》、牛顿力学体系等实例，体会公理化思想，初步了解计算机在自动推理领域和数学证明中的作用.

（二）过程与方法目标

在本模块中，学生将通过对已学知识的回顾，体会合情推理、演绎推理的特点以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解直接证明和间接证明的基本方法，感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 结合已学过的数学实例和日常生活中的实例，让学生体会数学与其他学科以及实际生活的联系.

2. 通过合情推理与演绎推理的学习，让学生了解数学不单是现成结论的体系，结论的发现过程也是数学的重要内容，从而形成对数学较为完整的认识，培养学生进行归纳时的严谨作风，从而形成实事

求是、力戒浮夸的思维习惯.

3. 通过本章的学习，有助于提高学生的数学素养，发展学生的数学思维能力，发展学生的创新意识和创新能力.

4. 通过对数学证明以及数学文化的了解，有助于学生认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过实例，讲解推理证明的主要方法. 引导学生理解各种推理的作用. 这一节可作为中学数学证明方法的小结，让学生理解数学推理的重要意义.

2. 用基本逻辑关系，理解逻辑推理的主要方法. 重点理解命题“如果……则……”中的前题和结论间的逻辑关系.

3. 注意语言逻辑、形式逻辑与数理逻辑间的区别与联系.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是合情推理与演绎推理，直接证明和间接证明，分为两大节.

第一大节是合情推理与演绎推理. 教材首先通过实例给出推理的概念、结构和常用的逻辑联结词. 然后分为两小节分别阐述合情推理与演绎推理.

第 1 小节阐述合情推理，教材首先通过三个事例的推理说明什么是合情推理，指出数字中常用的合情推理有归纳推理和类比推理. 然后分别举例说明归纳推理和类比推理的特点及其一般步骤，接着举例让学生进行练习，应用它们进行推理，并进一步说明这两种常用的合情推理所得到的结论未必是正确的，但它们具有的由特殊到一般、由特殊到特殊的认识功能，对于发现新的规律和事实却是有用的.

第 2 小节阐述演绎推理，教材首先通过一个学生比较熟悉的简单的例子，说明什么是演绎推理及其特征，然后举例说明数学中常用的几种演绎推理的规则，强调说明在数学中证明命题的正确性，都是用演绎推理，合情推理不能用作证明；在实施数学证明时，要综合运用演绎推理的规则，但不能违背这些规则，否则证明即是错误的.

第二大节是直接证明与间接证明，分为两个小节.

第 1 小节阐述常用的直接证明方法——综合法与分析法. 教材首先说明综合法与分析法的思维方法的特点，然后分别举出两个例子应用综合法与分析法来进行证明，让学生体会综合法与分析法的特点及其思维过程.

第 2 小节阐述常用的间接证明方法——反证法. 教材首先说明反证法的特点及其思维过程，然后举例让学生体会反证法的特点，增强应用反证法证明的能力，最后总结出应用反证法证明数学命题的一般

步骤.

本章最后在“阅读与欣赏”中安排了两篇文章，一篇是《〈原本〉与公理化思想》，另一篇是《数学证明的机械化——机器证明》. 通过这两篇文章，让学生体会公理化思想，同时初步了解计算机在自动推理领域和数学证明中的作用，有助于学生认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

“推理与证明”专设一章，在我国高中教材中还是首次，没有实际的教学经验供参考. 但是推理与证明已是学生所熟悉的词语. 因此，教材主要通过实例引起学生对“推理”的兴趣，引导学生理解各种推理的作用，进而能够运用合情推理去探索、猜测和归纳出一些数学结论，并能证明结论的正确性. 在编写时，重点是通过分析一些命题的证明过程，总结并让学生掌握数学证明的一些基本方法.

2. 地位与作用

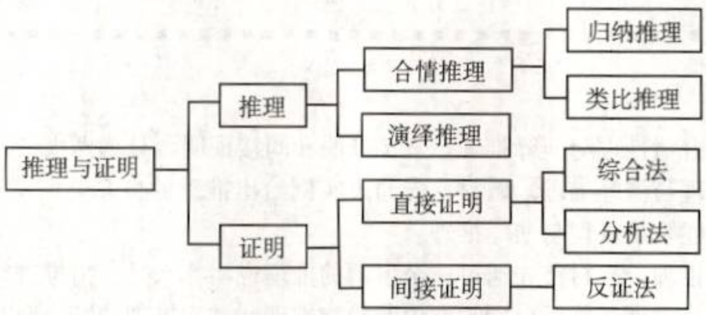
“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 推理一般包括合情推理和演绎推理. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养. 演绎推理和逻辑证明能力的培养是高中数学课程的重要目标. 通过本章的学习，有助于发展学生的思维能力，提高学生的数学素养，让学生感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，从而架起数学与生活的桥梁，形成严谨的理性思维和科学精神.

3. 重点和难点

本章的重点是演绎推理和两种证明方法——直接证明和间接证明.

本章的难点是对演绎推理和反证法的理解.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 合情推理与演绎推理		
	2.1.1 合情推理	2 课时
	2.1.2 演绎推理	2 课时
2.2 直接证明与间接证明		
	2.2.1 综合法与分析法	2 课时
	2.2.2 反证法	2 课时
本章小结		2 课时

（四）教法与学法建议

2.1 合情推理与演绎推理

2.1.1 合情推理

1. 本节教材首先通过例子给出推理的概念，其教学的重点是使学生理解推理的概念，注意推理的前提不仅仅可以是已知的事实，也可以是假设，也就是说，假定成立的事实也可以作为推理的前提.

2. 在高中数学教材中专门讲合情推理尚属首次. 但是从学生的实际情况来看，他们对合情推理并不陌生，在日常生活和数学学习中，他们经常会运用合情推理去进行判断. 合情推理相对于演绎推理是一种含有较多猜想成分的推理，它有助于发现新的规律和事实. 在教学时，要注意通过实例，特别是让学生自己举出实例，加深理解合情推理的含义与应用方法.

3. 合情推理：前提为真时结论可能为真的推理，是一种或然性的推理. 是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉推测某些结果的推理过程. 它包含归纳推理和类比推理.

4. 归纳推理：按照逻辑学的传统观点，归纳推理是以个别性知识为前提而推出一般性结论的推理. 归纳推理的前提是一些关于个别事物或现象的判断，而结论是关于该类事物或现象的普遍性的判断. 归纳推理的结论超过了前提所判定的范围，因此，在归纳推理中，前提和结论之间的联系不是必然的，而是或然的，在前提真实的情况下，结论未必真.

5. 类比推理是根据两个（或两类）对象在一些属性上相同或相似，从而推出它们在其他属性上也相同或相似的推理形式.

6. 归纳推理与类比推理的特点与区别：类比推理的结论也是或然的，归纳推理是由特殊到一般的推理，类比推理则是由个别到个别的推理，或是由一般到一般的推理.

7. 归纳推理教学的重点是掌握归纳推理的一般步骤，注意归纳推理所得的结论未必正确，其可靠性往往与归纳的数量和代表性有关.

8. 在教学类比推理时，可以与归纳推理进行对比，有助于学生更好地理解这两种合情推理的异同.

2.1.2 演绎推理

1. 演绎推理是本节教学的重点和难点. 要使学生理解，在数学中，证明命题的正确性，都是使用演绎推理，而合情推理不能用作证明.

本小节所总结出的三种数学中常用的演绎推理规则中，三段论推理在数学证明中应用较为广泛，如有可能，教师可以适当扩充三段论推理的集合论基础.

2. 演绎推理的特征是：当前提为真时，结论必然为真.

3. 演绎推理是由一般性的真命题推出特殊命题为真的推理，是一种必然性推理. 本节主要介绍了演绎推理的三种基本模式，它们都是数学中经常用到的演绎推理规则，有必要掌握它们，并能运用它们进行一些简单的推理.

4. 三段论推理是演绎推理的主要形式，是本节的重点，也是难点，它是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理. 形式逻辑中，三段论推理常用的一种格式，可以用以下形式来表示：

$$\begin{array}{l} M\text{——}P\ (M\text{是}P) \\ \underline{S\text{——}M\ (S\text{是}M)} \\ S\text{——}P\ (S\text{是}P) \end{array}$$

三段论推理的根据，用集合论的观点来讲，就是：如果集合 M 的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中的所有元素都具有性质 P.

三段论推理的形式中包括三个判断：第一个判断为大前提，它提供了一个一般性的原理；第二个判断为小前提，它指出了一个特殊情况；这两个判断联合起来，揭示了一般性原理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论.

在实际使用三段论推理时，为了简洁起见，大家经常略去大前提或者小前提，有时甚至这两者都略去，例如“25 能被 5 整除”这个推理，就省略了大前提和小前提.

5. 传递性关系推理和完全归纳推理比较容易理解，结合课本的例题讲解即可.

6. 演绎推理与合情推理的比较：合情推理中的归纳、类比都是或然性推理. 不论是由大量的特例，经过分析、概括、发现规律的归纳，还是由两系统的已知属性，通过比较、联想而发现未知属性的类比，它们的共同特点是，结论往往超出前提控制的范围. 因此它们是“开拓型”或“发散型”的思维方法. 也正因为结论超出了前提的管辖范围，前提就无力保证结论为真，所以归纳、类比只是或然性推理. 演绎推理所得结论完全蕴涵于前提之中，它是“封闭型”或“收敛型”的思维方法. 只要前提真实，逻辑形式正确，结论必然是真实的.

2.2 直接证明与间接证明

1. 本节内容是对学生已经学过的基本证明方法的总结. 在教学中，应通过实例，引导学生认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性. 教学重点是综合法、分析法、反证法的逻辑思维过程和逻辑思维方法，难点是三种证明方法的应用，但应注意对证明的技巧性不宜作过高要求.

2. 数学证明是通过一系列演绎推理确定某一命题真实性的思维形式.

证明过程其实就是推理过程，就是应用正确的推理形式推出结论的过程.

3. 数学中常用的证明方法有直接证明与间接证明.

(1) 直接证明是由论题的已知条件和已知定义、公理、定理等作为论据，利用逻辑推理法则直接推出论题结论真实性的证明方法. 常用的直接证明方法有综合法和分析法.

综合法：从题设的已知条件出发，运用一系列有关已确定真实性的命题作为推理的依据，逐步推演而得到要证明的结论，这种证明方法叫做综合法. 综合法的推理方向是由已知到求证，表现为由因导果.

分析法：分析法的推理方向是由结论到已知，论证中步步寻求使其成立的充分条件，如此逐步归结到已知的条件或已经成立的事实，表现为执果索因.

(2) 间接证明不是直接从正面论证结论的真实性，而是考虑间接地达到目的. 最常见的间接证法是反证法. 关于反证法，法国数学家阿达玛曾说过：“这种证法在于表明，如果肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾.”这是对反证法的精辟的概括. 即假设结论的反面成立，在已知条件和“否定结论”这个新条件下，通过逻辑推理，得出与公理、定理、题设、临时假定相矛盾的结论或自相矛盾，从

而断定结论的反面不能成立，即证明了命题的结论一定是正确的.

三、拓展资源

（一）逻辑简史

一、逻辑学的产生

逻辑学是一门古老的科学，从它产生到如今，已经有了两千多年的历史. 逻辑学的发源地有三个，这就是古代的中国、印度和希腊.

在春秋战国时期，逻辑思想在我国曾有很大发展，史称“明辩之学”，主要内容表现在后期墨家、荀况、韩非等人的著述中. 其中，以《墨经》和《正名篇》对逻辑学的贡献最为卓著. 例如，《墨经》提出了“以名举实，以辞抒意，以说出故”的光辉思想，这里所谓“名”，相当于概念，所谓“辞”相当于判断（或命题），所谓“说”，相当于推理. 它说明，在人们的思维和论证过程中，概念是用来反映事物的，判断是用来表达思想认识的，推理是用来推导事物的因果联系的，这是对概念、判断、推理的本质和作用所作的精辟的说明. 又如，《墨经》说“或为之牛，或谓之非牛，是争彼也. 是不俱当，不俱当，必或不当”. 这就是说，“是牛”和“不是牛”这两个论断不能都成立，必有一个不能成立. 这里实际上表述了矛盾律的思想.

古代印度的逻辑学说，名曰“因明”. “因”即推理的依据，“明”即通常所说的“学”，“因明”就是古代印度关于推理的学说. 主要代表著作有：陈那的《因明正理门论》、商羯罗主的《因明入正理论》等. 这些著作主要研究了推理和论证的方法，形成了古代印度特有的逻辑理论和体系. 例如，陈那提出“三支论式”，认为每一个推理形式都是由“宗”、“因”、“喻”这三部分组成的. 这里所谓“宗”相当于三段论的结论，所谓“因”相当于三段论的小前提，所谓“喻”相当于三段论的大前提. 如：

宗：此山有火

因：此山有烟

喻：凡有烟的地方都有火

可见，“三支论式”虽与三段论有所不同，但是它们在推理形式上是基本一致的.

古代希腊是逻辑学的主要诞生地. 对逻辑学进行了全面的研究，并且在理论上有系统建树的，是古希腊哲学家亚里士多德. 他著有《范畴篇》、《解释篇》、《前分析篇》、《后分析篇》、《论辩篇》和《论缪篇》，后来合称《工具论》. 亚里士多德在这些著作中主要研究了概念、逻辑和定义的问题，判断及其种类和关系，三段论学说，逻辑证明的理论，辩论的方法和驳斥诡辩的方法等. 此外，亚里士多德在其重要哲学著作《形而上学》中，明确地指出了矛盾律和排中律，同时也涉及到同一律. 亚里士多德的逻辑，由于是以对概念（即词项）的研究为基础的，现在人们把它称为“词项逻辑”. 亚里士多德对逻辑学的研究奠定了西方逻辑学发展的基础. 从此以后，亚里士多德的逻辑学说得到了不断的丰富和发展，直到今天，我们所学的普通逻辑（形式逻辑），其主要内容都可以从亚里士多德的著作中找到它们的原型.

二、逻辑学的发展

在亚里士多德之后，古希腊斯多噶学派以及欧洲中世纪的一些逻辑学家，主要研究了假言推断、选言判断、联言判断以及由它们所组成的推理形式，并且提出了推理的规则和逻辑公式，充实了亚氏逻辑的内容. 由于这部分内容是建立在对判断（即命题）进行研究的基础上的，因此人们把它称为“命题逻辑”.

17 世纪，随着经验自然科学的兴起和发展，英国哲学家弗兰西斯·培根提出了科学归纳法，奠定了归纳逻辑的基础. 培根的主要著作是《新工具》，在这部著作中，培根批评了亚氏的演绎推理（主要是三段论），陈述了他所提出的“三表法”和“排除法”. 所谓“三表”，就是“存在和具有表”、“差异表”、“程度表”. 通过这些表，把观察到的事物现象加以整理和排列. 所谓“排除”，就是从三表中把那些不相干的性质舍弃掉，进而找到事物之间的因果联系，发现事物的一般规律. 培根认为，这才是“真正的归纳法”.

在培根以后，英国哲学家约翰·穆勒继承并发展了培根的归纳逻辑，在他所著的《逻辑体系：归纳和演绎》（我国近代学者严复译为《穆勒名学》）中，系统地阐述了寻求现象间因果联系的五种归纳方法，即契合法、差异法、契合差异并用法、共变法和剩余法，逻辑史上通称为“穆勒五法”.

公元 1662 年，法国出版了亚诺德和尼柯尔合著的《波尔·罗亚尔逻辑》（原名《逻辑学或思维术》，我国有人译为《王港逻辑》）. 这是一本逻辑学教学书，共有四大部分，分别讨论了概念、判断、推理和方法问题. 至此，演绎、归纳和一般方法融为一体的传统逻辑便基本定型了.

