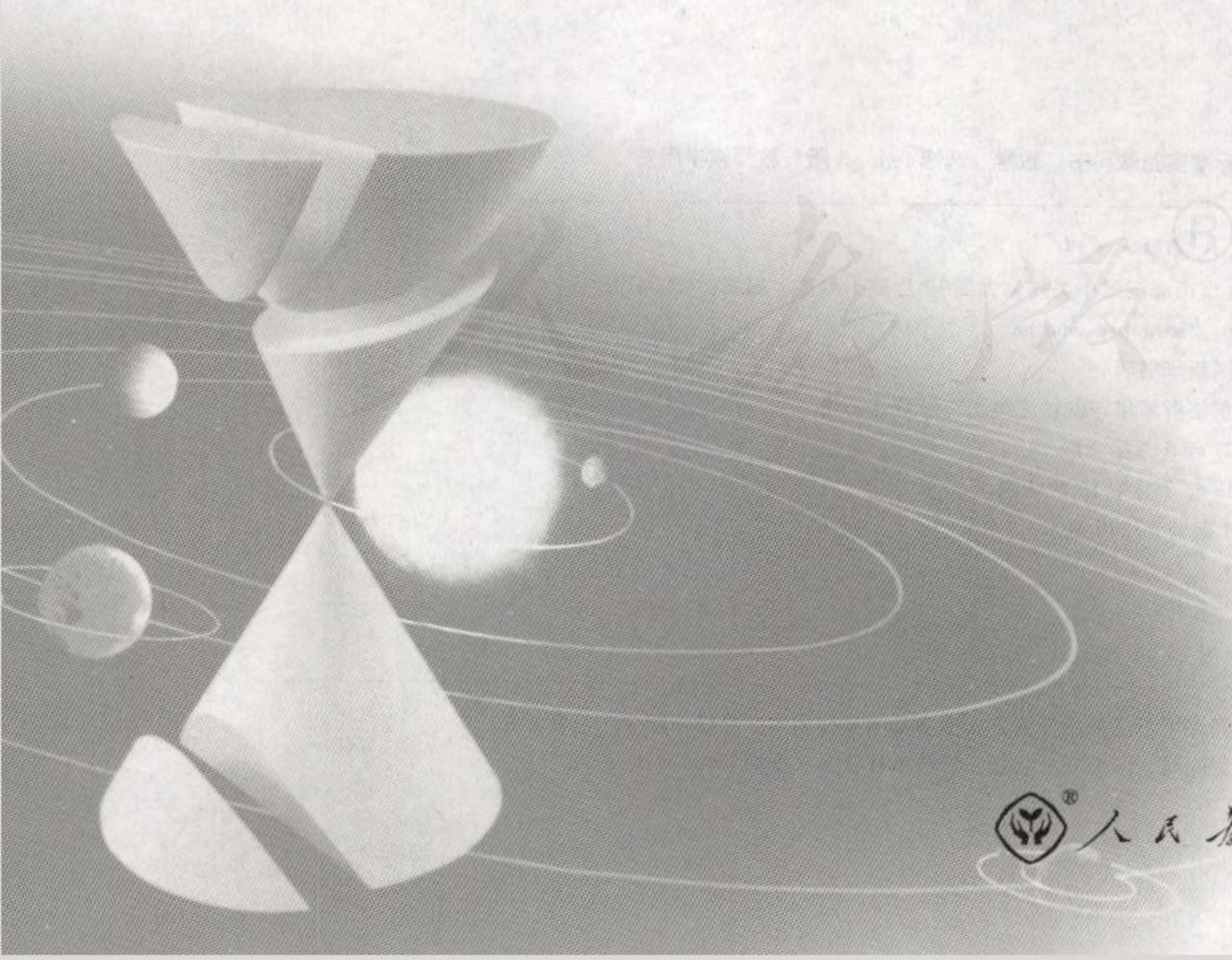
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 1-1

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明　韩际清

本册主编　　李建才　常传洪
审　　定　　陈宏伯
编　　者　　尹玉柱　张合钦　李明照　张　颉　胡廷国　张玉宝
　　　　　　吴玉奇　王金霞　刘　莉　张　雷　韩际清
责任编辑　　王旭刚

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修1-1（B版）教师教学用书／人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著.—2版.—北京：人民教育出版社，2007.5（2018.7重印）

ISBN 978-7-107-18870-1

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… ②课… Ⅲ.①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第033731号

普通高中课程标准实验教科书　数学　选修1-1　B版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司
版　　次　2007年5月第2版
印　　次　2018年7月第13次印刷
开　　本　890毫米×1240毫米　1/16
印　　张　6.5
字　　数　143千字
定　　价　24.30元

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书（数学1-1）》（B版）的使用编写的教师教学用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1．努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2．明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“课程标准”中规定的教学任务．

3．指出相关内容的教学难点、重点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4．努力吸收教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务．

本册教师教学用书每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价．

教材的课程目标的确定，主要是依据教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中的相关选修内容的教学要求．考虑到教学要有一定的弹性，本教材对选修内容的教学要求作了一些调整．教材编写时，把练习、习题分为A、B两组，增加“探索与研究”等栏目来达到较高的教学要求，以满足条件较好学校的教学需要．

在教材分析中，首先分析内容结构、作用与地位，指出本节知识的重点和难点；接着给出参考教学课时数；最后分节给出教法与学法建议．

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用，另外还提供了一些教学案例供教师参考．

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外．还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，以检查学生学习本章内容的效果．

在教科书中，我们已经对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面仅就数学选修1-1中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材．

一、常用逻辑用语

编写的重点是命题成立的充分条件、必要条件和充分必要条件．让学生知道，过去数学课本中的表述，除数学符号外，基本上使用的是自然语言，自然语言虽然容易接受，但由于歧义性较大，往往给学习数学带来一些困难．我们在编写时，注意引导学生掌握常用逻辑用语的用法，使学生尽量能够搞清楚三个逻辑联结词和两个量词所表达的逻辑含义，并能初步学着应用它们，从中体会用逻辑用语表达数学内容的准确性和简洁性．

这章编写的主要特色是，把集合与逻辑结合起来，通过集合的包含关系理解推出关系，通过集合的交、并、补运算理解逻辑联结词所表达的逻辑含义．

二、圆锥曲线与方程

这一章是数学2解析几何初步一章的继续，学习的重点仍是用坐标法研究图形（圆锥曲线）的性

质．本章首先通过对直线和圆的方程的回顾，让学生理解曲线与方程之间的关系，并指出用方程研究曲线性质的一般步骤．我们把学习的重点放在如何用坐标法和方程研究圆锥曲线的性质，把代数中的二次方程问题和圆锥曲线结合起来．由于这一章是文科选学，主要是让学生体会坐标法（数形结合）这一重要思想在数学中的作用和地位，进一步了解坐标法和圆锥曲线的实际应用，使学生能够经常想到用图形去表达数量关系．

三、导数及其应用

这一章编写时的主要想法是，充分借助于直观研究导数的性质和应用．全章自始至终通过设置的“爬山情景”，让学生体会“以直代曲”和“化曲为直”重要的微积分思想．导数可近似的看成“差商”和“微小直角三角形中两直角边的比”．尽量让学生了解导数的直观内含．

本册教师教学用书，得到了山东省教研室、济南市教研室、潍坊市教研室、德州市教研室、威海市教研室、日照市教研室、东营市教研室等单位的大力协助，在此表示谢意．

由于时间紧，本书一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正．

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

目录

第一章　常用逻辑用语

第二章 圆锥曲线与方程

第一章

常用逻辑用语

Ⅰ 课程目标

一、知识与技能目标

1. 了解命题的概念，会判断命题的真假.

2. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义，会用符号语言表示全称命题和存在性命题，并能判断其真假. 能正确地对含一个量词的命题进行否定.

3. 通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义及相应命题的意义和真假判断.

4. 理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

5. 了解命题的逆命题、否命题、逆否命题，会分析四种命题的相互关系.

二、过程与方法目标

1. 通过对命题真假的判定，体会举反例的作用.

2. 通过概念教学，培养学生由具体到抽象的思维方法.

3. 通过学习常用逻辑用语的基础知识，体会逻辑用语在数学表述和论证中的作用.

4. 在学习和使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简捷性.

5. 通过本章的学习，提高思维的深刻性、批判性，推理的准确性、严谨性，发展学生的理性思维能力.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过学习常用逻辑用语及其符号化表达方式，提高逻辑分析、数学表达和逻辑思维能力.

2. 通过本章的学习，体会数学的美，养成一丝不苟、追求完美的科学态度.

3. 体会用对立统一的思想认识数学问题，培养学生的辩证唯物主义思想方法.

Ⅱ 教材分析

一、编写特色

1. 把常用逻辑用语作为基础数学语言来学习.
2. 用集合关系理解逻辑关系.
3. 注重由具体实例到数学化的精确表达. 提高学生的数学思维品质.
4. 强调本质，注意适度形式化. 出现真值表帮助学生正确地判断命题的真假.
5. 注意语言逻辑、形式逻辑与数理逻辑语言的区分.

二、内容结构

1. 内容编排

本章主要包括命题与量词，基本逻辑联结词和充分条件、必要条件与命题的四种形式等三大节内容.

第一大节是命题与量词. 教科书首先从实例入手，复习了初中学过的命题的概念，指出了表示命题的常用句型. 然后，给出了全称量词和存在量词的概念，介绍了用符号表示全称命题和存在性命题的方法.

第二大节是基本逻辑联结词. 教科书分别介绍了“或”“且”“非”的意义，给出了它们的符号记法，并给出了由“或”“且”“非”组成的新命题的意义及真假判断的方法，还介绍了全称命题和存在性命题的否定形式.

第三大节是充分条件、必要条件与命题的四种形式. 教科书首先通过实例介绍了充分条件、必要条件、充要条件的概念，接着，介绍了四种命题的表示形式以及四种命题之间的关系.

2. 地位和作用

在数学中逻辑用语的作用是至关重要的. 学习数学，需要全面地理解概念，正确简洁地进行表达、判断和推理. 在日常生活中，为了使表达更加准确、清楚、简洁，我们常常也要用一些逻辑用语. 因此，正确地使用逻辑用语是现代社会公民应具备的基本素质. 无论是进行思维、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维，使得思维清晰明了，说理有据.

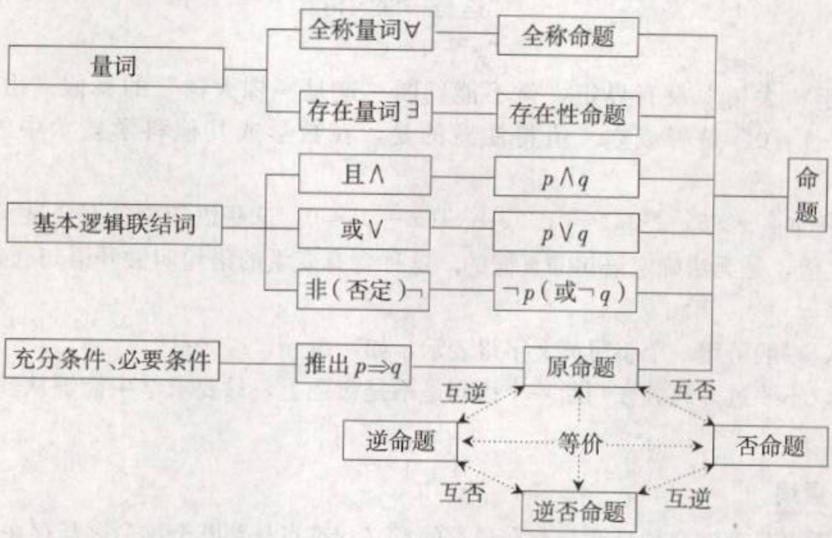
在高中数学中，常用逻辑用语与其他内容有着密切联系，它是正确地进行表达、判断、推理的基础.

3. 重点和难点

本章的重点是命题与量词；基本逻辑联结词“或”“且”“非”；充分条件、必要条件与命题四种形式之间的逻辑关系. 学习常用逻辑用语.

本章的难点是对一些代数命题真假的判定和对全称命题和存在性命题的否定. 通过对必修五个模块的学习，学生对一些推理方法有一定的掌握，相关技能和能力有了一定的提高，而本章所涉及的一些代数命题，用到的知识比较全面，有一定的综合性. 另外，用符号语言表述，增加了问题的抽象性. 因此，还需要学生有一个逐步熟悉的过程.

4. 本章知识结构



三、课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1．1　命题与量词	2 课时
1．2　基本逻辑联结词	3 课时
1．3　充分条件、必要条件与命题的四种形式	2 课时
本章小结	1 课时

四、教法与学法建议

1.1　命题与量词

本大节内容主要包括：命题的概念、命题真假的判断、全称量词、存在量词、全称命题与存在性命题．本大节的重点是全称量词和存在量词，难点是对全称命题和存在性命题真假的判定．

1.1.1　命题

1．本小节的重点是了解命题的定义，难点是判定一个句子是不是命题．为了便于学生接受，教材由初中数学中的具体命题为例，给出定义：能判断真假的语句叫做命题．并着重说明其实质是可判断真或假的陈述句．

2．要判断某个句子是否是命题，首先，要看这个句子的句型．一般地，疑问句、祈使句、感叹句

都不是命题. 其次，要看能不能判断其真假，也就是判断其是否成立. 不能判断真假的语句，就不能叫做命题. 例如

"这是一棵大树",

"$x^2-1=0$"

都不是命题. 由于"大树"没有界定，就不能判断"这是一棵大树"的真假. 由于 x 是未知数，也不能判断"$x^2-1=0$"是否成立. 值得注意的是，在数学或其他科学技术中的一些猜想仍是命题.

3. 开语句. 例如：$x>5$，$x^2-1=0$，$(x+y)(x-y)=0$，这些语句中含有变量 x 或 y，在没有给定这些变量的值之前，是无法确定语句的真假的. 这种含有变量的语句叫做开语句（条件命题）. 开语句不是命题.

4. 一个命题，一般可用一个小写英文字母表示，如：p，q，r，….

5. 在教学时，不要过多纠缠在判断一个语句是不是命题上，只要求学生能够从教科书的例子了解命题的概念就可以了.

1.1.2 量词

1. 本小节的重点是理解全称量词与存在量词的意义；难点是判断全称命题与存在性命题的真假.

2. 全称量词与全称命题. 教科书通过例子给出了全称量词与全称命题的概念. 要注意结合例子用集合的观点，引导学生去理解全称命题. 与"所有"等价的说法有："一切""每一个""任一个"等. 由于自然语言的不同，同一个全称命题可以有不同的表述方法. 注意：有时省去全称量词，仍为全称命题. 例如："正方形都是矩形"，省去了全称量词"所有". 因此，要结合具体问题做出正确的判断. 判断一个全称命题为真命题，必须对限定集合中的每一个元素 x 验证 $p(x)$成立，一般用代数推理给出证明. 如果一个全称命题为真命题，就是说给定集合中的每一个元素 x 都能使 $p(x)$成立. 通过实例，让学生熟悉用符号语言表述全称命题.

3. 存在量词与存在性命题. 教科书通过例子给出了存在量词与存在性命题的概念. 要注意结合例子，用集合的观点，引导学生去理解存在性命题. 由于自然语言的不同，同一个存在性命题可以有不同的表述方法，要引导学生用符号语言表示存在性命题. 要判断一个存在性命题为真，只要在限定集合 M 中，找到一个 $x=x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可；如果要证明存在性命题为假，就要证明在限定集合 M 中的每一个 x，使 $p(x)$ 不成立.

4. 教科书为了让学生巩固概念，熟悉表达方式，设计了一个例题. 例题是判断全称命题、存在性命题的真假. 要注意引导学生总结全称命题、存在性命题的判定方法，并将这两类命题的判定方法进行类比.

5. 教学中，要多结合实例引导学生去观察、比较，让学生自主获取知识. 另外，将全称命题、存在性命题进行类比，有利于学生更好地理解概念.

1.2 基本逻辑联结词

本大节主要包括：基本逻辑联结词"且""或""非". 教科书主要介绍了"且""或""非"的意

义及它们组成的新命题的符号记法和真假判断．在命题的否定中，介绍了存在性命题、全称命题的否定．

本大节的重点是了解“且”“或”“非”的含义，学会用这些逻辑联结词有效地表达相关的数学内容．难点是对存在性命题、全称命题的否定．

1.2.1　“且”与“或”

1．本小节的重点是了解“且”与“或”的含义，能判定由“且”与“或”组成的新命题的真假．难点是对“或”的含义的理解．

2．逻辑联结词“且”与“或”的含义．“且”与自然语言中的“并且”“和”相当．“或”与自然语言中的“或者”是相当的．但自然语言中的“或者”有两种用法：一是“不可兼”的“或”；二是“可兼”的“或”．而在数学中我们仅研究可兼“或”的含义．

3．命题 $p\wedge q$ 与 $p\vee q$ 真假的判定．要判定 $p\wedge q$ 的真假，关键是看 p，q 的真假，只有当命题 p，q 都为真时，$p\wedge q$ 才为真，其他三种情况 $p\wedge q$ 都为假．要判断 $p\vee q$ 的真假，关键是看命题 p，q 的真假，只有当命题 p，q 都为假时，$p\vee q$ 才为假，其他三种情况，$p\vee q$ 都为真．教科书把 $p\wedge q$，$p\vee q$ 叫新命题，没有给出复合命题的概念，意在降低教学的难度，避免简单命题、复合命题的讨论，主要目的是让学生学会用这些逻辑联结词有效地表达相关的数学内容．

4．教学时，要通过实例引导学生去理解“且”“或”的含义，结合例子去总结判断 $p\wedge q$，$p\vee q$ 形式命题的真假的规律，切忌让学生死记硬背．

1.2.2　“非”（否定）

1．本小节的重点是了解逻辑联结词“非”的含义．难点是对含有量词的命题的否定．

2．逻辑联结词“非”的含义与日常生活中的“不是”“全盘否定”“问题的反面”相近．而“非”命题，就是对命题的否定．若命题 p 为真，则 $\neg p$ 为假；若命题 p 为假，则 $\neg p$ 为真．p 与 $\neg p$ 的真假相反．

3．存在性命题的否定．p：$\exists x\in A$，$p(x)$；$\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$．否定存在性命题时，将存在量词变为全称量词，再否定它的性质．例如：p：至少有一个质数不是奇数；$\neg p$：所有的质数都是奇数．

4．全称命题的否定．q：$\forall x\in A$，$q(x)$；$\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg q(x)$．否定全称命题时，将全称量词变为存在量词，再否定它的性质．有的命题省略了全称量词，否定时要特别注意．例如：p：实数的绝对值是正数．将 $\neg p$ 写成：“实数的绝对值不是正数”就错了．原因是 p 为假命题，$\neg p$ 也为假命题，这与 p，$\neg p$ 一个为真一个为假相矛盾．正确的否定应为：“存在一个实数的绝对值不是正数”．为了避免出错，可用真值表加以验证．

常用“都是”表示全称肯定，它的存在性否定为“不都是”，两者互为否定．用“都不是”表示全称否定，它的存在性肯定可用“至少有一个是”来表示．

5．“且”命题、“或”命题的否定，符合德·摩根定律．即

$\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$；

$\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$．

对德·摩根定律的内容，仅供教师参考．

6．逻辑联结词“且”“或”“非”与集合的交、并、补运算有着密切的联系，可引导学生从集合的

角度去进一步理解“且”“或”“非”的意义.

设U为全集，集合$A=\{x \mid x\in p(x)\}$，$B=\{x \mid x\in q(x)\}$，则集合之关系与命题之联结可有如下结论：

$A\cap B=\{x|p(x)\wedge q(x)\}$；

$A\cup B=\{x|p(x)\vee q(x)\}$；

$\complement_U A=\{x|\neg p(x)\}$.

这启示我们：集合之外延关系可由其内涵之逻辑关系揭示.

7. 对命题的否定学生不宜理解，教学中，要多通过例子去解释，帮助学生突破难点，减少形式化的记忆.

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

本大节内容主要包括：充分条件、必要条件与命题的四种形式. 教科书通过研究“如果p，则q”形式的命题为真给出了充分条件、必要条件的定义，进而给出了充要条件的定义. 接着，教科书又研究了“如果p，则q”形式命题的四种形式，给出了四种命题之间的相互关系.

本节的重点是理解充分条件、必要条件与充要条件的意义，会分析命题四种形式之间的逻辑关系. 本节的难点是对充分条件、必要条件与充要条件的理解与判定.

1.3.1 推出与充分条件、必要条件

1. 本小节的重点是理解充分条件、必要条件的意义，难点是对充分条件、必要条件与充要条件的判定.

2. 本小节内容专门针对“如果p，则q”形式的命题，其中p叫做命题的条件，q叫做命题的结论. 而充分条件、必要条件与充要条件的意义与判断命题“如果p，则q”的真假相关.

3. 当命题“如果p，则q”为真时，就说由p可推出q，记作$p\Rightarrow q$. 对这类命题真假的判定，常需要推理证明.

4. 对充分条件、必要条件的教学，要多结合实例去说明，在学生有充分的感性认识的基础上，给出它们的定义. 对充分条件、必要条件的判定，首先要分清哪是条件p，哪是结论q，进而要看是由$p\Rightarrow q$，还是由$q\Rightarrow p$. 例如，

$$p: a>3,\ q: a>5,$$

由于p推不出q，但q可以推出p，即$q\Rightarrow p$，则q是p的充分条件，p是q的必要条件.

对充要条件的教学，要讲清“充要条件”有时又说成“当且仅当”“等价”. 因此，正确的判定命题的条件与结论是非常关键的一环.

5. 在判定命题的条件时，除经常用到充分条件、必要条件、充要条件外，有时还涉及到充分不必要条件、必要不充分条件的概念，现给出它们的概念，仅供教师参考.

已知命题“如果p，则q”，若$p\Rightarrow q$，且q推不出p，则称p是q的充分不必要条件.

已知命题“如果p，则q”，若$q\Rightarrow p$，且p推不出q，则称p是q的必要不充分条件.

6. 从集合的角度去理解充分条件、必要条件、充要条件的概念.

设集合 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件；

若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件，q 也是 p 的充要条件.

7. 本小节的教学，要多结合例子去讲清概念，通过学生动脑思考、动手练习不断加深对概念的理解.

1.3.2 命题的四种形式

1. 本小节的重点是会分析四种命题的相互关系，难点是正确地写出原命题的否命题.

2. 本小节的特定对象仍是“如果 p，则 q”形式的命题及它的四种形式. 要向学生讲清，我们只有“如果 p，则 q”形式的命题才有四种形式.

3. 关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以如下表述：

(1) 交换原命题的条件和结论，所得到的命题是原命题的逆命题；

(2) 同时分别否定命题的条件和结论，所得到的命题是原命题的否命题；

(3) 交换原命题的条件和结论，并且同时分别否定，所得到的命题是原命题的逆否命题.

4. 要讲清否命题与命题的否定的区别. 首先，只有“如果 p，则 q”形式的命题才有否命题：“如果$\neg p$，则$\neg q$”. 一般的命题都可有“否定命题”. 其次，一般命题的否定命题与原命题总是一真一假，而“如果 p，则 q”的否命题与原命题的真假可能相同也可能相反.

5. 学习了命题的四种形式之间的关系，我们再从命题的角度去理解充分条件、必要条件和充要条件. 设原命题为“如果 p，则 q”，则

(1) 若原命题为真、逆命题为假，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(2) 若逆命题为真、原命题为假，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(3) 若原命题和逆命题都为真，则 p 是 q 的充要条件.

6. 对本小节的教学，不要让学生去死记硬背形式化的定义和模式，而要通过例题教学，让学生去发现四种命题形式间的逻辑关系，并能用命题间的关系去验证写出的命题是否正确. 有时当原命题不易证明时，可利用两个互为逆否命题间的等效性转化为证明其逆否命题.

Ⅲ 拓展资源

一、有关充要条件的证明

在解题教学中，经常遇到有关充要条件的证明问题，常见的题型主要有：① 判定给出的条件是充分条件、必要条件，还是充要条件；② 给出结论成立的充分（或必要）条件，求参数的范围；③ 寻求结论成立的充要条件. 解决这类问题一般需要通过推理论证得到结果. 对于充要条件的证明，既要证明充分性，又要证明必要性. 下面仅举几例说明.

例 1 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right| \leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2 \leqslant 0(m>0)$．若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要但非充分条件，求实数 m 的取值范围．

分析：要求 m 的取值范围，需建立 p 与 q 的联系．从而，问题转化为解不等式问题．解题的关键是如何利用$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要但非充分条件，即$\neg q \Rightarrow \neg p$ 且$\neg p$ 推不出$\neg q$．

解：由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right| \leqslant 2$ 得，$-2 \leqslant x \leqslant 10$．

因此$\neg p$：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|>2$，即 $x>10$ 或 $x<-2$．设 $A=\{x \mid \neg p(x)\}$，即 $A=\{x \mid x>10$ 或 $x<-2\}$．

由 $x^2-2x+1-m^2 \leqslant 0$ $(m>0)$ 得，$1-m \leqslant x \leqslant 1+m$．

因此 $\neg q$：$x^2-2x+1-m^2>0$，即 $x<1-m$ 或 $x>1+m$．设 $B=\{x \mid \neg q(x)\}$，即 $B=\{x \mid x<1-m$ 或 $x>1+m\}$．

由$\neg q \Rightarrow \neg p$，则 $B \subsetneqq A$，得

$$\begin{cases} m>0 \\ 1-m \leqslant -2 \\ 1+m \geqslant 10 \end{cases} \Rightarrow m \geqslant 9.$$

例 2 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$．

(1) 当 $b>0$ 时，若 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $f(x) \leqslant 1$，证明 $a \leqslant 2\sqrt{b}$；

(2) 当 $b>1$ 时，证明：$\forall x \in [0,1]$，$|f(x)| \leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{b}$；

(3) 当 $0<b \leqslant 1$ 时，讨论：$\forall x \in [0,1]$，$|f(x)| \leqslant 1$的充要条件是 $a \leqslant b+1$．

证明：(1) 依题设，$\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $f(x) \leqslant 1$．

因为 $f(x)=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$，

所以
$$f\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b} \leqslant 1.$$

因为 $a>0$，$b>0$，

所以
$$a \leqslant 2\sqrt{b}.$$

证明：(2)（必要性）

$\forall x \in [0,1]$，$|f(x)| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant f(x)$，据此可以推出，$-1 \leqslant f(1)$，即 $a-b \geqslant -1$，所以 $a \geqslant b-1$．

$\forall x \in [0,1]$，$|f(x)| \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 1$．

因为 $b>1$，可以推出 $f\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \leqslant 1$，

即
$$a \times \frac{1}{\sqrt{b}}-1 \leqslant 1,$$
$$a \leqslant 2\sqrt{b},$$

所以
$$b-1 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{b}.$$

（充分性）

因为 $b>1$，$a \geqslant b-1$，$\forall x \in [0,1]$，可以推出：

$$ax-bx^2 \geqslant b(x-x^2)-x \geqslant -x \geqslant -1,$$

即
$$ax-bx^2 \geqslant -1.$$

因为 $b>1$，$a \leqslant 2\sqrt{b}$，$\forall x \in [0, 1]$，可以推出：

$$ax-bx^2 \leqslant 2\sqrt{b}x-bx^2 \leqslant 1,$$

即
$$ax-bx^2 \leqslant 1,$$

所以
$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

综上，当 $b>1$ 时，$\forall x \in [0, 1]$，$|f(x)| \leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{b}$.

