普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

另外，B版教材还特别重视算法思想的渗透，培养学生用“通性、通法”思考问题的习惯．为此，我们选用了科学计算软件Scilab来实现具体的算法．希望教师能运用好这一工具，从而达到使用计算机技术辅助教学的目的．同时，也希望教师能积极研究算法在数学教学中的作用和意义，为算法这一内容进入中学数学课堂贡献自己的力量．

数学1～5教师教学用书均附有两张光盘．一张内容是课堂实录，供教师教学时参考；另一张内容是为相关教学内容研制的课件（其中几何画板课件由北京20中学几何画板研究组协助制作），供教师教学时选用．数学3的课件光盘中还附有Scilab的安装程序，供大家使用．

本套教师教学用书的编写得到了山东省教学研究室、济南市教学研究室、潍坊市教学研究室、日照市教学研究室、山东省实验中学、山东师范大学附属中学等单位的大力协助，在此深表谢意！

由于时间紧，书中一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正．

我们的联系方式如下：

电　　话：010—58758523　010—58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

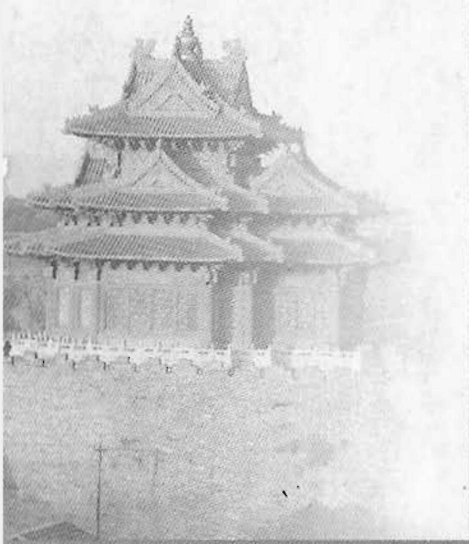
中学数学教材实验研究组

目录

第一章 解三角形

第二章 数　列

第三章　不等式



第一章

解三角形

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 掌握正弦定理、余弦定理.
2. 能初步运用正弦定理、余弦定理解斜三角形.
3. 能利用计算器解决有关解斜三角形的计算问题.
4. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识、方法解决一些与测量以及几何计算有关的实际问题.

（二）过程与方法目标

1. 使学生在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系.

2. 在探究学习和应用实习的过程中，认识到运用正弦定理、余弦定理可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题，提高运用所学知识解决实际问题的能力.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过对三角形边角关系的探究学习，体验数学探究活动的过程，培养探索精神和创新意识.

2. 在运用正弦定理、余弦定理解决一些简单的实际问题的过程中，逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度，学会用数学的思维方式去解决问题、认识世界.

3. 通过实习作业，体会“解三角形在测量中的应用”，提高应用数学知识解决实际问题的能力和实际操作的能力.

4. 通过学习和运用，进一步体会数学的科学价值、应用价值，进而领会数学的人文价值、美学价值，不断提高自身的文化素养.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 正弦定理和余弦定理是作为直角三角形中边角关系的推广而引入的：

$$a^2+b^2=c^2,\ \frac{a}{\sin A}=c=2R.$$

$$c^2=b^2\sin^2 C+(a-b\cos C)^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

2. 举例说明了正弦定理和余弦定理在解三角形中的应用.

3. 专列一节，说明正弦定理和余弦定理在测量中的应用，加强数学与实践的联系.

4. 引导学生研讨余弦定理与向量的数量积之间的关系.

5. 探索与研究正弦定理与面积计算之间的关系.

6. 用向量的数量积运算沟通勾股定理、正弦定理、余弦定理、和角公式、面积公式等各知识点之间的联系. 启发学生总结解几何问题的数学方法：综合法、三角法、坐标法和向量法.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是正弦定理、余弦定理及其应用. 全章共分两大节. 第一大节，是正弦定理和余弦定理. 正弦定理、余弦定理是关于任意三角形边角之间关系的两个重要定理. 教科书通过两个实际问题，引导学生去探究三角形的边与角的关系：首先分析直角三角形的边角关系，概括出直角三角形的正弦定理；然后思考对于一般三角形，结论是否仍然成立；最后通过构造直角三角形推导出这两个定理. 第二大节，通过运用正弦定理、余弦定理解决测量、工业、几何等方面的实际问题，使学生进一步体会数学在实际中的应用，激发学生学习数学的兴趣，培养学生由实际问题抽象出数学问题并加以解决的能力. 从某种意义上讲，这一部分可视为用代数法解决几何问题的典型内容之一. 为引导学生认识正弦定理、余弦定理是解决测量问题的重要方法，这一部分还安排了实习作业，以促使学生继续提高运用所学知识解决实际问题的能力.

2. 地位与作用

正弦定理、余弦定理是解决有关斜三角形问题以及应用问题（如测量等）的两个重要定理，它将三角形的边和角有机地联系起来，实现了“边”与“角”的互化，从而使“三角”与“几何”产生联系，为求与三角形有关的量，如面积、外接圆和内切圆半径等提供了理论依据，同时也为判断三角形形状，证明三角形中的有关等式提供了重要依据.

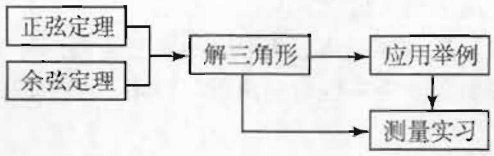
通过运用这两个定理解决实际问题，可以培养学生的数学应用意识和创新精神，使学生养成实事求是、扎实严谨的科学态度，学会用数学的思维方式去解决问题、认识世界.

3. 重点与难点

本章重点是运用正弦定理、余弦定理探求任意三角形的边角关系，解决与之有关的计算问题，运用这两个定理解决一些测量以及几何计算有关的实际问题.

本章的难点是两个定理的推导，以及灵活运用两个定理解决相关的实际问题.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　正弦定理和余弦定理	
1.1.1　正弦定理	2 课时
1.1.2　余弦定理	2 课时
1.2　应用举例	2 课时
实习作业	1 课时
小结与复习	1 课时

（四）教学建议

解三角形的教学要重视正弦定理和余弦定理在探索三角形边角关系中的作用，注意引导学生在已有知识的基础上，由特殊到一般地探究任意三角形的边角关系．在自主探究与合作交流中经历数学探究的全过程，发现并掌握三角形中边长与角度之间的数量关系．引导学生认识它们是解决测量问题的一种重要方法．通过实习作业，将集体学习与分散学习相结合，培养学生独立思考、合作学习的意识．教学中，应重视课本内容的教学，注意强化教科书中所选例题的教育、教学功能，不必在恒等变形上进行过于繁琐的训练.

学习本章知识，应注意数形结合和代数思想方法的运用．引导学生体验数学在解决实际问题中的作用上，增强学生的数学应用意识，提高学生的实践能力.

1.1　正弦定理和余弦定理

本大节的主要内容是正弦定理、余弦定理及其简单应用．难点是三角形边角关系的探究过程和初步运用.

1.1.1　正弦定理

1. 讲本章前，先引导学生阅读本章引言．引言中，提出两个实际问题，并指出解决问题的关键在于研究三角形中的边、角之间的关系，从而引导学生产生探索一般三角形的边角关系的愿望，激发学生学

习本章的兴趣.

2. 本小节从学生熟悉的直角三角形中的边角关系出发，让学生进而探索任意三角形中的边角关系. 对任一个直角三角形有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

然后自然要问，该式对于一般三角形是否成立？

一般三角形除直角三角形外，还包括锐角三角形、钝角三角形两种情况，教科书分别就两种情况研究上述式子是否成立. 这就需要引导学生将锐角三角形与钝角三角形转化为直角三角形，如何实现这种转化？——作三角形的高.

教学过程中，教师要注意通过提出问题，引导学生自主探究三角形的边角关系. 探究过程一般要经历下面的步骤：先由特殊情况发现结论，然后针对一般三角形提出猜想，再对一般三角形进行验证，最后给出一般性证明. 探究过程中要指导学生注意合作交流、共同分析和互相启迪，使学生经历并体验数学探究活动的过程，培养探索精神和创新意识.

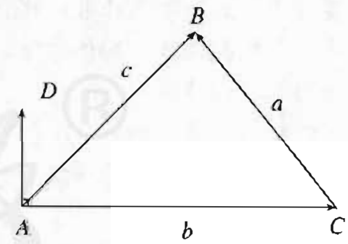
3. 证明正弦定理的方法很多，展开思维的空间较大，因此对于正弦定理的教学，尤其应注意引导学生自主地进行探索.

学生在初中学习过解直角三角形，因此他们很容易就能利用已有的知识总结出蕴含在直角三角形中的“正弦定理”，进而就会顺理成章地提出“一般三角形中边角关系”的问题.

方法一，把一般三角形中的问题，直接转化为直角三角形的边角关系进行研究——这是学生最容易想到的证明思路. 学生的知识增长、思维发展、能力提高都是一个循序渐进的过程，教科书中选用这样的方法介绍正弦定理，比较符合学生的认识规律，更容易调动学生学习的积极性.

但是，我们必须看到，学生的学习过程又是一个自主探索、发现、创造的过程，因而在教学过程中教师应时刻作好思想准备，努力引导学生去进行探索和发现，参与知识形成的过程. 应该充分相信学生，他们完全可能通过自己的努力，独辟蹊径找出其他的证明方法.

方法二，利用向量作为工具进行证明. 向量有两个要素，一个是方向（即角度)，一个是模的大小（即长度)，而现在所研究的三角形的边角关系，恰好涉及三角形的内角及边长两个量，并且在向量的运算中又正好有一个三角形法则，这些特征显示出它们之间可能存在的内在联系，因而在教学中，教师应引导学生进行联想，进行探索. 事实上，通过向量证明正弦定理的关键在于将三角形法则中的向量等式转化为数量关系. 如何实施这种转化？显然是通过向量的内积（数量积). 由此，得到证明的思路如下：分锐角三角形和钝角三角形讨论，构造一个与$\overrightarrow{AC}$垂直的向量$\overrightarrow{AD}$（不一定是单位向量）即可. 例如，对于锐角$\triangle ABC$，如图，过点A作$AD\perp AC$，得到向量$\overrightarrow{AD}$. 由于$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$，于是

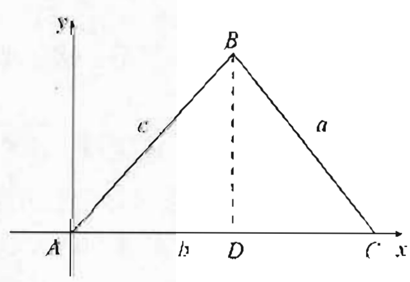


$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB},$$

因此

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-A)\\=&|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos 90^\circ+|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{CB}|\cos(90^\circ-C),\end{aligned}$$

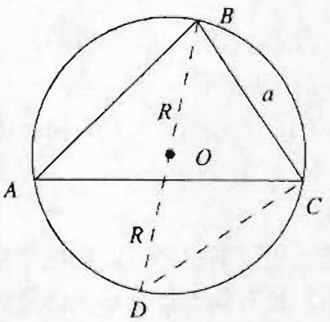
所以有 $c\sin A=a\sin C\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.



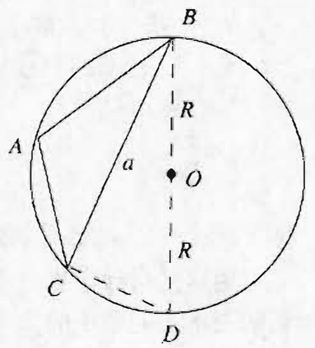
方法三，建立直角坐标系，借助三角函数定义进行证明.

在如图所示的直角坐标系中，点 B，C 的坐标分别为 $B(c\cos A,\ c\sin A)$，$C(b,\ 0)$. 于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$. 同理 $S_{\triangle ABC}$ 还可以表示成 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 和 $\frac{1}{2}ac\sin B$，从而也可证得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

方法四，通过 $\triangle ABC$ 的外接圆，将问题转化为直角三角形进行证明. 如图甲，当 $\angle BAC$ 为锐角时，连接直径 BD 与弦 CD，则 $\angle BCD=90^\circ$，可得 $a=2R\sin D=2R\sin A$；如图乙，当 $\angle BAC$ 为钝角时，连接直径 BD 与弦 CD，则 $\angle BCD=90^\circ$，同样可得 $a=2R\sin D=2R\sin(180^\circ-A)=2R\sin A$；当 $\angle A$ 为直角时，显然亦有 $a=2R\sin A$. 即不论 $\angle A$ 是锐角、钝角、直角，总有 $a=2R\sin A$.



图甲



图乙

同理可证 $b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$. 所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

由此可知，三角形的各边与其对角的正弦之比是一个定值，这个定值就是该三角形的外接圆直径. 以上就是本节的“探索与研究”中要引导学生去进行自主探索的内容.

在教学中，对于上述不同的证明方法，教师应鼓励学生积极地去进行探索，这样不仅能够激发学生的学习兴趣，同时也有助于培养学生钻研、创新的精神. 但必须注意，本章也好，本节也好，重点应放在探索三角形中边与角的关系上，要切实把握如何去解三角形，并将其用于解决实际问题（如在测量中的运用），而不必过多地用这些知识和相关的结论再去证明一些复杂的数学等式. 至于 $\frac{a}{\sin A}=2R$ 这个结论，学生只要通过探索与研究，发现这个规律知道这一结论即可，务必不要再去引申，或再用其解决更多的复杂的证明题，使学生陷入繁琐的数学式子的推导之中.

4. 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 反映的三角形的边角关系，在具体应用时，一般写成

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\text{ 或 }\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}.$$

每一个等式都表示了三角形两个角和它们的对边的关系，因此用正弦定理可以解决两类关于斜三角形的问题：

（1）已知两角和一边，求其他两边和一角；

（2）已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，然后再进一步求出其他的边和角.

5. 由于已知两边和其中一边的对角，不能唯一确定三角形的形状，因此教师要注意结合教科书中例 1 引导学生发现两解、一解的情况.

如例 1 的(2)中，$4=b>a=3$，所以 $\angle B>\angle A=30^\circ$，即 $\angle B$ 有锐角或钝角两种可能.

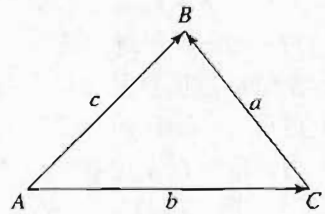
教师可增加一道题，讲解得不出答案（即无解）的情况.

1.1.2 余弦定理

1. 教科书通过推广勾股定理的探索过程，得到余弦定理. 借助一边的向量在另一边上的正射影的

数量和勾股定理等知识证明余弦定理. 教学时，应指出这种证法的思路，实质上还是向量关系的数量化. 有了这种思想，学生就可以从不同的途径去探求余弦定理的证明了. 也就是说，将向量之间的关系转化为数量关系是一种通法，这种重要的数学方法可以帮助我们解决许多较为复杂的问题.

2. 课堂上，也可引导学生用向量的数量积运算证明余弦定理：



在$\triangle ABC$中，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\&=\overrightarrow{AC}^2+2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2\\&=|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos(180^\circ-C)+|\overrightarrow{CB}|^2\\&=b^2-2ba\cos C+a^2,\end{aligned}$$

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

像这样引导学生去进行积极的思考，既能使学生主动地参与知识形成的过程，又能让学生体验通性通法在解决问题中的作用，更有助于提高学生的能力.

3. 由于 $\cos 90^\circ=0$，所以在教学中应适时指出，余弦定理可以看成是广义的勾股定理，而勾股定理是余弦定理的特例.

这样一来，勾股定理、正弦定理和余弦定理就从思想方法上形成一个统一的整体，从而体现了数学的统一美.

4. 根据学生的实际情况，还可以提出问题："正弦定理和余弦定理从不同的角度反映了三角形中边与角之间的关系，它们又都能通过将向量等式$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$转化成数量关系进行证明，这说明两个定理之间存在着内在的联系，那么你能不能利用正弦定理推导出余弦定理呢?" 推导方法如下：

由正弦定理，得 $a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$，所以

$$\begin{aligned}a^2&=4R^2\sin^2(B+C)=4R^2(\sin^2B\cos^2C+\cos^2B\sin^2C+2\sin B\sin C\cos B\cos C)\\&=4R^2\{\sin^2B(1-\sin^2C)+(1-\sin^2B)\sin^2C+2\sin B\sin C[\cos(B+C)+\sin B\sin C]\}\\&=4R^2\sin^2B+4R^2\sin^2C+8R^2\sin B\sin C\cos(B+C)\\&=b^2+c^2+2(2R\sin B)\cdot(2R\sin C)\cdot\cos(180^\circ-A)\\&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

当然，这样的问题只能向那些对数学有兴趣、成绩较好的学生提出，供他们课后去研究，务必不要向全班同学提出，因为这样的问题实际上已超出课标的要求.

5. 余弦定理的每一个等式中都包含四个不同的量，它们分别是三角形的三边和一个角，知道其中三个量，便可求得第四个量. 同时，不难得出余弦定理的第二种形式，即

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

教师要引导学生通过分析与相互交流，自主地总结出余弦定理可以解以下两类问题：

(1) 已知三边，求各角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

6. 教材以"探索与研究"的形式，介绍了平行四边形与三角形的面积计算公式，目的是在介绍这两个公式的同时，介绍"向量法"，因为这些公式及其推导方法应用广泛. 在教学中教师可根据学生的情况酌情处理.

1.2 应用举例

1. 本节重点是解斜三角形问题的实际应用，难点是如何在理解题意的基础上将实际问题数学化.

2. 本节通过四个例子说明解斜三角形在实际中的一些应用，特别是在解决测量问题中的应用. 通过本节学习，要使学生掌握利用正弦定理及余弦定理解任意三角形的方法，懂得解任意三角形的知识在实际中有广泛的应用，经历用正弦定理、余弦定理解决测量问题的过程，从而培养学生分析问题、解决问题的能力.

在教学中，教师要引导学生分析题意，分清已知与所求，根据题意画出示意图. 要启发学生正确运用正弦定理和余弦定理. 特别是运用两个定理“测量底部不能到达的建筑物的高度”与“测量平面上两个不能到达的地方之间的距离”，要放手让学生自主探究、分析，从定理运用的角度，探索如何构造三角形. 一定要通过这两个抽象给出的实例，使学生较为清晰地掌握以下问题的答案：对一个具体问题，需要设置（至少）几个测量点？哪些元素可测，哪些元素（边和角）不可测？构造一个三角形能否解决问题？如何运用具有公共边的三角形进行已知（或已求）元素与待求元素之间的转化？

引导学生在分析、尝试探究的基础上互相交流，总结出将实际问题数学化，进而使问题得到解决的几个环节：

$$\text{分析题意}\xrightarrow{\text{理解}}\text{画示意图}\xrightarrow{\text{转化}}\text{化成数学问题}\xrightarrow{\text{尝试探究}}\text{运用有关知识解决实际问题.}$$

在演算过程中，要算法简练，算式工整，计算正确，教师要作出示范，并严格要求. 不必在恒等变形上进行过于繁琐的训练.

实 习 作 业

1. 本节教科书安排了一个实习作业，是用解斜三角形的知识解决日常生活中遇到的有关测量的问题，通过实习（测量），使学生了解和经历解决实际问题的全过程，体验数学与日常生活（及其他学科）的联系，感受数学的实用价值，增强应用意识，提高实践能力.

2. 注意参考教科书 1.2 节中的例 1、例 2，引导学生根据自己的生活经验或实际需要选择合适的测量课题.

3. 设计测量方案，写出测量步骤，有计划、有目的地进行实习（测量）. 要引导学生在实际操作和解决问题的过程中，学会通过查询资料等手段获取信息；实际测量时还应采取各种合作方式（如分若干实习小组等）解决问题，培养交流能力.

4. 实习前要准备好测量工具，如米尺、标杆、经纬仪等. 教师要在现场观察并指导学生的实践活动，对学生测量的数据，应要求他们认真核对. 要引导学生从不同的角度、层次探索解决的方法. 从而获得综合运用知识和方法解决实际问题的经验，发展创新意识.

5. 认真整理、分析测量的数据，形成解决问题的步骤序列，得出结论，写出实习报告.

三、拓展资源

（一）怎样测量地球的半径？

我们知道，地球的形状近似于一个球，那么怎样测出它的半径呢？

下面我们介绍一种人们早期近似测量地球半径的方法．

如图 1-1，设圆周长为 C，半径为 R，圆上 M，N 两地间的弧长为 l，对应的圆心角为 n°．

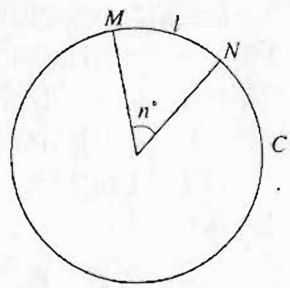


图 1-1

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$，即 $\frac{\pi R}{180}$．于是半径为 R 的圆中，n° 的圆心角所对的弧长 l 为

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$

所以 $R=\frac{180l}{\pi n}$．

在实际测量地球半径时，M，N 两地常选在同一条子午线上，然后用天文方法测出 M，N 两地的纬度，即可算出圆心角 n°．当 M，N 两地相距很远时，常采用布设三角网的方法，算出 MN，即 l 的长．如图 1-2，在 M，N 两地间布设三角点，构成$\triangle AMB$，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle CDE$，$\triangle EDN$ 等．用经纬仪可测出这些三角形的各个角的度数，再量出 M 点附近的那条基线 MA 的长，即可算出 MN 的长．

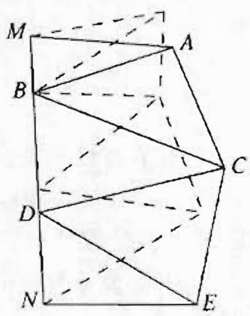


图 1-2

具体算法如下：

在$\triangle MAB$ 中，由于它的各个角已测出，AM 的长也量出，因此由正弦定理得

$$MB=\frac{AM\sin MAB}{\sin ABM},$$

$$AB=\frac{AM\sin AMB}{\sin ABM}.$$

同理可求得

$$BC=\frac{AB\sin CAB}{\sin ACB},$$

$$CD=\frac{BC\sin CBD}{\sin BDC},$$

$$BD=\frac{BC\sin BCD}{\sin BDC},$$

$$DE=\frac{CD\sin ECD}{\sin CED},$$

$$DN=\frac{DE\sin DEN}{\sin DNE}.$$

所以 $MN=MB+BD+DN$.

法国的皮卡尔(Picard，1620—1682)于 1669～1671 年间，率领他的测量队首次测出了巴黎和亚眠之间的子午线的长，求得子午线 1°的长约为 111.28 km，这样他推算出地球的半径为

$$R=\frac{180\times 111.28}{3.141\ 6\times 1}\approx 6\ 376(\text{km}).$$

他推算出的值与现在公认的地球半径 6 370 km 非常接近.

另外，布设三角网有多种方法(如图 1-2 中的虚线)，具体实施时要根据实际情况灵活选点，布设的网点越少越好.

(二) 海伦公式与秦九韶三斜求积公式

古希腊几何学家海伦（Heron，约公元 1 世纪）在他的著作《量度》一书中提出并证明了已知三角形三边长求面积的公式：用 a，b，c 表示三角形的三边长，p 表示三角形的半周长，即 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 其实古希腊叙拉古的阿基米德早就知道这个公式，只是海伦著书得以传播于世，后人才以海伦的名字命名. 海伦公式的简单、转换对称的美感，让人看一眼公式便铭记在心，并能激发起人们进一步思索的欲望. 事实上，后来就有人发现并证明了圆内接四边形的面积公式：用 a、b，c，d 表示圆内接四边形的四边长，p 表示四边形的半周长，即 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，则四边形的面积 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

我国南宋数学家秦九韶（约 1202—1261）也独立地发现了类似的求三角形面积的方法. 他把三角形的三边分别叫做大斜、中斜、小斜(如图1-3)，他在著作《数书九章》卷五中记述："以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积."用今天的符号来表示即是 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$，现称之为秦九韶三斜求积公式.

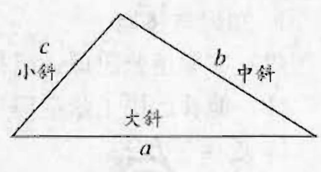


图 1-3

我们可以通过恒等变形，证明海伦公式与秦九韶三斜求积公式是等价的：

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(ac+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)\left(ac-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+c)^2-b^2}{2}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{16}(a+c-b)(a+c+b)(b+a-c)(b-a+c)}\\&=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$

现在来推导上述两个面积公式并不难，从秦九韶三斜求积公式中我们似乎看到了余弦定理的"影子"：

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

然而当年秦九韶依靠商高定理(即勾股定理)推导起来要艰难得多. 如图 1-4，设 $a\geqslant b\geqslant c$，作 $AD\perp BC$，垂足为 D，设 $BD=x$，$CD=y$，$AD=h$，则

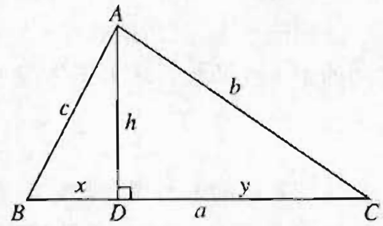


图 1-4

$$\begin{cases}x^2+h^2=c^2\\ y^2+h^2=b^2\\ x+y=a\end{cases}$$

解得 $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$，$y=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$，$h=\sqrt{c^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}$.

从而

$$S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

四、教学案例

案例 1：1.1.1　正弦定理

（一）教学目标

1. 知识与技能

(1) 掌握正弦定理，能初步运用正弦定理解一些斜三角形；

(2) 能够运用正弦定理初步解决某些与测量和几何计算有关的实际问题.

2. 过程与方法

(1) 使学生在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的一种数量关系——正弦定理；

(2) 在探究学习的过程中，认识到正弦定理可以解决某些与测量和几何计算有关的实际问题，帮助学生提高运用有关知识解决实际问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1) 通过对三角形边角关系的探究学习，经历数学探究活动的过程，培养探索精神和创新意识；

(2) 在运用正弦定理的过程中，逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度，学习用数学的思维方式解决问题、认识世界；

(3) 通过本节的学习和运用实践，体会数学的科学价值、应用价值，进而领会数学的人文价值、美学价值，不断提高自身的文化素养.

（二）教学重点、难点

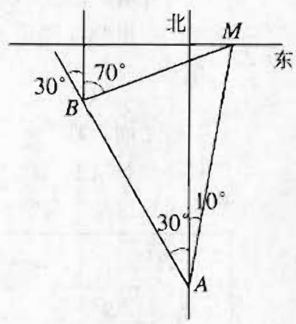
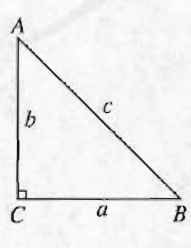
1. 正弦定理的推导.

2. 正弦定理的运用.

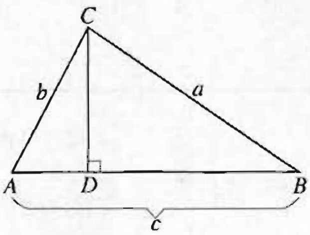
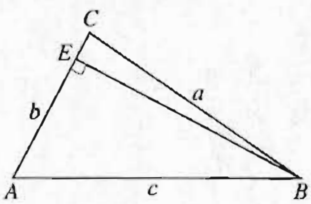
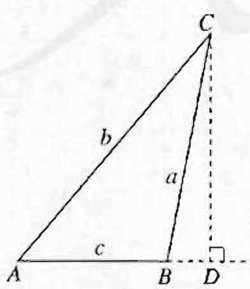
（三）教学方法

自主探究——尝试指导——合作交流．首先提出问题，引导学生自主探究三角形的边角关系，由特殊情况发现结论并提出猜想，再对一般三角形进行验证，最后给出一般性证明．探究过程中注意合作交流、共同分析、互相启迪.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
提出问题	问题　一艘轮船按照北偏西30°的方向，从A地出发以28海里每小时的速度航行．一个灯塔M原来在轮船的北偏东10°方向上，经过40分钟到达B地，测得灯塔在轮船的北偏东70°方向上．求轮船和灯塔原来的距离AM.	引导学生理清题意，画出图形.  启发学生发现“问题实质”是：已知$\triangle AMB$中，$\angle MAB=40^\circ$，$\angle MBA=180^\circ-70^\circ-30^\circ=80^\circ$，$AB=28\times\frac{40}{60}=\frac{56}{3}$，求$AM$. 即：已知三角形中两角及其夹边，求其他边.	设疑激趣引出课题，探究三角形的边（三边）、角（三角）关系.
温故知新	回顾直角三角形中的边角关系．如图，$\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\sin B$等.  	引导学生寻求联系，发现规律，深化学生对直角三角形边角关系的理解 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c$. 寻求形式的完美统一 $c=\frac{c}{1}=\frac{c}{\sin C}$, 即在Rt$\triangle ABC$中 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.	引导学生经历由特殊到一般的探究发现过程.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>探究正弦定理的证明过程</td>
<td>正弦定理及其推导（证明过程之一展示）：
(1) 在锐角三角形中(如图)：

作 $CD\perp AB$ 于 D，有 $\frac{CD}{b}=\sin A$，$\frac{CD}{a}=\sin B$，所以
$b\sin A=a\sin B$，
即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.
同理可证：
$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$（如图）.

所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.
(2) 在钝角三角形 ABC 中：作 $CD\perp AB$ 于 D，有 $\frac{CD}{b}=\sin A$.
</td>
<td>对于一般的三角形，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 是否仍然能成立？
引导学生认清“一般三角形”的含义，包括：直角三角形、锐角三角形、钝角三角形.
引导学生明确下一步的探究方向：
(1) 在锐角三角形中，等式是否成立？
(2) 在钝角三角形中，等式是否成立？
(3) 如何给出一般性证明？
首先解决成立问题：将学生分成两组做试验. 一组验证锐角三角形，一组验证钝角三角形.
每个同学画出一三角形（锐角或钝角），测量各边长度及它们对角的度数，借助计算器，求出这三个角的正弦值，填入下表：
<table><tr><td>边长</td><td>$a=$</td><td>$b=$</td><td>$c=$</td></tr><tr><td>对角的正弦</td><td>$\sin A=$</td><td>$\sin B=$</td><td>$\sin C=$</td></tr></table>运用表中数据，验算 $\triangle ABC$ 各边的长与所对的角的正弦值是否成比例.
然后将学生再分成若干组，探究如何在锐角或钝角三角形中给出一般性证明.
在探究过程中，教师注意巡视、指导，引导学生思考：
(1) 如何将一般三角形（锐角或钝角）的边角关系转化为直角三角形的边角关系？
(2) 还有什么办法能将三角形的边与角联系起来（鼓励学生提出各种不同的思路）？</td>
<td>引导学生通过自主探究以及合作交流寻求问题结论和解决办法.</td>
</tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>探究正弦定理的证明过程</td><td>

$$\frac{CD}{a}=\sin(180^\circ-B)$$
$$=\sin B,$$

所以 $b\sin A=a\sin B$. 即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理可证 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以

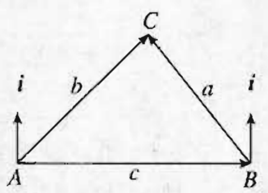
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

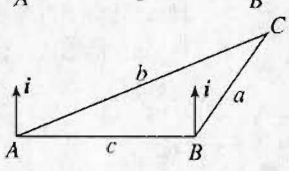
综上，得：

正弦定理 在任意三角形中，各边的长和它所对角的正弦之比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

向量法证明（简要展示证明之二）：



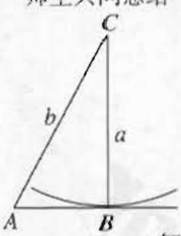
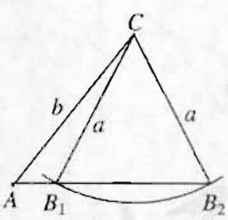
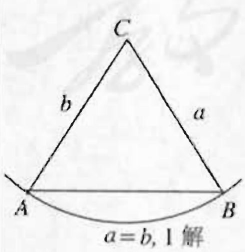
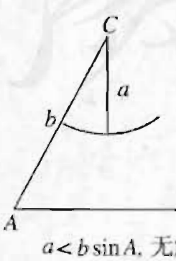


如图，向量 $\boldsymbol{i}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的单位向量. 因为 $\boldsymbol{i}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AC}$，即 $\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AC}$，所以 $a\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$ 或 $a\cos\left(B-\frac{\pi}{2}\right)=b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，即 $a\sin B=b\sin A$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

</td><td></td><td></td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 1 (1)(2)(3). 见教材. (1) 已知两角和任一边，求另两边及一角，有唯一解．如例 1 (1). (2) 已知两边（如边 a，b）和其中一边的对角（如$\angle A$），求另一边及对角. ① 若$\angle A$为直角或钝角，且$a>b$，则有唯一解．如例 1 (3). ② 若$\angle A$为直角或钝角，且$a\leqslant b$，则无解. ③ 若$\angle A$为锐角，当$b\sin A<a<b$时，有两解．如例 1 (2). 当$b=a$或$a=b\sin A$时，有唯一解.	结合例 1 的讲解，引导学生总结. (1) 正弦定理是任意三角形的三边与三角之间的固定关系（规律）．它说明同一三角形中，边与它所对角的正弦成比例，即存在正数 t，使 $a=t\sin A$，$b=t\sin B$，$c=t\sin C$. 此时，可埋下伏笔，提出“正数 t”是一个什么量？——即教材“探索与研究”中的问题. (2) 已知两角及一边，可求其他边和角. (3) 已知两边及一边的对角，求其他角和边．何时有一解？两解？无解？	进一步深化对正弦定理的认识和理解.
课堂练习	教材练习 A，1(1)(2)(3)(4).	教师展示答案.	反馈矫正.
归纳小结	(1) 解决两类解三角形的问题； (2) 已知两边及一边的对角时，可利用画图法判断解的个数.	师生共同总结——交流——完善.  $a=b\sin A$, 1 解  $b\sin A<a<b$, 2 解  $a=b$, 1 解  $a<b\sin A$, 无解	引导学生学会自己总结；让学生进一步(回顾)体会知识的形成、发展、完善的过程.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课后作业	(1) 教科书练习B，1，2. (2) 教科书“探索与研究”. (3) 回顾反思正弦定理的发现、证明过程. (4) 你还能用其他方法证明正弦定理吗？有兴趣的同学可以在课后继续进行讨论. (5) 若已知三角形的两边及夹角，能否用正弦定理求出第三边及其他两角？你能想出解决办法吗？	学生独立完成第(1)(2)(3)项，第(4)(5)项可以共同探讨.	巩固深化；进一步培养自主探究能力.

案例2：1.2 应用举例

（一）教学目标

1. 知识与技能

初步运用正弦定理、余弦定理解决某些与测量和几何计算有关的实际问题.

2. 过程与方法

通过解决“测量一个底部不能到达的建筑物的高度”或“测量平面上两个不能到达的地方之间的距离”的问题，初步掌握将实际问题转化为解斜三角形问题的方法，进一步提高应用正弦定理、余弦定理解斜三角形的能力，提高运用数学知识解决实际问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

通过解决“测量”问题，体会如何将具体的实际问题转化为抽象的数学问题. 培养学生的数学应用意识和探索问题、解决问题的能力，学习用数学的思维方式去解决问题，认识世界.

（二）教学重点、难点

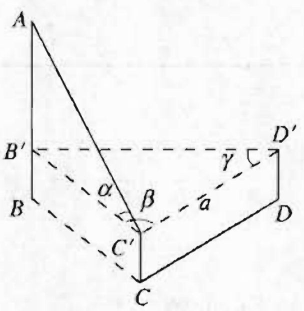
1. 重点是如何将实际问题转化为数学问题，并利用解斜三角形的方法予以解决.

