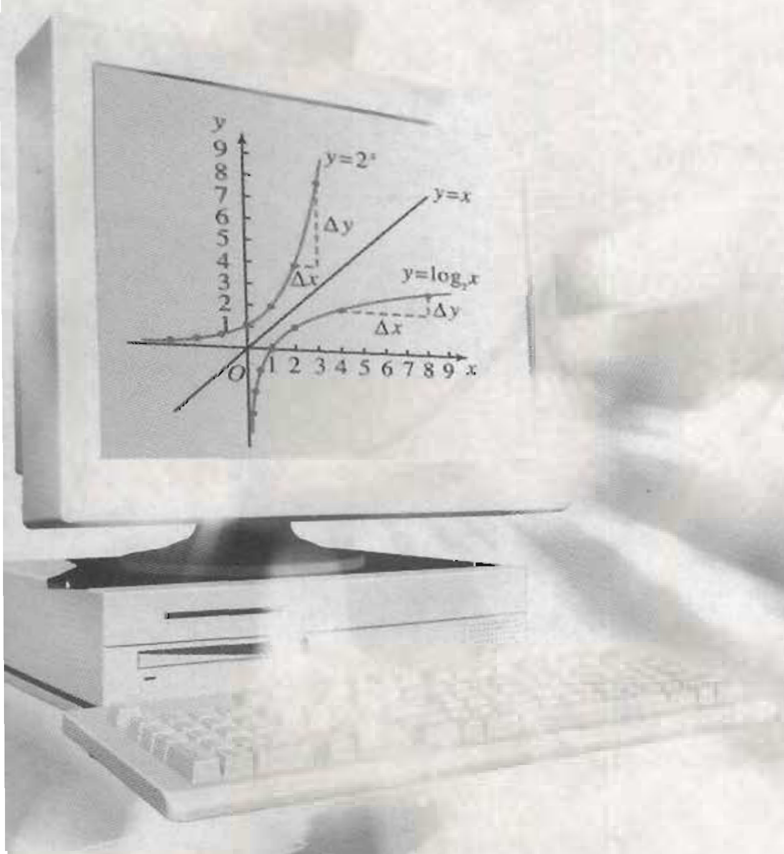
普通高中课程标准实验教科书

数学 ①

必修

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明　韩际清

本册主编　　李建才　秦玉波
编　　者　　秦玉波　陈为暖　尹玉柱　李明照
　　　　　　张合钦　陈亦飞　刘　莉　王福宗
　　　　　　韩际清
责任编辑　　顾国麒　王旭刚
版式设计　　王　喆
封面设计　　林荣桓

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学 1 必修（B 版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著. —3 版. —北京：人民教育出版社，2007.5（2018.7 重印）

ISBN 978-7-107-17855-9

Ⅰ.①普… Ⅱ.①人… ②课… Ⅲ.①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 033881 号

普通高中课程标准实验教科书　数学　1　必修　B 版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司
版　　次　2007 年 5 月第 3 版
印　　次　2018 年 7 月第 15 次印刷
开　　本　890 毫米 × 1240 毫米　1/16
印　　张　9.75
字　　数　253 千字
定　　价　30.50 元

说　明

本套教师教学用书是依据《普通高中数学课程标准（实验）》和《普通高中课程标准实验教科书 数学（B版）》，由中学数学教材实验研究组组织编写的.

编写的原则是：

1. 努力体现B版教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这套教师教学用书的每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价.

本书课程目标确定的主要依据是，《普通高中数学课程标准（实验）》相关内容的教学要求. 考虑到教学的实际需要，对相关内容的教学要求作了一些调整. 教科书中，通过增加选修内容，增设"思考与讨论"和"探索与研究"等栏目，同时将练习和习题分成A、B两组，以达到不同的教学要求. 教师可根据实际情况，确定相应的教学要求.

在教材分析中，首先指出教材的编写特色，然后分析内容结构，给出课时分配建议，接着分小节给出教学建议.

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用. 另外，还设计了一些教学案例供教师参考.

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，检查学生学习本章内容的效果.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述. 希望教师在教学时努力贯彻这套教材的指导思想，体现各章编写的特色.

在教学中一定要贯彻"温故而知新"的原则. 数学知识的连贯性是十分强的，学生如果基础不好，继续学习就会有一些困难，也会因此丧失学好数学的信心. 所以在教材编写时，我们尽量降低了知识的起点，采取循序渐进的方式编排主要知识点，以此来帮助学生克服数学学习中的障碍，提高学生学习数学的兴趣.

B版教材把学习数学的思想方法放到首位. 教材中涉及到的数学方法有：（一）代数基本方法和技能（例如，设未知数列方程和解方程、待定系数法、配方法），（二）坐标法，（三）微分法等. 这些方法在教材中都得到了加强. 教师要重视这些基本数学思想方法的教学.

强调数形结合是本套教材的重要特色. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直观，形少数时难入微. 数形结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系、切莫分离！

这段话精辟地阐述了数与形之间的密切关系和相互作用. 教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

另外，B版教材还特别重视算法思想的渗透，培养学生用"通性、通法"思考问题的习惯. 为此，我们选用了科学计算软件Scilab来实现具体的算法. 希望教师能运用好这一工具，从而达到使用计算机

技术辅助教学的目的．同时，也希望教师能积极研究算法在数学教学中的作用和意义，为算法这一内容进入中学数学课堂贡献自己的力量．

数学1～5教师教学用书均附有两张光盘．一张内容是课堂实录，供教师教学时参考；另一张内容是为相关教学内容研制的课件（其中几何画板课件由北京20中学几何画板研究组协助制作），供教师教学时选用．数学3的课件光盘中还附有Scilab的安装程序，供大家使用．

本套教师教学用书的编写得到了山东省教学研究室、济南市教学研究室、潍坊市教学研究室、日照市教学研究室、山东省实验中学、山东师范大学附属中学等单位的大力协助，在此深表谢意．

由于时间紧，书中一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正．

我们的联系方式如下：

电　话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

中学数学教材实验研究组

目录

第一章 集合

第二章 函数

第三章 基本初等函数（Ⅰ）

第一章

集 合

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 了解集合的含义，会使用符号“$\in$”或“$\notin$”表示元素与集合之间的关系.

2. 能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法、特征性质描述法和Venn图法)描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

3. 理解集合的特征性质，会用集合的特征性质描述一些集合，如常用数集、解集和一些基本图形的集合等.

4. 理解集合之间包含与相等的含义，能识别一些给定集合的子集. 在具体情境中，了解空集和全集的含义.

5. 理解两个集合的交集和并集的含义，会求两个简单集合的交集与并集. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

6. 掌握有关的术语和符号($\cup$、$\cap$、$\subseteq$、$\supseteq$、$\not\subseteq$、$\not\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$\varnothing$等)，会用它们表达集合之间的关系和运算. 能使用Venn图表达集合之间的关系和运算.

（二）过程与方法目标

1. 通过实例，体会形成集合概念的过程，体会用集合语言表示数学概念、关系的简洁性和准确性.

2. 经历并体验使用最基本的集合语言表示有关的数学对象的过程与方法，发展运用数学语言进行交流的能力.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 通过大量实例，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义.

2. 探索利用直观图示理解抽象概念，体会数形结合的思想.

3. 在运用集合语言的过程中，逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度，学习用数学的思维方式解决问题、认识世界.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 把集合作为数学的基础语言来学习.

在小学和初中，数学课中使用的语言主要是自然语言，教学中经常要把数学中的符号语言翻译为自然语言让学生理解．但自然语言有一定的歧义性，有时也不够确切．高中数学中使用集合语言，就能简洁、准确地表达数学内容．发展学生运用数学语言进行交流的能力.

2. 按集合的创始人康托尔描述集合的要点来描述集合，即“把一些能够确定的、彼此又能区分的对象”看成一个“整体”，这个整体就是集合.

3. 康托尔集合论的重要贡献之一，是用概念的外延去理解内涵，即用集合理解性质，用集合之间的关系理解性质之间的关系．这章编写的重点是集合特征性质的描述以及集合运算所表达的逻辑含义．这样就可引导学生用集合之间的关系去理解小学、初中学过的一些数集合，图形集合之间的关系以及它们性质之间的关系.

集合中的基数概念、集合元素间的一一对关系、集合相等重要概念在编写时给予重视。

4. 整套教材都尽可能的用集合语言来描述．例如，函数的定义、几何体的特征性质与分类、数集与数轴、有序数对与直角坐标系中的点、曲线与方程、随机事件与集合等.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是集合的概念、表示方法和集合之间的关系与运算．全章共分两大节．第一大节，是集合与集合的表示方法．本节首先通过实例，引入集合与集合的元素的概念，接着给出空集的含义．然后，学习集合的两种表示方法(列举法和特征性质描述法)．第二大节，是集合之间的关系与运算．本节首先从观察集合与集合之间元素的关系开始，给出子集、真子集以及集合相等的概念，同时学习用维恩(Venn)图表示集合．接着，学习交集、并集以及全集、补集的初步知识.

本章的最后，安排了一篇介绍数学文化的阅读材料《聪明在于学习，天才由于积累——自学成才的华罗庚》．安排这篇阅读材料的主要目的是，培养学生的爱国主义精神和刻苦学习、勤奋钻研的精神.

2. 地位与作用

集合概念及其基本理论，称为集合论．是德国数学家康托尔(Cantor，G. F. L. P.，1845—1918)在19世纪末创立的，它是近代数学的基础．一方面，许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、

实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑等，都建立在集合论的基础上；另一方面，集合论及其反映的数学思想，在越来越广泛的领域中得到应用.

集合语言是现代数学的基本语言，通过学习、使用集合语言，有利于学生简洁、准确地表达数学内容. 高中数学课程只将集合作为一种语言来学习，学生将学会使用最基本的集合语言表示有关的数学对象，发展运用数学语言进行交流的能力.

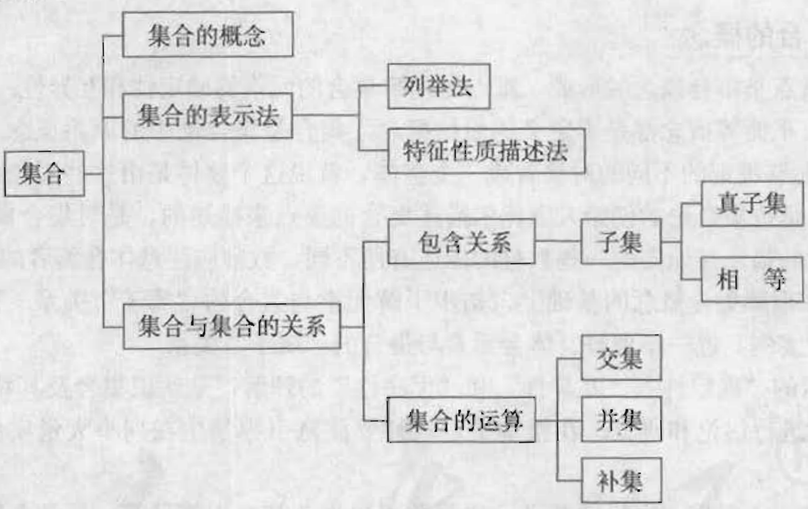
本章集合的初步知识是学生学习、掌握和使用数学语言的基础，是高中数学学习的出发点. 本套教材在编写时尽可能使用集合语言表述有关内容，这是因为康托尔集合论的重要贡献之一，是用概念的外延去理解内涵，即：用集合理解性质，用集合之间的关系理解性质之间的关系. 对于这一点，教师应从整个教材的架构出发，充分认识集合语言的地位，并在教学中引起足够的重视.