解：(3) 因为 $a>0$，$0<b \leqslant 1$ 时，$\forall x \in [0, 1]$，$f(x)=ax-bx^2 \geqslant -b \geqslant -1$，即 $f(x) \geqslant -1$.

由 $f(x) \leqslant 1 \Rightarrow f(1) \leqslant 1 \Rightarrow a-b \leqslant 1$，即 $a \leqslant b+1$；

又 $a \leqslant b+1 \Rightarrow f(x) \leqslant (b+1)x-bx^2 \leqslant 1$，即 $f(x) \leqslant 1$.

因此，当 $a>0$，$0<b \leqslant 1$ 时，$\forall x \in [0, 1]$，$|f(x)| \leqslant 1$ 的充要条件是 $a \leqslant b+1$.

二、哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一. 哥德巴赫是德国一位中学教师，也是一位著名的数学家，生于 1690 年，1725 年当选为俄国彼得堡科学院院士. 1742 年，哥德巴赫在教学中发现，每个不小于 6 的偶数都是两个素数（只能被 1 和它本身整除的数）之和. 如 $6=3+3$，$12=5+7$ 等等.

1742 年 6 月 7 日哥德巴赫写信给当时的大数学家欧拉，提出了以下的想法：

(a) 任何一个大于等于 6 之偶数，都可以表示成两个奇质数之和.

(b) 任何一个大于等于 9 之奇数，都可以表示成三个奇质数之和.

这就是著名的哥德巴赫猜想. 欧拉在 6 月 30 日给他的回信中说，他相信这个猜想是正确的，但他不能证明. 叙述如此简单的问题，连欧拉这样首屈一指的数学家都不能证明，这个猜想便引起了许多数学家的注意. 从哥德巴赫提出这个猜想至今，许多数学家都不断努力想攻克它，但都没有成功. 当然曾经有人作了些具体的验证工作，例如：$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7=3+11$，$16=5+11$，$18=5+13$，…. 有人对 33×108 以内且大过 6 之偶数一一进行验算，哥德巴赫猜想 (a) 都成立. 但严格的数学证明尚待数学家的努力.

从此，这道著名的数学难题引起了世界上成千上万的数学家的注意. 200 年过去了，没有人证明它. 哥德巴赫猜想由此成为数学皇冠上一颗可望不可及的“明珠”. 到了 20 世纪 20 年代，才有人开始向它靠近. 目前最佳的结果是中国数学家陈景润于 1966 年证明的，称为陈氏定理：“任何充分大的偶数都是一个质数与一个自然数之和，而后者仅仅是两个质数的乘积.”通常都简称这个结果为大偶数可表示为“1+2”的形式.

最终会由谁攻克“1+1”这个难题呢？现在还没法预测.

三、蜂窝猜想

4 世纪古希腊数学家佩波斯提出，蜂窝的优美形状，是自然界最有效劳动的代表. 他猜想，人们所见到的、截面呈六边形的蜂窝，是蜜蜂采用最少量的蜂蜡建造成的. 他的这一猜想称为“蜂窝猜想”，

但这一猜想一直没有人能证明.

美国密执安大学数学家黑尔宣称，他已破解这一猜想. 蜂窝是一座十分精密的建筑工程. 蜜蜂建巢时，青壮年工蜂负责分泌片状新鲜蜂蜡，每片只有针头大小，而另一些工蜂则负责将这些蜂蜡仔细摆放到一定的位置，以形成竖直六面柱体. 每一面蜂蜡隔墙厚度和误差都非常小. 6 面隔墙宽度完全相同，墙之间的角度正好 120°，形成一个完美的几何图形. 人们一直疑问，蜜蜂为什么不让其巢室呈三角形、正方形或其他形状呢？隔墙为什么呈平面，而不是呈曲面呢？虽然蜂窝是一个三维体建筑，但每一个蜂巢都是六面柱体，而蜂蜡墙的总面积仅与蜂巢的截面有关. 由此引出一个数学问题，即寻找面积最大、周长最小的平面图形.

1943 年，匈牙利数学家陶斯巧妙地证明，在所有首尾相连的正多边形中，正六边形的周长是最小的. 但如果多边形的边是曲线时，会发生什么情况呢？陶斯认为，正六边形与其他任何形状的图形相比，它的周长最小，但他不能证明这一点. 而黑尔在考虑了周边是曲线时，无论是曲线向外突，还是向内凹，都证明了由许多正六边形组成的图形周长最小. 他已将 19 页的证明过程放在因特网上，许多专家都已看到了这一证明，认为黑尔的证明是正确的.

四、数学家陈景润

陈景润（1933—1996），中国数学家、中国科学院院士，福建闽侯人. 陈景润出生在一个小职员的家庭，上有哥姐、下有弟妹，排行第三. 因为家里孩子多，父亲收入微薄，家庭生活非常拮据. 陈景润一出生便似乎成为父母的累赘，一个自认为是不受欢迎的人.

上学后，由于瘦小体弱，常受人欺负. 这种特殊的生活境况，把他塑造成了一个极为内向、不善言谈的人，加上对数学的痴恋，更使他养成了独来独往、独自闭门思考的习惯，因此竟被别人认为是一个“怪人”. 陈景润毕业后选择研究数学这条异常艰辛的人生道路，与沈元教授有关. 在沈元教授那里，陈景润第一次知道了哥德巴赫猜想，也就是从那里，从这一刻起，就立志去摘取那颗数学皇冠上的明珠.

1953 年，陈景润毕业于厦门大学，留校在图书馆工作，但始终没有忘记哥德巴赫猜想，他把数学论文寄给华罗庚教授，华罗庚阅后非常赏识他的才华，把他调到中国科学院数学研究所当实习研究员，从此便有幸在华罗庚的指导下，向哥德巴赫猜想进军.

1966 年 5 月，一颗耀眼的新星闪烁于全球数学界的上空——陈景润宣布证明了哥德巴赫猜想中的“1＋2”；1972 年 2 月，他完成了对“1＋2”证明的修改. 令人难以置信的是，外国数学家在证明“1＋3”时用了大型高速计算机，而陈景润却完全靠纸、笔和头颅. 如果这令人费解的话，那么他单为简化“1＋2”这一证明过程就用去了 6 麻袋稿纸，则足以说明问题了.

1973 年，他发表了著名的“陈氏定理”，被誉为筛选法的光辉顶点.

对于陈景润的成就，一位著名的外国数学家曾敬佩和感慨地誉为：他移动了群山！

（上述二、三、四资料来源：中基网，有删节）

Ⅳ 教学案例

案例1 1.1.2 量词

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）正确地判断全称命题、存在性命题的真假；

（2）会用自然语言、符号语言表示两种命题.

2. 过程与方法

（1）通过实例经历全称命题、存在性命题概念的形成过程及其表述方法，体验由特殊到一般的思维方法；

（2）学会判断全称命题、存在性命题的方法.

3. 情感、态度与价值观

通过本节的学习使学生认识到两种命题在刻画现实问题、数学问题中的作用，从而激发学生的创新精神.

（二）教学重点、难点

重点：全称命题、存在性命题的概念以及真假的判断.

难点：用自然语言、符号语言表示两种命题.

（三）教学方法

本节内容主要是学习逻辑量词及含有它们的两种命题，在教学中要引导学生联系已有知识，采用让学生观察、抽象、概括的方式，逐步理解全称命题、存在性命题的概念，并判断其真假，引导学生参与教学过程，使数学学习成为再创造的过程.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	引例：判断下列语句是否是命题？如果是命题，判断其真假. ① $x^2-1=0$； ② $5x-1$ 是整数； ③ $5\times5-1$ 是整数； ④ 对所有整数 x，$x^2-1=0$； ⑤ 对所有整数 x，$5x-1$ 是整数.	教师提问，学生思考并回答.	复习旧知识，引出新知识.
概念形成	1. 全称量词与全称命题 （1）如引例⑤短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫全称量词，并用符号“$\forall$”表示. （2）含有全称量词的命题，叫做全称命题.	师生共同讨论. 教师点评： ① 全称量词及符号表示； ② 引导学生通过例子理解概念.	通过实例教师引导学生分析，通过学生归纳、抽象得到概念. 从而提高学生的抽象概括

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
概念形成	(3) 引例中的④⑤可用符号表示为： p：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$； q：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数. (4) 一般地，设 $p(x)$ 是某集合 M 的所有元素都具有的性质，那么全称命题就是形如"对 M 中的所有 x，$p(x)$"的命题. 简记为：$\forall x\in M$，$p(x)$. 2. 存在性命题 (1) 如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加"有一个"的条件还可得到新命题： p_1：有一个整数 x，$x^2-1=0$； q_1：至少有一个整数 x，$5x-1$ 是整数. (2) 短语"有一个"或"至少有一个"在陈述中也表示数量，逻辑中通常叫做存在量词，用符号"$\exists$"表示. 含有存在量词的命题，叫存在性命题. (3) 存在性命题的符号表示： p_1：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$； q_1：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数. (4) 形成结论： 设 $q(x)$ 是某集合 M 的有些元素 x 具有某性质的命题，那么存在性命题就是形如"存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$"的命题. 简记为：$\exists x\in M$，$q(x)$.	教师提出问题： ① 用符号表示引例④⑤； ② 提问学生：举例说明对集合 M 中所有元素都具有的性质. ③ 总结全称命题的一般形式及记法. 教师提出问题，让学生与全称命题进行比较. 教师点明：存在量词；存在性命题的概念. 教师提问：找出全称命题与存在性命题的异同点. 引导学生用符号语言表示命题. 师生共同讨论.	能力，发展学生的理性思维能力. 初步理解全称命题的定义及表示形式. 引导学生学会运用类比的方法学习新知. 让学生通过比较进一步加深对概念的理解. 提高学生文字语言、符号语言的转化能力. 让学生初步理解存在性命题的概念及表示形式.
概念深化	练习：判断下列语句是不是全称命题或存在性命题，如果是，用符号表示出来. ① 中国的所有江河流入太平洋； ② 0 不能作除数； ③ 任何一个实数除以 1，仍等于这个实数； ④ 每一个向量都有方向吗？	教师点评： ① 全称命题； ② 存在性命题； ③ 全称命题； ④ 不是命题. 注意全称命题、存在性命题的符号表示.	让学生通过练习进一步理解概念，并能进行初步的应用.
应用举例	例 1. 试判断以下命题的真假： ① $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2=0$； ② $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$； ③ $\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$； ④ $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=3$.	教师分析①，学生做其他三个. 然后，引导学生总结如何去判断全称命题、存在性命题的方法. 学生自己动手解题. 教师提问：对全称命题、存在性命题的真假如何判断？	让学生养成独立思考问题、自主解决问题的习惯. 学会解题后的自我反思. 把问题留给学生，培养学生独立学习的习惯.
	练习：第 8 页练习 B 2.	学生做题，教师提问.	进一步巩固所学知识、方法.
归纳总结	①让学生回顾本节所学知识、方法； ②思考题：你能用所学知识解决章头问题吗？	学生回答，教师补充完善. 通过学生做思考题，加深对所学知识的理解.	使学生养成归纳总结的习惯. 教师帮助学生构建知识结构.
布置作业	第 8 页习题 1－1 A 3、4.	学生独立完成.	巩固所学知识、方法.

案例2 1.2.2 “非”（否定）

（一）教学目标

1. 知识与技能

（1）了解逻辑联结词“非”的意义，会写一个命题的否定命题，能判断否定命题的真假；

（2）会对含有全称量词、存在量词的全称命题、存在性命题进行否定.

2. 过程与方法

（1）通过对否定命题、全称命题与存在性命题的否定的学习，体会从特殊到一般的探索性的学习方法；

（2）通过学习，体会命题间的逻辑关系.

3. 情感、态度与价值观

通过本节的学习，让学生体会探索的乐趣，培养学生的创新意识，提高学生的逻辑判断能力和逻辑思维能力.

（二）教学重点、难点

重点：写出所给命题的否定命题，并判断其真假.

难点：全称命题、存在性命题的否定和真假判断.

（三）教学方法

本节内容比较抽象，难于理解. 在教学中从具体例子入手，引导学生观察、比较、抽象、概括，形成理性概念. 教师要善于创设问题情景，鼓励学生结合已有知识大胆地探究.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	（1）复习“且”“或”的含义； （2）如何判断由“且”“或”构成的新命题的真假.	教师提问，学生回答.	复习上节内容，引出本节内容.
概念形成	1. 引例1： （1）函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π； （2）2不是奇数.	教师提问： 这两个命题的反面是什么？其真假与原命题的真假有何关系. 学生思考后回答.	通过对引例的分析、思考，总结“问题的否定”的含义，结合生活中的“不是”“全盘否定”抽象出否定命题的概念.
	2. 否定命题的概念 对命题 p 加以否定，就得到一个新命题，记作 $\neg p$. 说明： （1）命题的否定是对命题的“全盘否定”； （2）p 与 $\neg p$ 的真假相反.	教师提问： （1）命题的否定是不是对命题的部分否定？ （2）p 与 $\neg p$ 的关系如何？ 学生思考后回答.	提高学生的抽象、概括能力，发展学生的理性思维能力. 通过提问，进一步加深学生对命题的否定的理解，学会如何判断否定命题的真假.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
概念深化	思考与练习： 写出下列命题的否定，并判断其真假： ① p：$y=\tan x$ 是奇函数； ② q：$\sqrt{(-2)^2}=-2$； ③ r：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点是（1，0）. 引例 2： （1）有些三角形是直角三角形； （2）有些三角形都不是直角三角形； （3）所有的质数都是奇数； （4）所有的质数不都是奇数.	学生板演，教师点评. 教师提出问题，学生回答. 问题 1：写出它们的否定； 问题 2：（1）（2）与（3）（4）的否定有什么本质的不同； 问题 3：你能总结出这两类问题的否定命题的写法吗？	通过练习，进一步提高学生的应用意识. 通过这四个例子，培养学生的观察、分析、概括、抽象能力，体会从特殊到一般的思维方法.
概念形成	3. 全称命题与存在性命题的否定 （1）一般地，存在性命题是： p：$\exists x\in A$，$p(x)$； 其否定命题是： $\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$. （2）一般地，全称命题是： q：$\forall x\in A$，$q(x)$； 其否定命题是： $\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg q(x)$.	教师在对学生回答上述问题的基础上，给出结论. 教师强调：存在性命题的否定是全部否定；全称命题的否定是部分否定.	通过学生自主探索，教师的点拨、引导，得出结论，从而培养学生的自学能力.
应用举例	例 1　写出下列命题的否定： （1）q：$b=0$； （2）p：$a=0$.	教师引导学生观察命题的结构，让学生分析、解答.	巩固所学知识与方法.
	练习：第 17 页练习 A 1.	学生完成.	
	例 2　写出下列命题的“非”，并判断其真假. （1）p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$； （2）$q$：所有的正方形都是矩形； （3）$r$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$； （4）$s$：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$.	教师提问： 这四个命题的构成有什么特点，针对这一特点，应如何写出它们的否定命题. 学生思考后回答，教师点评.	通过这一例题培养学生观察、分析问题的能力及抽象归纳理性思维能力.
	练习：第 17 页练习 A 2、3.	学生做题.	检查掌握情况.
归纳总结	1. 知识 （1）否定命题及其真假判断； （2）全称命题、存在性命题否定的写法. 2. 方法 从特殊到一般的思维方法.	学生总结，教师补充完善.	培养学生的自我归纳概括能力.
布置作业	第 17 页 练习 B 2、3（3）（4）、4.	学生独立完成.	进一步巩固所学知识和方法.

案例3　1.3.1　推出与充分条件、必要条件

（一）教学目标

1．知识与技能

（1）了解“如果 p，则 q”形式的命题，并能判断命题的真假；

（2）理解充分条件、必要条件、充要条件的意义；

（3）掌握充分条件、必要条件、充要条件的判定方法.

2．过程与方法

（1）了解学习充分条件、必要条件、充要条件是判断数学命题真假的需要，学会用数学观点分析解决实际问题；

（2）通过对充分条件、必要条件、充要条件的判定，提高分析问题、解决问题的能力.

3．情感、态度与价值观

通过“$p \Rightarrow q$”“$q \Rightarrow p$”的判断，使学生感受对立统一的思想，培养学生的辩证唯物主义观点.

（二）教学重点、难点

重点是充分条件、必要条件、充要条件的判定.

难点是判定所给条件是充分条件、必要条件，还是充要条件.

（三）教学方法

本节内容比较抽象，教学中，引导学生从熟悉的例子入手，通过判断命题的真假，突出命题中条件与结论的推出关系，让学生从不同角度，运用从特殊到一般的思维方法，归纳出条件与结论的推出关系，建立充分条件、必要条件的概念.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习命题“如果 p，则 q”，p 称为命题的条件，q 称为命题的结论．还可以有以下说法“只要 p，就有 q”；“要是 p，便 q”.	教师提出问题：举出在数学和日常生活中常遇到的命题形式. 教师点评.	温故知新.
概念形成	引例：将下列命题改写为“如果 p，则 q”形式的命题. （1）平行四边形的两组对角相等； （2）两组对角相等的四边形是平行四边形. （3）如果四边形是正方形，则它的四边相等； （4）如果四边形的四边相等，则它是一个正方形； （5）如果 $a>0$，则 $a^2>0(a\in \mathbf{R})$； （6）如果 $a^2+b^2=0$，则 $a=b=0(a,\ b\in \mathbf{R})$. 1．判断上述6个命题的真假. 2．命题“如果 p，则 q”，经过推理判断是真命题时，就说由 p 推出 q．记作：$p\Rightarrow q$. 3．充分条件：$p\Rightarrow q$，p 叫做 q 成立的充分条件．引例中（1）（3）（5）. 练习：判断下列命题的真假： ①“四边形的两组对角相等”则“四边形为平行四边形”.	教师提出问题，学生改写命题. 教师写出例子，让学生判断真假. 教师点评. 教师提问“如果 p，则 q”在为真的情况下，p 与 q 的关系如何？ 教师提出问题，学生判断真假. 教师点评，并提出充分条件的概念.	让学生熟悉“如果 p，则 q”形式的命题. 使学生通过判断命题的真假，切身体会来自命题 p 与 q 的关系．为学习充分条件、必要条件作准备. 通过实例的真假判断，弄清充分条件的实质.

续表

教学环节	教　学　内　容	师生互动	设计意图
概念形成	②“四边形的四边长相等”则“四边形为正方形”. 4. 必要条件：$q \Rightarrow p$，则 p 叫 q 的必要条件. 5. 充要条件：$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$，则 p 叫做 q 的充要条件. 例如： ① 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不相等的实根的充要条件是 $\Delta=b^2-4ac>0$； ② $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$时，$AC^2+BC^2=AB^2$； ③ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 等价于 $AB=A'B'$，且 $AC=A'C'$，且 $BC=B'C'$.	教师提出问题： 引例中（1）（3）（5）反过来是否成立？ 师生共同引出必要条件的概念. 师生共同完成. 教师强调：特别注意“且”的含义.	让学生体会如何判断条件的充分性. 让学生体会如何判断条件的必要性. 弄清充要条件的实质以及充分、必要、充要条件三者之间的关系. 进一步巩固概念.
概念深化	6. 在数学中，含有变量 x 的语句 $p(x)$，$q(x)$ 构成形如“若 $p(x)$，则 $q(x)$”的命题，应理解为“它是关于某集合 M 的一切元素 x 的全称命题”. 7. 命题的真假与充分性、必要性的关系： ① 原命题正确逆命题不正确，则条件是结论成立的充分不必要条件. ② 原命题为假，逆命题为真，则条件是结论成立的必要不充分条件. ③ 原命题为真且逆命题为真，条件是结论成立的充要条件.	教师通过分析例子，引导学生共同总结出原命题、逆命题的真假与充分条件、必要条件、充要条件的关系.	帮助学生总结判断充分条件、必要条件、充要条件的规律.
应用举例	例1　在下列各题中，判断 p 是 q 的什么条件. ① p：三角形全等； q：两三角形面积相等. ② p：$a^2=4$； q：$a=2$. ③ p：$A\subseteq B$； q：$A\cap B=A$. 例 2. 已知 α 是 β 的充要条件，δ 是 γ 的必要条件，同时又是 β 的充分条件. 试求 α 与 γ 的关系.	① 师生共同分析后，由一学生板演解题步骤，并及时纠正出现的问题. ② 教师对学生的做题情况及时作出评价. 由教师分析例 2，画出推出图. 学生完成，教师评价.	1. 通过例 1 让学生掌握判断充要条件的方法. 2. 通过例 2 提高学生解决综合问题的能力，以及分析问题的能力. 3. 练习的目的是巩固所学知识和方法. 增加直观性，让学生学会解决这类问题的方法.
	巩固练习： 第 22 页练习 A 1，2，3.		
归纳总结	1. 知识：充分条件、必要条件、充要条件. 2. 判断充分条件、必要条件、充要条件的方法.	让学生回顾本节所学知识方法，教师对解题策略进行提炼.	让学生学会总结、反思，提高学生的数学素养.
布置作业	层次一： 第 26 页 习题 1－3A 1，3； 层次二： 第 27 页 习题 1－3B 1，2.	层次一要求所有的学生都做，层次二要求基础较好的学生做.	实行分层布置作业，有利于调动学生的学习积极性.

V 习题参考答案与提示

练习 A（第 3 页）

1. ①②④是命题；③⑤⑥不是命题.
2. ①真；②假；③假；④真；⑤假.

练习 B（第 4 页）

1. ①②是命题.
2. ①真；②真；③假；④真；⑤真；⑥真.

练习 A（第 7 页）

1. （1）是全称命题，$\forall x\in$｛中国的江河｝，使 x 都流入太平洋；

   （2）是全称命题，$\forall x\in\mathbf{R}$，x 能作除数；

   （3）是全称命题，$\forall x\in\mathbf{R}$，$\dfrac{x}{1}=x$；

   （4）是全称命题，$\forall \boldsymbol{a}\in\{\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{v}$ 是非零向量$\}$，$\boldsymbol{a}$ 有方向.
2. （1）假；（2）真；（3）假；（4）假.

练习 B（第 7 页）

1. （1）是；（2）是；（3）是；（4）是.
2. （1）真；（2）真；（3）假；（4）假.

习题 1－1 A（第 7 页）

1. （1）是命题，是真命题；

   （2）是命题，是假命题；

   （3）是命题，是真命题；

   （4）是命题，是假命题.
2. （1）$q\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$：$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}$．是真命题.

   （2）$\forall a\in\mathbf{R}$，$\sin\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos a$．是假命题．如 $a=\pi$，$\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，而 $\cos\pi=-1$，所以是假命题.
3. （1）是存在性命题；

   （2）是全称命题；

   （3）既不是全称命题，也不是存在性命题；

(4) 是存在性命题.

4. (1) $\forall x\in\mathbf{R}$，使 x 能写成小数的形式；

(2) $\forall x\in\{$凸 n 边形$\}$，使 x 的外角和等于 2π；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，使 $-x$ 等于 x 的相反数；

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，使 $x^3>x^2$.

5. (1) 真命题；(2) 真命题；(3) 真命题；(4) 真命题.

6. 略.

习题 1－1B（第 8 页）

1. (1) $\forall x\in\mathbf{Q}$，x 都能写成分数的形式；$\exists x\in\mathbf{Q}$，x 能写成分数的形式；

(2) $\forall x\in\{n$ 边形$\}$，x 的内角和都等于 $(n-2)\times180°$；

$\exists x\in\{n$ 边形$\}$，x 的内角和等于 $(n-2)\times180°$；

(3) $\forall a, b\in\mathbf{Q}$，在 a，b 之间都有另一个有理数；

$\exists a, b\in\mathbf{Q}$，在 a，b 之间有另一个有理数；

(4) $\exists a\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，则 $x\cdot a=0$.

2. (1) 当 $x=0$ 时，$|x|=0$，所以命题是假命题；

(2) 当 $x=0$ 时，$x^2+2x-3=-3<0$，所以命题是假命题.

3. (1) 当 $x=5$ 时，$2^5=32>5^2$，即 $p(5)$ 是真命题；

(2) 当 $x=-1$ 时，$2^{-1}<1$，即 $p(-1)$ 是假命题.

4. (1) 由 $x+1>x$，得 $x\in\mathbf{R}$；

(2) 由 $x^2-5x+6>0$，得 $\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$.

5. (1) 真命题；(2) 假命题.

练习 A（第 13 页）

1. (1) $p\wedge q$：28 是 2 的倍数且是 7 的倍数；因为 28 是 2 的倍数为真命题，28 是 7 的倍数为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(2) $p\wedge q$：11 是 143 的因数且是 1 001 的因数；因为 11 是 143 的因数是真命题，11 是 1 001 的因数是真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(3) $p\wedge q$：$52<60$ 且 $62>60$；因为 $52<60$ 为真命题，$62>60$ 为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(4) $p\wedge q$：2 是方程 $x-2=0$ 的根且是方程 $x+1=0$ 的根；因为 2 是方程 $x-2=0$ 的根为真命题，2 是方程 $x+1=0$ 的根为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

2. 略.

3. (1) $p\vee q$：28 是 2 的倍数或是 7 的倍数. 因为 28 是 2 的倍数为真命题，28 是 7 的倍数为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

(2) $p\vee q$：11 是 143 的因数或是 1 001 的因数. 因为 11 是 143 的因数是真命题，11 是 1 001 的因数是真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

(3) $p\vee q$：$52<60$ 或 $62>60$. 因为 $52<60$ 为真命题，$62>60$ 为真命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

(4) $p\vee q$：2 是方程 $x-2=0$ 的根或是方程 $x+1=0$ 的根. 因为 2 是方程 $x-2=0$ 的根为真命

题，2 是方程 $x+1=0$ 的根为假命题，所以 $p\vee q$ 为真命题.

4. (1) 因为 $m=m$ 为真，$m>m$ 为假，所以 $m\geqslant m$ 为真；

(2) 因为集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集为真，所以原命题为真.

5. 略.

练习 B（第 13 页）

1. (1) $p\wedge q$：$17<20$ 且 $17=20$；$p\vee q$：$17<20$ 或 $17=20$.

因为 p：$17<20$ 是真命题，q：$17=20$ 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题.

(2) $p\wedge q$：平行四边形对角线互相平分且相等；$p\vee q$：平行四边形对角线互相平分或相等.

因为 p：平行四边形对角线互相平分是真命题，q：平行四边形对角线相等是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题.

2. (1) 假；(2) 真.

3. (1) $p\wedge q$：李真是三好学生且是共青团员；

(2) $p\vee q$：李真是三好学生或是共青团员.

练习 A（第 16 页）

1. (1) $\neg p$：2 不是方程 $x^2-4=0$ 的根.（假命题）

(2) $\neg p$：$\pi\neq 3.141\ 5$.（真命题）

2. (1) $\exists n\in M$，$n\geqslant 12$.（真命题）

(2) $\forall m\in\{\text{奇数}\}$，使 $m\notin M$.（假命题）

3. (1) 至少存在一个分数不是有理数.（假命题）

(2) 所有三角形都不是锐角三角形.（假命题）

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x\neq x+2$.（假命题）

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，$2x+4<0$.（真命题）

练习 B（第 16 页）

1. (1) 2 不是质数.（假命题）

(2) 圆周率 π 不是无理数.（假命题）

(3) $3+4\neq 7$.（假命题）

(4) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq 1$（$\alpha$ 为任意角）.（假命题）

(5) $1\ 000\geqslant 100$.（真命题）

2. (1) A 中的所有队员没有一个北京人；

(2) A 中有些队员不是北京人；

(3) A 中有些队员是北京人；

(4) A 中的队员都是北京人.