18 世纪到 19 世纪，德国古典哲学家康德、黑格尔等人也曾研究逻辑问题. 康德第一次使用了“形式逻辑”这个名称，并对逻辑问题有不少论述，不过，他把逻辑规律和逻辑形式都看成是先于经验的东西. 例如，他说：形式逻辑“是一种理性的科学，同时从它的形式和内容看，是一种关于思想的必然规律的先验的科学”. 黑格尔批评了旧逻辑中的形式主义和形而上学，用极大的精力研究了人类辩证思维的形式和规律，在逻辑史上提出了第一辩证逻辑的体系. 虽然他的辩证逻辑体系是建立在唯心主义基础上的，是头足倒置的，但是，其中却包含有不少合理的内核和深刻的思想.

19 世纪中叶以后，马克思、恩格斯和列宁对逻辑学有许多精辟的论述. 他们运用辩证唯物主义的观点和方法研究逻辑问题，一方面在批判黑格尔辩证逻辑体系中的唯心主义的同时，吸收了其中的合理因素，为科学的辩证逻辑奠定了坚实的基础；另一方面又在批评旧形式逻辑中的唯心主义和形而上学的同时，科学地阐明了形式逻辑的某些基本原理，对丰富和发展形式逻辑作出了重要贡献.

三、现代逻辑的诞生和发展

早在 17 世纪末，德国哲学家莱布尼茨就提出了用数学方法处理演绎逻辑，把推理变成逻辑演算的光辉思想，因而它成了数理逻辑（即现代形式逻辑）的奠基人. 一百多年以后，英国数学家布尔建立了“逻辑代数”（即布尔代数），把莱布尼茨的思想变成现实，成为数理逻辑的早期形式. 随后，弗雷格、罗素和怀德海等人建立了命题演算和谓词演算这样两个数理逻辑基础演算，使数理逻辑进一步系统和完善起来，发展成为一门新兴的学科. 罗素和怀德海的巨著《数学原理》，就是这方面的主要成果和标志. 到 20 世纪 30 年代，数理逻辑已经完全成熟，40 年代以来，则得到了迅速的发展. 其中表现是：数理逻辑的主要分支“集合论”、“证明论”、“递归论”和“模型论”等应运而生并发展起来；在命题演算和谓词演算的基础上，发展了模态逻辑、多值逻辑、时态逻辑、相干逻辑、模糊逻辑和规范逻辑等非标准的逻辑分支；数理逻辑在现代技术科学中得到广泛的应用，有力地推动了电子计算机的不断发展，人工智能的产生正是数理逻辑的一个伟大的历史性成果.

恩格斯曾说过：“每一时代的理论思维，从而我们时代的理论思维，都是一种历史的产物，在不同的时代具有非常不同的形式，并因而具有非常不同的内容. 因此，关于思维的科学，和其他任何科学一

样，是一种历史的科学，关于人的思维的历史发展的科学.”逻辑学从词项逻辑向命题逻辑的发展，从演绎逻辑向归纳逻辑的发展，从传统逻辑向现代逻辑的发展，正好说明了这一点. 为了学好普通逻辑，理解和掌握其基本内容及其来龙去脉，学点逻辑史是很有必要的.

（二）爱因斯坦与歌德尔的故事

爱因斯坦和歌德尔相识于 1933 年，当时歌德尔只有 27 岁，而爱因斯坦已 54 岁. 作为来自同一个国家（1933 年至 1945 年纳粹统治的德国）的难民，在第二次世界大战期间来到美国，他们都讲德语. 从 20 世纪 40 年代起，他们就是普林斯顿高等研究院的教授，他们的办公室离得很近，每天一起步行上班，两人之间有着深厚的友谊.

尽管爱因斯坦是物理学家，歌德尔是数学家，但是，他们都具有超越其学科领域的智慧. 他们在科学上的密切关系源于两人深刻的性格差异. 爱因斯坦是一个自信而坚定不移的人，而歌德尔往往在争论之前就退却了. 歌德尔两次罹患神经衰弱. 在最好的情况下，歌德尔是一个体弱的人，最糟糕的时候，他则深受忧郁症的困扰. 1948 年，歌德尔开始研究广义相对论，他成功地建立了一个新的宇宙模型. 通过构造理论的精确解——能够计算重力场之力的场方程——歌德尔获得了上述原创性和逻辑上首尾一致的结果. 论证的出发点十分简单，但具有完全令人信服的权威. 歌德尔一生勤奋治学，只发表过几篇逻辑学论文，但都是鸿篇巨著. 发表于 1931 年的论文《论数学原理和有关系统的形式不可判定命题》就是其中的一篇. 该文论证了后来以他的名字命名的不完全性定理.

公理化的方法带给数学的影响，犹如数学方法对物理学的影响：数学如何将物理学的内容统一在一个架构之内，公理化方法也就如何将数学的内容整合在一个框架之下. 正如物理学家急切地寻找一切物理现象的最终理论，数学家也梦想着将其理论建立在一个稳固的基础上. 而公理化就是其中最成功的方法——找出所有数学体系的最根本的元素（比如运算方法、运算元素）之后，用纯逻辑的方法一步一步地推导，将过去所有通过直觉发现的数学定理一个接一个地“证明”出来. 这样，所有的数学内容就用必真的逻辑保证了其正确性.

公理化方法的威力是如此的巨大，以至于 20 世纪最伟大的数学家希尔伯特将其后半生的精力投入到寻找使全部数学首尾一贯的公理之中. 然后，数学家们便可以无忧无虑地在这个基础上建立自己的体系了. 材料都已经准备好了，剩下的由数学家去玩吧！然而，这个欲将全部数学公理化的梦想被歌德尔的不完全性定理彻底粉碎了，歌德尔的不完全性定理，大意是说，任何一个理论系统，都存在不可判断的命题，同时系统的矛盾性不可能在本系统获得证明，它是 20 世纪数学的里程碑，它开创了现代逻辑发展的新时期，同时，它还意味着计算机绝不可能按程序化的方式来解决所有的数学问题. 为表彰歌德尔的功绩，1951 年在授予歌德尔爱因斯坦勋章时，大数学家冯·诺伊曼说：“库尔特·歌德尔在现代逻辑方面的成就是无与伦比的、不朽的——确实，它们不只是一座纪念碑，而且是一座其意义由于受时间、空间限制还未显现的里程碑.”

广义相对论的主要思想——空间与时间的融合——并不难理解. 毕竟，在日常生活中空间和时间是融合的. 人们通过确定事件是在何时何地发生的来确定事件本身. 在三维地图上，三个数字足以指定某地的空间位置：经度、纬度和高度. 如果再加上时间，就可以在时空中精确地确定事件. 进一步，如果一个事件可以用 4 个数字来定义，那么一系列事件就可以用一系列这样的 4 个数字来定义. 在广义相对论中，这样的系列称为世界线.

这样，广义相对论在时空几何与时空中运动物体的行为之间建立起深刻的联系. 想象在垫子上放一块大理石，轻轻推动大理石，它将沿直线运动. 如果再在垫子上放置一个滚木球，对滚木球上的大理石施以同样的推动，它将沿下陷的表面滚动，其运动轨迹由直线变成了曲线. 该木球的重量使垫子这个介质变形了，而变形的介质影响了大理石的运动.

四、教学案例

案例1：2.1.1 合情推理（第一课时）

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义.

（2）能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

2. 过程与方法

（1）通过探索、研究、归纳、总结形成本节的知识结构.

（2）让学生认识到数学既是演绎的科学，又是归纳的科学，数学结论和数学证明的发现主要是靠合情推理.

3. 情感、态度与价值观

（1）结合本节内容，强调推理与其他学科以及实际生活的联系，体会推理的意义及重要性.

（2）体会合情推理有助于培养学生进行归纳的严谨作风，从而形成实事求是、力戒浮夸的思维习惯.

（二）教学重点和难点

重点：合情推理的定义，以及归纳推理和类比推理的定义.

难点：归纳和类比推理的基本方法，如何提高数学思维能力.

（三）教学方法

以教师为主导，以学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认识规律出发进行启发，运用讨论法、讲授法调动学生积极性. 引导学生在学习过程中体会知识的价值，感受知识的无穷魅力.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课引导	我们看过侦探小说《福尔摩斯探案集》中，描写推理的一个片段. ［问题1］生活中还有哪些例子也涉及到推理的？	教师提出问题，学生思考并积极回答问题.	通过思考问题，使学生初步感受到推理的意义和价值.
举例说明	物理上曾有过美好的愿望： 制造不消耗能量的机器——永动机. 最早是法国人亨内考设计方案失败，后有采用“螺旋汲水器”设计方案失败，利用“轮子惯性”方案失败，利用“水的浮力”方案	教师写出前提条件，引导学生说出结论.	使学生感知推理是人的一种思维方式，这不仅在数学中有着不可替代的作

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	失败，利用“同性磁极的排斥作用”方案失败. 得出结论：任何永动机设计方案都要失败. 法国化学家拉瓦锡根据硫酸有氧元素，硝酸有氧元素，碳酸中有氧元素，硫酸、硝酸、碳酸都是酸，得出结论：一切酸中都含有氧元素.		用，而且在物理、化学、生物、医学、政治等各个领域都有着广泛的应用.
概念形成及深化	一、基本概念 1. 推理：在日常生活中，我们经常会自觉或不自觉地根据一个或几个已知事实（或假设）得出一个判断，这种思维方式就是推理. 根据推理定义知，从结构上说，推理一般由两部分组成，一部分是已知的事实（或假设）叫做前提，一部分是由已知推出的判断，叫做结论，形式为 $\dfrac{a\parallel b,\ b\parallel c}{a\parallel c}$ 了解推理的一般形式，常用连接词将前提和结论逻辑的连接，常用有“因为……，所以……”，“根据……，可知……”，“如果……，那么……”. 2. 推理分类：合情推理与演绎推理. 合情推理：根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程. 分类：归纳推理和类比推理是数学中常用的合情推理. 归纳推理（归纳）：是从个别事实中概括出一般性的一种推理模式，归纳推理包括不完全归纳和完全归纳. 举例说明（推导等差数列的通项公式）. 学习等差数列时，如何推导其通项公式呢？ $a_1=a_1+0d$, $a_2=a_1+d=a_1+1d$, $a_3=a_2+d=a_1+2d$, …… $a_n=a_1+(n-1)d$. 这种根据一类事物的部分对象具有某种性质，推出这类事物的所有对象都具有这种性质的推理叫归纳推理，归纳是从特殊到一般的过程. 根据归纳推理的定义，我们可以得出归纳推理的一般模式：集合 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, x_1 具有性质 F, x_2 具有性质 F, …… x_n 具有性质 F, 集合 A 中所有元素具有性质 F.	教师通过上面的例子讲解基本概念，学生通过例子理解概念. 教师讲解推理的各种分类. 教师引导学生复习等差数列通项公式的推导过程.	强化理解归纳推理的思维方式，提高逻辑推理能力. 使学生对推理有一个系统的认识. 通过已经学过的实例理解归纳推理的步骤. 过渡自然而流畅，学生易于理解和记忆.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
问题探究	二、通过例题写出归纳推理的一般步骤 6=3+3， 8=3+5， 10=3+7=5+5， 12=5+7， 14=3+11=7+7， 16=3+13， …… 任何一个大于4的偶数都可以表示为两个奇质数之和. 这就是著名的哥德巴赫猜想，简称“1+1”，这个猜想至今没有人能回答它的正确性. 归纳推理的一般步骤： (1) 通过观察个别情况发现某些相同的性质； (2) 从已知的相同性质中推出一个明确表达的一般性命题.	教师展示大屏幕，学生思考并作答.	通过著名的哥德巴赫猜想，我国数学家陈景润的贡献，提高学生学习的兴趣，体会成功的喜悦，培养坚韧不拔、勇于攀登的精神，并进一步巩固归纳推理的步骤.
	三、基本例题巩固归纳过程 例1　用推理的形式表示等差数列 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的前 n 项和 S_n 的归纳过程. 例2　设 $f(n)=n^2+n+41$，$n\in\mathbf{N}_+$，计算 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，…，$f(10)$的值，同时作出归纳推理，并用 $n=40$验证猜想是否正确. 说明：(1) 由归纳推理所得的结论虽然未必可靠，但它由特殊到一般，由具体到抽象的认识性能，提供科学的发现方法，确实是非常有用的. (2) 一般地，如果归纳的个别情况越多，越具有代表性，那么推广的一般性的命题就越可靠.	教师展示大屏幕，显示例题，先让学生讨论并作答，教师完善.	通过本例题巩固归纳推理的过程，同时了解归纳推理的可靠性，培养学生分析问题和解决问题的能力.
归纳总结	四、小结 (1) 推理、合情推理、归纳推理的定义； (2) 归纳推理的一般模式； (3) 归纳推理的一般步骤； (4) 归纳推理的特点.	先请一位同学总结，其他同学补充，教师完善，用多媒体展示出来.	巩固本节课所学的知识，培养学生运用所学知识、方法解决实际问题的能力.
反馈练习	五、课堂练习及课后作业 (1) 练习：练习A，1，2. (2) 作业：练习B，1，2.	课堂练习要求每个学生都能完成；作业，第一题都做，第二题学有余力的同学做.	巩固知识，发现和弥补教学中的不足，教师及时调控、讲解，帮助学生完善知识结构.

案例2：2.2.1 综合法与分析法

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法.

（2）了解分析法和综合法的思维过程和特点.

2. 过程与方法

（1）通过对实例的分析、归纳与总结的过程，发展学生的理性思维能力.

（2）通过实际演练，使学生体会证明的必要性，并发展他们分析问题、解决问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

通过本节课的学习，了解数学直接证明的两种基本方法，感受逻辑证明在数学及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的好习惯，发展学生的思维能力，逐步形成理性思维和科学精神.

（二）教学重点和难点

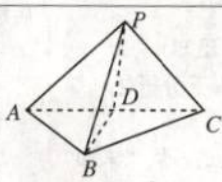
重点：分析法和综合法的思维过程及特点.

难点：分析法和综合法的应用.