3. 重点与难点

本章的重点是集合的特征性质描述法及集合之间的相互关系. 只有掌握了集合的特征性质描述法及集合之间的相互关系，才有可能使学生简洁、准确地表达数学对象和结构，更好地使用数学语言进行交流，进而培养学生运用集合的观点研究和处理数学问题的能力.

本章的难点是使用集合的特征性质描述集合的逻辑含义. 学生从本章正式开始学习集合知识，其中包含了比较多的新概念，还有相应的新符号，有些概念、符号对初学者容易混淆，这些因素都可能给学生的学习带来一定的困难.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 6 课时，具体分配如下(仅供参考)：

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念	1 课时
1.1.2 集合的表示方法	1 课时

1.2 集合之间的关系和运算

1.2.1 集合之间的关系　　1 课时

1.2.2 集合的运算　　2 课时

小结与复习　　1 课时

（四）教学建议

建议让学生阅读主编寄语和章末《聪明在于学习，天才由于积累——自学成才的华罗庚》一文，启发学生学习数学的积极性.

集合是一个不加定义的概念，教学中应结合学生的生活经验和已有的数学知识，通过列举丰富的实例，使学生理解集合的含义. 学习集合语言的最好方法是运用，在教学中，要创设学生运用集合语言进行表达和交流的情景和机会，以使学生在实际运用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，进行相互转换并掌握集合语言. 在关于集合之间的关系和运算的教学中，使用 Venn 图是重要的. Venn 图有助于学生学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言.

1.1　集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念

1. 本小节的重点是集合概念的形成，难点是理解集合的元素的确定性和互异性.

2. 点、直线、平面等概念都是不定义的原始概念. 集合是集合论中的原始概念. 教科书中给出的“一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合（或集）”这句话，是按集合论的创始人康托尔描述集合的要点来描述的，是对集合概念的描述性说明. 本教材对集合概念的描述与原先的一些教材的描述有所不同，教师应注意体会编者的意图.

3. 本小节要在理解集合概念的基础上，初步了解元素与集合的“属于”关系. 要从学生熟悉的知识入手，通过大量实例，进一步理解、体会元素与集合的“属于”关系.

4. 对集合元素的“确定性”、“互异性”和“无序性”的理解，是认识集合及其特征性质所必需的，因此，有必要在此进行讨论和研究. 在教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流.

5. 了解有限集、无限集、空集的意义，掌握常用数集及其专用符号等，是学会用集合语言表达数学对象所必需的基本知识. 因此教学中教师要注意引导学生，自己举出各种集合的例子，进一步感受集合语言在描述客观现实和数学对象中的意义.

6. 对教科书中给出的常用数集的符号，应注意以下两点：

自然数集与非负整数集是相同的，也就是说，自然数集包含 0；

非负整数集内排除 0 的集，表示成 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$. 这就是我们常说的正整数集.

国家标准定义自然数集 $\mathbf{N}$ 含有元素 0，从数学角度看，有其积极意义：一方面，$0\in\mathbf{N}$ 后，可以建立集合的元素个数组成的集合与自然数集 $\mathbf{N}$ 的一一对应关系. 另一方面，0 是十进位制数$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$中最小的数，有了 0，减法运算 $a-a$ 仍属于 $\mathbf{N}$，其中 $a\in\mathbf{N}$.

1.1.2 集合的表示法

1. 本小节的重点是集合的表示法，难点是对集合的特征性质的理解以及运用特征性质描述法正确的表示一些简单的集合.

2. 本小节要注意体会集合的特征性质. 了解集合的特征性质，是为了使学生正确的观察、把握集合的元素构成与集合的特征性质的关系，从而可以更准确地认识集合. 因此，教学中应通过列举适量的例子，引导学生进行讨论和交流，并创设适当的情景，让学生自主探索一些常见的集合的特征性质.

3. 了解集合的表示方法——列举法和特征性质描述法，是学会用集合语言表达数学对象所必需的基本知识. 因此教学中教师要注意引导学生通过实例，从观察分析集合的元素入手，选择合适的方法表示集合. 注意引导学生区分两种表示集合的方法.

4. 学习集合语言最好的方法是运用，在教学中，要创造机会让学生运用集合的特征性质描述一些集合，如数集、解集和一些基本图形的集合等. 在运用中逐步学会用集合的语言表示有关的数学对象，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义，初步发展运用数学语言的能力，学习从数学的角度认识世界.

5. 本小节列举法和特征性质描述法所使用的集合记法，依据的是国家标准中如下的规定：

符号	应用	意义或读法	备注及示例
$\{,\cdots,\}$	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	诸元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的集	也可用$\{x_i, i\in I\}$，这里的 I 表示指标集.
$\{\mid\}$	$\{x\in A \mid p(x)\}$	使命题 $p(x)$为真的 A 中诸元素之集	若从前后关系来看，集 A 已经很明确，则可用$\{x \mid p(x)\}$来表示，如$\{x\in \mathbf{R} \mid x\leqslant 5\}$可表示为 $\{x \mid x\leqslant 5\}$.

此外，$\{x\in A \mid p(x)\}$有时也可以写成$\{x\in A : p(x)\}$或$\{x\in A;\ p(x)\}$.

6. 列举法和特征性质描述法各有优点，应根据具体情况确定采用哪种表示方法. 要注意，无限集一般不宜采用列举法，除非集合元素呈现一定的规律，在不易发生误解的情况下，才可列出几个元素作为代表元素，其他元素用省略号表示. 例如，自然数集 $\mathbf{N}$ 可表示为$\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. 否则，由于不能将无限集中的元素一一列举出来，元素又无规律，那么没有列举出来的元素往往难以确定.

7. 在几何中，通常用大写字母表示点(元素)，用小写字母表示点的集合，在学习、使用过程中应注意区别. 如“在平面 α 内，线段 AB 的垂直平分线”是一个“点集”，可表示为$\{点\ P\in\alpha \mid PA=PB\}$. 其中“平面 α”也是一个点集.

8. 本小节文末的“思考与讨论”中，第(1)小题的特征性质 $p(x)$可以是 $x^2=1$ 或写成$|x|=1$；第(2)小题可用“$AB \underline{\mathbin{/\!/}} CD$”或“$AB\parallel CD$ 且 $AD\parallel BC$”等描述$\square ABCD$ 的特征性质.

1.2 集合之间的关系和运算

1.2.1 集合之间的关系

1. 本小节的重点是子集的概念，难点是元素与子集、属于与包含之间的区别.

2. 本小节要注意体会集合之间的包含关系，理解集合之间包含与相等的含义. 教师要注意引导学

生，通过具体实例讨论、探究集合之间的“包含”与“不包含”的区别，通过创设情景引导学生分析，使学生能初步识别给定集合的子集，并将“包含”关系进一步细化，分为“真包含”和“相等”关系.

3. 对使用 Venn 图表达集合及其关系的方法的了解，是探索利用直观图示理解抽象的集合概念及其关系所必需的，因此，有必要在此进行讨论和研究，引导学生使用 Venn 图表示任意两个集合之间的关系(包含、不包含、相等)以及三个集合的包含关系.

4. 掌握包含与相等的有关术语、符号($\subseteq$、$\supseteq$、$\nsubseteq$、$\not\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$)，并会使用它们表达集合之间的关系. 通过使用集合语言，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义，学习用数学的思维方式去认识世界、尝试解决问题，逐步培养学生实事求是、扎实严谨的科学态度.

5. 在开始接触子集与真子集的符号时，要提醒学生注意这些符号的方向不要搞错. 例如，$A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是同义的，$A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 是不同的.

6. 要注意区分一些容易混淆的符号.

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 表示元素与集合之间的从属关系，例如，$1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的包含关系，例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地，a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合. 例如，$1\in\{1, 2, 3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1, 2, 3\}$ 等，不能写成 $1\subseteq\{1, 2, 3\}$，$0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1, 2, 3\}$.

(3) $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的区别：$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合，因此，$\varnothing\subseteq\{0\}$，不能写成 $\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

7. 本册教材中，“交、并、补”等概念的表述均避免了使用“或、且、非”等逻辑联结词，这一点教师要在教学中特别注意.

8. 本小节“思考与讨论”中，$A\subseteq B$. 例如，$x>2\Rightarrow x>1$，有 $\{x \mid x>2\}\subseteq\{x \mid x>1\}$.

1.2.2 集合的运算

1. 本小节教学重点是集合的交、并、补运算，难点是补集运算.

2. 本小节要注意体会两个集合之间的“交”和“并”，体会两个集合的交集和并集是由什么样的元素所构成，引导学生通过小组合作学习等方法进行讨论，利用 Venn 图表示两个集合之间的关系的各种情况.

3. 了解全集的意义，体会补集的概念，通过实例分析讨论给定集合中一个子集的补集的含义，会求集合中给定子集的补集.

4. 掌握有关集合的术语和符号，并会用它们正确地表示集合的运算. 借助 Venn 图和具体实例，探究、讨论集合之间的交、并、补的运算规律和内在联系. 进一步体会运用集合语言交流的感受.

5. 通过图形(Venn 图)语言的使用，探索利用直观图示理解抽象概念的意义. 通过使用集合语言，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义，学习用数学的思维方式去认识世界、解决问题，培养学生实事求是、扎实严谨的科学态度.

6. 要比较全面地表示两个集合 A 与 B 之间的关系，应充分利用 Venn 图（图 1-1）：

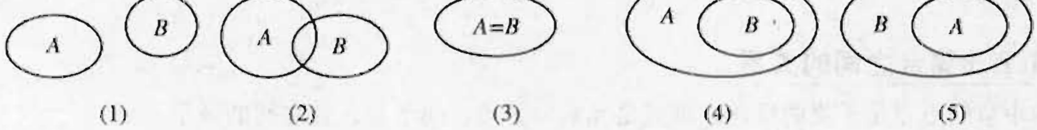


图 1-1

7. 关于补集. 国家标准规定，集合 A 中子集 B 的补集或余集记为 $\complement_A B$，这里的“$\complement$”是一个专门的符号，补集的英文是 complementary set. 如果行文中集合 A 已经很明确，则可以省去符号 A，而记作 $\complement B$.

与补集相关的概念是集合的差，教科书中没有这个概念. 集合 A 与集合 B 的差或集合 A 减去集合 B 记为 $A \setminus B$，即 $A \setminus B=\{x \mid x\in A, 且\ x\notin B\}$.

要注意，上式等号右边与补集定义中的式子类似，但意义不同. 在 $\complement_A B$ 中，要求 B 是 A 的子集；在 $A \setminus B$ 中，B 不一定是 A 的子集. 当 B 是 A 的子集的时候，也可以写成 $\complement_A B=A \setminus B$.

8. 小学和初中，数学课堂中使用的语言主要是自然语言，经常要把数学课中的符号语言翻译为自然语言让学生理解，但自然语言有一定的歧义性，有时也不够确切. 高中数学中经常使用集合语言，集合语言能简洁、准确地表达数学内容，有利于发展学生运用数学语言进行交流的能力. 但是，教师在安排训练时，也要把握一定的分寸，不提出过高要求. 例如，集合有关性质的证明，一般不要求学生掌握.

三、拓展资源

（一）集合中元素的个数

在现实生活中，经常遇到有关集合中元素的个数问题. 下面我们通过例子来研究这类问题.

1. 有限集合

在研究集合个数时我们通常把有限集合 A 中元素的个数记作 card(A). 例如，设 $A=\{a, b, c\}$，则 card$(A)=3$. 有限集合中元素的个数，我们通常可以数出来.