3. (1) 存在实数 x，不是方程 $3x-5=0$ 的根.（真）

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant 0$.（真）

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\neq 1$.（假）

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，不是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.（假）

4. (1) 当 $a=0$，$b=2$ 时，方程 $ax=b$ 无解；

(2) 当 $x=-1$ 时，$|-1|\neq-1$.

习题 1－2 A（第 17 页）

1. (1) $p\wedge q$：2 不是奇数且是质数；（真）

$p\vee q$：2 不是奇数或是质数.（真）

(2) $p\wedge q$：$y=2^x$ 是单调函数且是递增函数；（真）

$p\vee q$：$y=2^x$ 是单调函数或是递增函数.（真）

(3) $p\wedge q$：$100>10$ 且 $10>100$；（假）

$p\vee q$：$100>10$ 或 $10>100$.（真）

(4) $p\wedge q$：数列 $\{3n+2\}$ 是等差数列且是等比数列；（假）

$p\vee q$：数列 $\{3n+2\}$ 是等差数列或是等比数列.（真）

2. (1) ($x+1$ 是 x^3+x^2-x-1 的因式)$\wedge$($x+1$ 是 x^3+1 的因式)；

(2) (1 是方程 $x-1=0$ 的根)$\vee$(2 是方程 $x-1=0$ 的根)；

(3) (1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根)$\wedge$(-1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根).

3. (1) 存在正数的对数不是正数；

(2) 点 (3，4) 在圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 上；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，有 $3x\neq 2x+x$；

(4) $\forall x\in\mathbf{N}$，使 $x^2\neq x+2$.

4. (1) $\exists n\in M$，$n\leqslant 1$；(2) $\forall n$ 是质数，使 $n\notin M$.

习题 1－2 B（第 17 页）

1. (1) $\triangle ABC$ 不是直角三角形；

(2) $\triangle ABC$ 不是等腰三角形；

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形且是等腰三角形；

(4) $\triangle ABC$ 是直角三角形或是等腰三角形；

(5) $\triangle ABC$ 不是直角三角形或不是等腰三角形；

(6) $\triangle ABC$ 不是直角三角形且不是等腰三角形.

2. (1) 所有三角形不是直角三角形；

(2) 所有锐角 α，使 $\sin\alpha\neq 0$；

(3) 在实数范围内，所有一元二次方程有解；

(4) 所有人都会开车.

练习 A（第 20 页）

1. (1) 真，平行四边形$\Rightarrow$它的一组对边相等；

(2) 真，奇数$\Leftrightarrow$被 2 除余 1 的整数；

(3) 真，设 x，y 为实数，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow x=y=0$；

(4) 真，a，b，c 成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$.

2. (1) 设 x，y 为实数，“$x^2+y^2=0$”是“$x=0$ 且 $y=0$”的充要条件；

(2)“四边形的一组对边平行且相等”是“这个四边形是平行四边形”的充要条件；

(3)“两个三角形相似”是“它们的对应角相等”的充要条件；

(4)“$\angle A=30°$”是“$\sin A=\frac{1}{2}$”的充分条件.

3. (1) 充分条件；(2) 充分条件；(3) 必要条件；(4) 必要条件；(5) 充分条件；(6) 充分条件；(7) 必要条件；(8) 充要条件；(9) 充分条件；(10) 必要条件.

练习 B（第 21 页）

1. (1) 充分条件；(2) 充分条件；(3) 必要条件；(4) 充分条件.

2. (1) 假；(2) 真；(3) 假；(4) 假；(5) 假；(6) 假；(7) 真；(8) 真.

练习 A（第 23 页）

(1) 逆命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，如果$\sqrt{n}\in \mathbf{N}$，则 n 是完全平方数；（真）

否命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，如果 n 不是完全平方数，则$\sqrt{n}\notin \mathbf{N}$；（真）

逆否命题：$\forall n\in \mathbf{N}$，如果$\sqrt{n}\notin \mathbf{N}$，则 n 不是完全平方数.（真）

(2) 逆命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，如果 $a^2=ab$，则 $a=b$；（假）

否命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，如果 $a\neq b$，则 $a^2\neq ab$；（假）

逆否命题：$\forall a$，$b\in \mathbf{R}$，如果 $a^2\neq ab$，则 $a\neq b$.（真）

(3) 逆命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，如果 $x^2+x-q=0$ 有实数根，则 $q>0$；（假）

否命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，如果 $q\leqslant 0$，则 $x^2+x-q=0$ 无实数根；（假）

逆否命题：$\forall x$，$q\in \mathbf{R}$，如果 $x^2+x-q=0$ 无实数根，则 $q\leqslant 0$.（真）

(4) 逆命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，如果 $x=0$ 或 $y=0$，则 $xy=0$；（真）

否命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，如果 $xy\neq 0$，则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$；（真）

逆否命题：$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，如果 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，则 $xy\neq 0$.（真）

(5) 逆命题：若四边形的对角线互相垂直，则四边形为菱形；（假）

否命题：若四边形不是菱形，则它的对角线不互相垂直；（假）

逆否命题：若四边形的对角线不互相垂直，则四边形不是菱形.（真）

练习 B（第 23 页）

(1) 逆命题：如果四边形的一组对边平行且相等，那么这个四边形为平行四边形；（真）

否命题：如果四边形不是平行四边形，那么它的一组对边不平行或不相等；（真）

逆否命题：如果四边形的一组对边不平行或不相等，那么它不是平行四边形.（真）

(2) 逆命题：设 $x\in \mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，那么$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$；（真）

否命题：设 $x\in \mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{CD}$，那么$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线；（真）

逆否命题：设 $x\in\mathbf{R}$，如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，那么$\overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{CD}$.（假）

(3) 逆命题：如果一个函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，那么这个函数是偶函数；（真）

否命题：如果一个函数不是偶函数，那么它的图象不关于 y 轴成轴对称图形；（真）

逆否命题：如果一个函数的图象不关于 y 轴成轴对称图形，那么这个函数不是偶函数.（真）

(4) 逆命题：如果一个函数的图象关于坐标原点成中心对称图形，那么这个函数是奇函数；（真）

否命题：如果一个函数不是奇函数，那么它的图象不关于坐标原点成中心对称图形；（真）

逆否命题：如果一个函数的图象不关于坐标原点成中心对称图形，那么这个函数不是奇函数.（真）

习题 1－3 A（第 23 页）

1. (1) $p\Leftarrow q$，p 是 q 的必要条件；

(2) $p\Leftrightarrow q$，p 是 q 的充要条件；

(3) $p\Leftarrow q$，p 是 q 的必要条件；

(4) $p\Rightarrow q$，p 是 q 的充分条件.

2. (1) $ab\neq 0$ 是 $a\neq 0$ 的充分条件；

(2) $(x+1)(y-2)=0$ 是 $x=-1$ 或 $y=2$ 的充要条件；

(3) $\alpha=45°$是 $\tan\alpha=1$ 的充分条件；

(4) 集合 $A=\varnothing$ 是集合 $A\cup B=B$ 的充分条件.

3. (1) 不正确，应为："n 是自然数"是"n 是整数"的充分条件；

(2) 不正确，应为："x 是实数"是"x 是有理数"的必要条件；

(3) 不正确，应为："$x^2>9$"是"$x>3$"的必要条件但不是充分条件；

(4) 不正确，应为："m，n 都是奇数"是"$m+n$ 是偶数"的充分但不必要条件；

(5) 不正确，应为："$a>b$"不是"$a^2>b^2$"的充分条件；

(6) 不正确，应为："$a>b$"不是"$|a|>|b|$"的必要条件；

(7) 正确；

(8) 不正确，应为："$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$"是"$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$"的充分条件.

4. (1) 否命题：如果 $b^2-4ac\leqslant 0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个相等的实数根或无实数根；（真）

逆命题：如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不相等的实根，则 $b^2-4ac>0$；（真）

逆否命题：如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个相等的实数根或无实数根，则 $b^2-4ac\leqslant 0$.（真）

(2) 否命题：如果 $x-y\neq 0$，则 $(x-y)(x+y)\neq 0$；（假）

逆命题：如果 $(x-y)(x+y)=0$，则 $x-y=0$；（假）

逆否命题：如果 $(x-y)(x+y)\neq 0$，则 $x-y\neq 0$.（真）

5. (1) 逆命题：如果 $(x-3)(x-7)=0$，则 $x=3$ 或 $x=7$；

否命题：如果 $x\neq 3$ 且 $x\neq 7$，则 $(x-3)(x-7)\neq 0$；

逆否命题：如果 $(x-3)(x-7)\neq 0$，则 $x\neq 3$ 且 $x\neq 7$.

(2) 逆命题：如果四边形是矩形又是菱形，则这个四边形是正方形；

否命题：如果四边形不是正方形，则这个四边形不是矩形或不是菱形；

逆否命题：如果四边形不是矩形或不是菱形，则这个四边形不是正方形.

(3) 逆命题：如果 ab 是奇数，则 a，b 都是奇数；

否命题：如果 a，b 不都是奇数，则 ab 不是奇数；

逆否命题：如果 ab 不是奇数，则 a，b 不都是奇数.

(4) 逆命题：如果四边形的两对角之和等于 $180°$，则这个四边形内接于圆；

否命题：如果四边形不内接于圆，则这个四边形的两对角之和不等于 $180°$；

逆否命题：如果四边形的两对角之和不等于 $180°$，则这个四边形不内接于圆.

习题 1－3 B（第 24 页）

1. (1) 充分；(2) 充要；(3) 充要；(4) 充要.
2. (1) 充分条件；(2) 充要条件；(3) 必要条件；(4) 充分条件.
3. (1) 设集合 $A=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q\}$，$A\subseteq B$ 是 $p\Rightarrow q$ 的充要条件；

   (2) 四边形是菱形是它的四边相等的充要条件；

   (3) 圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 过原点是 $a^2+b^2=r^2$ 的充要条件；

   (4) $\forall x$，$y\in\mathbf{N}$，$(x=0)\wedge(y=0)$的充要条件是$\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$.
4. (1) 假；(2) 真；(3) 真；(4) 真.

巩固与提高（第 27 页）

1. (1) 真；(2) 真；(3) 假；(4) 真；(5) 假；(6) 真；(7) 假；(8) 真；(9) 真；(10) 假；(11) 假；(12) 真；(13) 真；(14) 真；(15) 假；(16) 假；(17) 真；(18) 真；(19) 假；(20) 真.
2. (1) 北京大学的有些学生不是中国公民；

   (2) $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2\leqslant-1$；

   (3) $\forall x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+1\neq0$.
3. (1)(2)(3)(4) 中的条件与结论之间都具有推出关系，结论与条件之间也具有推出关系.
4. (1) 当 $x=-1$ 时，$-1<0$；

   (2) 当 $x=\dfrac{3}{2}$时，$\dfrac{3}{2}>1$.
5. (1) $(x=1)\vee(x=3)\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$；

   (2) $x=5\Rightarrow x^2=25$；

   (3) $x\in A\cap B\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)$；

   (4) $(x\in\mathbf{Z})\vee(x\in\mathbf{Q})\Rightarrow x\in\mathbf{R}$；

   (5) $\exists x\in\mathbf{N}_+\Rightarrow(x\in\{$质数$\})\wedge(x\in\{$偶数$\})$；

   (6) $\forall x\in\mathbf{Z}\Rightarrow(x\in\{$奇数$\})\vee(x\in\{$偶数$\})$；

   (7) $\forall a\in\mathbf{Z}\Rightarrow a^2+1\neq0$；

   (8) $\exists x\in A\cap B\Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$.
6. 证明：（充分性）

因为 $ac<0$，所以 $a\neq0$，$\Delta=b^2-4ac>0$，
于是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，设为 x_1，x_2，则
$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，即 x_1，x_2 异号，所以方程有一正根一负根.
(必要性)
因为方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根一负根，设为 x_1，x_2，则
$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，即 $ac<0$.
综上所述，$ac<0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件.

自测与评估（第 28 页）

1. (1) (2) (4) (5) 是命题.
2. (1) 真；(2) 真；(3) 真；(4) 假.
3. $p\wedge q$：π 是无理数且$\sqrt{5}$不是有理数；(真)
   $p\vee q$：π 是无理数或$\sqrt{5}$不是有理数；(真)
   $\neg p$：π 不是无理数.(假)
4. 逆命题：如果 $a+b\neq1$，那么 $a^2+2ab+b^2+a+b-2\neq0$；(假)
   否命题：如果 $a^2+2ab+b^2+a+b-2=0$，那么 $a+b=1$；(假)
   逆否命题：如果 $a+b=1$，那么 $a^2+2ab+b^2+a+b-2=0$.(真)
5. (1) p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；
   (2) p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；
   (3) p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.
6. 由题意得 $a\neq0$，一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 有实数根的充要条件是
   $\Delta=4-4a\geqslant0$，
   即 $a\leqslant1$.
   设方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 的根是 x_1，x_2，由
   $x_1+x_2=-\frac{2}{a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，
   可知，方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有一个负的实数根 $\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant1,\\ \frac{1}{a}<0,\end{cases}$
   即 $a<0$.
   方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有两个负的实数根 $\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant1,\\ -\frac{2}{a}<0,\\ \frac{1}{a}>0,\end{cases}$
   即 $0<a\leqslant1$.
   综上所述，一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实数根的充要条件是 $a<0$ 或 $0<a\leqslant1$.

7. 证明：(必要性)

因为-1是方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的根，所以$-a+b-c+d=0$，

即$a+c=b+d$.

(充分性)

因为$a+c=b+d$，令$a+c=b+d=t$，则$c=t-a$，$d=t-b$，

所以方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$可化为

$ax^3+tx-ax+bx^2+t-b=0$，

$ax(x^2-1)+t(x+1)+b(x^2-1)=0$，

$(x+1)[ax(x-1)+t+b(x-1)]=0$，

于是有$x+1=0$或$ax(x-1)+b(x-1)+t=0$，

所以$x=-1$是方程的一个根.

8. (1) 至少存在一个正方形不是菱形；(假)

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，使$4x-3\leqslant x$；(假)

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x+1\neq 2x$. (真)

9. (1) 当$a=-1$时，函数$y=(-1)^x$，$x\in\mathbf{Z}$不是单调函数；

(2) 当$x=0$时，$x^2+2x-3<0$.

10. (1) 当$x=-3$或$x=1$时，$x^2+2x-3=0$成立；

(2) 当四边形为正方形时，满足题意.

Ⅵ　反馈与评价

(一) 知识与方法测试

一、选择题（每小题5分，共30分）

1. 下列说法正确的是（　　）.

(A) 一个命题的逆命题为真，则它的否命题为假

(B) 一个命题的逆命题为真，则它的逆否命题为真

(C) 一个命题的逆否命题为真，则它的否命题为真

(D) 一个命题的否命题为真，则它的逆命题为真

2. 已知p：$\varnothing\subseteq\{0\}$，$q$：$\{1\}\in\{1, 2\}$，由它们构成的新命题“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”中，真命题有（　　）.

(A) 0个　　(B) 1个　　(C) 2个　　(D) 3个

3. “$a=1$”是“函数$y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为π”的（　　）.

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不是充分条件又不是必要条件

4. q是p的充要条件的是（　　）.

(A) p：$3x+2>5$，q：$-2x-3>-5$

(B) p：$a>2$，$b<2$，q：$a>b$

(C) p：四边形的两条对角线互相垂直平分，q：四边形为正方形

(D) p：$a\neq 0$，q：关于 x 的方程 $ax=1$ 有唯一解

5. 两条直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是（　　）.

(A) $A_1A_2+B_1B_2=0$　　(B) $A_1A_2-B_1B_2=0$

(C) $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　(D) $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

6. $a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的（　　）.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象过原点的充要条件是________.

8. “$x+y=7$”是“$x^2-y^2-6x+8y=7$”的________条件.

9. 写出命题“若方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均大于 0，则 $ac>0$”的一个等价命题是________________.

10. 下列命题中，真命题为________.（写出所有正确命题的序号.）

① 40 能被 3 或 5 整除；

② 不存在实数 x，使 $x^2+x+1<0$；

③ 对任意实数 x，均有 $x+1>x$；

④ 方程 $x^2-2x+3=0$ 有两个不等的实数根；

⑤ 不等式 $\dfrac{x^2-x+1}{|x|+1}<0$ 的解集为 $\varnothing$.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分）

11.（12 分）写出命题“若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$，则 $x=2$ 且 $y=-1$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

12.（12 分）写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1) p：$\forall m\in\mathbf{R}$，方程 $x^2+x-m=0$ 必有实数根；

(2) q：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1\leqslant 0$.

13.（12 分）求使函数 $f(x)=(a^2+4a-5)x^2-4(a-1)x+3$ 的图象全在 x 轴上方成立的充要条件.

14.（14 分）已知 $m\in\mathbf{Z}$，关于 x 的一元二次方程

$x^2-4x+4m=0$,　　①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$,　　②

求方程①②的根都是整数的充要条件.

知识与方法测试参考答案

一、选择题

1. D.　2. B.　3. A.　4. D.　5. A.　6. C.

二、填空题

7. $c=0$. 8. 充分非必要. 9. 若 $ac\leqslant 0$，则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根不全大于 0.

10. ①②③⑤.

三、解答题

11. 解：逆命题：若 $x=2$ 且 $y=-1$，则 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$；（真）

否命题：若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$，则 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$；（真）

逆否命题：若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$，则 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$.（真）

12. 解：(1) $\neg p$：$\exists m\in\mathbf{R}$，使方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根.

若方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则

$\Delta=1+4m<0$，则 $m<-\dfrac{1}{4}$，

所以当 $m=-1$ 时，$\neg p$ 为真.

(2) $\neg q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1>0$.（真）

因为 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

所以 $\neg q$ 为真.

13. 解：要使函数 $f(x)$ 的图象全在 x 轴的上方的充要条件是：

$$\begin{cases}a^2+4a-5>0,\\ \Delta=16(a-1)^2-4(a^2+4a-5)\times 3<0,\end{cases}$$

解得 $1<a<19$.

又当 $a=1$ 时，$y=3$ 也符合条件.

所以使函数 $f(x)$ 的图象全在 x 轴的上方的充要条件是 $1\leqslant a<19$.

14. 解：方程①有实数根 $\Leftrightarrow \Delta=16-16m\geqslant 0$，

即 $m\leqslant 1$，

方程②有实数根 $\Leftrightarrow \Delta=16m+20\geqslant 0$，

即 $m\geqslant -\dfrac{5}{4}$，

所以方程①②都有实数根 $\Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$.

因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=-1$，0，1.

当 $m=-1$ 时，方程①可化为 $x^2-4x-4=0$，无整数解；

当 $m=0$ 时，方程②可化为 $x^2-5=0$，无整数解；

当 $m=1$ 时，方程①②都有整数解.

综上所述，方程①②的根都是整数的充要条件是 $m=1$.

（二）评价建议

1. 针对本章所学内容的特点，除在学完本章知识进行单元测试外，在平日的教学中，要结合学生的特点，通过课堂提问、学生练习、作业等，及时发现学生学习中存在的问题，采取灵活的策略及时解

决问题．另外，还要引导学生通过解决现实生活中、数学中的问题，提高学生运用逻辑用语的能力．

2．本章内容比较抽象，学生不易掌握．逻辑用语与其他数学知识有比较紧密的联系，教学中要注意控制难度，不要将知识拓展得太宽，以免加重学生的学习负担．随着学习的不断深入，逐渐地提高学生的运用能力．

第二章

圆锥曲线与方程

Ⅰ 课程目标

一、知识与技能目标

1. 掌握椭圆的定义、标准方程及其简单几何性质.

2. 了解抛物线、双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它们的简单几何性质.

3. 能利用圆锥曲线的有关知识解决与圆锥曲线有关的简单实际应用问题.

二、过程与方法目标

1. 通过列举生活中的常见的与圆锥曲线有关的实例，经历从具体情境中抽象出椭圆、双曲线、抛物线模型的过程，激发学生学习数学的积极性，培养学生的学习兴趣和创新意识.

2. 通过椭圆、双曲线和抛物线的标准方程的推导和利用方程研究圆锥曲线的性质，进一步体会数形结合和等价转化的思想方法，提高运用坐标法解决几何问题的能力.

3. 了解圆锥曲线的实际背景和它在科学领域中的地位与作用，了解研究圆锥曲线的基本方法——坐标法.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过对椭圆、双曲线、抛物线概念的引入教学，培养学生的观察能力和探索能力.

2. 通过画圆锥曲线的几何图形让学生感知几何图形曲线美、简洁美、对称美，培养学生学习数学的兴趣.

3. 通过圆锥曲线的统一性的研究，对学生进行运动、变化、对立、统一的辩证唯物主义思想教育.

Ⅱ 教材分析

一、编写特色

1. 本章的主题是用代数方法研究几何. 培养学生用代数方法解几何问题的能力，同时培养学生的代数运算和等价变形能力，强化培养学生的数形转换能力.

2. 进一步让学生理解曲线方程的含义，总结求曲线方程的方法和用曲线研究方程的一般步聚.

3. 注意复习解方程和方程组的方法和技能.

4. 通过学习圆锥曲线的历史和应用，启发学生学习圆锥曲线的兴趣.

二、内容结构

1. 内容编排

本章是在学生学习了直线和圆的方程的基础上，进一步学习用坐标法研究曲线. 这一章的主要内容是研究椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程和几何性质，以及圆锥曲线在实际中的简单应用. 本章共分三大节. 这三大节分别研究了椭圆、双曲线和抛物线，每一大节又分两个小节内容，前一小节主要是学习圆锥曲线的定义和它们在直角坐标系中的标准方程，所谓标准方程就是曲线在标准位置时的方程，即曲线的中心或顶点在坐标原点，对称轴在坐标轴上时的方程；后一小节则是通过标准方程讨论圆锥曲线的几何性质，通常包括：(1) 曲线的范围；(2) 曲线的对称性；(3) 曲线的截距（与坐标轴交点的坐标），以及不同曲线所具有的一些特殊性质.

本章所研究的三种圆锥曲线，都是重要的曲线. 因为对这几种曲线研究的问题基本一致，方法相同，所以教材对这三种圆锥曲线的学习的重点放在了椭圆上，通过求椭圆的标准方程，使学生掌握推导出这一类轨迹方程的一般规律和化简的常用办法. 这样，在求双曲线、抛物线方程的时候，学生就可以独立地，或在教师的指导下比较顺利地完成. 在讨论椭圆的几何性质时，教材以椭圆为例详细地说明了在解析几何中怎样利用方程研究曲线的范围、对称性、顶点、离心率等几何性质等. 这样，学生在学习双曲线和抛物线时，就可以练习使用这些方法，从而在掌握解析几何基本方法上得到锻炼和提高.

2. 地位和作用

曲线可以看成是符合某种条件的点的轨迹，在解析几何里用坐标法研究曲线的一般程序是：建立适当的坐标系，求出曲线的方程；利用方程讨论曲线的几何性质，说明这些性质在实际中的应用. 在数学2第二章里学生已经初步学习了这种方法，在“圆锥曲线与方程”这一章中，这种研究曲线的方法和过程以及它的优势体现得最突出. 因此，“圆锥曲线与方程”是解析几何的重点内容，特别是在对学生掌握坐标法的训练方面有着不可替代的作用.

3. 重点和难点

椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程和几何性质，在生产和科学技术中有着广泛的应用，也是今后进一步学习数学的基础. 椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程和几何性质，以及坐标法是这一章的重点.

坐标法是借助坐标系，以代数中数与式的知识为基础来研究几何问题的一种数学方法．因此，学习这一章时需要一定的代数知识作为基础，特别是对数式变形和解方程组的能力要求较高．例如，在求椭圆和双曲线标准方程时，会遇到比较复杂的根式化简问题，在解某些题目时，还会遇到由两个二元二次方程组成的方程组的问题，等等．这是教学的难点．本章采取缺什么补什么的办法来补充这些知识，并且结合具体情况，分散在相关内容中．例如，在由定义求椭圆、双曲线的标准方程时，遇到含有两个根式的等式化简问题，教材在这里详细介绍如何化简这类方程；利用待定系数法求圆锥曲线的标准方程时，会遇到由两个二元二次方程组成的方程组，这时教材详细地讲解它们的解法．教学时，要将这些内容当作新知识认真安排，组织练习，切不可以为是代数知识不属于解析几何的教学任务一带而过．教材对这两项内容采取循序渐进的方法逐步提高要求．

4. 本章知识结构

三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2．1　椭圆	
2.1.1　椭圆及其标准方程	2 课时
2.1.2　椭圆的几何性质	2 课时
2．2　双曲线	
2.2.1　双曲线及其标准方程	2 课时
2.2.2　双曲线的几何性质	2 课时
2．3　抛物线	
2.3.1　抛物线及其标准方程	1 课时
2.3.2　抛物线的几何性质	2 课时
本章小结	1 课时

四、教法与学法建议

引言以我国的“探测一号”赤道卫星发射成功为背景提出问题，激发学生的学习动机，同时介绍了太空中行星、彗星的运行轨道以及物体的斜抛运动的轨道等实例，使学生认识圆锥曲线，同时认识圆锥曲线在科学领域中的重要地位．另外向学生介绍了“圆锥曲线”这个名称的来历，即它们可以由一个平

面截一个圆锥面得到.

实际上，当平面与圆锥面的轴所成的角不同时，就可以截出椭圆、抛物线、双曲线等不同的曲线（参见“阅读与欣赏”），因此，把椭圆、双曲线、抛物线统称圆锥曲线. 当平面平行于圆锥的底面但不经过圆锥的顶点时，截线是一个圆，当平面经过圆锥面的顶点时，截线变为一个点，或一条直线，或两条直线，这些都是圆锥曲线的特例. 教科书为了突出主要内容，没有全面讨论圆锥曲线. 如果学生有兴趣，可以在课外向他们作介绍，引言课中不要占用许多时间讲解，学生知道“圆锥曲线”这个名称的来历就可以了.

引言还通过一些圆锥曲线在现实生活中的具体应用的例子，使学生认识圆锥曲线，了解它们在生产和科学技术中的应用，教学要与章头图密切配合，使学生在观察照片和图形中，对圆锥曲线有所认识，对本章要学习的内容产生兴趣. 教学时，最好配合使用圆锥曲线的教具，或者让学生自己动手切割圆锥形的食物、胶泥等，以加深对圆锥曲线的认识. 还可以进一步展示一些有关圆锥曲线的实物和图片，有条件的学校可以利用计算机演示，或让学生自己动手操作，使引言课更生动活泼.

引言还指出了本章研究的中心课题和研究圆锥曲线的重要方法——坐标法.

2.1 椭圆

2.1.1 椭圆及其标准方程

1. 本节教材是两大块内容：一是椭圆的定义；二是椭圆的标准方程. 椭圆是圆锥曲线这一章所要研究的三种圆锥曲线中首先遇到的，教材把用坐标法对椭圆的研究放在了重点位置上. 学好椭圆对于学生学好圆锥曲线是非常重要的.