（三）教学方法

以教师为主导，学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认知规律出发，进行启发、诱导、探索，运用分组讨论方法，引导探究法等，充分调动学生的积极性，层层设疑，发挥学生的主体作用，引导学生在自主学习与分组讨论交流中体会知识的价值，感受知识的无穷魅力，培养团队合作精神.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
展示实例提出问题	例1　如图，设在四面体 $P\text{-}ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$PA=PB=PC$，D 是 AC 的中点，求证：PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面.  证明：连接 PD、BD，因为 BD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边上的中线，所以 $DA=DC=DB$. 又因为 $PA=PB=PC$，而 PD 是 $\triangle PAD$，$\triangle PBD$，$\triangle PCD$ 的公共边， 所以 $\triangle PAD\cong\triangle PBD\cong\triangle PCD$. 于是 $\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC$，$\angle PDA=\angle PDC=90°$，因此，$\angle PDB=90°$，可见 $PD\perp AC$ 及 $PD\perp BD$，由此可知 PD 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面. [问题1] 请同学们思考一下，本题的步骤有哪几步？若用符号如何表示它们间的推理关系？ （1）由已知 BD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线，推出 $DA=DB=DC$，记为 P_0（已知）$\Rightarrow P_1$； （2）由 $DA=DB=DC$ 及已知条件，推出三个三角形全等，记为 $P_1\Rightarrow P_2$；	教师展示电脑大屏幕，显示例1，学生动脑想，然后调动学生积极发言，给出本题的做法. 做法可能很多，教师都应给予肯定和表扬，选出其中的一种显示在大屏幕上. 师生共同分析做出解答.	根据学生的知识结构回顾旧知，引入新知，过渡自然，符合学生的认知规律. 活跃课堂气氛，培养学生学习数学的兴趣.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	(3) 由三个三角形全等，推出$\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90^\circ$，记为$P_2\Rightarrow P_3$； (4) 由$\angle PDA=\angle PDB=\angle PDC=90^\circ$，推出$PD\perp\triangle ABC$，记为$P_3\Rightarrow P_4$（结论）. 这个证明步骤用符号表示是： P_0（已知）$\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_4$（结论）. [问题2] 上述证明方法应用的是哪一种证明方法？其主要特点是什么？	师问生答.	培养学生分析、归纳、总结问题的能力.
新课讲解	综合法，其主要特点是从原因导出结果的思维方法，即从已知条件出发，经过逐步推理，最后达到得证的结论. [问题3] 若从待证结论出发，一步一步寻求结论成立的充分条件，最后达到题设的已知条件或已被证明的事实，这是什么证明方法？ 分析法： 下面我们来看一下例2，请同学们自己做出. 例2　求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$. 证明：因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}$和$2\sqrt{5}$都是正数，所以为了证明$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$只需证明$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$，展开得$10+2\sqrt{21}<20$，即$\sqrt{21}<5$，只需证明$21<25$. 因为$21<25$成立，所以不等式$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$成立. [问题4] 类比综合法的符号表示，写出分析法的步骤的符号表示. B（结论）$\Leftarrow B_1\Leftarrow B_2\Leftarrow\cdots\Leftarrow B_n\Leftarrow A$（已知）. [问题5] 通过上述两个例子，请总结一下分析法和综合法的思维过程及特点. 从上面的例子可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”. 其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件. 综合法的特点是：从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”的逐步推理，实际上是寻找它的必要条件. [问题6] 分析法和综合法各有其特点，在实际解题时，用哪一种方法较好？ 从寻求解题思路来看，分析法执果索因，常常根底渐近，有希望成功；综合法由因导果，往往枝节横生，不容易奏效. 就表达过程而论，分析法叙述繁琐，文辞冗长；综合法形式简洁，条理清晰. 即分析法利于思考，综合法便于表达. 因此在实际解题时，常常把分析法和综合法结合起来运用，先以分析法为主寻求解题思路，再用综合法有条理地表述解题过程.	学生思考并回答. 教师展示大屏幕，显示例2，学生自己动手做. 因为有前例所以较容易写出. 学生分组讨论，然后选代表回答. 教师展示大屏幕与学生一起完善答案. 此为难点，所以教师分析并解答.	培养学生思考、分析、归纳的习惯，以及团队协作精神. 让学生了解综合法和分析法的思考过程及特点，体会它们之间的联系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
反馈训练	下面请同学们做两个练习： 练习 1　求证：$\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<2$. 练习 2　求证：当周长相等时，圆的面积比正方形面积大.	教师利用大屏幕显示练习. 学生做练习，教师巡视，选有代表性的做法用实物投影以显示分析.	让学生体会在实际解题时综合法和分析法的灵活应用，培养学生应用所学知识、方法解决实际问题的能力.
归纳总结	(1) 直接证明的两种基本方法：分析法和综合法； (2) 分析法和综合法的思维过程及特点.	先请一位同学总结，其他同学补充，教师完善，并用多媒体展示出来.	让学生养成善于总结的好习惯，并对本节的知识研究线索有一个全面的认识.
课后作业	(1) 认真阅读教科书有关内容. (2) 必做题：练习 A，1，2. (3) 选做题：练习 B，1，2.	书面作业第一个层次要求所有的学生完成，第二层次要求学有余力的同学完成.	(1) 巩固知识，发现教学中的不足； (2) 培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高综合运用数学知识的能力； (3) 通过练习发现学生掌握新知识的程度，教师及时调控讲解，帮助学生完善知识结构.

五、习题参考答案与提示

探索与研究（第 28 页）

$F+V-E=2$.

练习 A（第 29 页）

1. 设 $f(n)$ 为 n 个点可连的弦的条数，则 $f(2)=1$，$f(3)=3$，$f(4)=6$，$f(5)=10$，…，$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$.

2. 当 $n=1$ 时，原式 $=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$，

当 $n=2$ 时，原式 $=\sqrt{1\,111-22}=\sqrt{1\,089}=33$，

当 $n=3$ 时，原式 $=\sqrt{111\,111-222}=\sqrt{110\,889}=333$，

猜测 $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}$.

练习 B（第 29 页）

1. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. 不正确，验证 $n=6$ 就不正确.

探索与研究（第 31 页）

在立体几何中，和平面几何相类似的勾股定理是 $S_{\triangle MNL}^2=S_{\triangle OMN}^2+S_{\triangle ONL}^2+S_{\triangle OML}^2$.

证明：设 $OM=a$，$ON=b$，$OL=c$，则

$$S_{\triangle OMN}^2+S_{\triangle ONL}^2+S_{\triangle OML}^2=\left(\frac{1}{2}ab\right)^2+\left(\frac{1}{2}bc\right)^2+\left(\frac{1}{2}ac\right)^2=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{4},$$

$$S_{\triangle MNL}^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}\sin\angle MLN\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2)(b^2+c^2)\sin^2\angle MLN. \quad (*)$$

因为 $\cos\angle MLN=\frac{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)-(a^2+b^2)}{2\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$,

所以 $\sin^2\angle MLN=1-\cos^2\angle MLN=1-\frac{c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$

$$=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}.$$

代入（*）式得

$$S_{\triangle MNL}^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2)(b^2+c^2)\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{4}.$$

所以 $S_{\triangle MNL}^2=S_{\triangle OMN}^2+S_{\triangle ONL}^2+S_{\triangle OML}^2$.

练习（第 32 页）

1. (1) 一个平面若和两个平行平面中的一个相交，则必和另一个也相交，此结论成立；

 (2) 若两个平面同时垂直第三个平面，则这两个平面也互相平行，此结论不成立.

2. 平行六面体的对面相等.

练习 A（第 34 页）

1. $\left.\begin{array}{l}\text{因为 } AB/\!/CD,\\ \text{所以} \angle1=\angle2.\end{array}\right\}$ 三段论推理

 $\left.\begin{array}{l}\angle1=\angle2,\\ \text{又因为} \angle2=\angle3,\\ \text{所以} \angle1=\angle3.\end{array}\right\}$ 传递性关系推理

2. 略.

练习 B（第 34 页）

1. 已知△ABC 中，求证 $A+B+C=180°$.

   证明：延长 BC 得$\angle ACB$ 的外角$\angle ACD$，过点 C 在$\angle ACD$ 内作 $CE \parallel AB$（如图），

   所以$\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle A$.

   又因为$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$，

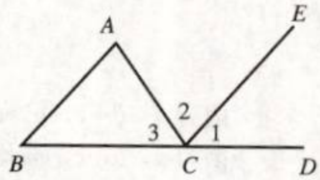
   所以$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

   第一步的大前提是：若两直线平行，则同位角、内错角相等.

   小前提是：$CE \parallel AB$.

   第二步的大前提是：平角是 180°.

   小前提是：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.



（第 1 题）

2. 若 $x<0$，则 $f(x)$的各项均正，所以 $f(x)>0$.

   若 $x=0$，则 $f(x)=10$.

   若 $0<x\leqslant 1$，则 $f(x)=x^8+x^2(1-x^3)+1-x>0$.

   若 $x>1$，则 $f(x)=x^5(x^3-1)+x(x-1)+1>0$.

   综上，$f(x)$恒为正数.

习题 2-1A（第 34 页）

1. 猜想：$\frac{1}{2}[n(n+1)-(n-1)n]=n$.

   证明：左边$=\frac{1}{2}[n^2+n-(n^2-n)]=\frac{1}{2}\times 2n=n=$右边.

2. (1) 不正确；　(2) 不正确；　(3) 不正确；　(4) 正确.

习题 2-1B（第 35 页）

1. $(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$.
2. 正确.
3. 略.

练习 A（第 38 页）

1. 因为 $\log_n(n+1)=\dfrac{1}{\log_{n+1}n}>0\ (n>1)$，

   所以要证原式成立，只需证明 $\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n<1$，

   而 $\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n<\left[\dfrac{\log_{n+1}(n+2)+\log_{n+1}n}{2}\right]^2$

   $$=\left[\frac{\log_{n+1}n(n+2)}{2}\right]^2$$

   $$<\frac{1}{4}\log_{n+1}^2\left(\frac{2n+2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times 2^2=1,$$

所以原不等式得证.

2. 方法一（分析法）：要证$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$成立，只需证明

$$\frac{a}{a+m}>\frac{c}{c+m}-\frac{b}{b+m}，即\frac{a}{a+m}>\frac{m(c-b)}{(c+m)(b+m)}.$$

因为$a<b+c$，$a>c-b$，$(c+m)(b+m)-m(a+m)=bc+m(b+c-a)$，

因为a，b，c，m均大于零，且$b+c-a>0$，

所以$(c+m)(b+m)-m(a+m)>0$，

即$(c+m)(b+m)>m(a+m)$.

所以$\frac{1}{a+m}>\frac{m}{(c+m)(b+m)}$.

所以$\frac{a}{a+m}>\frac{m(c-b)}{(c+m)(b+m)}$.

所以原不等式得证.

方法二（综合法）：$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{a}{a+b+m}+\frac{b}{a+b+m}=\frac{a+b}{a+b+m}$，

$\frac{a+b}{a+b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{(a+b-c)m}{(a+b+m)(c+m)}>0$，

所以$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

所以原不等式得证.

练习 B（第 38 页）

1. 要证$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$（$a\geqslant 3$）成立，

只需证明$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$，

两边平方得$2a-3+2\sqrt{a(a-3)}<2a-3+2\sqrt{(a-2)(a-1)}$，

所以只需证明$\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-2)(a-1)}$，

两边平方得$a^2-3a<a^2-3a+2$，

因为$0<2$.

所以原不等式得证.

另：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$，

$\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}=\frac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$，

$\sqrt{a}>\sqrt{a-2}$，$\sqrt{a-1}>\sqrt{a-3}$，

所以$\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}>0$.

所以$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}<\frac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$.

所以$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.

所以原不等式成立.

2. 因为 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$,

所以 $3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$,

即 $3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

所以 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

练习 A（第 40 页）

1. 假设 a 与 b 不平行，因为 a，b 在同一平面上，所以 $a\cap b=M$.

所以 $M\in a$，$M\in b$. 而 $a/\!/c$，$b/\!/c$，这与过直线外一点 M 有且只有一条直线与直线 c 平行矛盾.

所以假设不成立，于是 $a/\!/b$.

2. 假设 $\sqrt{p}$是有理数，设$\sqrt{p}=\frac{n}{m}$（m，n 是互质的正整数），

所以 $p=\frac{n^2}{m^2}$.

当 $m=1$ 时，$p=n^2$ 不满足质数定义；

当 $m\neq1$ 时，$\frac{n}{m}$为不能整除的分数.

所以 $p=\frac{n^2}{m^2}$也为不能整除的分数.

而 p 是质数，也是整数，所以与已知矛盾.

所以假设不成立，$\sqrt{p}$为无理数.

练习 B（第 41 页）

1. 假设 $x^2+2x-1=0$，则 $(x+1)^2=2$，所以 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

当 $x=-1-\sqrt{2}$时，$x<0$，与已知 $x>\frac{1}{2}$ 矛盾；

当 $x=\sqrt{2}-1$ 时，$x<\frac{1}{2}$，与已知 $x>\frac{1}{2}$矛盾.

所以假设不成立，原不等式成立.

2. 假设 $\lg 2=\frac{n}{m}$（m，n 为互质的正整数），则 $10^{\frac{n}{m}}=2$，

所以 $2^m=10^n$.

因为 2^m 的尾数为 2，4，6，8，10^n 的尾数为 0，

所以 2^m 不可能与 10^n 相等.

所以假设不成立，$\lg 2$ 是无理数.

习题 2-2A（第 41 页）

1. 因为 $x\neq-1$，所以 $(x+1)^2>0$.

要证$\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}\geqslant-\frac{1}{3}$成立，

只需证明$3(x^2-6x+5)+(x^2+2x+1)\geqslant 0$，

即 $4x^2-16x+16\geqslant 0$，

即$4(x-2)^2\geqslant 0$，

所以原不等式得证.

2. 要证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$，

只需证明 $13+2\sqrt{42}>13+2\sqrt{40}$，

即 $42>40$.

因为 $42>40$ 显然成立，

所以原不等式得证.

3. 假设过一点 P 与一平面 α 垂直的直线不只一条 PA，还有一条 $PB\perp\alpha$.

因为 $PA\perp\alpha$，所以 $PA/\!/PB$. 而 $PA\cap PB=P$，

所以产生矛盾.

所以假设不成立，原命题得证.

4. 设方程 $x^2+2px+2q=0$ 有有理根为 $x=\frac{m}{n}$（m，n 是互质的整数）.

代入方程得

$$\frac{m^2}{n^2}+2p\frac{m}{n}+2q=0 \text{ 即 } m^2+2pmn+2qn^2=0,$$

所以 $m^2=-2(pmn+qn^2)$. 因为 m^2 为偶数，所以 m 也为偶数.

设 $m=2k(k\in\mathbf{Z})$，则

$$4k^2+4pnk+2qn^2=0,$$

所以 $qn^2=-2k^2-2pnk=-2(k^2+pnk)$为偶数.

因为 q 为奇数，所以 n^2 为偶数，则 n 为偶数.

因为 m 也为偶数，而假设的 m，n 为互质的整数，

所以产生矛盾，假设不成立，原命题成立.

习题 2-2B（第 41 页）

1. 要证$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，

则需证明$(ac)^2+(bd)^2+2abcd\leqslant(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2$，

即$2abcd\leqslant(bc)^2+(ad)^2$.

由基本不等式知此式显然成立，

所以原不等式得证.

2. 此推理没有注意到比例性质应用的前提条件，犯了推理过程中论据不充分的错误.

$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{1}{2}$需满足 $x+y+z\neq 0$；

$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1$需满足 $x\neq y$.

3. 三棱锥 $V\text{-}ABC$ 为正三棱锥.

求证：$VC\perp AB$，$VB\perp AC$，$VA\perp BC$.

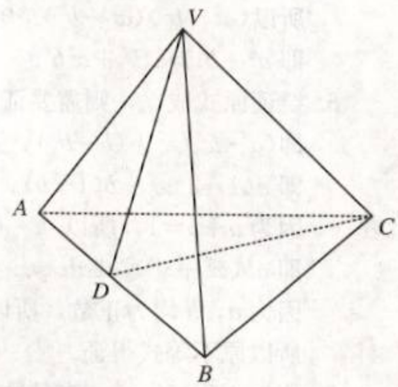
证明：因为三棱锥 $V\text{-}ABC$ 是正三棱锥，

所以侧面是等腰三角形，底面 ABC 为等边三角形.

所以取 AB 中点 D，连 VD，CD，则 $VD\perp AB$，$CD\perp AB$.

所以 $AB\perp$ 面 VCD，所以 $VC\perp AB$.

同理可证：$VB\perp AC$，$VA\perp BC$.



（第 3 题）

4. 假设 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是有理数 m，则 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}=m$，

所以 $a\sqrt{c}=m-b\sqrt{d}$.

两边平方得

$$a^2c=m^2+b^2d-2mb\sqrt{d}.$$

因为 a^2c，m^2，b^2d 均为有理数，而 $2mb\sqrt{d}$ 是无理数，

所以有理数 a^2c 不可能等于无理数 $m^2+b^2d-2mb\sqrt{d}$，

所以假设不成立，原命题成立.

5. 假设结论不成立，则

$$|f(1)|<\frac{1}{2}，|f(2)|<\frac{1}{2}\text{同时成立}.$$

所以$\begin{cases}|f(1)|=|1+2a|<\dfrac{1}{2}\\ |f(2)|=|4+3a|<\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}-\dfrac{3}{4}<a<-\dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{7}{6}\end{cases}$

所以 $a\in\varnothing$，与 $a\in\mathbf{R}$ 已知矛盾.

所以原命题正确.