对于任意两个有限集合 A、B，我们可以通过下面的例子研究 card$(A\cap B)$，card(A)，card(B)，card$(A\cup B)$之间的关系.

例如，学校举办田径运动会，某班级有 8 名同学参赛，又举办球类运动会，这个班级有 12 名同学参赛，两次运动会都参赛的同学有 3 人. 两次运动会中，这个班共有多少名同学参赛？

分析：设 A 为田径运动会参赛的学生的集合，B 为球类运动会参赛的学生的集合，那么 $A\cap B$ 就是两次运动会都参赛的学生的集合，$A\cup B$ 就是所有参赛的学生的集合.

如图 1-2，在相应于 $A\cap B$ 的区域里先填上 3(card$(A\cap B)=3$)，再在 A 中不含 $A\cap B$ 的区域里填上 5(card$(A)-$card$(A\cap B)=5$)，在 B 中不含 $A\cap B$ 的区域里填上 9(card$(B)-$card$(A\cap B)=9$)，最后将这三部分中的数加起来得 17，即 card$(A\cup B)=17$.

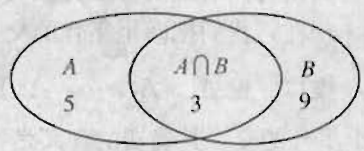


图 1-2

容易看出：card$(A\cup B)=$card$(A)+$card$(B)-$card$(A\cap B)$.

上述图解法对于解比较复杂的问题，例如涉及三个以上集合的并、交的问题，更能显出它的优越性. 通过具体的例子，利用图解法，可以得出三个有限集合 A、B、C 的并集中元素的个数的公式：

$\text{card}(A\cup B\cup C)$

$=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(A\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$.

2. 无限集合

有限集合中元素的个数，我们可以一一数出来．而对于无限集合中元素的个数，我们不能一一数出来．但是，对于一些无限集，我们可以采用“一一对应”的方法，比较两个无限集中元素的个数，例如：

$$\begin{array}{l} A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\} \\ \quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow \\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\} \end{array}$$

其中1与2，2与4，…，n与$2n$对应，可见，A，B两集合的元素个数是一样多的．同时，又可以看出，集合B的所有元素都是集合A的元素，即$B\subseteq A$．这就是说，对于无限集合A，其无限子集B中元素的个数可与集合A中元素的个数一样多．

（二）集合的运算

我们在研究集合的关系时，也要考虑集合之间能否进行运算，以及如何进行运算的问题．

关于集合的交、并、补三种运算，如下的基本运算律成立：

定理 若A，B，C为集合，则

（1）等幂律成立，即$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

（2）交换律成立，即$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（3）结合律成立，即$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（4）分配律成立，即$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$

（5）De Morgen 律成立，即$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$，

$$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B.$$

以下我们只证明一个等式，证明(3)中的第二式．

证明：设$x\in(A\cap B)\cap C$，按定义，$x\in A\cap B$且$x\in C$，也就是$x\in A$且$x\in B$且$x\in C$，由此得$x\in A$且$x\in B\cap C$，由交集的定义得$x\in A\cap(B\cap C)$，这就证明了$(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$．同理可证$(A\cap B)\cap C\supseteq A\cap(B\cap C)$．两者综合起来得

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

其余各式的证明都是类似的，留给读者去证明．

现在，我们把两个集合的交与并推广到多个集合的情况．

推广 设A_1，A_2，…，A_n是n个集合，我们用记号$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示这$n$个集合的并，用记号$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示这$n$个集合的交，其确切的含义是：

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n&=\{x\mid \text{至少存在某个}\ j,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \text{使得}\ x\in A_j\}\\&=\{x\mid \text{在}\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\ \text{中至少有一个集合含有}\ x\};\end{aligned}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid \text{对一切}\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x\in A_i\}$$

$=\{x \mid x$ 属于一切 A_i，$i=1, 2, \cdots, n\}$.

例 1 设 A, B, C, D 都是集合，证明 $A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$.

证明：利用结合律和分配律，有

$$
\begin{aligned}
A\cap(B\cup C\cup D) &= A\cap(B\cup(C\cup D))=(A\cap B)\cup(A\cap(C\cup D)) \\
&=(A\cap B)\cup((A\cap C)\cup(A\cap D)) \\
&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D).
\end{aligned}
$$

例 2 设 $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$C=\{1, 4\}$，$D=\{2, 3, 4\}$，求

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D).$$

解：利用上例中的公式有

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)=A\cap(B\cup C\cup D) \\
&=\{0, 1, 2, 3, 4\}\cap\{1, 2, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4\}.
\end{aligned}
$$

分配律中的两个公式，都可以加以推广.

设 A，B_1，B_2，…，B_n 都是集合，那么

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)=(A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\cdots\cap(A\cup B_n),$$
$$A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n).$$

主要参考文献：

1. 高夯. 分析学. 高等教育出版社，2001.

2. 欧阳光中. 集合和映射. 人民教育出版社，1978.

（三）集合中的悖论——罗素悖论

集合论作为纯粹数学的一个分支是近一百多年的事，他的创始人是德国著名的数学家康托尔(1845—1918). 1874 年他发表了一篇《关于实代数数所组成的集合的一个性质》的论文，可以说是研究现代集合论的第一篇论文. 然而，究竟什么是集合，虽然在我们的日常生活和工作中，集合的概念是不言自明的，但如何给它一个科学的定义，这确是一个困难的问题. 早在一百多年前，康托尔本人就知道这一点，并有一些数学家举了不少例子，说明凭借直观经验建立起来的集合的概念很有问题. 其中一个很有名的例子是英国哲学家和数学家罗素(1872—1970)所给出的，在集合论中被命名为罗素悖论.

现在我们先讲一个有趣的问题，它与数学没有直接关系，但他的思想结构却和罗素悖论有相似之处. 这里不妨用作引子——“理发师的头谁剃?”

一个村子有一个理发师. 在这个村子里订了一条不可违背的法律：凡是自己不替自己剃头的人必须由这个理发师剃. 现在要问：这个理发师的头由谁去剃? 从逻辑上讲，只有两种可能性，理发师的头由别人剃，或由自己剃. 现在深入分析如下：

如果是第一种可能性，理发师的头由别人剃，这意味着理发师自己不替自己剃，按照法律，它的头就应该由理发师剃，这和第一种可能性矛盾.

如果是第二种可能性，理发师的头由自己剃，换句话说，这个理发师属于自己不替自己剃头的人，这又和第二种可能性矛盾.

这样一来，便产生了一个悖论，理发师的头由谁剃呢? 由别人剃，不行，由自己剃，也不行，这真

是左右为难了. 同样，直观的集合概念也会产生这种左右为难的事情.

罗素讲了这样的例子.

把所有的集合分成两类：对一个集合 A，如果 $A\in A$(即 A 本身是 A 的一个元素)，我们就说 A 是第一类的集合；凡不是第一类的集合，就说它是第二类的集合.

现在，我们设 Q 是由所有第二类的集合所组成的集合，即 $Q=\{A|A\notin A\}$. 用通常的话来说就是：Q 是由具有性质“$A\notin A$”的那些集合 A 所组成的. 我们要问：Q 是第一类的还是第二类的? 从逻辑上讲，回答这个问题只有两种可能性：Q 是第一类的，或者 Q 是第二类的.

如果 Q 是第一类的集合，即 $Q\in Q$，但由于 Q 中的任何元素 A 都具有性质“$A\notin A$”. 而如今 Q 是 Q 中的元素，亦必有“$Q\notin Q$”这一性质. 这就和 Q 是第一类的集合矛盾.

如果 Q 是第二类的集合，即 $Q\notin Q$，但由于凡具有性质“$A\notin A$”的集合都属于 Q，如今 $Q\notin Q$，这表明 Q 不具有“$Q\in Q$”的性质，故 Q 应该属于 Q，这又和 Q 是第二类的集合矛盾.

这真是左右为难，这就是著名的罗素悖论.

实际上，头一个公开发表(1897 年)的关于集合论的悖论是布拉里的最大序数悖论. 康托尔本人在 1895 年也已发现这个悖论，并于 1896 年写信告诉了希尔伯特：序数按照它们的自然顺序，形成一个良序集合，这个良序集合根据定义也有一个序数 Ω，这个序数 Ω 由定义应该属于这个良序集合. 可是由序数的定义，序数序列中任何一段的序数要大于这段之内的任何序数，因此，Ω 应该比任何序数都大，从而又不属于 Ω. 1899 年康托尔又发现了大基数悖论（请有兴趣的读者查阅胡作玄著《哲人科学家——康托尔》等有关资料）. 这些集合悖论都涉及到一些共同的东西——“所有”或“全体”：

(1) 所有集合的集合；

(2) 所有序数的集合；

(3) 所有基数的集合；

(4) 所有不是自身元素的集合.

看到它们之间的共性，康托尔认为，悖论容易消除，只要你不说“所有”. 这样就把集合论的悖论轻易地排除在集合论之外了.

罗素的悖论发表之后，接着又发现一系列的悖论(后来归于所谓语义悖论)：理夏尔(1862—1956)悖论、培里悖论、格瑞林和纳尔逊悖论等.

1926 年英国年轻数学家拉姆塞(1903—1930)把悖论区别为逻辑悖论(或谓词悖论、集合论悖论)及语义悖论(或认识论悖论). 他证明对于集合论悖论，简单类型论就足以消除. 这样在 1908 年罗素在原则上消除了悖论.

1908 年，策梅罗采用集合论公理化的方法来消除罗素悖论. 他不说什么是集合，而只讲从数学上怎样处理它们，他引进七条公理，从而消除悖论产生的条件. 尽管悖论已消除，但基础的矛盾仍没有解决，康托尔集合论产生的悖论引发了 20 世纪的基础大战. 在数学史上称为第三次数学危机.

自从策梅罗通过公理化的方法来消除集合论的悖论之后，集合论一直沿着公理化的道路发展. 如果说，朴素集合论(即康托尔集合论)为现代数学提供了一个适当的基础，那么公理集合论则形成一门相对独立的学科，其专门程度不亚于抽象代数及拓扑学.

数学家对于集合论公理系统抱有很大的希望，希望它们都显示自己的威力，证明(或否证)集合论中的两大难题：连续统假设与选择公理. 另一方面，证明公理系统是无矛盾的、独立的、甚至完备的.

1963 年，美国年轻数学家科恩(1934—　)石破天惊地证明，由集合论的公理系统，既推不出连

续统假设成立，也推不出连续统假设不成立，对选择公理也是如此．由于康托尔心爱连续统假设，可以把连续统假设成立的集合论称为康托尔集合论，而与之对立的集合论，称为非康托尔的集合论．与非欧几何的情形有点相似．更多的集合论专家更热衷于扩张集合论公理系统．公理系统代表一种限制，限制过严是为了防止悖论，但是把一部分数学也限制在外．限制过宽把大部分数学都弄进来，又恐怕出现矛盾．可以加进的新东西是建立更大更大的基数，现在，对它的研究已经成为一个极为专门的数学领域．

主要参考文献：

1. 欧阳光中．集合和映射．人民教育出版社，1978.

2. 胡作玄．哲人科学家——康托尔．福建教育出版社，1993.