2. 对于椭圆定义的教与学需要注意以下三点：

(1) 椭圆是常见的曲线，对椭圆的定义的引入，要注意借助于直观、形象的模型或教具，让学生从感性认识入手，逐步上升到理性认识，形成正确的概念. 为了使学生掌握椭圆的本质特征，以便得出椭圆的定义，教科书介绍了一种画椭圆的方法，通过画图过程，揭示椭圆上的点所要满足的条件. 教师可事先准备好一根细线和两根钉子，在给出椭圆在数学上的严格定义之前，教师先在黑板上取两个定点(两定点之间的距离小于细线的长度)，再让两名学生按教师的要求在黑板上画一个椭圆. 画好后，教师再在黑板上取两个定点（两定点之间的距离大于细线的长度)，然后再请学生按同样的要求作图. 学生通过观察两次作图的过程，总结经验和教训，教师因势利导，让学生自己得出椭圆的严格的定义. 这样，学生对这一定义就会有深刻的了解.

(2) 对于椭圆的定义的理解，要抓住椭圆上的点所要满足的条件，即椭圆上点的几何性质，可以类比圆的定义来理解. 另外要注意到定义中对“常数”的限定，即常数要大于 $|F_1F_2|$. 这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即：“当常数等于 $|F_1F_2|$ 时轨迹是一条线段；当常数小于 $|F_1F_2|$ 时无轨迹”. 这样有利于集中精力进一步研究椭圆的标准方程和几何性质. 但在讲解椭圆的定义时注意不要忽略这两种特殊情况，以保证对椭圆定义的准确性.

(3) 为了加深学生对椭圆定义的理解，教科书练习 A 第 1、2 题设计了用两组同心圆画椭圆的方法，练习 B 第 1 题是用直尺和圆规画椭圆，可让学生进行实践.

3. 根据椭圆的定义求标准方程，应注意下面几点：

(1) 曲线的方程依赖于坐标系，曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不

同，因此，为了使方程简单，必须注意坐标系的选择. 在求椭圆的方程时，建立适当的坐标系，是求曲线方程首先应该注意的地方. 应让学生观察椭圆的图形或根据椭圆的定义进行推理，发现椭圆有两条互相垂直的对称轴，以这两条对称轴作为平面直角坐标系的两条轴，不但可以使方程的推导过程变得简单，而且也可以使最终得出的方程形式整齐和简洁.

(2) 在求方程时，设椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为 $2a(a>0)$，这是为了使焦点和长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以便导出的椭圆方程形式简单. 令 $a^2-c^2=b^2$，是由于 b 有特定的几何意义. 同时为了使方程的形式整齐而便于记忆，b 的几何意义将在下一小节椭圆的几何性质中作说明.

(3) 带根式的方程化简是学生感到困难的，特别是由点 M 适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数，化简时要进行两次平方，方程中字母超过三个，且次数高、项数多，初中代数中没有做过这样的题目. 教学时，要注意说明这类方程化简的方法，即：(1) 方程中只有一个根式时，需将它单独留在方程的一边，把其他各项移至另一边；(2) 方程中有两个根式时，需将它们分别放在方程的两边.

4. 讲解了焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程后，教师要让学生阅读教科书上的探索与研究，使学生自己认识焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程，然后鼓励学生探索椭圆的两种标准方程的异同点，加深对椭圆的认识.

中心在原点、焦点分别在 x 轴上，y 轴上的椭圆的标准方程分别为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

相同点是：(1) 形状相同、大小相同；(2) 都有 $a>b>0$，$a^2=b^2+c^2$.

不同点是：(1) 两种椭圆相对于坐标系的位置不同，它们的焦点坐标也不同；

(2) 椭圆的焦点在 x 轴上$\Leftrightarrow$标准方程中 x^2 项的分母较大；椭圆的焦点在 y 轴上$\Leftrightarrow$标准方程中 y^2 项的分母较大.

另外，形如 $Ax^2+By^2=C$ 中，只要 A，B，C 同号，就是椭圆方程，它可以化为$\dfrac{x^2}{\frac{C}{A}}+\dfrac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$. 例如，可将方程 $2x^2+3y^2=5$ 化成椭圆的标准形式

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1,$$

这时 $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$，$b=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

5. 例 1 是利用待定系数法求椭圆的方程，由已知条件，求椭圆的标准方程的解题模式是：先确定焦点的位置，设出标准方程（若不能确定焦点的位置，则应分类讨论），再用待定系数法确定 a、b 的值.

例 2 实质上是根据方程初步研究椭圆的简单的几何性质，不是标准方程的要先将方程化为椭圆的标准方程，确定 a^2 和 b^2，然后根据 a、b、c 的关系求出 c，写出焦点坐标.

6. 本小节的重点是椭圆的定义和椭圆标准方程的两种形式. 难点是椭圆标准方程的建立和推导. 关键是掌握建立坐标系与根式化简的方法.

2.1.2 椭圆的几何性质

1. 根据曲线的方程研究曲线的几何性质，并正确地画出它的图形，是解析几何的基本问题之一. 根据曲线的条件列出方程，如果说是解析几何的手段，那么根据曲线的方程研究它的性质、画图就可说

是解析几何的目的．在第一节学习曲线和方程时已指出，对于这个问题，本节结合椭圆的方程进行了具体阐述．

本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几何性质，掌握标准方程中的 a、b 以及 c、e 的几何意义，a、b、c、e 之间的相互关系；同时，要通过对椭圆的标准方程的讨论，使学生知道在解析几何中是怎样用代数方法研究曲线的性质的．

2．在解析几何中讨论曲线的范围，就是确定方程中两个变量的取值范围．教科书中是用解不等式的方式来讨论的．如果将椭圆的标准方程变形为

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

则这个椭圆的方程可以分成 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 两个函数式，讨论椭圆的范围，就是讨论这两个函数的定义域和值域，这个问题学生不会有困难．这也是讨论椭圆范围的一种方法．

确定了曲线的范围以后，用描点法画曲线的图形时就可以不取曲线范围以外的点了．

3．对于椭圆的对称性的研究，在上一节中已初步接触，对于对称的有关结论学生已经比较熟悉，研究对称性以后应强调：x 轴、y 轴是椭圆的对称轴．原点是椭圆的对称中心即椭圆中心．进而说明椭圆的中心是焦点连线的中点，对称轴是焦点的连线及其中垂线与坐标系无关．因而是曲线的固有性质．

4．关于求曲线的截距，相当于求曲线与坐标轴的交点．例如对椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 来说，它与坐标轴的交点就是它的顶点．

令 $y=0$，得关于 x 的方程，解这个方程，求出 x 的值，就是曲线与 x 轴交点的横坐标，即曲线在 x 轴上的截距．

令 $x=0$，得关于 y 的方程，解这个方程，求出 y 的值，就是曲线与 y 轴交点的纵坐标，即曲线在 y 轴上的截距．

通过求椭圆的顶点，得到 a、b 的几何意义，a 是长半轴的长，b 是短半轴的长．由 $c^2=a^2-b^2$，可得“已知椭圆的四个顶点，求焦点”的几何作法．只要以 B_1 或 B_2 为圆心，a 为半径，作弧交长轴于两点，这两点就是焦点．

讨论了曲线的范围、对称性和截距以后，再进行描点画图，只要描出较少的点，就能得到较准确的图形（如例 1）．

另外根据椭圆的几何性质，用下面的方法可以快捷地画出反映椭圆基本形状和大小的草图：以椭圆的长轴、短轴为邻边画矩形；由矩形四边的中点确定椭圆的四个顶点；用曲线将四个顶点连成一个椭圆．画图时要注意它们的对称性和顶点附近的平滑性．此法可向学生介绍一下．

5．离心率的概念比较抽象，教师可直接给出离心率的定义，再分析离心率 e 的取值范围：

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$．

再结合图表分析离心率的大小对椭圆形状的影响：

（1）当 e 趋近于 1 时，c 趋近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁平；

（2）当 e 趋近于 0 时，c 趋近于 0，从而 b 趋近于 a，因此椭圆越接近于圆．

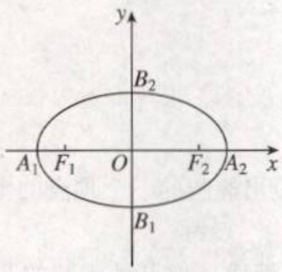
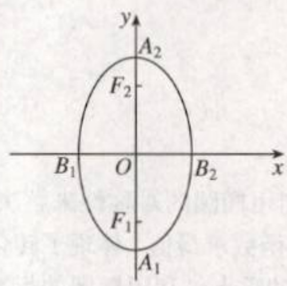
为了教学方便，本教科书中规定椭圆与圆是两种不同的曲线，因此椭圆的离心率满足不等式

$$0<e<1.$$

当 $e=0$ 时，图形就变为圆了.

6. 椭圆的几何性质可分为两类. 一类是与坐标无关的度量性质，如长、短轴长、焦距、离心率；一类是与坐标有关的位置性质，如顶点、焦点、中心及它们的坐标. 对于第二类性质，只要将 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的有关性质中横坐标 x 和纵坐标 y 互换，就可以得出 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的有关性质.

7. 教科书中着重讲焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程及性质，掌握了这一类椭圆的性质后，就容易理解焦点在 y 轴的标准方程的椭圆的性质. 在进行复习时，教师可列出下面的图表，提出问题，由学生解答和小结.

方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$
图形		
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$，$-a\leqslant y\leqslant a$
对称性	关于 x 轴、y 轴、坐标原点对称	关于 x 轴、y 轴、坐标原点对称
顶点	$A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$ $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$	$A_1(0,\ -a)$，$A_2(0,\ a)$ $B_1(-b,\ 0)$，$B_2(b,\ 0)$
离心率	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	

8. 例 2 介绍了椭圆在航天领域应用的例子，与引言提出的问题相呼应，题中说明这个卫星运行的近地点、远地点和轨道的焦点在同一条直线上. 所有的卫星的近地点、远地点、焦点都是这样吗？为什么它们一定是这样呢？这个问题可以用坐标法来证明，即可以证明椭圆上到焦点的距离最大和最小的点，恰是椭圆长轴的两个端点.

我们用椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 来证明.

设点 $P(x_0,\ y_0)$ 是椭圆上的任意一点（图 2-1），r 是点 P 与椭圆左焦点 $F_1(-c,\ 0)$ 的距离，则

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (x_0+c)^2+y_0^2 \\
&= x_0^2+2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2 \\
&= \left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2+2cx_0+c^2+b^2 \\
&= \frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2 \\
&= \left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2.
\end{aligned}
$$

因为 $r>0$，所以 $r=\frac{c}{a}x_0+a$.

又因为 $-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以当 $x_0=a$ 时，r 最大是 $(a+c)$；当 $x=-a$ 时，r 最小是 $(a-c)$. 即点 $(a, 0)$、$(-a, 0)$ 与焦点 $F_1(-c, 0)$ 的距离，分别是椭圆上的点与焦点 F_1 的最大距离和最小距离.

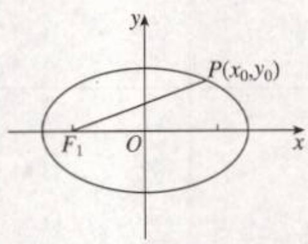


图 2-1

9. 例 3 是利用椭圆的对称性来解决问题，由对称性只要设出椭圆的一个顶点的坐标就可建立目标函数，然后通过函数求最值，体现了转化的思想和函数的思想.

10. 本小节的重点是利用椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质；难点是椭圆的几何性质的实际应用；关键是注意数形结合、方程的思想和等价转化思想的运用.

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线及其标准方程

1. 双曲线的定义、标准方程与椭圆类似，教科书的处理方法也相仿，也就是说，本小节在数学思想和方法上没有新内容. 因此，这一小节的教学，建议采用类比的教学方法，参照讲解椭圆的标准方程来讲解，教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，特别是它们的不同点.

2. 双曲线的标准方程是在其定义的基础上推导的，我们对双曲线的定义应给与重视. 教科书在双曲线的定义给出前，设计了一个与椭圆类似的探究性问题，由两组同心圆来画双曲线，有条件的学校，教学时应结合课件引导学生进行研究，可加深学生对双曲线的认识. 在理解双曲线的定义时应注意：

(1) 注意定义中的条件 $|F_1F_2|>2a$ 的限定. 若 $|F_1F_2|=2a$，则动点的轨迹为两条射线；若 $|F_1F_2|<2a$，则轨迹不存在.

(2) 注意定义中的关键词“绝对值”. 事实上若去掉定义中“绝对值”三个字，动点轨迹只能是双曲线的一支.

(3) 双曲线是平面内的点的集合，$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$ ($2a<|F_1F_2|=2c$)，如果 $2a=|F_1F_2|$，双曲线将变成两条射线.

3. 推导双曲线的标准方程时，要注意以下几点：

(1) 在推导双曲线的标准方程时，由于学生有推导椭圆的标准方程的基础，可以让学生自己选择坐标系，推导出双曲线的标准方程；

(2) 与建立椭圆的标准方程一样，建立双曲线的标准方程是，从“平面内到两定点的距离差的绝对值是常数（与椭圆不同，这个常数要大于 0 且小于 $|F_1F_2|$）的点 M 的轨迹”这个双曲线的定义出发，推导出它的标准方程. 推导过程说明，双曲线上任意一点的坐标都适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；但关于坐标适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的点都在双曲线上，同椭圆一样，教科书中未加证明.

(3) 根据双曲线定义求双曲线的标准方程，思想方法和推导过程与椭圆完全类似，但应注意在椭圆标准方程的推导中，是令 $b^2=a^2-c^2$，而在双曲线标准方程的推导过程中，是令 $b^2=c^2-a^2$. a，b，c 之间的关系与椭圆中不同，不要搞混. 为什么要引入 $b^2=c^2-a^2$？这不仅是化简的需要，而且还有几何意义的实际背景，$2b$ 就是虚轴的长，在下一节双曲线的几何性质中将作介绍.

4. 中心在原点，焦点在 x 轴、y 轴上的双曲线标准方程分别是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad 和\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0).$$

要让学生比较这两种标准方程的双曲线的异同：

相同点是：它们的形状、大小相同，都有 $c^2=a^2+b^2$；

不同点是：两种双曲线相对于坐标系的位置不同，它们的焦点坐标也不同. 双曲线的焦点在 x 轴上⇔标准方程中 x^2 项的系数为正；双曲线的焦点在 y 轴上⇔标准方程中 y^2 项的系数为正.

5. 在椭圆与双曲线的标准方程中，前者 $a>b>0$，后者 a，b 无大小关系. 根据椭圆与双曲线标准方程判定焦点在哪条坐标轴上，前者是根据 x^2，y^2 项分母的大小来判定，后者是根据 x^2，y^2 项系数的正负来判定. 形如 $Ax^2+By^2=C$ 的方程，只要 A，B 符号相反，$C\neq0$，就是双曲线方程. 它可以化为$\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$.

6. 在讲授过程中，可抓住与椭圆标准方程的异同，在教师指导下由学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系：

椭圆	双曲线
根据 $\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$	根据 $\|MF_1\|-\|MF_2\|=\pm 2a$
因为 $a>c>0$ 所以令 $a^2-c^2=b^2\ (b>0)$	因为 $0<a<c$ 所以令 $c^2-a^2=b^2\ (b>0)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$，a 不一定大于 b)

7. 例 1 是求双曲线标准方程的题目，求双曲线的标准方程需要“定量”和“定位”. 要求出双曲线的标准方程，就要求出 a^2、b^2 两个“待定系数”，于是需要两个独立的条件，按条件列出关于 a^2、b^2 的方程组，解得 a^2、b^2 的具体数值后，再按位置特征写出标准方程. “定量”是指 a、b、c 等数值的确定；“定位”则是指除了中心在原点以外，判断焦点在哪条坐标轴上，以便在使方程的右边为 1 时，确定方程的左边哪一项为正，哪一项为负，同时也就确定了 a^2、b^2 在方程中的位置.

例 2（2）在知道了双曲线的方程和双曲线上一点到其中一个焦点的距离，求该点到另一焦点的距离时，运用双曲线的定义很方便，但要注意解的取舍. 例如教科书中的例题最后结果有两解，而如果条件变为点 P 到左焦点 F_1 的距离小于 15，最后结果就只有一解，这时点 P 只可能在左支上.

例 3 是利用椭圆的标准方程求双曲线的方程，此题首先要列出动点所满足的几何条件，然后由双曲线的定义确定其轨迹形状，最后运用待定系数法求解.

例 4 是双曲线的定义和标准方程在解决实际问题中的应用，了解利用爆炸声的时间差确定爆炸点的准确位置，是双曲线的一个重要应用. 需要注意的是（1）求曲线方程，若没有坐标系，一定要建立坐标系；（2）所求的爆炸点的轨迹是双曲线的一支；（3）利用两个不同的观测点得到同一炮弹爆炸声的时间差，可以确定爆炸点所在的双曲线的方程，但不能确定爆炸点的准确位置，如果再增设一个观测点 C，利用 B、C（或 A、C）两处测得的爆炸声的时间差，可以求出另一个双曲线的方程，解这两个方程组成的方程组，就能确定爆炸点的准确位置. 这是双曲线的一个重要应用.

8. 本小节教学的重点是双曲线的定义及其标准方程；难点是双曲线标准方程的推导. 教学中要注意启发学生的学习兴趣，在学生力所能及的情况下，尽量让学生自己去解决问题，培养学生思考问题、分析问题和解决问题的能力.

2.2.2 双曲线的几何性质

1. 本节主要介绍了用坐标法研究双曲线的几何性质，教学时可以类比椭圆几何性质的研究方法，引导学生自主探究双曲线的几何性质，包括范围、对称性、顶点、离心率. 要重点指出椭圆与双曲线几何性质的联系与区别.

2. 双曲线的范围

由双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得$x^2\geqslant a^2$，当$|x|\geqslant a$时，$y$才有实数值；对于$y$的任何值，$x$都有实数值. 要讲清在直线$x=-a$，$x=a$之间没有图象，当$x$的绝对值无限增大时，$y$的绝对值也无限增大，因此曲线是无限伸展的，不像椭圆那样是封闭曲线.

3. 双曲线的对称性

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可逐一提问，让学生回答双曲线具有的对称性，并说明原因.

4. 双曲线的顶点

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两个顶点$(a,0)$、$(-a,0)$. 当$x=0$时，方程$y^2=-b^2$无实数根，因此它与$y$轴无交点，$2b$是双曲线的虚轴的长. 因为学生没有学过共轭双曲线，所以对虚轴不好理解，往往把虚轴与椭圆的短轴混淆，教学中要提醒他们注意. 另外，双曲线只有两个顶点，而椭圆有四个顶点，这与椭圆不同.

5. 双曲线的渐近线

对圆锥曲线来说，渐近线是双曲线的特有性质，利用双曲线的渐近线来画双曲线特别方便，而且较为精确. 只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线，就能画出它的近似图形. 椭圆是封闭曲线，没有渐近线，而双曲线有两条渐近线，作出双曲线的渐近线就完全地掌握双曲线的变化趋势. 在教学双曲线的渐近线时，应注意以下问题：

(1) 使学生明确双曲线的渐近线是哪两条直线，过双曲线实轴的两个端点与虚轴的两个端点分别作对称轴的平行线，它们围成一个矩形，其两条对角线所在直线即为双曲线的渐近线. 画双曲线时，应先画出它的渐近线.

(2) 使学生理解“渐近”两字的含义，当双曲线的各支向外延伸时，与这两条直线逐渐接近，接近的程度是无限的. 也可以这样理解：当双曲线上的动点M沿着双曲线无限远离双曲线的中心时，点M到这条直线的距离逐渐变小而无限趋近于0.

(3) 使学生掌握根据双曲线的标准方程求出它的渐近线方程的方法. 最简单且实用的方法是：把标准方程中的“1”用“0”替换得出的两条直线方程，即双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，即$y=\pm\frac{b}{a}x$；双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$，即$y=\pm\frac{a}{b}x$.

(4) 使学生掌握根据双曲线的渐近线方程求出双曲线方程的求法. 简单且实用的方法是：如果两条渐近线的方程为$Ax\pm By=0$，那么双曲线的方程为$(Ax+By)(Ax-By)=m$，这里m是待定系数，其值可由题目中的已知条件确定.

下面给出渐近线的比较严格的定义和双曲线的渐近线的证明，只供教师教学时参考.

若曲线上的点(x,y)到某一直线l的距离为d，当$x\to\infty$时，d趋近于0，则这条直线l称为该曲

线的渐近线.

先取双曲线在第一象限内的部分进行证明，这一部分的方程可写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,(x>a),$$

如图 2-2，设$M(x, y)$是它上面的点，$N(x, Y)$是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上与M有相同横坐标的点，则 $Y=\frac{b}{a}x$.

因为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}<\frac{b}{a}x=Y$,

所以 $|MN|=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

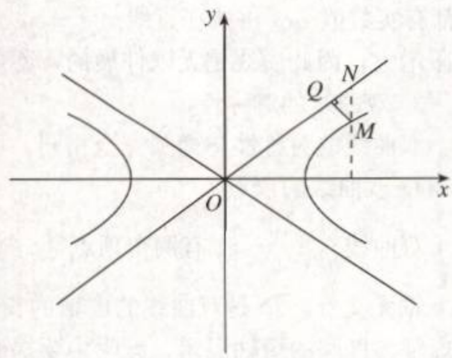


图 2-2

设 $|MQ|$ 是点 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，则 $|MQ|<|MN|$. 当 x 逐渐增大时，$|MN|$ 逐渐减小，x 无限增大，$|MN|$ 趋近于 0，$|MQ|$ 也趋近于 0，就是说，双曲线在第一象限的部分从射线 ON 的下方逐渐接近于射线ON.

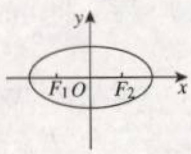
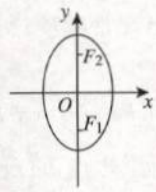
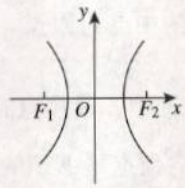
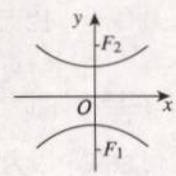
其他象限内，也可以证明类似的情况. 所以我们把两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线.

6. 双曲线的离心率

与椭圆一样，我们把比值 $e=\frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率，椭圆的离心率是描述椭圆扁平程度的一个重要数据，双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数据. 由于$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，当 e 的值从趋近于 1 逐渐增大时，$\frac{b}{a}$的值就从趋近于 0 逐渐增大，这时双曲线的形状就从扁逐渐变得开阔，就是说双曲线的“张口”逐渐增大.

7. 教科书上给出了三个例题，目的是巩固双曲线的基本知识和技巧，初步了解双曲线的初步应用.

8. 椭圆与双曲线关于标准方程、图形、性质的对比，如下表：

	椭圆		双曲线	
方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$
图形				
顶点坐标	$(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$	$(0,\ \pm a)$，$(\pm b,\ 0)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ \pm a)$
对称轴	$x=0,\ y=0$			
焦点坐标	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$
对称中心	$(0,\ 0)$			
离心率	$e=\frac{c}{a}$且$0<e<1$		$e=\frac{c}{a}$且$e>1$	
渐近线方程			$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

9. 本小节教学的重点是双曲线的几何性质，双曲线各元素之间的相互依存关系，特别是双曲线的渐近线性质. 难点是有关双曲线的离心率、渐近线的问题；关键是要注意数形结合、方程思想以及等价转化思想的运用.

2.3 抛物线

2.3.1 抛物线及其标准方程

1. 抛物线是学生非常熟悉的一种曲线，但对它是满足什么条件的动点的轨迹却很陌生. 本小节主要介绍了抛物线的定义和焦点在 x 轴上的标准方程.

2. 关于抛物线的定义，教学时应注意以下几点：

(1) 可以通过多媒体设备展示与抛物线有关的实物的形象，也可以让学生举出生活中与抛物线有关

的物体和现象，加强知识与实际的联系，增强学生的学习兴趣.

(2) 教科书运用一组同心圆和一组平行直线来画出抛物线，教学中教师可指导学生操作课件来画，并让学生说明所画曲线上的所有点的共性，在直观描点、画图的基础上归纳出抛物线的定义.

(3) 对抛物线定义的理解，应注意定点不在定直线上，否则轨迹是一条直线.

3. 在由抛物线的定义导出它的标准方程时，可先让学生考虑怎样选择坐标系. 由定义可知直线 KF 是曲线的对称轴；把 KF 作为 x 轴可以使方程不出现 y 的一次项. 因为线段 KF 的中点适合条件，所以它在抛物线上. 因而以 KF 的中点为原点，就不会出现常数项. 这样建立坐标系，得出的方程形式比较简单.

4. 在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离 $|KF|=p(p>0)$，这就是抛物线方程中焦参数 p 的几何意义. 因为抛物线的顶点是 KF 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 都可根据 p 求出.

5. 根据抛物线的定义，抛物线上一点 M 与焦点 F 的距离叫做焦半径，根据抛物线的定义，可以得到对于抛物线 $y^2=2px$，焦半径 $|MF|=x+\frac{p}{2}$. 过圆锥曲线的一个焦点且与它的对称轴垂直的弦叫做圆锥曲线的“正焦弦”，(有的书上也称之为“通径”). 过抛物线的焦点且与 x 轴垂直的直线交抛物线于 A、B 两点，如图所示，可求 $A\left(\frac{p}{2},\ p\right)$、$B\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$，则通径的长 $|AB|$ 等于 $2p$. 从而可以根据顶点和通径的端点 A、B，作出抛物线的近似图形（图 2-3）. 要使学生掌握这种画抛物线草图的方法. 我们还可以看出，p 刻画了抛物线开口的大小，p 值越大，开口越宽；p 值越小，开口越窄.

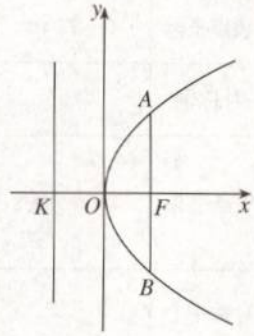


图 2-3

6. 例 1、例 2 都是求抛物线的标准方程，解决此类问题，一是要看清焦点的位置，即抛物线的开口方向，二是根据条件确定 p 的取值.

关于求抛物线的弦长问题，方法有三种：一是将弦所在直线的方程与抛物线方程联立求出两交点的坐标，然后利用两点间的距离公式求解；二是利用一般的弦长公式求解；三是利用焦半径求解，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$.

7. 本节教学的重点是抛物线的定义及其标准方程；难点是建立标准方程时坐标系的选取.

2.3.2 抛物线的几何性质

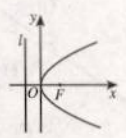
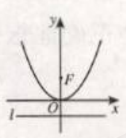
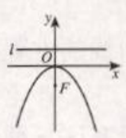
1. 抛物线对学生来说是比较熟悉的，有了讨论椭圆、双曲线几何性质的基础，再讨论抛物线的几何性质（范围、对称性、顶点、离心率）就不会遇到什么障碍. 但要注意：抛物线的性质和椭圆、双曲线比较起来，差别较大，它的离心率等于 1，它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴和一条准线. 它没有中心，通常称抛物线为无心圆锥曲线，而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线.

2. 对于抛物线的四种标准方程，应要求学生熟练地掌握. 教师给出各种标准形式的抛物线方程，要求学生说出开口方向、焦点坐标、对称轴和准线方程；反之，教师在黑板上画出各种类型的抛物线（指顶点在原点，以 x 轴或 y 轴为对称轴）的示意图，可要求学生说出抛物线方程的类型. 最后让学生自己填写下面两张表.