本章小结

Ⅲ　巩固与提高（第 42 页）

1. 猜想：$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\cdots+[(n-1)^2+(2n-1)]=(n-1)^3+n^3$.

证明：$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\cdots+[(n-1)^2+(2n-1)]$

$=(2n-1)(n-1)^2+(1+2+3+\cdots+2n-1)$

$=(2n-1)(n-1)^2+(2n-1)n=(n-1)^3+n^3$.

2. 略.
3. 略.
4. 略.
5. 因为 $a^6+b^6-(a^4b^2+a^2b^4)$

$=a^4(a^2-b^2)+b^4(b^2-a^2)$

$=(a^2-b^2)(a^4-b^4)$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)^2$，

因为 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，

所以$(a^2-b^2)(a^2+b^2)>0$，

即$a^6+b^6>a^4b^2+a^2b^4$.

6. 要证原式成立，则需要证明$ax^2+by^2\geqslant a^2x^2+b^2y^2+2abxy$，

即$(a-a^2)x^2+(b-b^2)y^2\geqslant 2abxy$，

即$a(1-a)x^2+b(1-b)y^2\geqslant 2abxy$. （*）

因为$a+b=1$，所以（*）式可变为$abx^2+aby^2\geqslant 2abxy$，

即$ab(x^2+y^2)\geqslant 2abxy$.

因为a，b均为正数，所以$x^2+y^2\geqslant 2xy$显然成立.

所以原不等式得证.

7. 假设方程$f(x)=0$有整数根n，则$an^2+bn+c=0$.

所以$n(an+b)+c=0$.

因为c为奇数，

所以$n(an+b)$也为奇数，且n与$an+b$都必须为奇数.

因为$an+b$为偶数与$an+b$为奇数产生矛盾，

所以假设不成立，原命题成立.

8. 假设函数$f(x)$的图象x轴至少有两个交点$(x_1，0)$，$(x_2，0)$，…，$(x_n，0)$ $(n\geqslant 2)$且$x_1>x_2>\cdots>x_n$，则$f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$，…，$f(x_n)=0$，

而这与函数$f(x)$对其定义域内任意两个实数a、b，当$a<b$时，$f(a)<f(b)$产生矛盾，所以假设不成立，原命题成立.

Ⅳ 自测与评估（第43页）

1. $\sqrt{n+1+\dfrac{n+1}{n(n+2)}}=\sqrt{\dfrac{(n+1)^3}{n(n+2)}}$.

2. 略.

3. 略.

4. 要证明$\lg\dfrac{|A|+|B|}{2}\geqslant\dfrac{\lg|A|+\lg|B|}{2}$成立，需证明$\lg\dfrac{|A|+|B|}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}\lg|AB|=\lg\sqrt{|AB|}$，只需证$\dfrac{|A|+|B|}{2}\geqslant\sqrt{|AB|}$. 上式显然成立，所以原不等式得证.

5. 略.

六、反馈与评价

1. 本章课后作业情况、测验成绩等作为评价的一个方面.

2. 可让学生结合已学过的教学案例和生活中的实例，对合情推理、演绎推理以及数学证明方法进行概括和总结，体会合情推理、演绎推理以及数学证明在数学结论的发现、证明中的作用.

第三章

数系的扩充与复数的引入

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解引进复数的必要性，了解数集的扩充过程：自然数集（N）→整数集（Z）→有理数集（Q）→实数集（R）→复数集（C）.

2. 理解在数系的扩充中由实数集扩展到复数集出现的一些基本概念．例如，虚数单位、复数、虚数、纯虚数、共轭复数、实部、虚部等．理解复数相等的充要条件.

3. 了解复数的代数表示法及其几何意义.

4. 掌握复数运算的四则运算法则，了解复数代数形式的加法、减法运算的几何意义．注意了解在不同数集中运算法则的联系和区别.

（二）过程与方法目标

1. 通过实例了解数的概念的发展，再现知识产生的过程.

2. 通过引入虚数单位 i 的性质与研究实数的性质类比归纳出复数的性质.

3. 通过例题和习题的训练，引导学生从实数的运算入手，由具体到抽象总结出复数的运算规律，提高学生的运算能力.

4. 使用现代信息技术展示复数的几何意义，培养学生的直观思维能力.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 复数知识是现代科技中普遍使用的一种数学工具，是进一步学习高等数学的基础，它有利于培养和发展学生的运算能力，打好高中阶段的数学基础.

2. 通过数系的扩充过程，使学生感受人类认识问题、发展科学的艰辛历程.

3. 在教学过程中，注意展示每一数学问题的关键，给学生讲清楚所面临的问题和怎样解决问题. 激发学生的好奇心，培养学生学习数学的兴趣，引导学生发现、提出问题，独立思考和研究问题，鼓励学生创造性地解决问题.

4. 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与解数学问题的需要（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过方程的求根，体会数系扩充的必要性. 了解数学中的内部需求是如何推动数系的扩充的.

2. 揭示复数、点的坐标、向量的坐标之间的联系，建立复数加、减法运算与向量加法运算之间的联系.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章是在小学、初中和高中所学知识的基础上，介绍复数的概念、复数的代数形式的运算和数系的扩充等内容.

本章共分两大节. 第一大节是“数系的扩充与复数的引入”；第二大节是“复数的运算”.

在第一大节，首先简要地展示了数系的扩充过程，回顾了数的发展，并指出当数集扩充到实数集时，由于负数不能开平方，因而大量代数方程无法求解，于是就产生了要开拓新数集的要求，从而自然地引入虚数单位 i，复数由此而产生. 接着，介绍了复数的有关概念和复数的几何表示. 主要涉及的概念有：复数、虚数、纯虚数、共轭复数、实部、虚部、复数相等、复数的模等.

在第二大节，介绍了复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则，同时指出了复数加法、减法的几何意义，复平面上两点间的距离公式，沟通了“数”与“形”之间的联系，提供了用“形”来帮助处理“数”和用“数”来帮助处理“形”的工具.

本章有两条主线：一条主线是以复数代数形式来表述复数的概念. 规定了加法、乘法两种运算法则，然后把减法、除法分别定义为加法、乘法的逆运算来推导出其运算法则. 利用复数的四则运算，把复数代数形式 $a+bi$ 看成由 a 和 bi 两个非同类项组成，这样多项式的运算法则几乎可以全部搬过来照用，于是复数就与多项式、方程联系起来，从而能帮助解决一些多项式中的因式分解、解方程等数学问题. 另一条主线是用复平面上的点或向量来描述复数. 由此引出了复数运算的几何意义，使复数在平面几何、解析几何中得到广泛应用. 这两条主线在教材中是交替安排的，这样能加强学生的“形”与“数”结合的观念，使学生在看到代数形式时就能联想到几何图形，看到几何图形时就能联想到对应的复数. 有利于学生深入理解复数的概念，开阔学生的思路，培养和提高用“数形结合”观点来处理问题的能力.

本章还有两个特点希望教师讲解时注意．第一个特点是较全面地讲述了数系扩充的背景；第二个特点是复数除法运算的引入是首先引入了复数的倒数的概念．教学中要引导学生充分地认识新概念的产生过程，使学生知道它们的来龙去脉，并在头脑中形成完整的知识体系，引导学生认识到复数来源于实际生活中，又反过来为实际服务．

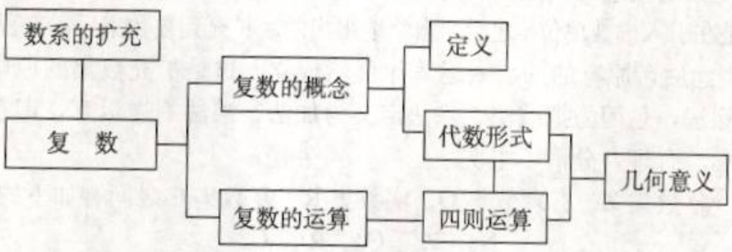
2. 地位与作用

在中学学习一些复数的基础知识是十分必要的．它不仅可以使高中毕业生对于数的概念初步地有一个较为完整的认识，而且也为他们运用数学知识解决问题增添了新的工具，同时也为他们进一步学习高等数学、力学和电学打下一定的基础．

3. 重点和难点

本章教材中，复数的概念、复数的代数表示方法是整个内容的出发点，复数的加、减、乘、除运算（代数形式）是本章的中心内容，也是本章教材的重点和难点．

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　数系的扩充与复数的引入	
3.1.1　实数系	1 课时
3.1.2　复数的引入	2 课时
3.2　复数的运算	
3.2.1　复数的加法和减法	1 课时
3.2.2　复数的乘法和除法	2 课时
本章小结	1 课时

（四）教法与学法建议

3.1　数系的扩充与复数的引入

3.1.1　实数系

1. 教学重点是从数的发展理解数系的扩充过程，体会人类认识问题的过程，掌握数系的完整体系．

教学难点是理解实数体系.

2. 本小节内容相当于这一章的引言，起着承前启后的作用. 在这一小节中，首先简明扼要地对已经学过的数集由于生产与科学发展的需要而逐步扩充的过程作了概括；然后说明，数集的每一次扩充，对数学学科本身来说，也解决了在原有数集中某种运算不是永远可以实施的矛盾，使得某些代数方程在新的数集中能够有解. 复数，最初正是由于解方程的需要而产生的，后来由于在科学技术中得到应用而进一步发展. 教学中应重视增进学生对数系的了解、对各数系产生的背景的认识.

3. 在讲解数集的扩充时，为了使学生理解各数集，可以通过列举大量的具体的数来帮助理解. 例如：{有理数}={分数}={循环小数}，{实数}={小数}.

3.1.2 复数的引入

1. 复数系

(1) 教学重点是复数的概念与复数的相等. 教学难点是复数概念的引入.

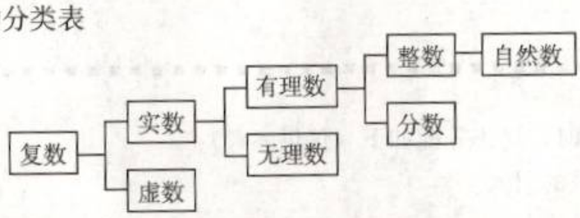
(2) 复数的概念是在引入虚数单位 i 之后，自然地得出的. 扩充到复数集后，方程 $x^2=-1$ 的解才存在.

(3) 在引入 i 的概念后，原有的加、乘运算律仍然成立. 这是扩充数集的原则之一. 这里只提加、乘运算，不提减法与除法，是因为把减法、除法定义为加法、乘法的逆运算，即在四则运算中突出加、乘. 这样处理更为科学、合理，分清了主次.

(4) 自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 之间有如下的包含关系

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}.$$

引导学生总结出数系的分类表



(5) 实数 a，b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部与虚部，要强调在写复数代数形式 $a+bi$ 时，必须注明 a，$b\in\mathbf{R}$.

(6) 对于两个复数 $a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$ 与 $c+di(c,\ d\in\mathbf{R})$，$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$，$b=d$，这是一项规定，即复数相等的定义. 由这个定义即得推论：$a+bi=0\Leftrightarrow a=0$，$b=0$.

(7) “复数不能比较大小”的确切含义是指：不论怎样定义两个复数之间的一个关系，都不能使这种关系同时满足实数集中大小关系的三条性质：

①对于任意实数 a，b 来说，$a<b$，$a=b$，$b<a$，这三种情况有且只有一种成立；

②如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

③如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$.

关于两个不全是实数的复数不能比较大小的问题，课本上没有要求给出证明，它的证明超出中学数学教学要求的范围. 但这个问题是学生在学习中感兴趣的一个问题，可在学生知识允许的范围内举例作些说明. 但应注意的是在复数集中虽没有大小之分，但有等与不等之分.

(8) 通过“数的概念的发展”的教学，使学生认识到数的概念的每一步发展都是生产实践和科学发展的需要，以此对学生进行辩证唯物主义教育.

2. 复数的几何意义

(1) 教学重点是复数的几何意义和复数的模. 教学难点是复数的模的几何意义.

(2) 在讲复数集与复平面内所有点所成的集合一一对应时，要注意：

①任何一个复数 $z=a+bi(a, b\in \mathbf{R})$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定. 这就是说，复数的实质是有序实数对.

②复数 $z=a+bi$ 用复平面内的点 $Z(a, b)$ 表示. 复平面内的点 Z 的坐标是 (a, b)，而不是 (a, bi)，也就是说，复平面内的纵坐标轴上的单位长度是 1，而不是 i. 由于 $i=0+1\cdot i$，在用复平面内的点 $(0, 1)$ 表示 i 时，该点与原点的距离是 1，等于纵轴上的单位长度. 这就是说，当我们把纵轴上的点 $(0, 1)$ 标上虚数 i 时，不能认为这一点到原点的距离就是虚数单位 i，或者 i 就是纵轴的单位长度.

③当 $a=0$ 时，对任何 $b\neq 0$，$a+bi=0+bi$ 是纯虚数，纵轴上的点 $(0, b)(b\neq 0)$ 都表示纯虚数.

④要学生注意：复数 $z=a+bi$ 中的 z，书写时要小写，复平面内点 $Z(a, b)$ 中的 Z，书写时要大写.

(3) 模相等且方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的. 因此，任何向量都可通过平移，把起点移到原点. 这样，任何一个复数 $z=a+bi(a, b\in \mathbf{R})$ 和复平面内一点 $Z(a, b)$ 对应，任何一点 $Z(a, b)$ 又可以和以原点为起点、点 $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应. 这些对应都是一一对应，即

$$\text{复数 } z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点 } Z(a, b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{向量 } \overrightarrow{OZ} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复数 } z=a+bi.$$

(4) 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，又叫做向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的绝对值，也就是有向线段 OZ 的长度 $|OZ|$. 它也叫做复数 $z=a+bi$ 的模或绝对值. 它的计算公式是 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. 这些内容应使学生在理解的基础上牢固地掌握.

当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就是实数 a，这时根据上面复数的模的公式，应有 $|a|=\sqrt{a^2}$. 这与以前关于实数绝对值和算术平方根的规定一致. 可见，复数的模就是实数绝对值概念的扩充. 复数的模与实数绝对值一样，也是非负实数. 因而，复数的模是可以比较大小的.

(5) 在进行共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的教学时，可以提一下当 $b=0$ 时的特殊情形：即实轴上的点关于实轴本身对称，例如，5 与 5 也是互为共轭复数. 当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，$a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做互为共轭虚数. 可见，共轭虚数是共轭复数的特殊情形.

(6) 在讲解教材的例 3 时，要结合图形，帮助学生理解什么时候图形是圆(曲线)，什么时候是圆面(曲线所包围的平面部分)，画图时边界什么时候画成实线，什么时候画成虚线.

(7) 通过例题、习题的综合训练，加强学生的“数形结合”观念，提高学生灵活运用和综合运用数学知识的能力.

3.2 复数的运算

3.2.1 复数的加法和减法

1. 教学重点是复数的加法和减法的法则. 教学难点是复数的加法与减法的几何意义.

2. 在复数的加法与减法中，重点是加法. 教材首先规定了复数的加法法则. 在讲这个规定时，应

通过下面几个方面，使学生逐步理解这个规定的合理性：

(1) 当 $b=0$，$d=0$ 时，与实数加法法则一致；

(2) 验证实数加法运算律在复数集中仍然成立；

(3) 符合向量加法的平行四边形法则.

3. 复数的加法满足交换律、结合律.

4. 复数加法可以按照向量的加法法则来进行. 讲解时注意与物理中力的合成、向量的加法进行类比.

5. 讲过复数加法可以按照向量加法的平行四边形法则来进行后，可以指出向量加法还可以按照三角形法则来进行：如教材中图 3-9 所示，求$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$的和，可以看作是求$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{Z_1Z}$的和. 这时先画出第一个向量$\overrightarrow{OZ_1}$，再以$\overrightarrow{OZ_1}$的终点为起点画出第二个向量$\overrightarrow{Z_1Z}$，那么，由第一个向量起点 O 指向第二个向量终点 Z 的向量$\overrightarrow{OZ}$，就是这两个向量的和向量.