四、教学案例

案例1：1.1.1 集合的概念

一、教学目标

1. 知识与技能

(1) 初步理解集合的含义，知道常用数集及其记法．

(2) 初步了解“属于”关系的意义．

(3) 初步了解有限集、无限集、空集的意义．

2. 过程与方法

(1) 通过实例，初步体会元素与集合的“属于”关系，从观察分析集合的元素入手，正确地理解集合．

(2) 观察关于集合的几组实例，并通过自己动手举出各种集合的例子，初步感受集合语言在描述客观现实和数学对象中的意义．

(3) 学会借助实例分析、探究数学问题(如集合中元素的确定性、互异性)．

3. 情感、态度与价值观

(1) 了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系．

(2) 在学习运用集合语言的过程中，增强学生认识事物的能力．初步培养学生实事求是、扎实严谨的科学态度．

二、教学重点

集合的概念．

三、教学方法

教师指导与学生合作交流相结合．通过提出问题、观察实例，引导学生理解集合的概念，分析、讨论、探究集合中元素表达的基本要求，并能依照要求举出符合条件的例子，加深对概念的理解、性质的掌握．

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
提出问题	一个百货商店，第一批进货是帽子、皮鞋、热水瓶、闹钟共计 4 个品种，第二批进货是收音机、皮鞋、尼龙袜、茶杯、闹钟共计 5 个品种，问一共进了多少品种的货？ 能否回答一共进了 $4+5=9$ 种呢？	学生回答(不能，应为 7 种)，然后教师和学生共同分析原因：由于两次进货共同的品种有两种，因此应为 $4+5-2=7$ 种. 从而指出： ……这好像涉及了另一种新的运算. ……	设疑激趣，导入课题.
复习引入	① 初中代数中涉及“集合”的提法. ② 初中几何中涉及“集合”的提法.	引导学生回顾，初中代数中不等式的解法一节中提到的有关知识： 一般地，一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称为这个不等式的解集. 几何中，圆的概念是用集合描述的.	通过复习回顾，引出集合的概念.
概念形成	第一组实例(幻灯片一)： (1) “小于 10” 的自然数 0，1，2，3，…，9； (2) 满足 $3x-2>x+3$ 的全体实数； (3) 所有直角三角形； (4) 到两定点距离的和等于两定点间的距离的点； (5) 高一(1)班全体同学； (6) 参与中国加入 WTO 谈判的中方成员. 1. 集合： 一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合（或集). 2. 集合的元素（或成员)： 即构成集合的每个对象（或成员).	教师提问：① 以上各例（构成集合）有什么特点？请大家讨论. 学生讨论交流，得出集合概念的要点，然后教师肯定或补充. ② 我们能否给出集合一个大体描述？…… 学生思考后回答，然后教师总结. ③ 上述六个例子中集合的元素各是什么？ ④ 请同学们自己举一些集合的例子.	通过实例，引导学生经历并体会集合（描述性）概念形成的过程，引导学生进一步明确集合及集合元素的概念，会用自然语言描述集合.
概念深化	第二组实例（幻灯片二)： (1) 参加亚特兰大奥运会的所有中国代表团的成员构成的集合； (2) 方程 $x^2=1$ 的解的全体构成的集合； (3) 平行四边形的全体构成的集合； (4) 平面上与一定点 O 的距离等于 r 的点的全体构成的集合. 3. 元素与集合的关系	教师要求学生看第二组实例，并提问：①你能指出各个集合的元素吗？②各个集合的元素与集合之间是什么关系？③例(2)中数 0，-2 是这个集合的元素吗？ 学生讨论交流，弄清元素与集合之间是从属关系，即“属于”或“不属于”关系.	引入集合语言描述集合.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	集合通常用英语大写字母 A，B，C……表示，它们的元素通常用英语小写字母 a，b，c……表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$，读作“a 属于 A”. 如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$，读作“a 不属于 A”.		
	4. 集合的元素的基本性质： (1) 确定性：集合的元素必须是确定的. 不能确定的对象不能构成集合. (2) 互异性：集合的元素一定是互异的. 相同的几个对象归于同一个集合时只能算作一个元素.	教师提问：“我们班中高个子的同学”、“年轻人”、“接近数 0 的数”能否分别组成一个集合，为什么？ 学生分组讨论、交流，并在教师的引导下明确： 给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了. 另外，集合的元素一定是互异的. 相同的对象归于同一个集合时只能算作集合的一个元素.	通过讨论，使学生明确集合元素所具有的性质，从而进一步准确理解集合的概念.
概念深化	第三组实例(幻灯片三)： (1) 由 x^2、$3x+1$、$2x^2-x+5$ 三个式子构成的集合. (2) 平面上与一个定点 O 的距离等于 1 的点的全体构成的集合. (3) 方程 $x^2=-1$ 的全体实数解构成的集合. 5. 空集：不含任何元素的集合，记作 $\varnothing$. 6. 集合的分类：按所含元素的个数分为有限集和无限集. 7. 常用的数集及其记号(幻灯片四). **N**：非负整数集(或自然数集). $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$：正整数集(或自然数集去掉 0). **Z**：整数集. **Q**：有理数集. **R**：实数集.	教师要求学生观察第三组实例，并提问：它们各有元素多少个？ 学生通过观察思考并回答问题. 然后，依据元素个数的多少将集合分类. 让学生指出第二组实例中，哪些是有限集？哪些是无限集？…… 请同学们熟记上述符号及其意义.	通过观察实例，发现集合的元素个数具有不同的类别，从而使学生感受到有限集、无限集、空集存在的客观意义.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1　已知由1，x，x^2 三个实数构成一个集合，求 x 应满足的条件. 解：根据集合元素的互异性，得 $\begin{cases} x\neq 1 \\ x^2\neq 1 \\ x\neq x^2 \end{cases}$ 所以 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\pm 1$，$x\neq 0$. 课堂练习：教材第4～5页练习A第1～3题. 例2　用∈、∉填空. ① π ____ **Q**；② $\sqrt{3}$ ____ **Z**；③ $\sqrt{3}$ ____ **R**； ④ 0 ____ **N**；⑤ 0 ____ $\mathbf{N}^*$；⑥ 0 ____ **Z**.	学生分析求解，教师板书. 幻灯片五（练习答案），反馈矫正.	通过应用，进一步理解集合的有关概念、性质.
归纳总结	① 请同学们回顾总结，本节课学过的集合的概念等有关知识； ② 通过回顾本节课的探索学习过程，请同学们体会集合等有关知识是怎样形成、发展和完善的.	师生共同总结——交流——完善.	引导学生学会自己总结；让学生进一步（回顾）体会知识的形成、发展、完善的过程.
布置作业	①教材第5页，练习B第1，2题. ②预习教材第5～7页“集合的表示方法”.	由学生独立完成.	巩固深化；预习下一节内容，培养自学能力.

案例2：1.1.2　集合的表示方法

一、教学目标

1. 知识与技能：使学生掌握常用的集合表示方法，能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题；

2. 过程与方法：发展学生运用数学语言的能力，感受集合语言的意义和作用，学习从数学的角度认识世界；

3. 情感、态度与价值观：通过合作学习，培养学生的合作精神.

二、教学重点、难点

重点是集合的表示方法；难点是集合的特征性质的概念，以及运用特征性质描述法表示集合.

三、教学方法

在学生阅读并了解整节课内容的基础上，采用实例归纳，自主探究，合作交流等方法. 教学中通过列举例子，引导学生进行讨论和交流，并通过创设情境，让学生自主探索一些常见集合的特征性质.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	集合、空集、有限集和无限集分别是怎样定义的？集合元素与集合的关系是什么？集合的元素具有哪些特征？常用数集的记法是什么？	教师提问，学生回答.	通过复习回顾，为引入集合的表示方法打下基础.
提出问题	集合的表示方法有哪些？分别适用于什么情况？	学生阅读课本，先独立思考，再互相讨论，教师巡视.	锻炼学生的自学和交流能力.
概念形成	表示一个集合，关键是确定它包含哪些元素，常用的表示方法有两种： 1. 列举法：如果一个集合是有限集，元素又不太多，常常把集合的所有元素都列举出来，写在花括号“{}”内表示这个集合，这种表示集合的方法叫做列举法.	学生回答，师生共同归纳. 教师用多媒体课件演示具体内容.	锻炼学生归纳、总结能力.
概念深化	使用列举法时应注意： (1) 适用情况： ①集合是有限集，元素又不太多. ②集合是有限集，元素较多，有一定的规律，可列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示. ③有规律的无限集. (2) 用列举法表示集合时，不必考虑元素的前后顺序，要注意不重不漏.	教师说明： (1) 24的所有正因数构成的集合可表示为 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. 不大于100的自然数全体构成的集合可表示为 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 100\}$. 自然数集**N**可表示为 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. (2) 集合$\{1, 2\}$与$\{2, 1\}$表示同一个集合.	进一步加深学生对列举法的理解，使学生能够熟练使用列举法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1　分别用列举法表示下列集合： (1) 我国现有的直辖市组成的集合 A； (2) 小于 40 的所有质数组成的集合 B； (3) 前 100 个自然数组成的集合 C； (4) 正的奇数集 D.	学生独立思考并回答.	
概念形成	2. 特征性质描述法：如果在集合 I 中，属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$，而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$，则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个特征性质．于是，集合 A 可以用它的特征性质 $p(x)$ 描述为 $\{x\in I \mid p(x)\}$， 它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的．这一表示方法，叫做特征性质描述法.	教师提问，学生回答，详细说明什么叫特征性质. 教师用多媒体课件演示.	加深学生对特征性质的理解.
概念深化	使用特征性质描述法时注意： (1) 特征性质必须明确. (2) 若元素范围为 $\mathbf{R}$，“$\in\mathbf{R}$”可以省略不写. (3) 有的集合也可以直接写出元素名称，并用花括号括起来表示这类元素的全体.	教师运用多媒体课件演示并加以说明．举例：由不等式 $x-3>2$ 的所有解组成的集合（即不等式 $x-3>2$ 的解集），可以表示为： $\{x\in\mathbf{R} \mid x-3>2\}$； 例如，$\{x \mid x-3>2\}$ 即 $\{x\in\mathbf{R} \mid x-3>2\}$. 例如，{奇数}表示所有奇数组成的集合，但不能写成{奇数集}.	加深学生对特征性质描述法的理解，提高探索简单集合特征性质的能力.
应用举例	例2　分别判断下列各组集合是否为同一个集合. (1) $A=\{x \mid x+3>2\}$， $B=\{y \mid y+3>2\}$； (2) $A=\{(1,2)\}$，$B=\{1,2\}$， (3) $M=\{(x,y) \mid y=x^2+1\}$， $N=\{y \mid y=x^2+1\}$； (4) $\mathbf{R}$，实数集，{实数集}. 例3　用列举法表示下列集合. (1) $A=\{x\in\mathbf{N} \mid 0<x\leqslant 5\}$； (2) $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$.	学生讨论交流后，教师提问，学生口答结果并说明原因.	巩固所学知识，提高学生的判断能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例4　用特征性质描述法表示下列集合： (1) $\{-1, 1\}$； (2) 大于3的全体偶数组成的集合； (3) 在平面 α 内，线段 AB 的垂直平分线. 思考与讨论： (1) 哪些性质可作为集合 $\{x\in\mathbf{N} \mid 0<x\leqslant 5\}$ 的特征性质？ (2) 平行四边形的哪些性质，可用来描述所有平行四边形构成的集合？	学生讨论交流并回答.	加深对特征性质描述法的理解和掌握.
课堂练习	教科书第7~8页练习A，B.	学生回答.	进一步巩固所学知识.
归纳小结	1. 列举法； 2. 特征性质描述法.	学生回忆本节收获，师生共同完成小结.	梳理知识体系，培养学生的归纳、概括能力.
布置作业	教材第8~9页习题1-1 A，B.		