2. 分析、探究并确定将实际问题转化为数学问题的思路是难点和关键.

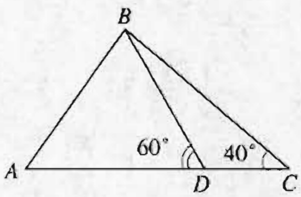
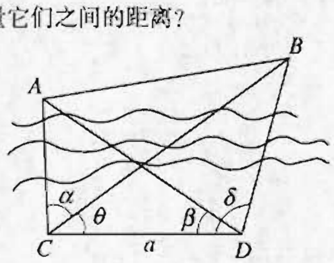
（三）教学方法

自主探究与尝试指导相结合，引导学生通过分析、自主探究、合作讨论得出转化（解决）问题的方法.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习回顾	(1) 正、余弦定理； (2) 解斜三角形的方法.	学生回顾、理顺知识、方法.	复习引入.
问题提出	问题1　怎样测量一个底部不能到达的建筑物的高度？ 如图（教科书图 1-11），在北京故宫的四个角上各矗立着一座角楼. 如何通过测量，求得角楼的高度？	分析、探究、讨论、归纳. 可在适当的地方选取一点 C，对角楼 AB 测量，如图，设 CC' 表示测量仪器的高，在 $\triangle AB'C'$ 中，只能测得 $\angle AC'B'$（设为 α）. 要求得 AB，须再选取另一点 D，设测得 $CD=a$，$\angle B'C'D'=\beta$，$\angle B'D'C'=\gamma$，则在本题中可抽象出两个空间中的三角形，其中 $\triangle AB'C'$ 是直角三角形. 而在 $\triangle B'C'D'$ 中，由 β，γ 和 α 根据正弦定理可求得 $B'C'$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AB'C'$ 中，由 α 和 $B'C'$ 可求得 AB'. 问题得解. 即： 在 $\triangle B'C'D'$ 中，$\dfrac{B'C'}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\angle C'B'D'}$， 即 $\dfrac{B'C'}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin[180^\circ-(\beta+\gamma)]}$，所以 $B'C'=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(180^\circ-\beta-\gamma)}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AB'C'$ 中， $AB'=B'C'\cdot\tan\alpha$， 于是，角楼高为 $AB=AB'+CC'$.	使学生经历并体会如何将实际问题转化为数学问题.
探究、转化解决过程	 学生用自制的仪器测量角楼，得数据如下： $CD=a=60\ \mathrm{m}$，$\alpha=20^\circ$，$\beta=99^\circ$，$\gamma=45^\circ$，测点距地面 1.5 m. 若精确到 0.1 m，请同学们计算角楼高度. 易解得 $B'C'=\dfrac{60\times\sin 45^\circ}{\sin[180^\circ-(99^\circ+45^\circ)]}$ $=\dfrac{60\times\sin 45^\circ}{\sin 36^\circ}\approx 72.17$. 所以 $AB'=B'C'\cdot\tan\alpha=72.17\times\tan 20^\circ\approx 26.3(\mathrm{cm})$. 因此故宫角楼高约 $26.3+1.5=27.8$ m.		

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例　如图一块三角形绿地 ABC，AB 边长 20 米，由 C 点看 AB 的张角为 40°，在 AC 边上一点 D 处看 AB 的张角为 60°，且 $AD=2DC$，试求绿地的面积.  问题 2　怎样测量平面上两个不能到达的地方之间的距离? 设 A，B 是两个海岛，如何在岸边测量它们之间的距离?  解：如图，在岸边适当选取测点 C，D，使 A，B，C，D 共面（即保持在同一水平面上），测得 $CD=a$，$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADC=\beta$，$\angle BCD=\theta$，$\angle BDC=\delta$. 在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，可以得到 $BC=\frac{a\sin\delta}{\sin(\theta+\delta)}$. 同理，在 $\triangle ACD$ 中，可以得到 $AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\theta)}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos\alpha$. 由上式可求得 AB.	共同分析，再由学生完成. 解：设 $DC=x$，则 $AD=2x$. 在 $\triangle BDC$ 中，$\angle BDC=120^\circ$，$\angle DBC=20^\circ$，$\frac{DC}{\sin 20^\circ}=\frac{BC}{\sin 120^\circ}$， 所以 $BC=\frac{DC\sin 120^\circ}{\sin 20^\circ}\approx 2.53x$. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 40^\circ$， 即 $400=9x^2+6.4x^2-2\times 3x\times 2.53x\times 0.766$，解得 $x\approx 10.3$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C$ $\approx 260(\mathrm{m}^2)$， 即绿地面积约为 $260\ \mathrm{m}^2$. 分析探究： 与问题 1 类似，如果只选一个测量点 C，那么在 $\triangle ABC$ 中只能测得 $\angle ACB$，问题无法解决，因此需要再选一个测量点 D，构造一个除 CD 外能求出其一边长的三角形 BCD. 在 $\triangle ABC$ 中，仅已知一个角 α，为求 AB，需先求出 AC，BC，所以应从解 $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$ 入手.	深化将实际问题转化为数学问题的过程与方法.
课堂练习	教材练习 A，1.	教师展示答案.	反馈矫正.
归纳小结	解决实际问题时，首先要在理解题意的基础上将实际问题数学化，然后再利用有关定理、性质、公式解决这个数学问题. 步骤如下： 分析题意 → 画示意图 → 化成数学问题 → 运用有关知识解决（计算）		引导学生回顾总结问题的解决过程. 体会运用数学知识解决实际问题的基本思路.
课后作业	教材练习 A，2. 教材练习 B，1，2.	由学生独立完成.	巩固和深化.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 5 页）

1. (1) $b=\sqrt{3}$，$\angle C=90°$，$c=2\sqrt{3}$.

   (2) $\angle C=60°$，$a=8\sqrt{3}-8$，$c=12\sqrt{2}-4\sqrt{6}$.

   (3) $\angle B=30°$，$\angle C=90°$，$c=2\sqrt{3}$.

   (4) 无解.

   (5) $\angle B=53.6°$，$\angle A=51.4°$，$a=3.9$.

2. 略.

练习 B（第 6 页）

1. $\angle C\approx108.2°$或 $11.8°$.
2. 略.
3. $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

探索与研究（第 6 页）

比值 $k=2R$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆直径.

练习 A（第 8 页）

1. 略.
2. (1) $c=5\sqrt{3}$，$\angle A=90°$，$\angle B=30°$.

   (2) $\angle A=\angle C\approx70.53°$，$\angle B\approx38.94°$.

   (3) $b\approx5.26$，$\angle A\approx81.21°$，$\angle C\approx53.79°$.
3. 是$\angle C$ 为直角的直角三角形.
4. 三内角约为$\angle A\approx62.10°$，$\angle B\approx86.64°$，$\angle C\approx31.26°$.

练习 B（第 9 页）

1. (1) $\triangle ABC$ 是钝角三角形.
2. 略.
3. 略.

习题 1-1A（第 9 页）

1. (1) $\angle C=75°$，$b=\sqrt{6}$，$c=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

(2) $\angle C=120^\circ$，$a=2\sqrt{3}+2$，$c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

(3) $c=2$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$或 $c=1$，$\angle B=120^\circ$，$\angle C=30^\circ$.

(4) 因为 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}\approx 1.13>1$，所以无解.

2. (1) $c\approx 4.28$，$\angle A\approx 38.7^\circ$，$\angle B\approx 59.0^\circ$.

(2) $a\approx 10.5$，$\angle B\approx 56^\circ$，$\angle C\approx 81.7^\circ$.

(3) $\angle B=90^\circ$，$\angle A\approx 35.26^\circ$，$\angle C\approx 54.74^\circ$.

(4) $\angle A\approx 41.4^\circ$，$\angle B\approx 55.8^\circ$，$\angle C\approx 82.8^\circ$.

3. $AB\approx 37$ cm，$AD\approx 29$ cm.

4. (1) $\angle A=\angle B\approx 68^\circ$，$\angle C\approx 44^\circ$.

(2) $c\approx 2.95$，$\angle A\approx 28.6^\circ$，$\angle B\approx 106.4^\circ$.

(3) $c=\sqrt{10}\approx 3.16$，$\angle A\approx 66.7^\circ$，$\angle B\approx 37.8^\circ$，$\angle C\approx 75.5^\circ$.

5. (1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$； (2) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\approx 126.9^\circ$.

6. $\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$.

7. 解法同 1.1.1 节例 2.

习题 1-1B（第 10 页）

1. (1) 因为 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}>1$，所以无解.

(2) $\angle C\approx 103^\circ$，$c\approx 5.5$，$\angle B\approx 32^\circ$.

(3) $\angle B\approx 14.5^\circ$，$\angle C\approx 135.5^\circ$，$c\approx 5.6$.

(4) $\angle C\approx 76.1^\circ$，$c=4.02$，$\angle B\approx 28.9^\circ$.

2. $m=-3$.

3. $\angle A\approx 108.4^\circ$，$\angle B\approx 26.6^\circ$，$\angle C=45^\circ$.

4. $2\sqrt{21}$.

5. $k=\dfrac{55}{4}$.

6. (1) 证明$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$，$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 即得.

(2) $\angle DAB=\arcsin\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\approx 71.6^\circ$，$\angle CAB=\arctan\dfrac{3}{2}\approx 56.3^\circ$.

7. $\cos A=\dfrac{1}{2}$，$\angle A=60^\circ$.

8. 略.

9. 当 $a=b=c=2$ 时，三角形周长最小为 6.

10. 参考拓展资源(二)“海伦公式与秦九韶三斜求积公式”.

探索与研究（第 10 页）

1. $S_{\square OACB}=19$.

2. $S_{\triangle ABC}=16$.

3. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$.

练习 A（第 14 页）

1. 21.29 m.
2. $BC=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}h$.
3. 水流速度约 26.5 km/h.

练习 B（第 15 页）

1. 顶杆 BC 长 1.89 m.
2. 活塞 A 移动的距离为 81 mm.

习题 1-2A（第 15 页）

1. A，B 两点间的距离约为 59.7 m.
2. 河堤背水坡的倾斜角约为 116°.
3. 山高约 381.6 m.
4. 在 OB 方向上分力为 2.44 N，OA 方向上的力为 5.75 N.

习题 1-2B（第 16 页）

1. 旗杆高 16.8 m.
2. 绿地面积约 259 m^2.
3. AB 的长为 $h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta-2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma}$.

Ⅲ巩固与提高（第 18 页）

1. (1) $b\approx19.3$.　　(2) $\angle B\approx64°$，$c\approx30$ 或 $\angle B\approx116°$，$c\approx13$.
2. (1) $\angle B=30°$，$\angle C=90°$，$c=40$.
   (2) $\angle B=90°$，$\angle C=30°$，$c=10$.
   (3) $b\sin A>15=a$，所以不能构成三角形.
3. (1) $\angle A\approx43.5°$，$\angle B\approx100.3°$，$\angle C\approx36.2°$.
   (2) $c\approx4.3$，$\angle A\approx39.0°$，$\angle B\approx58.4°$.
4. $\angle C=107.6°$.
5. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{61}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{21}$，$\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}\approx49.1°$.
6. $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\approx141.8°$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-44.0$.
7. 提示：用正弦定理及倍角公式.

8. 提示：$\sin A=\sin(180^\circ-A)=\sin(B+C)=\sin 3B$.

9. 提示：利用正弦定理及两角和与差的正弦公式.

10. 提示：作 BC 边上的高 AH，则 $BC=BH+HC=c\cos B+b\cos C$.

11. 提示：用正弦、余弦定理证明 $a^2=b^2+c^2$.

12. 12 小时后.

Ⅳ自测与评估（第 19 页）

1. (1) $\sqrt{2}$. (2) 30°. (3) 75°或15°. (4) $\sqrt{13}$. (5) $180^\circ-\arccos\frac{1}{4}$或$104.5^\circ$. (6) 14.6°.

2. $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{13}$，$S=3\sqrt{3}$.

3. $AC=2\sqrt{7}$，$\frac{BC}{CD}=2$.

4. 分别在$\triangle ABD$，$\triangle ACD$中运用正弦定理，可证得$\angle B=\angle DAC$或$\angle B+\angle DAC=90^\circ$，从而可得$\triangle ABC$是直角三角形或等腰三角形.

5. $\frac{6}{5}\sqrt{3}$.

6. 21.2 海里.

7. 略.

六、反馈与评价

Ⅰ　知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{15}$，$\angle A=30^\circ$，则 c 等于（　　）.

(A) $2\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{5}$　　(C) $2\sqrt{5}$或$\sqrt{5}$　　(D) 以上都不对

2. 已知$\triangle ABC$中，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则$\triangle ABC$为（　　）.

(A) 直角三角形　　(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形　　(D) 等边三角形

3. 已知$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，且$\angle B=30^\circ$，则$\triangle ABC$的面积等于（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，则三角形的最小内角是（　　）.

(A) 60°　　(B) 45°　　(C) 30°　　(D) 以上答案都不对

5. $\triangle ABC$中，$a=80$，$b=100$，$\angle A=45^\circ$，则此三角形解的情况是（　　）.

(A) 一解　　(B) 两解　　(C) 一解或两解　　(D) 无解

6. 设 a，b，c 分别是△ABC 中，∠A，∠B，∠C 所对边的边长，则直线 $\sin A\cdot x+ay+c=0$ 与 $bx-\sin B\cdot y+\sin C=0$ 的位置关系是（　　）.

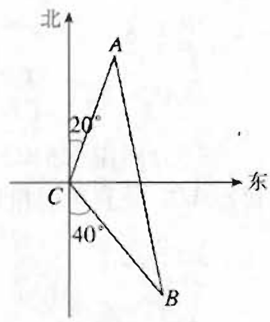
(A) 平行　　(B) 重合　　(C) 垂直　　(D) 相交但不垂直

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 在△ABC 中，$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=2$，那么∠B 等于____.

8. 已知△ABC 的三边长分别是 $2m+3$，m^2+2m，m^2+3m+3（$m>0$），则最大内角的度数是__________.

9. 在△ABC 中，∠$A=60°$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ =____________.



10. 如图，已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离都等于 a km，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 20°，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 40°，则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为__________.

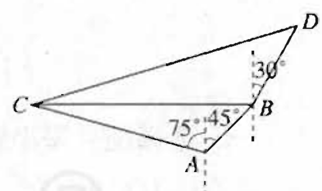
三、解答题（共 50 分）

11. （满分 12 分）已知在△ABC 中，∠$A=120°$，$a=7$，$b+c=8$，求 b，c 及∠B.

12. （满分 12 分）在△ABC 中，角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，证明：$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

13. （满分 12 分）连接直角三角形的直角顶点与斜边的两个三等分点，所得到的两条线段的长分别为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$），求斜边的长.

14. （满分 14 分）在海岸 A 处，发现北偏东 45°方向，距 A 处 $\sqrt{3}-1$ 海里的 B 处有一艘走私船，在 A 处北偏西 75°方向，距 A 处 2 海里的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ 海里/小时的速度追截走私船，此时走私船正以 10 海里/小时的速度从 B 处向北偏东 30°方向逃窜，问缉私船沿什么方向能最快追上走私船，并求出所需要的时间.



知识与方法测试参考答案

一、1. C.　2. A.　3. D.　4. B.　5. B.　6. C.

二、7. $\dfrac{\pi}{3}$.　8. 提示：通过比较得，边长为 $m^2+2m+3(m>0)$ 的边为最长边，所以所对角最大. 120°. 9. 提示：由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$. 10. $\sqrt{3}a$ km.

三、11. 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$，

所以 $49=64-2bc\left(1-\frac{1}{2}\right)$，解得 $bc=15$.

由 $\begin{cases}b+c=8\\bc=15\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=3\\c=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=5\\c=3\end{cases}$

若 $b=3$，$c=5$，利用 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，得 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，于是 $\angle B=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}\approx21.8°$.

若 $b=5$，$c=3$，同理可得 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，于是 $\angle B=\arcsin\frac{5\sqrt{3}}{14}\approx38.2°$.

所以 $b=3$，$c=5$，$\angle B\approx21.8°$ 或 $b=5$，$c=3$，$\angle B\approx38.2°$.

12. 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以

$$a^2-b^2=b^2-a^2-2bc\cos A+2ac\cos B.$$

所以 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{a\cos B-b\cos A}{c}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，

所以 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

13. 设 $A(3a,\ 0)$，$B(0,\ 3b)$，因为点 C 分 $\overrightarrow{BA}$ 所成的比为 $\lambda=2$，所以 C 点坐标为 $x_C=\frac{0+2\cdot 3a}{1+2}=2a$，$y_C=\frac{3b+2\times0}{1+2}=b$，所以 $C(2a,\ b)$. 同理 $D(a,\ 2b)$. 依题意，

$$\sin^2\alpha=|OC|^2=4a^2+b^2;$$
$$\cos^2\alpha=|OD|^2=a^2+4b^2;$$

两边相加得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=5a^2+5b^2$，即 $a^2+b^2=\frac{1}{5}$.

所以斜边长 $|AB|=\sqrt{(3a-0)^2+(0-3b)^2}=3\sqrt{a^2+b^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

14. 设缉私船追上走私船需 t 小时，则有 $CD=10\sqrt{3}t$，$BD=10t$.

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB=\sqrt{3}-1$，$AC=2$，$\angle BAC=45°+75°=120°$.

据余弦定理，可得 $BC=\sqrt{6}$.

根据正弦定理，可得 $\sin\angle ABC=\frac{AC\sin 120°}{BC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\angle ABC=45°$，而 $\angle CBD=90°+30°=120°$.

在 $\triangle BCD$ 中，据正弦定理，可得 $\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{10t\cdot\sin 120°}{10\sqrt{3}t}=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle BCD=30°$，$\angle BDC=30°$，所以 $BD=BC=\sqrt{6}$，则有 $10t=\sqrt{6}$，$t=\frac{\sqrt{6}}{10}=0.245$（小时）$=14.7$ 分钟. 答略.

Ⅱ 评价建议

1. 除章末测试外，还可针对正弦定理、余弦定理、三角形的面积等知识设计一套测试卷进行测评. 要将过程评价与终结性评价结合起来，不可忽视任何一个方面.

2. 对学生探究学习、体会和运用正弦定理与余弦定理的过程评价，要结合多个方面：课堂自主探究能力、思考讨论、交流及回答问题的表现；课堂练习与课后作业的情况；运用两个定理解决一些与测量有关的简单的实际问题的能力；课外师生或学生之间的交流等. 评价的目的应着重于发现“激励学习或促进发展”的切入点或动力源.

3. 要重视“实习作业”的评价. 每位同学或合作小组在教师指导下，认真完成实习作业报告后，要组织在班级中进行交流、互评，最后由师生综合定出等级. 评价要以肯定和鼓励为主，肯定某一点或某几点，不做否定性评价，但可以提出修改意见或指出努力的方向.

第二章 数　列

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解数列的概念，体会数列是一种特殊函数，能根据数列的前几项写出简单数列的通项公式.

2. 类比函数理解数列的几种表示方法（列表、图象、通项公式等），能根据项数多少、数列的性质对数列分类.

3. 了解递推公式是给出数列的一种方法，能根据递推公式写出数列的前几项，能求某些数列的通项公式.

4. 掌握等差数列的概念、等差中项的概念，会根据定义判定数列是否是等差数列.

5. 掌握等差数列的通项公式及推导方法，会类比直线、一次函数等有关知识研究等差数列的性质，能熟练运用通项公式求有关的量：a_1，d，n，a_n.

6. 掌握等差数列的前 n 项和公式及推导方法. 当 a_1，d，n，a_n，S_n 中已知三个量时，能熟练运用通项公式、前 n 项和公式求另两个量. 灵活运用公式解决与等差数列有关的综合问题. 能构建等差数列模型解决实际问题.

7. 掌握等比数列的概念，等比中项的概念，能利用定义判定等比数列.

8. 掌握等比数列的通项公式及推导方法，能类比指数函数利用等比数列的通项公式研究等比数列的性质，能熟练运用通项公式求有关的量：a_1，q，n，a_n.

9. 掌握等比数列的前 n 项和公式及推导方法. 当五个量 a_1，q，n，a_n，S_n 中已知三个量时，能熟练运用通项公式、前 n 项和公式求另两个量. 能灵活运用公式解决有关等比数列的综合问题. 能构建等比数列模型解决实际问题.

10. 提高观察、概括、猜想、运算和论证能力，能通过类比、转化等方法解决有关数列的一些问题.

（二）过程与方法目标

1. 结合实例，通过观察、分析、归纳、猜想，让学生经历数列概念、公式、性质的发现和推证过程，发现数列的递推公式，体会递推方法是给出数列和研究有关数学问题的重要方法.

2. 借助类比、对比，体会数列是一种特殊的函数. 经历类比函数研究数列，使用函数的思想方法解决数列问题，对比等差数列研究等比数列，对比一次函数、二次函数、指数函数研究等差数列、等比数列的过程.

3. 引导学生收集有关资料，经历发现等差、等比关系，建立等差数列和等比数列的模型的过程，探索它们的概念、通项公式、前 n 项和公式及其性质，体会它们的广泛应用.

4. 帮助学生不断发现、梳理和体验本章蕴涵着的丰富的数学思想方法，设计适当的训练，进一步感受“观察、试验、归纳、猜想、证明”的方法和模型化思想，体验函数与方程、转化与化归、分类讨论等数学思想，掌握累差、积商、迭代、倒序相加、乘以公比错位相减等具体方法.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 本章学习应使学生认识到数学来源于生活实践，生活中充满了数学，数学中有无穷的奥秘. 学会从生活实际中发现数学规律，体会数学美，体验探索的乐趣. 了解我国数学家对数列的贡献，培养学生的爱国热情. 通过了解数学家对数列问题锲而不舍的探索过程，培养学生学习数学的兴趣.

2. 养成收集资料、自主探索、合作交流的习惯，提高数学建模能力，提高应用意识和实践能力.

3. 进一步体会从特殊到一般，由已知到未知，从有限到无限的认识事物的规律，养成在探索未知事物时既善于大胆猜想又孜孜于严格证明的创新意识和科学精神.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 以函数为纲，应用一次、二次函数的性质研究数列通项公式和求数列前 n 项和公式.

2. 递推的观点：给出数列的递推定义

$$a_n=a_{n-1}+d,\ a_n=a_1q^{n-1},\ S_n=S_{n-1}+a_n.$$

3. 通过数列的教学，加强代数基本方法和技能的训练. 如，设未知数列方程（组）、解方程（组）的技能. 灵活运用数系通性进行代数式变形的能力.

4. 融入算法. 要求学生能写出求等差、等比数列的通项及前 n 项和的算法.

5. 加强与函数、三角和解析几何的联系.

（二）内容结构

1. 内容编排

数列是高中阶段的重要数学基础知识和基本技能. 在本章中，学生将学习数列、等差数列、等比数列.

通过章前言向学生展示有关斐波那契数列的故事和三个常见的数列问题，一方面可以使学生带着问题开始学习，另一方面可以激发学生探索求知的积极性.

通过具体数列探索数列的通项公式等有关概念，并从集合映射的角度体会数列是一种特殊的函数，可以用函数的观点研究数列.

结合具体数列，让学生体会递推公式是给出数列的一种方法，递推思想是研究数列的有效途径.

通过具体数列抽象出等差数列模型，给出等差数列的概念、通项公式、前 n 项和公式，并针对这些基本量进行基本技能训练，教材还注意类比直线和一次函数研究有关量的关系，突出解决实际问题的应用意识.

通过具体数列抽象出等比数列模型，给出等比数列的概念、通项公式、前 n 项和公式，并针对这些基本量进行基本技能训练. 教材中突出了用等比数列模型解决实际问题，注意了等比数列与指数函数的对比.

对一些需要补充和有一定难度的问题，教材以“思考与讨论”“探索与研究”的形式来处理.

为展示数学文化价值，在阅读与欣赏中介绍了《级数趣题》和《无穷与悖论》两篇文章.

全章贯穿观察、分析、类比、归纳、猜想、化归、模型化、函数、递推的思想等思想方法，注意联系函数、三角、解析几何、立体几何和实际问题，进行观察分析、归纳概括、计算技巧、转化化归等技能训练，提高学生的思维能力，培养学生的动手能力和创新意识.

2. 地位与作用

数列是一个古老的数学内容，也是近代数学研究的重要对象.

公元前 3000 年，埃及的象形文字就记载着一个“把 10 斗大麦分给 10 个人，使每相邻两个人所得的大麦相差 $\frac{1}{8}$ 斗”的问题，这是有记载的人类所发现的最早的一个等差数列问题.

在巴比伦、印度和中国的数学文献中也有很多关于数列问题的记载.

我国于公元前 100 年成书的《周髀算经》里就有“在周域的平地立 8 尺高的周髀（即标杆），日中测影，在二十四节气中，夏至影长 1 丈 3 尺 5 寸，以后每过一个节气递减 9 寸 $9\frac{1}{6}$ 分；冬至影最短，仅长 1 尺 6 寸. 以后每过一个节气又递增 9 寸 $9\frac{1}{6}$ 分”的记载. 其他如《九章算术》《孙子算经》等书中，都有关于等差数列或等比数列问题的叙述.

公元前 6 世纪，古希腊毕达哥拉斯学派经过研究曾得到结果 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；公元 7 世纪印度数学家婆罗摩笈多曾求得等差数列求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；我国宋代的沈括（1030～1094 年）还得出了二阶等差数列的求和公式：$a\geqslant n$，$b\geqslant n$，a，$b\in \mathbf{N}_+$，则 $ab+(a-1)(b-1)+(a-2)\cdot(b-2)+\cdots+(a-n+1)(b-n+1)=\frac{1}{6}n\left[2n^2-3(a+b+1)n+6ab+3a+3b+1\right]$. 特别是对于当 $a=b=n$

时，推导出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．宋代的杨辉、元代的朱世杰作了更多的研究．在朱世杰的《四元玉鑑》一书中，出现了公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$，比西方（莱布尼茨）推出这个结果要早三百多年.

另一个典型的例子是"斐波那契数列"．斐波那契于1202年提出该数列，但它真正被人们重视，通常认为是在证明了该数列 $\{a_n\}$ 满足"$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$"以后，这个结果使它在应用领域充满了生命力．在我国，上世纪的五六十年代就曾出现过一个推广"优选法"的高潮．在生物学中，可以用这个数列来描述某些动植物的生长规律，著名的"鲁德维格定律"实际上就是"斐波那契数列"在植物学中的应用．近代计算机科学的发展，更为斐波那契数列的应用提供了许多新的领域.

另外，由于数列极限的研究，才最终导致定积分理论的完成．这是数列的有限项求和到无限项求和这一级数的跨越.

因此，数列是高中数学的重要内容之一，它的基础性和发展性都是不言而喻的，其地位和作用体现在以下几个方面：

（1）数列是一种特殊的函数，它既与函数等知识有密切的联系，又丰富了函数的内容．数列也是今后选修《数列与差分》和进一步学习高等数学的基础.

（2）数列有着广泛的实际应用，是反映自然规律的基本数学模型．例如，堆放着的物品的总数的计算要用到数列的前 n 项和公式；储蓄、分期付款等有关计算也要用到数列知识．因而，对于数列的学习，有助于培养学生的建模能力，发展应用意识.

（3）本章内容的教学突出学生的数学思维能力的培养，自始至终贯穿观察、分析、归纳、类比、递推、运算、概括、猜想、证明、应用等能力的培养．既通过归纳、类比、递推等方法的应用突出合情推理能力的培养，又通过通项公式、递推公式、前 n 项和公式等内容进行大量技能训练，培养演绎推理能力.

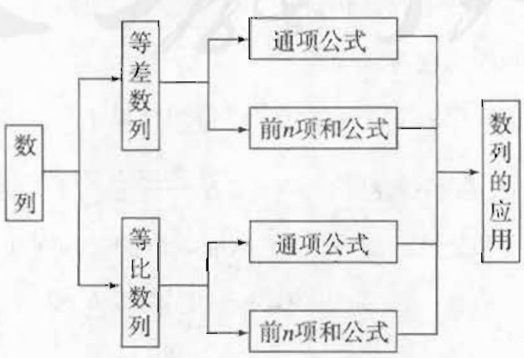
（4）数列与函数、三角、不等式、数学归纳法、解析几何、立体几何等有广泛的联系，有很强的综合性，是高中代数中培养学生综合能力的好素材.

3. 重点与难点

本章的重点是数列的概念，等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式.

本章的难点是等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式的推导以及它们的综合运用.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约12课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 数列

　　2.1.1 数列　　1课时

　　2.1.2 数列的递推公式（选学）　　1课时

2.2 等差数列

　　2.2.1 等差数列　　2课时

　　2.2.2 等差数列的前 n 项和　　2课时

2.3 等比数列

　　2.3.1 等比数列　　2课时

　　2.3.2 等比数列的前 n 项和　　2课时

小结与复习　　2课时

（四）教学建议

2.1 数　列

本节内容主要包括：数列的概念、通项公式，数列的表示法，数列的分类，数列的递推公式.

重点是数列的概念、数列的通项公式.

难点是求数列的通项公式和递推公式的应用.

2.1.1 数　列

1. 本节在本章前言的基础上，通过分析7个具体例子，得出数列的概念、通项公式，并从集合与映射的角度认识到数列是一种特殊的函数，因此数列的表示法应有列表法、图象法（图象是相应的曲线或直线上横坐标为正整数的一群孤立的点）和通项公式等形式. 有条件的学校可结合课件5202学习，加深学生对数列表示法的了解.

2. 按照数列的项数，数列可分为有穷数列、无穷数列. 类比函数的单调性，数列可分为递增数列、递减数列、常数列和摆动数列.

3. 通过例1给出已知通项公式求数列某些项的方法，类似于已知函数解析式求函数值，这类问题只要代入计算即可.

4. 通过例2展示了已知数列的前几项，写出数列的“一个”通项公式的方法，这是一个难点. 需要观察归纳出序号与项值之间的对应关系，必要时将所给的前几项进行拼凑、整理，分成几部分来寻找序号与项值之间的对应关系，如符号、分子、分母……然后合在一起就得到了一个通项公式. 如数列(3) 可写成 $-\frac{2}{1\times3}$，$-\frac{4}{3\times5}$，$-\frac{6}{5\times7}$，$-\frac{8}{7\times9}$. 符号为负，分子为偶数列$\{2n\}$、分母为$(2n-1)(2n+1)$.

所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{-2n}{(2n-1)(2n+1)}$. 还应该强调指出，给出数列的前几项，要求通过观察其规律写出一个符合条件的通项公式，结果不是唯一的. 例如，根据 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=8$，很容易归纳出通项 $a_n=2n$. 但是，如果写成通项公式为 $a_n=A(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+2n$，显然也成立. 事实上，如果仅仅知道函数的图象经过的有限个点，这时其他点的位置并不能确定. 所以例 2 提出的要求是"写出下面数列的一个通项公式". 当然这里所说的"不唯一"有时也包含另一层意思，即对于一个给出前几项的数列，即使规律已经完全确定，写出的通项公式的形式也可能不同. 如数列 (2) 的通项公式也可以写成 $a_n=1+(-1)^n$，还可以写成 $a_n=2\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|$ 等. 关于求通项公式还可以结合课件 5201 来学习.

5. 正因为归纳发现数列的通项公式是本节教学的一个难点，所以它也为学生主动探索、自主学习，逐步提高归纳、观察能力提供了一个机遇、一个平台，教学时应适当再设计一些例题，有针对性地让学生通过探究与实践，从中总结出一些解决这类问题的"通性通法"，以达到以简驭繁的目的. 例如，解决这类问题的关键有时往往就是设法与数列 $a_n=n$ 进行比较. 下面举几个例子供大家参考.

(1) 5，55，555，…，$\underbrace{55\cdots5}_{n个}$，….

通过观察，$\underbrace{55\cdots5}_{n个}=\frac{5}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}=\frac{5}{9}(10^n-1)$.

(2) 2，0，2，0，2，0，….

通过分析与研究，这个数列可以由下面两个数列相加得到：

$$1, 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots;$$
$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots.$$

所以该数列的通项公式可以写成 $a_n=1+(-1)^{n+1}$.

(3) 2，6，12，20，30，….

通过观察，发现 $2=1^2+1$，$6=2^2+2$，$12=3^2+3$，…，从而得到 $a_n=n^2+n$；

通过与 $a_n=n$ 进行比较，发现 $2=1\times2$，$6=2\times3$，$12=3\times4$，…，从而还可以得到 $a_n=n(n+1)$.

另外，如果要研究 1，3，6，10，15，…，则可以联想到数列 2，6，12，20，30，…，这时立即可得 $a_n=\frac{1}{2}(n^2+n)$. 这就是说有时也应要求学生熟记一些特殊而又较为典型的数列的通项公式. 很显然，这里说的熟记不能理解成机械的记忆.

6. 例 3 是函数与数列的综合题. 数列不等式的证明与函数不等式的证明相同；数列的单调性只需考察 $a_{n+1}-a_n$ 的符号即可，即只研究相邻项的大小即可，与函数单调性的证明不同.

本节学习的主要方法是"观察、分析、归纳、猜想"，并注意类比、化归思想的使用.

2.1.2 数列的递推公式(选学)

1. 这是一节选学内容，目的是使学生了解数列的递推公式是给出数列的一种方法，也是研究数列的一个途径. 它是本章中主要方法之一.

2. 本节先利用章前言介绍的数列①③给出了数列的递推公式的定义，并让学生认识到数列的递推公式是给出数列的一种方法. 有些数列的通项公式形式较复杂，用递推公式来描述却非常简单、明了；有些数列的通项公式不一定存在，但可以由递推公式来确定这个数列，如数列③.

3. 通过例 1 说明由数列的递推公式可以写出数列的前 n 项，根据写出来的这些项，有时还可以进一步归纳猜想出通项公式，例 1 中数列的通项公式就是 $a_n=\frac{2}{3-2n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

4. 例 2 所给的数列，若通过通项公式来进行研究则非常困难，但通过递推公式则容易得多，这说明递推方法是研究数列的有效途径.

5. “思考与讨论”的目的在于引导学生用递推的方法探索实际问题. 这个问题在教科书中先后出现 3 次，教学中应注意把握分寸，分出层次：第一次出现在章头图中，一对一对大兔子、小兔子营造出一种氛围，让学生自己去看、去想，从而引起遐想，留下悬念. 也许学生还看不懂这副图的意思，但却有助于增强学习的兴趣. 第二次是在本章的前言中，给出了数列，而且冠以“斐波那契”之名，学生把它与前面的图联系起来了，就会产生要去研究它的欲望，进入“愤悱”的状态，但这时仍然引而不发，不要展开. 第三次终于在“思考与讨论”中明确提出所要思考、讨论的问题——这个数列的递推公式，学生自然就会积极进行观察、思考，主动展开讨论，兴趣盎然地投入到探究活动中去.

斐波那契数列是一个很有名而且也很有用的数列，应该让学生了解，它的递推公式是 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant1)$，可谓一目了然. 而它的通项公式是 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，显然，这个通项公式的形式比较复杂，而且现阶段学生也无法求得. 由此可见递推的方法在研究数列时的作用，从而使学生对递推公式产生更加深刻的认识.