6. 复数的相反数是推导复数减法法则的关键，如果用减法是加法的逆运算则感觉缺少理论支撑. 但是，如果把减法规定为加法的逆运算，并按加法法则求出差，则会与复数减法的几何意义一致，容易被学生理解和接受. 教学时教师要灵活掌握.

7. 对两复数减法的几何意义，可简单叙述为：连接两向量的终点、方向指向被减向量得到的向量，就是两复数的差对应的向量.

8. 把复数的加（减）法，从形式上加以归纳，就得出了与多项式加（减）法相类似的结论，即实部与实部、虚部与虚部分别相加（减）.

3.2.2 复数的乘法和除法

1. 教学重点是复数的乘法和除法法则以及有关运算律. 教学难点是复数中有关 i，$(1+\mathrm{i})^2$，$(1-\mathrm{i})^2$ 的运算以及复数除法运算.

2. 复数的代数形式的乘法，与加减法一样，指出可以按照与多项式相乘类似的办法进行，而不必去记公式.

3. 复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

4. 根据乘法法则得出“两个共轭复数的乘积等于这个复数模的平方”，即公式 $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$，通常也写成 $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{z\overline{z}}$. 这是连接复数与实数的重要桥梁，这个公式很重要.

5. 教材在讲解复数的乘方时，根据复数乘法满足交换律与结合律，先把实数集中正整数指数幂的运算律，推广到复数集中来. 在这个基础上，对虚数单位 i 的正整数指数幂的运算进行了归纳总结.

6. 为了引入复数的除法，教材首先定义了复数的倒数，这里虽然没有规定复数的除法是乘法的逆运算，但其实质和以往教材中的规定是一样的，都是将复数除法运算转化为利用共轭复数来进行的乘法运算.

7. 应当着重向学生指出：复数除法的运算法则不必死记硬背，只要记住两个复数相除就是先把它们的商写成分式的形式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，再把结果化简即可.

8. 在复数集中任何实系数一元二次方程都是有解的. 当实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta<0$ 时，其求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a}$.

三、拓展资源

数系的扩充——复数的引入

我们知道，在实数范围内，方程 $x^2+1=0$ 是没有解的，只有把实数集扩充到复数集才能有解. 对于复数 $z=a+bi$(a，b 都是实数)来说，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时叫做虚数；当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，叫做纯虚数. 可是，在历史上引进虚数，把实数集扩充到复数集可不是件容易的事. 那么，历史上是如何引进虚数的呢?

16 世纪意大利米兰学者卡尔丹（1501—1576）在 1545 年发表的《大法》一书中，公布了三次方程的一般解法，被后人称为“卡尔丹公式”. 他是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家，并且在讨论是否可以把 10 分成两部分，使它们的乘积等于 40 时，他把答案写成$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$，尽管他认为 $5+\sqrt{-15}$和 $5-\sqrt{-15}$这两个表示式是没有意义的、想象的、虚无飘渺的，但他还是把 10 分成了两部分，并使它们的乘积等于 40. 给出“虚数”这一名称的是法国数学家笛卡儿(1596—1650)，他在《几何学》（1637 年发表）中使“虚的数”与“实的数”相对应，从此，虚数才流传开来.

数系中发现一颗新星——虚数，引起了数学界的一片困惑，很多大数学家都不承认虚数. 德国数学家莱布尼茨（1664—1716）在 1702 年说：“虚数是神灵遁迹的精微而奇异的隐避所，它大概是存在和虚妄两界中的两栖物.”瑞士数学大师欧拉（1707—1783）说：“一切形如$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$的数学式子都是不可想象的数，因为它们所表示的是负数的平方根. 对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它们纯属虚幻.”然而，真理性的东西一定可以经得住时间和空间的考验，最终占有自己的一席之地. 法国数学家达兰贝尔（1717—1783）在 1747 年指出，如果按照多项式的四则运算法则对虚数进行运算，那么它的结果总是 $a+\sqrt{-1}b$ 的形式(a、b 都是实数). 法国数学家棣莫弗（1667—1754）在 1730 年发现$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$，这就是著名的棣莫弗定理. 欧拉在 1748 年发现了有名的关系式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，并且是他在《微分公式》（1777 年）一文中第一次用 i 来表示－1 的平方根，首创了用符号 i 作为虚数的单位. “虚数”实际上不是想象出来的，而它是确实存在的. 挪威的测量学家成塞尔（1745—1818），在 1779 年试图给这种虚数以直观的几何解释，并首先发表其作法，然而没有得到学术界的重视.

德国数学家高斯（1777—1855）在 1806 年公布了虚数的图象表示法，即所有实数能用一条数轴表示，同样，虚数也能用一个平面上的点来表示. 在直角坐标系中，横轴上取对应实数 a 的点 A，纵轴上取对应实数 b 的点 B，并过这两点引平行于坐标轴的直线，它们的交点 C 就表示复数 $a+bi$. 像这样，由各点都对应复数的平面叫做“复平面”，后来又称“高斯平面”. 高斯在 1831 年，用实数组(a，b)代表复数 $a+bi$，并建立了复数的某些运算，使得复数的某些运算也像实数一样地“代数化”. 他又在 1832 年第一次提出了“复数”这个名词，还将表示平面上同一点的两种不同方法——直角坐标法和极坐标法加以综合. 统一于表示同一复数的代数式和三角式两种形式中，并把数轴上的点与实数一一对

应，扩展为平面上的点与复数一一对应．高斯不仅把复数看作平面上的点，而且还看作是一种向量，并利用复数与向量之间一一对应的关系，阐述了复数的几何加法与乘法．至此，复数理论才比较完整和系统地建立起来了．

经过许多数学家长期不懈的努力，深刻探讨并发展了复数理论，才使得在数学领域游荡了 200 年的幽灵——虚数揭去了神秘的面纱，显现出它的本来面目，原来虚数不虚．虚数成为数系大家庭中的一员，从而实数集扩充到了复数集．

随着科学和技术的进步，复数理论已越来越显出它的重要性，它不但对数学本身的发展有着极其重要的意义，而且为证明机翼上升力的基本定理起到了重要作用，并在解决堤坝渗水的问题中显示了它的威力，也为建立巨大水电站提供了重要的理论依据．

四、教学案例

案例 1：3.1.2 复数的引入（第一课时）

（一）教学目标

1．知识与技能

使学生了解学习复数的必要性，掌握复数有关概念、复数分类，初步掌握虚数单位的概念和性质．

2．过程与方法

通过类比引入、分类讨论、化归与转化等数学思想方法的使用，培养学生分析问题、解决问题的能力．

3．情感、态度与价值观

感受人类理性思维对数学发展所起的重要作用，进行历史唯物主义教育与辩证唯物主义教育．

（二）教学重点和难点

重点：虚数单位，复数集的构成，复数相等的应用；

难点：复数的概念，虚数与纯虚数的区别．

（三）教学方法

本节课主要是概念的引入、深化、理解与应用，采用教师引导、学生探究、师生共同总结的教学方法．

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 历史上是怎样发现虚数的. 2. 数系扩充的脉络是：自然数系→整数系→有理数系→实数系. 例如，为了解决方程 $x^2-2=0$ 在有理数集中无根的矛盾，将数集扩充到实数集，这个二次方程有两个实数解 $x=\pm\sqrt{2}$. 3. 矛盾冲突到了一定的阶段，就有必要引入新的数集了. 为了解决方程 $x^2=-1$ 没有实根的矛盾，我们把它的根记为 $\pm\sqrt{-1}$，那么这是一个怎样的数呢？	1. 用三分钟左右时间带领学生回到卡当、笛卡儿、高斯时代，感受虚数的发展史. 2. 以师问生答的方式回顾已经学习过的数集是怎样发展的. 3. 很自然地提出新的问题，让学生思考. 当然我们只能暂时把根“记”为 $\pm\sqrt{-1}$，有关下文，待新授.	1. 用讲故事的方式，让学生感到学习虚数是必要的，并激发他们的学习积极性. 2. 用旧的问题类比，引入新问题，引起学生学习兴趣.
概念形成	1. 记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，称 i 为虚数，则 $\mathrm{i}^2=-1$，因而方程 $x^2=-1$ 的根为 $\pm\mathrm{i}$. 一般地，方程 $x^2=-a(a>0)$ 的根呢？ 2. 虚数 i 的性质： (1) i 的平方等于 -1，即 $\mathrm{i}^2=-1$； (2) 实数可以与 i 进行四则运算. 在进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立； 3. 复数概念：对实数 a 和 b，形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数叫复数. 其中 a 叫复数的实部，b 叫复数的虚部，i 叫虚数单位. 复数通常用小写英文字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$. a）强调：$a$，$b\in\mathbf{R}$ 的重要性. b）思考题：复数与实数有什么联系？	1. 教师定义 i 的意义，提问学生三个问题：(1) i 的平方是多少？(2) 方程 $x^2=-1$ 的根是什么？(3) 方程 $x^2=-a$ $(a>0)$ 的根呢？ 2. 引导学生对虚数单位 i 进行剖析，揭示它所满足的两条常用性质. 3. 让学生动手解决两个方程，总结 $\Delta<0$ 时，两种常见题型的解法步骤，教师完善. 4. 由特殊到一般，类比上面的求解过程，由学生完成求根公式的推导，师生共同归纳总结. 5. 引导学生从形式上认识复数的特点，引出复数概念.	1. 由浅入深地提出问题，并解决问题，从一个在实数集中不可解的方程，变为在复数集中可解的方程. 2. 从形式上初步认识复数.
概念深化	1. 当 $b=0$ 时，复数就成为实数；当 $b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 叫做虚数. 当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，$b\mathrm{i}$ 叫做纯虚数. 2. 全体复数所构成的集合叫做复数集，常用 $\mathbf{C}$ 表示，即 $\mathbf{C}=\{z\mid z=a+b\mathrm{i}, a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}\}$. 3. 复数的分类： $复数\begin{cases}实数(b=0)\\ 虚数(b\neq0)\begin{cases}纯虚数(a=0,\ b\neq0)\\ 非纯虚数(a\neq0,\ b\neq0)\end{cases}\end{cases}$ 注意分清复数分类中的界限. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，则：	1. 启发学生对实部与虚部分别等于零时进行分析，看复数的变化. 2. 由实数的分类启发学生尝试对复数分类，教师总结补充. 3. 探讨复数的构成，明了两要素：(1) 实部；(2) 虚部. 4. 教师提问：实部、虚部一定为实数吗？什么时候两复	学生初步接触复数，会造成认识上的空白，而这些内容正是为填补这些空白而预设的. 这样安排，有利于学生循序渐进地从多方位认识复数、理解复数，符合学生的认知规律.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	(1) $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow b=0$； (2) z 是虚数$\Leftrightarrow b\neq0$； (3) z 为纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0$； (4) $z=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$. 4. 强调复数的实部与虚部都是实数. 5. 两个复数相等：当且仅当它们实部和虚部分别相等. 6. 强调两个实数之间可以比较大小，但两个复数，如果不全是实数，它们之间就不能比较大小.	数相等？学生思考后回答，教师补充. 5. 由于实数可以表示在数轴上，因而两实数可以比较大小. 教师提问：两复数间能比较大小吗？为什么？学生小组讨论后，派代表发言，教师提炼总结.	
练习巩固	1. 求下列复数的实部与虚部，并判断它们中哪些是实数、虚数、纯虚数？ $3+4i$，$-0.5i$，3，0. 2. 求 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，归纳求根公式.	学生练习.	1. 巩固所学基本概念. 2. 了解一元二次方程在复数集下的求根公式.
应用举例	例 1　实数 x 取何值时，复数 $z=(x-2)+(x+3)i$ (1) 是实数？(2) 是虚数？(3) 是纯虚数？ 例 2　求适合下列方程的 x 和 y (x，$y\in\mathbf{R}$) 的值： (1) $(x+2y)-i=6x+(x-y)i$； (2) $(x+y+1)-(x-y+2)i=0$. 例 3　求解三次方程 $x^3+1=0$.	1. 学生完成解答，教师巡回指导，并根据发现的普遍性问题集体予以纠正，个别现象个别指导. 2. 强调： (1) 用"且"连结的，应从交集上解决. (2) 复数的相等，应从方程组中解决. (3) 善于用"转化"的思想处理高次方程.	对重点的概念强化练习，以期达到熟能生巧的程度. 同时点出解题过程中存在的问题和题目中所蕴含的数学方法和思想，以使学生学有所悟，学有所获.
巩固练习	练习 A，1，2，3.	课堂练习.	进一步巩固所学知识、方法.
归纳小结	1. 数学方法：类比归纳、分类讨论. 2. 数学思想：化归与转化. 3. 数学知识：复数有关概念.	学生总结，教师补充完善.	培养学生自觉回顾、善于总结的习惯，锻炼语言表达能力；更加系统地完善知识结构，构建方法体系.
布置作业	练习 B，1，2，3.	学生练习.	巩固本节所学，为下节课的学习做好铺垫.

案例 2：3.2.1　复数的加法和减法

（一）教学目标

1. 知识与技能

掌握复数加法、减法的运算法则，能够熟练地进行加减运算；

理解复数加减法的几何意义，能用平行四边形和三角形法则解决一些简单的问题.

2. 过程与方法

培养学生数形结合的思想方法.

3. 情感、态度与价值观

培养学生良好的思维品质（思维的严谨性、深刻性、灵活性），感受为真理而执着追求的精神，进行辩证唯物主义教育.

（二）教学重点和难点

重点是加减法运算法则，难点是加减法的几何意义.

（三）教学方法

使用多媒体教学辅助手段，从感性和理性的角度认识复数的加减运算，引导学生思考、探索，从解决问题的过程中构建新的知识体系.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 复数、点、向量之间的对应关系. 2. 实数可以进行加减乘除四则运算，且运算的结果仍为一个实数；那么复数呢？	多媒体展示问题，学生回答，教师补充.	复习旧知识，为新知识的学习作准备.
概念形成	1. 引例：已知 $m=3x+4y$，$n=5x-6y$，求 $m+n$，$m-n$. 2. 复数的加法运算： 设 $z_1=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），$z_2=c+di$（c，$d\in\mathbf{R}$），定义 $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$. 显然，两个复数的和也是一个复数. 3. 复数的减法运算： (1) $a+bi$ 的相反数； (2) 运算法则：转化为加法运算. 可见，两个复数的差也是一个复数. 4. 复数的加减运算就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减.	1. 学生完成引例，会感觉比较轻松. 教师可进一步提问：多项式的加法遵循什么原则？ 学生回答：合并同类项. 2. 教师继续提问：那么两个复数的加法运算法则可不可以这样进行呢？ 学生推导，教师巡回指导，然后由教师总结加法法则. 3. 教师进一步引导学生从相反数的概念入手，利用转化的思想，化减法运算为加法运算. 推导复数的减法运算法则. 4. 联系已学过的知识，你能用一句话描述复数的加、减	引导学生将旧的知识与新的知识进行联系，使前后的知识得到连贯，成为一个有机的整体.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成		法运算法则吗？ 5. 引导学生观察：两个复数的和、差仍为一个复数. 即复数的运算对加减法是封闭的.	
概念深化	从复数的几何意义出发，再看复数的加减运算： 1. 当两复数的对应向量共线时，可直接运算. 2. 当两复数的对应向量不共线时，加法运算可类比于向量加法的平行四边形法则；减法运算类比于向量减法的三角形法则. 3. 将所得和向量或差向量移至起点坐标原点时，该向量的终点坐标就对应所求复数的坐标.	1. 教师引导，学生观察并思考：把复数表示为向量时，能否按照向量加减运算的平行四边形法则和三角形法则来进行？学生作图验证猜想；教师补充说明. 2. 强调：只有将和、差向量平移至以原点为起点时，其终点才能对应该复数.	体会从数形结合的角度来认识复数的加减法法则，培养学生的形象思维能力.
应用举例	例 1　已知：$z_1=3+2i$，$z_2=1-4i$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2. 例 2　计算$(2-5i)+(3+7i)-(5+4i)$.	学生口答，教师指正.	熟悉法则使用.
巩固练习	练习 A，1，2，3.	学生练习.	巩固本节所学.
归纳小结	1. 知识方面：复数加减法运算法则及几何意义. 2. 数学思想方法方面：类比归纳、数形结合.	学生总结，教师补充.	从不同的角度总结，既学到知识，又学到数学方法，也有利于教师反思教学中存在的问题，以便及时反馈，使知识更加系统化.
布置作业	练习 B，1，2，3.		巩固本节课所学知识及方法.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 50 页）

1. 略.