案例3：1.2.1　集合之间的关系

一、教学目标

1. 知识与技能

(1) 理解集合之间包含与相等的含义.

(2) 能识别给定集合的子集.

(3) 能使用 Venn 图表达集合之间的关系.

2. 过程与方法

(1) 通过复习元素与集合之间的关系，对照实数的相等与不相等的关系，联系元素与集合之间的从属关系，探究集合之间的包含与相等关系.

(2) 初步经历使用最基本的集合语言表示有关的数学对象的过程，体会集合语言，发展运用数学语言进行交流的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1) 了解集合的包含、相等关系的含义，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义.

(2) 探索直观图示（Venn 图）对理解抽象概念的作用.

二、教学重点、难点

(1) 重点是子集的概念.

(2) 难点是元素与子集、属于与包含之间的区别.

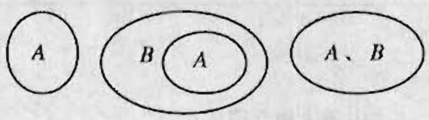
三、教学方法

讲、议结合法. 通过实例探索集合之间的（“包含”与“相等”）关系，同时引出子集的概念，对比集合的包含与相等关系，得出真子集的概念以及子集与真子集的有关性质.

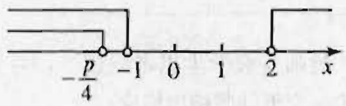
四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问	①元素与集合之间的关系是什么？ ②举例说明集合有哪些表示方法.	学生回顾.	巩固旧知识，引出新知识.
提出问题	研究集合与集合之间的关系.	引语：数之间存在着相等与不相等关系，元素与集合之间存在属于与不属于关系，那么两个集合之间有什么关系呢？	
概念形成	问题一： 观察实例（幻灯片一）： (1) $A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,5,6\}$； (2) $C=\{x\mid x$是长方形$\}$， $D=\{x\mid x$是平行四边形$\}$； (3) $P=\{x\mid x$是菱形$\}$，$Q=\{x\mid x$是正方形$\}$； (4) $S=\{x\mid x>3\}$，$T=\{x\mid 3x-6>0\}$； (5) $E=\{x\mid (x+1)(x+2)=0\}$，$F=\{-1,-2\}$. 问在每个例子的两个集合中，前一个集合的元素与后一个集合的元素之间有什么关系？ 幻灯片二： 1. 子集：如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 含于 B”(或“B 包含 A”). 如果集 P 中存在不是集 Q 的元素，那么集 P 不包含于 Q，或 Q 不包含 P. 记作 $P\nsubseteq Q$ 或 $Q\nsupseteq P$(如例(3)).	教师引导学生思考问题一，分组讨论，然后回答问题. 教师与学生共同发现总结：在(1)(2)(4)(5)中“前一个集合”中的元素都是“后一个集合”中的元素. 从而归纳出子集的定义. 教师提问（引导学生思考、讨论、交流并回答）：①请各举两个子集的例子，并验证是否符合子集的定义. ②$A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是否具有同样含义？$A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 呢？ ③能否利用元素与集合的“属于”关系来判断集合与集合的“包含”与“不包含”关系？请大家分组讨论并回答.	引导学生观察、分析、归纳，总结概括出“子集”的定义，引导学生归纳出如下性质： (1)$A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 具有同样的含义； (2)“包含”可表达成：对任意 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）；

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	依据定义，$A\subseteq A$. 规定：$\varnothing\subseteq A$.	师：由于空集中不含任何元素，所以我们规定：空集是任何集合的子集，即$\varnothing\subseteq A$(任意). 请填空：$\varnothing$____ $\{0\}$.	(3)“不包含”可表述为：若A中至少存在一个$x\notin B$，则$A\nsubseteq B$(或$B\nsupseteq A$).
概念深化	问题二：比较问题一中例(1)(2)(4)(5)中两个集合的关系有什么异同？ 幻灯片三： 2. 真子集：如果$A\subseteq B$，且B中至少有一个元素不属于A，那么A叫集合B的真子集，记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$. 3. 集合的相等：一般地，如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，反过来集合B的每一个元素也都是集合A的元素，就说集合A等于集合B，记作$A=B$. 即$A\subseteq B$，$B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$. 4. 集合的维恩(Venn)图表示法： 我们常用平面内的封闭曲线的内部表示集合. 这个区域通常叫做维恩(Venn)图.  (1)　(2) $A\subsetneqq B$　(3) $A=B$ 练习：问题一的每个例子中，两个集合的关系能否用Venn图表示出来？请试一试. 练习：**N**、**Z**、**Q**、**R**四个数集之间是什么关系？请你用Venn图表示出来. 5. 空集是任何非空集合的真子集. 即 $\varnothing\subsetneqq A$（非空）. 6. “包含”关系的传递性： $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$； $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则$A\subsetneqq C$.	教师要求学生思考问题二，并分组讨论、交流并归纳出结论： 例(1)中，A中元素1，3均属于B，但B中的元素5，6不在A中. 例(2)(4)与例(1)相似，第二个集合中都有元素不在第一个集合中. 而例(5)中两个集合的元素完全相同，即“$E\subseteq F$”，也可以写成“$F\subseteq E$”. 因而，E和F应该可以叫做“相等”吧！ 这说明“包含”关系还可细分为两种，即“真包含”(如例(1)(2)(4))与“相等”(如例(5))关系. 教师讲解集合的维恩(Venn)图表示法. 学生讨论并做出练习. 教师要求学生将“包含”关系的传递性用Venn图表示出来. 学生解答.	引导学生进一步分析“子集”概念，从中得出真子集与相等两个概念. 通过应用引导学生体会Venn图对理解子集、真子集、相等等概念的作用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	教材第11～12页例1、例2. 例3　已知集合 $A=\{x\mid x<-1或x>2\}$，$B=\{4x+p<0\}$，当 $A\supseteq B$ 时，求实数 p 的取值范围. 解：$B=\left\{x\mid x<-\frac{p}{4}\right\}$，又 $A=\{x\mid x<-1或x>2\}$，且 $A\supseteq B$，所以 $-\frac{p}{4}\leqslant-1$，即 $p\geqslant4$.  	教师在讲解完例1后问：你能找出“元素个数”与“子集数目”之间的规律吗？ 请课后探究. 提醒学生注意： 在初中曾利用数轴表示过不等式，在此可以用来表示集合之间的关系……	通过应用进一步理解和巩固集合的子集、真子集等概念，逐步学习运用集合语言.
课堂练习	教材第13页练习A第1～4题.	幻灯片四（练习答案）.	反馈矫正.
归纳小结	① 子集、真子集、相等等概念，如何判断？ ② $\in$ 与 $\subseteq$、a 与 $\{a\}$、$\{0\}$ 与 $\varnothing$ 之间有何区别？ ③ 集合之间的包含关系等概念是怎样形成的，请回顾梳理一遍.	师生共同总结——交流——完善.	引导学生学会自己总结，让学生进一步（回顾）体会知识的形成、发展、完善的过程.
布置作业	① 教材第13～14页，练习B第1～4题； ② 教材第12页“思考与讨论”； ③ 预习教材第15～19页“集合的运算”.	由学生独立完成.	巩固深化；预习下一节内容，培养自学能力.

五、习题参考答案与提示

练习A（第4页）

1. （1）能.　（2）能.　（3）不能.　（4）能.
   （5）能.　（6）不能.　（7）能.　（8）能.

2. 自然数集，记作 **N**，是无限集；
整数集，记作 **Z**，是无限集；
有理数集，记作 **Q**，是无限集；
实数集，记作 **R**，是无限集.

3. (1) 不正确.　(2) 正确.　(3) 不正确.　(4) 不正确.
(5) 正确.　(6) 正确.　(7) 正确.　(8) 正确.

练习 B（第 5 页）

1. (1) $\notin$.　(2) $\in$.　(3) $\notin$.　(4) $\notin$.
(5) $\notin$.　(6) $\in$.　(7) $\in$.　(8) $\in$.

2. (1) 不正确.　(2) 不正确.　(3) 不正确.　(4) 正确.　(5) 不正确.

练习 A（第 7 页）

1. (1) $\{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.　(2) $\{-4, 4\}$.　(3) $\{5\}$.
(4) $\{-2, 2\}$.　(5) $\{1, 2, 3, 4\}$.　(6) {北京，上海，天津，重庆}.

2. (1) {城市 x | x是北京}.　(2) {x | x是偶数}.
(3) $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2-2x+3=0\}$.　(4) $\{x\in\mathbf{R} \mid x>3\}$.

练习 B（第 8 页）

1. (1) {m，a，t，h，e，i，c，s}.　(2) $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+5x+6=0\}$或$\{-2, -3\}$.
(3) {$x\in\mathbf{N}$ | $0\leqslant x<1\,000$，且 x 是奇数}.　(4) $\{x\in\mathbf{R} \mid x(x^2+2x-3)=0\}$或$\{0, 1, -3\}$.
(5) $\{x\in\mathbf{R} \mid |x|=3\}$或 $\{-3, 3\}$.

2. (1) {x | $x=3n+2$，且 $n\in\mathbf{Z}$}.　(2) {x | $1<x<100$，且 x 是质数}.
(3) {x | x是平行四边形}.

习题 1－1A（第 8 页）

1. (1) $\{2, 4, 6, 8\}$.　(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
(3) {x | x是 15 的正约数}或$\{1, 3, 5, 15\}$.　(4) {x | x是 15 的质因数}或$\{3, 5\}$.
(5) $\{-2, 2\}$.　(6) $\{-3, 3\}$.　(7) $\varnothing$.

2. (1) {1 月，3 月，5 月，7 月，8 月，10 月，12 月}.
(2) $\{x\in\mathbf{Z} \mid -3.5<x<12.8\}$.　(3) {$x$ | x是梯形}.
(4) {x | x是矩形}.　(5) $\varnothing$.

3. (1) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.　(2) $\{-5\}$.　(3) $\{1, 4\}$.　(4) $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. 有序实数对，$\{(x, y) \mid x-y=0\}$.

习题 1—1B（第 9 页）

1. (1) $\{-1, 1, -4, 2\}$.　　(2) $\{-2, 4\}$.　　(3) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. (1) $\{x\in \mathbf{N} \mid 0\leqslant x<10$, 且 x 是偶数$\}$.　　(2) $\{x \mid x=3^n, n\in \mathbf{N}_+\}$.

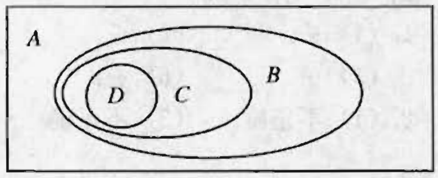
   (3) $\{x \mid x=\dfrac{2n-1}{2n}, n\in \mathbf{N}_+\}$.　　(4) $\{x \mid x=5n+2, n\in \mathbf{Z}\}$.
3. (1) 有限集.　　(2) 无限集.

   (3) 有限集.　　(4) 无限集.

练习 A（第 13 页）

1. (1) $\in$.　　(2) $\in$.　　(3) $\subsetneqq$.　　(4) $\supsetneqq$.

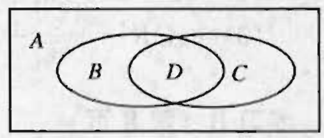
   (5) $\subsetneqq$.　　(6) $\subsetneqq$.　　(7) $=$.　　(8) $\supsetneqq$.
2. (1) $A\subsetneqq B$.　(2) $A\supsetneqq B$.　(3) $C=D$.
3. 提示：共 16 个. 略.
4. $A\supsetneqq B\supsetneqq C\supsetneqq D$.