事实上，本章的重要内容——后面即将专门研究的等差数列与等比数列，它们都是用递推关系定义的，即

$$a_{n+1}-a_n=d,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq0).$$

6. 与数列递推公式有关的问题，要适当控制难度，循序渐进. “探索与研究”中的第一个例子是根据递推公式先给出数列的前几项，然后归纳猜想出通项公式. 第二个例子的目的是利用递推的方法研究数列问题. 其关键是弄清 a_n 与 a_{n-1} 的关系. 研究的过程是分两步进行的：先弄清了当 $n=1, 2, 3, 4$ 时的具体的关系后，再研究 a_n 与 a_{n-1} 的关系. 平面上 $n-1$ 条直线 l_1，l_2，…，l_{n-1} 已经将平面分成了 a_{n-1} 个部分，当增加第 n 条直线 l_n 后，这条直线与前面的 $n-1$ 条直线有 $n-1$ 个交点，这些交点将直线 l_n 分成 n 个部分（射线或线段），这 n 个部分将所在区域一分为二，即增加一条直线，平面被多分出 n 部分，所以 $a_n=a_{n-1}+n$. 根据递推公式我们可以求出这个数列的通项公式 $a_n=\frac{n^2+n+2}{2}$.

本节教学应让学生反复体会递推公式是给出数列的一种方法，同时也是研究数列的一种有效途径. 本节内容揭示了一些数学问题的发生发展过程，对培养学生的学习兴趣与探索能力都非常有利. 因此，建议有条件的学校能根据本节的内容，安排一个专题向学生介绍，但教学要求（包括难度和例习题）可以根据学生的实际水平适当调整.

2.2 等差数列

本节内容主要包括：等差数列的概念、通项公式，等差中项，前 n 项和公式.

2.2.1 等差数列

1. 根据实例归纳出等差数列的概念. 要让学生体会两个要点：其一，从第 2 项起，每一项与它的前一项的差可以表示为 $a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$；其二，差等于同一个常数 d，即 $a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant2)$.

2. 例 1 的目的是加深学生对等差数列定义的理解，同时给出判断一个数列是等差数列的方法——利用定义. 另外，还应进一步指出，当通项公式为 $a_n=an+b$（a，b 是常数）时，对应的数列一定是等差数列（这时，该数列的公差 $d=a$），从而为以后将等差数列与直线和一次函数比较作好铺垫.

3. 先用归纳的方法猜想出等差数列的通项公式，然后根据等差数列的定义，利用迭加法进行证明. 归纳猜想和迭加法都很重要，要让学生认真体会和运用. 可结合课件 5203 研究等差数列的通项.

4. 例 2 中，(1) 给出了已知数列中的某些项求等差数列通项公式的方法. (2) 利用通项公式判断某数是否是此等差数列的一项的方法——设此数为数列中的项 a_n，由 $a_n=a_1+(n-1)d$，能得 $n\in\mathbf{N}_+$，则 a_n 就是这个数列中的一项，否则就不是这个数列中的一项.

5. 等差中项是等差数列连续（或对称）的三项之间的一种特殊关系，今后会经常用到. 等差中项是一个重要的概念，这是因为：

(1) 一个数列，从第 2 项起，每一项都是它前后两项的等差中项 $\Leftrightarrow$ 这个数列为等差数列，也就是说，它反映了等差数列的特征性质；

(2) 关于等差中项，除把握 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$（$n>1$，$n\in\mathbf{N}_+$）外，还应该知道 $a_n=\dfrac{a_{n-p}+a_{n+p}}{2}$（$n-p\geqslant1$，$n$，$p\in\mathbf{N}_+$）. 这个“派生”出来的性质同样反映了等差数列的特征、性质，但在实际应用时它却灵活、方便得多.

6. 把等差数列的通项公式改写成 $a_n=nd+(a_1-d)$. 再联想一次函数 $y=ax+b$(a，b 是常数)，可以很自然地得出如下结论：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是 $a_n=an+b$(a，b 是常数)；

(2) 两个独立条件，即可确定等差数列的通项公式；

(3) 表示等差数列图象的点均在一条直线上，这条直线的斜率为 d；

(4) 例 3 相当于已知直线 $y=dx+b$ 的斜率及直线上一点的坐标 $(m，a_m)$，求此直线上横坐标为 n 的点的纵坐标，得出 $a_n=a_m+(n-m)d$. 该结论是抽象给出的，应注意让学生在后面练习 A 的第 2 题中通过实践加深理解，牢固掌握.

从这段课文（结合练习 B）的设计来看，教材中对等差数列的一些性质并非直接告诉学生，让学生死记硬背，而是创设情境，以题目的形式，让学生在探索发现中理解掌握，并成为将来解决问题的依据. 这样处理既可以让学生经历数列性质的发现过程，又可以帮助学生更好地理解和掌握，从而自觉地运用. 因而，在教学中要认真领会编写意图，予以贯彻.

7. 例 4 的解法 1，先利用求斜率的方法求得 d，再利用定义求解；解法 2，从全局着眼，利用等差中项求解. 解法 1 是按部就班的解决问题，解法 2 则更具灵活性，有助于对第 5 点所说的特征、性质的理解.

8. 例 5 是一道综合一元一次不等式的题目，解法类似于一元一次不等式的解法，所不同的是此处应求正整数解.

本节教材在教学中应突出建模、类比方法的渗透与强化.

2.2.2 等差数列的前 n 项和

1. 本节教材从实例——“图 2-6 中，钢管共有多少根?”引出求等差数列前 n 项和的问题. 通过图 2-7 及这个实例的解答，使学生了解“等差数列前 n 项和”的意义，并给出了倒序相加求和的方法. 在此基础上推导出等差数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 与 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，最后举例说明公式的应用. 教材的编写体现了知识形成的过程，目的是让学生经历将实际问题抽象成数学模型并予以解决和应用的过程，为学生能在探索、发现的活动中建构数学知识创造条件，所以教学中要充分发挥学生的主观能动性.

在公式的推导中关键是让学生理解倒序相加后对应项的和都等于 a_1+a_n，这也是倒序相加法的要点之所在，要让学生深刻体会，并且以后在类似情景中能运用这种方法. 如果将等差数列的通项公式代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，前 n 项和又写成了 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 的形式. 对等差数列求和为什么要给出两个公式? 要引导学生辨析两种形式的特点，弄清如何恰当地选用公式. 可结合课件 5203 学习等差数列的前 n 项和.

2. 例 1 属于等差数列中，a_1，a_n，n，d，S_n“知三求二”的题目，目的在于训练学生对通项公式和前 n 项和公式的综合应用能力.

3. 例 2 及“思考与讨论”从具体到抽象，讨论的是同一个问题，它们的设计意图是先借助实例研究下面一组问题：

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式，这个数列是确定的，并且这个数列的通项公式可以表示为$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$当 $n=1$ 时，如果规定 S_n-S_{n-1} 的值等于 S_1，那么 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$ 即为所求通项公式.

(2) 等差数列的前 n 项和公式可变形为 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，即当 $d\neq 0$ 时，是关于 n 的二次函数. 如果一个数列的前 n 项和的公式是 $S_n=an^2+bn+c$（a，b，c 为常数），那么这个数列的通项公式是$a_n=\begin{cases}a+b+c & (n=1)\\ 2an-a+b & (n\geqslant 2)\end{cases}$只有当 $c=0$ 时，$a_1=a+b+c$ 才满足 $a_n=2an-a+b$. 因此，当数列的前 n 项和公式为 $S_n=an^2+bn$ 时，所确定的数列才是等差数列. 这时，等差数列的公差 $d=2a$.

(3) 类比二次函数，等差数列的前 n 项和存在最值问题. 方法一：类似于二次函数，利用配方法求顶点坐标，但数列中 $n\in\mathbf{N}_+$. 方法二：先求通项公式，若 $\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}<0\end{cases}$则数列的前 n 项和最大；若 $\begin{cases}a_n\leqslant 0\\ a_{n+1}>0\end{cases}$则数列的前 n 项和最小.

以上三个问题均有一定难度，教材从具体例子出发，采用循序渐进、层层深入的方式，以问题解答的形式，通过分析、归纳、探索而得，为学生积极思考、自主探究搭建了理想的平台. 研究这组问题，重在训练思维、提高技能. 通过对于这组问题的探讨，才能帮助学生更好地运用这些结论和方法解决具体问题.

对上述这组问题的研究，最终要落实到对于“等差数列的求和公式是 $S_n=an^2+bn$”的认识上，即

从形式上看，$d\neq0$ 时，它是 n 的二次函数，且常数项为 0. 举一个例子，例如：已知两个等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 和 S'_n 的比为 $(3n+2):(2n-1)$，求 $a_{10}:b_{10}$.

由于对上述求和公式的特征认识肤浅，一种错误的解法是

$$\frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{S_{10}-S_9}{S'_{10}-S'_9}=\frac{[(30+2)-(27+2)]\cdot k}{[(20-1)-(18-1)]\cdot k}=\frac{3}{2}.$$

正确的应该是

$$\frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{S_{10}-S_9}{S'_{10}-S'_9}=\frac{[10(30+2)-9(27+2)]\cdot k}{[10(20-1)-9(18-1)]\cdot k}=\frac{59}{37}.$$

该例具有一定的典型性，既反映了学生对此特征性质的理解没有抓住本质属性，同时亦反映了我们在教学中对突出重点、抓住关键关注不够. 对此，希望大家在教学中能够予以重视.

同时指出，关于“研究等差数列前 n 项和的最值问题”可结合课件 5204 进行.

4. 例 3 是一道有关“教育储蓄”“零存整取”的应用问题，是重点问题. 可引导学生收集有关资料，作为一个研究性课题来处理.

2.3 等比数列

本节内容主要包括：等比数列的概念，通项公式，前 n 项和公式. 教学中要引导学生体会如何建立等比数列模型，利用模型解决具体问题. 等比数列的内容、结构、处理方法类似于等差数列，因此在教学中应注意类比等差数列.

2.3.1 等比数列

1. 类似于等差数列，首先通过具体例子，归纳分析等比数列的特点，给出等比数列的定义. 强调两点：(1) 从第 2 项起，每一项与它的前一项的比 $\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 都相等；(2) 比值为同一个常数 q $(q\neq0)$，即 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(q\neq0)$.

2. 通过例 1 给出判断一个数列是等比数列的方法.

定义法：当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$(q 为非零常数).

3. 等比数列的通项公式的推导类似于等差数列，先采用归纳的方法猜想出通项公式，然后利用迭乘的方法证明得 $a_n=a_1q^{n-1}$. 公式和推导公式的方法都非常重要，要求学生熟练掌握.

4. 等比中项是等比数列仅有 3 项时的特例，满足 $G^2=xy$. 注意与等差中项的区别：(1) 两个正数（或负数）的等比中项有两个 $\pm\sqrt{xy}$，而等差中项仅有一个 $\frac{x+y}{2}$；(2) 当两个数的符号相同时才有等比中项，而任何两个实数都存在等差中项. 另外，类似于等差数列，可结合例 4 的解法 2，引导学生通过观察、分析、类比总结出 $a_n^2=a_{n-p}\cdot a_{n+p}(n-p\geqslant1,\ n,\ p\in\mathbf{N}_+)$.

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以写成

$$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}q^n=c\cdot q^n\left(c=\frac{a_1}{q}\neq0\right).$$

当 $q\neq1$，且 $q>0$ 时，$y=c\cdot q^x$ 是一个非零常数与一个指数函数的积. 因此，表示数列 $\{c\cdot q^n\}$ 的

点都在函数 $y=c\cdot q^x$ 的图象上. 根据待定系数法，由两个独立条件就可求等比数列的通项公式. 类似于一般函数，等比数列也存在递增、递减、摆动等性质.

6. 通过例 2 给出了等比数列的性质 $a_n=a_mq^{n-m}$. 关于等比数列的其他性质也是通过习题的形式给出. 这与等差数列的性质处理是一样的，其设计意图也是一样的.

7. 例 3 是性质 $a_n=a_mq^{n-m}$的一个具体应用. “思考与讨论”是例 3 的拓展. 由此得出等比数列的另一个性质：在已知等比数列中，每隔 k 项取一项，保持原来顺序依次排列，所得数列还是一个等比数列. 这也是一个常用性质.

8. 例 4 的设计意图是应用下列知识解题：(1) $a_n=a_mq^{n-m}$；(2) 定义；(3) 等比中项. 要求学生对这些基本知识理解后，能够综合驾驭.

9. 通过“探索与研究”中的两个题目，教给学生用表格探究数学规律的方法. 可以引导学生利用这种方法进行研究性学习.

2.3.2 等比数列的前 n 项和

1. 推导等比数列的前 n 项和公式是一个难点. 为了提高学生兴趣，教材首先给出了国际象棋上放麦粒的故事，引出等比数列求前 n 项和的问题. 然后回到等比数列的定义，并写出以下 $n-1$ 个式子：

$$
\begin{aligned}
&a_2=a_1q,\\
&a_3=a_2q,\\
&a_4=a_3q,\\
&\cdots\cdots\\
&a_{n-1}=a_{n-2}q,\\
&a_n=a_{n-1}q.
\end{aligned}
$$

注意观察，并从整体上联想，将这 $n-1$ 个式子两边分别相加，得

$$a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})q,$$

进一步化归到 $S_n-a_1=(S_n-a_n)q$.

至此构造出关于 S_n 的方程，求解即得等比数列的前 n 项和公式

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$$

讨论 $q=1$ 与 $q\neq1$ 两种情况.

等比数列的前 n 项和公式还有一种推导方法：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}, \quad ①$$

两边同乘 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n, \quad ②$$

注意到①②两式有许多相同的项，两式相减，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

至此构造出了关于 S_n 的方程. 解方程可得等比数列的前 n 项和公式.

两种推导方法都是从整体观察发现规律，然后利用自身规律构造含 S_n 的方程，通过解方程求出

S_n，这种方法是学习数学、研究数学问题经常使用的方法. 可结合课件 5205 研究等比数列的前 n 项和.

教学中应反复强调，凡涉及解等比数列的问题，都要注意对 q 进行讨论，不能忽视 $q=1$ 的情况.

2. 作为等比数列前 n 项和公式的应用，解答国际象棋棋盘上的麦粒问题. 事实上，棋盘上麦粒的总数是等比数列 1，2，4，…，2^{63} 的前 64 项的和

$$S_{64}=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1.$$

$2^{64}-1$ 这个数很大，超过了 1.84×10^{19}，按千粒麦子的质量约为 40 克计算，麦粒的总质量超过了7 000亿吨（我国 2004 年小麦总产量为 9 100 万吨）. 因此，当国王了解到这一情况时，才明白他是不可能实现国际象棋发明者的要求的. 相信这个例子会给学生带来惊奇，从而激发学生学习数学的兴趣.

3. 例 1 是我国古代思想家庄子在“天下篇”中的一段论述，有关等比数列前 n 项和的问题. 先翻译成现代汉语，再化归为等比数列问题求解. 注意挖掘其教育功能，体会数学的文化价值.

4. 例 2 是以等比数列的通项公式、前 n 项和公式为工具来求数列中的量的问题. 在这两个公式中涉及到 5 个量：a_1，q，n，a_n，S_n，已知其中 3 个量就可求另外的 2 个量. 这实际上是方程思想的具体运用，属于基本技能，应加强这方面的练习.

5. 例 3、例 4 属于将具体问题化归或建模，利用等比数列的前 n 项和公式解题. 重点应放在如何进行观察、发现、分析、化归等比关系，并利用等比数列模型解决.

6. 等差数列和等比数列的前 n 项和的求法，算法程序清晰明确，有条件的学校应引导学生编拟算法程序，在计算机上求数列和. 也可以对数列中的 5 个量：a_1，d(或q)，a_n，S_n，n，进行已知 3 个量，求另外 2 个量的练习.

综上，数列一章的教学要突出培养学生的观察、分析、归纳、猜想、数学建模及应用能力，注重类比方法的使用，倡导积极主动、勇于探索的学习方式. 要突出培养学生的数据处理、转化化归、代数推理和数学思想方法的提炼和运用能力.

三、拓展资源

（一）分组数列

把一个数列 $\{a_n\}$ 按照一定规律进行分组，得到的就是原数列的分组数列，也叫做分群数列或群数列. 例如，将正整数数列依次按第 1 组 1 个，第 2 组 2 个，…，第 k 组 k 个的规律分组得到分组数列：(1)，(2，3)，(4，5，6)，(7，8，9，10)，…；又如，将数列 $\{a_n\}$ 按第 1 组 1 个，第 2 组 3 个，…，第 k 组 $2k-1$ 个的规律分组得分组数列：(a_1)，(a_2, a_3, a_4)，$(a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$，….

分组数列的基本问题是确定原数列的某一项属于分组数列的哪一组的第几个数，若设原数列 $\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是分组数列的第 k 组的第 m 个数，找出 n 与 k 的关系是解此类问题的关键，为此需要根据分组规律确定前 $k-1$ 组的项数，建立关于 n 与 k 的不等式，通过解不等式及 n，k 为正整数求

出 n 或 k.

例 1 将正整数数列依次按第 1 组 1 个，第 2 组 2 个，…，第 k 组 k 个的规律分组：(1)，(2，3)，(4，5，6)，(7，8，9，10)，…，问 2 004 位于第几组第几号？

解析：先解决一般性的问题：正整数 n 位于第几组第几号？

设正整数 n 位于第 k 组，则前 $k-1$ 组共有 $1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$ 项，所以当 $\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1$ 时，n 是第 k 组的第 $n-\frac{k(k-1)}{2}$ 个数. 由

$$\begin{cases}k^2-k+2-2n\leqslant 0\\k^2+k+2-2n>0\end{cases}$$

解得 $\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

因为 $k\in\mathbf{N}_+$，且 $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}-\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}=1$，所以 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

因此，正整数 n 是第 k 组的第 $n-\frac{k(k-1)}{2}$ 个数，其中 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

当 $n=2\ 004$ 时，$k=63$，$n-\frac{k(k-1)}{2}=51$，即 2 004 位于第 63 组第 51 号.

例 2 将正奇数集合 $\{1, 3, 5, \cdots\}$ 由小到大按第 k 组有 $2k-1$ 个数进行分组：(1)，(3，5，7)，(9，11，13，15，17)，…. 则 1 991 位于第____组.（1991 年全国高中联赛题）

解：设正奇数 n 位于第 k 组，则前 $k-1$ 组共有 $1+3+5+\cdots+(2k-3)=(k-1)^2$ 项，所以 $2(k-1)^2+1\leqslant n<2k^2+1$，注意到 $k>0$，解得

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}}<k\leqslant\sqrt{\frac{n-1}{2}}+1.$$

因为 $k\in\mathbf{N}_+$，且 $\sqrt{\frac{n-1}{2}}+1-\sqrt{\frac{n-1}{2}}=1$，所以 $k=\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}+1\right]=\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right]+1$. 特别地，当 $n=1\ 991$时，$k=32$，即 1 991 位于第 32 组.

例 3 删去正整数数列 1，2，3，…中的所有完全平方数，得到一个新数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的第 2 003项是（　　）.（2003 年全国高中联赛题）

(A) 2 046　　(B) 2 047　　(C) 2 048　　(D) 2 049

解：我们先解决一般性的问题，求出新数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

因为 $(k+1)^2-k^2-1=2k$，$k\in\mathbf{N}_+$，所以正整数数列 1，2，3，…中，k^2 与 $(k+1)^2$ 之间有 $2k$ 个数，它们均为 $\{a_n\}$ 的项，所有这些数从小到大构成数列 $\{a_n\}$. 因此把数列 $\{a_n\}$ 分组：(2，3)，(5，6，7，8)，(10，11，12，13，14，15)，…，$(k^2+1, k^2+2, \cdots, k^2+2k)$，…，其中第 k 组有 $2k$ 个数.

设 a_n 在第 k 组，则 $a_n=k^2+n-[2+4+\cdots+2(k-1)]=n+k$，并且 $[2+4+\cdots+2(k-1)]+1\leqslant n<[2+4+\cdots+2(k-1)+2k]+1$，即 $k(k-1)+1\leqslant n<k(k+1)+1$，所以

$$\begin{cases}k^2-k+1-n\leqslant 0\\k^2+k+1-n>0\end{cases}$$

注意到 $k>0$，解得

$$-\frac{1}{2}+\sqrt{n}<k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{n}.$$

因为 $k\in\mathbf{N}_+$，且 $\frac{1}{2}+\sqrt{n}-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right)=1$，所以

$$k=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right].$$

所以 $a_n=n+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]$. 当 $n=2\,003$ 时，

$$a_{2\,003}=2\,003+\left[\sqrt{2\,003}+\frac{1}{2}\right]=2\,048.$$

（二）Fibonacci 数列

1202 年，意大利数学家斐波那契出版了他的《算盘全书》. 他在书中提出了一个关于兔子繁殖的问题：

如果一对兔子每月能生一对小兔（一雄一雌），而每对小兔在它出生后的第三个月里，又能开始生一对小兔，假定在不发生死亡的情况下，由一对出生的小兔开始，50 个月后会有多少对兔子？

在第一个月时，只有一对小兔子，过了一个月，那对兔子成熟了，在第三个月时便生下一对小兔子，这时有两对兔子. 再过一个月，成熟的兔子再生一对小兔子，而另一对小兔子长大，有三对小兔子. 如此推算下去，我们便发现一个规律：

时间（月）	初生兔子（对）	成熟兔子（对）	兔子总数（对）
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

由此可知，从第一个月开始以后每个月的兔子总数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

若把上述数列继续写下去，得到的数列便称为斐波那契数列. 数列中每个数便是前两个数之和，而

数列的最初两个数都是1. 若设 $F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$, $F_6=13$, …, 则当 $n\geqslant1$时, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 而 $F_0=F_1=1$.

下面是一个有趣的式子

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

F_n 看似是无理数, 但当 $n\geqslant0$ 时, F_n 都是整数. 利用斐波那契数列来作出一个新的数列, 方法是把数列中相邻的数字相除, 组成新的数列如下

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots,\ \frac{F_n}{F_{n+1}},\ \cdots.$$

当 n 无限大时, 数列的极限是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这个数值被称为黄金分割比, 它正好是方程式 $x^2+x-1=0$ 的一个根.

(三) 数列应用题举例

1. 有关储蓄的计算

储蓄与人们的日常生活密切相关, 它对支援国家建设、安排好个人与家庭生活具有积极意义. 计算储蓄所得利息的基本公式是

利息=本金×存期×利率.

根据国家的规定, 个人取得储蓄存款利息应依法纳税, 计算公式为

应纳税额=利息全额×税率,

其中的税率为20%.

下面介绍两种储蓄方式.

(1) 整存整取定期储蓄

这是指一次存入本金, 完成约定存期后一次取出本金及其利息的一种储蓄. 中国人民银行在某段时间内规定的这种储蓄的年利率如下.

存　期	1年	2年	3年	5年
年利率 (%)	2.25	2.43	2.70	2.88

例如, 按这种方式存入5 000元, 存期3年, 那么3年到期时所得利息为

$$5\ 000\times3\times2.70\%=405\ (\text{元}),$$

应纳税

$$405\times20\%=81\ (\text{元}),$$

实际取出

$$5\ 000+405-81=5\ 324\ (\text{元}).$$

(2) 活期储蓄

这是指存期不定、可以随时存取的一种储蓄. 计算利息时, 每年按360天, 每月按30天计算存期. 例如, 7月15日存入500元, 同年8月25日全部取出, 日利率是0.002 75%, 由于存期是40天

(算头不算尾)，所以应得利息为

$$500\times40\times0.002\,75\%=0.55\ (\text{元}).$$

应纳税

$$0.55\times20\%=0.11\ (\text{元}).$$

实际取出

$$500+0.55-0.11=500.44\ (\text{元}).$$

如果遇到利率调整，常常分段进行计算利息.

下面介绍分期存入后一次取出的一种储蓄的利息计算.

例如，某人从1月起，每月第1天存入100元，到12月最后一天取出全部本金及其利息. 已知月利率是0.165%，那么实际取出多少钱?

为回答这一问题，先来研究这类问题的一般计算公式. 设每期期初存入金额 A，连存 n 次，每期的利率为 p，那么到第 n 期期末时，本金为 nA，且各期存款的利息如下：

第1期存款利息：Apn；

第2期存款利息：$Ap(n-1)$；

……

第 $(n-1)$ 期存款利息：$Ap\times2$；

第 n 期存款利息：$Ap\times1$.

于是，应得到的全部利息就是上面各期利息之和

$$\begin{aligned}S_n&=Ap+Ap\times2+\cdots+Ap(n-1)+Apn\\&=Ap(1+2+\cdots+n)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)Ap.\end{aligned}$$

应纳税

$$\frac{1}{2}n(n+1)Ap\times20\%=\frac{1}{10}n(n+1)Ap.$$

实际取出

$$\begin{aligned}&nA+\frac{1}{2}n(n+1)Ap-\frac{1}{10}n(n+1)Ap\\=&A\left[n+\frac{2}{5}n(n+1)p\right].\end{aligned}$$

用这个公式求解上面提出的问题时，$A=100$，$n=12$，$p=0.165\%$，实际取出

$$100\left(12+\frac{2}{5}\times12\times13\times0.165\%\right)=1\,210.30(\text{元}).$$

2. 分期付款中的有关计算

在日常生活中，一些商店为了促进商品的销售，便于顾客购买一些售价较高的商品，在付款方式上较为灵活，可以一次性付款，也可以分期付款，采用分期付款时又可以提供几种方案以便选择. 例如，顾客购买一件售价为5 000元的商品时，如果采取分期付款，那么在一年内将款全部付清的前提下，商店又提出了下表所示的几种付款方案，供顾客选择.

方案类别	分几次付清	付　款　方　法	每期所付款额	付款总额	与一次性付款差额
1	3次	购买后4个月第1次付款，再过4个月第2次付款，再过4个月第3次付款.	1 775.8元	5 327元	327元
2	6次	购买后2个月第1次付款，再过2个月第2次付款……购买后12个月第6次付款.	880.8元	5 285元	285元
3	12次	购买后1个月第1次付款，过1个月第2次付款……购买后12个月第12次付款.	438.6元	5 263元	263元
注：规定月利率为0.8%，每月利息按复利计算.					

说明：

(1) 分期付款中规定每期所付款额相同.

(2) 每月利息按复利计算，是指上月利息要计入下月本金. 例如，由于月利率为0.8%，款额a元过1个月就增值为

$$a(1+0.008)=1.008a\text{（元）},$$

再过1个月又增值为

$$1.008a(1+0.008)=1.008^2a\text{（元）}.$$

以上几种方案中，付款总额是怎么算出来的？每期应付款多少？我们依方案2为例给出有关计算.

作为解决这个问题的第一步，我们要来看一看，在商品购买后1年货款全部付清时，其商品售价增值到了多少.

由于月利率为0.008，在购买商品后1个月，该商品售价增值为

$$5\,000(1+0.008)=5\,000\times1.008\text{(元)},$$

由于利息按复利计算，在商品购买后2个月，商品售价增值为

$$5\,000\times1.008\times(1+0.008)=5\,000\times1.008^2\text{（元）},$$

……

于是，在商品购买后12个月（即货款全部付清时），其售价增值为

$$5\,000\times1.008^{11}\times(1+0.008)=5\,000\times1.008^{12}\text{(元)}.$$

再来看一看，在货款全部付清时，各期所付款额的增值情况如何. 为讨论方便，假定每期付款x元.

第6期付款（即最后一次付款）x元时，款已全部还清，因此这一期所付的款没有利息；

第5期付款x元后，过2个月即到款全部付清之时. 当付款后1个月时，所付款连同利息之和为

$$x(1+0.008)=1.008x\text{（元）},$$

当付款2个月时，所付款连同利息之和为

$$1.008x(1+0.008)=1.008^2x\text{(元)},$$

即第5期付款x元后到款全部付清时连同利息之和为1.008^2x元.

类似地可以推得，第4，3，2，1期所付的款额到货款全部付清时连同利息的和，依次为

$$1.008^4x\text{元}，1.008^6x\text{元}，1.008^8x\text{元}，1.008^{10}x\text{元}.$$

再进一步，如何根据上述结果来求每期所付的款额呢？

按分期付款中的规定，各期所付的款额连同到最后一次付款时所生的利息之和，等于商品售价及从购买到最后一次付款时的利息之和．由此，我们可以得到如下关系式

$$x+1.008^2x+1.008^4x+\cdots+1.008^{10}x=5\,000\times1.008^{12},$$

即 $x(1+1.008^2+1.008^4+\cdots+1.008^{10})=5\,000\times1.008^{12}$.

观察一下，上述等式有什么特点？

可以发现，上述等式是一个关于 x 的一次方程，且等号左边括弧内是一个首项为 1，公比为 1.008^2 的等比数列的前 6 项的和，于是

$$x\cdot\frac{1-(1.008^2)^6}{1-1.008^2}=5\,000\times1.008^{12},$$

$$x=\frac{5\,000\times1.008^{12}\times(1.008^2-1)}{1.008^{12}-1},$$

解得 $x\approx880.8$（元）.

即每次所付款额为 880.8 元，因此 6 次所付款额共为

$$880.8\times6=5\,285\text{（元）},$$

它比一次性付款多付 285 元.

3. 住房的改善

某地现有居民住房的总面积为 a m^2，其中需要拆除的旧住房占了一半．为了改善居住条件，当地有关部门决定，在最近 20 年内，每年在原有住房面积的基础上，以 10% 的住房增长率建设新住房；另一方面，在每年的年末拆除一定数量的旧住房．如果 10 年后该地的住房面积正好是目前的两倍．问：

(1) 每年应拆除的旧住房总面积 x 是多少？（提示：计算时可取 1.1^{10} 为 2.6）

(2) 过 10 年还未拆除的旧住房总面积占当时住房总面积的百分比是多少（保留到小数点后第一位）？

解：(1) 设 n 年后该地的住房总面积为 a_n(m^2)，由题意得

$$a_1=1.1a-x.$$

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=1.1a_{n-1}-x$，所以

$$a_n-1.1a_{n-1}=-x,$$

即 $\dfrac{a_n}{1.1^n}-\dfrac{a_{n-1}}{1.1^{n-1}}=\dfrac{-x}{1.1^n}$ $(n\geqslant2)$.

令 $b_n=\dfrac{a_n}{1.1^n}$，则 $b_n-b_{n-1}=\dfrac{-x}{1.1^n}$ $(n\geqslant2)$，所以

$$b_2-b_1=\frac{-x}{1.1^2},$$

$$b_3-b_2=\frac{-x}{1.1^3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_n-b_{n-1}=\frac{-x}{1.1^n}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1+\frac{-x}{1.1^2}+\frac{-x}{1.1^3}+\cdots+\frac{-x}{1.1^n}\\
&=\frac{a_1}{1.1}-\frac{x}{1.1^2}\left(1+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.1^2}+\cdots+\frac{1}{1.1^{n-2}}\right)\\
&=\frac{1.1a-x}{1.1}-\frac{x}{1.1^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1.1}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{1.1}}\\
&=\frac{1.1a-x-10x\left[1-\left(\frac{1}{1.1}\right)^{n-1}\right]}{1.1}\\
&=\frac{1.1a-x\left[11-\left(\frac{1}{1.1}\right)^{n-1}\cdot 10\right]}{1.1}.
\end{aligned}
$$

所以$\frac{a_n}{1.1^n}=\frac{1.1a-x\left[11-10\left(\frac{1}{1.1}\right)^{n-1}\right]}{1.1}$. 因此

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1.1^n a-x\cdot 1.1^{n-1}\cdot\left[11-10\left(\frac{1}{1.1}\right)^{n-1}\right]\\
&=1.1^n a-10x(1.1^n-1).
\end{aligned}
$$

当 $n=10$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= 1.1^{10}a-10x(1.1^{10}-1)\\
&=2.6a-10x(2.6-1)\\
&=2.6a-16x.
\end{aligned}
$$

由题意得 $2.6a-16x=2a$. 解得 $x=\frac{3}{80}a(\mathrm{m}^2)$.

(2) $\frac{\frac{a}{2}-\frac{3}{80}a\cdot 10}{2a}=\frac{1}{16}\approx 6.3\%$.

注：(1) 递推思想的运用.

(2) 化归思想的运用. 将非等差、非等比数列的问题转化为等差、等比数列的问题来处理.

四、教学案例

案例 1：2.1.1　数列

（一）教学目标

1. 知识与技能

(1) 理解数列的概念、表示法、分类，对一个给定数列能选择适当方法将其表示出来，能判定数列的类型；

(2) 理解数列的通项公式，会根据数列的前几项写出某些简单数列的通项公式.

2. 过程与方法

(1) 通过对实例的“观察、试验、归纳”得出数列的概念，体会数列是一种特殊的函数；通过类比，结合实例体会数列的表示法；

(2) 经历数列概念、表示法、分类及求通项公式等探索和研究过程，培养学生的观察、试验、归纳、猜想、类比、联想等能力，提高数学建模能力.

3. 情感、态度和价值观

(1) 培养学生积极参与、大胆探索的精神，体验探究的乐趣，感受成功的快乐，增强学习数学的兴趣；

(2) 自觉探究现实世界中的一些数量关系，培养学生从实际问题中抽象出数学模型、解决实际问题的意识，认识并感受数学的应用价值.

（二）教学重点和难点

重点：数列的概念，数列的通项公式.

难点：根据数列的前几项，通过观察、分析、抽象、归纳出数列的通项公式.

（三）教学方法

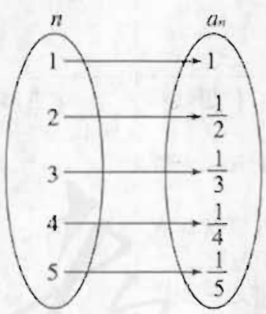
通过创设问题情境，在熟悉与未知的认知冲突中激发学生的探索欲望；引导学生通过自主探究与合作交流相结合的方式去进行研究；引导学生积极思考，运用观察、试验、联想、类比、归纳、猜想等方法，不断地提出问题、解决问题，再提出问题、再分析解决问题……经历知识的发生和发展过程，并注意总结规律和知识的巩固与深化.

借助多媒体，增强教学的直观性，提高课堂效率.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入课题	[问题1] 让我们共同来进行下面的活动.（教材本章前言）	教师展示本章前言中的三个活动内容，学生试验、记录、思考. 教师简要介绍本章所要学的主要内容及其特点.	引导学生从日常生活中发现数学问题，提出并解决问题. 这些问题都是学生熟悉的，又是未知的，可以使学生在认知冲突中激发探索欲望，培养学习兴趣.
概念形成	[问题2] 分析研究教材所给的7个数列，给数列下定义. [问题3] 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与项数 n 有一定的关系吗？有. 如数列④中，每一项的序号与该项有这样的对应关系： $\begin{array}{cccccc} 序号 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 项 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array}$	教师展示各个数列，学生思考、归纳、交流，反复深化自己的认识. 学生思考并举例说明.	通过具体数列体会数列的概念，抽象归纳出数列的定义. 在具体问题中，探索量与量之间的关系，挖掘内在规律、发现数学的本质.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	即数列的每一项都等于其对应的序号的倒数. 可以用式子 $a_n=\frac{1}{n}$ $(1\leqslant n\leqslant 5,\ n\in\mathbf{N}_+)$ 来表示. 再如数列①中, $a_n=2^n$, $n\in\mathbf{N}_+$; 数列⑦中, $a_n=(-1)^n$, $n\in\mathbf{N}_+$; …… [问题4] 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系都可以用一个相应的式子来表示吗? 不是. 如数列③⑤. 综上得: 如果数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个函数式 $a_n=f(n)$ 来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式. 思考: 在上面列举的数列中, 你还能写出哪些数列的通项公式? (结合课件5201.)	学生思考并举例说明.	培养学生思维的严谨性. 加深对通项公式的理解.
概念深化	[问题5] 数列 $\{a_n\}$ 每一项的序号 n 与项 a_n 的对应关系能否构成序号集合到另一数集的映射? 数列与函数的关系如何? 结论: 数列可以看成序号集合到另一个数集的映射. 数列可以看作是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$ (或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$) 的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值, 即数列是一种特殊的函数.	教师引导, 学生对照数列④进行. 如图:  交流讨论后得出结论.	培养学生类比联想能力、引导学生体会数学概念的本质. 将数列纳入学生原有的知识体系, 拓展学生的知识结构.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教 学 内 容</th><th>师 生 互 动</th><th>设 计 意 图</th></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>[问题 6] 数列有几种表示法?
<table>
<tr><td>函数表示法</td><td>数列表示法</td></tr>
<tr><td>列表法</td><td>一般形式</td></tr>
<tr><td>解析式</td><td>通项公式</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>图象</td></tr>
</table>

[问题 7] 画出数列②④的图象，见教材图 2-2 (1) (2)，并指出数列②④的图象的特点.
特点:
数列的图象是相应的曲线（或直线）上横坐标为正整数的一群孤立的点.