表一

方程	顶点坐标	焦点坐标	对称轴方程	准线方程	图形
$y^2=2px(p>0)$					
$y^2=-2px(p>0)$					
$x^2=2py(p>0)$					
$x^2=-2py(p>0)$					

表二

图形	顶点坐标	焦点坐标	对称轴方程	准线方程	标准方程
					
					
					
					

3. 已知抛物线的标准方程，在求它的焦点坐标和准线方程时，首先要判断抛物线的对称轴和开口方向. 一次项的变量如为 x（或 y），则 x 轴（或 y 轴）是抛物线的对称轴；一次项系数的符号决定开口方向. 例如抛物线的方程为 $x^2=-2y$，则 y 轴为对称轴，开口方向和 y 轴的正方向相反.

这样在由已知条件求抛物线的标准方程时，首先要根据已知条件确定抛物线标准方程的类型，再求出方程中的参数 p.

4. 抛物线不是双曲线的一支，这可以从以下三个方面来理解：

(1) 从圆锥曲线的定义来看，虽然双曲线与抛物线有其共同点，但由于比值 e 的取值不同，从而双曲线与抛物线上的点的性质存在着差异.

(2) 曲线的延伸趋势不相同，当抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点趋于无穷远时，它在这一点切线的斜率接近于 x 轴所在直线的斜率，也就是抛物线接近于与 x 轴平行；而双曲线上的点趋近于无穷远时，它的切线的斜率接近于它的渐近线的斜率.

(3) 双曲线有渐近线而抛物线没有渐近线.

5. 抛物线的离心率 $e=1$.

6. 例 2 是关于抛物线的实际应用问题，教学时可让学生阅读教科书的第 76 页上的《圆锥面与圆锥曲线》这篇材料，了解圆锥曲线的光学性质及其在生活中的广泛应用.

下面简单介绍一下抛物线的光学性质：

过抛物线上一点可以作一条切线，过切点所作垂直于切线的直线叫做抛物线在这点的法线，抛物线的法线有一条重要性质：经过抛物线上一点作一直线平行于抛物线的轴，那么经过这一点的法线平分这条直线和这点与焦点连线的夹角（图 2-4).

抛物线的这一性质在技术上有着广泛的应用. 例如，在光学上，如果把光源放在抛物镜的焦点 F 处，射出的光线经过抛物镜的反射，变成了平行光线，汽车前灯、探照灯、手电筒就是利用这个光学性质设计的. 反过来，也可以把射来的平行光线集中于焦点处，太阳灶就是利用这个原理设计的.

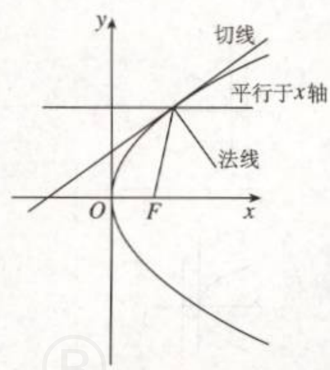


图 2-4

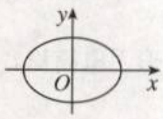
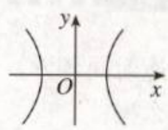
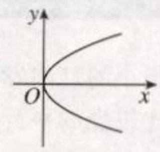
例 3 要注意的是在求焦点坐标和准线方程之前，先要将抛物线的方程化为标准方程. 实际上，对于抛物线 $y^2=ax(a\neq 0)$，其焦点坐标是 $\left(\frac{a}{4},0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{a}{4}$. 开口方向由 a 的正负确定. 类似地，我们也可得到其他形式的标准方程所对应的结论.

7. 本节教学的重点是抛物线的几何性质. 难点是抛物线几何性质的运用. 关键是正确地根据方程讨论曲线的几何性质，并注意椭圆、双曲线、抛物线的性质的联系与区别.

本章小结

（一）本章是在数学 2 第二章研究了直线和圆的方程的基础上，研究了三种圆锥曲线的方程，并通过圆锥曲线的方程讨论了它们的几何性质及其应用，重点突出了坐标法的运用.

（二）由椭圆、双曲线、抛物线的几何条件求其标准方程，并通过分析标准方程研究这三种曲线的几何性质. 三种曲线的标准方程（各取其中一种）和图形、性质如下表：

	椭圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离和等于常数	与两个定点的距离差的绝对值等于常数	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$	$y^2=2px(p>0)$
图形			
顶点坐标	$(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ 0)$
对称轴	x 轴，长轴长 $2a$ y 轴，短轴长 $2b$	x 轴，实轴长 $2a$ y 轴，虚轴长 $2b$	x 轴
焦点坐标	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$(\frac{p}{2},\ 0)$
离心率 $\left(e=\frac{c}{a}\right)$	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
准线			$x=-\frac{p}{2}$
渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

（三）椭圆、双曲线、抛物线的统一性

（1）从图形的生成看：三种曲线可以看作不同的平面截圆锥面所得到的截线，因此它们统称圆锥曲线.

（2）从方程的形式看：在直角坐标系中，这三种曲线的方程都是二元二次的，因此称它们为二次曲线.

（3）从点的集合（或轨迹）的观点来看：椭圆、双曲线、抛物线都是与定点和定直线距离的比是常数 e 的点的集合（或轨迹），这个定点是它们的焦点，定直线是它们的准线，只是由于离心率 e 的不同，而分为椭圆、双曲线和抛物线三种曲线. 当 $0<e<1$ 时，它的轨迹是椭圆；当 $e=1$ 时，它的轨迹是抛物线；当 $e>1$ 时，它的轨迹是双曲线.

（四）本章中应注意运用和掌握的数学思想方法

（1）数形结合的思想；

（2）转化的思想；

（3）待定系数法、配方法、分析法等.

Ⅲ 拓展资源

一、圆锥曲线的光学性质及其应用

一只很小的灯泡发出的光，会分散地射向各方，但把它装在圆柱形手电筒里，经过适当调节，就能射出一束比较强的平行光线，这是为什么呢？

原来手电筒内，在小灯泡后面有一个反光镜，镜面的形状是一个由抛物线绕它的轴旋转所得到的曲面（图 2-5），叫做抛物面. 抛物线有一条重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴，探照灯（图 2-6）也是利用这个原理设计的.

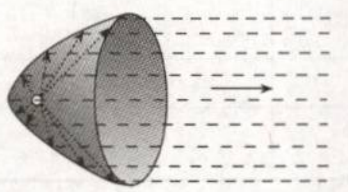


图 2-5

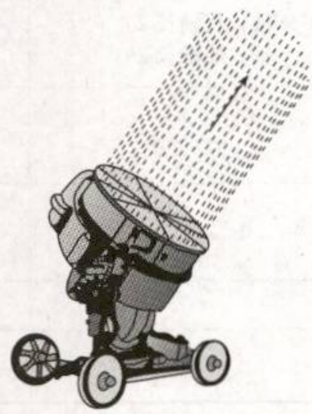


图 2-6

应用抛物线的这个性质，也可以使一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物线的反射集中于它的焦点. 人们应用这个原理设计了一种加热水和食物的太阳灶（图 2-7）. 在这种太阳灶上装有一个能旋转的抛物面形的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高.

图 2-7

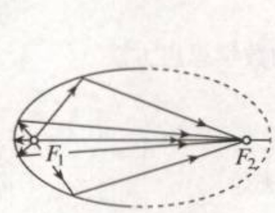


图 2-8

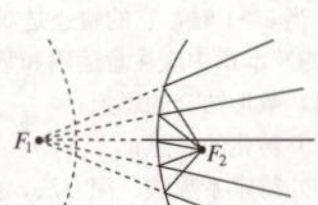


图 2-9

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同，从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上（图 2-8）；从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦点射出的一样（图 2-9）. 椭圆、双曲线的光学性质也被人们广泛地应用于各种设计中.

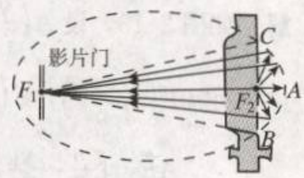


图 2-10

再如图 2-10，电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它的形状是旋转椭圆面. 为了使片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，灯丝 F_2 与片门 F_1 应位于椭圆的两个焦点处，这就是利用椭圆光学性质的一个实例.

二、向量与解析几何

向量应用于解析几何中，能够把复杂的几何推理转化为简单的代数运算，能够充分体现数学中的数形结合思想，使许多解析几何问题的求解思路清晰，目标明确，易于掌握，也为解决平面解析几何问题开辟了一条新途径.

例 1 已知 $B(-3,0)$、$C(3,0)$，$\triangle ABC$ 中的 BC 边上的高为 3，求$\triangle ABC$ 的垂心的轨迹方程.

解：如图 2-11 所示.

设垂心 $H(x,y)$，则 $A(x,\pm3)$，连接 BH，有 $BH\perp CA$.

因为$\overrightarrow{BH}=(x+3,y)$，

$\overrightarrow{CA}=(x-3,\pm3)$，

所以$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

即 $(x+3)(x-3)\pm3y=0$，

即 $x^2\pm3y-9=0$.

因为 H、B、C 三点不共线，

所以 $x^2\pm3y-9=0(y\neq0)$ 为所求轨迹方程.

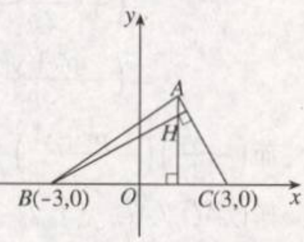


图 2-11

例 2 如图 2-12，等轴双曲线的两个顶点分别为 A、B，垂直于双曲线实轴的直线与双曲线交于 M、N 两点，求证：$MA\perp NB$，$MB\perp NA$.

证明：设双曲线方程为

$x^2-y^2=a^2(a>0)$，

则 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$MN\perp Ox$，

设 $M(x,y)$，则 $N(x,-y)$，

因此$\overrightarrow{MA}=(-a-x,-y)$，$\overrightarrow{NB}=(a-x,y)$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{NB}=(-a-x)\cdot(a-x)+(-y)\cdot y$$
$$=x^2-a^2-y^2.$$

而 $M(x,y)$ 在双曲线上，

因此 $x^2-y^2=a^2$.

因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，

所以 $MA\perp NB$.

同理 $MB\perp NA$.

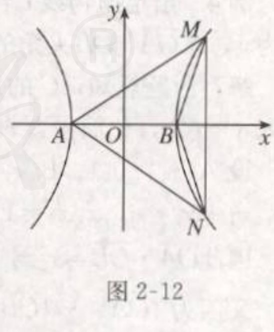


图 2-12

例 3（2001 年全国高考题）设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过 F 的直线交抛物线于 A，

B 两点，点 C 在抛物线的准线 l 上，$BC/\!/x$ 轴，证明直线 AC 经过原点 O.

解：如图 2-13，设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},\ y_2\right)$，

由题可知 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，$C\left(-\frac{p}{2},\ y_2\right)$，

$$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p},\ 0-y_1\right)=\left(\frac{p^2-y_1^2}{2p},\ -y_1\right),$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p},\ y_2-y_1\right)=\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{2p},\ y_2-y_1\right).$$

由 A、F、B 三点共线知，$\overrightarrow{AF}/\!/\overrightarrow{AB}$，

得 $\frac{p^2-y_1^2}{2p}(y_2-y_1)-\frac{y_2^2-y_1^2}{2p}(-\ y_1)=0\ (y_1\neq y_2)$，

因此 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

又因为 $\overrightarrow{AO}=\left(-\frac{y_1^2}{2p},\ -y_1\right)$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\left(-\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p},\ y_2-y_1\right)\\&=\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p},\ -\frac{p^2}{y_1}-y_1\right)\\&=\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p},\ -\frac{p^2+y_1^2}{y_1}\right),\end{aligned}$$

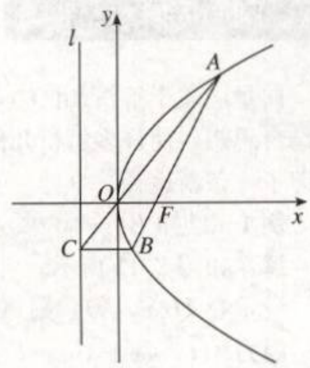


图 2-13

而 $\left(-\frac{y_1^2}{2p}\right)\left(-\frac{p^2+y_1^2}{y_1}\right)-\left(-\frac{p^2+y_1^2}{2p}\right)(-y_1)=0$，

所以 $\overrightarrow{AO}/\!/\overrightarrow{AC}$.

又因为直线 AO、直线 AC 有公共点 A，

所以 A、O、C 三点共线.

通过以上几个例子可以看出，当题目中含有“垂直”“平行（共线）”等内容时，可利用向量法解题，尤其是“垂直”，无论在条件中还是在结论中，都可以用向量法求解.

例 4 给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点. 设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小.

解：由题意知，C 的焦点为 $F(1,\ 0)$，直线 l 的斜率为 1，所以 l 的方程为 $y=x-1$，将 $y=x-1$ 代入 $y^2=4x$，化简得：$x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，则有：

$x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$；$y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-4$.

因此 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$，

又因为 $|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{41}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=-\frac{3\sqrt{41}}{41}$，

即 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi-\arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

Ⅳ 教学案例

案例1 2.1.1 椭圆的标准方程

（一）教学目标

1. 知识与技能

使学生掌握椭圆的定义、标准方程的推导和标准方程.

2. 过程与方法

通过椭圆概念的引入与椭圆标准方程的推导过程，培养学生分析探索能力，熟练掌握解决解析几何问题的方法——坐标法.

3. 情感、态度与价值观

通过椭圆定义和标准方程的学习，渗透数形结合的思想，启发学生在研究问题时，抓住问题本质，严谨细致思考，规范得出解答，体会运动变化、对立统一的思想.

（二）教学重点、难点

重点：椭圆的定义和椭圆的标准方程.

难点：椭圆的标准方程的推导，椭圆的定义中常数加以限制的原因.

（三）教学方法

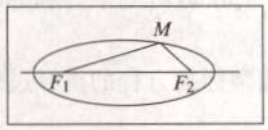
1. 用模型结合多媒体课件演示椭圆，再给出椭圆的定义，最后加以强调，加强概念的形成过程教学.

2. 对椭圆标准方程的推导，可采用观察、分析、归纳、抽象、概括，自主探究、合作交流的教学方法，调动学生参与课堂教学的主动性和积极性.

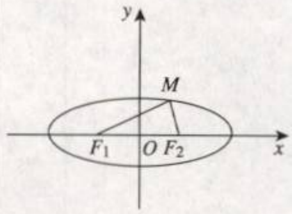
（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 曲线与方程 2. 圆的定义	前面，大家学习了曲线的方程等概念，请同学们回答. 问题1：什么叫做曲线的方程？求曲线方程的一般步骤是什么？其中哪几个步骤必不可少？ 对上述问题学生的回答基本正确，否则，教师给予纠正. 问题2：当 $a>0$ 时，$\sqrt{f(x)}=a$ 与 $f(x)=a^2$ 是同解方程吗？ 当 $a>0$ 时，$f(x)=a^2 \Leftrightarrow (\sqrt{f(x)}-a)(\sqrt{f(x)}+a)=0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=a$. 提出这一问题以便说明标准方程推导中应注意同解变形. 问题3：圆的几何特征是什么？你能否可类似地提出一些轨迹命题作广泛的探索？ 一般学生能回答："平面内到一定点的距离为常数的点的轨迹是圆"．对同学提出的轨迹命题如： "到两定点距离之和等于常数的点的轨迹." "到两定点距离的平方差等于常数的点的轨迹." "到两定点距离之差等于常数的点的轨迹." 教师要加以肯定，以鼓励同学们的探索精神.	这样便于学生温故而知新，在已有知识基础上去探求新知识.

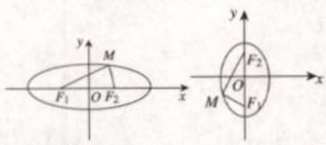
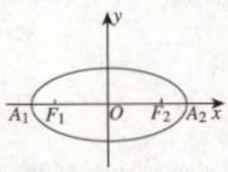
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念的形成	椭圆的定义	如果同学们提出了“到两定点距离之和等于常数的点的轨迹”，那么动点轨迹是什么呢？这时教师示范引导学生绘图： 取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画图板上的 F_1 和 F_2 两点，当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆. 教师进一步追问：“椭圆，在哪些地方见过？”有的同学说：“立体几何中圆的直观图.”有的同学说：“人造卫星运行轨道”等.  在此基础上，引导学生概括椭圆的定义： 平面内到两定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数（大于 $\|F_1F_2\|$）的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做焦距.	通过实例演示，让学生对椭圆的特征有初步认识，再让学生给椭圆下定义应是水到渠成.
概念的深化	概念中应说明两点： 1. 平面内； 2. $\|F_1F_2\|<$常数.	学生开始只强调主要几何特征——到两定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数，教师在演示中要从两个方面加以强调： (1) 将穿有铅笔的细线拉到图板平面外，得到的不是椭圆，而是椭球形，使学生认识到需加限制条件：“在平面内”. (2) 这里的常数有什么限制吗？教师边演示边提示学生注意：若常数 $=\|F_1F_2\|$，则是线段 F_1F_2；若常数 $<\|F_1F_2\|$，则轨迹不存在；若要轨迹是椭圆，还必须加上限制条件：“此常数大于 $\|F_1F_2\|$”.	结合实际模型演示，形象直观地说明椭圆定义中的必备条件.
椭圆标准方程的推导	1. 椭圆的标准方程 (1) 建系设点 以两定点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系. 设 $\|F_1F_2\|=2c(c>0)$，$M(x, y)$ 为椭圆上任意一点，则有 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$.	由椭圆的定义，可以知道它的基本几何特征，但对椭圆还具有哪些性质，我们还一无所知，因此需要用坐标法先建立椭圆的方程. 如何建立椭圆的方程？根据求曲线方程的一般步骤，可分：(1) 建系设点；(2) 点的集合；(3) 列代数方程；(4) 化简方程等步骤. 建立坐标系应遵循简单和优化的原则，如使关键点的坐标、关键几何量（距离、直线斜率等）的表达式简单化，注意充分利用图形的对称性，使学生认识到下列选取方法是恰当的. 化简方程可请一个同学板演，其余同学在下面完成，教师巡视，适当给予提示： ①原方程要移项平方，否则化简相当复杂；注意两次平方的理由详见问题 3 说明. 整理后，再平方得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. ②为使方程对称和谐而引入 b，同时 b 还有几何意义，下节课还要讲. 由 $2a>2b$ 可得 $a^2-c^2>0$，令 $a^2-c^2=b^2$，则得方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.	因为已回顾复习了求曲线轨迹方程的一般方法，因而可比较顺利地按照步骤写出过程，便于培养学生严谨规范的解决数学问题.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
椭圆标准方程的推导	 (2) 点的集合 由定义不难得出椭圆集合为 $P=\{M \mid \|MF_1\|+\|MF_2\|=2a\}$. (3) 代数方程 因为 $\|MF_1\|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\|MF_2\|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, 得方程 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ $=2a$. (4) 化简方程 整理得 方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 是椭圆的标准方程，它表示的椭圆的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$. 这里 $c^2=a^2-b^2$. 2. 两种标准方程的比较 (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，焦点是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，这里 $c^2=a^2-b^2$； (2) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，焦点是 $F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$，这里 $c^2=a^2-b^2$，只须将 (1) 方程的 x、y 互换即可得到.	关于证明所得的方程是椭圆方程，因为教材中对此要求不高，可从略. 椭圆方程的化简过程，还可以从表达式的结构特征入手，利用根式有理化加以解决，同学们不妨试一试. 引导学生归纳. 教师指出：在两种标准方程中，因为 $a^2>b^2$，所以可以根据分母的大小来判定焦点在哪一个坐标轴上.	培养学生善于观察分析，从整体上把握问题. 让学生体会问题的本质所在，只是位置的不同，图形是一致的.
应用举例	教材第 38 页，例 1. 巩固练习：写出适合下列条件的椭圆的标准方程： $a=4$，$c=\sqrt{15}$，焦点在 y 轴上.	例 1 (1) 中，从焦点坐标可以看出焦点在 x 轴上，可用待定系数法. 例 1 (2) 中，除用待定系数法外，还有其他方法吗？教师启发，学生讨论交流. 例 1 (2) 可以考虑用椭圆的定义求出 $2a$，然后由 $b^2=a^2-c^2$，确定 b^2 的值. 巩固练习：由学生口答，方程为 $\frac{y^2}{16}+x^2=1$.	通过应用练习，进一步理解椭圆的定义，熟练掌握求椭圆标准方程的方法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳小结	1. 定义：椭圆是平面内与两定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数（大于 $\|F_1F_2\|$）的点的轨迹. 2. 标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 3. 图形如下：  4. 焦点：$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$；或 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$. 5. 数形结合的思想待定系数法.	学生回顾本节内容，对所学知识进行总结归纳，教师对思想方法进行指导、提炼.	让学生学会学习，学会反思，学会总结.
布置作业	1. 教材 39 页 练习 A. 2. 如图在椭圆上的交点中，A_1 与焦点 F_1 的距离最小，$\|A_1F_1\|=2$，A_2 与 F_1 的距离最大，$\|A_2F_1\|=14$，求椭圆的标准方程.  3. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一点 $M(2.4,\ 4)$ 与焦点的距离. 4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程： (1) 椭圆经过两点 $P(-2\sqrt{2},\ 0)$、$Q(0,\ \sqrt{5})$； (2) 长轴是短轴的 3 倍，椭圆经过点 $P(3,\ 0)$. 5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 是它的焦点，AB 是过 F_1 的直线被椭圆截得的线段长，求△ABF_2 的周长.	学生独立完成，教师抽查批改作业.	巩固本节课所学知识，培养学生自觉学习的习惯，同时给学有余力的学生留出自由发展的空间.

案例2　2.2.2　双曲线的几何性质

（一）教学目标

1. 知识与技能

理解双曲线的几何性质，能根据这些几何性质解决一些简单问题，从而培养学生分析、归纳、推理等能力.

2. 过程与方法

在与椭圆的性质类比中获得双曲线的性质，进一步体会数形结合的思想，掌握利用方程研究曲线性质的基本方法.

3. 情感、态度与价值观

通过本节课的学习，使学生进一步体会曲线与方程的对应关系，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

（二）教学重点、难点

重点：双曲线的几何性质及其初步运用.

难点：双曲线的渐近线、离心率的应用.

（三）教学方法

本节课主要通过数形结合，类比椭圆的几何性质，运用现代化多媒体教学手段，通过观察、分析、归纳出双曲线的几何性质．教学过程中，可采取设疑提问，重点讲解，归纳总结，引导学生积极思考，自我解决问题，鼓励学生合作交流、思考探索.

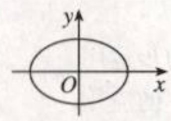
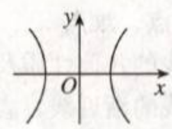
（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问导入新课	1. 椭圆的几何性质 2. 双曲线的两种标准方程	1. 椭圆有哪些几何性质，是如何探讨的？ 请一同学回答．应为：范围、对称性、顶点、离心率，是从标准方程探讨的. 2. 双曲线的两种标准方程是什么？ 再请一同学回答．应为：中心在原点、焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；中心在原点．焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. 下面我们类比椭圆的几何性质来研究双曲线的几何性质.	以旧引新让学生类比椭圆的几何性质，不难得到双曲线的几何性质.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>类比联想得出性质</td>
<td>双曲线的几何性质：
1. 范围
2. 对称性
3. 顶点
4. 渐近线
5. 离心率</td>
<td>

1. 引导学生完成下列关于椭圆与双曲线性质的表格（让学生回答，教师引导、启发、订正并板书）.

<table>
<tr><th></th><th>椭圆</th><th>双曲线</th></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>b>0)$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$(a>0,\ b>0)$</td></tr>
<tr><td>a、b、c 关系</td><td>$c^2=a^2-b^2$
$(a>b>0)$</td><td>$c^2=a^2+b^2$
$(a>0,\ b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$</td><td>$|x|\geqslant a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td>对称轴：x 轴、y 轴
对称中心：原点</td><td>对称轴：x 轴、y 轴
对称中心：原点</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$
$(0,\ -b)$，$(0,\ b)$
长轴为 $2a$
短轴为 $2b$</td><td>$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$
实轴为 $2a$
虚轴为 $2b$</td></tr>
</table>

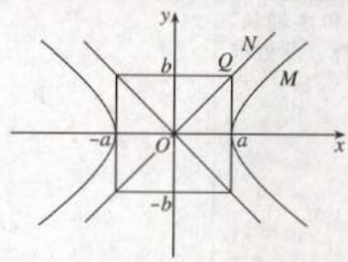
2. 导出渐近线（性质 4）

在学习椭圆时，以原点为中心，$2a$、$2b$ 为邻边的矩形，对于估计椭圆的形状，画出椭圆的简图有很大作用，试问对双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$仍以原点为中心，$2a$、$2b$ 为邻边作一矩形（板书图形），那么双曲线和这个矩形有什么关系？这个矩形对于估计和画出双曲线简图有什么指导意义？这些问题不要求学生回答，只引起学生类比联想.

接着再提出问题：当 a、b 为已知时，这个矩形的两条对角线的方程是什么？

</td>
<td>类比联想得到双曲线的前 3 个性质.</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
类 比 联 想 得 出 性 质		请一同学回答，应为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，并画出两条对角线，进一步引导学生从图观察得出结论：双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的各支向外延伸时，与这两条渐近线逐渐接近.  我们把两条直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 叫做双曲线的渐近线. 现在来看实轴在 y 轴上的双曲线的渐近线方程是怎样的？由于焦点在 y 轴上的双曲线方程是由焦点在 x 轴上的双曲线方程，将 x、y 字母对调所得到，自然前者渐近线方程也可由后者渐近线方程将 x、y 字母对调而得，所以双曲线的渐近线的方程是 $x=\pm\dfrac{b}{a}y$，即 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$. 定义：直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线，直线 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$ 叫做双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线. 这样，我们就完满地解决了画双曲线远处趋向问题，从而可比较精确地画出双曲线. 例如：画双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$，先作渐近线 $y=\pm\dfrac{4}{5}x$，确定顶点，再描几个点，就可以随后画出比较精确的双曲线草图. 3. 顺其自然介绍离心率（性质5） 由于正确认识了渐近线的概念，对于离心率的直观意义也就容易掌握了. 为此，介绍一下双曲线的离心率以及它对双曲线的形状的影响： (1) 双曲线的焦距与实轴的比 $e=\dfrac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率，且 $e>1$. (2) 由于 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}$，因而 e 越大，$\dfrac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 的斜率绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔，从而得出：双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔. （可用多媒体课件演示） 这时，教师指出：焦点在 y 轴上的双曲线的几何性质可以类似得出，双曲线的几何性质与坐标系的选择无关，即不随坐标系的改变而改变.	通过图形，形象直观的得到渐近线的定义，以及双曲线与其渐近线的位置关系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
性质的应用	例1　已知双曲线的焦点在x轴上，中心在原点，如果焦距为8，实轴长为6，求此双曲线的标准方程及其渐近线的方程. 例2　求双曲线$16x^2-9y^2=144$的实轴长和虚轴长，顶点坐标、焦点坐标、渐近线方程.	分析：可用待定系数法，直接求出a、b、c. 学生独立完成，教师巡视注意个别指导. 学生多思考、交流，教师分析解答教师板书. 注意首先化为标准方程，直接求得a，b，c. 再利用双曲线的有关性质，解决所求问题.	例1是直接根据条件写出双曲线方程，运用性质得到渐近线方程，巩固双曲线的定义. 例2是非标准形式的双曲线方程，首先要化为标准形式，进一步加强对几何性质的运用，熟练掌握知识方法.
课堂练习	教材第57页练习A1、2.	学生独立完成，教师纠正.	巩固所学知识方法.
归纳小结	1. 双曲线的几何性质. 2. 双曲线的讨论中经常涉及四个量a、b、c、e的几何意义及其数量关系. 3. 数形结合的思想的运用.	学生可以讨论、交流，教师点拨引导、完善.	帮助学生总结知识规律，便于学生拓展提高.
布置作业	1. 教材第57页练习B1、2. 2. 教材第58页习题2—2A 4、6. 3. 求以椭圆$\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$的焦点为顶点，而以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程.	学生课下独立完成.	进一步巩固本节所学知识方法.