（第 4 题）

练习 B（第 13 页）

1. (1) $=$.　　(2) $=$.　　(3) $\subsetneqq$.
2. (1) $E=F$.　(2) $H\subsetneqq G$.
3. $B\subsetneqq A$, $C\subsetneqq A$, $D=B\cap C$.
4. (1) (3) (6)对；(2) (4) (5)错.



（第 3 题）

探索与研究（第 14 页）

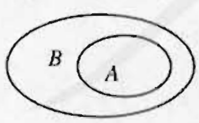
(1) 略.

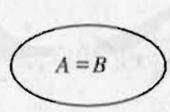
(2) 若集合中元素的个数为 n 个，则所有子集数目为 2^n 个.

练习 A（第 17 页）

1. (1) $\{3, 4\}$.　　(2) $\{1, 3, 4\}$.　　(3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (4) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.　　(5) $\{3, 4, 6\}$.　　(6) $\varnothing$.

   (7) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$.　　(8) $\{1, 3, 4, 6\}$.
2. $A\cap B=\{b, d\}$. $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$.
3. 

或 

显然 $A\cap B=A$, $A\cup B=B$.
4. $A\cap B=\{4\}$, $A\cup B=\{-4, -3, 4\}$.
5. $A\cup \mathbf{N}^*=\{x \mid x$ 是自然数$\}=\mathbf{N}$.

练习 B（第 18 页）

1. 成立.

2. $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{x\mid x$是斜三角形$\}$.

3. $A\cap B=\left\{\left(\frac{11}{13},\ -\frac{3}{13}\right)\right\}$.

4. 2^3 个；2^3 个.

探索与研究（第 18 页）

1. $\mathrm{card}(A\cup B)=24$.
2. $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

练习 A（第 19 页）

1. $\complement_U A=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\complement_U B=\{1,\ 2,\ 7,\ 8\}$.
2. $\complement_U A=\{x\mid x\geqslant 2\}$.
3. $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant -1$或$x\geqslant 1\}$，$\complement_U A\cap U=\complement_U A$，$\complement_U A\cup U=U=\mathbf{R}$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U=\mathbf{R}$
4. $\complement_U A=B$，$\complement_U B=A$.

练习 B（第 19 页）

1. $\complement_U A=\{3,\ 4,\ 6\}$，$\complement_U B=\{1,\ 6\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{6\}$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$.
2. $\complement_U A\cap B=B$，$\complement_U A\cup\complement_U B=U$，$\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x$是直角$\}$.
3. $\{x\mid x$是 10 的倍数$\}$.

习题 1—2A（第 20 页）

1. (1) 不正确.　　(2) 正确.　　(3) 正确.
   (4) 不正确.　　(5) 不正确.　　(6) 正确.
2. (1) $A\subseteq B$.　　(2) $B\subseteq A$.
3. (1) $A\cap B=\{3,\ 4\}$，$B\cap C=\{6,\ 7\}$，$A\cap C=\varnothing$.
   (2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$B\cup C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，
   $A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.
4.

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	$\underline{\varnothing}$	$\underline{\varnothing}$	$\underline{\varnothing}$
A	$\underline{\varnothing}$	$\underline{A}$	$\underline{A\cap B}$
B	$\underline{\varnothing}$	$\underline{B\cap A}$	$\underline{B}$

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	$\underline{\varnothing}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$
A	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A\cup B}$
B	$\underline{B}$	$\underline{B\cup A}$	$\underline{B}$

5. $A\cap B=\{x\mid x$是正方形$\}$.
6. $A\cap B=B$，$A\cup B=A$.
7. $A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.
8. $m=0$，或$\pm\sqrt{3}$（舍去± 1）.
9. (1) $\complement_U A=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\complement_U B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$，

$\complement_U A\cap \complement_U B=\{1, 2, 6\}$，$\complement_U A\cup \complement_U B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

(2) $A\cap B=\{4\}$，$\complement_U(A\cap B)=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$，$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup \complement_U B$；

$A\cup B=\{3, 4, 5, 7, 8\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{1, 2, 6\}$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap \complement_U B$.

习题 1－2B（第 20 页）

1. (1) $A\cap B\cap C=\{4\}$.　　(2) $A\cup B\cup C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

   (3) $(A\cap B)\cup C=\{0, 2, 4, 5, 6\}$.　　(4) $(A\cup B)\cap C=C=\{4, 5, 6\}$.

2. (1) 有限集.　(2) 无限集.　(3) 有限集.　(4) 有限集.

3. (1) $\in$.　(2) $\supseteq$.　(3) $\subseteq$.　(4) $\subseteq$.

4. (1) 5.　(2) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.　(3) 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39.

5. (1) $A\cap \complement_U B$；(2) $(A\cup B)\cap \complement_U(A\cap B)$(或$(\complement_U A\cap B)\cup(A\cap \complement_U B)$).

本章小结

III　巩固与提高（第 23 页）

1. (1) 非空有限集.　(2) 无限集.　(3) 无限集.　(4) 空集.　(5) 无限集.

2. (1) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.　(2) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.　(3) 略.

3. (1) $A=\{2, -8\}$.　(2) $B=\{1, 2, 3\}$.　(3) $C=\{-1, 5\}$.　(4) $D=\{0, 1, 2\}$.

4. $A\cap B=\{(6, 4)\}$.

5. (1) 如果$A=\varnothing$或$B=\varnothing$，则A与B无公共元素，即$A\cap B=\varnothing$.

   (2) 设任意$x\in A$，由于$A=A\cap B$，则$x\in A\cap B$. 即$x\in A$且$x\in B$，所以$x\in B$. 因此$A\subseteq B$.

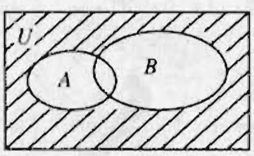
6. (1) 如果$A=\varnothing$，并且$B=\varnothing$，则A与B均不含任何元素，因此$A\cup B$中无任何元素，即$A\cup B=\varnothing$.

   (2) 如果$A\cup B=\varnothing$，说明A与B均不含任何元素. 即$A=\varnothing$，并且$B=\varnothing$.

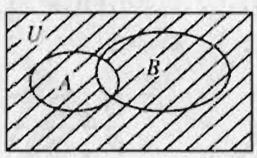
7. (1) A.　(2) B.　(3) B.　(4) U.　(5) C.　(6) C.

   (7) $\complement_U A\cap C$.　(8) A.　(9) B.　(10) $C\cap D$.　(11) C.

8. (1)



(2)



   (3) 略.

9. $A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{5, 6, 8\}$，$\complement_U A=\{2, 5, 6, 8\}$，

   $\complement_U B=\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$\complement_U A\cap \complement_U B=\{5, 6, 8\}$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap \complement_U B$.

   $A\cap B=\{1\}$，$\complement_U(A\cap B)=\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，

   $\complement_U A\cup \complement_U B=\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup \complement_U B$.

IV　自测与评估（第 24 页）

1. (1) {指南针，造纸术，火药，印刷术}，有限集.

(2) $\{(x,\ y)\mid x<0$，且 $y>0\}$，无限集.

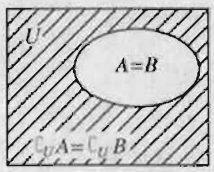
(3) $\{x\in\mathbf{R}\mid 2<|x|<3\}$，无限集.

2. $\varnothing$；$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{a,\ d\}$，$\{b,\ c\}$，$\{b,\ d\}$，$\{c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

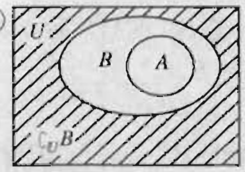
3. (1) $\{2,\ 4,\ 5\}$.　　(2) $\{1,\ 3,\ 4\}$.　　(3) $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$.　　(4) $\varnothing$.

(5) $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$.　　(6) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.　　(7) $\{4,\ 5\}$.　　(8) U.

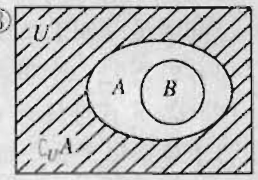
4. 共 5 种不同情形.

①


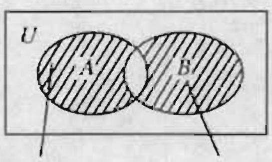
$A\cap\complement_U B=B\cap\complement_U A=\varnothing$

②


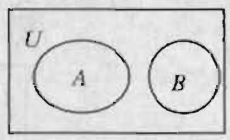
$A\cap\complement_U B=\varnothing$

③


$B\cap\complement_U A=\varnothing$

④


$A\cap\complement_U B$　　$B\cap\complement_U A$

⑤


$A=A\cap\complement_U B$，$B=B\cap\complement_U A$

5. (1) $A\cup B$ 中最多有 5 个元素，最少有 3 个元素.

(2) $A\cap B$ 中最多有 2 个元素，最少有 0 个元素.

6. 9 人.

六、反馈与评价

Ⅰ　知识与方法测试（100 分钟，100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数是(　　).

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

2. 设全集 $I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$，集合 $M=\{a,\ b,\ c\}$，$N=\{b,\ d,\ e\}$，那么 $\complement_I M\cap\complement_I N$ 是(　　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$　　(C) $\{a,\ c\}$　　(D) $\{b,\ e\}$

3. 设 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $a\leqslant 2$　　(B) $a\leqslant 1$　　(C) $a\geqslant 1$　　(D) $a\geqslant 2$

4. 满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ 的集合的个数是(　　).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

5. 设 S，T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，记 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X=$(　　).

(A) $\varnothing$　　　(B) T　　　(C) S　　　(D) X

6. 设全集 U 为自然数集 $\mathbf{N}$，$E=\{x \mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}\}$，$F=\{x \mid x=4n,\ n\in\mathbf{N}\}$，则 $\mathbf{N}=$（　　）．

(A) $E\cup\complement_U F$　　(B) $\complement_U E\cup F$　　(C) $\complement_U E\cup\complement_U F$　　(D) $E\cup F$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 若集合 $A=\{1,\ 3,\ x\}$，$B=\{x^2,\ 1\}$，且 $A\cup B=\{1,\ 3,\ x\}$，则满足条件的实数 x 的个数是_______．

8. 已知满足“如果 $x\in S$，则 $8-x\in S$”的自然数 x 构成集合 S．

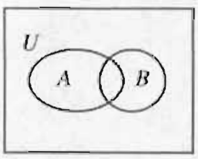
(1) 若 S 是一个单元素集合，则 $S=$_______．

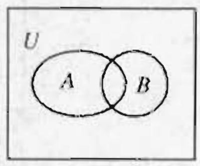
(2) 若 S 有且只有 2 个元素，则 $S=$_______．

9. 设 I 是全集，非空集合 P，Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$．若含 P，Q 的一个集合运算表达式，使运算结果是空集，则这个运算表达式可以是_______（只要求写出一个表达式）．

10. 设 U 是一个全集，A，B 为 U 的两个子集，试用阴影线在图中分别标出下列集合：

(1) $\complement_U(A\cup B)\cup(A\cap B)$；　　　　(2) $(\complement_U A)\cap B$．





三、解答题（共 50 分）

11. （满分 12 分）已知 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$C=\{x \mid x$是小于 6 的质数$\}$，求 $A\cap B$，$B\cup C$，$\complement_A C$．

12. （满分 12 分）已知全集 $U=\{1,\ 2,\ a^2+2a-3\}$，$A=\{|a-2|,\ 2\}$，$\complement_U A=\{0\}$，求 a 的值．

13. （满分 12 分）设 $A=\{-3,\ 4\}$，$B=\{x \mid x^2-2ax+b=0\}$，$B\neq\varnothing$ 且 $B\subseteq A$，求 a，b．

14. （满分 14 分）已知全集 $U=\{x \mid x-2\geqslant 0$ 或 $x-1\leqslant 0\}$，$A=\{x \mid x<1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x \mid x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)$．

知识与方法测试参考答案：

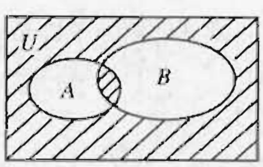
一、选择题

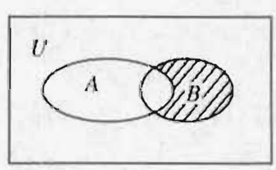
1. C；2. A；3. D；4. C；5. C；6. A.