[问题 8] 考察以上数列，思考：如何给数列分类？分成哪几类?
按项数多少分成:
有穷数列，无穷数列.
按数列的项随序号的变化分成:
递增数列、递减数列、摆动数列、常数数列.</td><td>教师点拨.
学生类比函数的表示法得出数列应该有三种表示法，并与函数的表示法对照.
教师巡视.
学生画图，教师适当指点，并展示规范的图象.
结合数列②④的图象，讨论归纳.

教师点拨，学生思考，并回答.</td><td>引导学生从图象角度认识数列.
培养学生的观察、概括能力.

培养数学思维的深刻性、全面性，深化对数列概念的认识.</td></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>例 1　由通项公式求数列的项.</td><td>教师点拨，学生思考、回答.</td><td>用序号代替通项公式中的 n，可以求出数列的各项，让学生认识到数列的通项公式确定后，数列也就确定了.</td></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>例 2　根据数列的前几项，猜想数列的通项公式.
思考：(1) 根据数列的前几项求数列通项公式的方法有哪些?
(2) 根据一个数列的前几项所得数列的通项公式是否唯一？举例说明.
例如，例 2 中数列 (2) 的通项公式还可以写成 $a_n=2\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|$ 等.
启发学生再列举一些通项公式不唯一的实例.
例 3　研究数列性质.
思考:
(1) 研究数列的有界性与研究函数的有界性是否相同?
(2) 研究数列的单调性与研究函数的单调性的区别是什么?</td><td>学生解答，教师巡视并展示.

学生讨论得出.

参照教参 2.1.1 的 4 和 5 进行引导.
学生解答，教师巡视，适当指导.</td><td>培养学生观察、试验、归纳、猜想的能力.

帮助学生全面理解例 2 中“写出下面数列的一个通项公式”的含义，并纠正义务教育阶段由那些“找规律”的题目造成的思维定势，培养学生的发散思维能力和思维的批判性.
培养数学方法、技能的迁移能力，进一步让学生体会数列是一种特殊的函数.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
练习反馈	1. 练习 A. 根据通项公式求某些项； 根据数列前 n 项，猜想一个通项公式. 2. “思考与讨论”. 根据数列的性质举例.	教师点拨，并选正确的答案展示. 引导学生在解题过程中概括解题规律.	加深体会数列的通项公式. 通过开放题培养发散思维能力.
归纳总结	1. 数列； 2. 数列的通项公式； 3. 数列的表示法； 4. 数列的分类； 5. 思想方法.	学生回忆学习本节内容的收获，师生共同完成本节小结.	培养学生对于所学知识进行总结的习惯以及合乎逻辑地整理知识的能力.
课后作业	1. 必做：练习 B；习题 2-1A，1~7. 2. 选做： (1) 仿照教材中的“思考与讨论”编拟数列问题，并自行解决或同学之间互问互答. (2) 搜集日常生活中的数据，编拟数列问题.		培养自学能力，巩固、深化并拓展本节所学内容. 设计选做题，有两个目的：其一，为学有余力的学生提供发展的空间；其二，数列在实际生活中有广泛应用，培养学生的应用意识.

案例 2：2.2.1 等差数列

（一）教学目标

1. 知识与技能

(1) 理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式；

(2) 运用等差数列的通项公式解决相关问题.

2. 过程与方法

(1) 通过对数列的分析、探究得到等差数列的概念，提高学生观察、探索、发现的能力；

(2) 利用等差数列通项公式的推导，培养学生分析、比较、概括、归纳的能力；

(3) 学会借助实例分析，探究数学问题，培养数学建模的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1) 通过学生的主动参与，师生、生生合作交流，提高学生的学习兴趣，激发求知欲；

(2) 通过具体问题，发现等差关系，并利用数列知识予以解决，感受数列的应用价值；

(3) 培养学生严谨求实、一丝不苟的科学态度.

（二）教学重点和难点

重点：等差数列的概念及等差数列通项公式的推导和应用.

难点：等差数列“等差”特征的理解、把握和应用.

（三）教学方法

采用自主探究与合作交流的教学方法，借助多媒体辅助教学，增强课堂活动的生动性，调动学生参与知识形成过程的主动性和积极性.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	［问题1］何为数列的通项公式、递推公式？通项公式与递推公式有何联系与区别？	学生思考回答. 教师通过多媒体举例让学生分析研究. 教师归纳总结.	通过对前面知识的复习，特别是数列的通项公式、递推公式的回顾，让学生体会到数列的通项公式就是 a_n 与序号之间的对应关系式，从而为学习等差数列的通项公式作准备.
	［问题2］观察以下几个数列： ①4，5，6，7，8，9，10，…； ②3，0，−3，−6，…； ③$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{4}{10}$，…. 这些数列有什么共同点？ 请你认真观察、大胆猜想.	学生思考分析，并给出回答.	激发学生的探究欲望，使学生主动学习.
概念形成	［问题3］等差数列的定义. 思考： 定义中为什么强调“从第二项起”、“每一项与其前一项的差”、“等于同一个常数”.	学生在问题2的基础上回答. 对几个关键词教师可举一些反例让学生体会这些关键词的作用，也可试图让学生修改定义，来加深对这些语句的理解和掌握.	引导学生主动参与、自主进行问题的分析探究. 反复锤炼，培养学生思维的严谨性.
概念形成	［问题4］等差数列的通项公式是怎样得到的？ 方法主要有：归纳法，累加法. 此外，还有迭代法等. ［问题5］怎样用函数观点来分析等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$？	由学生根据定义进行推导，教师巡视. 学生分析、探究、回答，教师纠正、归纳，利用多媒体将图象给出. 学生通过观察分析，得到结论.	让学生自己分析、推导、得出结论，可以培养学生归纳、概括的能力，养成学生周密慎思的习惯. 对不同方法加以比较利于学生思维的发散，提高思维能力. 将学生的思路引向函数，利用函数知识来研究通项公式.
概念深化	1. 由以上研究可知，等差数列的通项公式为 $a_n=dn+c$（d、c 为常数）； 2. 两个独立条件，可确定等差数列的通项公式； 3. 由通项公式可类推 $a_n=a_m+(n-m)d$.	教师通过举例，让学生通过分析、归纳得出结论. 强调“通项 a_n 是 n 的一次函数”与“$\{a_n\}$ 是等差数列”的关系.	强化对等差数列本质属性的认识. 创设问题情境，让学生归纳探索.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	练习：由下列等差数列的通项公式求首项和公差： (1) $a_n=3n+5$；　(2) $a_n=12-2n$. 例1　已知等差数列 10，7，4，…： (1) 试求此数列的第 10 项； (2) -40 是不是这个数列的项？-56 是不是这个数列的项？如果是，是第几项？ 例2　已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{10}=20$，$a_{15}=10$，求公差 d. 例3　在等差数列 $\{a_n\}$ 中： (1) 已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求 a_1 与 d； (2) 已知 $a_3=9$，$a_9=3$，求 a_{12}.	教师巡视，要求学生写出完整的步骤. 教师选几个学生的答案投影到屏幕上，由学生点评，教师总结.	让学生掌握知识，培养学生严谨治学的作风. 鼓励学生学习的热情和信心. 通过解题过程，让学生领悟到公式的变式，这样有助于知识的深化. 如在例 2 中，相当于已知直线上两点的坐标，求直线的斜率.
练习反馈	已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{15}=33$，$a_{45}=153$，试问 217 是否为此数列中的项？若是，说明它是第几项，若不是，说明理由.	学生解答. 教师通过巡视注意学生的解题过程，及时给予指正.	强化基础知识，加深对等差数列通项公式的理解和应用意识.
归纳小结	1. 等差数列的概念； 2. 等差数列的通项公式的推导方法； 3. 等差数列通项公式的应用.	先让学生回顾总结，教师提问、并与学生一起补充、完善，最后通过多媒体展示出来.	对所学知识、思想方法进行反思总结，有利于学生理顺知识结构，掌握通性通法，提高学生的归纳概括能力，同时使学生的知识更完整、更系统.
课后作业	必做： 课本练习 A，1，2. 选做：(1) 查阅有关资料，编写几道有关等差数列的题目，予以解答； (2) 请同学们对等差数列的性质作进一步的研究.	必做题要求全部学生完成，选做题鼓励学有余力的同学去积极探索.	有弹性地布置作业、避免一刀切，发挥学有余力的学生的探索、创造能力. 使学生通过各种渠道获取知识，了解数学与生活、数学与经济、科技的密切关系，体验生活中处处皆有数学.

案例 3：2.3.2　等比数列的前 n 项和

(一) 教学目标

1. 知识与技能

(1) 掌握等比数列的前 n 项和公式及推导公式的思想方法和过程；

(2) 能用等比数列求和公式进行有关的运算，会运用公式解决有关问题.

2. 过程与方法

(1) 通过在国际象棋棋盘的每个格子里放麦粒的故事，引出学习等比数列前 n 项和的问题，通过求和公式的推导，使学生掌握有关的数学思想和方法；

(2) 通过学习，培养学生归纳、分类讨论、迁移的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1) 在解决实际问题的过程中，体会如何去分析问题、解决问题，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的综合能力；

(2) 挖掘教材中我国古代有关数列的历史故事中的文化内涵，指导学生收集历代数学家研究数列问题并作出贡献的资料，从而提高学生的民族自豪感，体会数学的文化价值，培养学生的数学素养.

（二）教学重点和难点

重点：等比数列的前 n 项和公式及其推导过程.

难点：如何灵活运用等比数列求和公式解决相关问题.

（三）教学方法

通过在国际象棋棋盘的每个格子里放麦粒的故事，激发学生的学习积极性，让学生产生好奇心，主动地探索数学真理. 通过设置问题、师生共同探究的方式学习新知识.

借助多媒体增强教学的直观性，提高课堂效率.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问	1. 等比数列的定义、通项公式、性质. 2. 等差数列的求和公式及其推导过程.	教师提出问题，学生积极思考回答问题.	检索学生头脑中的原有知识，为引入新课作准备.
提出问题	请同学们思考下列问题： [问题 1] 国际象棋起源于印度. 据说国王为了奖赏发明者，让发明者提一个要求. 发明者说："请在棋盘的第 1 个格子里放上 1 颗麦粒，在第 2 个格子里放上 2 颗麦粒，在第 3 个格子里放上 4 颗麦粒，在第 4 个格子里放上 8 颗麦粒，依次类推，每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到第 64 个格子，请国王能给我足够的麦子来实现上述要求."国王觉得这事不难办到，就欣然同意了. 你认为国王有能力满足发明者的这个要求吗? [问题 2] 某人听到一则消息，用一小时传给两人，这两个人用一小时每人又分别传给两人，如此传下去，一昼夜后这则消息能传遍一个千万人口的大城市吗?		激发学生的好奇心.

续表

教学环节	教 学 内 容	师 生 互 动	设 计 意 图
概念形成	问题1中，每个格子里的麦粒数依次组成一个等比数列 $1，2，2^2，2^3，\cdots，2^{63}$. 于是发明者要求的麦粒总数就是这个数列的前64项的和 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$. 那么，怎样去求这个和呢？	学生独立思考交流讨论，寻找解决问题的思路.	教师引导学生主动地参与.
概念深化	由等比数列的定义，写出以下$n-1$个式子 $a_2=a_1q$， $a_3=a_2q$， $a_4=a_3q$， …… $a_{n-1}=a_{n-2}q$， $a_n=a_{n-1}q$. 将这$n-1$个式子两边分别相加得 $a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})q$. 所以$S_n-a_1=(S_n-a_n)q$. 所以$(1-q)S_n=a_1-a_nq$. 分$q=1$和$q\neq1$两种情况，从而得出结论.	师生共同分析，并引导学生从整体上进行观察、思考.	教师分析引导，学生主动参与，从整体、全局上进行思考，通过观察、探究发现规律.
	[问题3] 考虑用其他的方法推导这个求和公式. $S=1+2+2^2+\cdots+2^{62}+2^{63}$. ① 如果①式两边都乘2，则 $2S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}+2^{64}$. ② 通过观察①②式得到 $S=2^{64}-1$. 于是，启发学生通过此方法求$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$的公式.	教师引导学生通过对实际例子的观察，发现如何去求解. 然后推广到一般情况，由学生去思考运算过程，最后，教师总结方法：错位相减法.	通过具体的数值求和，使学生经历从特殊到一般、从具体到抽象的思维过程. 同时拓宽学生的思路，从不同角度、多方面考虑解决问题的方法，并借助多媒体进行演示.
	[问题4] 根据等比数列的前n项和公式，请同学们算一算[问题1]. （按千粒麦粒的质量为40克计算.）	学生用多媒体解答问题.	前后呼应，学以致用. 通过运算，结果出人意料，但又在情理之中，同时加强思想教育.

续表

教学环节	教 学 内 容	师 生 互 动	设 计 意 图
应用举例	1. 有一句古语："一尺之棰，日取其半，万世不竭."怎样用学过的知识来证明它？ 2.（1）等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\frac{1}{2}$，$a_8=1$，求前 8 项的和. （2）求等比数列 $\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{8}$，…从第 3 项到第 7 项的和. 3. 求和：$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots999}_{n个9}$.	教师先把古语翻译成现代汉语，然后引导学生化归为等比数列的知识求解. 学生练习. 师生共同总结.	通过解题实践，巩固所学知识，同时提高学生的民族自豪感，体会数学的文化价值. 通过题目，学会转化，多角度地去分析思考问题.
练习反馈	1. 根据下列条件，求相应等比数列 $\{a_n\}$ 中的 S_n： （1）$a_1=3$，$q=2$，$n=6$； （2）$a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$； （3）$a_1=-2.7$，$q=-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{90}$. 2. 求数列 $1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，…的前 n 项和. 3. 求和：$0.3+0.03+0.003+\cdots+\underbrace{0.00\cdots0}_{n个0}3$.	学生练习巩固所学知识，教师巡视，加强对个别学生的指导.	通过练习，巩固当堂所学知识，同时让教师及时了解学生的掌握情况，以便进一步调整自己的教学.
归纳总结	等比数列的前 n 项和公式分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况. 等比数列的前 n 项和公式推导过程（两种方法）.	先由学生自己总结，再由师生共同完善.	学生从知识、方法两方面进行总结，提高学生概括、归纳的能力，同时通过回顾使他们的知识更加条理化、系统化.
课后作业	认真阅读教科书的有关内容. 必做题：教科书练习 A，1，2，3； 选做题：教科书练习 B，1，2.	书面作业的第一层次要求所有学生都要完成，第二层次则只要求学有余力的学生完成.	因材施教，使不同层次，不同程度的学生都有所提高.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 28 页）

1. (1) $a_n=n+1$.　　(2) $a_n=-3n$.

(3) $a_n=\frac{1}{2^n}$.　　(4) $a_n=(-1)^{n-1}(2n-1)$.

2. (1) 1，4，9，16，25.

(2) -2，4，-6，8，-10.

(3) 4，10，18，28，40.

(4) 0，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{3}{20}$，$\frac{2}{15}$.

3. (1) $-\frac{11}{19}$.　　(2) 1.

(3) 由通项公式可知：

$a_1=2$，$a_2=-\frac{3}{3}=-1$，$a_3=\frac{4}{5}$，$a_4=-\frac{5}{7}$，….

如果$\frac{51}{99}$是该数列的项，那它的项数 n 必为奇数，且

$$\frac{51}{99}=\frac{n+1}{2n-1}.$$

由上式解得 $n=50$，是一个偶数，所以$\frac{51}{99}$不是这个数列的项.

练习 B（第 28 页）

1. (1) 15，63；$a_n=2^n-1$.

(2) 10，37；$a_n=n^2+1$.

(3) $\frac{1}{8}$，$-\frac{1}{64}$；$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$.

(4) $\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$；$a_n=\sqrt{n}$.

2. $a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}=1+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$，所以当 $n=10$ 时，a_n 最大. $n=9$ 时，a_n 最小.

即前 30 项中，a_{10}最大，a_9 最小.

3. (1) $a_n=2n-1$.　　(2) $a_n=-3^n$.

练习 A（第 30 页）

1. 2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$.

2. 3，5，7，9，11.

3. 1，2，$\frac{5}{2}$，$\frac{29}{10}$，$\frac{941}{290}$.

练习 B（第 31 页）

1. 不一定. 若 $a_1>0$，则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；若 $a_1<0$ 则为递减数列；若 $a_1=0$，则为常数列.
2. 这个数列的前 10 项是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55.
3. $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{6}$，$a_n=\frac{1}{2n}$.

习题 2-1A（第 31 页）

1. (1) 1，1.4，1.41，1.414，….

(2) 略.

(3) 2，3，5，7，11，13，17，19.

2. (1) 12，14，16，18，20.

(2) 5，-5，5，-5，5.

(3) $\frac{3}{2}$，1，$\frac{7}{10}$，$\frac{9}{17}$，$\frac{11}{26}$.

3. (1) 因为 $a_n=\frac{1}{n^3}$，所以 $a_7=\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$，$a_{10}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\ 000}$，$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}$，$a_{n-1}=\frac{1}{(n-1)^3}$.

(2) 因为 $a_n=n(n+2)$，所以 $a_7=7(7+2)=63$，$a_{10}=10(10+2)=120$，$a_{n+1}=(n+1)(n+1+2)=(n+1)(n+3)$，$a_{n-1}=(n-1)(n-1+2)=(n-1)(n+1)=n^2-1$.

(3) 因为 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，所以 $a_7=\frac{1}{7}$，$a_{10}=\frac{-1}{10}=-\frac{1}{10}$，$a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$，$a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n-1}$.

(4) 因为 $a_n=-2^n+3$，所以 $a_7=-2^7+3=-128+3=-125$，$a_{10}=-2^{10}+3=-1\ 024+3=-1\ 021$，$a_{n+1}=-2^{n+1}+3$，$a_{n-1}=-2^{n-1}+3$.

4.

n	1	2	…	5	…	15	…	n
a_n	-1	0	…	15	…	195	…	n^2-2n

5. (1) 6；$a_n=2n$.

(2) 8，64，256；$a_n=2^n$.

(3) 5，0，-2；$a_n=6-n$.

(4) 1，36；$a_n=n^2$.

6. (1) $a_n=-2n+2$. (2) $a_n=\frac{n+5}{n+4}$. (3) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$.

7. (1) 因为 $a_n=n(n+2)$，所以

$$a_{10}=10(10+2)=120，a_{15}=15(15+2)=255，a_{21}=21(21+2)=483.$$

(2) 令 $440=n(n+2)$，得 $n^2+2n-440=0$，所以 $n=20$.

所以 440 是这个数列中的第 20 项.

令 $222=n(n+2)$，得 $n^2+2n-222=0$，所以 $n=\frac{-2\pm2\sqrt{223}}{2}$.

由于 $n\in\mathbf{N}_+$，因此 222 不是这个数列中的项.

8. (1) $\frac{1}{2}$，3，13，53，213.

(2) $-\frac{1}{4}$，5，$\frac{4}{5}$，$-\frac{1}{4}$，5.

习题 2-1B（第 32 页）

1. $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

2. 4，7，10，13，16，…；$a_n=3n+1$.

3. 第 4 个等式是 $1+3+5+7+9=25$，第 5 个等式是 $1+3+5+7+9+11=36$，第 n 个等式是 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$.

4. (1) 因为 $a_n=f(n)=\frac{1-2n}{n+1}=-2+\frac{3}{n+1}$，

由 $\frac{3}{n+1}>0$，所以 $a_n>-2$.

(2) $a_n-a_{n-1}=\left(-2+\frac{3}{n+1}\right)-\left(-2+\frac{3}{n}\right)=\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n}<0$，

所以 $a_n<a_{n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 是递减数列.

5. (1) 数表中第 4 行各数是 7，8，9，10.

第 5 行各数是 11，12，13，14，15.

(2) 由于数表中每行数的个数为 1，2，3，4，…成等差数列，因此前 9 行数的个数之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. 所以第 10 行的第 1 个数是 46，第 5 个数是 50.

(3)* 由数表知 $\{a_n\}$ 为 1，2，4，7，11，…，可知

$$a_2=a_1+1,\ a_3=a_2+2,\ a_4=a_3+3,\ \cdots.$$

因此得递推公式为 $a_n=a_{n-1}+(n-1)$.

由 $\{b_n\}$ 为 1，3，6，10，15，…，可知

$$b_2=b_1+2,\ b_3=b_2+3,\ b_4=b_3+4,\ \cdots.$$

因此得递推公式为 $b_n=b_{n-1}+n$.

练习 A（第 38 页）

1. (1) 由等差数列 2，5，8，…，知 $a_n=3n-1$，

所以 $a_4=3\times4-1=11$，$a_{10}=3\times10-1=29$.

(2) 由等差数列 12，7，2，…，知 $a_n=17-5n$，

所以 $a_{15}=17-5\times15=-58$，即第 15 项是 -58.

(3) 由等差数列 3，7，11，…，知 $a_n=4n-1$.

令 $100=4n-1$，则 $n=\frac{101}{4}\notin\mathbf{N}_+$，所以 100 不是这个数列中的项.

令 $79=4n-1$，则 $n=20$，所以 79 是这个数列中的项，是第 20 项.

2. (1) 因为 $d=\frac{a_7-a_5}{2}=\frac{16-6}{2}=5$，$a_5=a_1+4d$，

所以 $6=a_1+4\times5$，可得 $a_1=-14$.

(2) $d=\frac{a_{10}-a_3}{7}=\frac{-1-20}{7}=-3$，$a_{15}=a_3+12d=20+12\times(-3)=-16$.

3. (1) 24. (2) -2.

4. (1) 由 $a_n=3n+5$ 可得 $a_1=3\times1+5=8$，
当 $n\geqslant2$ 时，$d=a_n-a_{n-1}=3n+5-[3(n-1)+5]=3$.
(2) 由 $a_n=12-2n$ 可得 $a_1=12-2\times1=10$，
当 $n\geqslant2$ 时，$d=a_n-a_{n-1}=12-2n-[12-2(n-1)]=-2$.

练习 B（第 38 页）

1. 略.
2. (1) 这个数列仍是一个等差数列，首项是 a_1+md，公差是 d.
(2) 这个数列仍是一个等差数列，首项是 a_1，公差是 $2d$.
(3) 这个数列仍是一个等差数列，首项是 a_1+6d，公差是 $7d$.
(4) 这个数列仍是一个等差数列，首项是 $3(a_1+d)$，公差是 $3d$.
3. 没有. 等差数列的通项公式可写为 $a_n=ax+b$，a 为公差. 从图象上看，表示数列的各点均在一条直线上. 因为公差不等，即斜率不等，所以两条直线只能有一个公共点，表明这两个数列最多只能有一项相等，不可能再有相等的项.

练习 A（第 41 页）

1. (1) 195. (2) 72.
(3) 60.

2. (1) $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

(2) $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$.

(3) $S_{n+2}=\frac{(n+2)(1+2n+3)}{2}=(n+2)^2$.

(4) $S_{n+1}=\frac{(n+1)(1+3n+1)}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.

3. (1) $73=5+(n-1)\times4$，$n=18$，$S_{18}=\frac{(5+73)\times18}{2}=702$.

(2) $-12=63+(n-1)(-3)$，$n=26$，$S_{25}=\frac{(63-12)\times26}{2}=663$.

(3) 两位正整数中，5 的倍数有 10，15，20，…，95. $95=10+(n-1)\times5$，$n=18$，$S_{18}=$

$\frac{(10+95)\times 18}{2}=945.$

（4）两位正整数中，除以 3 余 1 的数有 10，13，16，…，97．共 $n=30$ 项．$S_{30}=\frac{30(10+97)}{2}=1\,605.$

练习 B（第 41 页）

1. 由题意知，等差数列的首项 $a_1=4$，公差 $d=-1$，设项数为 n，所以 $-18=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)$，得 $n=12$，所以前 12 项的和是 -18.
2. 由题意知，集合中的元素为：7，14，21，…，98.
   这些元素构成一个以 7 为首项，7 为公差的等差数列.
   设项数为 n，则 $98=7+(n-1)\times 7$，所以 $n=14$.
   因此 $S_{14}=\frac{14(7+98)}{2}=735.$
3. 由题意知，等差数列的首项是 14，公差是 -3.
   所以 $a_n=14+(n-1)(-3)=17-3n$．令 $a_n=17-3n\geqslant 0$，则 $n\leqslant\frac{17}{3}$，
   所以 $a_5>0$，$a_6<0$．所以该数列的前 5 项的和最大.
4. 由 $S_n=\frac{n+1}{n}$，得 $S_n=1+\frac{1}{n}$.
   因此 $a_1=S_1=1+\frac{1}{1}=2.$
   当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$，
   所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} & (n\in\mathbf{N}_+，且\ n\geqslant 2)\end{cases}$

习题 2-2A（第 42 页）

1. （1）$a_1=9$，$d=2$.　　　　（2）$a_1=\sqrt{2}-2$，$d=-2$.
2. （1）$a_8=6+7\times 3=27$.　　（2）$a_7=\frac{a_4+a_{10}}{2}=\frac{10+4}{2}=7$，$d=\frac{a_{10}-a_4}{6}=-1$.
   （3）因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以 $-20=14+(n-1)\times(-2)$，求得 $n=18$.
   （4）$a_7=a_1+6d$，所以 $\frac{1}{2}=a_1+6\times(-2)$，可得 $a_1=\frac{25}{2}$.
3. 在 12 与 60 之间插入 3 个数，则公差 $d=\frac{60-12}{4}=12$.
   所以插入的 3 个数是 24，36，48.
4. （1）$1-\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}+2$ 的等差中项是 $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+2}{2}=\frac{3}{2}$.

(2) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$ 的等差中项是$\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}=a^2+b^2$.

5. 因为公差 $d=\dfrac{120-216}{4}=-24$，所以中间三个皮带轮的直径分别是 192 mm，168 mm，144 mm.

6. 依题意，各高度气温构成等差数列，记为 $\{a_n\}$. 高度为 1 km 时的气温为 $a_1=8.5$ ℃，高度为 5 km时的气温为 $a_5=-17.5$ ℃，则公差为 $d=\dfrac{a_5-a_1}{4}=\dfrac{-17.5-8.5}{4}=-6.5$.

所以高度为 2 km 时的气温 $a_2=8.5$ ℃-6.5 ℃$=2$ ℃；

高度为 4 km 时的气温 $a_4=8.5$ ℃-3×6.5 ℃$=-11$ ℃；

高度为 8 km 时的气温 $a_8=8.5$ ℃-7×6.5 ℃$=-37$ ℃.

7. 由题意知，啁啾声次数成等差数列，$d=\dfrac{20-4}{4}=4$. 所以第三项为 $20+2\times4=28$(次).

由 28 到 40 增加了 12 次，温度应升高 3 ℃.

所以，34 的上方应是 28，40 的下方应是 37.

8. (1) $S_{10}=10\times2+\dfrac{10\times9}{2}\times5=245$.

(2) $S_{12}=\dfrac{12(-2+6)}{2}=24$.

(3) $a_{10}=a_1+9d$，所以 $a_1=-2+9\times5=43$，$S_8=8\times43+\dfrac{8\times7}{2}\times(-5)=204$.

9. 因为凸 n 边形的内角和是$(n-2)\cdot180°$，

所以 $n\times40+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot20=(n-2)\cdot180$.

解得 $n=12$ 或 $n=3$.

当 $n=12$ 时，最大内角超过 180°，不满足凸多边形条件，故舍去.

所以 $n=3$.

10. 观察数表可知，第 n 行中各数为 1，2，3，…，$n-1$，n，$n-1$，…，3，2，1.

所以 $S=2[1+2+3+\cdots+(n-1)]+n=n(n-1)+n=n^2$.

11. 依题意，屋顶从上而下各层瓦块数构成等差数列，记为 $\{a_n\}$，且 $a_1=21$，$d=1$，$n=19$，

所以 $S_{19}=19\times21+\dfrac{19\times(19-1)}{2}\times1=570$.

答：屋顶的这个斜面需要 570 块瓦.

12. 依题意，李强每天所跑距离依次排列构成一等差数列，记为 $\{a_n\}$. 已知 $a_1=5\,000$，$d=400$，$n=10$，所以

$$S_{10}=5\,000\times10+\frac{10\times(10-1)}{2}\times400=68\,000.$$

答：李强 10 天一共要跑 68 000 m.

习题 2-2B（第 43 页）

1. 不能确定. 若三个内角成等差数列，设三个内角分别为 $A-d$、A、$A+d$，得 $3A=180°$，所以

$A=60^\circ$．因此得结论：如果一个三角形的三个内角的度数成等差数列，则必有一个内角为 60°．

2. $S_{27}=\dfrac{(1+15)\times 27}{2}=216$，所以 $S=216-(1+15)=200$．

3. 由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，知 $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9\times 2a_5}{2}=9a_5<0$，

所以 $a_5<0$．　又 $S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_5+a_6)>0$，

所以 $a_6>0$．因此，此等差数列的前 n 项和中，$n=5$ 时取得最小值．

4. (1) 由 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-20|$，得

$$f(1)=0+1+2+\cdots+19=\frac{19(1+19)}{2}=190;$$

$$f(5)=4+3+2+1+0+1+2+\cdots+15=10+\frac{(1+15)\times 15}{2}=10+120=130;$$

$$f(20)=19+18+17+\cdots+3+2+1+0=\frac{19\times(19+1)}{2}=190.$$

(2)设 x 是 1～20 中的某一整数，则

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)+(x-2)+\cdots+3+2+1+0+1+2+\cdots+(20-x)\\&=\frac{(x-1)[1+(x-1)]}{2}+\frac{(20-x)[1+(20-x)]}{2}=\frac{1}{2}(2x^2-42x+420)=x^2-21x+210\\&=\left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{399}{4}.\end{aligned}$$

因为 $x\in\mathbf{N}_+$，所以当 $x=10$ 或 11 时，$f(x)$取最小值，$f(10)=f(11)=100$，

即最小值是 100.

5. $$\begin{aligned}S_{13}&=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}\\&=\frac{13(a_3+a_{11})}{2}\\&=\frac{13\times 6}{2}=39.\end{aligned}$$

6. 由已知 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，而 $f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{2}{4^x+2}$，

因此 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{2}{4^x+2}=1$.

(1) $f(0.1)+f(0.9)=f(0.1)+f(1-0.1)=1$.

(2) $f\left(\dfrac{1}{1\,001}\right)+f\left(\dfrac{1\,000}{1\,001}\right)=f\left(\dfrac{1}{1\,001}\right)+f\left(1-\dfrac{1}{1\,001}\right)=1$，

$f\left(\dfrac{2}{1\,001}\right)+f\left(\dfrac{999}{1\,001}\right)=1$，$f\left(\dfrac{3}{1\,001}\right)+f\left(\dfrac{998}{1\,001}\right)=1$，

……

$f\left(\dfrac{500}{1\,001}\right)+f\left(\dfrac{501}{1\,001}\right)=1$，

所以 $f\left(\frac{1}{1\,001}\right)+f\left(\frac{2}{1\,001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1\,000}{1\,001}\right)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{500个}=500.$

练习 A（第 47 页）

1. (1) -32，64. (2) $\frac{16}{27}$，$\frac{32}{81}$.

   (3) 0.297，$0.089\,1$. (4) -3，$3\sqrt{3}$.

2. (1) ± 6. (2) $\pm\sqrt{13}$.

   (3) $\pm ab(a^2+b^2)$.

3. (1) 因为 $a_5=8$，$a_7=16$，所以 $a_1q^4=8$，$a_1q^6=16$.

   所以 $q^2=2$，因此 $q=\sqrt{2}$ 或 $q=-\sqrt{2}$，所以 $a_1=2$.

   (2) 因为 $a_3=2$，$q=-1$，所以 $a_1=2$.

   所以 $a_{15}=a_1q^{14}=2$.

练习 B（第 48 页）

1. (1) 是. 首项为 a_1q^m，公比为 q.

   (2) 是. 首项为 a_1，公比为 q^2.

   (3) 是. 首项为 a_1q^4，公比为 q^5.

2. 可能. 例如，首项相同，公比分别为 1 和 -1 的情况.

练习 A（第 50 页）

1. (1) 189. (2) 8.25. (3) $\frac{31}{2}$. (4) $-\frac{91}{45}$.

2. (1) 由已知得 $q=-2$，

   所以 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}[1-(-2)^5]}{1-(-2)}=\frac{11}{4}$，

   $S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=-\frac{341}{4}$，

   所以从第 6 项到第 10 项的和为

   $$S_{10}-S_5=-\frac{341}{4}-\frac{11}{4}=-\frac{352}{4}=-88.$$

   (2) 由已知得 $q=\frac{1}{2}$，

   所以 $S_2=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$，

   $S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{381}{128}.$

所以从第 3 项到第 7 项的和为

$$S_7-S_2=\frac{381}{128}-\frac{9}{4}=\frac{93}{128}.$$

3. (1) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$

$=(a+a^2+\cdots+a^n)-(1+2+\cdots+n)$；

① 当 $a=1$ 时，上式 $=n-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(1-n)}{2}$；

② 当 $a\neq1$ 时，上式 $=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}$

$=(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\cdots+(1-0.00\cdots1)$

$=n-(0.1+0.01+0.001+\cdots+0.00\cdots1)$

$=n-\frac{0.1(1-0.1^n)}{1-0.1}$

$=n-\frac{1}{9}(1-0.1^n)$.

练习 B（第 51 页）

1. 设等比数列为 $\{a_n\}$，首项为 a_1，公比为 q.

由题意知：$a_1=-1$，$q\neq1$.

因为 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，所以 $\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=\frac{31}{32}$.

所以 $q^5=-\frac{1}{32}$，即 $q=-\frac{1}{2}$.

所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{(-1)\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{85}{128}$.

2. 能成等比数列.

(1) 当公比 $q=1$ 时，首项为 a_1，$S_n=na_1$，$S_{2n}-S_n=na_1$，$S_{3n}-S_{2n}=na_1$，…，

所以 $S_n=S_{2n}-S_n=S_{3n}-S_{2n}=\cdots$，是等比数列.

(2) 当 $q\neq1$ 时，数列 S_n，$S_{2n}-S_n$，…，$S_{kn}-S_{(k-1)n}$，$S_{(k+1)n}-S_{kn}$，…中，

当 $k\geqslant2$ 时，因为 $\frac{S_{(k+1)n}-S_{kn}}{S_{kn}-S_{(k-1)n}}=\frac{\frac{a_1[1-q^{(k+1)n}]}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{kn})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^{kn})}{1-q}-\frac{a_1[1-q^{(k-1)n}]}{1-q}}=\frac{q^{kn}-q^{(k+1)n}}{q^{(k-1)n}-q^{kn}}=\frac{1-q^n}{q^{-n}-1}=q^n$ 为

常数.

所以 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$S_{4n}-S_{3n}$，…成等比数列.

习题 2-3A（第 51 页）

1. (1) $q=-4$，$S_n=-\frac{3}{10}[1-(-4)^n]$.

 (2) $q=-4$，$a_3=32$ 或 $q=3$，$a_3=18$.