案例3　2.3.1　抛物线及其标准方程

（一）教学目标

1. 知识与技能

使学生了解抛物线的定义，理解焦点、准线方程的几何意义，能够根据已知条件写出抛物线的标准方程.

2. 过程与方法

掌握开口向右的抛物线标准方程的推导过程，进一步理解求曲线方程的方法——坐标法. 通过本节

课的学习，培养学生在解决数学问题时能够具备观察、类比、分析、计算的能力.

3. 情感态度与价值观

通过本节的学习，让学生体验研究解析几何的基本思想，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，进一步体会数形结合的思想.

（二）教学重点和难点

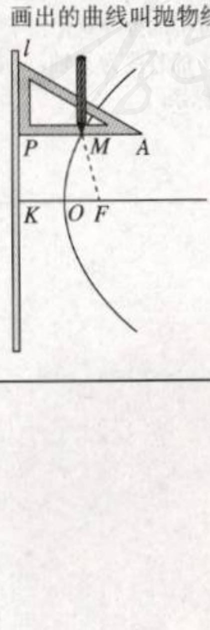
重点：抛物线的定义、根据具体条件求出抛物线的标准方程，根据抛物线的标准方程求出焦点坐标、准线方程.

难点：抛物线的标准方程的推导.

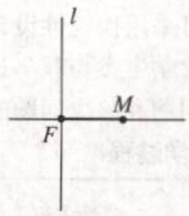
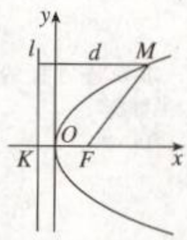
（三）教学方法

本节课可采用探究性设计方法，教学中可利用多媒体课件，教具演示，创设问题情景，激发学生求知欲望，引导学生参与教学过程，体会数学思想方法的应用，展示思路的形成过程，总结规律方法，提高学生分析问题和解决问题的能力.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提高	1. 求轨迹方程的一般方法——坐标法. 2. 离心率.	1. 已知轨迹条件，怎样建立轨迹方程？ 答：已知曲线，求方程的一般步骤如下：（1）建立适当的直角坐标系，用 (x, y) 表示曲线上任一点 M 的坐标；（2）写出曲线上的点 M 所要适合的条件；（3）用点 M 的坐标表示这个条件，得出方程 $f(x, y)=0$；（4）把方程 $f(x, y)=0$ 化简；（5）证明化简后的方程就是所求的曲线方程. 如果方程化简的每一步都同解，那么最后一步证明可以省略. 2. 在平面内到一定点的距离和到一条定直线距离的比是常数 e 的点的轨迹，当 $e<1$ 时是什么图形？（椭圆）当 $e>1$时是什么图形？（双曲线）当 $e=1$ 时是什么图形？	让学生回顾已学习的知识，有利于本节课的顺利进行.
新课导入	展示抛物线的几何画法.	当 $e=1$ 时，它又是什么曲线呢？ 即：在平面内到一定点的距离与到一条定直线的距离相等的点的轨迹是什么图形？ 演示“拉线教具”：观察与定点 F 的距离等于到定直线 l 的距离的动点 M 的轨迹，画出的是适合条件的点 M 的集合 $P=\{M \mid \|MF\|=d\}$，这里 d 是动点 M 到定直线 l 的距离. 画出的曲线叫抛物线. 	使学生看到曲线上任一点到定点和到定直线的距离之比等于常数是圆锥曲线的一个共同的本质属性，明确抛物线与椭圆、双曲线之间的联系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	1. 定义	平面内到一定点和到一条不过此点的定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线. 定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线.	
	2. 概念的深化	概念理解： 平面内有：(1) 一定点 F——焦点； (2) 一条不过此点（给出的定点）的定直线 l——准线； 想：若定点 F 在定直线 l 上，那么动点的轨迹是什么图形？ （如图是过 F 点与直线 l 垂直的一条直线——直线 MF，不是抛物线）  (3) 动点到定点的距离 $\|MF\|$； (4) 动点到定直线的距离 d； (5) $\|MF\|=d$； (6) 动点 M 的轨迹——抛物线.	加深对定义的理解.
新课讲授	3. 方程的推导过程	推导抛物线的标准方程（开口向右）（重点）： 1. 要把抛物线上的点 M 的集合 $P=\{M\mid \|MF\|=d\}$ 表示为集合 $Q=\{(x, y)\mid f(x, y)=0\}$. 首先要建立坐标系，为了使推导出的方程尽量简化，应如何选择坐标系？  建立适当的直角坐标系应遵循两点：①若曲线是轴对称图形，则可选它的对称轴为坐标轴；②曲线上的特殊点，可选作坐标系的原点. 过焦点 F 作准线 l 的垂线交 l 于点 K，启发学生思考回答问题： (1) 如何确定 x 轴（或 y 轴）？（以对称轴为坐标轴） 由抛物线的定义知 KF 是抛物线的对称轴. (2) 如何确定坐标原点？（曲线上的特殊点，可作为坐标系的原点） 因为线段 KF 的中点适合条件——到点 F 的距离等于到直线 l 的距离，所以它在抛物线上，以线段 KF 的中点为坐标原点. (3) 怎样建立坐标系才能使方程的推导简化？ 取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，x 轴与 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系.	通过教师的分步设问，引导学生展示思维过程，让学生体会分析解决问题的方法.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新
课
讲
授</td>
<td></td>
<td>
2. 开口向右的抛物线标准方程：（教师引导得出结论）——将几何问题用代数方法表示.
<table>
<tr><th>步骤</th><th>推导过程</th><th>引导及分析
（电脑给出提示或注意）</th></tr>
<tr><td rowspan="2">（1）建立坐标系</td><td>建立直角坐标系，取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，x 轴与直线 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系.</td><td>焦点 F 即定点，准线 l 即定直线，直线 l 不过定点 F.</td></tr>
<tr><td>设焦点到准线的距离 $|KF|=p(p>0)$（p 为焦参数），那么，焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$.
准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.</td><td>根据已知给出曲线上特殊点的坐标和已知直线的方程.</td></tr>
<tr><td>（2）写出曲线上的点 M 所要适合的条件.</td><td>设抛物线上的任一点 $M(x,\ y)$，点 M 到直线 l 的距离为 d.
根据定义，抛物线就是集合 $P=\{M\,|\,|MF|=d\}$.</td><td>①动点 M 到定点 F 的距离 $|MF|$.
②动点 M 到定直线 l 的距离 d.
③平面内到一定点和到一条不过此点的定直线的距离 $|MF|=d$.</td></tr>
<tr><td>（3）用点 M 的坐标表示这个条件，得出方程 $f(x,\ y)=0$.</td><td>因为 $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$，
$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$
$=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$.</td><td>①根据两点间的距离公式：动点 $M(x,\ y)$ 与定点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 的距离 $|MF|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；
②点 $M(x,\ y)$ 到直线 l：$x+\frac{p}{2}=0$ 的距离 d 怎样表示是一个难点.</td></tr>
<tr><td>（4）把方程 $f(x,\ y)=0$ 化简.</td><td>两边平方，化简得
$y^2=2px\ (p>0)$.（1）</td><td>即抛物线的标准方程.
如果选取的坐标系使得抛物线的顶点在原点，对称轴和一个坐标轴重合，这样推导出来的抛物线方程称为标准方程.</td></tr>
<tr><td>（5）证明化简后的方程就是所求的曲线方程.</td><td>方程（1）的推导过程表明，抛物线上的点的坐标都是这个方程的解. 还可以证明，以方程（1）的解为坐标的点都在此抛物线上.</td><td>因为方程化简的每一步都同解，最后一步证明可以省略.</td></tr>
</table>
</td>
<td>如何建系体现最优化方案，通过严谨细致的分析展现知识的发生、发展形成的过程，进一步加强过程性教学.</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲授		3. 标准方程 $y^2=2px(p>0)$ 的特点：（用代数方法——几何问题）；p 的几何意义：焦点到准线的距离. 焦点：$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 在 x 轴的正半轴上； 准线：$x=-\frac{p}{2}$； 顶点：坐标原点 (0，0)； 开口方向：向右.	可由教师引导提问，学生回答. 总结完善知识结构体系.
巩固练习		根据抛物线的标准方程，说出抛物线的焦点坐标和准线方程： $y^2=8$，$y^2=6x$，$y^2=\frac{2}{5}x$，$y^2=3.2x$. 学生自己完成，教师课堂指导.	加深对抛物线的标准方程中 p 的几何意义的理解.
解题反思	p 值的意义（重点）： (1) 表示焦点到准线的距离； (2) $p>0$ 为常数； (3) p 值等于一次项系数绝对值的一半； (4) 准线与对称轴垂直，垂足与焦点关于原点对称，它们与原点的距离等于一次项系数的绝对值的 $\frac{1}{4}$，即 $\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$.	教师启发，学生总结交流，教师归纳纠正.	在解题教学中，根据知识内容形成规律方法.
例题讲解	教材第 61 页，例 1，例 2.	由于题目都比较简单，可由学生独立完成. 也可以让两位同学到黑板上板演. 最后总结：要确定抛物线的标准方程，关键在于确定 p 值及抛物线开口方向.	例 1 为已知焦点坐标求标准方程、准线方程. 例 2 为已知焦点到准线的距离求标准方程、焦点坐标、准线方程. 巩固所学知识、规范解题步骤.
课堂练习	教材第 62 页练习 A 1，2，3，4 题.	学生完成，教师指导： 问题一：解练习 A 3 题，用的是什么方法? 问题二：练习 A 4 题，该题目从已知条件上分析，还有其他情况吗？学生回答，师生交流.	巩固本节课所学知识，培养学生认真思考，善于总结完善的良好学习品质.
归纳总结	(1) 抛物线的定义，焦点、准线. (2) 参数 p($p>0$，焦点到准线的距离). (3) 抛物线的四种标准方程. (4) 解题.	师生共同总结、交流、完善.	帮助学生总结知识方法，便于系统掌握.
布置作业	教材第 62 页练习 B 1，2 题.	学生课下独立完成，教师进行批改.	进一步巩固本节所学知识方法.

V 习题参考答案与提示

练习 A（第 34 页）

画图略.

练习 B（第 34 页）

1. (2) $|B_1F_1|+|B_1F_2|=2a$，$|C_1F_1|+|C_1F_2|=2a$；

   (3) 是椭圆，到两定点的距离之和等于定长的点的轨迹.

2. 以 BC 的中点为原点，BC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则顶点 A 的轨迹为扣除在 x 轴上两点的椭圆.

练习 A（第 37 页）

1. (1) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$；　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$；　(3) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$；

   (4) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{25}=1$；　(5) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

2. 6.

3. (1) $(4, 0)$，$(-4, 0)$；　(2) $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$；　(3) $\left(0, \dfrac{9}{5}\right)$，$\left(0, -\dfrac{9}{5}\right)$；

   (4) $\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right)$，$\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

练习 B（第 38 页）

1. ①知 $a=5$；　② 知 $b=3$；　③椭圆上一点坐标.

2. 设点 $A(x, y)$，则：$\dfrac{y}{x-6}\cdot\dfrac{y}{x+6}=-\dfrac{4}{9}\Rightarrow\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ $(x\neq\pm6)$，此点的轨迹是部分椭圆.

练习 A（第 42 页）

1. (1) $2a=18$，$2b=6$，$e=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$F_1(-6\sqrt{2}, 0)$，$F_2(6\sqrt{2}, 0)$，

   $A_1(-9, 0)$，$A_2(9, 0)$，$B_1(0, -3)$，$B_2(0, 3)$；

   (2) $2a=10$，$2b=6$，$e=\dfrac{4}{5}$，$F_1(0, -4)$，$F_2(0, 4)$，

   $A_1(0, -5)$，$A_2(0, 5)$，$B_1(-3, 0)$，$B_2(3, 0)$；

   (3) $2a=10$，$2b=\dfrac{5}{2}$，$e=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$F_1\left(0, -\dfrac{5\sqrt{15}}{4}\right)$，$F_2\left(0, \dfrac{5\sqrt{15}}{4}\right)$，

$A_1(0,\ -5)$，$A_2(0,\ 5)$，$B_1(-\frac{5}{4},\ 0)$，$B_2(\frac{5}{4},\ 0)$；

（4）$2a=1$，$2b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$e=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{10},\ 0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{10},\ 0\right)$，

$A_1\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，$A_2\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$B_1\left(0,\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$B_2\left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

2. （1）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；（2）$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$；（3）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

（4）$\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$.

3. （1）$\left(3,\ \frac{8}{5}\right)$；（2）$(0,\ 2)$，$\left(-\frac{48}{37},\ -\frac{70}{37}\right)$.

练习 B（第 43 页）

1. 略.

2. 建立直角坐标系，使 A、B、F_2 在 x 轴上，F_2 为椭圆的右焦点，设椭圆标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，则

$a-c=|OA|-|OF_2|=|F_2A|$；

$a+c=|OB|+|OF_2|=|F_2B|$.

解得：$a=7\ 782.5$，$c=972.5$.

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)\ (a-c)}=\sqrt{8\ 755\times 6\ 810}=7\ 721.5$，

$\frac{x^2}{7\ 782.5^2}+\frac{y^2}{7\ 721.5^2}=1$.

习题 2－1A（第 43 页）

1. （1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$；（2）$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；（3）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$；

（4）$\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 或 $x^2+\frac{y^2}{16}=1$；（5）$\frac{x^2}{136}+\frac{25y^2}{136}=1$ 或 $\frac{25x^2}{904}+\frac{y^2}{904}=1$.

2. （1）$2a=8$，$2b=5$，$F_1\left(0,\ -\frac{\sqrt{39}}{2}\right)$，$F_2\left(0,\ \frac{\sqrt{39}}{2}\right)$，

$A_1(0,\ -4)$，$A_2(0,\ 4)$，$B_1\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$，$B_2\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$；

（2）$2a=\frac{2}{m}$，$2b=\frac{1}{m}$，$F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2m},\ 0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2m},\ 0\right)$，

$A_1\left(-\frac{1}{m},\ 0\right)$，$A_2\left(\frac{1}{m},\ 0\right)$，$B_1\left(0,\ -\frac{1}{2m}\right)$，$B_2\left(0,\ \frac{1}{2m}\right)$.

3. $k=1$.

4. 若 $\angle PF_1F_2$ 为直角，则点 P 坐标为：$\left(-\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(-\sqrt{5},\ -\frac{4}{3}\right)$；

若$\angle PF_2F_1$为直角，则点P坐标为：$\left(\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right)$或$\left(\sqrt{5},\ -\frac{4}{3}\right)$；

若$\angle F_1PF_2$为直角，则点P坐标为：

$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\ -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

5. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$，离心率为$e=\frac{1}{2}$.

6. $\frac{x^2}{3.45\times10^{17}}+\frac{y^2}{3.31\times10^{17}}=1$.

7. 约为 33.26 m.

习题 2－1B（第 44 页）

1. 原方程化为：$\frac{x^2}{\frac{5m+12}{3m+7}}+\frac{y^2}{\frac{5m+12}{3m+4}}=1$，条件：$\begin{cases}\frac{5m+12}{3m+7}>0\\ \frac{5m+12}{3m+4}>0\end{cases}\Rightarrow m>-\frac{4}{3}$或$m<-\frac{12}{5}$.

2. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.（提示：设右焦点坐标为$(c,\ 0)$，根据点到直线的距离公式可求得$c=\sqrt{2}$，由顶点$B(0,\ -1)$得$b=1$，所以$a=\sqrt{3}$.）

3. 解：

$|PF_1|+|PA|=(2a-|PF_2|)+|PA|=2a-(|PF_2|-|PA|)\geqslant 2a-|AF_2|=6-\sqrt{2}$.

（当且仅当F_2、P、A共线时取等号.）

4. 解：在$\triangle F_1PF_2$中使用余弦定理

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|},$$

可得$|PF_1||PF_2|=\frac{20}{3}$.

再由正弦定理可得$\triangle F_1PF_2$的面积为

$$\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

练习 A（第 49 页）

1. (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　(2) $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$；　(3) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$；

(4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$或$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$.

2. (1) $F_1(0,\ -6)$，$F_2(0,\ 6)$；

(2) 点P与焦点F_2距离为 16.

练习 B（第 49 页）

1. 由条件可求点 P 的坐标为（$2\sqrt{7}$，3）或（$2\sqrt{7}$，-3），则点 P 与左焦点的距离为：11.

2. 椭圆的焦点坐标为：$(-2\sqrt{3},\ 0)$，$(2\sqrt{3},\ 0)$，因此 $2m=12\Rightarrow m=6$.

练习 A（第 50 页）

1. $-2<m<-1$，焦点（±1，0）.

2. 解：$|PB|-|PA|=340\times4=1\ 360$，

即可看为：$2a=1\ 360\Rightarrow a=680$，

$2c=1\ 400\Rightarrow c=700$.

得 $b^2=27\ 600$.

因此方程为：$\dfrac{x^2}{46\ 2400}-\dfrac{y^2}{27\ 600}=1$.

练习 B（第 50 页）

1. $m=1$.

2. 解：由 $\begin{cases}|AF_2|-|AF_1|=2a\\ |BF_2|-|BF_1|=2a\end{cases}$

两式相加得：$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=4a$，

因此△ABF_2 的周长为 $32+2d$.

练习 A（第 54 页）

1. (1) $2a=4$，$2b=4$，$F_1(-2\sqrt{2},\ 0)$，$F_2(2\sqrt{2},\ 0)$，$e=\sqrt{2}$，$y=\pm x$；

(2) $2a=18$，$2b=6$，$F_1(0,\ -3\sqrt{10})$，$F_2(0,\ 3\sqrt{10})$，$e=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，$y=\pm3x$；

(3) $2a=8$，$2b=10$，$F_1(-\sqrt{41},\ 0)$，$F_2(\sqrt{41},\ 0)$，$e=\dfrac{\sqrt{41}}{4}$，$y=\pm\dfrac{5}{4}x$；

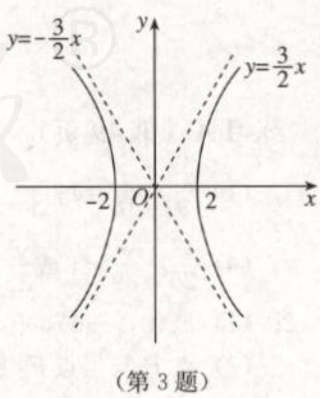
(4) $2a=20$，$2b=12$，$F_1(-2\sqrt{34},\ 0)$，$F_2(2\sqrt{34},\ 0)$，$e=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$，$y=\pm\dfrac{3}{5}x$.

2. 解：由焦点坐标得：$c=5$ 且在 x 轴上

由 $3x-4y=0$ 可得：$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$，

由 $\begin{cases}a^2+b^2=25,\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=16,\\ b^2=9.\end{cases}$

因此双曲线标准方程为：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，$e=\dfrac{5}{4}$.



（第 3 题）

3. 渐近线方程为：$y=\pm\frac{3}{2}x$.

练习 B（第 54 页）

1. (1) $\frac{4y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$；(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 或 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$.

2. 解：设点 P 为 (x, y)，则有两条渐近线的距离乘积值 $A=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}$.

因为点 P 在双曲线上，由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

所以 $A=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为定值. 将 $a=2$，$b=6$ 代入上式得：$A=\frac{18}{5}$.

习题 2－2A（第 55 页）

1. (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；(2) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$；(3) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$；

(4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$；(5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{44}-\frac{x^2}{176}=1$.

2. (1) $F_1(-1, 0)$，$F_2(1, 0)$；(2) 2.

3. (1) $2a=\frac{8}{3}$，$2b=4$，$F_1\left(-\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0\right)$，$F_2\left(\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0\right)$，$A_1\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$，

$A_2\left(\frac{4}{3}, 0\right)$，$y=\pm\frac{3}{2}x$.

(2) $2a=4$，$2b=2\sqrt{m}$，$F_1(-\sqrt{4+m}, 0)$，$F_2(\sqrt{4+m}, 0)$，$A_1(-2, 0)$，

$A_2(2, 0)$，$y=\pm\frac{\sqrt{m}}{2}x$.

4. (1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{9y^2}{25a^2}=1(a\neq 0)$ 或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{9x^2}{25b^2}=1(b\neq 0)$；

(2) 双曲线过点 $P(1, 3)$，代入上式得：$\frac{25y^2}{216}-\frac{9x^2}{216}=1$.

5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. 解：$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{2}$，由 $(|AF_1|-|AF_2|)^2=20$，　①

$|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1||AF_2|\cos A=32$，　②

$\frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\sin A=2\sqrt{2}$.　③

由①②③可得：$\cos A=-\frac{1}{17}$，

因此 $A=\arccos\left(-\frac{1}{17}\right)$.

习题 2－2B（第 56 页）

1. $\begin{cases}m^2-1>0\\ m-2<0\end{cases}\Rightarrow m<-1$ 或 $1<m<2$.

2. 焦点坐标为：$(0, -4\sqrt{3})$，$(0, 4\sqrt{3})$，即 $c=4\sqrt{3}$，

   又因为 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a^2+b^2=c^2=48$，

   解得：$a^2=12$，$b^2=36$，所以双曲线方程为 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{36}=1$.

3. 设点 P 坐标为 (x, y)，则 $\frac{y}{x+6}\cdot\frac{y}{x-6}=\frac{4}{9}$，得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ $(x\neq\pm6)$.

4. 设点 P 的坐标为 (x, y)，则 $A(3, 0)$，$B(-3, 0)$，$C(-5, 2\sqrt{3})$.
   因为 $|PB|=|PC|$，所以点 P 在 BC 的中垂线上.
   因为 $K_{BC}=-\sqrt{3}$，BC 中点 $D(-4, \sqrt{3})$，

   所以直线 PD 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$. ①

   又因为 $|PB|-|PA|=4$，
   所以点 P 必在以 A、B 为焦点的双曲线的右支上，

   双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant0)$. ②

   联立①②，解得 $x=8$ 或 $x=-\frac{32}{11}$（舍去），得 $y=5\sqrt{3}$，因此 P 点坐标为 $(8, 5\sqrt{3})$.

练习 A（第 58 页）

1. (1) $y^2=8x$；(2) $y^2=6x$.
2. (1) $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$，$x=-\frac{5}{2}$；(2) $F\left(\frac{a}{4}, 0\right)$，$x=-\frac{a}{4}$.
3. $y^2=8x$.
4. $y^2=24x$.

练习 B（第 59 页）

1. （解法一）设点 $M(x, y)$，由题意知点 M 在 $x=-6$ 的右侧，
   因此 $\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+2=|x+6|$.
   化简整理得 $y^2=16x$.
   （解法二）由题意知点 M 到直线 $x+4=0$ 的距离与到点 $(4, 0)$ 的距离相等，M 点的轨迹是以 $(4, 0)$ 为焦点，$x+4=0$ 为准线的抛物线，因此 $p=8$，其方程为 $y^2=16x$.

2. 设 M 点坐标为：$\left(\frac{t^2}{6},\ t\right)(t\in\mathbf{R})$，

$$|MA|^2=\left(\frac{t^2}{6}-4\right)^2+t^2$$
$$=\frac{1}{36}t^4-\frac{1}{3}t^2+16$$
$$=\frac{1}{36}(t^2-6)^2+15.$$

因此当 $t^2=6$ 时，$|MA|_{\min}=\sqrt{15}$，M 点坐标为 $(1,\ \pm\sqrt{6})$.

练习 A（第 61 页）

1. 图象略. 开口的大小随 x 的系数增大而增大.
2. 解：$\triangle OAB$ 为正三角形且 A，B 在抛物线上，A，B 关于 x 轴对称.

   设 $A(6t^2,\ 6t)$，则 $B(6t^2,\ -6t)$，由题意得：$|OA|=|OB|=|AB|$，$t=\pm\sqrt{3}$，因此边长为 $12\sqrt{3}$.

练习 B（第 61 页）

1. 设 l_{AB}：$x=a(a>0)$，则 A，B 的纵坐标为 $y_1=2\sqrt{a}$ 或 $y_2=-2\sqrt{a}$，

   $|AB|=|y_1-y_2|=4\sqrt{a}=4\sqrt{3}$，

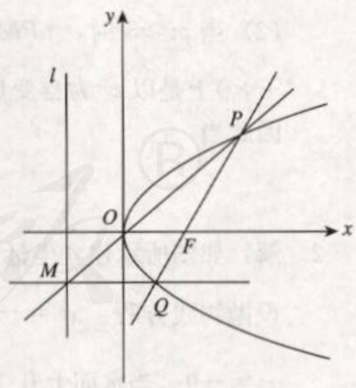
   因此 $a=3$，即 $x=3$.
2. **证明**：（证法一）抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，设过点 F 的直线方程为 PQ：$x=my+\frac{p}{2}$，代入抛物线方程得：$y^2-2pmy-p^2=0$.

   设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，得 $y_1y_2=-p^2$.

   设点 M 坐标为：$\left(-\frac{p}{2},\ y'\right)$，由 M，O，P 三点共线，$\frac{y'}{-\frac{p}{2}}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1}$，得 $y'=-\frac{p^2}{y_1}$，即 $M\left(-\frac{p}{2},\ -\frac{p^2}{y_1}\right)$.

   又因为 Q 点坐标为 $\left(x_2,\ -\frac{p^2}{y_1}\right)$，$K_{MQ}=0$，

   所以 $MQ\,/\!/$ 对称轴 x.



（第 2 题）

   （证法二）设抛物线方程为：$y^2=2px$，则过抛物线焦点的直线为：$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)(k\neq0)$.

   先求交点 P、Q 的坐标，解方程组 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\end{cases}$ 得 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ 的坐标：

$$x_1=\frac{p(k^2+2-2\sqrt{k^2+1})}{2k^2},\ y_1=\frac{p(1-\sqrt{k^2+1})}{k};$$

$$x_2=\frac{p(k^2+2+2\sqrt{k^2+1})}{2k^2},\ y_2=\frac{p(1+\sqrt{k^2+1})}{k}.$$

再解交点 M 的坐标（x_3，y_3），直线 OP 的方程为 $y=\frac{2k(1-\sqrt{k^2+1})}{k^2+2-2\sqrt{k^2+1}}x$，而准线方程为：$x=-\frac{p}{2}$，则 $x_3=-\frac{p}{2}$，代入上式得 $y_3=\frac{p(1+\sqrt{k^2+1})}{k}$.

因为 $y_3=y_2$，所以直线 $MQ//$抛物线对称轴.