二、填空题

7. 3；8. (1) $S=\{4\}$，(2) $S=\{0,\ 8\}$或$\{1,\ 7\}$或$\{2,\ 6\}$或$\{3,\ 5\}$；9. $\complement_I Q\cap P$；

10.　(1)　　　　　　　　　　(2)





三、解答题

11. $A\cap B=\{3, 4, 5\}$，$B\cup C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$\complement_A C=\{1, 4\}$.

12. 提示：由 $0\in U$ 知，$a^2+2a-3=0$. 答案是 $a=1$.

13. 由 $B\neq\varnothing$，$B\subseteq A$ 知 $B=\{-3\}$ 或 $\{4\}$ 或 $B=\{-3, 4\}$.

当 $B=\{-3\}$ 时，$a=-3$，$b=9$；

当 $B=\{4\}$ 时，$a=4$，$b=16$；

当 $B=\{-3, 4\}$ 时，$a=\frac{1}{2}$，$b=-12$.

14. $\complement_U A=\{x\mid x=1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$；$\complement_U B=\{x\mid x=2\}=\{2\}$；

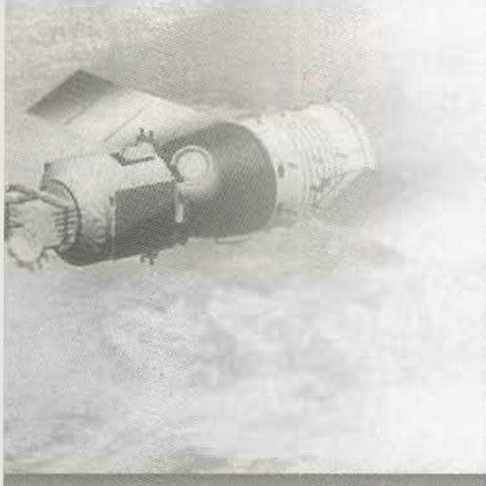
$A\cap B=A=\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$；$A\cup B=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x>2\}=B$；

$\complement_U A\cap\complement_U B=\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

II 评价建议

（1）除章末测试外，还应针对集合的性质、特征性质描述法、集合的包含与相等、集合的运算等重要知识设计一套测试卷进行测评.

（2）对学生学习、体会和运用集合语言的过程评价，要结合多个方面，如：课堂思考讨论、交流及回答问题的表现；课内练习与课后作业的成效；运用语言的能力；课外师生或学生之间的交流等. 评价的目的应是发现激励学习或促进发展的切入点或动力源等.



第二章

函 数

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过同一过程中的变量关系理解函数的概念，会用集合与对应语言来刻画函数，了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域，初步掌握换元法的简单运用.

2. 了解映射的概念，能判定一些简单的对应是不是映射，并用映射概念，加深对函数概念的理解.

3. 会选择恰当的方法表示函数；了解简单的分段函数，并能简单应用.

4. 理解函数的单调性，学会运用单调性的定义来判断函数的单调性、最大(小)值及其几何意义；结合具体函数，了解函数奇偶性的含义.

5. 掌握一次函数和二次函数的性质，学会用配方法研究二次函数的性质.

6. 掌握用待定系数法求函数的解析式.

7. 掌握作函数图象的一般方法，学会运用函数图象理解和研究函数的性质.

8. 会使用科学计算器求函数值；有条件的学校应培养学生使用数学软件研究函数的性质和图象的能力.

9. 掌握判断一元二次方程根的存在及个数的方法，了解函数的零点与方程根的联系；能根据具体函数的图象，借助计算器用二分法求相应方程的近似解.

（二）过程与方法目标

1. 通过各种实例，了解函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型．在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画(构造)函数，再现函数知识产生的过程.

2. 通过研究已构造(或已给出)的函数表达式，去解释、探究其性质，揭示相关变量之间的内在关系.

3. 函数的思想方法将贯穿高中数学课程的始终．通过本模块的学习，初步树立函数的观点.

4. 通过“配方法”，设未知数列方程（组）解方程（组），让学生掌握用代数方法解题的一般步骤.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 感受对应关系在刻画函数概念中的作用，使学生在初中数学学习的基础上，对数学的高度抽象性、概括性和广泛的应用性有进一步的认识.

2. 通过实例，体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验一次函数、二次函数与现实世界的联系及其在刻画现实问题中的重要作用. 感受运用函数概念建立模型的过程和方法，初步运用函数的思想和方法理解和处理其他学科与现实生活中的简单问题.

3. 引导学生体会“用有理数逼近无理数”的思想方法，让学生利用计算器或计算机进行实际操作，感受“无限逼近”的过程.

4. 通过实习作业培养学生独立思考、合作学习的意识.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 函数是数学中最重要的概念和语言，让学生用变量和映射这两种观点理解函数概念，并能用函数语言描述两个变量之间的关系、两个集合元素之间的对应关系. 教师要理解这两种观点的优缺点. 在章末的阅读材料中还介绍了函数概念发展的历史过程以及近代对函数的定义.

2. 用大量的实例建立函数概念，强化对函数符号意义的理解.

3. 用一次函数和二次函数这两个重要的函数模型为载体，学习函数的一般性质，研究函数性质的一般方法. 通过这两个函数的复习与提高，沟通初中和高中数学内容的内在联系. 实现由初中数学向高中数学的平稳过渡.

4. 通过函数学习一些重要的数学方法：

列方程与解方程　列方程与解方程是解决数学问题的主方法，要求学生能够规范的掌握.

配方法　配方法是研究二次问题最主要的方法，一定要让学生熟练掌握，使他们由用公式计算转变为用配方法解题.

待定系数法　通过如何确定函数引入待定系数法.

坐标方法　在通过对函数解析式的代数分析，画函数的图象，初步形成学生数形结合的思想.

数学建模　通过一次和二次函数的学习，让学生初步掌握数学建模的基本过程.

5. 通过函数求值、函数的作图建立信息技术与数学的整合，培养学生使用计算机技术学习数学的习惯与技能.

培养师生使用计算机技术学习数学和讲授数学，现今变得非常紧迫和必要. 在教学中，应当由教师制作课件进行演示，向师生使用数学软件学习数学和研究数学转变. 教材向师生提供了三套软件：Scilab、

工作表和几何画板。前两个都是免费使用的。几何画板基本上已在中学教师得到了普及。

6. 通过用二分法求函数的零点，初步引入算法概念并引导学生学习算法的兴趣.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章的主要内容是，函数的有关概念和性质、一次函数和二次函数、函数的应用、函数与方程. 本章共分四大节.

第一大节是函数. 首先，从初中学过的函数概念说起，在学习了集合与对应的基础上，用集合与对应的语言来理解函数概念. 然后，通过集合之间的对应关系引入映射的概念，通过对映射特殊化的分析，揭示出映射与函数之间的内在联系，即：映射是函数概念的推广，函数是一种特殊的映射. 接着，学习表示函数的三种常用方法(列表法、解析法和图象法). 最后，通过具体函数学习函数的单调性和奇偶性.

第二大节是一次函数和二次函数. 以已经学过的一次函数和二次函数为载体，进一步研究函数的性质和图象，目的在于归结出研究函数的一般方法.

第三大节是函数的应用(Ⅰ). 通过5个现实中的实际例子，说明一次函数和二次函数模型的应用.

第四大节是函数与方程. 首先，通过对二次函数与一元二次方程的研究，揭示出函数的零点与方程根之间的联系. 然后，学习求函数零点近似解的一种计算方法——二分法.

本章的最后附有一篇阅读材料《函数概念的形成与发展》. 安排这篇阅读材料的目的，是使学生了解函数概念的发展历史，体会科学进步对数学发展的促进作用，从而更深入地理解函数概念.

2. 地位与作用

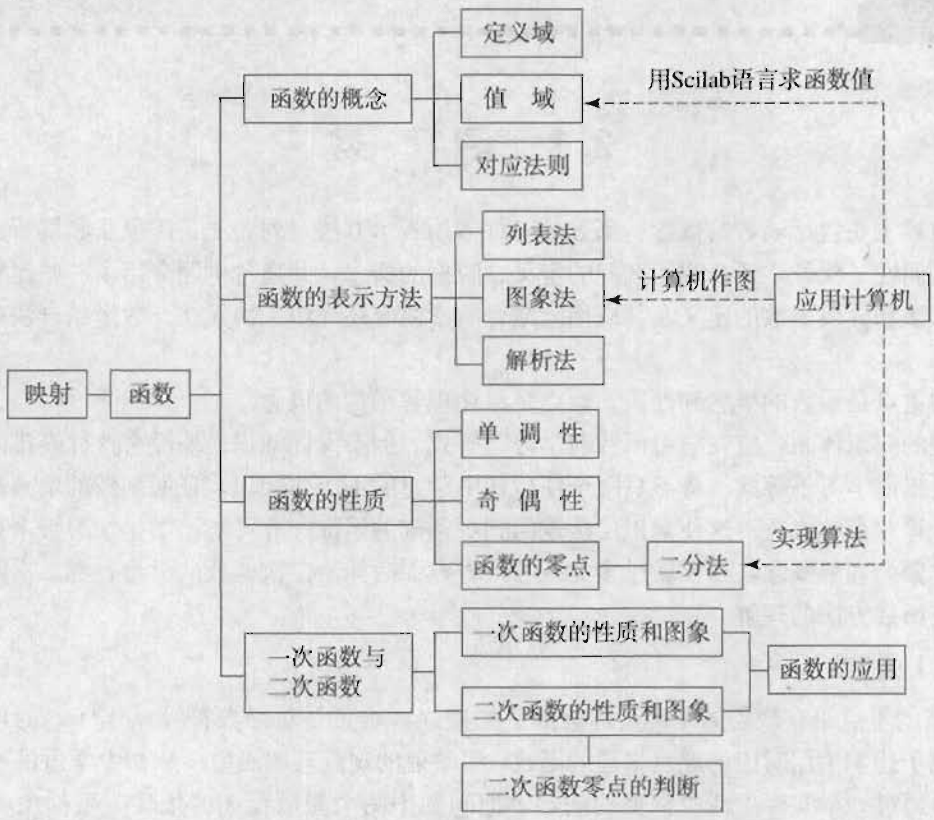
函数是数学中重要的基础概念之一. 学生进一步学习的高等数学基础课程，包括极限理论、微分学、积分学、微分方程和泛函分析等，无一不是以函数作为基本概念和研究对象的. 其他学科，如物理学科等，也是以函数的基础知识作为研究问题和解决问题的工具. 函数的教学内容蕴含着极其丰富的辩证思想，是对学生进行辩证唯物主义观点教育的好素材.