 (3) $a_1=2$，$a_4=\frac{1}{4}$.

 (4) $q=-\frac{3}{2}$，$S_5=-\frac{55}{9}$.

2. 由题意，知某林场计划年造林数构成等比数列.
 设此数列为 $\{a_n\}$，首项 $a_1=15$，公比 $q=1+20\%=1.2$.
 所以第 5 年造林 $a_5=a_1q^4=15(1+20\%)^4=31.104$（公顷）.

3. 设这三个数分别为：$\frac{a}{q}$，a，aq.

 所以 $\frac{a}{q}+a+aq=14$，　①

 $\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64$.　②

 由①②解得 $a=4$，$q=\frac{1}{2}$ 或 $a=4$，$q=2$.

 所以这三个数分别为：8，4，2 或 2，4，8.

4. 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，设首项为 a_1，公比为 q，则 $a_1>0$，$q>0$.

 因为 $\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lg q$（常数），

 所以数列 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列，首项为 $\lg a_1$，公差为 $\lg q$.

5. (1) $a_4=a_1\cdot q^3$，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

 (2) $S_n=\frac{a_n(1-q^n)}{q^{n-1}(1-q)}$.

 (3) $a_1=\frac{(1-q)\cdot S_n}{1-q^n}$，$a_n=\frac{(1-q)\cdot S_n\cdot q^{n-1}}{1-q^n}$.

6. (1) 是. 首项为 $a_1(1+q+q^2)$，公比为 q.

 (2) 是. 首项为$\frac{1}{a_1}$，公比为$\frac{1}{q}$.

7. 由题意可设这个等差数列为：$a-d$，a，$a+d$. 由$(a-d)+a+(a+d)=6$，可得 $a=2$.
 (1) 当 $a=2$ 为等比中项时：$(a-d)(a+d)=a^2$，解得 $d=0$.
 不合题意，舍.
 (2) 当 $a-d$ 为等比中项时：$a(a+d)=(a-d)^2$.
 所以 $2(2+d)=(2-d)^2$. 解得 $d=0$（舍）或 $d=6$.
 所以这个等差数列为：-4，2，8.
 (3) 当 $a+d$ 为等比中项时：$a(a-d)=(a+d)^2$，
 所以 $2(2-d)=(2+d)^2$. 解得 $d=0$（舍）或 $d=-6$.

所以这个等差数列为：8，2，-4.

综上，这个等差数列为-4，2，8或8，2，-4.

8. $(1+p)^{12}-1$.

9. 依题意，各轮被感染的计算机台数依次排列构成一等比数列，记为 $\{a_n\}$，$a_1=80$，$q=20$，

则 $S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{80(1-20^5)}{1-20}=13\ 473\ 680$.

即到第5轮后，被感染的计算机会有13 473 680台.

10. 依题意，该市近10年的国内年生产总值依次排列构成一等比数列，记为$\{a_n\}$，$a_1=2\ 000$，$q=1+10\%=1.1$，$n=10$，所以 $S_{10}=\dfrac{2\ 000(1-1.1^{10})}{1-1.1}=31\ 875$，即该市近10年的国内生产总值一共是31 875亿元.

习题 2-3B（第 52 页）

1. $$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_n&=a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot\cdots\cdot a_1q^{n-1}\\&=a_1^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}\\&=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.\end{aligned}$$

2. 由 $a_1+a_2=\dfrac{6}{5^2}$，$a_1=\dfrac{1}{5}$，可得 $a_2=\dfrac{1}{5^2}$；

由 $a_2+a_3=\dfrac{6}{5^3}$，$a_2=\dfrac{1}{5^2}$，可得 $a_3=\dfrac{1}{5^3}$；

由 $a_3+a_4=\dfrac{6}{5^4}$，$a_3=\dfrac{1}{5^3}$，可得 $a_4=\dfrac{1}{5^4}$，…；

依此规律，可以归纳并证明 $a_n=\dfrac{1}{5^n}$，$\{a_n\}$是首项为$\dfrac{1}{5}$，公比为$\dfrac{1}{5}$的等比数列. 所以

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

由$\begin{cases}\dfrac{1}{3}S_3\cdot\dfrac{1}{4}S_4=\left(\dfrac{1}{5}S_5\right)^2\\\dfrac{1}{3}S_3+\dfrac{1}{4}S_4=2\end{cases}$

得$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(3a_1+3d)\cdot\dfrac{1}{4}(4a_1+6d)=\dfrac{1}{25}(5a_1+10d)^2\\\dfrac{1}{3}(3a_1+3d)+\dfrac{1}{4}(4a_1+6d)=2\end{cases}$

即$\begin{cases}5d^2+3a_1d=0 & ①\\4a_1+5d=4 & ②\end{cases}$

由①②解得 $d=0$，$a_1=1$ 或 $d=-\dfrac{12}{5}$，$a_1=4$，

所以 $a_n=1$ 或 $a_n=4-\frac{12}{5}(n-1)$ ($n\in\mathbf{N}_+$).

4. (1) 因为 $S_{n+1}=4a_n+2$，所以 $S_n=4a_{n-1}+2$ ($n\geqslant2$).

又因为 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，所以 $4a_n+2-(4a_{n-1}+2)=a_{n+1}$，

即 $4a_n-4a_{n-1}=a_{n+1}$，

$2(a_n-2a_{n-1})=a_{n+1}-2a_n$，

所以 $\frac{a_{n+1}-2a_n}{a_n-2a_{n-1}}=2$. 所以 $\{b_n\}$ 为等比数列.

(2) 由(1)知 $\{b_n\}$ 为等比数列，首项 $b_1=a_2-2a_1=3$，公比 $q=2$.

所以 $b_n=a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}_+$).

所以 $a_2-2a_1=3\cdot2^0$，$a_3-2a_2=3\cdot2^1$，…，

$a_{n-1}-2a_{n-2}=3\cdot2^{n-3}$，$a_n-2a_{n-1}=3\cdot2^{n-2}$.

所以 $(a_n-2a_{n-1})+(2a_{n-1}-2^2a_{n-2})+\cdots+(2^{n-2}a_2-2^{n-1}a_1)$

$=(n-1)\cdot3\cdot2^{n-2}$.

所以 $a_n-2^{n-1}a_1=(n-1)\cdot3\cdot2^{n-2}$.

所以 $a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$ ($n\in\mathbf{N}_+$).

所以 $c_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{(3n-1)\cdot2^{n-2}}{2^n}=\frac{3n-1}{4}$.

所以 $c_{n+1}-c_n=\frac{3(n+1)-1}{4}-\frac{3n-1}{4}=\frac{3}{4}$ (常数).

所以 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(3) 由(2)知 $a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$，由 $S_{n+1}=4a_n+2=2^n(3n-1)+2$，

所以 $S_n=2^{n-1}(3n-4)+2$.

Ⅲ 巩固与提高（第53页）

1. (1) 真. (2) 假. (3) 真. (4) 假. (5) 真. (6) 假.

2. (1) 83. (2) 30. (3) $2n$ ($n\in\mathbf{N}_+$). (4) $2n^2+3n$.

(5) $\pm\sqrt{42}$. (6) 3. (7) $a_n=\begin{cases}3 & (n=1)\\ 6n-4 & (n\geqslant2)\end{cases}$

3. 20.

4. 2 046 或 6 138.

5. $\frac{1}{3}$.

6. (1) $a_n=1+(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{(2n)^2}$.

(2) $a_n=\frac{[1+(-1)^n]\cdot\sqrt{2}}{2}$.

7. (1) 1，2，5，12，29.

(2) -1，-2，$-\frac{3}{2}$，$-\frac{7}{6}$，$-\frac{32}{21}$.

8. -6，150. 不是.

9. 12，16，20，25 或$\frac{99}{4}$，$\frac{81}{4}$，$\frac{63}{4}$，$\frac{49}{4}$.

10. 4.

11. (1) 因为 $a_n=f(a_{n-1})$，所以 $a_{n+1}=f(a_n)$. 因为 $f(a_n)-f(a_{n-1})=a_{n+1}-a_n=k(a_n-a_{n-1})$，

所以 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=k$（$k$ 为非零常数），即 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=k$.

所以 数列$\{b_n\}$是等比数列.

(2) 由(1)知数列$\{b_n\}$是以 $b_1=a_2-a_1$ 为首项，k 为公比的等比数列. 因为 $a_2=f(a_1)=f(a)$，

所以 $b_1=f(a)-a$.

所以 $b_n=[f(a)-a]\cdot k^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

12. (1) 当 $n=1$ 时，$a_2=3S_1$，所以 $a_2=3$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{na_{n+1}}{n+2}-\frac{(n-1)a_n}{n+1}$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+2)}{n+1}$.

所以
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\times4}{3}\cdot\frac{2\times3}{2}$$
$$=(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

即 $a_n=2^{n-2}(n+1)$，所以 $S_n=\frac{na_{n+1}}{n+2}=n\cdot 2^{n-1}$. 所以$\frac{S_n}{n}=2^{n-1}$.

所以
$$\frac{\frac{S_{n+1}}{n+1}}{\frac{S_n}{n}}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2.$$

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等比数列.

(2) 由 (1) 可知 $S_{n+1}=(n+1)\cdot 2^n=4\cdot(n+1)\cdot 2^{n-2}=4a_n$.

Ⅳ 自测与评估（第 55 页）

1. (1) D. (2) A. (3) C. (4) B.

2. (1) $q=1$ 或 $q=\frac{1}{2}$. (2) $\frac{4}{3}$. (3) 7.

3. $a_n=S_n-S_{n-1}=11-2n(n\geqslant 2)$，又 $a_1=S_1=9=11-2$，

所以 $a_n=11-2n(n\in\mathbf{N}_+)$，易得 $a_5=1>0$，$a_6=-1<0$，

所以当 $n\leqslant 5$ 时，$b_n=a_n$，$T_n=S_n=10n-n^2$；

当 $n>5$ 时，$b_n=-a_n$，$T_n=2S_5-S_n=50-(10n-n^2)$
$$=n^2-10n+50,$$

即
$$T_n=\begin{cases}10n-n^2 & (n\leqslant 5)\\ n^2-10n+50 & (n>5)\end{cases}$$

4. 当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n-S_{n-1}=a_n$.

所以 $n(2n-1)a_n-(n-1)(2n-3)a_{n-1}=a_n$.

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n-3}{2n+1}$.

所以 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\dfrac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{5}{9}\times\dfrac{7}{11}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-5}{2n-1}\cdot\dfrac{2n-3}{2n+1}$.

所以 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)}$. 又 $a_1=\dfrac{1}{3}$,

所以 $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

因为 $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,

所以 $S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}.$$

5. (1) 若$\{a_n\}$是等差数列，设 $a_n-a_{n-1}=d$，则 $a_n-a_{n-1}=2a_{n-1}+n-a_{n-1}=a_{n-1}+n=d$，

所以 $a_{n-1}=-n+d$，所以 $a_n=-(n+1)+d$. 因此

$a_n-a_{n-1}=[-(n+1)+d]-(-n+d)=-1=d$.

所以 $a_n=-(n+1)-1=-n-2$.

(2) $\{a_n\}$不可能为等比数列. 假设$\{a_n\}$为等比数列，则 $a_n=a_{n-1}\cdot q$（q 为非零常数），由题意有

$a_{n-1}\cdot q=2a_{n-1}+n$，且 $q\neq 2$. 所以$(q-2)a_{n-1}=n$，所以 $a_{n-1}=\dfrac{n}{q-2}$.

所以 $a_n=\dfrac{n+1}{q-2}$. 因此$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n}=q$，与 q 是常数矛盾. 故假设不成立.

六、反馈与评价

Ⅰ 知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=26-2n$，若使此数列的前 n 项和 S_n 最大，则 n 的值为（　　）.

(A) 12　　(B) 13　　(C) 12 或 13　　(D) 14

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 1，前 8 项和为 17，则它的公比为（　　）.

(A) 2　　(B) -2　　(C) 2 或 -2　　(D) 2 或 -1

3. 设 $a\neq b$，若关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 和 $x^2-x+b=0$ 的四个根可以组成首项为$\dfrac{1}{4}$的等差数列，

则 $a+b$ 的值为（　　）.

(A) $\frac{3}{8}$　　(B) $\frac{11}{24}$　　(C) $\frac{23}{24}$　　(D) $\frac{31}{72}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+n-1$，则数列 $\{a_n\}$ 是（　　）.

(A) 等比数列　　(B) 等差数列

(C) 既是等差数列又是等比数列　　(D) 不是等差数列也不是等比数列

5. 已知 -1，a_1，a_2，-4 成等差数列，-1，b，-4 成等比数列，那么 $\frac{a_2-a_1}{b}$ 等于（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{4}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=a^n-2$（a 是不为 0 的实数），那么数列 $\{a_n\}$（　　）.

(A) 是等比数列

(B) 当 a 不等于 1 时是等比数列

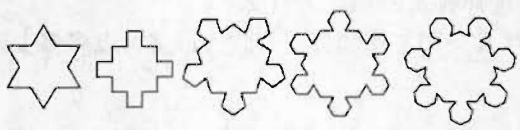
(C) 从第二项起成等差数列

(D) 从第二项起成等比数列或等差数列

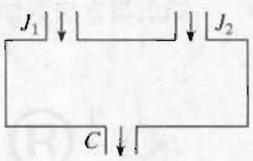
二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{m+n}=A$，$a_{m-n}=B(m>n,\ m,\ n\in \mathbf{N}_+)$，则 $a_m=$________.

8. 如图，第 n 个图形是正 $n+2$ 边形“扩展”而来（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$），则第 $n-2$ 个图形中共有________个顶点.



9. 一台计算机装置如图，其中 J_1，J_2 表示数据入口，C 是计算结果的出口，计算过程是由 J_1，J_2 分别输入正整数 m 和 n，经过计算机运算后由 C 输出的结果为正整数 $f(m,\ n)$，此装置满足下列三个性质：



①$f(1,\ 1)=1$；

②$f(m,\ n+1)=f(m,\ n)+2$；

③$f(m+1,\ 1)=2f(m,\ 1)$. 现从 J_1 输入 5，J_2 输入 6，则输出结果 $f(5,\ 6)=$________.

10. 已知 $a_n=\log_{n+1}(n+2)(n\in \mathbf{N}_+)$，观察下列运算：$a_1\cdot a_2=\log_2 3\cdot\log_3 4=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}=2$；

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\cdots\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\cdots\cdot\frac{\lg 7}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 7}=3\cdots\cdots$

定义使 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_k$ 为整数的 $k(k\in \mathbf{N}_+)$ 叫做企盼数，试确定当 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_k=2\,008$ 时，企盼数 $k=$________.

三、解答题（共50分）

11.（12分）设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_5+a_8+a_{13}+a_{16}=2\,000$，试求 S_{20}.

12.（12分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=1-\frac{2}{3}a_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

（1）判断数列 $\{a_n\}$ 是什么数列？

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

13.（12分）n^2 个正数排成如下表所示的 n 行 n 列：

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

其中每一行成等差数列，每一列成等比数列，且各列公比相等，若 $a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+\cdots+a_{nn}$ 的值.

14.（14分）在一次人才招聘会上，有A、B两家公司分别开出它们的工资标准：A公司允诺第一年月工资为1 500元，以后每年月工资比上一年月工资增加230元；B公司允诺第一年月工资为2 000元，以后每年月工资在上一年的月工资基础上递增5%. 设某人年初被A、B两家公司同时录取，试问：

（1）若该人分别在A、B公司连续工作 n 年，则他在第 n 年的月工资收入分别是多少？

（2）该人打算连续在一家公司工作10年，仅从工资收入总量较多作为应聘的标准（不计其他因素），该人应该选择哪家公司，为什么？

（3）在A公司工作比在B公司工作的月工资收入最多可以多多少元（精确到1元）？并说明理由.

知识与方法测试参考答案

1. C.　2. C.　3. D.　4. D.　5. C.　6. D.

7. $\frac{A+B}{2}$.　8. n^2+n.　9. 26.　10. $2^{2\,008}-2$.

11. 由数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，易知 $m+n=p+q$ 时，$a_m+a_n=a_p+a_q$.

所以　$a_5+a_{16}=a_8+a_{13}=a_1+a_{20}$.

因为　$a_5+a_8+a_{13}+a_{16}=2\,000$，所以　$a_1+a_{20}=1\,000$.

所以　$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10\,000$.

12.（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1-\frac{2}{3}a_1$，解得 $a_1=\frac{3}{5}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(1-\frac{2}{3}a_n\right)-\left(1-\frac{2}{3}a_{n-1}\right)$，得 $5a_n=2a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{5}$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{3}{5}$ 为首项，$\frac{2}{5}$ 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 知：$a_n=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$，

所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\frac{\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{5}}$$

$$=1-\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

13. 设第一行数列公差为 d，各列数列公比为 q，则第四行数列的公差是 dq^3，所以

$$\begin{cases}a_{24}=(a_{11}+3d)q=1\\a_{42}=(a_{11}+d)q^3=\dfrac{1}{8}\\a_{43}=\dfrac{1}{8}+dq^3=\dfrac{3}{16}\end{cases}\quad \text{解得 } a_{11}=d=q=\pm\frac{1}{2}.$$

由于 n^2 个数都为正，因此 $a_{11}=d=q=\frac{1}{2}$.

对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$a_{kk}=a_{1k}q^{k-1}=[a_{11}+(k-1)d]q^{k-1}=\frac{k}{2^k},$$

所以

$$S_n=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}. \qquad ②$$

①−②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

所以 $S_n=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$.

14. (1) 此人在 A、B 公司第 n 年的月工资分别为：

$$a_n=1\,500+230\times(n-1),$$

$$b_n=2\,000(1+5\%)^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}_+).$$

(2) 若该人在 A 公司连续工作 10 年，则他的工资收入总量为 $12(a_1+a_2+\cdots+a_{10})=304\,200$(元)；若该人在 B 公司连续工作 10 年，则他的工资收入总量为 $12(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=301\,869$(元). 因为在 A 公司收入的总量高些，因此该人应该选择 A 公司.

(3) 问题等价于求 $c_n=a_n-b_n=1\,270+230n-2\,000\times1.05^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$ 的最大值.

当 $n\geqslant2$ 时，$c_n-c_{n-1}=230-100\times1.05^{n-2}$；

当 $c_n-c_{n-1}>0$，即 $230-100\times1.05^{n-2}>0$ 时，

$1.05^{n-2}<2.3$，即 $n<19.1$.

因此，当 $2\leqslant n\leqslant 19$ 时，$c_{n-1}<c_n$. 于是当 $n\geqslant 20$ 时，$c_n\leqslant c_{n-1}$. 所以 c_{19} 是数列 $\{c_n\}$ 的最大项. $c_{19}=a_{19}-b_{19}=827$（元）. 即在 A 公司工作比在 B 公司工作的月工资收入最多可以多 827 元.

Ⅱ　评价建议

1. 针对本章内容特点，除进行总测试外，在学习过程中可进行三次小测试：第一次在学习数列之后，重点强化“观察、试验、归纳、猜想”这一重要数学思想方法；第二次（第三次）放在学习等差数列（等比数列）之后，突出等差（等比）数列的概念、通项公式、前 n 项和公式等知识与方法的梳理、反思和运用. 要把教师的评价与学生的自评和互评结合起来，发现问题及时纠正，发挥评价的反馈纠正作用.

2. 可组织学生广泛搜集有关资料，例如，储蓄问题，分期付款问题等，设计相应的数学应用题或写出有关的小论文，并组织交流、展览、推荐. 引导学生搜集数列发展史和数学家的故事，在班内交流，营造数学文化氛围.

3. 数列中程序化的内容较多，应充分利用计算机资源设计计算程序，提高学生学习数学的兴趣.

第三章 不等式

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过具体情景，了解不等式（组）的实际背景，借助数轴，能从“形”和“数”两个方面来认识不等式.
2. 理解不等式的性质，能运用不等式的性质证明简单的不等式以及解不等式.
3. 理解均值不等式，能用均值不等式解决简单的最大（小）值问题.
4. 掌握求解一元二次不等式的基本方法，并能解决一些实际问题.
5. 了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组.
6. 会从实际情景中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.
7. 能将实际问题转化为数学问题，建立不等式模型，求解不等式.

（二）过程与方法目标

1. 经历从实际情境中抽象出不等式模型的过程，体会不等式、方程以及函数之间的联系.
2. 探索并了解均值不等式的证明过程，体验均值不等式在实际中的应用.
3. 对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序图.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，体会不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值.
2. 体会线性规划的基本思想，借助几何直观解决一些简单的线性规划问题.
3. 通过实例，体验数学与日常生活的联系，感受数学的实用价值，增强应用意识，提高实践能力.

4. 根据自己的生活经验发现并提出问题，采取多种合作方式，从不同的角度、层次探索解决的方法，从而获得综合运用知识和方法解决实际问题的经验，发展创新意识.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过实例，对二次三项式进行分析，运用实数运算的性质，讨论二次不等式的解集.

2. 加强数形结合. 在对代数式分析的基础上，进行作图及图象分析.

3. 通过写出解一元二次不等式的算法步骤，融入算法思想.

4. 通过实例验证，让学生发现不等式表示的区域. 基础好的学校可进一步进行探索与研究，从理论上证明不等式表示的区域.

5. 通过点到直线的距离公式，从理论上说明，在一个凸集的边界点上，目标函数取最值的原理.

6. 只涉及简单线性规划的应用.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是不等关系与不等式、均值不等式、一元二次不等式及其解法、不等式的实际应用以及二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题.

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，不等式是刻画现实世界中这些不等关系的数学模型，是进行数学研究、解决许多实际问题的重要工具，因而关于不等式的知识是高中数学学习的重要内容. 在本章中，作为背景材料，教科书首先借助用来衡量“小康”水平的恩格尔系数以及进行生产、营销等经济活动时必须关注的“最优化”问题创设情境，营造氛围，使学生通过这些实例感受现实世界中的不等关系与自己的日常生活息息相关，从而能够充满激情地进入不等式相关知识的学习与探究中去.

本章的第一大节是不等关系与不等式. 该节的内容，是遵循课程标准中提出的两个理念进行设计的. 这两个理念是：一、强调本质，注意适度形式化；二、注重提高学生的思维能力. 在本节中，我们首先通过关于“宇宙飞船的飞行速度”和“手机话费”等两个实例，将日常生活中司空见惯的不等关系用数学形式表达出来. 事实上，这个过程学生在初中阶段已经体验过，并且在本章的“章头语”中又经历过一次，现在再这样处理一下，无非是让学生能够在一种“似曾相识燕归来”的情境中更加亲近、自然地投入到新知识的学习之中.

形式化是数学的基本特征之一. 在数学教学过程中，必须善于把“数学的学术形态”与“学生易于接受的教育形态”有机地结合起来，因此在教科书中，当我们概括出“$a\geqslant b$ 即为 $a>b$ 或 $a=b$；$a\leqslant b$ 即为 $a<b$ 或 $a=b$”后，立即提出如何比较实数的大小，这其实也是学生早就接触过的问题，运用初中学

习过的不等式知识，他们很容易自己得出“数轴上任意两点中，右边点对应的实数比左边点对应的实数大”的结论．然后通过对于数轴上两个点的位置关系的分析，就不难得到：“对于任意两个实数 a 和 b，在 $a=b$，$a>b$，$a<b$ 三种关系中，有且仅有一种关系成立．”至此，我们的探究过程并未结束．因为数学课程既要讲逻辑推理，更要讲道理．于是，我们运用“两个同学背靠背地站在同一高度的地面上比高矮”的浅显事例，引导学生积极思考、自主探索，经历“数学概念以及相关结论逐步形成”的过程，并体会蕴含在其中的思想方法，从本质上把握“$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$”这一数学表达形式的内涵，从而把日常生活中对于不等关系的认识上升到理性认识的高度，并为后续的学习准备好坚实的理论基础．

必须指出，在上述内容之后配置的两个比较大小的例题，它们的作用，不仅仅是对上述结论的应用，同时也是为了对数学方法（因式分解和配方法）进行复习与强调．至于这部分内容之后配置的练习题以及“思考与讨论”中的问题，也都是按上述意图设计的．

在作好相应的理论方面的准备以后，本节的第二部分则着眼于对“不等式的性质”的探讨．关于不等式的性质，学生在小学和初中阶段已学过一些，有些性质，还在解题实践中反复应用过，因此在高中数学课程标准的第三部分——“内容标准”中对此并没有提出相应的教学要求．但是根据课标精神，高中数学课程既要关注数学思维能力在形成理性思维中所发挥的独特作用，又不必在“全面、系统、完整”等方面去刻意追求．所以教科书里还是介绍了不等式的 4 条性质，5 个推论，然后，作为示范，只对其中的部分性质和推论进行了证明，特意为教师和学生留出许多自主选择的空间．

本章的第二大节是均值不等式（也称为基本不等式）．这是一个重要的不等式，均值定理的结论：“两个正实数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值”在解决一类相关的数学问题和实际问题时，有着广泛的应用．为此，教科书中在证明了该定理后，又给出了这个定理的几何解释，同时还在本节的“思考与讨论”中，要求学生针对“均值不等式与不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的关系”进行讨论．

在介绍了均值定理以后，教科书中安排了三个例题，分别用来展示均值定理在三个方面的应用．其中，根据例 2 还顺理成章地总结出两条规律，即：

（1）两个正数的积为常数时，它们的和有最小值；

（2）两个正数的和为常数时，它们的积有最大值．

本章的第三大节是一元二次不等式及其解法．通过六个例题，总结了一元二次不等式的解法，最后还设计了解一元二次不等式的程序框图．教科书中，在给出有关概念以后，首先展示一元二次不等式与二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$、一元二次方程 $f(x)=0(a\neq 0)$ 之间的内在联系．一开始是把二次三项式分解因式后，转化为一元一次不等式组求解的．而这种解法的思路，则是通过对于相应的二次函数的图象和一元二次方程的根的分析得到的．这样处理，实际上就为学生探究接下来的“探索与研究”中的问题（函数的零点将 x 轴分为若干区间后，函数具有的性质）以及例 1（解集为实数集或空集的情况）的求解作了铺垫．在此之后，教科书中又对一元二次不等式的解法作了一般性的分析，从而使后续的内容——解不等式（如例 2、例 3、例 4）、求函数的定义域（如例 5）以及最后概括一元二次不等式求解的算法过程——自然、协调，一气呵成地展现出来．

本章的第四大节是不等式的实际应用．本节安排了三道例题，使学生能通过这些例题体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系．这三个例题，一个是关于民用住宅建筑中的常识问题，一个涉及农药的配制，还有一个就是章头语中提出的关于“恩格尔系数”的问题．最后，通过这些例题的解题实践，总结出解有关不等式的应用题时，一般都要经历“设未知数——找不等量关

系——列出关于未知数的不等式（组）——解不等式（组）——写出答案”这样一个数学过程.

第五大节是二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题. 首先通过探究二元一次不等式 $Ax+By+C>0$ 或 $Ax+By+C<0$ 的解集的几何意义，了解不等式是刻画区域的重要工具，进而介绍二元一次不等式（组）所表示的平面区域，然后通过几何直观——图象解法，学习“最优化”问题中一类最为简单的“线性规划”问题.

2. 地位与作用

对于现实世界中的数量关系，不等关系要比相等关系更具普遍性，不等式则是刻画这种不等关系的数学模型，研究不等式可以帮助学生更深刻地认识和掌握事物之间的运动变化及其相应的规律. 同时，不等式知识的广泛应用可以帮助学生进一步体验数学的应用价值，有助于激发学生学习的兴趣，增强学生的数学应用意识与解决实际问题的能力.

不等式与数、式、方程、函数、导数等知识有着密切的联系. 讨论方程或方程组的解的情况，研究函数的定义域、值域、单调性、最大（小）值，解决线性规划问题等，都要经常用到不等式的知识. 不等式在中学数学中占有重要地位，是进一步学习数学的重要基础.

对于本章内容在中学数学中的地位和作用，应着重从如下两个方面去认识：

第一、承上启下的作用. 从知识的层面上看，在中学阶段，不等式的教学分为三个阶段. 第一阶段，学生在初中学习了不等式的概念以及一元一次不等式（组）的解法，对不等式有了感性的认识，学会了解决最简单的关于不等式的问题. 第二阶段，是学习本章的均值定理，一元二次不等式的解法及简单的线性规划问题. 通过这一阶段的学习，学生对不等式的性质产生理性的认识，并将初步了解证明不等式的方法，掌握一元二次不等式的解法，进一步增强应用不等式解决实际问题的意识，为今后的学习打下良好基础. 第三阶段则安排在选修课程系列 4 中，届时学生要在本章内容的基础上进一步学习不等式证明的基本方法（诸如比较法，综合法，分析法，反证法，放缩法等），并且还将通过相关的几何背景理解、掌握绝对值不等式、柯西不等式的实质. 从数学思维训练和渗透数学思想方法的角度进行考察，本章内容也具有非常明显地承上启下的作用. 数学课程既要讲道理，也要讲逻辑推理. 在本章中，通过典型例题的分析和一些学生的自主探索活动，可以使学生对于相关概念、结论的认识向理性的高度提升，并体会蕴涵在其中的数学思想方法，进一步增强数学思维能力. 例如，本章教材中关于数形结合思想的渗透. 在“一元二次不等式”一节中，就是通过函数图象在一元二次不等式与相关函数、方程之间建立了联系. 对于二元一次不等式（组），则更是通过突出其几何意义展开的. 为了用平面区域表示二元一次不等式（组），我们从点与数对的对应、线与方程的对应，过渡和提升到平面区域与不等式（组）的对应，从而使学生进一步体会到数形结合思想的实质及其重要性.

第二、突出了发展学生应用数学的意识. 20 世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特点之一. 当今，在社会生活的许多方面，数学正在从幕后走向台前，因而高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用，以及数学与日常生活、其他学科的联系. 在本章中，“不等式的实际应用”与“二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题”都是这样的题材. 这些内容将“发展学生的意识”提升到了一个新的高度，它们对于促进学生逐步形成和发展教学应用意识，提高实践能力，都将是非常有意义的.

3. 重点与难点

本章的重点是一元二次不等式的解法、均值不等式的应用以及简单的线性规划问题. 不等式的性质及其证明是本章的难点.

4. 本章知识结构

（三）课时分配

本章教学时间约 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　不等关系与不等式	
3.1.1　不等关系与不等式	1 课时
3.1.2　不等式的性质	2 课时
3.2　均值不等式	2 课时
3.3　一元二次不等式及其解法	3 课时
3.4　不等式的实际应用	2 课时
3.5　二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题	
3.5.1　二元一次不等式（组）所表示的平面区域	2 课时
3.5.2　简单线性规划	2 课时
小结与复习	2 课时

（四）教学建议

3.1　不等关系与不等式

本大节内容主要包括比较实数大小的方法，不等式的性质、推论及其证明，简单不等式的证明．此外，还介绍了不等式、同向不等式的概念，通过例题介绍了作差法、反证法证明不等式．渗透了数形结合的数学思想．

本大节的重点是不等式的性质，难点是不等式性质的证明．

3.1.1　不等关系与不等式

1. 本小节的重点是比较实数大小的方法，难点是判断差的符号．

2. 本小节首先通过两个实例让学生感受到不等关系是客观世界中存在的，可以用不等式来表示实际问题中量与量之间的不等关系．

3. 关于 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 的含义.

$a>b$ 或 $a<b$，表示严格的不等式.

不等式 $a \geqslant b$ 读作"a 大于或等于 b"，其含义是指"或者 $a>b$，或者 $a=b$"，等价于"a 不小于 b". 即：若 $a>b$ 或 $a=b$ 中有一个正确，则 $a \geqslant b$ 正确.

不等式 $a \leqslant b$ 读作"a 小于或等于 b"，其含义是指"或者 $a<b$，或者 $a=b$"，等价于"a 不大于 b". 即：若 $a<b$ 或 $a=b$ 中有一个正确，则 $a \leqslant b$ 正确.

4. 在讲比较实数大小时，教材是借助于数轴上的点的位置关系来研究实数集中两个实数的大小关系的. 由直观到抽象，学生接受比较自然，体现了数形结合的数学思想.

5. 在介绍对于任意两个实数 a，b，都有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b,$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

时，应指出上面等价符号的左边反映的是实数的运算性质，右边反映的则是实数的大小顺序，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是不等式这一章内容的理论基础，是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据. 因此，在教学中必须高度重视.

比较两个实数 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差$(a-b)$的符号（注意是指差的符号，至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要），而这又必须归结到实数运算的符号法则. 因此，实数运算的符号法则是学习不等式的基础，可以根据实际情况作简要的复习.

6. 本节的例 1 和例 2 是比较两个代数式的大小，教学时应指出，比较两个代数式的大小，实际上是比较它们的值的大小，而这又归结为判断它们的差的符号. 在讲这两个例题时，一定要说明代数式中字母的取值范围. 取值范围是实数集的可以省略不写，但最好强调一下，提醒学生不可忽略字母的取值范围.

讲解例 1 和例 2 时，应强调两种变形方法：因式分解法和配方法. 将两个代数式的差进行因式分解转化为多个因式相乘，然后判断符号；将两个代数式的差进行配方转化为几个非负实数之代数和，然后判断正负.

对于本小节内容的教学，一定要让学生在"循环往复"地认识相关概念的同时，更有效把握一些通性通法，使学生的思维能力得以"螺旋式"的上升.

3.1.2 不等式的性质

1. 本小节的重点是不等式的性质，难点是不等式性质的证明.

2. 性质 1（对称性）和性质 2（传递性），学生是容易理解的，但对它们进行证明，却是比较困难的. 一是学生可能认为没有必要进行证明，二是学生可能不知道如何证明.

为了引起重视，养成学生进行数学证明的习惯，教学时可以向学生提出如下问题："如果 $a>b$，$\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大？"针对学生回答中可能出现的错误，来说明证明的必要性. 然后，可以让学生回顾一下实数的运算性质与大小顺序之间的关系，以及实数运算的符号法则，最后再引导学生进行证明. 这里要使学生明确证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则，要引导学生说清每一步推理的理由和关键性步骤.

3. 性质 3 及其推论，学生也是容易理解的，在这里应该着重向学生指出：

(1) 推论 1 是不等式的移项法则，与解方程时的移项法则完全相同.

(2) 推论 2 是同向不等式相加法则的依据，它是连续两次运用性质 3，然后由性质 2 证出的. 但两个同向不等式的两端分别相减时，就不能得到相应的结论，对此可以举出反例向学生说明.

(3) 性质 3 的推论 2 可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向. 此外，性质 3 的逆命题也正确.

4. 教科书中只给出了同向不等式的概念，为了便于学生理解，教学时可以给学生提出异向不等式的概念，但应指出异向不等式问题可以利用对称性转化为同向不等式问题解决.

5. 性质 4 有两种不同的结果，学生不易理解，运用时更容易出错. 讲解时，可先用具体数，让学生分析比较，得出结论后，再给予一般的证明，对于性质 4 还必须注意：

(1) 其证明过程中的关键步骤是根据“同号相乘得正，异号相乘得负”来完成的；

(2) 要强调 c 的符号，因为符号不同，结论也不同；

(3) a、b 可以是实数，也可以是式子，不要在强调 c 的符号时，又使学生对 a、b 的符号产生误解，从而限制 a，b，缩小了性质的应用范围.

6. 性质 4 的推论 1 说明将两边都是正数的两个同向不等式的两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 教学时要强调指出：

(1) 它是连续两次运用性质 4 先后得出 $ac>bc$，$bc>bd$，再用性质 2 证出的；

(2) 所有的字母都表示正数，如果仅有 $a>b$，$c>d$（而不是 $a>b>0$，$c>d>0$），就推不出 $ac>bd$ 的结论，同时还要强调，由两个异向不等式，例如 $a>b>0$，$0<c<d$，也推不出 $ac>bd$ 的结论，这两点可以举出反例向学生说明.