2. (1) 两个实数进行四则运算的结果仍是实数.

   (2) 满足有理数的运算律.

(3) 全体实数和数轴上的点建立一一对应关系．也就是说，实数所对应的点充满了整个数轴而没有任何空隙．

3. 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴．实数和数轴上的点建立一一对应关系．

练习 A（第 54 页）

1. 是实数的有：$2+\sqrt{2}$，0.618，0，$i^2=-1$．

   是虚数的有：3i，i，5+2i，$3-\sqrt{2}i$，$(1+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{2}i$．

   所给的 $2+\sqrt{2}$，0.618，3i，0，i，i^2，5+2i，$3-\sqrt{2}i$，$(1+\sqrt{3})i$，$2+\sqrt{2}i$ 全部都是复数．

2. 见下表：

复数	实部	虚部
$-3+2i$	-3	2
$3+7i$	3	7
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
-8	-8	0
$-6i$	0	-6

3. (1) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}x-2y=3\\2x+3y=-3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{7}\\y=-\dfrac{9}{7}\end{cases}$

   (2) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}3x+y+3=0\\x-y-3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$

4. 图略．

5. (1) $b=0$，$a\in\mathbf{R}$；

   (2) $b>0$，$a\in\mathbf{R}$；

   (3) $a=0$，$b\in\mathbf{R}$；

   (4) $a>0$，$b\in\mathbf{R}$．

6. (1) 5；　(2) 13；　(3) $\frac{5}{2}$；　(4) $\sqrt{3}$．

7. (1) 8+5i；　(2) 7i；　(3) 3；　(4) $-3+3i$．　图略．

练习 B（第 55 页）

1. $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$．

2. 当复数 $(x^2+x-2)+(x^2+3x+2)i$ 为实数时，有 $x^2+3x+2=0$，则 $x=-1$ 或 $x=-2$．

   当复数 $(x^2+x-2)+(x^2+3x+2)i$ 为虚数时，有 $x^2+3x+2\neq0$，则 $x\neq-1$ 且 $x\neq-2$．

   当复数 $(x^2+x-2)+(x^2+3x+2)i$ 为纯虚数时，有 $\begin{cases}x^2+x-2=0\\x^2+3x+2\neq0\end{cases}$ 则 $x=1$．

3. 由 $x^2-10x+40=0$，配方得 $(x-5)^2=-15$.

所以 $x-5=\pm\sqrt{15}i$.

所以 方程的解为 $x_1=5+\sqrt{15}i$，$x_2=5-\sqrt{15}i$.

4. 图略.

5. (1) 以 $(0,\ 0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆；

(2) 以 $(0,\ 0)$ 为圆心，以 1，2 为半径的圆所夹的圆环面，不包括边界；

(3) 直线 $x=2$ 右边的区域，不包括边界；

(4) 直线 $x=y$.

习题 3-1 A（第 55 页）

1. (1) 并集； (2) $\varnothing$； (3) 真子集； (4) 虚数集.

2. 见下表：

复数	实部	虚部
$-5+5i$	-5	5
$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0
i	0	1
0	0	0

3. 不是；不是.

4. 图略.

5. (1) 图略；

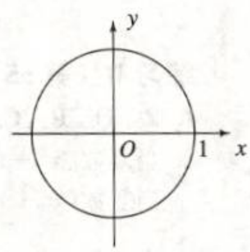
(2) $\sqrt{2}$；13；$\sqrt{1681}$；4；$\sqrt{5}$；

(3) $-1-i$；$-5+12i$；$40-9i$；$-4i$；$\sqrt{5}i$. 图略.

6. (1) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}3x+2y=17\\5x-y=-2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$

(2) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}3x-4=0\\2y+3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

(3) 由复数相等的条件可得 $\begin{cases}x+y=-5\\-xy=24\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-8\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=-8\end{cases}$



（第 7 题）

7. 由复数模的意义可知，表示复数 $x+yi$ 的点满足 $x^2+y^2=1$，所以点的集合为 $\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$，其图形如图所示.

8. (1) 以原点为圆心，以 5 为半径的圆；

(2) 以原点为圆心，以 1 为半径的圆的外部，包括边界；

(3) 以原点为圆心，以 1 为半径的圆面，不包括边界；

(4) 以(0，0)为圆心，分别以 2，5 为半径的圆所夹的圆环面，包括边界.

习题 3-1 B（第 56 页）

1. (1) 复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$ 是纯虚数，需 $\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}=0$，且 $n^2+3n-4\neq0$，解得 $n=4$ 且 $m\neq4$，$m\neq-1$；

   (2) 复数 $z=\dfrac{n-4}{m^2-3m-4}+(n^2+3n-4)\mathrm{i}$ 是实数，需 $n^2+3n-4=0$ 且 $m^2-3m-4\neq0$，解得 $n=1$，$n=-4$ 且 $m\neq4$，$m\neq-1$.

2. (1) 直线 $y=0$ 与 $y=2$ 之间的条形区域，不包括边界；

   (2) 以(0，0)为圆心，以 4 为半径的圆的内部在第一象限的部分，不包括边界.

3. 因为 x 是实数，所以有 $\begin{cases}2x^2-5x+2=0\\x^2-x-2=0\end{cases}$ 解得 $x=2$.

练习 A（第 58 页）

1. (1) $9+10\mathrm{i}$；　(2) $-2-\mathrm{i}$；　(3) 0；　(4) $5-4\mathrm{i}$.
2. (1) $1+3\mathrm{i}$；　(2) $-7+7\mathrm{i}$；　(3) $-4+10\mathrm{i}$；　(4) $-8+13\mathrm{i}$.
3. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则 $z-\overline{z}=2b\mathrm{i}$.

   因为　$b\in\mathbf{R}$，

   所以　两个共轭复数的差，或者是实数，或者是纯虚数.

练习 B（第 58 页）

1. (1) $z_1+z_2=(2+\mathrm{i})+(-1+3\mathrm{i})=1+4\mathrm{i}$；

   (2) $z_1+z_2=(1+2\mathrm{i})+(-1-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}$.

   图略.
2. (1) $z_1-z_2=(5+3\mathrm{i})-(-1+4\mathrm{i})=6-\mathrm{i}$；

   (2) $z_1-z_2=-3\mathrm{i}-(-3+\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}$.

   图略.
3. $z_1+z_2-z_3=(5+3\mathrm{i})+(-1+4\mathrm{i})-(-4+\mathrm{i})=8+6\mathrm{i}$.

   图略.

练习 A（第 61 页）

1. (1) $19+17\mathrm{i}$；　(2) 2；　(3) $-117+44\mathrm{i}$；　(4) $-7-6\sqrt{2}\mathrm{i}$.
2. (1) $\overline{z}=3-4\mathrm{i}$，$z\overline{z}=25=|z|^2$；

   (2) $\overline{z}=-3-4\mathrm{i}$，$z\overline{z}=25=|z|^2$；

   (3) $\overline{z}=5-12\mathrm{i}$，$z\overline{z}=169=|z|^2$；

   (4) $\overline{z}=-5-12\mathrm{i}$，$z\overline{z}=169=|z|^2$.
3. $-\mathrm{i}$；1；1；i；i.

4. $2\mathrm{i}$；$-2\mathrm{i}$；$2^{1\,000}$.

5. (1) $\frac{18}{65}-\frac{1}{65}\mathrm{i}$；(2) $\frac{9}{17}-\frac{2}{17}\mathrm{i}$；(3) $-1+\mathrm{i}$；(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；(5) $-\mathrm{i}$；(6) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

练习 B（第 62 页）

1. 根据公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 算得结果为 2.

2. 设 $z=m+n\mathrm{i}$，m，$n\in\mathbf{R}$，$n\neq0$，

   则 $a(m+n\mathrm{i})^2+b(m+n\mathrm{i})+c=0$，

   所以$\begin{cases}a(m^2-n^2)+bm+c=0\\2amn+bn=0\end{cases}$

   将$\overline{z}=m-n\mathrm{i}$，$m$，$n\in\mathbf{R}$，$n\neq0$ 代入方程得

   $$a(m-n\mathrm{i})^2+b(m-n\mathrm{i})+c=[a(m^2-n^2)+bm+c]-(2amn+bn)\mathrm{i}=0$$

   成立.

   所以 $x=\overline{z}$也是该方程的根.

3. 当 $n=3m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$\omega^n=\omega^{3m}=(\omega^3)^m=1$；

   当 $n=3m+1(m\in\mathbf{Z})$时，$\omega^n=\omega^{3m+1}=(\omega^3)^m\cdot\omega=\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$；

   当 $n=3m+2(m\in\mathbf{Z})$时，$\omega^n=\omega^{3m+2}=(\omega^3)^m\cdot\omega^2=\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

4. 0.

5. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{2a}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，

   所以$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$是实数.

习题 3-2 A（第 62 页）

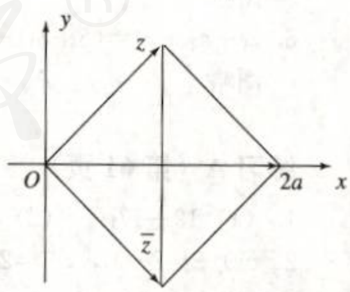
1. (1) $\frac{7}{6}-\frac{5}{12}\mathrm{i}$；　(2) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$；　(3) $2b+2a\mathrm{i}$.

2. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则

   $$z+\overline{z}=2a.$$

   因为　$2a\in\mathbf{R}$，

   所以　一个复数与它的共轭复数的和等于这个复数的实部的 2 倍.



（第 2 题）

3. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a$，$b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，所以

   $$|z-\overline{z}|=|2b\mathrm{i}|=|2b|.$$

   图略.

4. 根据复数加减法的几何意义可知，

   向量$\overrightarrow{OC}$对应的复数为 $z_1+z_2=(-3+\mathrm{i})+(5-3\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$；

向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$对应的复数为 $z_2-z_1=(5-3\mathrm{i})-(-3+\mathrm{i})=8-4\mathrm{i}$；

向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$对应的复数为 $z_1-z_2=(-3+\mathrm{i})-(5-3\mathrm{i})=-8+4\mathrm{i}$.

5. (1) $0.02+0.23\mathrm{i}$； (2) $-25\mathrm{i}$； (3) $a+b$； (4) $a^4+b^4+2a^2b^2$.

6. (1) $x^2+4=(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})$；

(2) $a^4-b^4=(a+b)(a-b)(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$；

(3) $a^2+2ab+b^2+c^2=(a+b)^2+c^2=(a+b+c\mathrm{i})(a+b-c\mathrm{i})$；

(4) $x^2+2x+3=(x+1)^2+2=(x+1+\sqrt{2}\mathrm{i})(x+1-\sqrt{2}\mathrm{i})$.

7. (1) 10； (2) $-\mathrm{i}$； (3) $a^3+3a^2b\mathrm{i}-3ab^2-b^3\mathrm{i}$.

8. (1) $\frac{11}{146}+\frac{5}{146}\mathrm{i}$； (2) $-1-8\mathrm{i}$； (3) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$； (4) $-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

习题 3-2 B（第 63 页）

1. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$，则$\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$.

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})}=\overline{(a+c)+(b+d)\mathrm{i}}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$
$=(a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}+\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})}=\overline{(a-c)+(b-d)\mathrm{i}}=(a-c)-(b-d)\mathrm{i}$
$=(a-b\mathrm{i})-(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}-\overline{z_2}$；

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$
$=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$；

(4) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$，

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$，

$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{a-b\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}}=\frac{(a-b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}{(c-d\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$，

所以 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

2. (1) $\frac{1}{2}$； (2) $\frac{(\mathrm{i}-2)(-1+\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}}=\frac{(\mathrm{i}-2)(-1+\mathrm{i})}{-2+\mathrm{i}}=-1+\mathrm{i}$.

3. $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{5+10\mathrm{i}}+\frac{1}{3-4\mathrm{i}}=\frac{4+2\mathrm{i}}{25}$，

$z=\frac{25}{4+2\mathrm{i}}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

4. $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=5-12\mathrm{i}$.

因为 x，$y\in\mathbf{R}$，

所以 $\begin{cases}x^2-y^2=5\\2xy=-12\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

5. 设 $z=a+b\mathrm{i}$ 且 a，$b\in\mathbf{R}$，$z\neq0$，则有

$$\begin{cases} z+\dfrac{4}{z}=\dfrac{a(a^2+b^2+4)}{a^2+b^2}+\dfrac{b(a^2+b^2-4)}{a^2+b^2}\mathrm{i} \\ (a-2)^2+b^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0,\ a^2+b^2=4 \\ a^2+b^2-4a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a=4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=1 \\ b=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

所以　$z=4$ 或 $z=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$.

本章小结

Ⅲ　巩固与提高（第 64 页）

1. (1) 假；　(2) 真；　(3) 假；　(4) 假；
(5) 真；　(6) 真；　(7) 假；　(8) 真；
(9) 假；　(10) 真；　(11) 假；　(12) 真；
(13) 假；　(14) 真；　(15) 真；　(16) 真.

2. (1) 5；(2) $11+8\mathrm{i}$；(3) $23-14\mathrm{i}$；(4) $4+2\mathrm{i}$；(5) i；(6) $-2-\mathrm{i}$；
(7) $1+2\mathrm{i}$.

3. $z^3=(x+y\mathrm{i})^2(x+y\mathrm{i})=(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)(x+y\mathrm{i})=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}$.
实部为 x^3-3xy^2，虚部为 $3x^2y-y^3$.
$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y\mathrm{i}}=\dfrac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$.
实部为$\dfrac{x}{x^2+y^2}$，虚部为$-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4. (1) 直线；　(2) 椭圆.

Ⅳ　自测与评估（第 65 页）

1. 设复数为 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则

$$\begin{cases} a^2+b^2=3^2=9 \\ a=\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

所以　$z=\sqrt{2}\pm\sqrt{7}\mathrm{i}$.

2. (1) $\begin{cases} x^2-xy-2y=0 \\ y-xy=0 \end{cases}$　解得$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

所以　当$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$时，$z_1$，$z_2$ 都是实数.

(2) $\begin{cases} x+y=2x-y \\ x^2-xy-2y=y-xy \end{cases}$　解得$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

所以　当$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$时，$z_1$，$z_2$ 互为共轭复数.

3. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，则$|z_1|^2=a^2+b^2=5^2=25$，

所以　$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=3a-4b+(4a+3b)\mathrm{i}$.

因为　$z_1\cdot z_2$ 为纯虚数，所以　$3a-4b=0$，$4a+3b\neq0$.

联立解得 $\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$

所以　$z_1=4+3\mathrm{i}$ 或 $-4-3\mathrm{i}$.

4. 设复数为 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，由题意得

$$\begin{cases}a^2+b^2=8\\(a-2)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$

所以　$z=2+2\mathrm{i}$ 或$-2-2\mathrm{i}$.