练习 A（第 63 页）

1. (1) $F\left(\frac{1}{8},\ 0\right)$，$x=-\frac{1}{8}$；(2) $F(0,\ 1)$，$y=-1$；(3) $F(0,\ -3)$，$y=3$；(4) $F(-2,\ 0)$，$x=2$.
2. (1) $x^2=16y$；(2) $y^2=-8x$；(3) $x^2=-12y$；(4) $x^2=-y$.
3. 解：由抛物线定义知：准线方程为 $y=2$，即 $p=4$，抛物线方程为 $x^2=-8y$，$F(0,\ -2)$，$y=-2$,将点 $P(m,\ -3)$ 代入方程得：$m=\pm 2\sqrt{6}$.

练习 B（第 64 页）

1. 解：设 P 点坐标为（$10t^2$，$10t$）（$t\in\mathbf{R}$），

$$\begin{aligned}|PM|^2&=(10t^2-m)^2+(10t-0)^2\\&=100t^4+(100-20m)t^2+m^2\\&=100\left(t^2-\frac{m-5}{10}\right)^2+10m-25.\end{aligned}$$

(1) 当 $m<5$ 时，$|PM|^2$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上是以 t^2 为自变量的增函数，当 $t^2=0$ 时，$|PM|_{\min}=|m|$；

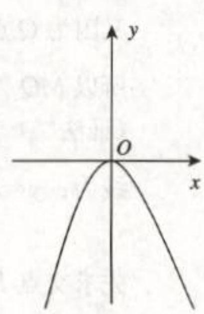
(2) 当 $m\geqslant 5$ 时，$|PM|^2$ 在 $\left[0,\ \frac{m-5}{10}\right]$ 上是以 t^2 为自变量的减函数，$|PM|^2$在 $\left[\frac{m-5}{10},\ +\infty\right)$上是以 t^2 为自变量的增函数，

因此当

$$t^2=\frac{m-5}{10}\text{时，}|PM|_{\min}=\sqrt{10m-25}.$$

2. 解：如图所示建立坐标系.

设抛物线方程：$x^2=-2py$，过点（6，-4）. 得 $p=\frac{9}{2}$，抛物线方程为 $x^2=-9y$,当水面上升 1 m 时，即：$y=-3$ 时，此时 $x=\pm 3\sqrt{3}$，因此水面宽为 $6\sqrt{3}=10.4$ m.



（第 2 题）

习题 2－3A（第 64 页）

1. (1) $y^2=8x$；(2) $y^2=x$ 或 $x^2=8y$.

2. 解：（解法一）设动点坐标为（x，y），由题意知

$\sqrt{(x-0)^2+(y+4)^2}-1=|y-3|$，

化简整理得：$x^2=-16y$.

（解法二）由题意知：动点到 F（0，-4）的距离比到 $y=3$ 的距离大1，即与到直线 $y=4$ 的距离相等.

由抛物线定义知，动点的轨迹为抛物线，$p=8$，其方程为：$x^2=-16y$.

3. （1）$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$x=-\frac{3}{2}$；（2）$\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$，$y=\frac{5}{2}$；（3）$\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$，$y=-\frac{2}{3}$；

（4）$\left(-\frac{a}{4},\ 0\right)$，$x=\frac{a}{4}$.

4. 解：$y^2=-12x$ 的准线方程为 $x=3$，由题意知 P 点到 $x=3$ 的距离等于 9，$x_p=-6$，$y=\pm 6\sqrt{2}$，因此 $P(-6,\ \pm 6\sqrt{2})$.

5. 解：双曲线$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{16}=1$的中心为（0，0），左顶点为（$-2\sqrt{3}$，0），得 $p=4\sqrt{3}$，因此抛物线的方程为 $y^2=-8\sqrt{3}x$.

6. 解：设直线与圆的两交点为 A，B，

由$\begin{cases}x+y=0,\\x^2+y^2+4y=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$得 A（0，0），B（2，-2），

抛物线方程为顶点在（0，0），且过点（2，-2），

可设方程为 $x^2=-2py$，将（2，-2），代入得 $p=1$，因此抛物线方程为：$x^2=-2y$.

7. $|AB|=5$.

8. $4x+y-3=0$.

习题 2-3B（第 65 页）

1. 解：设动点 M 的坐标为（x，y），由题意知

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=4-y$，

化简整理得：$x^2=-4(y-3)$.

2. 解：设直线方程为 $y=k(x+2)$，则$\begin{cases}y=k(x+2),\\y^2=8x\end{cases}$消去 y，得 $k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$，

当 $k=0$ 时，满足条件；当 $k\neq 0$ 时，$\Delta\geqslant 0$，解得$-1\leqslant k\leqslant 1$.

因此直线 l 的斜率范围为$-1\leqslant k\leqslant 1$.

3. 解：设抛物线方程为：$x^2=2py$，且抛物线过点 $B\left(\frac{7}{2},\ 0.7\right)$，代入方程得 $p=\frac{35}{4}$，因此抛物线的方程为：$x^2=\frac{35}{2}y$.

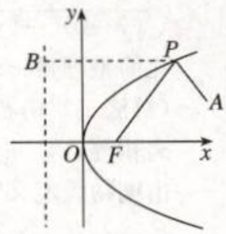
4. 解：设抛物线方程为：$y^2=ax(a\neq 0)$，由$\begin{cases}y=2x+1,\\y^2=ax\end{cases}$消去 y，得 $4x^2+(4-a)x+1=0$.

由弦长公式得：$\sqrt{15}=\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{4-a}{4}\right)^2-4\times\frac{1}{4}}$，解得 $a=-4$ 或 $a=12$.

因此抛物线方程：$y^2=-4x$ 或 $y^2=12x$.

5. (1) **解**：由题意知：$|PF|=|PB|$，

得 $|PF|+|PA|=|PB|+|PA|$，当 B、P、A 三点共线时，$|PF|+|PA|$有最小值，因此 $y_p=3$，$x_p=\frac{9}{4}$，点 P 的坐标为$\left(\frac{9}{4}，3\right)$.



（第 5 题）

(2) 设 P 点坐标为：$(t^2，2t)(t\in\mathbf{R})$，则

$|PM|^2=(t^2-m)^2+(2t-0)^2$.

令 $t^2=u(u\geqslant 0)$，

$$|PM|^2=u^2+(4-2m)u+m^2=[u+(2-m)]^2+m^2-(2-m)^2.$$

①当 $m<2$ 时，$|PM|^2$ 在$[0，+\infty)$上为增函数，当 $u=0$ 时，$|PM|_{\min}=m$，此时点 P 的坐标为$(0，0)$；

②当 $m\geqslant 2$ 时，$|PM|^2$ 在 $(-\infty，m-2]$ 上为减函数，$|PM|^2$ 在 $[m-2，+\infty)$ 上为增函数，因此当$u=m-2$ 时，$|PM|_{\min}=2\sqrt{m-1}$，此时 P 点坐标为 $(m-2，\pm 2\sqrt{m-2})$.

6. **解**：(1) 设抛物线方程为 $x^2=-2py$，将点 $(1.5，-0.45)$ 的坐标代入方程，得 $p=\frac{5}{2}$，因此抛物线方程为 $x^2=-5y$；

(2) 2.25 m.

巩固与提高（第 67 页）

1. (1) C；(2) D；(3) A；(4) D.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$；(3) $4a$；(4) $(0，0)$.

3. **解**：双曲线焦点：$(4，0)$，$(-4，0)$. 设椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，点 P 在椭圆上，与两焦点的距离和为：$2a=16$，因此 $a^2=64$，$b^2=48$.

椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

4. **解**：$c=4$，$e=\frac{4}{5}$，双曲线的离心率 $e=\frac{14}{5}-\frac{4}{5}=2$，得 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，因此双曲线方程：$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$.

5. **解**：椭圆的左顶点 $A(-2，0)$，设过 A 点的一条边所在直线方程：$y=k(x+2)$，则过 A 点的另一边为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$，由弦长公式得 $|AB|^2=\frac{16(1+k^2)}{(2k^2+1)^2}$，$|AC|^2=\frac{16k^2(1+k^2)}{(k^2+2)^2}$.

又因为$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 $|AB|^2=|AC|^2$，得 $(k^2-1)(4k^4+7k^2+4)=0$，

解得 $k^2=1$，$BC^2=AB^2+AC^2=\frac{64}{9}$，因此斜边 BC 长为$\frac{8}{3}$.

6. $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

7. **解**：以 AB 所在的直线为 x 轴，中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系，在矩形内取一点 M，设其坐标为 (x, y)，使 $|AM|+|AP|=|BM|+|BP|$，则 $|AM|-|BM|=|BP|-|AP|=50$，因此点 M 的轨迹是以 A，B 为焦点，实轴长为 50 的双曲线的右支的一部分，其方程为 $\frac{x^2}{625}-\frac{y^2}{4\,275}=1$. 图象左侧部分从 AP 运，右侧部分从 BP 运，图象上的部分两条路线都可以.

自测与评估（第 68 页）

1. (1) $2\sqrt{5}$；(2) $x^2=\sqrt{2}y$ 或 $y^2=-4x$；(3) $(5, 0)$，$(-5, 0)$；(4) $2(a+b)$.
2. 点 P 坐标为 $(\pm 3, \pm 4)$.
3. $f(x)=|x-3|$.
4. $\dfrac{x^2}{\frac{32}{5}}-\dfrac{y^2}{\frac{18}{5}}=1$.
5. (1) $k<4$，$(0, \pm\sqrt{5})$；(2) $4<k<9$，$(0, \pm\sqrt{5})$.
6. $d_{\max}=a+c=1.528\,8\times 10^8$，$d_{\min}=a-c=1.471\,2\times 10^8$.

Ⅵ 反馈与评价

（一）知识与方法测试

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

1. 抛物线 $y=4ax^2(a\neq 0)$ 的焦点坐标为（　　）.

A. $\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$　　B. $\left(0, \frac{1}{16a}\right)$　　C. $\left(0, -\frac{1}{16a}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{16a}, 0\right)$

2. 方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 k 的取值范围是（　　）.

A. $(0, +\infty)$　　B. $(0, 2)$　　C. $(1, +\infty)$　　D. $(0, 1)$

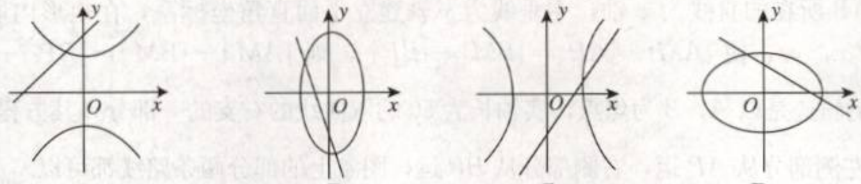
3. 双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 共焦点，且一条渐近线方程是 $\sqrt{3}x-y=0$，则此双曲线方程为（　　）.

A. $y^2-\frac{x^2}{3}=1$　　B. $\frac{y^2}{3}-x^2=1$　　C. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

4. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的弦 AB，则 $|AB|$ 的值为（　　）.

A. $\frac{8}{3}\sqrt{7}$　　B. $\frac{16}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}\sqrt{7}$

5. $a\neq 0$，$b\neq 0$，则方程 $ax-y+b=0$ 和 $bx^2+ay^2=ab$ 所表示的曲线可能是（　　）.



A　　B　　C　　D

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，m>b>0)$的离心率互为倒数，那么以$a$，$b$，$m$为边长的三角形一定是（　　）.

A. 锐角三角形　B. 直角三角形　C. 钝角三角形　D. 等腰三角形

7. 已知P是椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$上一点，$F_1$和$F_2$是焦点，若$\angle F_1PF_2=30^\circ$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为（　　）.

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　B. $4(2-\sqrt{3})$　C. $4(2+\sqrt{3})$　D. 4

8. 双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$与直线$y=kx+1$有惟一公共点，则k值为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\pm\frac{1}{2}$

9. 若椭圆的对称轴在坐标轴上，短轴的一个端点与两个焦点组成一个正三角形，焦点到椭圆上点的最短距离为$\sqrt{3}$，这个椭圆方程为（　　）.

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$　D. 以上都不对

10. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$A$，$F$分别是它的左顶点和右焦点，设$B$点坐标为$(0，b)$，则$\angle ABF$等于（　　）.

A. 45°　B. 60°　C. 90°　D. 120°

二、填空题（每小题6分，共24分）

11. 渐近线是$y=\pm\frac{1}{2}x$，且过点$(1，3)$的双曲线方程是____________.

12. 抛物线的焦点为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的左焦点，顶点在椭圆中心，则抛物线方程为____________.

13. 设圆过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的一个顶点和一个焦点，圆心在此双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离为____________.

14. 过$(-1，2)$作直线与抛物线$y^2=4x$只有一个公共点，则该直线的斜率为____________.

三、解答题（36分）

15. 点A在第一象限，点B在第四象限，线段AB过x轴上一定点$M(m，0)(m>0)$，且A、B两

点到 x 轴的距离之积为 $2m$，以 x 轴为对称轴，过 O（原点）、A、B 三点作抛物线 C，求 C 的方程.（12 分）

16. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，若 $PF_1\perp PF_2$，求点 P 到 x 轴的距离.（12 分）

17. 设 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上的一点，已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点，且 $|PF_1|>|PF_2|$，求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.（12 分）

知识与方法测试参考答案

一、1. B；2. D；3. C；4. B；5. C；6. B；7. B；8. D；9. C；10. C.

二、11. $\frac{4y^2}{35}-\frac{x^2}{35}=1$；12. $y^2=-4\sqrt{5}x$；13. $\frac{16}{3}$；14. 0，$-1\pm\sqrt{2}$.

三、

15. **解**：由题意设抛物线方程为 $y^2=ax(a>0)$，

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，直线 AB 方程为 $x=ty+m$，

由 $\begin{cases} x=ty+m, \\ y^2-ax, \end{cases}$ 得 $y^2-aty-am=0$.

因此 $|y_1y_2|=am=2m$，$a=2$，抛物线方程为 $y^2=2x$.

16. **解**：双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点为 $F_1(-5,\ 0)$，$F_2(5,\ 0)$，设点 $P(x,\ y)$，

则 $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1, \\ \frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=-1. \end{cases}$ 因此 $y^2=\frac{256}{25}$，$|y|=\frac{16}{5}$.

即点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$.

17. **解**：由已知得 $|PF_1|+|PF_2|=6$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$.

根据直角的不同位置，分两种情况：

若 $\angle PF_2F_1=90°$，则 $|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，即 $|PF_1|^2=(6-|PF_1|)^2+20$，

解得 $|PF_1|=\frac{14}{3}$，$|PF_2|=\frac{4}{3}$，因此 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$.

若 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$，即 $20=|PF_1|^2+(6-|PF_1|)^2$，

解得 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，因此 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$.

（二）评价建议

1. 笔试评价：可针对每一节内容进行一次小测验，在学完本章内容后进行一次综合性测试. 应该注重考查知识的理解和应用，体现课程标准的要求，不应该追求区分度，不宜过多考查记忆性的内容，其中一部分笔试可逐步采取开卷的形式，一方面避免引导学生死记硬背，另一方面也可以减轻学生的心理负担.

2. 在学习椭圆、双曲线、抛物线的定义时，要充分利用教科书中提供的课件，引导学生实践探究. 教师要用记录卡片的形式记录学生学习探究的情况，如遇到疑难问题应及时解决，在探究活动中最出色的表现，被否定过的观点，通过努力最后解决的难题，从中了解学生对知识与技能的学习情况.

3. 在学习了圆锥曲线的一种形式的标准方程和几何性质后，建议教师组织学生以小组讨论形式得出另外其他形式的标准方程和相应的几何性质，在分组讨论的过程中，应该记录学生在讨论活动中的表现和进步等情况.

4. 圆锥曲线与实际生活有着密切的联系，在学习过程中，要让学生提前搜集与圆锥曲线有关的资料，了解它们在生产和科学技术中的应用，教师要引导学生在学习档案中收录一些重要资料. 在学习本章后，教师要指导学生结合搜集的材料写出有关的小论文，并进行评选，选出优秀的论文在班级中进行交流.

第三章

导数及其应用

Ⅰ 课程目标

一、知识与技能目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由函数的平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道函数的瞬时变化率就是导数.

2. 理解导数的概念及其符号记法，体会导数的思想和内涵.

3. 通过函数图象，直观地理解导数的几何意义，并能应用其研究函数的单调性和极值问题.

4. 能根据导数定义求函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$ 的导数. 能利用公式求简单函数的导数.

5. 利用导数的知识解决实际生活中的最优化问题.

二、过程与方法目标

1. 通过实例，提高对解决具体问题的过程与步骤进行分析的能力.

2. 通过实例，体会无限细分，以直代曲的极限思想.

3. 利用导数定义推导简单函数的导数公式，类推一般多项式函数的导数公式，体会由特殊到一般的思想.

4. 利用导数，解决实际问题，体会建模思想.

三、情感、态度与价值观目标

1. 通过具体实例，认识导数的工具性及其与实际问题的联系，感受和体会导数在解决实际问题中

的作用，提高学生学习兴趣.

2. 感受导数在解题中的作用和威力，自觉形成将数学理论与实际问题相结合的思想.

3. 在解题过程中，逐步养成扎实严格、实事求是的科学态度.

Ⅱ　教材分析

一、编写特色

1. 要让学生了解微积分是研究各种科学的工具，是学生终身学习数学的重要基础. 在中学数学中，微积分是研究初等函数和几何问题最有效的工具：平均值、单调性、极值、最值、求长度、面积、体积等，树立科学的世界观.

2. 通过直观说理学习导数及其运算. 通过平均速度和瞬时速度，平均变化率和瞬时变化率，割线与切线斜率的计算来理解导数的概念.

3. 通过数值的近似计算理解微积分思想.

4. 通过无穷小的代数运算理解导数的意义. $\Delta y=f'(x)\Delta x$，通过无穷小直角三角形的边角关系理解导数的几何意义.

二、内容结构

1. 内容编排

本章内容编排上分为两部分：一是导数的概念，二是导数的四则运算及其应用.

本章是先让学生通过大量实例，经历由函数的平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念及其几何意义，然后又通过定义求几个简单函数的导数，从而得到导数公式及其四则运算，最后利用导数的知识解决实际问题.

2. 地位和作用

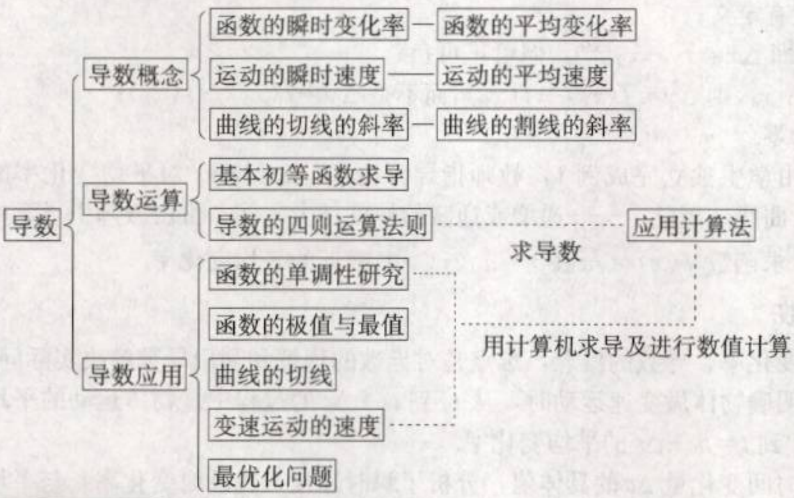
微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用，开创了近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，并有极其丰富的实际背景和广泛的应用. 通过本章学习，学生体会导数的思想及其丰富的内涵，感受导数在解决实际问题中的作用.

3. 重点和难点

本章的重点是导数的运算和利用导数解决实际问题.

本章难点是导数概念的理解.

4. 本章知识结构



三、课时分配

本章教学时间约需 20 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 导数	
3.1.1 函数的平均变化率	2 课时
3.1.2 瞬时速度与导数	2 课时
3.1.3 导数的几何意义	2 课时
3.2 导数的运算	
3.2.1 常数与幂函数的导数	2 课时
3.2.2 导数公式表	1 课时
3.2.3 导数的四则运算法则	2 课时
3.3 导数的应用	
3.3.1 利用导数判断函数的单调性	2 课时
3.3.2 利用导数研究函数的极值	2 课时
3.3.3 导数的实际应用	3 课时
本章小结与复习	2 课时

四、教法与学法建议

3.1 导　　数

3.1.1 函数的平均变化率

1. 本节重点是函数在某一小区间的平均变化率.

2. 教材从人们的实际经历爬山过程中，山坡平缓，则步履轻盈；山坡陡峭，则气喘吁吁出发，引入函数的平均变化率，便于学生理解接受，进一步体现了数学源于生活，又应用于生活.

3. 在定义引入过程中，涉及到必修课学习的向量、倾斜角和斜率的概念，可在教学中适当复习.

4. 在函数的平均变化率的教学中，注意以下几点：

①函数 $f(x)$在 x_0 处及其附近有定义；

②x_1 是 x_0 附近的任意一点，即 $\Delta x=x_1-x_0\neq 0$，但可正可负；

③改变量的对应：若 $\Delta x=x_1-x_0$，则 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$，而不是 $\Delta y=f(x_0)-f(x_1)$；

④平均变化率可正可负也可为零.

5. 在理解定义的基础上，可由学生独立完成例 1，教师指导分析：①Δx 与 x_0 对平均变化率的影响；②平均变化率的绝对值越大，曲线“越陡”——递增或递减的幅度越大. 例 2 可由教师引导学生完成. 另外可以适当补充练习，如：求函数 $f(x)=\sqrt{x}$在 $x=x_0(x_0>0)$附近的平均变化率.

3.1.2 瞬时速度与导数

1. 本节的重点是函数的瞬时变化率、导数的概念，难点是对导数的理解和利用导数解决实际问题.

2. 复习函数的平均变化率，明确物体做变速运动时，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的过程中，物体运动的平均速度，实质就是函数 $s=f(t)$由 $t=t_0$ 到 $t=t_0+\Delta t$ 的平均变化率.

3. 教材通过具体实例和给定时间变化量 Δt 的具体值，分析了瞬时速度（或瞬时变化率）与平均速度（或平均变化率）的关系：瞬时速度是当 Δt 趋近于 0 时，平均速度所趋近的常数值. 这一分析过程体现的是无限逼近思想，又称极限思想.

4. 函数 $f(x)$在 x_0 处的瞬时变化率，通常称做函数 $f(x)$在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 即

$$“\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)” \quad 或 \quad “\Delta x\to 0\text{ 时，}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)”.$$

5. 在讲解导数概念时，需要讲清以下两点：

①“$\Delta x\to 0$”的意义：Δx 与 0 的距离要多近有多近，即 $|\Delta x-0|$ 可以小于给定的任意小的正数，但始终 $\Delta x\neq 0$；

②当 $\Delta x\to 0$ 时，存在一个常数与$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限地接近.

6. $f(x)$在开区间(a,b)内，每一点 x 都是可导的，具体是指：任给 x_0，总有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$. 从而对开区间$(a,b)$内的每一个 x_0 值，都有惟一的函数值 $f'(x_0)$与 x_0 对应，因此在开区间 (a,b) 内，$f'(x)$ 构成一个新函数，此新函数称为导函数，通常简称导数，记作 $f'(x)$或 y'_x. 注意将其与 $f(x)$ 在某点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 区分开来.

7. 教材中的例题，教师要注意帮助学生分析题意. 对于例题，学生一般直接用物理知识来解答，为应用新知识，可引导学生再用导数求解.

3.1.3 导数的几何意义

1. 本节的重点和难点是导数的几何意义：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

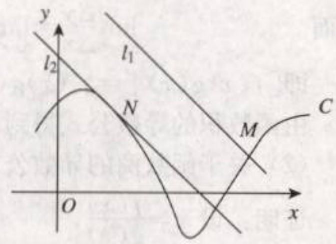
2. 在初中学习过圆的切线：直线和圆有惟一公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫圆的切线，惟一的公共点叫切点.

圆是一种特殊的曲线. 能否将圆的切线推广为一般曲线的切线：直线与曲线有惟一公共点时，把直线叫曲线过该点的切线. 显然这种推广是不妥当的.

如图所示的曲线 C，直线 l_1 虽然与曲线 C 有惟一公共点 M，但不能说直线 l_1 与曲线 C 相切；而直线 l_2 尽管与曲线 C 有不止一个公共点，我们还是说直线 l_2 是曲线 C 在点 N 处的切线，因此，对于一般曲线，必

须重新寻求曲线切线的定义.

3. 曲线 $y=f(x)$ 的割线 AB 的斜率是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的平均变化率，当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的最终位置为直线 AD，即曲线在点 A 的切线，即用割线的极限位置上的直线来定义切线（有条件的学校，可借助多媒体动态演示上述变化）. 故当 $\Delta x \to 0$ 时割线 AB 的斜率趋向于过点 A 的切线的斜率.



4. 在理解导数的几何意义的基础上，求简单曲线在某点的切线斜率和切线方程.

3.2 导数的运算

3.2.1 常数与幂函数的导数

1. 本节重点是常数函数、幂函数的导数及其应用，难点是由常见幂函数的求导公式发现规律，得到幂函数的求导公式.

2. 函数 $y=C$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ 的导数，可由学生依据定义独立推导，教师作相应指导.

3. 由几个常见幂函数的导数能否发现幂函数的求导公式，可先让学生思考交流，针对学生实际，教师再做一定的启发引导. 由于学生知识所限，这里不要求证明.

3.2.2 导数公式表

会使用导数公式表，会应用数学软件求函数的导数.

3.2.3 导数的四则运算法则

1. 本节重点是导数的四则运算及其应用，难点是导数的四则运算法则的推导.

2. 两函数和的导数的推导过程如下：

证明：设 $y=f(x)+g(x)$，

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-[f(x)+g(x)]\\ &=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]\\ &=\Delta f+\Delta g,\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=f'(x)+g'(x).$$

3. (1) 关于函数积的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=f(x)g(x)$，

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\ &=f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]\\ &=f(x+\Delta x)\Delta g+g(x)\Delta f,\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

因为 $f(x)$在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续. 于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)\to f(x)$，

从而 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x).$$

即 $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

由函数积的导数公式得到 $[Cf(x)]'=Cf'(x)$，表明在求导时可以把函数的常数因子直接提出来.

（2）关于函数商的导数公式的推导如下：

证明：设 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，

$$\begin{aligned}\Delta y&=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\&=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)},\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

因为 $g(x)$ 在点 x 处可导，所以它在点 x 处连续.

于是当 $\Delta x\to 0$ 时，$g(x+\Delta x)\to g(x)$，从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，

即 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

要求学生牢记四则运算法则，特别是积、商的导数公式不要弄错.

4. 例 1、例 2 是运算法则的直接运用，例 3：$y=\sin 2x$ 是一复合函数，暂不能直接求解，可运用倍角公式化为积的导数求解，例 4：$y=\tan x$ 虽是基本初等函数，但公式表中未给出，可将其用正、余弦函数表示，化为商的导数求解.

3.3 导数的应用

3.3.1 利用导数判断函数的单调性

1. 本节的重点是利用求导的方法判断函数的单调性.

2. 教材从函数图象出发给出了用导数的符号判别函数增减性的方法，比较直观，且容易理解接受.