7. 性质 4 的推论 2 应让学生熟记，教学时应强调 a，b，n 的取值范围. 例如，当 $a>b>0$，$n=-1$ 时，$a^{-1}>b^{-1}$ 不成立；当 $a=-2$，$b=-4$，$n=2$ 时，$a^2>b^2$ 不成立.

8. 性质 4 的推论 3 的证明用的是反证法，因为 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的反面有两种情形，即 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 和 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就“归谬”了事，而必须进行“穷举”，把这两种情形都否定才能得出 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 正确的结论. 把推论 2 和推论 3 结合起来，还可以把这一性质推广到正有理指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$，此结论不需要告诉学生.

9. 证明不等式，可以根据不等式的性质和已经证明过的不等式来进行，教材通过例题渗透了用综合法证明不等式的思想. 综合法是指利用某些已经证明过的不等式（定理、公式）和不等式的性质推导出所要证明的不等式成立的一种方法. 教学时，教师要让学生体会这种证题思路，但不需要给学生提出这个概念，在选修 4-5 中将对不等式的证明方法作详细介绍.

10. 在本章中，对于“不等式的性质”，高中数学课程标准中并没有提出明确的教学要求，但是在高中数学选修课程不等式选讲中却提出了要“回顾和复习不等式基本性质”，显然，这里存在一个衔接的问题. 这个衔接，既表现在知识的层面上，也表现在思维能力的提高上. 教科书中安排这小节的意图，就是为了能够更好地发挥其承上（与初中的相关内容衔接）启下（为学习不等式选讲作理论方面的准备）的作用. 进行本小节内容教学时，应注意：

(1) 介绍相关性质时，既要关注与初中数学中相应内容在知识、能力两个方面的衔接，更要注意通过不等式性质的推证提高学生的数学思维能力，站在帮助学生形成理性思维的高度进行教学；

(2) 对于不等式的证明，今后还将在选修教材的专题中进行研究，因此在进行本小节教学时，在难

度方面务必要把握“尺度”，讲解例题也好，处理习题也好，要在帮助学生掌握分析问题、解决问题的思路上下功夫，千万不要引导和要求学生过多地去做那些不等式证明的题，否则，既加重了学生的课业负担，也可能造成“重复劳动”；

(3) 教科书中，对不等式的那些性质和推论并没有一一进行推证，这是特意为教师和学生留出的一些自主选择的空间，对此应针对不同的学生提出不同的要求，使学生根据自身的条件在能力与数学思维方面得到不同的发展．但有一点则是共同的，即要让学生都能通过本小节内容的学习，再次体验数学严密的系统性与逻辑性，提高数学思维能力．

3.2 均值不等式

1. 本小节重点是均值定理的推导及其应用，难点是均值定理在实际问题中的应用．

2. 教材按照问题提出→证明→几何解释→应用（不等式证明、实际问题的解决、最值的求法）的思路呈现．教学时可以创设问题情景，设计一个探究与建模相结合的课题．一方面鼓励学生探索并了解均值定理的证明过程，将其推广到三个或几个算术平均值大于或等于它的几何平均值；另一方面可以引导并要求学生尝试提出实际问题，然后用均值定理加以解决．

3. 在均值定理的教学中，要让学生注意以下两点：

(1) 均值定理成立的条件是 a，$b\in\mathbf{R}^+$，如$\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\times(-4)}$不成立．

(2) 均值定理是带有等号的不等式，因此对其中的“当且仅当……时取‘=’号”这句话的含义要弄清楚．教学时，要提醒学生从以下两个方面来理解这句话的含义：

当 $a=b$ 时取等号，其含义是

$$a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab};$$

仅当 $a=b$ 时取等号，其含义是

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b.$$

综合起来，其含义是：$a=b$ 是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$的充要条件．

4. 利用不等式的性质，可以推导出两个重要不等式：

(1) a，$b\in\mathbf{R}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时，取等号）；

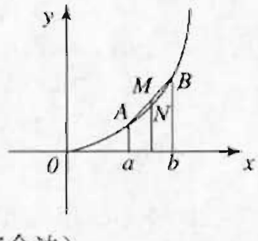
(2) a，$b\in\mathbf{R}^+\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，取等号）．

这两个不等式形式相近，学生容易混淆，所以教科书在“思考与讨论”中安排学生对这两个不等式的关系进行讨论．应放手让学生自主进行探索，在辨析中加深理解．

5. 如果把$\frac{a+b}{2}$看作是正数 a，b 的等差中项，$\sqrt{ab}$看作是正数 a，b 的等比中项，那么该定理可以叙述为：两个正数的等差中项不小于它们的等比中项．其几何意义可以叙述为“半径不小于半弦”（见教科书中的几何解释）．

6. 均值定理的几何解释体现了数形结合的重要思想. 这样处理, 一方面可以帮助学生加深对均值不等式的理解. 同时, 也有助于引导学生通过"构建不等式的几何形象, 解决有关问题". 数形结合的方法, 始终是我们解决数学问题的重要方法, 是数学学习过程中一个很好的研究课题, 在教学中应引起足够的重视. 例如, 习题 3-1B 中题 1 的第 (4) 小题, 利用 $y=x^2$, $x>0$ 的图象, 也可以得到 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 的几何表示:

如图, 设曲线 $y=x^2(x>0)$ 上的两点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, 则 AB 的中点 $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$. 若过 M 且垂直于 x 轴的直线交曲线于点 N, 则 $N\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$. 由于 N 在 M 的下方, 于是可得 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.



7. 通过例 1 的教学, 让学生体会均值定理在不等式证明中的作用, 同时让学生继续体验由不等式的性质和该定理直接推导出要证明的不等式的证题思路 (综合法).

8. 由例 2 可以顺理成章地总结出两个重要结论, 它们常常可以用来生动地解释一些物理现象和某些图形的性质, 应引导学生通过自主探索后进行总结.

9. 在利用均值定理求某些函数的最大值、最小值时, 应该使学生注意以下三点:

(1) 函数式中, 各项 (必要时, 还要考虑常数项) 必须都是正数. 例如对于函数式 $x+\frac{1}{x}$, 当 $x<0$ 时, 不能错误地认为关系式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 成立, 并由此得出 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2, 事实上, 当 $x<0$ 时, $x+\frac{1}{x}$ 的最大值是 -2, 这是因为

$$x<0\Rightarrow -x>0, -\frac{1}{x}>0$$
$$\Rightarrow -\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\geqslant 2$$
$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}\leqslant -2.$$

可以看出, 最大值是 -2, 它在 $x=-1$ 时取得.

(2) 函数式中, 含变数的各项的和或积必须是常数.

(3) 具备不等式中等号成立的条件, 使函数式能取到最大或最小值. 如本章巩固与提高 B 组题中的第 9(2) 题, 虽然符合上述 (1)(2), 但不符合 (3), 因此不能用均值不等式求最值, 只能用函数单调性求最值.

以上三点都是学生容易疏忽的地方, 教学时必须予以强调.

10. 在应用均值定理解决实际问题时 (如练习 A 第 4 题、练习 B 第 5 题等), 要提醒学生注意完整的解题过程:

(1) 先理解题意、设变量, 设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数;

(2) 建立相应的函数关系式, 把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题;

(3) 在定义域内, 求出函数的最大值或最小值;

(4) 正确写出答案.

11. 根据课程标准的理念，建议教师在教学这部分内容时，应适当关注该定理在解决实际问题中的应用，而对于利用均值不等式求最值的问题，则无论是练习的数量和难度都要适当控制，不必深究，因为这类问题以后还可以由求导解决．例如，$x>0$ 时，求函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 的最值，可以用求导数的方法解决：由 $y'=1-\frac{4}{x^2}=0$，可得 $x^2=4$，所以 $x=2$；又如，要研究 $y=\sin^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}$ 的最值，也可以转化为利用函数 $y=t+\frac{4}{t}$，$t\in(0,1]$，$y'=1-\frac{4}{t^2}\neq 0$．由于 $t\in(0,1]$，因此 $y'<0$，所考虑的函数是减函数．所以 $t=1$ 时，函数有最小值 5．

3.3　一元二次不等式及其解法

1. 本节重点是解一元二次不等式，难点是设计求解一元二次不等式的程序框图．

2. 在本节中，教科书先后呈现出三种求解一元二次不等式的思路：先求出相应方程的根，然后根据相应函数的图象求出不等式的解；运用因式分解等代数方法求解；鼓励学生尝试设计求解一元二次不等式的程序框图．

3. 教学中，要让学生通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系，领悟数形结合的数学思想．让学生掌握利用因式分解、配方法解一元二次不等式．引导优秀学生利用“探索与研究”中的两个性质探究某些高次不等式的求解方法．

如求解不等式 $(x-1)^2(x+1)(x-2)^3(x+2)^4>0$，从 x 轴右上方由右至左引一条曲线，碰到偶重零点不穿过，遇到奇重零点穿过，则位于 x 轴上方的曲线上点的横坐标的集合 $\{x \mid x<-2$ 或 $-2<x<-1$ 或 $x>2\}$ 是该不等式的解集．

4. 利用判别式求解一元二次不等式，是在由图象求解的基础上推导出的一般性结论，教科书通过例 2、例 3、例 4、例 5 四个例题分别介绍了 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 三种情况时不等式的解．教学时可以让学生借助于函数图象来进行分析，并可适当增加一定数量的习题，让学生熟练掌握．

5. 介绍解一元二次不等式的程序框图时，可以结合具体的一元二次不等式，根据利用求根公式解不等式的步骤让学生理解．将不等式求解的过程用流程图来表示，体现算法的思想，既可以由此实现不等式的上机求解，又有助于学生更加清晰地认识不等式的结构，更好地把握问题的本质．

3.4　不等式的实际应用

1. 教学的重点是不等式的实际应用，数学建模是本节的难点．

2. 不等式的应用在本章分三个方面呈现出来，教材 3.2 节中将实际问题转化为函数最值问题，然后用均值不等式求解；本节将实际问题转化为求解一元二次不等式；3.5 节中将实际问题转化为利用二元一次不等式所表示区域求最优解．教学中应突出各部分的特点，让学生体会不等式、函数及方程之间的联系．

3. 本节共有 3 个例题，从知识的应用看，一类是运用作差法比较两个代数式的大小；另一类是一元二次不等式的应用．从设计的问题情景看，都是与学生生活密切相关的住房采光、消费标准、农药配制等问题．教学时，应让学生经历从实际问题中抽象出不等式模型的过程，培养学生数学应用意识和分

析问题、解决问题的能力.

4. 教学时，让学生归纳出运用不等式解决实际问题的步骤：

(1) 设未知数. 用字母表示题中的未知数.

(2) 列不等式（组）. 找出题中的不等量的关系，列出关于未知数的不等式（组）.

(3) 解不等式（组）. 运用不等式知识求解不等式，同时要注意未知数在实际问题中的取值范围.

(4) 答. 规范地写出答案.

5. 例 1 教学时，要帮助学生分析题意，住宅的采光变化取决于增加相等面积前后窗户的总面积与住宅占地面积的比值的大小，让学生用字母分别表示三个量：窗户的总面积、住宅占地面积、增加面积，然后用作差法比较大小. 本题结论可以用来判断函数的增减性，即函数 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}(0<a<b)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

6. 例 2、例 3 的着眼点应放在建立一元二次不等式（组）模型上，求解过程中要注意 x 的实际范围.

3.5 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题

本节的主要内容是用二元一次不等式（组）表示平面区域和简单的线性规划问题. 通过本节学习，要使学生会用平面区域表示二元一次不等式，了解线性规划的意义，了解线性约束条件、线性目标函数、可行域、最优解等基本概念，了解线性规划问题的图解法，并能应用线性规划的方法解决一些简单的实际问题，以提高解决实际问题的能力.

本节重点是二元一次不等式表示平面区域，难点是把实际问题转化成线性规划问题，并给出解答. 解决难点的关键是根据实际问题中的已知条件，找出约束条件和目标函数，利用图解法求得最优解.

教科书首先通过四个具体不等式的对比，引入二元一次不等式、二元一次不等式组的概念. 讲解这两个概念时，可以与一元二次不等式、方程组进行对比，根据未知数的个数与未知数的最高次数加以区分.

3.5.1 二元一次不等式（组）所表示的平面区域

1. 本小节的重点是二元一次不等式表示平面区域，难点是寻求二元一次不等式组所表示的平面区域.

2. 教科书首先明确指出二元一次不等式解集的几何意义是以不等式解 (x,y) 为坐标的所有点构成的集合，也叫不等式表示的区域或不等式的图象. 然后通过三个环节呈现：问题提出、问题解决、问题应用.

问题解决过程中先借助于一个具体例子，通过取直线上方或下方的一些点代入求值，然后归纳猜想，不加证明地给出一般的二元一次不等式表示平面区域的结论，说明怎样确定不等式所表示的区域，举例（例 1、例 2）说明怎样用二元一次不等式（组）表示平面区域.

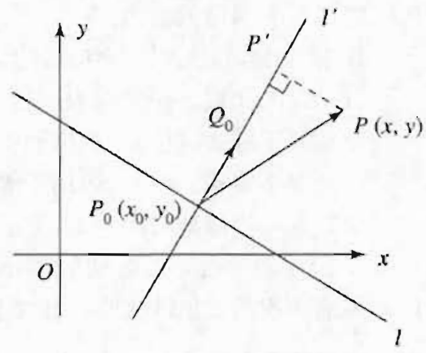
3. 在本节教学过程中，教师应重视教科书中的“探索与研究”，引导优秀学生运用向量内积值来证明二元一次不等式表示平面区域的结论，体会向量的工具性作用. 证明方法如下：

设 a，b 为两个不全为零的实数，则直线 l：$ax+by+c=0$ 将坐标平面上不在 l 的点分成两个半平面

$$\{(x,y)\mid ax+by+c>0\} \text{与} \{(x,y)\mid ax+by+c<0\}.$$

如图，在 l 上任取一定点 $P_0(x_0,\ y_0)$，过 P_0 作 $l'\perp l$. 设 $P(x,\ y)$ 为平面上不在 l 上的任一点，过

P 作 $PP' /\!/ l$，交 l' 于 P'. 由于 $\boldsymbol{n}=(a, b)$ 为直线 l 的一个法向量，所以 $\overrightarrow{P_0P'}=\lambda\boldsymbol{n}$，其中 λ 为一非零实数. 再设 Q_0 为 l' 满足 $\overrightarrow{P_0Q_0}=\boldsymbol{n}$ 的点，则因为 $ax_0+by_0+c=0$，所以



$$\begin{aligned}ax+by+c &= ax+by+(-ax_0-by_0)\\ &= a(x-x_0)+b(y-y_0)\\ &= \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}\\ &= \boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{P_0P'}+\overrightarrow{P'P})\\ &= \boldsymbol{n}\cdot\lambda\boldsymbol{n}\\ &= \lambda|\boldsymbol{n}|^2.\end{aligned}$$

这时，若 $ax+by+c>0$，则 $\lambda>0$，故 $\overrightarrow{P_0P'}$ 与 $\overrightarrow{P_0Q_0}$ 同向，即 P' 与 Q_0 在同一半平面，亦即 P 与 Q_0 在同一半平面. 同样地，若 $ax+by+c<0$，则 P 与 Q_0 不在同一半平面.

同理，$ax+by+c<0$ 的充要条件为 $P(x, y)$ 与 Q_0 不在同一半平面.

于是，若 $P_1(x_1, y_1)$ 为平面上不在 l 上的一点，则当 $ax_1+by_1+c>0$ 时，P_1 所在的半平面上的任一点 $P(x, y)$ 均有 $ax+by+c>0$；当 $ax_1+by_1+c<0$ 时，P_1 所在的半平面上任一点 $P(x, y)$ 均有 $ax+by+c<0$.

4. 讲解例 1 时，要明确如何选点，要使学生注意 $Ax+By+C>0$ 表示的平面区域是直线 $Ax+By+C=0$ 的某一侧的平面区域，但不包括边界的直线；而 $Ax+By+C\geqslant 0$ 所表示的平面区域包括边界直线 $Ax+By+C=0$.

讲解例 2 时，应帮助学生清晰地认识，不等式组表示的平面区域是各个不等式所表示的平面点集的交集，因而是各个不等式所表示的平面区域的公共部分.

教材安排例 3 的目的是为了分散难点所作的安排. 首先让学生了解恰当地运用字母表示实际问题中的变量，就可以将复杂的实际问题中的变量关系转化为二元一次不等式组，为下一节学习简单的线性划问题作准备.

5. 本节教学内容可以作为一个微型课题，让学生进行数学探究，体验知识的形成、应用过程，尝试运用由特殊到一般的解决问题的思维方法.

3.5.2 简单线性规划

1. 本节重点是线性规划，难点是线性规划的实际应用.

2. 教科书用一个具体的实际问题说明了线性规划的意义，以及线性约束条件、线性目标函数、可行域、最优解、线性规划等有关概念，介绍了线性规划问题的求解方法（图解法），最后举例说明了线性规划在实际问题中的简单应用.

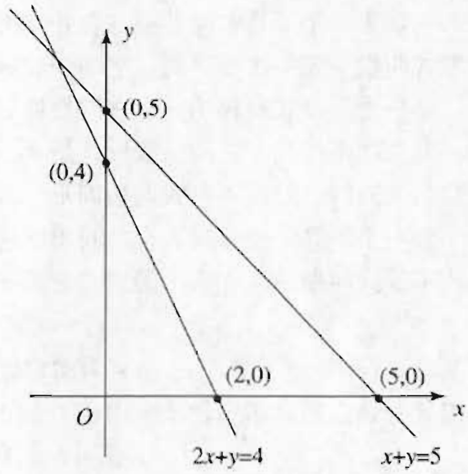
3. 简单的线性规划问题中的可行域，实际上是二元一次不等式组表示的平面区域，因而解决线性规划问题，是以二元一次不等式表示平面区域的知识为基础.

4. 一个线性规划问题可能存在有可行解，这时由所有可行解组成的集合叫做可行域. 可行域可能是有界的，也可能是无界的；但也可能没有任何可行解，这时它的可行域是空集. 如下列问题：

已知约束条件 $\begin{cases}2x+y\leqslant 4\\ x+y\geqslant 5\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$

求目标函数 $z=2x-y$ 的最大值.

解：如图所示，因为 $x+y\geqslant 5$ 所表示的区域与 $2x+y\leqslant 4$ 所表示的区域在不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 所确定的范围内，它们的交集是空集，即该问题的可行域是空集，问题无解.



教科书中，从“解决实际问题”的角度考虑，对这种无解的情况没有交待．教学时，可以顺便提一下，这样对问题的研究与理解就完整了.

5. 教科书在求线性目标函数 $f=30x+40y$ 的最大值时，把它转化为在可行域内找一点，这点到直线 $30x+40y=0$ 的距离最大．因为当直线 $30x+40y=0$ 沿 y 轴向上平移时，直线在 y 轴上的截距也随之增大，所以也可以通过求截距的最大值求出目标函数的最大值.

6. 教科书通过三个例题列出了常见的线性规划问题类型：食品配制、货物调动、社区服务问题，以帮助学生在周围的生产和生活实际中发现、提出线性规划的实际问题，并予以解决.

7. 教学中，为了使实际中所涉及的线性规划问题被限制在能用所学知识解决的范围内，所选各例题以及配置的练习题都是一些涉及两个变量的问题．教师应告诉学生，涉及两个变量的线性规划的问题可以用图解法求最优解，涉及更多变量的线性规划问题不宜用图解法求解.

三、拓展资源

（一）不等式概述

用不等号连接两个解析式所构成的式子叫做不等式，这两个解析式的自变量允许取值范围的交集叫做这个不等式的定义域.

不等号是表示两个量之间不等关系的记号．常用的不等号有“$>$”（称“大于”）、“$<$”（称“小于”）、“$\geqslant$”（称“大于或等于”或“不小于”）、“$\leqslant$”（称“小于或等于”或“不大于”）、“$\neq$”（称“不等于”）等．此外还会见到“$\gg$”（称“远大于”）、“$\ll$”（称“远小于”）两个符号.

一个不等式可以是一元、二元、多元的，这样的不等式中的未知数又可以是一次、二次或高次的．由于虚数之间不可能比较大小，因此不等式只有在实数范围内才有意义.

根据解析式中所包含的运算形式，我们可以分出代数不等式，它指的是用不等号连接两个代数式而得出的式子，这里面数和字母间进行的是有限次的加、减、乘、除、乘方、开方等代数运算，另外的指数不等式和对数不等式则不属于代数不等式这一类型.

代数不等式主要分为有理不等式和无理不等式.

有理不等式包含了整式不等式和分式不等式.

在中学阶段最常见的整式不等式是一元一次不等式和一元二次不等式.

如果一个不等式经移项、合并同类项后，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是一次的整式不等式叫做一元一次不等式，它的一般形式是 $ax>b$ 或 $ax<b$，其中 a，b 为实常数，且 $a\neq 0$.

一个不等式经移项、合并同类项后，只含有一个未知数且未知数最高次数是二次的整式不等式叫做一元二次不等式，它的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 a，b，c 为实常数，且 $a>0$（当 $a<0$ 时，可在不等式两边同乘 -1，并改变不等号的方向）.

一个不等式经移项、合并同类项后，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 n（$n\in\mathbf{N}_+$）的整式不等式叫做一元 n 次不等式，它的一般形式是

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0>0(\text{或}<0),$$

其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为实常数，且 $a_n>0$. 当 $n\geqslant 3$ 时，叫做一元高次不等式. 由实系数多项式因式分解定理，在实数范围内，$f(x)$ 可唯一分解成一次因式与二次不可约因式的乘积：

$$f(x)=a_n(x-b_1)^{t_1}\cdots(x-b_s)^{t_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 $t_i\in\{1,2,\cdots,s\}$，$k_j\in\{1,2,\cdots,r\}$ 是正整数，且 $t_1+\cdots+t_s+2(k_1+\cdots+k_r)=n$，同时 $x^2+p_jx+q_j$ 是不可约因式，即满足 $p_j^2-4q_j<0(j=1,2,\cdots,r)$.

分母中含有未知数字母的有理不等式叫做分式不等式.

如果一个不等式里含有表达式的开方运算，而表达式中又含有未知数，那么这样的代数不等式就叫做无理不等式或根式不等式.

含有底为常数，而指数中出现未知数的项的不等式叫做指数不等式. 如果一个不等式里含有未知数前面有对数记号的项，就把这样的不等式叫做对数不等式. 这两类不等式一般不能用初等方法求解，只对一些简单的特殊情形，可利用指数函数、对数函数的单调性及换元法求解.

上述不等式中不管哪一类，如果其中含有绝对值符号，我们则称它为绝对值不等式.

对于一个含有未知数的不等式，我们可以求出它的解集，设一个不等式的解集为 A，定义域为 D.

当 $D=A$ 时，这个不等式叫做绝对不等式，即未知数字母取遍定义域内每一值时，不等式都成立；

当 $D\supseteq A$，且 $A\neq\varnothing$，这个不等式叫做条件不等式，此时不等式只对定义域中的部分取值成立；

当 $A=\varnothing$ 时，把这个不等式叫做矛盾不等式，即定义域中没有一个取值能使不等式成立.

在若干个不等式中，如果每一个不等式都是左边大于右边，或右边大于左边，那么这些不等式叫做同向不等式；如果一个不等式左边大于右边，另一个不等式则左边小于右边，那么这两个不等式叫做异向不等式.

把若干个含有未知数的不等式组成一组不等式，则称之为不等式组，其解集是各个不等式的解集的交集.

如果两个不等式（不等式组）在给定数集上的解集相等，那么这两个不等式（不等式组）叫做同解不等式（同解不等式组），或称等价不等式（等价不等式组）.

在不等式知识的学习过程中要用到一些著名的不等式，比较常见的有以下几个：

1. 均值不等式：设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是 n 个实数，则

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

叫做这 n 个实数的算术平均数，当这 n 个实数非负时，$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$ 叫做这 n 个非负数的几何

平均数，$H=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$叫做这 n 个正数的调和平均数.

当 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数时，有如下的均值不等式：$H\leqslant G\leqslant A$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

均值不等式 $A\geqslant G$ 是一个重要的不等式，它的应用很广泛，当 $n=2$，3 时，分别是

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2},\quad \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

均值不等式 $A\geqslant G$，经常用到的几个特例是（下面出现的 a_1，a_2，…，a_n 均表示正数）：

(1) 若 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时等号成立；

(2) 若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\leqslant\dfrac{1}{n^n}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$时等号成立；

(3) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立；

(4) $a_1+\dfrac{1}{a_1}\geqslant 2$，当且仅当 $a_1=1$ 时等号成立.

2. 柯西不等式：对任意两组实数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n，其中 b_1，b_2，…，b_n 全不为零，则有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

其中，当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$时等号成立.

柯西不等式经常用到的几个特例是（下面出现的 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 都表示实数）：

(1) 若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$，则 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant 1$；

(2) $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1\leqslant a_1^2+a_2^2+a_3^2$；

(3) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$.

3. 闵可夫斯基不等式：设 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 是两组正数，$k>0$，$k\neq 1$，则

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\ (k>1),$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\ (0<k<1),$$

当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$时等号成立.

闵可夫斯基不等式是用某种长度度量下的三角形不等式．当 $k=2$，$n=2$ 时得平面上的三角形不等式

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

若设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$，则上式为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

4. 贝努利不等式：

(1) 设 $x_i>-1$，$i=1$，2，…，n，$n\geqslant 2$，且同号，则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

(2) 设 $x>-1$，则

(Ⅰ) 当 $0<a<1$ 时，有$(1+x)^a\leqslant 1+ax$；

（Ⅱ）当 $a>1$ 或 $a<0$ 时，有 $(1+x)^a\geqslant 1+ax$.

上两式当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

不等式（Ⅱ）的一个重要特例是

$$(1+x)^n>1+nx\ (x>-1,\ x\neq 0,\ n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 2).$$

（二）不等式控制

根据题设条件建立不等式来控制变量，再经过适当的处理获得结论的方式，我们称之为不等式控制，这种理论有着广泛的应用.

我们先看一个实例.

例 1 一本辞书各面已经印好，但在编页码时不小心把其中一面的页号重复编了一次，而且书页的顺序又已搞乱，因而不知道辞书到底有多少页．现在只知道把已编页码的数字累加起来得到的和数是 12 516 512，请你找出印错了的那一页，以便重新编号.

分析：设辞书有 n 页，$k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是被多加了一次的页号，则

$$1+2+\cdots+n<1+2+\cdots+n+k<1+2+\cdots+n+n+1,$$

有 $\dfrac{n(n+1)}{2}<12\ 516\ 512<\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$，从而

$$n(n+1)<25\ 033\ 024<(n+1)(n+2).$$

显然，n 是稍大于 5 000 的数，验算一下：

当 $n=5\ 001$ 时，

$$n(n+1)=5\ 001\times 5\ 002=25\ 015\ 002<25\ 033\ 024,$$
$$(n+1)(n+2)=5\ 002\times 5\ 003=25\ 025\ 006<25\ 033\ 024.$$

当 $n=5\ 002$ 时，

$$n(n+1)\ =5\ 002\times 5\ 003=25\ 025\ 006<25\ 033\ 024,$$
$$(n+1)(n+2)=5\ 003\times 5\ 004=25\ 035\ 012>25\ 033\ 024.$$

可见，$n=5\ 002$．因此

$$\begin{aligned}k&=12\ 516\ 512-\frac{n(n+1)}{2}\\&=12\ 516\ 512-\frac{5\ 002\times 5\ 003}{2}\\&=4\ 009,\end{aligned}$$

所以印错了的那一页是第 4 009 页.

上题求解中主要采用了估算的方法，估算是不等式控制的一种最基本的形式．其基本思想是：利用一系列的不等变换，不断缩小目标可能存在的范围，最后找出问题的解答.

利用不等式控制逐步缩小范围，在求解不定方程过程中运用得也较多．看下例：

例 2 求适合方程

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+y^2+xy+1) \quad ①$$

的所有整数对 $(x,\ y)$.

解：①式可改写为

$$(x+y)(x^2+y^2)=8(x^2+y^2+xy+1), \quad ②$$

从②式中可以看出，x，y 的奇偶性必须相同.

显然，有

$$4(x^2+y^2)<8(x^2+y^2+xy+1)\leqslant 12(x^2+y^2)+8, \quad ③$$

所以由②，③可得

$$4(x^2+y^2)<(x+y)(x^2+y^2)\leqslant 12(x^2+y^2)+8. \quad ④$$

因若 $x+y>12$，则

$$(x+y)(x^2+y^2)-12(x^2+y^2)\geqslant x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}\geqslant 8,$$

与④相矛盾，所以由④可得

$$4<x+y\leqslant 12.$$

即 $x+y=6$，8，10 或 12.

若 $x+y=12$，由②得

$$(x-y)^2=2,$$

这不可能.

同样，$x+y=6$，8 也不可能，

若 $x+y=10$，由①得

$$xy=16,$$

进一步解得 $x=8$，$y=2$ 或 $x=2$，$y=8$. 所以所求整数对是（8，2）或（2，8）.

如果要解决 $A_1=A_2$ 这类问题，有一种方法是求解出 $A_1\leqslant A_2$，$A_1\geqslant A_2$ 同时成立. 因此，使用估算时若能得出估算的上下界恰好相等，则可将不等关系转化为相等关系. 以上事实，使得我们可以采取先退一步，进行不等式控制，再两边夹逼，由不等导出相等的策略.

有些问题呈现环状结构，对这类问题，我们也可以利用控制不等式，通过不等式传递，形成

$$A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_n\leqslant A_1,$$

重新回归到相等关系上来.

由上述举例可知，不等式控制是我们解决一些数学问题和实际应用问题的一个重要的数学方法. 当然由上面例子也可发现，应用不等式控制的方法解题时，也还要利用其他一些数学方法，例如反证法就是经常与其联用的方法之一.

四、教学案例

案例 1：3.1.1 不等关系与不等式

一、教学目标

1. 知识目标：了解不等式的概念，掌握比较实数大小的方法.
2. 能力目标：培养学生数形结合能力和运算能力.

3. 情感目标：通过实际情境的设置，培养学生对客观世界的认知能力.

二、教学重点、难点

重点是比较实数大小的方法，难点是作差后式子的变形.

三、教学方法

本节课采用探究式，启发引导、讲练结合的教学方法，以多媒体作为教学辅助手段. 从实际问题出发，以比较实数大小方法的探究为主线，讲练结合，加深学生对不等关系的理解，并掌握实数大小比较的方法.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课题引入	1. 人造地球卫星和绕地球飞行的宇宙飞船的飞行速度（记作 v km/s）应该不小于第一宇宙速度（记作 v_1 km/s），且小于第二宇宙速度（记作 v_2 km/s）. v，v_1，v_2 的关系用数学符号可怎样表示？ 2. 某人为自己制定的月支出计划中，规定手机电话费不超过 150 元，他所选用的中国电信卡的收费标准为：月租费 30 元，每分钟通话费 0.40 元，求这个人每月通话时间（记为 x 分钟）的取值范围，请列出式子.	师：设置情境提出问题. 学生回答：$v_1 \leqslant v < v_2$. 师：提出问题 2，让学生探究. 生：可以列出下面的式子： $30+0.40x \leqslant 150$. 师：通过情境的设置，引出不等式的定义.	1. 通过情境的设置，让学生明确，在客观世界中，量与量之间的不等关系是普遍存在的. 让学生学会用辩证的思维去看待事物之间的关系. 2. 为引入不等式的概念作铺垫.
不等关系理解	我们用数学符号“$\neq$”“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”连接两个数或代数式，以表示它们之间的不等关系. 含有这些不等号的式子，叫做不等式.	师：我们用哪些符号表示数与代数式之间的关系？ 生：“$\neq$”“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”. 师：“$\geqslant$”“$\leqslant$”的含义是什么？ 生：$\{(a,b)\mid a\geqslant b\}=\{(a,b)\mid a>b\}\cup\{(a,b)\mid a=b\}$，$\{(a,b)\mid a\leqslant b\}=\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{(a,b)\mid a=b\}$.	让学生明确表示不等关系的符号，深刻理解“$\geqslant$”和“$\leqslant$”的含义. 练习 A，1，2，3.
实数大小比较的方法的依据	实数集与数轴上的点集可以建立一一对应关系，数轴上的点是有次序（无缝隙地）排列的. 数轴上一个动点，沿着数轴的正方向运动时，它所对应的实数越来越大. 结论 1：数轴上的任意两点中，右边点对应的实数比左边点对应的实数大. 结论 2：对于任意两个实数 a 和 b，在 $a=b$，$a>b$，$a<b$ 三种关系中，有且仅有一种关系成立.	师：通过多媒体展示数轴上的点沿着正方向运动时，所对应的实数的变化情况，让学生回答. 师：数轴上的任意两点中，右边点对应的实数比左边点对应的实数之间的关系怎样？ 生：大. 师：在数轴上，表示实数 a 和 b 的两个点分	1. 培养学生数形结合的意识. 2. 培养学生的观察能力以及概括能力. 3. 培养学生的类比思维能力，由数轴上点之间的关系得出实数之间的关系.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>别为 A 和 B，则点 A 和点 B 在数轴上的位置关系如何？
生：有三种可能：(1) A和 B 重合；(2) A在 B 右侧；(3) A 在 B 左侧.
师：在这三种位置关系中，有且仅有一种成立，那么实数 a，b 也有类似的结论吗？</td><td></td></tr>
<tr><td>比较两个实数大小的方法</td><td>如果 $a-b$ 是正数，则 $a>b$；如果 $a>b$，则 $a-b$ 是正数.
如果 $a-b$ 是负数，则 $a<b$；如果 $a<b$，则 $a-b$ 是负数.
如果 $a-b$ 等于零，则 $a=b$；如果 $a=b$，则 $a-b$ 等于零.
如果 p，则 q 为正确命题，则记为 $p\Rightarrow q$.
如果 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$ 都是正确命题，则记为 $p\Leftrightarrow q$.</td><td>师：当我们没有度量工具时，要确定甲乙两个同学身高之间的不等关系，应怎样？
生：让他们背靠背地站在同一高度的地面上.
师：那么，在数学中我们如何比较两个数的大小呢？
生：只要考察它们的差就可以了.
师：引出“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”“$\Leftrightarrow$”等符号，让学生将上面的结论用符号语言来描述.
生：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$,
$a-b<0\Leftrightarrow a<b$,
$a-b=0\Leftrightarrow a=b$.</td><td>1. 通过实例引导，培养学生的思维能力.
2. 引入符号，让学生学会用符号语言去刻画事物，并体会用符号语言进行描述的优越性.
3. 让学生明确比较两个实数大小的方法.</td></tr>
<tr><td>方法应用</td><td>例 1　比较 x^2-x 和 $x-2$ 的大小.
例 2　当 p，q 都为正数，且 $p+q=1$ 时，试比较代数式 $(px+qy)^2$ 与 px^2+qy^2 的大小.
练习 A，4.</td><td>师：板演例 1、例 2. 讲解作差后式子符号的判别方法、式子变形的方法、配方法、因式分解、通分等.
学生：板演练习 A，4.</td><td>进一步巩固作差比较两个实数大小的方法.</td></tr>
<tr><td>归纳小结</td><td>(1) 不等式的定义；
(2) 比较实数大小的方法；
(3) 数形结合，分类思想.</td><td>师：请同学们对本节课加以总结，谈一下自己的收获.</td><td>增强学生的概括能力，将知识进一步系统化.</td></tr>
<tr><td>布置作业</td><td>层次 1　练习 B，1～4.
层次 2　习题 3-1 A，1，2，3.
层次 3　习题 3-1 B，2，3，4.</td><td>进一步巩固所学知识.</td><td>分层练习的设计更符合认识与思维的发展规律.</td></tr>
</table>

案例2：3.2.1　均值不等式（1）

一、教学目标

1. 知识目标：理解均值不等式，并能运用均值不等式解决一些较为简单的问题.