5. 证法一：当 $x=\mathrm{i}$ 时，$f(x)=6\mathrm{i}+11-5\mathrm{i}-5-\mathrm{i}-6=0$，

当 $x=-\mathrm{i}$ 时，$f(x)=-6\mathrm{i}+11+5\mathrm{i}-5+\mathrm{i}-6=0$，

因此，$x=\mathrm{i}$ 与 $x=-\mathrm{i}$ 是方程 $6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6$ 的两根.

所以　$f(x)$含因式$(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$，可被 x^2+1 整除.

证法二：
$$\begin{aligned}f(x)&=6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6\\&=6x^5+6x^3+11x^4+11x^2-6x^2-6-x^3-x\\&=(x^2+1)(6x^3+11x^2-x-6),\end{aligned}$$

因此 $f(x)$可被 x^2+1 整除.

6. 正确. $(\cos A+\mathrm{i}\sin A)^2=\cos^2A-\sin^2A+2\mathrm{i}\sin A\cos A=\cos 2A+\mathrm{i}\sin 2A$.

六、反馈与评价

针对本章所学内容的特点，除在学完本章知识进行单元测试外，在平时的教学中，要结合学生的特点，通过课堂提问、学生练习、作业等，及时发现学生学习中存在的问题，采取灵活的策略及时解决问题.

第四章 框　图

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 从实例入手，引导学生运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤.
2. 从实例入手，引导学生运用框图表示安排指导工程作业的工序流程.
3. 从实例入手，引导学生运用框图表示知识的内在联系.
4. 使学生在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，了解工序流程图（即统筹图）的特征.
5. 掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性.

（二）过程与方法目标

1. 流程图

（1）通过具体实例，进一步认识程序框图；

（2）通过具体实例，了解工序流程图（即统筹图）；

（3）能绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用.

2. 结构图

（1）通过实例，了解结构图，运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息；

（2）结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过具体的实例，感受、体会使用框图在解决实际问题中的意义.
2. 感受框图在解决数学问题中的重要作用，形成自觉地将算法的框图表示与数学理论结合的思想.

3. 在用框图解决数学问题的过程中，逐步形成严谨科学的思维习惯.

4. 了解我国老一代数学家引入并创新使用的“统筹方法”.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 作为数学 3 算法一章中框图的继续.

2. 通过实例复习程序框图，重点讲解工程流程图和结构图.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章主要介绍了框图中流程图和结构图的应用.

本章分为两大节，第一大节是流程图，本节主要是通过复习数学 3 中学过的程序流程图，进一步说明流程图的画法和作用，通过实例说明构造工序流程图（又称统筹图）的方法，使学生理解流程图的作用和画法. 第二大节是结构图，主要通过学生所熟悉的事例——画知识结构图，使学生理解结构图的作用和画法.

本章主要通过具体实例，使学生了解流程图和结构图的广泛应用，体验它们在解决实际问题以及在表示数学计算和证明过程中（主要逻辑步骤中）的作用和优越性，学习应用它们刻画数学问题以及其他问题的解决过程，从而提高学生的抽象概括能力和逻辑思维能力，从而增强创新意识和应用数学工具的能力.

2. 地位与作用

通过用框图表示解决问题的过程，使学生的学习变得有条理，提高学生的表达能力和逻辑思维能力. 从而深化学生对数学意义的理解，增强应用数学的意识.

3. 重点和难点

本章的重点是框图（流程图和结构图）的构造方法和应用，难点是工序流程图.

4. 本章知识结构

（三）课时分配

本章教学时间约需 4 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　流程图	2 课时
4.2　结构图	1 课时

本章小结　　1课时

（四）教法与学法建议

4.1 流程图

1. 在教学流程图时，通过例1使学生了解流程图的画法. 在此基础上，进一步说明完成某项工作或工程，有若干项工序，按照工序顺序，用流程线连结表示工序的矩形框，就是常见的工序流程图的画法，它清楚地表示出完成这项工作或工程实施工序的顺序和进度.

2. 在上述教学的基础上，通过例2、例3，进一步说明完成某项工作或工程，由于工序顺序安排的不同，以及工序之间的联系，可以有几种不同的方案，对每种方案的流程画出流程图，既可以直观、清楚地表示出每种方案的流程，又可以清楚地研究每种方案的优劣，从而选择较好的方案，使学生逐步理解流程图的画法及其应用.

3. 工序流程图又叫做统筹图. 在实施统筹方法中，做好调查研究是基础，主要调查三件事：

(1) 列出本任务所有的工序；

(2) 工序与工序之间的关系；

(3) 每个工序所需的时间.

调查清楚之后画出工序流程图，根据工序流程图可以计算出工期.

4.2 结构图

1. 教学结构图的目的，主要是使学生了解结构图的画法和作用. 画出某事物的结构图可以帮助学生认识该事物结构的框架，从而深入了解这种事物，是提高学生学习能力和应用能力的一种重要方法.

2. 本节例1、例2的事例都与学生的学习实际联系密切，在教学时，要充分利用这两个事例，使学生了解结构图在学习中的作用，培养学生应用结构图的能力.

3. 本节内容是我们常用的学习总结的方法，教学中可以结合学过的各科知识，让学生画出知识结构图，切忌泛泛讲解.

三、拓展资源

称出假珠

9颗珍珠中有一颗是假的，且所有真珍珠都一样重，假珍珠比真珍珠要轻，如果用一架天平，至少要称几次就一定可以找出假珍珠？

分析：如果两颗为1组放在天平上称量，那么，最少1次但是最多4次才可以称出这颗假珠.

采用“三分法”则可以保证两次称出假珠. 各取3颗珍珠放到天平的两边，如果持平，则余下的3

颗珍珠中有 1 颗是假的，余下的 3 颗珍珠取 2 颗放在天平上，如果持平，余下的 1 颗是假的，如果不平，则较轻的 1 颗是假的.

一般地，对 n 颗珍珠中只有 1 颗是假的的情况，若 $3^{k-1}<n\leqslant 3^{k}(k\geqslant 1)$，则用三分法 k 次即可称出假珍珠.

四、教学案例

案例：4.1 流程图

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）通过具体实例，进一步认识程序框图，了解工序流程图.

（2）在复习程序框图的基础上，提高对工序流程图（统筹图）的认识，能绘制简单实际问题的流程图. 体会流程图在解决实际问题中的作用.

2. 过程与方法

（1）通过复习、归纳、总结、升华，形成对程序流程图的再认识，进一步了解工序流程图.

（2）通过具体实例，让学生体验用框图解决实际问题的优越性. 体验框图表达复杂的系统各部分之间关系的优势.

（3）体验复杂问题条理化、简单化的思维方式.

3. 情感、态度与价值观

结合教学内容，增强学生的探究意识，培养创新意识和应用数学工具的能力，学习应用它们刻画数学问题以提高抽象概括能力和逻辑思维能力.

（二）教学重点和难点

重点：利用流程图解决问题.

难点：绘制解决实际问题的最佳流程图.

（三）教学方法

本节主要复习程序框图，学习工序流程图. 让学生体会流程图在应用中的重要性，通过复习、归纳，形成知识体系，体会数学思想方法的应用. 教学中，教师创设问题情境，引导学生发现框图简单明了、直观形象的特点，展示思路形成过程，指导学生搞好解题后的反思，从而提高学生综合运用知识分析和解决问题的能力.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	通过引例“李明让张方把他的字典拿来”，让学生把这句话的意义说出来，学生争论究竟把谁的字典拿来. 以此为例，说明用自然语言描述算法是有缺憾的. 用流程图表示算法的必要性.	通过争论，让学生感受用自然语言表示算法有时拖沓冗长，有时可能产生歧义.	通过学生讨论，明确流程图表示算法的优越性.

续表

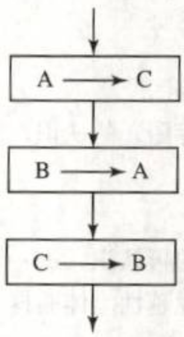
<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教 学 内 容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>应用举例</td>
<td>例1　两个形状一样的杯子里分别装有红葡萄酒和白葡萄酒. 现在想将两个杯子里所装的酒对调，试画出流程图.

分析：设装红葡萄酒的杯子为A，装白葡萄酒的杯子为B，为使两种酒能够对调，需要有一个空杯，设为C.

A ⟶ C（A中酒注入C），
B ⟶ A（B中酒注入A），
C ⟶ B（C中酒注入B），

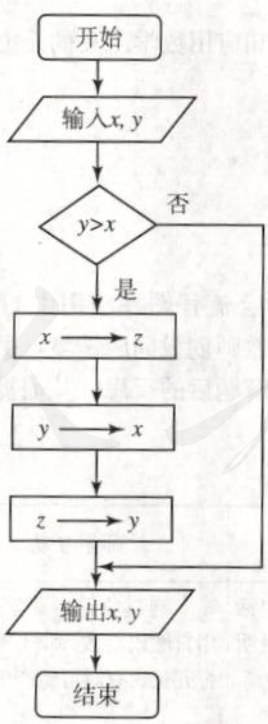
完成将两个杯子里所装酒对调.

流程图如下：



跟踪练习：讨论比较两个实数 x，y，将大数存于 x，小数存于 y，试写出该算法的流程图.

解：


</td>
<td>1. 让学生思考寻找解决问题的办法，让学生利用自然语言写出算法，再由算法写出流程图.

2. 让学生比较用自然语言描述算法和用流程图表示算法的利弊.

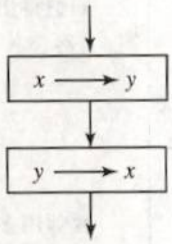
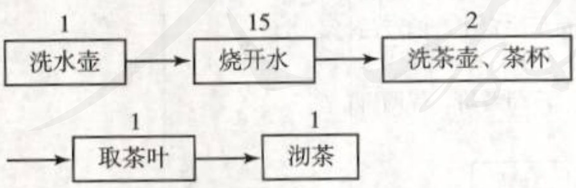
通过学生讨论并结合例1让每个学生画出框图.

一名学生在黑板上板演，教师分析.</td>
<td>1. 用类比的方法让学生感悟将两个杯子中的酒对调和两个数据对调以及对数据对调的错误辨析，强化学生对赋值语句的理解.

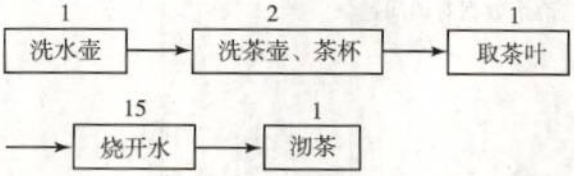
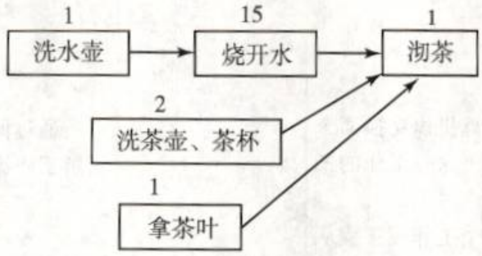
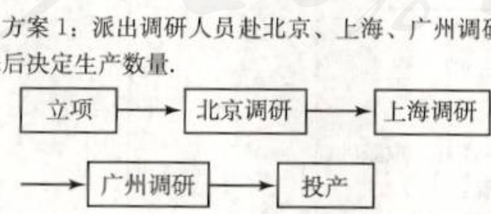
2. 比较自然语言描述算法和流程图描述算法，感悟流程图描述算法的优越性.

3. 通过跟踪练习让学生进一步巩固程序框图的画法.</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教 学 内 容	师生互动	设计意图
	说明：1. 比较两个杯子里所装的酒对调与两个数据对调问题的异同. 2. 经过下面操作，x，y 各为什么数？  方法归纳：重新审视例1流程图，它代表了计算机内交换两个变量值的算法，它本身还描述了“对调两种葡萄酒”这一工作的三个依次进行的工序. 此图就是简单工序流程图. 工序流程图（统筹图）常见的一种画法：将一个工作或工程从头至尾依先后顺序分成若干道工序（即所谓自顶向下），每一道工序用矩形框表示，并在该矩形框内注明此工序的名称或代号. 两相邻工序之间用流程线相连. 有时为合理安排工程进度，还在每道工序框上注明完成该工序所需时间. 开始时工序流程图可以画得粗疏，然后再对每一框逐步细化. 例2　想沏壶茶喝，当时的情况是：开水没有，烧开水的壶要洗，沏茶的壶和茶杯要洗，茶叶已有，问应如何进行？若洗水壶用1分钟，烧开水用15分钟，洗茶壶茶杯用2分钟，取茶叶1分钟，沏茶1分钟. 问题1：完成例2有多少种方案？ 方案1：洗好水壶，灌入凉水，放在火上，打开煤气待水烧开后洗茶壶、茶杯，拿茶叶，沏茶. 如果将上述烧水沏茶过程中的每一项工作用矩形框加文字说明表示，将前后两项工作用带有箭头的流程线相连，则该方案可以用下图表示出来：  方案2：先做好准备工作，即洗水壶、洗茶壶、茶杯、取茶叶、灌凉水烧开水、沏茶，将此方案用图表示出来，则有：	学生观察例1的流程图，教师引导，得出画工序流程图的画法.	通过例1使学生直观了解工序流程图的画法.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
	 方案 3：洗好水壶，灌入凉水烧开水，在等待水开的时间内洗茶壶、茶杯、拿茶叶，水开后沏茶：  问题 2：哪种方案最省时？ 方案 1 用时 20 分； 方案 2 用时 20 分； 方案 3 用时 17 分． 所以，方案 3 最省时．	通过学生讨论、归纳得出方案 1，2，3． 教师用多媒体演示这三种方案．	直观演示与抽象概括相结合，独立思考与相互协作讨论相结合，充分调动学生学习积极性，激发其学习兴趣，让学生充分参与到评论活动中来．
深化提高	1. 此工序流程图根据各工序间相互衔接关系、所用时间进行统筹安排以提高工效，进而达到省时、省人力物力的目的． 2. 在我们所介绍的流程图内，每一个框代表一道工序，流程线则表示两相邻工序之间的衔接关系，这是一个有向线，其方向用它上面的箭头标识，用以指示工序进展的方向．显然，在工序流程图上不允许出现几道工序首尾相接的圈图或循环回路，当然对每一道工序还可以再细分，还可以画出更精细的统筹图，这一点完全类似于算法的流程图表示：自顶向下，逐步细化．		
练习	例 3　商家生产一种产品，需要先进行市场调研，计划对北京、上海、广州三地市场进行市场调研，待调研结束后决定生产的产品数量． 解：方案 1：派出调研人员赴北京、上海、广州调研，待调研人员回来后决定生产数量． 		