3. 学生在数学 1 学习函数时，已经知道了单调函数的定义，并会用定义判断或证明函数在给定区间的单调性. 学习本节后，会发现用导数判断函数在给定区间的单调性要简捷得多，也可以求单调区间. 在教学时，要注意从学生的已有知识出发，并引导学生对两种方法进行比较.

4. 函数单调性判别法的证明要用到中值定理，中值定理不属于高中阶段的学习范围，故略去了函数单调性判别法的证明过程.

3.3.2 利用导数研究函数的极值

1. 本节的重点是利用导数知识求函数的极值.

2. 教材给出极大值、极小值、极值、极值点的定义后，借助函数图象，介绍了利用函数的导数求极值和最值的方法.

3. 利用函数的导数求极值时，首先要确定函数的定义区间；其次，为了清楚起见，可用导数为零的点，

将函数的定义区间分成若干小开区间，并列成表格，判断导函数在各个小开区间的符号，如例题.

4. 求函数的最大值和最小值，需要先确定函数的极大值和极小值，因此，函数的极大值和极小值的求法是关键.

5. 注意区分函数的极值和最值：函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的，若有最大值或最小值，则只能有一个；函数的极值是就函数在某一点附近的小区间而言的，在函数的整个定义区间内可能有多个极大值或极小值.

6. 我们所讨论的函数是在闭区间上连续，在开区间内可导的函数. 在闭区间上连续保证有最大值和最小值；在开区间内可导，才能用导数求解.

7. 对于可导函数，某一点是极值点的必要条件是该点的导数值为零；某一点是极值点的充分条件是该点两侧的导数值异号. 另外，应注意：函数的不可导点也可能是极值点，例如函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 是函数的极小值点.

3.3.3 导数的实际应用

1. 本节的重点是利用导数知识解决实际中的最优化问题.

2. 解决最优化问题的关键是建立函数模型，因此需先审清题意，明确常量与变量及其关系，再写出实际问题的函数关系式. 一般来说，对于实际问题还需要注明变量的取值范围.

Ⅲ 拓展资源

一、谈谈微积分学

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着. 因此在数学中引入了变量的概念后，就有可能把运动现象用数学来加以描述了. 由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，一门新的数学分支就继解析几何之后产生了，这就是微积分学. 微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中的最大的一个创造.

微积分学的建立

从微积分成为一门学科来说，是在17世纪. 但是，微分和积分的思想在古代就已经产生了.

公元前3世纪，古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着近代积分学的思想. 作为微分学基础的极限理论，早在古代已有比较清楚的论述. 比如我国的庄周所著的《庄子·天下》中，记有“一尺之捶，日取其半，万世不竭.”三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”这些都是朴素的、也是很典型的极限概念.

到了17世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素. 归结起来，大约有四种主要类型的问题：第一类是研究运动的时候直接出现的，也就是求即时速度的问题. 第二类问题是求曲线的切线的问题. 第三类问题是求函数的最大值和最小值问题. 第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力等问题.

17世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作，例如法国的费尔玛、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格，英国的巴罗、瓦里士，德国的开普勒，意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论，为微积分的创立做出了贡献.

17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作．他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）．

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源．牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的．

牛顿在 1671 年写了《流数法和无穷级数》，这本书直到 1736 年才出版．他在这本书里指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合．他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数．牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度求给定时间内经过的路程（积分法）．

德国的莱布尼茨是一个博学多才的学者．1684 年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献．这篇文章有一个很长而且很古怪的名字：《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》．就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有划时代的意义．它已经含有现代的微分符号和基本微分法则．1686 年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献．他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号，远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响．现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的．

微积分学的创立，极大地推动了数学的发展．过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力．

前面已经提到，一门科学的创立决不是某一个人的业绩，他必定是经过多少人的努力后，在积累了大量成果的基础上，最后由某个人或几个人总结完成的．微积分也是这样．

不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立．英国数学界在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百年．其实，牛顿和莱布尼茨分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的．比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼茨早 10 年左右，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿早 3 年．他们的研究各有长处，也都各有短处．那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论竟从 1699 年始延续了一百多年．应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的．他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊．牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的也不能自圆其说．这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生．直到 19 世纪初，法国科学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论．后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚定基础，才使微积分进一步的发展开来．任何新兴的、具有前途无量的科学成就，都吸引着广大的科学工作者．在微积分的历史上也闪耀着这样的一些明星：瑞士的雅科布·贝努利和他的兄弟约翰·贝努利、欧拉、法国的拉格朗日、科西……

欧氏几何也好，上古和中世纪的代数学也好，都是一种常量数学，微积分才是真正的变量数学，是数学中的大革命．微积分是高等数学的主要分支，不只是局限在解决力学中的变速问题，它驰骋在近代和现代科学技术园地里，建立了数不清的丰功伟绩．

微积分的基本内容

研究函数，从量的方面研究事物运动变化是微积分的基本方法．这种方法叫做数学分析．

本来从广义上说，数学分析包括微积分、函数论等许多分支学科，但是现在一般已习惯于把数学分

析和微积分等同起来，数学分析成了微积分的同义词，一提数学分析就知道是指微积分. 微积分的基本概念和内容包括微分学和积分学. 微分学的主要内容包括：极限理论、导数、微分等. 积分学的主要内容包括：定积分、不定积分等.

微积分是与应用联系着发展起来的. 最初牛顿应用微积分学和微分方程是为了从万有引力定律导出开普勒行星运动三定律. 此后，微积分学极大的推动了数学的发展，同时也极大的推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学以及应用科学各个分支的发展. 并在这些学科中有越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展.

（选自泰祺 MBA 教育网）

二、高中数学新课程中微积分内容与传统内容的区别

高中数学新课程中微积分的内容与传统内容有很大的区别. 首先是从结构上，不再是以往的“数列—数列的极限—函数的极限—函数的连续—导数—导数的应用—不定积分—定积分”这样的顺序，略去了对一般极限的学习. 其次是在内容的选择上，把重点放在导数及其应用上. 对于希望在理工（包括部分经济类）方面发展的学生，相对于希望在人文、社会方面发展的学生来说，提高了导数计算方面的要求，还增加了定积分的背景和微积分基本定理的直观意义等内容. 这是因为导数是微积分的核心概念，变化率的思想在现实世界中随处可见. 再次是在内容的安排上，更加关注微积分的现实背景及其应用、微积分的基本思想、微积分与其他学科的联系.

微积分是人类智慧的最高成就之一. 微积分的方法是数学中一个强有力的工具、精美的范例. 在众多领域和现实社会中有着广泛的应用. 对于辩证思维、崇尚数学的理性精神的培育具有独到的教育意义，等等. 因此，在高中数学课程中设置微积分有其独特的价值和作用. 也正因为如此，迄今为止，无论是发达国家，还是发展中国家，都在中学数学中设置了这一内容. 关键是如何针对中学生的认知水平，改变以往微积分内容的设置模式，设计出既能体现数学本质，又能适合高中学生学习和有利于其未来发展的微积分课程.

由于长期以来受大学微积分课程设置模式的影响，高中数学课程中设置微积分内容始终是“数列—数列的极限—函数的极限—函数的连续—导数—导数的应用—不定积分—定积分”的模式. 事实上是大学微积分的一种缩编和简单下放，对于在中学设置微积分的意义和作用缺乏深入的思考和研究. 这就导致了不容忽视的问题：由于过度关注一般极限的定义，直接影响了对微积分思想方法的认识和理解；由于中学生的认知水平和其他一些原因，教学中大都将微积分作为一种规则来学习，更是影响了对微积分思想方法的认识和理解；课程中缺乏微积分的背景材料、应用问题，以及与现实社会联系的实例，导致了学生学得盲目、学得枯燥乏味，还加重了负担，教师和学生都觉得不受用；到了大学，大学教师还抱怨微积分学习炒了“夹生饭”.

总之，一方面是社会的发展、数学的发展，需要在中学学习微积分，另一方面是中学数学微积分的教与学存在着种种问题. 为此，在反复思考、研究的基础上，新课程在微积分的内容、处理和要求上，都有了很大的变化. 我们期待着在新课程的实施中去认识、实践它，不断地完善它. 通过微积分的学习，真正达到其教育目标，提高现代社会中未来人才应该具备的素质.

三、数学新课程对微积分内容处理的变化

为了更好地体现课程改革“进一步提高未来公民所必需的数学素养，以满足个人发展与社会的需

要”的总目标，针对传统微积分处理方式带来的一些问题.

新课程对微积分的处理有了很大的变化，主要表现在：

突出概念的本质. 例如：不是在学习一般极限的基础上，把导数作为一种特殊的极限（增量比的极限）来处理，而是直接通过实际背景和具体应用实例——速度、膨胀率、效率、增长率等反映导数思想和本质的实例，引导学生经历由函数的平均变化率到瞬时变化率的过程，认识和理解导数概念，在对实际背景问题研究的基础上，抽象概括出导数的概念.

强调导数在研究事物的变化率、变化的快慢，研究函数的基本性质和优化问题中，是一种强有力的工具；并通过与初等方法比较，感受和体会导数在处理上述问题中的一般性和有效性，导数作为一种通法的意义和作用.

淡化计算. 针对以往这部分教学中的问题，以及《标准》对这部分内容的定位——强调对导数本质的认识，不仅作为一种规则，更作为一种重要的思想、方法来学习.

注重使学生学会数学思考的一种方式——几何直观. 反复通过图形去认识和感受导数的几何意义，加强对导数概念的认识和理解，同时在用导数的几何意义去解决问题的过程中（如：导数的正与负为什么体现了函数的增与减的变化，导数绝对值的大小为什么体现了函数增、减的快慢，等等），学会一种数学思考的数学学习的方式.

关注联系. 例如：与函数的联系、算法思想的渗透，以及与信息技术的整合，等等. 提高学生对数学的全面认识.

Ⅳ 教学案例

案例1 3.2.1 常数与幂函数的导数

（一）教学目标

1. 知识与技能目标

能够由定义根据求导数的三个步骤，推导常数函数与幂函数的导数.

2. 过程与方法目标

在教学过程中，注意培养学生归纳、探求规律的能力.

3. 情感、态度与价值观目标

教学的核心问题是让学生能够根据定义和求导数的三个步骤，推导常数函数与幂函数的导数. 通过学生的主动参与，师生、生生的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发其求知欲，培养探索精神.

（二）教学重点和难点

1. 教学重点：利用前面已学的求导数的三个步骤对常数函数与幂函数进行探究.

2. 教学难点：用从特殊到一般的规律来探究公式.

（三）教学方法

以教师为主导，以学生为主体，以能力发展为目标，从学生的认知规律出发，进行启发、诱导、探索，充分调动学生的积极性，发挥学生的主体作用.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 按定义求导数有哪几个步骤？ 2. 用导数定义求下列函数的导数：$y=C$.	问题 1：由学生回答. 问题 2：让学生上黑板演示. 教师作出评价.	练习（1）是推导常数函数的导数，不论自变量取何值，对应的函数值应均为 C，避免如下错误：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x$.
概念形成	问题 1：常数函数的导数是什么？常数函数的导数为零. 问题 2：运用导数定义，求下列几个幂函数的导数. （1）$y=x$；（2）$y=x^2$；（3）$y=x^3$； （4）$y=\frac{1}{x}$；（5）$y=\sqrt{x}$. 问题 3：通过以上五个幂函数的求导过程，你有没有发现，求幂函数的导函数的规律？ 问题 4：幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q})$ 的导数是什么？ 结论：$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$. 练习：求以下几个幂函数的导数： （1）$y=x^8$；（2）$y=x^{12}$；（3）$y=x^{\frac{4}{3}}$.	学生回答，教师总结. 给学生足够的时间，放手让学生解答，最后教师适当的点拨，完善. 教师提出问题，学生思考，回答，允许相互讨论，教师根据学生的回答，进一步完善. 学生口答，教师对学生的回答进行评价.	$C'=0$ 可以用几何图形加以说明，因为 $y=C$ 的图象是平行于 x 轴的直线，其上任意一点的切线，即为直线，所以切线斜率都是 0. 让学生在求导数的过程中发现规律. 让学生通过自己的思考，真正领会数学中从特殊到一般的思想. 目的是通过这一组题目的解答，使学生对幂函数的导数记忆更牢固，要求学生能熟练地掌握它.
应用举例	例 1. 求下列函数的导数： （1）$y=\sqrt[3]{5}$；（2）$y=\sqrt[4]{x^3}(x>0)$；（3）$y=x^{-6}$. 解：（1）$y'=(\sqrt[3]{5})'=0$； （2）$y'=(\sqrt[4]{x^3})'=(x^{\frac{3}{4}})'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$； （3）$y'=(x^{-6})'=-6x^{-7}$. 例 2. 质点运动方程是 $S=\frac{1}{t^5}$，求质点在 $t=2$ 时的速度. 解：因为 $S=\frac{1}{t^5}$，所以 $S'=(t^{-5})'=-5t^{-6}$， $S'\|_{t=2}=-5\times 2^{-6}=-\frac{5}{64}$. 答：质点在 $t=2$ 时的速度是 $-\frac{5}{64}$.	学生独立解决，讨论交流，然后教师对学生的回答进行评价. 在练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导.	进一步巩固所学知识，有助于保持学生学习的热情和信心，教师及时了解学生掌握的情况，以便进一步调整自己的教学.
课堂练习	课本第 92 页，练习 A 组.		强化知识，会应用两个导数公式解决有关问题.
归纳总结	（1）常数函数 $y=C$； （2）幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q})$ 的导数.	学生自己归纳总结.	归纳要点，以便学生有清晰的认知结构.
作业	课本第 92 页练习题 B 组.		

案例2　3.2.3　导数的四则运算法则

（一）教学目标

1. 知识与技能目标

了解函数的和、差、积、商的导数公式的推导；掌握两个函数的和、差、积、商的求导法则；能正确运用两个函数的和差积商的求导法则和已有的导数公式求某些简单函数的导数.

2. 过程与方法目标

利用学生已掌握的导数的定义，得出一个简单的两个函数的和的导数，从而提出问题，引入新课，通过学生的猜想、尝试，探究出函数的和、差、积、商的求导法则，使学生加深对求导法则的理解.

3. 情感、态度与价值观目标

通过学生的主动参与，师生、生生的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发其求知欲，培养探索精神.

（二）教学重点和难点

重点：掌握函数的和、差、积、商的求导法则.

难点：学生对积和商的求导法则的理解和运用.

（三）教学方法

本课时在教学中可运用尝试探索、类比联想、变式练习等方法进行.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 复习：$(x^n)'=nx^{n-1}$；$(x^3)'=3x^2$；$(x^2)'=2x$. 2. 提出问题：求函数 $y=x^3+x^2$ 的导数. 3. 回顾导数的定义： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. 4. 学生尝试，利用导数定义求 $f(x)=x^3+x^2$ 的导数. 5. 探究：$(x^3)'=3x^2$；　$(x^2)'=2x$；　$(x^3+x^2)'=3x^2+2x$ 这三个导数之间的关系. 6. 猜想：$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$.	学生口答. 教师提出问题，学生思考、回答，允许相互讨论. 根据学生回答的结果，提出以下的探究和猜想. 由学生大胆进行猜想，对多种不同的猜想，教师做出评价并完善.	激活学生头脑中的原有知识，为引入新课做准备. 巩固利用导数定义求导的步骤和方法. 通过学生的猜想，尝试探究函数的和、差、积、商的求导法则，使学生充满自信和激情.
概念形成	问题1：对于上面猜想：即$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$， 教师给予确认，让学生自己来总结. 问题2：设 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的，则：$[f(x)\cdot g(x)]'=$________. 若将 $g(x)$ 当作一个常数函数呢？　$[cf(x)]'=$________. 练习：求 $y=x\sin x$ 的导数. 问题3：设 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的，且 $g(x)\neq 0$，则：$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________. 练习：求 $y=\dfrac{\sin x}{x}$的导数.	放手让学生独立处理，有利于深化、活用数学知识，加深对知识的理解. 学生尝试证明法则2时可能存在一定障碍，教师应及时指导学生，注意导数定义的形成. 学生自己动手，寻找答案，教师对一些常见错误应重点指出.	可以推广到任意有限个函数，即： $[(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f'_1(x)\pm f'_2(x)\pm\cdots\pm f'_n(x)$. 避免学生出现： $[f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)$ 这样的错误. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$； $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\dfrac{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 1：求多项式函数： $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数. 例 2：求 $y=\sin 2x$ 的导数. 例 3：求 $y=\tan x$ 的导数. 例 4：求 $y=x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 的导数.	学生练习，教师点拨.	对所学知识灵活运用，例 4 在求导之前，应利用代数、三角恒等变形对函数进行化简，然后再求导，这样可以减少运算量，提高运算速度，减少差错.
练习反馈	课本第 96 页，练习 A 组，1，2，第 96 页练习 B组，1，3.	学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导.	巩固所学知识，进一步促进认知结构的内化，并且可使学生对自己的学习进行自我评价.
归纳总结	1. 两个常用函数的求导公式； 2. 函数和（或差）的求导法则； 3. 函数积的求导法则； 4. 函数商的求导法则.	先由学生自己总结，再由师生共同归纳完善.	学生自己从知识方法两方面进行总结，提高学生的概括、归纳能力.
课后作业	课本第 96 页习题 3－2A1，2，5，6.		

V　习题参考答案与提示

练习 A（第 77 页）

1. （1）乙跑得快；（2）乙较快.
2. 当 $x=3$ 时，平均变化率最大. 图略.
3. $\frac{9}{4}$.

练习 B（第 78 页）

1. 甲厂治污效果较好.
2. $\dfrac{f\left(0+\frac{\pi}{6}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}-0}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\pi}$,

$$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}.$$

所以 $y=\sin x$ 在 $0\sim\frac{\pi}{6}$之间的平均变化率要比$\frac{\pi}{3}\sim\frac{\pi}{2}$之间的平均变化率大.

练习 A（第 82 页）

1. $2a+v_0$.
2. 瞬时变化率为 a.
3. 常值函数.

练习 B（第 82 页）

1. $y'|_{x=1}=2a+b$； $y'|_{x=2}=4a+b$.
2. 在 $x=0$ 处不可导. 图略.

练习 A（第 84 页）

1. $x=0.3$，$k=0.6$；$x=1$，$k=2$；$x=3$，$k=6$；$x=8$，$k=16$.
2. (1) 4；(2) 2；(3) 3；(4) 3；(5) -1；(6) -2.
3. (1) $4x-y-4=0$；(2) $3x-4y-1=0$.

练习 B（第 84 页）

1. $2x+y+2=0$.
2. $10x-y-16=0$.
3. $y-y_0=(2x_0+3)(x-x_0)$.

习题 3－1A（第 85 页）

1. (1) 10 m/s；(2) 14 m/s；(3) 16 m/s.
2. (1) a；(2) $-\dfrac{1}{(x+2)^2}$.
3. $f'(x)=2(x-1)$，$f'(0)=-2$，$f'(2)=2$.
4. $\theta=135°$.

习题 3－1B（第 85 页）

1. 一个是函数，一个是一个具体的数值.
2. 无关，x 不改变.
3. (1) $y'=6x^2$；(2) $y'=3x^2-1$.
4. $y-\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{2}(x-4)$或$y-\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{2}(x-4)$.

练习 A（第 87 页）

1. 常值函数的瞬时变化率为 0，$y=x$ 的瞬时变化率为 1.
2. $y'|_{x=2}=-\dfrac{1}{4}$.
3. $4x-y-4=0$.

练习 B（第 87 页）

1. $f'(x)=0$.

2. $x=1$，$2x-y-1=0$；$x=2$，$4x-y-4=0$.

练习 A（第 88 页）

1. $y'=5x^4$，$y'=12x^{11}$，$y'=-3x^{-4}$，$y'=0.3x^{-0.7}$，$y'=108x^{107}$.

2. $y'=-\sin x$，$y'=\cos x$，$y'=2^x\ln2$，$y'=\dfrac{1}{x}$，$y'=e^x$.

3. $6x-y-5=0$.

练习 B（第 89 页）

1. (1) $\dfrac{1}{32}$；(2) 0；(3) 0.

2. $x+y-\dfrac{\pi}{2}=0$.

3. $y-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-3)$.

练习 A（第 91 页）

1. (1) $y'=7x^6+6x^5-15x^4$；(2) $y'=1-x^{-2}$.

2. (1) $9x^2-30x+2$；(2) $60x^3+120x^2-21$；

   (3) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$；　(4) $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

练习 B（第 91 页）

1. $y'=2ax+b$.

2. (1) $y'=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；(2) $y'=1+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

3. $9x-y-14=0$.

习题 3-2A（第 91 页）

1. (1) $y'=5x^4+3x^2+1$；(2) $y'=3x^2+\cos x$；

   (3) $y'=3x^2\sin x+x^3\cos x$；(4) $y'=9x^2-26x-1$.

2. (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)$；(2) 0.

3. $y=1$.

4. 它们的切线平行于 x 轴.

5. $15x-y+16=0$，$15x-y-16=0$.

6. $y=21$ 和 $y=-6$.

习题 3－2B（第 92 页）

1. （1）$y'=-2\sin 2x$；（2）$y'=\cos x+\cos 2x$；
（3）$y'=3x^2+12x+11$.

2. $2x-y-\frac{\pi}{2}+1=0$.

3. -1 m/s；$t=2$ s.

练习 A（第 95 页）

1. A.

2. 单增区间$\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$，单减区间$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

3. $(-\infty, -1)$，$(-1, +\infty)$ 均为单减区间.

练习 B（第 95 页）

1. 单增区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$，单减区间$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

2. 单增区间$(-\infty, 1]$，$\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$；单减区间$\left[1, \frac{13}{3}\right]$.

3. **证明**：令 $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$，则 $f'(x)=3x^2-12x+12$.
令 $f'(x)=0$，则 $3(x-2)^2=0$，得$x=2$.
显然 $f'(x)\geqslant 0$，因此 $f(x)$为增函数.
因为 $f(2)=7$，所以当 $x<2$ 时，$f(x)=x^3-6x^2+12x-1<f(2)=7$.

练习 A（第 98 页）

1. （A）极值点 x_1，x_2，x_3，最值点 a，x_2，x_3；
（B）极值点 x_1，x_2，x_3，最值点 x_1，b；
（C）极值点 x_1，x_2，最值点 a，b.

2. （1）当 $x=\frac{7}{2}$时，有极小值$-\frac{25}{4}$；（2）当 $x=1$ 时，有极小值-1；
（3）当 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时，有极大值$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，当 $x=\frac{4}{3}\pi$ 时，有极小值$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

3. 因为它们的导数不可能为 0.

练习 B（第 99 页）

1. 当 $x=2$ 时，有最大值 4；当 $x=1$ 时，有最小值-1.

2. 略.

3. 当 $a>0$ 时，单增区间为$\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$，单减区间为$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.
当 $x=-\frac{b}{2a}$时，有最小值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，单增区间为$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$，单减区间为$\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

当 $x=-\frac{b}{2a}$时，有最大值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

练习 A（第 101 页）

1. 最大值为$\frac{c^2}{4}$.
2. $\frac{l^2}{16}$.
3. $x=y=\frac{l}{2}$.

练习 B（第 101 页）

1. 腰长为$\frac{3}{4}p$，底长为$\frac{p}{2}$.
2. $r=\sqrt[3]{\frac{108}{\pi}}$(dm).
3. 13.3 m.
4. $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

习题 3-3A（第 101 页）

1. (1) 在 **R** 上单增；(2) 单增区间 $[4, +\infty)$，单减区间 $(-\infty, 4]$；

   (3) 在 **R** 上单增；(4) 单增区间 $(-\infty, 0]$，$\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$，单减区间$\left[0, \frac{2}{3}\right]$.
2. $y'=2+\cos x>0$ 恒成立.
3. (1) $x=1$ 为极小值点，极小值为 2；(2) $x=1$ 为极大值点，极大值为 6.
4. (1) $x=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$为极大值点，极大值为$\frac{70+26\sqrt{13}}{27}$，$x=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$为极小值点，极小值为$\frac{70-26\sqrt{13}}{27}$；

   (2) $x=-1$ 和 $x=1$ 为极大值点，极大值为 1，$x=0$ 为极小值点，极小值为 0；

   (3) $x=1$ 为极大值点，极大值为-3，$x=-1$ 为极小值点，极小值为-9；

   (4) $x=-\frac{1}{2}$为极大值点，极大值为$\frac{15}{4}$，$x=1$ 为极小值点，极小值为-3.
5. (1) $x=\frac{3}{2}$时取得最小值$-\frac{1}{4}$，$x=0$ 和 $x=3$ 时取得最大值 2；

   (2) $x=0$ 时取得最小值 0，$x=4$ 时取得最大值 8；

   (3) $x=1$ 时取得最小值-2，$x=0$ 或 2 时取得最大值-1；

(4) $x=0$ 时取得最小值 -3，$x=\frac{7}{4}$ 时取得最大值 $\frac{25}{8}$.

6. 底边长为 40 cm 时，容积最大.
7. 边长为 6 cm.

习题 3－3B（第 102 页）

1. $x=\frac{4-\sqrt{13}}{3}$ 为极大值点，$x=\frac{4+\sqrt{13}}{3}$ 为极小值点；

单增区间 $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{13}}{3}\right]$，$\left[\frac{4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$，单减区间 $\left[\frac{4-\sqrt{13}}{3}, \frac{4+\sqrt{13}}{3}\right]$.

2. $x=2$ 时取得最小值 -12，$x=-1$ 时取得最大值 15.
3. 最大位移为 $\frac{9}{4}$ cm，最大速度为 3 cm/s.
4. 80.
5. $\frac{\pi}{4}$.

巩固与提高（第 104 页）

1. (1) 0，8，9，0，-7，当 s 取负值时，意味着质点回到出发点继续向反方向运动；
(2) $v=6-2t$；(3) 3 s.
2. $\frac{20}{3}$ s，13.3 rad.
3. (1) $20x$；(2) $16x+14$；(3) $\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}$.
4. (1) $\frac{5^{-\frac{3}{4}}}{4}$；(2) 15；(3) 13；(4) 38.
5. (1) $6x-y-2=0$；(2) $x-y-1=0$.
6. (1) 单增区间 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$，单减区间 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$；

(2) 单增区间 $\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

单减区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

7. (1) 极大值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，极小值点 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

单增区间 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$，单减区间 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$；

(2) 极值点不存在，单减区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$.

8. 极大值点 $x=2$，极小值点 $x=3$，
单增区间 $(-\infty, 2]$，$[3, +\infty)$，单减区间 $[2, 3]$.

9. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ m.

自测与评估（第 105 页）

1. (1) C；(2) D；(3) B；(4) B；(5) C.

2. (1) 极大值点 $x=\dfrac{2}{3}$，极小值点 $x=-2$；

   (2) 单增区间$\left[-2,\ \dfrac{2}{3}\right]$，单减区间 $(-\infty,\ -2]$，$\left[\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$；

   (3) $x=-2$ 时取最小值 0，$x=-5$ 时取最大值 63；(4) 略.

3. 49 000 m.

Ⅵ　反馈与评价

1. 针对本章所学的知识，除学完本章知识之后进行总测试外，还可在学习过程中进行两次阶段性测试，第一次是学完 3.1、3.2 节，第二次是学完 3.3 节之后.

2. 本章的重点是理解导数的概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等性质中的作用，为进一步学习微积分打下基础. 因此能够体会导数的思想及其内涵，感受导数在解决实际问题中的作用是这一章的基本要求.