2. 能力目标：培养学生探究能力以及分析问题、解决问题的能力.

3. 情感目标：通过问题情境的设置，使学生认识到数学是从实际中来，培养学生用数学的眼光看世界，通过数学思维认知世界，从而培养学生善于思考、勤于动手的良好品质.

二、教学重点、难点

重点是理解均值不等式，难点是均值不等式的应用.

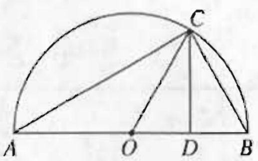
三、教学方法

本节课采用探究、归纳，启发诱导、讲练结合的教学方法，以学生为主体，以均值不等式为主线，从实际问题出发，放手让学生探究思索. 以现代信息技术作为教学辅助手段，加深学生对均值不等式的理解.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课题引入	多媒体展示问题情境： 今有一台天平，两臂不等长，要用它称物体质量，将物体放在左、右托盘各称一次，称得的质量分别为 a，b，问：能否用 a，b 的平均值表示物体的真实质量？	教师提出问题，学生探索. a、b 的平均值为$\frac{a+b}{2}$. 物体真实质量为$\sqrt{ab}$. 思考：这两者的关系如何？	1. 通过问题情境的设计，激发学生学习的积极性，并为给出均值不等式作铺垫. 2. 培养学生的探究能力.
均值不等式的内容及证明	均值不等式：如果 a，$b\in\mathbf{R}^{+}$，那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 当且仅当 $a=b$ 时，式中等号成立. 文字表述：两个正实数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值. 问题："任意两个同号的数的算术平均值不小于它们的几何平均值"的说法是否正确？为什么？	教师引导学生对实际问题中引出的问题进行探索、证明. 引导：怎样比较两个数的大小关系？ 学生：作差比较法. 学生给出证明. 教师：该不等式中等号何时成立？ 学生：当且仅当"$a=b$"时取"$=$". 教师提问，学生思考.	1. 通过引导，让学生主动地去证明猜想的结果，进一步巩固比较两个数大小的方法，并形成猜想证明的严密思维，让学生明白猜想、归纳、证明是我们发现规律、认知世界的重要的思维方法. 2. 通过提问进一步加深对均值不等式的理解，明确不等式成立的条件.
均值不等式理解的加深	思考：均值不等式与不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ $((a-b)^2\geqslant 0)$的关系如何？并分组讨论.	教师提出问题，学生思考并回答.	通过讨论和比较进一步加深对均值不等式的理解，加强学生相互之间的合作意识.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
均值不等式理解的进一步深化	用多媒体展示几何图形，给出均值不等式的几何直观解释：  作线段 $AB=a+b$，使 $AD=a$，$DB=b$，以 AB 为直径作半圆 O，过 D 点作 $CD\perp AB$，交半圆于点 C，连接 AC，OC，BC.	教师提问：1. 图中 CO，CD 的长度分别是多少？ 学生：$CO=\frac{a+b}{2}$， $CD=\sqrt{ab}$. 2. CO 与 CD 的大小关系如何？ 学生：$CO\geqslant CD$. 3. 等号何时成立？ 学生：当 $a=b$ 时，等号成立.	通过展示均值不等式的几何直观解释，培养学生数形结合的意识，并使抽象的问题更加直观、形象，使学生进一步加深对均值不等式的理解.
均值不等式的应用	例　已知 a，b，c，d 都是正实数，求证： $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$， 并推导出式中等号成立的充要条件. 学生练习：教科书练习 A，2，3.	1. 教师板书该例题的证明，给学生以示范. 在讲解时注意思路方法的启发引导，并与作差法证明作比较. 2. 学生练习并让学生板演，教师在下面巡视学生的做题情况. 3. 教师根据板演以及在下面巡视时发现的问题，进行讲解，纠正错误.	通过例题让学生明确均值不等式的应用，并体会用均值不等式证明问题的方便性和实用性.
归纳小结	从知识和方法两个方面对本节课进行归纳.	让学生发表自己的看法，有哪些收获，教师对学生作出肯定，并对知识和方法进行整理.	让学生发表体验，提高学生的学习积极性，并培养学生概括归纳的能力.
布置作业	层次 1：教科书练习 B，1，2. 层次 2：教科书习题 3-2A，1，2，3.		通过作业使学生进一步巩固本节课所学内容. 注重分层设计题目，更加关注学生的差异.

案例 3：3.3　一元二次不等式及其解法（2）

一、教学目标

1. 知识目标：掌握一元二次不等式的解法.

2. 能力目标：帮助学生形成从特殊到一般再到特殊的探索知识的思维方式，增强学生的归纳、演绎能力.

3. 情感目标：强化学生的函数、方程思想，为形成辩证的科学的世界观、价值观打好基础.

二、教学重点、难点

重点是一元二次不等式的解法，难点是清晰地把握一元二次不等式、方程、函数之间的关系.

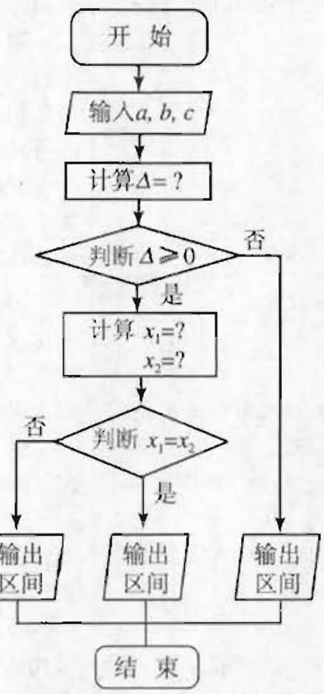
三、教学方法

通过归纳、总结、启发与探究相结合的方法组织教学活动，按照由特殊到一般的认知规律，通过数形结合，引导学生分析归纳出解一元二次不等式的方法.

四、教学过程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>复习引入</td><td>复习初中学过的一元二次方程.</td><td>教师提出问题，学生回答.</td><td>为学生学习一元二次不等式的解法作好准备.</td></tr>
<tr><td>探究方法与探索过程</td><td>1. 解不等式
(1) $x^2-2x+3>0$；
(2) $x^2-2x+3<0$.
2. 通过例题，对一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 及 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 作一般性质的分析.
当 $a>0$ 时：
(1) 判别式 Δ 的符号；
(2) 对应函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象；
(3) $ax^2+bx+c>0$ 及 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.</td><td>教师提出问题，引导学生自己解答.
通过分析，教师引导学生分析 $a>0$ 时对应的 (1) (2) (3) 的解法，并要求学生填写表格 $(a>0)$.
<table><tr><th>$\Delta=b^2-4ac$</th><th>$f(x)=0$</th><th>$f(x)>0$</th><th>$f(x)<0$</th></tr><tr><td>$\Delta>0$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\Delta=0$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\Delta<0$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>学生思考：当 $a<0$ 时，又如何?</td><td>引导学生由特殊问题分析一般问题，从而找到规律性解题方法.</td></tr>
<tr><td>方法的应用</td><td>例1　解不等式
$x^2+4x+4>0$.
例2　解不等式
$-2x^2+4x-3>0$.
例3　求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+x-3}+\log_a(3+2x-x^2)$ 的定义域.</td><td>师：通过学生解题实践，引导学生总结解题步骤：
(1) 整理不等式为
$ax^2+bx+c>0(a>0)$
的形式；
(2) 判断判别式 Δ 的符号及相应的一元二次方程的根的情况；
(3) 写出不等式的解集.
师：求函数定义域，应先列出关于自变量的不等式(组)，然后求解，这是常用的方法.
生：学生板演.</td><td>通过学生对一元二次不等式的求解，使他们清晰地领会一元二次不等式的解题过程，熟练掌握一元二次不等式的解法.</td></tr>
<tr><td>方法小结</td><td>用程序框图来描述解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的算法过程.</td><td>学生填写框图，见附表.</td><td>通过对方法的总结、提炼，形成基本方法模式.</td></tr>
<tr><td>课堂练习</td><td>教科书练习 A，1～5.</td><td>教师巡视学生做题的情况，有针对性地对学生进行个别指导.</td><td>熟练掌握一元二次不等式的解法.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳小结	(1) 一元二次不等式的解法； (2) 数学思想方法小结.	学生谈收获.	关注学生的自身体验，了解学生学习的基本状况.
作业布置	层次一：教科书习题3-3A第2、4题. 层次二：教科书习题3-3B第5、6题.		进一步巩固所学内容.
附表	引导学生自主地归纳出各相应的输出区间.		

案例4：3.5.1 二元一次不等式（组）所表示的平面区域

一、教学目标

1. 知识目标：能作出二元一次不等式（组）所表示的平面区域并能用其解决一些实际问题.
2. 能力目标：增强学生数形结合的思想，提高分析问题、解决问题的能力.
3. 情感目标：体会数学的应用价值，激发学生的学习兴趣.

二、教学重点、难点

重点是二元一次不等式（组）所表示的平面区域，难点是建立相应的数学模型和在实际问题中的应用.

三、教学方法

本节课采用探究教学法，以多媒体作为教学辅助手段，探究二元一次不等式（组）所表示的平面区

域，并通过讲练结合巩固所学知识.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课题引入	课件展示下面的不等式 $x+y>700$, $10x+12y\leqslant 8\,000$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. 类似于方程组，构成一个不等式组 $\begin{cases} x+y>700 \\ 10x+12y\leqslant 8\,000 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	师：观察四个不等式中，前两个不等式的共同特点是什么？ 生：都含有两个未知数，且未知数的最高次数为 1. 师：给出二元一次不等式的定义. 师：给出二元一次不等式组的定义. 提出问题：研究二元一次不等式（组）表示的区域.	通过观察不等式的异同，培养观察能力，给出二元一次不等式和二元一次不等式组的定义，并为下面研究二元一次不等式（组）表示的平面区域作准备.
探求二元一次不等式解集的几何意义	1. 二元一次不等式的一般形式 $Ax+By+C>0$; $Ax+By+C<0$. 2. 开半平面和闭半平面以及不等式表示的区域（不等式的图象）的定义. 3. 直线 l: $x+y-1=0$. 利用多媒体展示. 取点（闪烁）. 上方(0，2)，(1，3)，(0，5)，(2，2). 下方(−1，0)，(0，0)，(0，−2)，(1，−1). 结论：直线 l: $Ax+By+C=0$ 把坐标平面内，不在直线 l 上的点分成两部分，在直线 l 的同一侧的点的坐标使式子 $Ax+By+C$ 的值具有相同的符号，并且分别在两侧的点使该式的值的符号相反. 方法：在直线 l 的某一侧任取一点进行验证.	师：给出相关的一些定义后，研究二元一次不等式在直角坐标平面上表示的区域. 引导 1：直线方程的图象的意义是什么？ 引导 2：我们用例子来讨论在直线两侧点的坐标应满足的关系. 师：请同学们将各点代入方程左边的式子 $x+y-1$，你有什么发现呢？ 生：在 l 上方的点的坐标使式子的值都大于 0，下方的点的坐标使式子的值都小于 0. 师：l 同侧点的坐标是否使式子 $x+y-1$ 的值具有相同的符号？ 生：是. 师：证明，并总结判断二元一次不等式表示区域的方法.	1. 在给出二元一次不等式相关的定义后再研究其所表示的平面区域，顺理成章，符合学生的认知规律. 2. 让学生去探索，体验结论的形成过程，有利于加深学生对该知识的理解. 3. 让学生体会由一般到特殊，由特殊到一般的思想方法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
画平面区域的方法及其应用	例1　画出下面二元一次不等式表示的区域： (1) $2x-y-3>0$； (2) $3x+2y-6\leqslant 0$. 例2　画出下面不等式组所表示的平面区域： (1) $\begin{cases}2x-y+1>0\\x+y-1\geqslant 0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y+2>0\\2y+1\geqslant 0\\x-3\leqslant 0\end{cases}$ (用多媒体展示) 例3　一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料．生产1车皮甲种肥料需要的主要原料是磷酸盐4吨，硝酸盐18吨；生产1车皮乙种肥料需磷酸盐1吨，硝酸盐15吨．现有库存磷酸盐10吨，硝酸盐66吨，并在此基础上进行生产．请列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域． 教科书练习A，1，2，3.	师：总结画二元一次不等式或不等式组所表示的区域的方法． (1) 作出直线（注意用实线还是用虚线）． (2) 取点验证，一般取原点或一些较简单的整点． (3) 判断． 例2　由学生分别作出每一个不等式所表示的区域后由教师点拨，找出它们的交集． 例3　由教师引导学生，由学生完成． 练习由学生板演，发现问题，教师及时纠正．	1. 通过例题进一步巩固所学的判断二元一次不等式（组）表示区域的方法． 2. 由二元一次不等式到不等式组的设计，由浅到深，由易到难，学生易于接受． 3. 设计应用题，让学生进一步巩固所学知识，提高学生学习的兴趣．
归纳小结	从知识和方法两个方面对本节课进行总结． (1) 二元一次不等式表示的平面区域； (2) 数形结合的方法； (3) 由一般到特殊，由特殊到一般的思想方法．	由学生发表自己的收获感言，教师与学生通过讨论相互补充、完善本节课的知识结构．	通过归纳小结，进一步提炼、升华自己所学的知识．
布置作业	教科书习题3-5A，1，2；习题3-5B，1. 思考并讨论：试证明 $B>0$ 时：(1) $Ax+By+C>0$对应直线 $Ax+By+C=0$ 上方的部分；(2) $Ax+By+C<0$ 对应直线 $Ax+By+C=0$ 下方的部分．	教师批阅，发现问题及时纠正．	分层设计，更加适合学生． 思考并讨论，增强学生课下的交流与合作意识．

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 63 页）

1. $a>b$ 或 $a<b$.

2. (1) 成立. (2) 不一定成立. (3) 一定成立.

3. (1) $a\geqslant 0$. (2) $-2\leqslant a<3$. (3) $2<|a-b|\leqslant 9$.

4. $x^2+2x>-x-3$.

练习 B（第 63 页）

1. $\dfrac{4a}{4+a^2}\leqslant 1$.

2. 作差法，证明略.

3. $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

4. $\lg x+\log_x 10-2=\dfrac{(\lg x-1)^2}{\lg x}$.

因为 $x>1$，所以 $\lg x>0$，$(\lg x-1)^2\geqslant 0$.

所以$\dfrac{(\lg x-1)^2}{\lg x}\geqslant 0$.

所以 $\lg x+\log_x 10\geqslant 2$，当且仅当 $\lg x=1$，即 $x=10$ 时，等号成立.

思考与讨论（第 64 页）

不一定成立. 如 $a=-2$，$b=-1$，$c=2$，$d=1$ 时，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$c>d$，但是 $a<b$.

练习 A（第 66 页）

1. (1) $>$. (2) $<$. (3) $>$. (4) $<$. (5) $>$. (6) $<$.

2. (1) 假命题. 若 $c\leqslant 0$ 时，命题不成立.

   (2) 假命题. 若 $c=0$ 时，命题不成立.

   (3) 真命题.

3. (1) $>$. (2) $<$. (3) $>$. (4) $<$. (5) $<$.

4. (1) 不能. 若 $a=4$，$b=1$，$c=-2$，$d=-3$，则 $ac<bd$；若 $a=4$，$b=1$，$c=3$，$d=2$，则 $ac>bd$；若 $a=2$，$b=0$，$c=0$，$d=-1$，则 $ac=bd$.

   (2) 不能判断 a 与 b 的大小，也不能判断 c 与 d 的大小.

   (3) 由 $a>b$，当 $ab>0$ 时，有$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$成立；由 $a>b$，当 $ab<0$ 时，必有 $a>0$，$b<0$，故此时有

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立.

5. 略.

练习 B（第 67 页）

1. (1) $>$.　　(2) $>$.　　(3) $>$.

2. (1) $\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{c(b-a)}{ab}>0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

另法：因为 $a<0$，$b<0$，所以 $ab>0$，所以 $\frac{1}{ab}>0$.

又因为 $a>b$，所以 $a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab}$，

所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

因为 $c<0$，所以 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

(2) $\frac{1}{a-d}-\frac{1}{b-c}=\frac{b-a+d-c}{(a-d)(b-c)}<0$，则 $\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$.

另证：因为 $d<c$，所以 $-d>-c$.

因为 $a>b$，所以 $a+(-d)>b+(-c)$，

即 $a-d>b-c$.

又因为 $b>c$，

所以 $a-d>b-c>0$，所以 $\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$.

(3) $\frac{c}{a-c}-\frac{c}{b-c}=\frac{c(b-a)}{(a-c)(b-c)}$.

因为 $a+b+c=0$，

所以 $b=-a-c$.

由 $b>c$，知$-a-c>c$，

所以 $-a>2c$. 又 $a>c$，

所以 $c<0$.

因此 $\frac{c(b-a)}{(a-c)(b-c)}>0$.

所以 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

另法：因为 $a>b>c$，所以 $a-c>b-c>0$，所以 $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$.

又因为 $a+b+c=0$，所以 在三个互不相等的实数 a，b，c 中，至少有一个为负数，

所以 其中最小的实数 $c<0$，

所以 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

3. $3<a+b<5$；　$-2<a-b<0$；
$-5<a-2b<-2$；　$2<ab<6$；
$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<1$.

习题 3-1A（第 67 页）

1. 略.
2. (1) $<$.　(2) $>$.
3. (1) $<$.　(2) $>$.　(3) $\geqslant$.　(4) $\geqslant$.　(5) $\geqslant$.
4. 略.
5. (1) $\frac{\pi}{2}<2\alpha+\beta<\frac{4}{3}\pi$.　(2) $-\frac{\pi}{24}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$.
6. (1) $(8-x)\times 800+8\times 200<6\ 000$.
(2) $\frac{360}{x-1}-\frac{360}{x}\geqslant 5$.

习题 3-1B（第 68 页）

1. (1) 因为 $a^2+b^2+5-2(2a-b)=(a-2)^2+(b+1)^2\geqslant 0$，
所以 $a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$，当且仅当 $a=2$，$b=-1$ 时，等号成立.
(2) 因为 $a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b+1)^2\geqslant 0$，
所以 $a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$，当且仅当 $a=1$，$b=-1$ 时，等号成立.
(3) 因为 $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da$
$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2]$
$\geqslant 0$，
所以 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$，当且仅当 $a=b=c=d$ 时，等号成立.
(4) 因为 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{2}=-\frac{(a-b)^2}{4}\leqslant 0$，
所以 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.
2. $x^3-(x^2-x+1)=(x-1)(x^2+1)$.
当 $x>1$ 时，$x^3>x^2-x+1$；
当 $x=1$ 时，$x^3=x^2-x+1$；
当 $x<1$ 时，$x^3<x^2-x+1$.
3. (1) $\begin{cases}8(x+19)>2\ 200\\ \frac{8(x+19)}{x-12}>9\end{cases}$
(2) $\begin{cases}0.22+(x-3)\times 0.11\leqslant 0.6\\ x\geqslant 3\end{cases}$

4. 因为 $3x^2+4xy+y^2-(2x^2+6xy)=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2>0$，

所以 $3x^2+4xy+y^2>2x^2+6xy$.

当 $a>1$ 时，$\log_a(3x^2+4xy+y^2)>\log_a(2x^2+6xy)$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a(3x^2+4xy+y^2)<\log_a(2x^2+6xy)$.

5. 设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则 $a=kb$，$c=kd$.

因为 $a>c$，所以 $kb>kd$.

因为 $k>1$，所以 $b>d$.

$a+d-(b+c)=(k-1)(b-d)>0$，

所以 $a+d>b+c$.

练习 A（第 71 页）

1. 不正确. 两个负数的算术平均值小于它们的几何平均值.
2. $[2,+\infty)$.
3. (1) 7，7.

   (2) 18，18.

4. 设矩形对着墙的一边的长为 x m，则与墙相邻的一边的长为 $\frac{l-x}{2}$ m.

矩形面积为 $S=x\cdot\frac{l-x}{2}$.

因为 $\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{l-x}{2}}\leqslant\frac{\frac{x}{2}+\frac{l-x}{2}}{2}=\frac{l}{4}$，

所以 $\sqrt{S}\leqslant\frac{\sqrt{2}l}{4}$，

所以 $S\leqslant\frac{l^2}{8}$.

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{l-x}{2}$，即 $x=\frac{l}{2}$ 时，等号成立.

所以矩形长为 $\frac{l}{2}$，宽为 $\frac{l}{4}$ 时，面积最大，最大值为 $\frac{l^2}{8}$.

练习 B（第 72 页）

1. $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

2. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，因为 $a+\frac{1}{a}\geqslant2$，

$$b+\frac{1}{b}\geqslant2,$$

所以 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$.

3. $f(x)=x-2+\frac{3}{x}$

$\geqslant 2\sqrt{3}-2$,

当 $x=\frac{3}{x}$，即 $x=\sqrt{3}$时，$f(x)$最小值为 $2\sqrt{3}-2$.

4. 可设 x，y 都是正数. 因为$\sqrt{2xy}\leqslant\frac{2x+y}{2}=\frac{4}{2}=2$，所以 $2xy\leqslant 4$，即 $xy\leqslant 2$.

当且仅当 $2x=y$，即 $x=1$，$y=2$ 时，等号成立.

所以横、纵坐标之积的最大值为 2，此时点 P 坐标为（1，2）.

5. 设池底长为 x m，则宽为$\frac{4\ 800}{3x}$ m，总造价

$$
\begin{aligned}
y&=1\ 600\times 150+\left(6x+6\times\frac{4\ 800}{3x}\right)\times 120\\
&=720\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)+240\ 000\\
&\geqslant 57\ 600+240\ 000\\
&=297\ 600,
\end{aligned}
$$

当 $x=40$ m 时，等号成立.

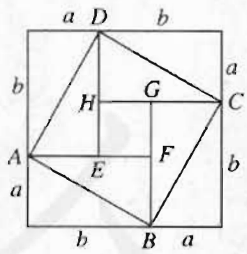
所以设计池底为 40 m，宽为 40 m 时，总造价最低为 297 600 元.

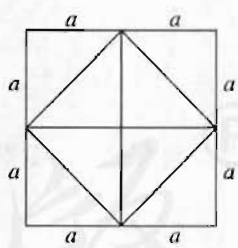
习题 3-2A（第 72 页）

1. a^2+b^2 表示正方形 $ABCD$ 的面积，$2ab$ 表示 Rt$\triangle ADE$，Rt$\triangle ABF$，Rt$\triangle BGC$，Rt$\triangle CHD$ 的面积之和，由图知

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

不等式中等号成立时相应的图示如下：





2. 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，$f(\theta)$最小值为 2.

3. $f(x)=\frac{x^2}{x^4+2}$

$=\frac{1}{x^2+\frac{2}{x^2}}$

$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

当 $x=\pm\sqrt[4]{2}$ 时，$f(x)$ 最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

4. 设直角三角形一直角边为 $x(x>0)$，则另一直角边为 $\dfrac{100}{x}$.

因为，$x+\dfrac{100}{x}\geqslant 20$，当且仅当 $x=10$ 时，等号成立.

所以直角三角形两直角边均为 10 时，它们和最小，最小值为 20.

5. 设矩形长为 x cm，则宽为 $(10-x)$ cm.

面积 $S=x\cdot(10-x)\leqslant\left(\dfrac{x+10-x}{2}\right)^2$

$=25$,

矩形长、宽均为 5 cm 时，矩形面积最大值为 25 cm^2.

6. 设铁盒底面长为 x cm，宽为 $\dfrac{25}{x}$ cm，则

表面积 $S=25+4x+4\cdot\dfrac{25}{x}$

$=4\left(x+\dfrac{25}{x}\right)+25$

$\geqslant 65$.

当 $x=\dfrac{25}{x}$，即 $x=5$ 时，表面积最小.

所以当铁盒底面长、宽均为 5 cm 时，用料最省.

7. 法一：$y=-4x^2+4x+3=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+4$,

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，y 有最大值 4.

法二：$y=(3-2x)(2x+1)\leqslant\left(\dfrac{3-2x+2x+1}{2}\right)^2=4$,

当 $3-2x=2x+1$，即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，y 有最大值 4.

8. $y=2-\left(\dfrac{4}{x}+x\right)\leqslant 2-4=-2$,

当 $x=2$ 时，y 有最大值为 -2.

9. $y=(x-2)+\dfrac{3}{x-2}+2$

$\geqslant 2\sqrt{3}+2$,

当 $x-2=\dfrac{3}{x-2}$，即 $x=2+\sqrt{3}$ 时，y 有最小值为 $2+2\sqrt{3}$.

10. 设地面的长为 x m，宽为 $\dfrac{25}{x}$ m,

则总造价 $y=25\times500+\left(6x+6\times\dfrac{25}{x}\right)\times400$

$$\begin{aligned}&=12\,500+2\,400\left(x+\frac{25}{x}\right)\\&\geqslant12\,500+2\,400\times10\\&=36\,500,\end{aligned}$$

因此设计地面长、宽均为 5 m 时，最低造价为 36 500 元.

习题 3-2B（第 73 页）

1. 法一：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{1}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}=4.$

法二：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}$

$$\begin{aligned}&=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\\&\geqslant4.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 4.

2. $ab=\dfrac{1}{6}\cdot3a\cdot2b\leqslant\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{3a+2b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{6}.$

当 $3a=2b$ 时，即 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，

ab 取得最大值为 $\dfrac{1}{6}$.

3. $y=(x-1)+\dfrac{4}{x-1}+1\geqslant5.$

当 $x=3$ 时，y 取得最小值为 5.

4. 法一：$\log_2\dfrac{x}{2}\cdot\log_2\dfrac{y}{4}=(\log_2x-1)(\log_2y-2)$

$$\begin{aligned}&=(\log_2x-1)(3-\log_2x)\\&=-(\log_2x)^2+4\log_2x-3\\&=-(\log_2x-2)^2+1,\end{aligned}$$

当 $\log_2x=2$，即 $x=4$，$y=8$ 时，原式有最大值为 1.

法二：$\log_2\dfrac{x}{2}\cdot\log_2\dfrac{y}{4}\leqslant\left(\dfrac{\log_2\dfrac{x}{2}+\log_2\dfrac{y}{4}}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}&=\frac{\left(\log_2\dfrac{xy}{8}\right)^2}{4}\\&=1,\end{aligned}$$

当 $\log_2\frac{x}{2}=\log_2\frac{y}{4}$，即 $y=2x$ 时，原式有最大值为 1，此时 $x=4$，$y=8$.

5. $f(\theta)=\frac{(\sin 2\theta+2)^2}{\sin 2\theta}$

$=\frac{\sin^2 2\theta+4\sin 2\theta+4}{\sin 2\theta}$

$=\sin 2\theta+\frac{4}{\sin 2\theta}+4.$

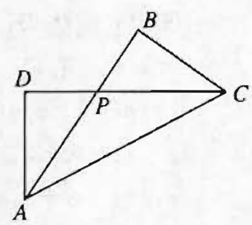
因为 $y=x+\frac{4}{x}$ 在 $(0,\ 2]$ 上是单调递减函数，所以 $\sin 2\theta+\frac{4}{\sin 2\theta}$ 在 $\sin 2\theta=1$ 时取最小值. 当 $\sin 2\theta=1$ 时，$\theta=\frac{\pi}{4}$，$f(\theta)$ 有最小值为 9.

6. 设 $DP=a$，则 $PC=AP=x-a$，

又因为 $AD=12-x$，

所以 $(12-x)^2+a^2=(x-a)^2$.

所以 $a=12-\frac{72}{x}$.



（第 6 题）

$S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}\times(12-x)\times\left(12-\frac{72}{x}\right)$

$=108-6\left(x+\frac{72}{x}\right)$

$\leqslant 108-72\sqrt{2}.$

当 $x=6\sqrt{2}$ 时，$\triangle ADP$ 的最大面积为 $108-72\sqrt{2}$.

练习 A（第 78 页）

1. (1) $\mathbf{R}$. (2) $\varnothing$.

(3) $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 4\}$. (4) $\varnothing$.

2. (1) $\{x\mid x>3$ 或 $x<-1\}$. (2) $\{x\mid -1<x<3\}$.

(3) $\{x\mid x=\frac{3}{2}\}$. (4) $\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -\frac{1}{2}\}$.

3. (1) $\{x\mid 2<x<6\}$. (2) $\mathbf{R}$.

(3) $\{x\mid -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}$. (4) $\{x\mid x>-3$ 或 $x<-5\}$.

4. 当 $m=0$ 时，方程有实根 $x=0$，不符合题意.

当 $m\neq 0$ 时，$\Delta<0$，

即 $(1-m)^2-4m^2<0$，

则 $m>\frac{1}{3}$ 或 $m<-1$.

5. (1) $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1+\sqrt{7}}{3}\text{ 或 }x<\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right\}$.

(2) $\left\{x\left|-1<x<\frac{1}{4}\text{或}\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$.

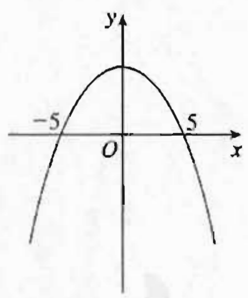
(3) $\left\{x\left|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$.

练习 B（第 79 页）

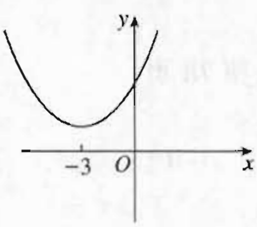
1. 原不等式化为$(x+m)(x-1)\geqslant 0$，当 $m>-1$ 时，$-m<1$，
   不等式的解集为$\{x|x\leqslant -m$ 或 $x\geqslant 1\}$.
   当 $m=-1$ 时，
   不等式的解集为 $\mathbf{R}$.
   当 $m<-1$ 时，$-m>1$，
   不等式的解集为$\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant -m\}$.
2. $-9<m<-1$.
3. $\begin{cases}\Delta=(m+3)^2-4(m+3)>0\\ x_1+x_2=m+3>0\\ x_1\cdot x_2=m+3>0\end{cases}$ 得 $m\in\{m|m>1\}$.

习题 3-3A（第 79 页）

1. (1) $f(x)>0$ 时，$\{x\mid -5<x<5\}$；
   $f(x)=0$ 时，$\{x\mid x=\pm 5\}$；
   $f(x)<0$ 时，$\{x\mid x>5$ 或 $x<-5\}$.



(2) $y>0$ 时，$x\in\mathbf{R}$；
$y=0$ 时，$x\in\varnothing$；
$y<0$ 时，$x\in\varnothing$.



2. (1) $\left\{x\left|x>\frac{5}{2}\text{或}x<-\frac{3}{2}\right.\right\}$.
   (2) $\left\{x\left|-2\leqslant x\leqslant\frac{7}{4}\right.\right\}$.
   (3) $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<1\right.\right\}$.
   (4) $\varnothing$.
   (5) $\{x\mid x>9$ 或 $x<0\}$.
   (6) $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$.
3. $\complement_U A=\{x|x\geqslant -1$ 或 $x\leqslant -2\}$.

4. (1) $\left\{x \middle| -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

(2) $\{x \mid x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant -1\}$.

(3) $\left\{x \middle| -4 < x < -\frac{1}{2}\text{或 } x > 1\right\}$.

5. (1) $\{m \mid -3 < m < 2\}$.

(2) $\left\{m \middle| 0 < m \leqslant \frac{1}{3}\right\}$.

6. (1) $\{m \mid 3-2\sqrt{2} < m < 3+2\sqrt{2}\}$.

(2) $\left\{m \middle| m \leqslant -1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$.

7. $\{k \mid -4\sqrt{2} \leqslant k \leqslant 4\sqrt{2}\}$.

8. $\{-2, 3\}$.

9. $M=\{x \mid 0 < x < 3\}$,

$N=\{x \mid x < 1$ 或 $x > 3\}$,

所以 $M \cap N=\{x \mid 0 < x < 1\}$,

$M \cup N=\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 3\}$.

习题 3-3B（第 80 页）

1. 因为$\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1} \geqslant m$ 对任意实数 x 都成立，又因为 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

所以 $3x^2+2x+2 \geqslant m(x^2+x+1)$的解集为 $\mathbf{R}$,

即 $(3-m)x^2+(2-m)x+2-m \geqslant 0$ 解集为 $\mathbf{R}$.

所以 $\begin{cases} 3-m>0 \\ (2-m)^2-4(3-m)(2-m) \leqslant 0 \end{cases}$

所以 $m \leqslant 2$ 且 m 为自然数，

所以 $m=0, 1, 2$.

2. 因为 $cx=a+b$,

所以 $c^2x^2=a^2+b^2+2ab$,

所以 $x^2=1+\frac{2ab}{a^2+b^2}$,

故 $\begin{cases} x>0 \\ 1<x^2 \leqslant 2 \end{cases}$ 解得 $1<x \leqslant \sqrt{2}$.

3. 设 $f(x)=2x^2+7mx+5m^2+1$，由题意知 $f(2)<0$，得$-\frac{9}{5}<m<-1$.

4. $(2-\sqrt{11}, -1] \cup [5, 2+\sqrt{11})$.

5. 令 $f(x)=x^2-3x+2$，则 $f(x)$在$[0,2]$上的最大值为 2，最小值为$-\frac{1}{4}$.

由题知 $\begin{cases}3-t^2\geqslant 2\\ \dfrac{1}{8}(2t-t^2)\leqslant -\dfrac{1}{4}\end{cases}$

得 $-1\leqslant t\leqslant 1-\sqrt{3}$.

6. 设窗户宽为 x 米，长为$\dfrac{7.2-3x}{2}$米.

所以 $\begin{cases}x\cdot\dfrac{7.2-3x}{2}\leqslant 1.8\\ 0<x<\dfrac{7.2-3x}{2}\end{cases}$

得 $0<x\leqslant\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$.

习题 3-4A（第 83 页）

1. 设每天加工 x 个零件，则

$$\frac{100}{x}+\frac{200}{x+15}<20,$$

解得 $x>5\sqrt{3}$或 $x<-5\sqrt{3}$（舍），

所以每天至少要加工 9 个零件.

2. 设甲单独工作需要 x 天能完成任务，乙单独工作需要$(x+15)$天能完成任务，总工作量为 1，则

$$\frac{1}{x}\times 10+\frac{1}{x+15}\times 15\geqslant\frac{2}{3},$$

解得 $0<x\leqslant 30$，

所以甲单独工作最多需要 30 天能完成任务.

3. 设该专业户的粮食产量的年平均增长率为 x，则

$$50(1+x)^2\geqslant 60.5,$$

解得 $x\geqslant 0.1$.

所以年平均增长率最低不低于 10%.

4. 由题意，有

$$0.05x+\frac{x^2}{180}\geqslant 12,$$

解得 $x\geqslant 42.2$.

所以汽车刹车前的车速至少是 42.2 km/h.

习题 3-4B（第 83 页）

1. 设银行一年存款利率为 x，则

$$[100(1+5x)-20](1+5x)\geqslant 99,$$

化简，得

$$2\,500x^2+900x-19\geqslant 0,$$

因为 $x>0$，解得 $x\geqslant\frac{1}{50}=2\%$，所以银行存款利率不低于 2%.

2. 设发行量为 x 本，则

$$5\,000+0.5x+\frac{2}{625}x^2\leqslant 10.5x,$$

即 $\frac{2}{625}x^2-10x+5\,000\leqslant 0$，

解得 $625\leqslant x\leqslant 2\,500$.