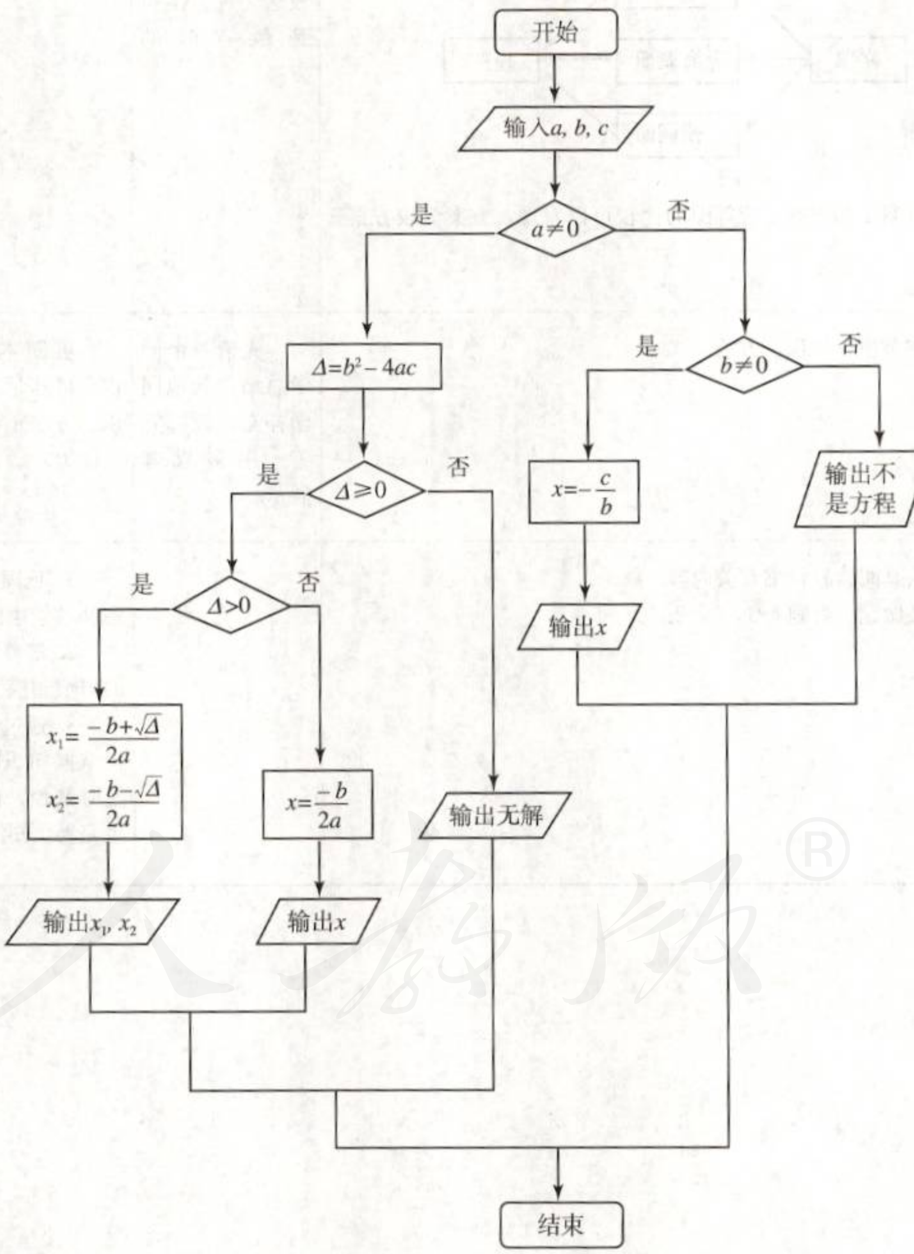
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	方案 2：商场如战场！抓紧时间搞好调研，然后进行生产. 调研为此项目的瓶颈，因此需要添加力量，齐头并进（即平行工序）搞调研，以便提早结束调研，尽早投产使产品占领市场. 于是：  通过方案 1 和方案 2 统筹图的比较可以发现，方案 2 较方案 1 更为可取.	学生通过比较这 2 种方案得到最省时的方案.	
归纳总结	回顾本节所学知识、方法.	先请一个同学总结，其他同学补充，教师完善，用多媒体展示.	巩固本节课所学知识，培养学生运用所学知识、方法正确画出流程图的能力.
课后作业	（1）认真阅读教科书有关内容. （2）必做题：习题 4-1，1，2.		1. 巩固知识，发现和弥补教学中的不足. 2. 培养学生自觉学习的习惯和探索精神. 3. 通过练习，反映学生掌握知识的程度，教师及时调控，讲评，帮助学生完善认知结构.

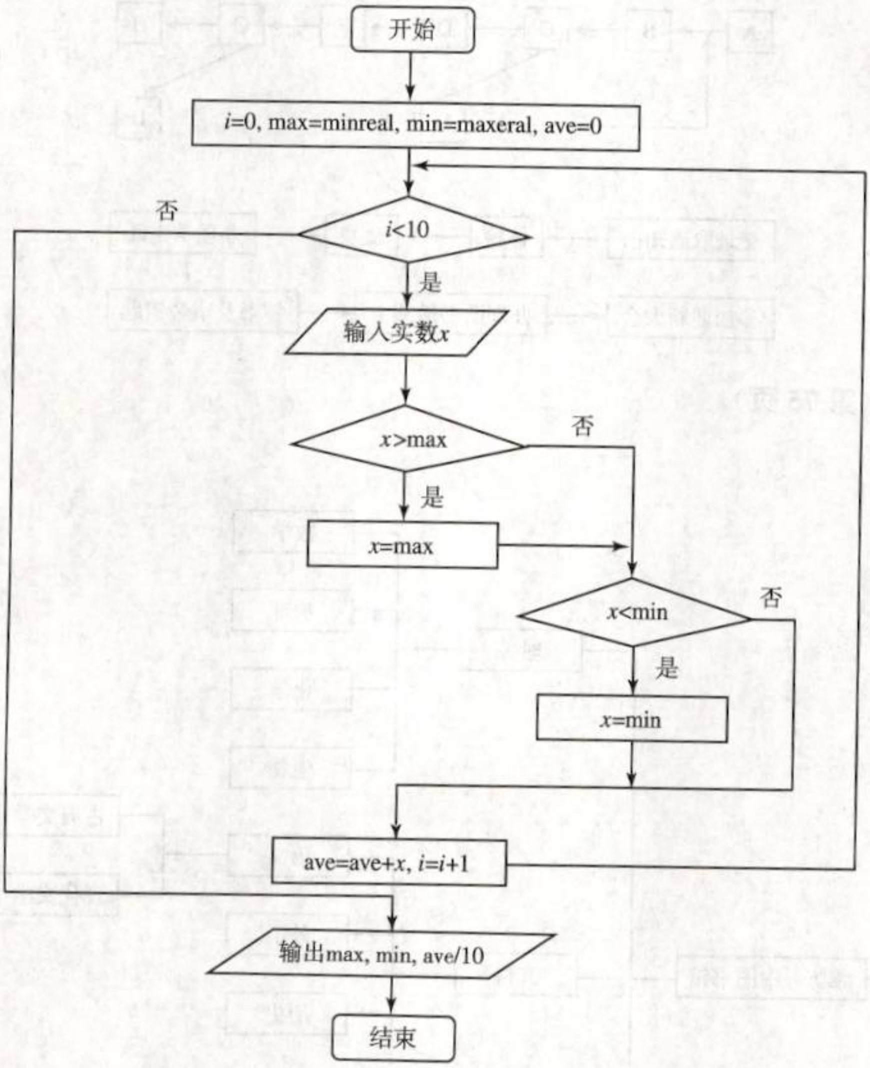
五、习题参考答案与提示

习题 4-1（第 73 页）

1.

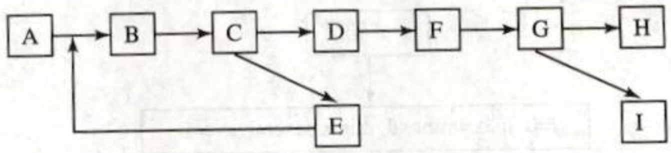


2.

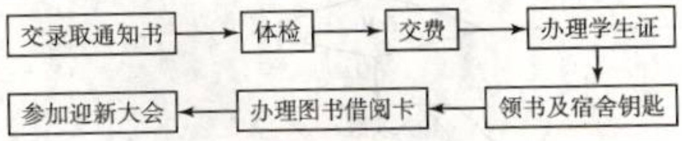


3.

工序代号	工序名称	所需工时	紧前工序
A	领取原材料	略	—
B	粗加工		A
C	检验		B
D	合格		C
E	不合格		C
F	精加工		D
G	验收		F
H	成品		G
I	废品		G

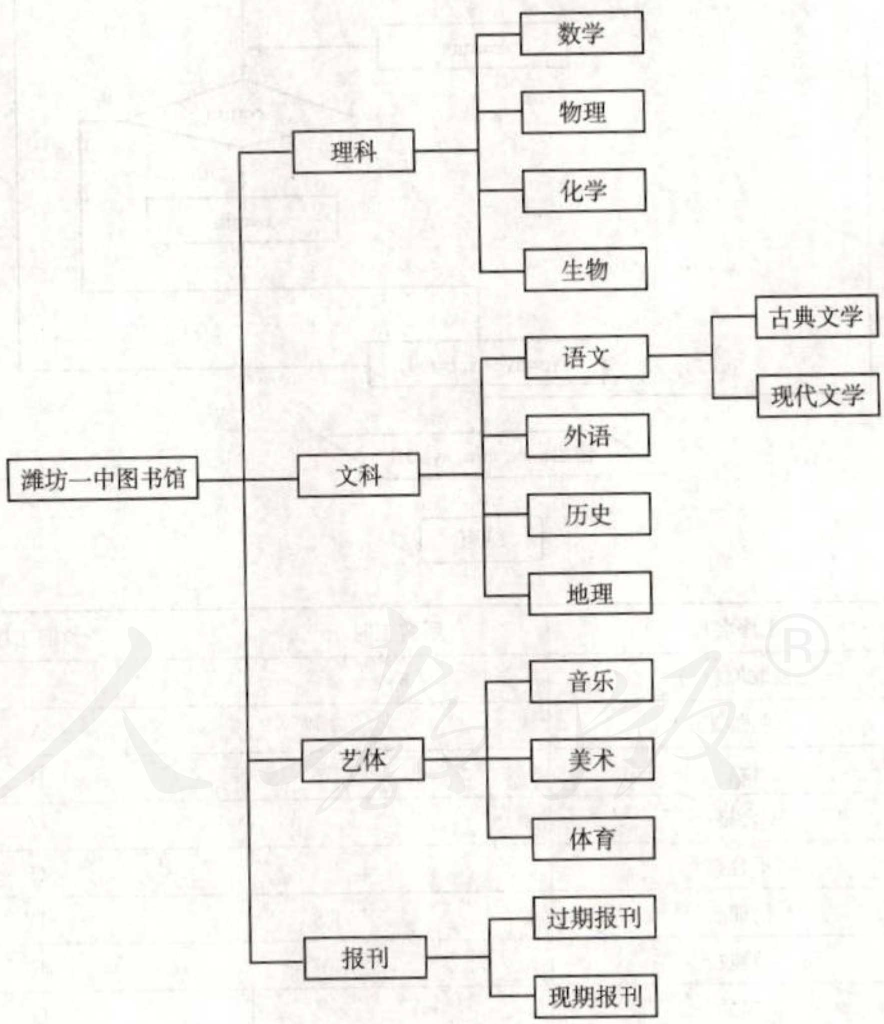


4.



习题 4-2（第 75 页）

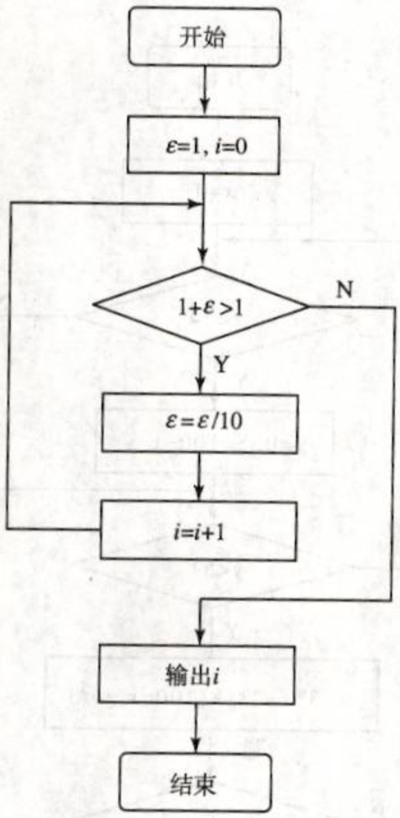
1. 略.
2. 例：



本章小结

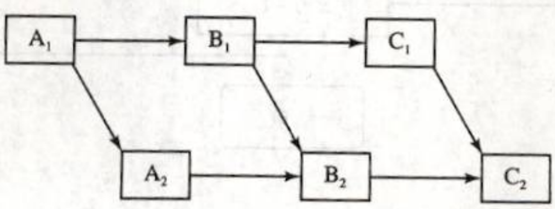
Ⅲ　巩固与提高（第 76 页）

1.



2.

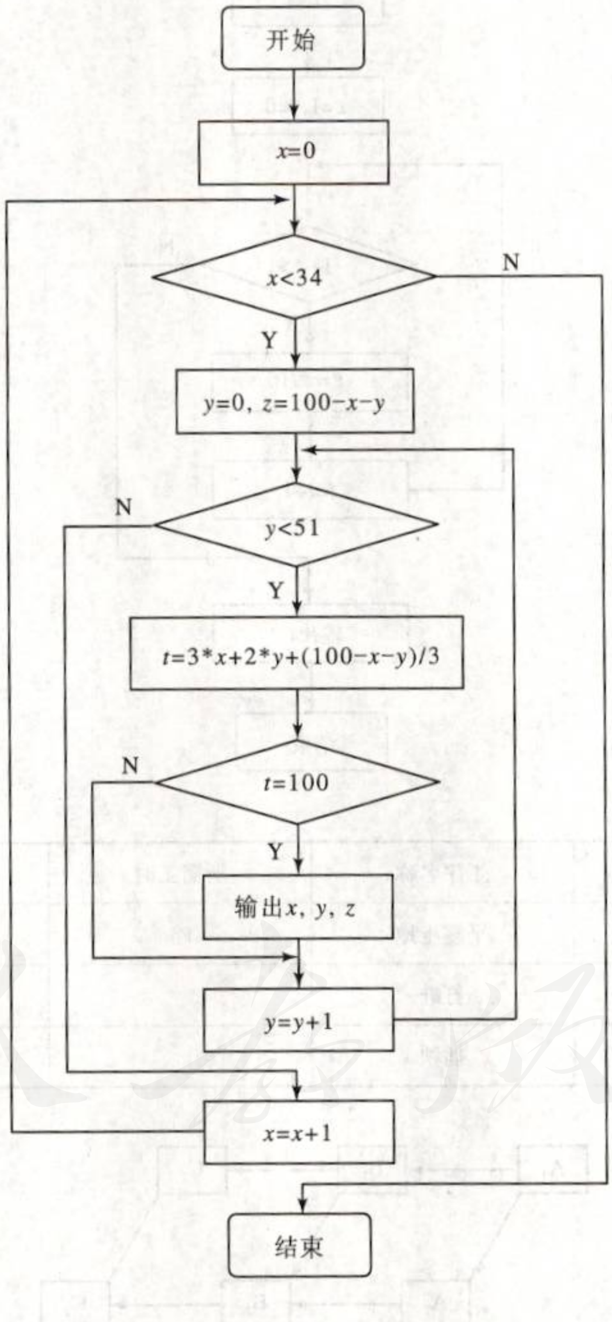
工序代号	工序名称	所需工时	紧前工序
A	平整土地	略	
B	打畦		A
C	插秧		B



3. 略.

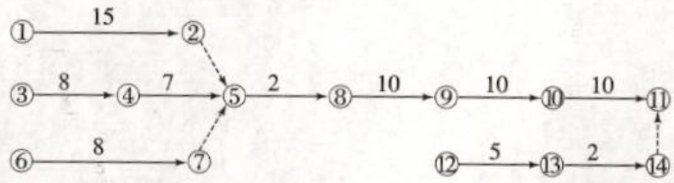
Ⅳ　自测与评估（第 76 页）

1.



2. 略 .

3.



①—②准备早点，③—④收拾床铺，④—⑤洗脸刷牙，⑥—⑦煮牛奶，⑤—⑧洗手，⑧—⑨吃早饭，⑨—⑩去公交车站，⑩—⑪等公交车，⑫—⑬查公交线路图，⑬—⑭给父亲发短信.

共计 15＋2＋10＋10＋10＝47 分钟，可以来得及参加郊游.

4. 略.

六、反馈与评价

1. 本章课后作业情况、测验成绩可以作为评价的一个方面.

2. 可以在计算机上用计算机语言实现框图算法，通过具体实例帮助学生理解框图的作用，根据学生的上机作业进行评价.