所以最低发行量是 625 本.

3. 设图书定价为 x 元，则

$$[80\,000-(x-2.5)\times 20\,000]\times x\geqslant 200\,000,$$

解得 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4$，

所以最高定价为 4 元.

4. 将 $x=20$，$y=3\,600$ 和 $x=10$，$y=2\,000$ 分别代入 $y=ax^2+bx$，

得 $\begin{cases}400a+20b=3\,600,\\100a+10b=2\,000,\end{cases}$

解得 $a=-2$，$b=220$.

所以 $y=-2x^2+220x$.

由题意，得 $-2x^2+220x>6\,000$，则 $50<x<60$，

一星期内大约生产 50 辆至 60 辆摩托车.

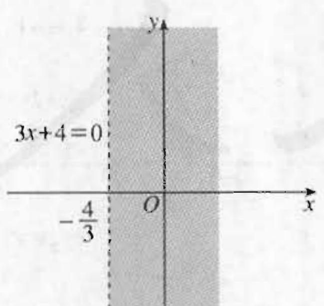
5. 设汽车速度为 x km/h，则 $\frac{125}{x}\times 30+1\,000+2x\leqslant 1\,200$，

解得 $25\leqslant x\leqslant 75$，

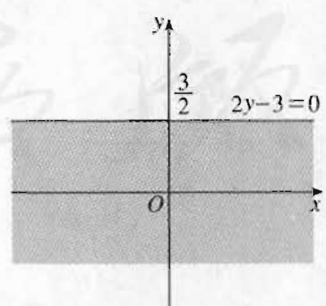
所以汽车的最高速度应为每小时 75 千米.

练习 A（第 88 页）

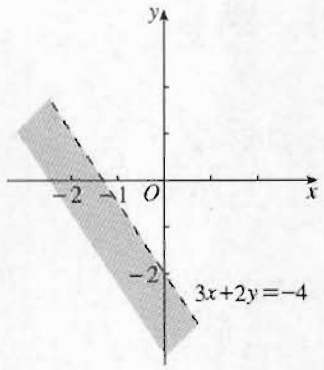
1.



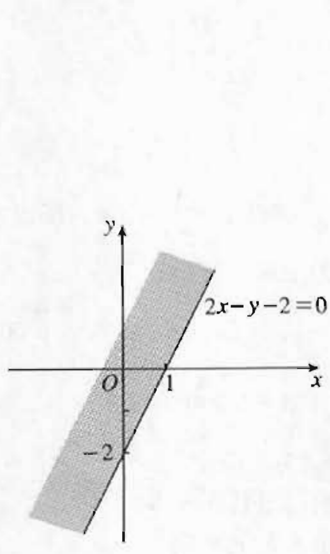
(1)



(2)

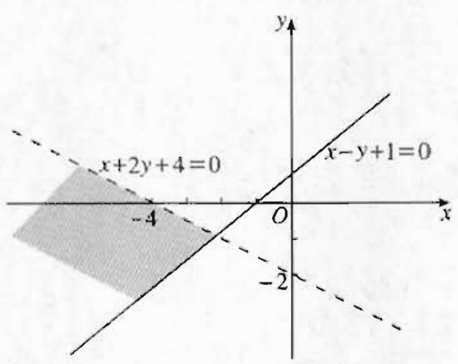

y
x
O
−2
−1
−2
3x+2y=−4

(3)

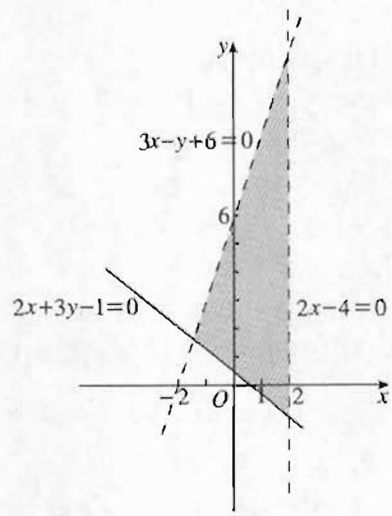

y
x
O
1
−2
2x−y−2=0

(4)

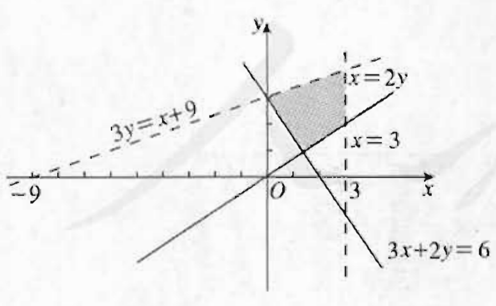
2.


y
x
O
−4
−2
x+2y+4=0
x−y+1=0

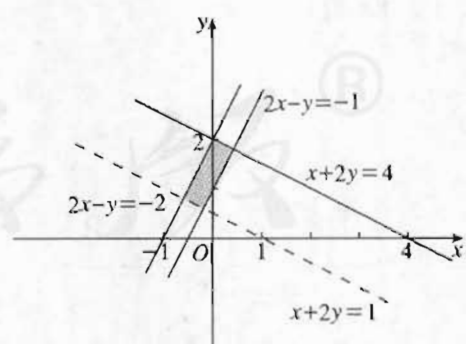
(1)


y
x
O
6
−2
1
2
3x−y+6=0
2x+3y−1=0
2x−4=0

(2)


y
x
O
−9
3
3y=x+9
x=2y
x=3
3x+2y=6

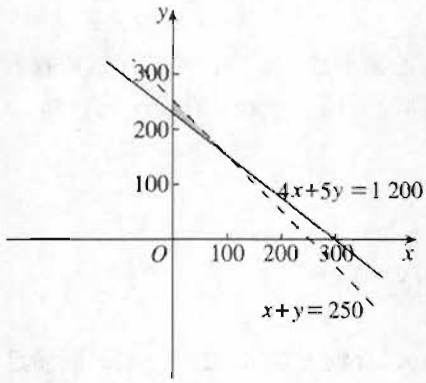
(3)


y
x
O
2
−1
1
4
2x−y=−1
2x−y=−2
x+2y=4
x+2y=1

(4)

3. 设 x，y 分别为甲、乙两厂分配到的金额，则$\begin{cases}x\geqslant 0\\y\geqslant 0\\x+y<250\\\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}y\geqslant 60\end{cases}$

不等式组表示的区域如下：



练习 B（第 89 页）

(1) $\begin{cases}y\geqslant 1\\3x-5y+11\geqslant 0\\3x+2y-17\leqslant 0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+3y-1>0\\3x-2y-8<0\\3x-2y+5>0\\2x+3y-14>0\end{cases}$

练习（第 94 页）

1. (1) 当 $x=\frac{9}{4}$，$y=\frac{15}{4}$时，$z=5x+8y$ 取最大值为$\frac{165}{4}$.

(2) 当 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{5}{2}$时，$z=3x+5y$ 取最大值为 17.

当 $x=-2$，$y=-1$ 时，$z=3x+5y$ 取最小值为 -11.

2. 设 A 仓库调运到甲地 x 台，调运到乙地 y 台，B 仓库调运到甲地 $(10-x)$ 台，调运到乙地 $(8-y)$ 台，则

$$\begin{cases}x+y\leqslant 14\\10-x+8-y\leqslant 8\\0\leqslant x\leqslant 10\\0\leqslant y\leqslant 8\end{cases}$$

设运输费为 z，则

$$z=400x+800y+300(10-x)+500(8-y)$$

$=100x+300y+7\ 000,$

所以由 A 运往甲地 10 台，B 运往乙地 8 台，可使运费最少，最少是 8 000 元.

3. 设生产甲种产品 x 件，乙种产品 y 件，销售收入 $z=3x+2y$，则

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 400 \\ 2x+y\leqslant 500 \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \\ x,\ y\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

所以生产甲种产品 200 件，乙种产品 100 件，才能使销售收入最大.

4. 设需要食物 A 和食物 B 分别为 x kg，y kg，花费 z 元，则

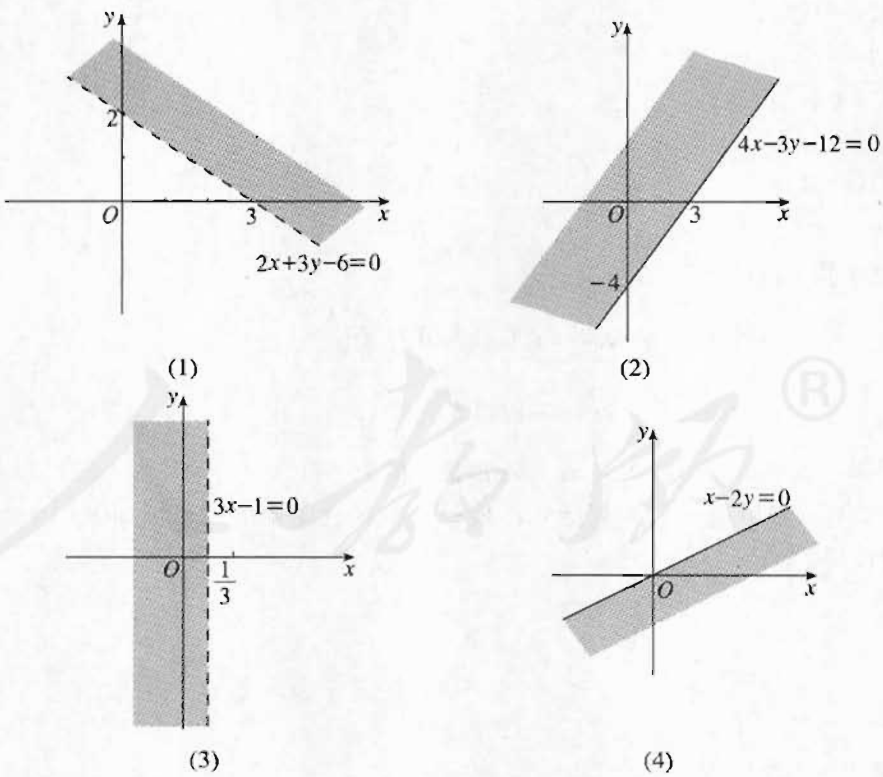
$$z=28x+21y.$$

依题意，有 $\begin{cases} 0.105x+0.105y\geqslant 0.075 \\ 0.07x+0.14y\geqslant 0.06 \\ 0.14x+0.07y\geqslant 0.06 \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \end{cases}$

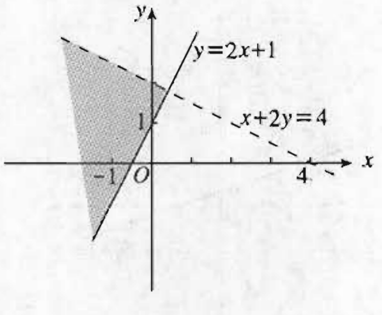
所以需要食物 A 为 0.143 kg，食物 B 为 0.571 kg 时，既满足饮食要求，又使花费最低.

习题 3-5A（第 96 页）

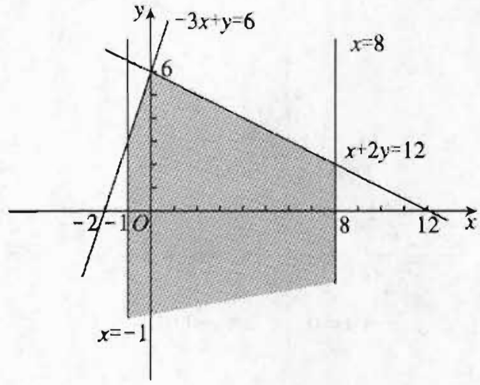
1.



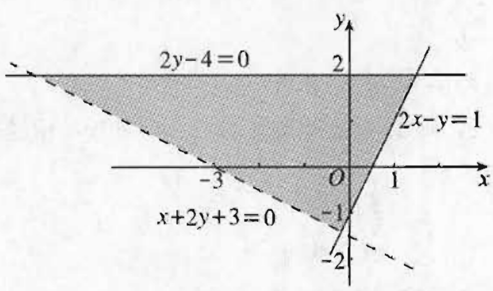
2.



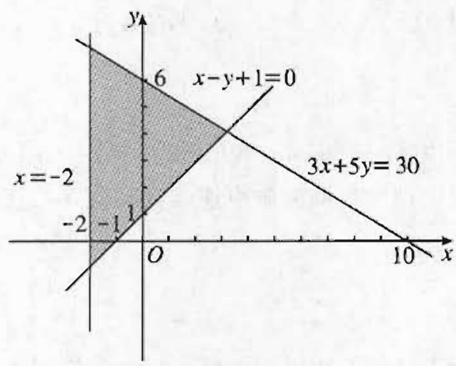
(1)



(2)



(3)



(4)

3. 24.

4. $\frac{288}{5}$.

5. 设一天生产甲产品 x 件，乙产品 y 件，获得利润 $z=1\,500x+2\,000y$，则

$$\begin{cases}4x\leqslant 16\\4y\leqslant 12\\x+2y\leqslant 8\\x>0,\ y>0,\text{且}\ x,\ y\ \text{均为整数}\end{cases}$$

所以生产 4 件甲产品，2 件乙产品，才能获得最大的利润.

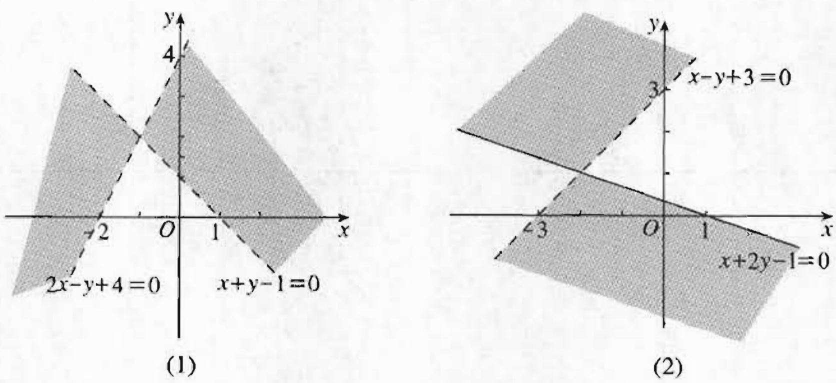
6. 设截第一种钢板 x 张，第二种钢板 y 张，两种钢板张数 $z=x+y$，则

$$\begin{cases}2x+y\geqslant 15\\x+2y\geqslant 18\\x+3y\geqslant 27\\x>0,\ y>0,\text{且}\ x,\ y\ \text{均为整数}\end{cases}$$

所以截第一种钢板 3 张，第二种钢板 9 张，或第一种钢板 4 张，第二种钢板 8 张，既满足需要，又使所用张数最少.

习题 3-5B（第 97 页）

1.



2. 设 $f(x)=ax^2+bx$，a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$，则

$$\begin{cases}-1\leqslant a-b\leqslant 2\\ 2\leqslant a+b\leqslant 4\end{cases}$$

所以 $f(-2)=4a-2b=3(a-b)+(a+b)$ 的取值范围为 $[-1, 10]$.

3. 设电视台每周播放甲连续剧 x 次，乙连续剧 y 次，则收视观众人数 $z=60x+20y$，依题意有

$$\begin{cases}80x+40y\leqslant 320\\ x+y\geqslant 6\\ x>0，y>0，\text{且 } x，y \text{ 均为整数}\end{cases}$$

所以播放 2 次甲连续剧，4 次乙连续剧，收视观众最多.

4. 设安排Ⅰ级车工 x 人，Ⅱ级车工 y 人，每天支出费用 $z=56x+36y+(240x\times3\%+160y\times4.5\%)\times2=70.4x+50.4y$，则

$$\begin{cases}240x+160y\geqslant 2\ 400\\ 0\leqslant x\leqslant 8\\ 6\leqslant y\leqslant 12\\ x，y \text{ 均为整数}\end{cases}$$

所以安排Ⅰ级车工 6 人，Ⅱ级车工 6 人，工厂每天支出费用最少.

5. 设甲库调往 A 镇 x t，B 镇 y t，则乙库调往 A 镇 $(70-x)$ t，B 镇 $(110-y)$ t，则

运费 $z=240x+250y+180(70-x)+160(110-y)$
$=60x+90y+30\ 200$.

因此 $\begin{cases}x+y\leqslant 100\\ 70-x+110-y\leqslant 80\\ 0\leqslant x\leqslant 70\\ 0<y\leqslant 100\end{cases}$

(1) 当甲库运往 A 镇 70 t，运往 B 镇 30 t，乙库运往 B 镇 80 t 时，运费最省. 此时运费为 37 100元.

(2) 甲库运往 B 镇 100 t，乙库运往 A 镇 70 t，运往 B 镇 10 t 时，调运方案最不合理. 它造成的

经济损失为 2 100 元.

Ⅲ 巩固与提高　A 组（第 98 页）

1. (1) $>$.

(2) $>$.

(3) $\leqslant$.

2. 略.

3. (1) 当 $a<-1$ 时，解集为 $\{x|x>-a$ 或 $x<1\}$；

当 $a=-1$ 时，解集为 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1\}$；

当 $a>-1$ 时，解集为 $\{x|x>1$ 或 $x<-a\}$.

(2) 当 $a>1$ 或 $a<-1$ 时，不等式解集为 $\{x|a-\sqrt{a^2-1}<x<a+\sqrt{a^2-1}\}$；

当 $a=\pm1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$；

当 $-1<a<1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$.

(3) 不等式解集为 $\{x|x<\log_2 3\}$.

(4) 不等式解集为 $\{x|x>10$ 或 $0<x<10^{-\frac{1}{2}}\}$.

4. $\{m|m>0\}$.

5. $\{m|0<m\leqslant1\}$.

6. (1) $1<x\leqslant\frac{3}{2}$.

(2) $x>1$ 或 $x\leqslant-2$.

7. (1) $\{x|-1\leqslant x\leqslant2\}$.

(2) $\{x|-1\leqslant x<0\}$.

(3) $\{x|x<1$ 或 $x>4$ 且 $x\neq5\}$.

8. $(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$.

9. (1) $r=\sqrt{S}$.

(2) $r=\frac{P}{4}$.

10. 由题意知全程运输成本 $y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}$

$$=S\left(\frac{a}{v}+bv\right),\ v\in(0,\ c].$$

因为 S，a，b，v 均为正数，

所以 $S\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant2S\sqrt{ab}$，当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，等号成立.

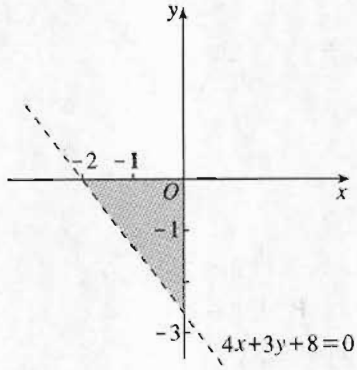
又 $a<bc^2$，

所以 $\sqrt{\frac{a}{b}}<c$.

所以当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，全程运输成本最小.

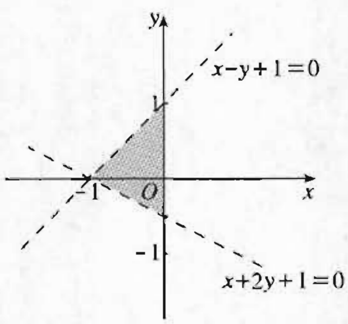
11. $a=-9$.

12. $(-1,\ -1)$.

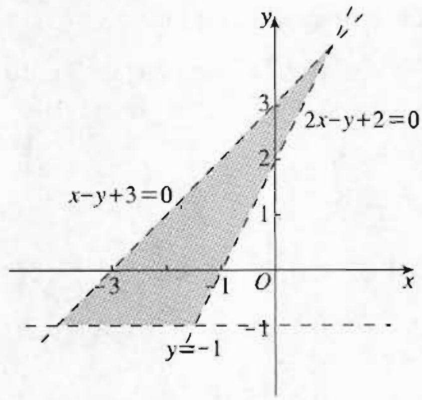


(第 12 题)

13.



(1)



(2)

14. 设每天派出 x 辆 A 型卡车，y 辆 B 型卡车，公司所花成本 $z=160x+252y$，则

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 7\\ 0\leqslant y\leqslant 4\\ x+y\leqslant 9\\ 48x+60y\geqslant 360\text{，且 }x\text{，}y\text{ 均为整数}\end{cases}$$

所以每天派出 5 辆 A 型车，2 辆 B 型车，花费最低.

15. 设甲种饮料 x 杯，乙种饮料 y 杯，获得利润 $z=0.7x+1.2y$，则

$$\begin{cases}9x+4y\leqslant 3\ 600\\ 4x+5y\leqslant 2\ 000\\ 3x+10y\leqslant 3\ 000\\ x>0\text{，}y>0\text{，且 }x\text{，}y\text{ 均为整数}\end{cases}$$

所以每天配制甲种饮料 200 杯，乙种饮料 240 杯，能获得最大利润.

B组（第100页）

1. $27<a+b<96$；$-12<2a-b<105$；$\dfrac{1}{3}<\dfrac{a}{b}<4$.

2. 因为 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)$.

因为 $b>-a$，所以 $f(b)>f(-a)$.

所以 $f(a)+f(b)>f(-b)+f(-a)$.

3. (1) $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{3}{2}\right)\cup(2,\ +\infty)$.

(2) $[2,\ 4)$.

4. 有3个真命题.

(1) $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$，$bc>ad\Rightarrow ab>0$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}\\ bc>ad\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{bc-ad}{ab}>0\\ bc-ad>0\end{array}\right\}\Rightarrow ab>0.$$

(2) $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$，$ab>0\Rightarrow bc>ad$.

(3) $bc>ad$，$ab>0\Rightarrow\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$.

5. 因为 $\dfrac{1}{2}\tan\alpha-\tan\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}-\dfrac{\sin\dfrac{1}{2}\alpha}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\dfrac{1}{2}\alpha-2\cos\alpha\sin\dfrac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha\cos\dfrac{1}{2}\alpha}=\frac{\sin\dfrac{1}{2}\alpha\cdot2\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha-2\cos\alpha\sin\dfrac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha\cos\dfrac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)\sin\dfrac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha\cos\dfrac{1}{2}\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)\tan\dfrac{1}{2}\alpha}{2\cos\alpha}>0,$$

所以 $\dfrac{1}{2}\tan\alpha>\tan\dfrac{1}{2}\alpha$.

6. $\left(-\dfrac{1}{m},\ -\dfrac{1}{n}\right)$.

7. $a=\dfrac{1}{8}$，$m=36$.

8. (1) $(m^2-3m+2)x^2+2(m-1)x+5>0$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，若 $m^2-3m+2=0$，则 $m=2$ 或 1.

当 $m=1$ 时，$f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$；

当 $m=2$ 时，$f(x)$定义域为 $x>-\dfrac{5}{2}$，不合题意.

若 $m^2-3m+2>0$，则 $\Delta<0$，

由$\begin{cases}m^2-3m+2>0\\4(m-1)^2-20(m^2-3m+2)<0\end{cases}$ 知 $m>\frac{9}{4}$或 $m<1$.

所以 $m>\frac{9}{4}$或 $m\leqslant 1$ 时，$f(x)$定义域为 **R**.

(2) 若函数 $f(x)$的值域为 **R**，

当 $m=2$ 时，$f(x)=\lg(2x+5)$值域为 **R**；

当 $m^2-3m+2>0$ 时，$\Delta\geqslant 0$，

即 $\begin{cases}m^2-3m+2>0\\4(m-1)^2-20(m^2-3m+2)\geqslant 0\end{cases}$ 解得 $2<m\leqslant\frac{9}{4}$.

所以 $2\leqslant m\leqslant\frac{9}{4}$时，$f(x)$值域为 **R**.

9. (1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，利用均值不等式求得最小值. 当 $x=0$ 时，$f(x)$最小值为 2.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，利用函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 在$[\sqrt{2}, +\infty)$上是增函数可求得，当 $\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}$时，即 $x=0$ 时，$f(x)$最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

10. 设画面高为 x cm，宽为 λx cm，则 $\lambda x^2=4\ 840$，设纸张面积为 S，有 $S=(x+16)(\lambda x+10)$ $=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160$，

则 $S=5\ 000+44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

当 $8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$，即 $\lambda=\frac{5}{8}$时，S 取得最小值，

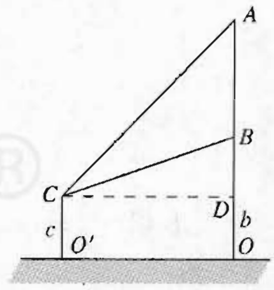
此时，画高为 88 cm，宽为 55 cm.

11. 设距墙 x m 时视角最大，则

$\tan\angle ACB=\tan(\angle ACD-\angle BCD)$

$$=\frac{\frac{a-c}{x}-\frac{b-c}{x}}{1+\frac{(a-c)(b-c)}{x^2}}$$

$$=\frac{a-b}{x+\frac{(a-c)(b-c)}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{(a-c)(b-c)}}.$$



(第 11 题)

当且仅当 $x=\frac{(a-c)(b-c)}{x}$，即 $x=\sqrt{(a-c)(b-c)}$时取等号.

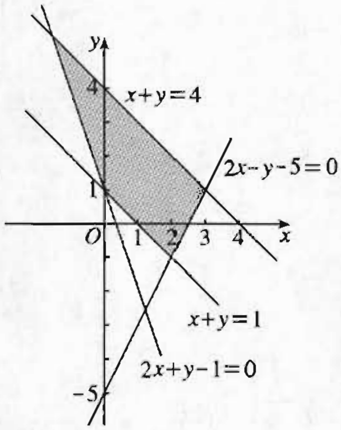
所以当距墙 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ m 时视角最大.

12. 由题意知，$z=x^2+y^2$ 表示平面区域内的点 (x, y) 到原点的距离的平方，因此，

当 $x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{2}{5}$时，$z_{\min}=\frac{4}{5}$；

当 $x=2$，$y=3$ 时，$z_{\max}=13$.

13. (1)



(2) $f(x, y)=y-ax$ 的最大值为 $7+3a$，最小值为 $-1-2a$.

14. 设甲种产品质量为 x，乙种产品质量为 y，本月厂方获利 $z=10x+12y$，则

$$\begin{cases}2x+3y\leqslant 1\ 500\\3x+2y\leqslant 1\ 500\\x+y\leqslant 600\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$$

所以安排甲种产品、乙种产品质量均为 300 时，厂方本月获利最大，为 6 600 元.

15. 设高中招收 x 个班，初中招收 y 个班，收取学费总额 $z=10.8x+7.2y$（万元），

由题意得

$$\begin{cases}20\leqslant x+y\leqslant 30\\60x+30y\leqslant 1200\\x,\ y\in\mathbf{N}_+\end{cases}$$

当 $x=10$，$y=20$ 时，$z_{\max}=252$（万元）.

Ⅳ 自测与评估（第 102 页）

1. (1) D.　(2) C.　(3) C.　(4) D.　(5) D.　(6) D.

2. (1) $\{x \mid -3<x<2$ 或 $3<x<8\}$.

(2) $\left\{x \mid x>\frac{1}{3}\right.$ 或 $\left.x<-\frac{1}{2}\right\}$.

(3) $\frac{1}{4}$.

(4) 1.

3. $\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>k$ 恒成立 $\Leftrightarrow (3-k)x^2+(2-k)x+2-k>0$ 恒成立，

即 $\begin{cases}3-k>0\\(2-k)^2-4(3-k)(2-k)<0\end{cases}$

解得　$k<2$，

所以 k 取 1.

4. $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)$

$$=\frac{1}{2}\log_a(x_1x_2)$$

$$=\log_a\sqrt{x_1x_2},$$

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,

因为 x_1，$x_2\in\mathbf{R}^+$，

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$.

当 $a>1$ 时，$\log_a\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\log_a\sqrt{x_1x_2}$，所以

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right);$$

当 $0<a<1$ 时，$\log_a\frac{x_1+x_2}{2}\leqslant\log_a\sqrt{x_1x_2}$，所以

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

5. 设投资人投入甲、乙两个项目的资金分别为 x 万元和 y 万元，则他可能盈利

$$z=x+0.5y.$$

由题意，得

$$\begin{cases}x+y\leqslant 10\\0.3x+0.1y\leqslant 1.8\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x=4$，$y=6$ 时，$z_{\max}=7$.

所以投资人用 4 万元投资甲项目，6 万元投资乙项目，取得的盈利最大为 7 万元.

六、反馈与评价

I 知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 若 $a<b<0$，则下列不等式中不成立的是（　　）.

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C) $a^3<b^3$　　(D) $a^2>b^2$

2. 已知 $x>y>z$，且 $x+y+z=0$，则下列不等式恒成立的是（　　）.

(A) $xy>yz$　　(B) $xz>yz$

(C) $xy>xz$　　(D) $xy^2>zy^2$

3. 已知 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则下列各式恒成立的是（　　）.

(A) $bc<ad$　　(B) $bc>ad$

(C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　(D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

4. 某工厂第二年比第一年的年产量的增长率为 p，第三年比第二年的年产量的增长率为 q，这两年的年平均增长率为 x，则（　　）.

(A) $x=\frac{p+q}{2}$　　(B) $x\leqslant\frac{p+q}{2}$

(C) $x>\frac{p+q}{2}$　　(D) $x\geqslant\frac{p+q}{2}$

5. 如果 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid x<-2$ 或 $x>4\}$，那么对于函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 应有（　　）.

(A) $f(5)<f(2)<f(-1)$　　(B) $f(2)<f(5)<f(-1)$

(C) $f(-1)<f(2)<f(5)$　　(D) $f(2)<f(-1)<f(5)$

6. 不等式组 $\begin{cases}(x-y+5)(x+y)>0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 表示的平面区域是（　　）.

(A) 三角形　　(B) 菱形

(C) 梯形　　(D) 矩形

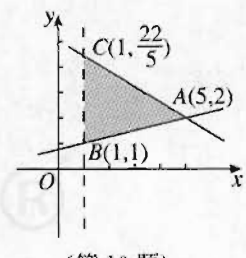
二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 比较大小：$5x^2+y^2+z^2$ ______ $2xy+4x+2z-2$.

8. 不等式组 $\begin{cases}x^2+2x-3>0\\x^2+4x<0\end{cases}$ 的解集为________.

9. 已知 $x<\frac{5}{4}$，则函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为________.

10. 如图所示平面区域，若使目标函数 $z=ax+y(a>0)$ 取得最大值的最优解有无穷多个，则 a 的值为________.



（第 10 题）

三、解答题（共 50 分）

11.（满分 12 分）在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上，函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 与 $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ 在同一点取得相同的最小值，求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值.

12.（满分 12 分）设 $m\in\mathbf{R}$，解关于 x 的不等式 $m^2x^2+2mx-3<0$.

13.（满分 12 分）假设国家收购某种农副产品的价格是 1 200 元/吨，其中征税标准是每 100 元征税

8 元（叫做税率是 8 个百分点，即 8%），计划收购 m 万吨，决定税率降低 x 个百分点($0<x<8$)，预计收购量可增加 $2x$ 个百分点，要使此项税收在税率降低后不低于原计划的 78%，试确定 x 的取值范围.

14.（满分 14 分）下表给出 X，Y，Z 三种食物的维生素含量及其成本：

	X	Y	Z
维生素 A（单位/千克）	400	500	300
维生素 B（单位/千克）	700	100	300
成本（元/千克）	6	4	3

现欲将三种食物混合成 100 千克的混合食品，要求至少含 35 000 单位维生素 A，40 000 单位维生素 B，采用何种配比成本最小？

知识与方法测试参考答案

一、1. B.　2. C.　3. B.　4. B.　5. D.　6. C.

二、7. $\geqslant$.　8. $(-4, -3)$.　9. 1.　10. $a=\dfrac{3}{5}$.

三、11. 因为　$g(x)=x+\dfrac{1}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+1=3$，当且仅当 $x=1$ 时取最小值 3，

所以　在 $f(x)=x^2+bx+c$ 中，当 $-\dfrac{b}{2}=1$，即 $b=-2$ 时，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=3$，即 $\dfrac{4c-4}{4}=3$，$c=4$.

所以　$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$.

又因为　$x\in\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$，

所以　当 $x=2$ 时，$f(x)_{\max}=4$.

12. 当 $m=0$ 时，对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；

当 $m\neq 0$ 时，原不等式化为 $(mx+3)(mx-1)<0$；

当 $m>0$ 时，解得 $-\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}$；

当 $m<0$ 时，解得 $\dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}$.

综上可知，原不等式解集为：

当 $m=0$ 时，$x\in\mathbf{R}$；

当 $m>0$ 时，解集为 $\left\{x \mid -\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}\right\}$；

当 $m<0$ 时，解集为 $\left\{x \mid \dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}\right\}$.

13. 税率降低后是 $(8-x)\%$，

收购量是 $m(1+2x\%)\times 10^4$ 吨，

税收为 $12\times10^6 m(1+2x\%)(8-x)\%$ 万元，

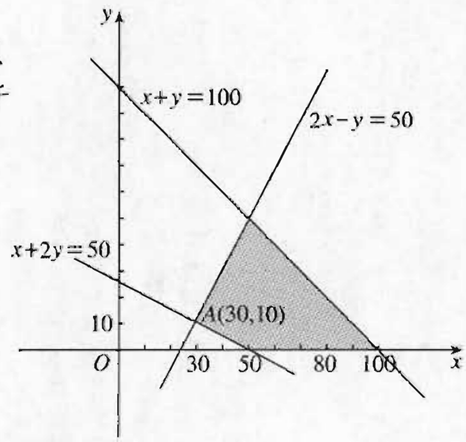
原来的税收是 $12\times10^6 m\cdot 8\%$ 万元，

由题意可得

$12\times10^6 m(1+2x\%)(8-x)\%\geqslant12\times10^6 m\times8\%\times78\%$，

即 $x^2+42x-88\leqslant0$，解得 $-44\leqslant x\leqslant2$，

又因为 $x>0$，所以 $0<x\leqslant2$，x 的取值范围是 $(0,\ 2]$.



14. 设三种食物 X，Y，Z 分别用 x 千克，y 千克，z 千克，则 x，y，z 满足：

$$\begin{cases}x+y+z=100\\400x+500y+300z\geqslant35\ 000\\700x+100y+300z\geqslant40\ 000\\x\geqslant0\\y\geqslant0\\z\geqslant0\end{cases}$$

再设成本为 U 元，则 $U=6x+4y+3z$，

约束条件可转化为 $\begin{cases}x+y\leqslant100\\x+2y\geqslant50\\2x-y\geqslant50\\x\geqslant0\\y\geqslant0\end{cases}$

目标函数可转化为　$U=3x+y+300$.

作出上面不等式组表示的平面区域（如图所示），

求得最优解为 $x=30$，$y=10$，

从而 $z=60$，$U_{\min}=400$（元）.

答：三种食物 X，Y，Z 分别取 30 千克，10 千克，60 千克时成本最小.

Ⅱ 评价建议

1. 教学中，教师应注重对学生进行过程性评价. 根据本章内容可以设计三套试题分三个阶段进行测试. 第一阶段，学生学完均值不等式后进行，测试要侧重于不等式性质的灵活运用及均值定理在实际问题中的应用. 第二阶段，在学完不等式的实际应用后进行，注重运用配方法、分解因式法解一元二次不等式，渗透“相等与不等”、“形与数”的相互转化的思想及分类讨论的思想. 第三阶段主要测试学生运用线性规划解决实际问题的能力.

2. 注重对学生数学探究、数学建模能力的评价. 教师可以根据均值定理等知识的形成过程、不等式的实际应用设计微型课题，让学生探究、建模，然后对学生的信息资料收集、小组的合作与交流、课题论文等进行自评、互评. 评价要注重学生的参与，要以鼓励为主，肯定成绩. 评价的目的是激励学生自主探究，勇于合作，善于提出问题、解决问题.