函数也是中学数学中最重要的基本概念之一. 在中学数学教材中，函数的教学大致可分为三个阶段. 第一阶段，是在初中初步探讨了函数的概念、函数的表示方法以及函数图象的绘制等，并具体地讨论了正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等最简单的函数. 通过函数值的计算、列对应值表以及描绘函数的图象，使学生获得关于函数的感性知识，初步了解函数的意义，理解正比例函数、反比例函数、一次函数的概念和性质，理解二次函数的概念，能根据函数性质画出正比例函数、一次函数的图象，用描点法画出反比例函数、二次函数的图象. 本章函数及第三章研究的指数函数、对数函数和幂函数，以及数学4中所研究的三角函数和数列是函数教学的第二阶段，也就是对函数概念的再认识阶段，学生将在第二阶段获得较为系统的函数知识，并初步培养函数的应用意识，为今后学习打下良好的基础. 第三阶段安排在选修课程1或2系列内容中，选修课程1或2的内容中有导数的内容，这些内容是函数及其应用研究的深化和提高，也是进一步学习、参加生产和实际生活中需要具备的基础知识. 函数是中学数学的主体内容，几乎每一章都贯穿着函数的思想. 可以说函数思想是整个高中数学的“纲”，是基础的数学语言. 这一章涉及到的一些重要的思想方法，对学好高中数学起着重要的作用.

3. 重点与难点

本章的重点是对函数概念的较好理解. 从初中用变化的观点理解函数概念到高中用集合和对应来理解函数，需要学生从认知结构上发生变化，如何实现这一转变是教学中的一个关键. 这一章的学习是高中函数概念学习的出发点，对学生今后的学习具有重要的意义. 本章的难点是用集合与对应的观点理解函数概念；二分法是求函数零点近似解的一种方法，渗透了极限和算法的思想，是教学中的又一难点.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 函数

2.1.1 函数	3 课时
2.1.2 函数的表示方法	2 课时
2.1.3 函数的单调性	2 课时
2.1.4 函数的奇偶性	1 课时

2.2 一次函数与二次函数

2.2.1 一次函数的性质与图象	1 课时
2.2.2 二次函数的性质与图象	1 课时
2.2.3 待定系数法	1 课时

（四）教学建议

2.1 函　　数

本大节内容主要包括函数的概念、函数的三种常用表示方法（列表法、图象法和解析法）以及函数的单调性和奇偶性. 此外，还介绍了区间的定义、映射的概念，并通过例题介绍了一些简单函数的定义域、值域的求法和分段函数的定义及其应用. 结合所学内容还介绍了换元法、数形结合法两种重要的数学方法.

本大节的重点是函数的概念和性质，难点是深化理解函数的概念.

比较合理的知识体系，应在学习函数前学习不等式，但新课标知识模块没有这样安排. 因此我们还是建议，不要提前学习不等式. 练习只限于使用初中学过的不等式知识，证明函数的增减性质，可使用作差配方或计算差商的方法. 这使知识层次返回到更基础的层面，有可能给学生学习带来更多的好处.

这一节主要是理解概念，不要做过多的练习，省点课时让给二次函数的学习，在二次函数的教学中再加强对研究函数方法的理解.

2.1.1 函数

1. 本小节的重点是在映射的基础上理解函数的概念，难点是对函数符号 $y=f(x)$ 的理解. 本小节通过大量的例子让学生用对应的观点来理解函数，用映射的观点理解函数. 从初中学过的变量观点的函数概念说起，通过列举实际生活中常见的问题，把问题中两个变量存在的依赖关系抽象为一种对应关系，然后用集合的语言来进行刻画，得到了函数的更为确切的定义. 在学习了映射的概念后，再用映射来研究函数，使学生对函数概念的理解更加深刻. 教学中应让学生理解映射是一种特殊的一对一或多对一的对应，函数则是建立在两个非空数集之间的映射. 在这一小节，教师可适当引导学生举一些实际例子以帮助学生理解对应观点下的函数定义.

2. 在复习初中函数概念的基础上，通过对实例的分析进一步揭示函数概念的实质是，表示两个数集的元素之间，按照某种法则确定的一种对应关系. 然后用集合语言给出函数的一个新的定义. 最后再把函数概念推广为映射. 这种编写方式与先学习映射再用映射的观点定义函数正好相反. 教师应体会课标所倡导的由特殊到一般，由具体到抽象的学习过程.

应理解函数记号 $y=f(x)$，$x\in A$ 的意义. 对应法则与我们选择表示自变量的符号没有关系. 教材通过例 3 中以说明，$f(x)=x^2$ 与 $f(t)=t^2$，$f(x-1)=(x-1)^2$ 等都表示的是同一函数关系. 当我们把 $(x-1)^2=x^2-2x+1$ 中的变元 x 看作为自变量时，它就变为一个新的函数关系：

$$g(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1.$$

在式子 $f(x-1)=x^2$ 中，函数 f 的自变量用 $x-1$ 表示，而等式右边为变元 x 的表达式而不是函数 f 的自变量的表达式．再看用换元法解例 3(2)题的过程：

令 $t=x-1$，当自变量用一个变元 t 表示时，等式右边变为 $(t+1)^2$，即

$$f(t)=(t+1)^2=t^2+2t+1.$$

右边正好是函数 f 的自变量的表达式．当 $f(x-1)=x^2$，函数 f 的自变量是 $x-1$，而非 x.

教师要对函数记号、换元、复合函数以及它们图象之间的关系要有一个清晰的理解.

3. 用映射的观点定义函数是这样叙述的：设 A，B 都是非空数集，如果按某个确定的对应关系 f，使集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 $f: A\to B$ 为从 A 到 B 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 $x\in A$，$y\in B$. 集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，函数值的集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域，显然，$C\subseteq B$.

函数的映射定义与传统定义(用变量叙述的定义)在实质上是一致的，两个定义中的定义域和值域完全相同，两个定义中的对应法则实际上也一样，只不过叙述的出发点不同，传统定义是从运动变化的观点出发，其中的对应法则是将自变量 x 的每一取值与唯一确定的函数值对应起来；近代定义的对应法则是从集合与对应的观点出发，其中的对应法则是将原象集合中的任一元素与象集合中的唯一确定的元素对应起来．从历史上来看，传统定义来源于物理公式，最初的函数概念几乎等同于解析式．后来，人们逐渐意识到定义域与值域研究受到了不必要的限制．如果只根据变量观点，有些函数就很难进行深入研究．例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

对于这个函数，如果用变量的观点来解释，会显得十分勉强，也说不出 x 的物理意义是什么，但用集合与对应的观点来解释，就十分自然．从这个意义上来说，函数的近代定义更具有一般性．实际上，我们在这里说的传统定义，已经渗透了集合与对应的观点．如“按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应”，已经十分接近近代定义了．不过，由于用变量观点描述函数比较生动、直观，所以现在仍然广泛使用着传统定义．今后，为了方便，我们有时也仍然使用传统定义．为了使学生理解引入新定义的必要性，可以采用比较的方式，引导学生分析实例，获得体验.

当然，更重要的是由函数的近代定义可知，函数 $f: A\to B$ 只不过是当集合 A，B 是非空数集时的一种特殊的映射．由于映射在近代数学中是一个极其重要且应用广泛的概念，所以了解一下函数与映射的上述关系是有好处的，可以为今后进一步学习各类映射做好准备，但不必引申更多的内容.

4. 定义域、对应法则是函数的两个要素.

一般地说，在函数记号 $y=f(x)$ 中，f 代表对应法则．等式 $y=f(x)$ 表明，对于定义域中的任意 x，在“对应法则 f”的作用下，即可得到 y．当然，情况比较简单时，对应法则 f 可用一个解析式来表示．但在不少问题中，对应法则 f 也可能不便用或不能用一个解析式来表示，这时就必须采用其他方式，如数表或图象等.

定义域是自变量 x 的取值范围，它是函数的一个不可缺少的组成部分．定义域不同而解析式相同的函数要看作是不同的函数．例如，二次函数 $y=x^2$，它的定义域通常是实数集；但当考察正方形的边长与面积的关系时，它的定义域是正实数集．显然，这两个函数是不同的函数．它们的不同也可从图象

相异来得到验证．又如 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$，同样可由它们的定义域与图象来验证它们是不同的函数．在中学阶段所研究的函数，通常都可用解析式来表示．如果未加特别说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合．在实际问题中，还必须考虑自变量 x 代表的具体量的允许值范围．

5．函数符号 $y=f(x)$ 是学生学习的难点．这是一个抽象的数学符号，教学时首先要强调符号"$y=f(x)$"为"y 是 x 的函数"这句话的数学表示，它仅仅是函数符号，不是表示"y 等于 f 与 x 的乘积"，$f(x)$ 也不一定是解析式；其次要用具体的函数来说明符号 $y=f(x)$ 的含义，符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别又有联系，$f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值，它是一个常量；而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数．在一般情况下，它是一个变量，$f(a)$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的一个特殊值．

6．"区间"和"无穷大"是本节中的两个重要概念．

区间是数学中常用的术语和符号，要求学生记住闭区间、开区间、半开半闭区间的符号及其含义．当 $a<b$ 时，开区间 (a, b) 按国际惯例也记作 $]a, b[$．仿此半开半闭区间 $(a, b]$，$[a, b)$ 分别记作 $]a, b]$，$[a, b[$．

对于 $[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$，都称数 a 和数 b 为区间的端点，a 为左端点，b 为右端点，称 $b-a$ 为区间长度．

对区间概念进行教学时，还应提醒学生注意以下两点：

(1) 在直角坐标系下，记号 $(2, 3)$ 可以用来表示区间，也可以用来表示一个点，具体使用时要加以区分；

(2) 记号 $(3, 2)$ 能表示直角坐标系下的点，但不能表示区间．

这样，某些以实数为元素的集合就有三种表示方法：集合表示法、不等式表示法和区间表示法．

例如，大于 3 而小于 7 的实数的集合可以表示成以下三种形式：

$$\{x \mid 3<x<7\},$$
$$3<x<7,$$
$$(3, 7).$$

对于具体问题，教材中并不要求固定采用哪种表示方法，可根据习惯或简明的原则来用．

无穷大是一种变化趋势，其符号 ∞ 不是一个数．通过"无穷大"的学习，让学生去体会"宇宙"、"时间"这类事物的无限性．关于用 $-\infty$，$+\infty$ 作为区间的一端或两端的区间称为无穷区间，它的定义和符号如下表．

定　义	符　号
$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$	$(-\infty, +\infty)$
$\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$	$[a, +\infty)$
$\{x \mid a<x<+\infty\}$	$(a, +\infty)$
$\{x \mid -\infty<x\leqslant b\}$	$(-\infty, b]$
$\{x \mid -\infty<x<b\}$	$(-\infty, b)$

7．例 1 是求函数定义域的例子，在表述时要强调解题的书写过程．

例 2 是一个求简单函数的值域的例子，实际上求函数的值域是个比较复杂的问题，虽然给定了函数

的定义域及其对应法则以后，值域就完全确定了，但求值域还是特别要注意讲究方法，常用的方法有：

观察法：通过对函数解析式的简单变形，利用熟知的基本函数的值域，或利用函数的图象的“最高点”和“最低点”，观察求得函数的值域；

配方法：对二次函数型的解析式可先进行配方，在充分注意到自变量取值范围的情况下，利用求二次函数的值域方法求函数的值域；

判别式法：将函数视为关于自变量的二次方程，利用判别式求函数值的范围，常用于一些“分式”函数等；此外，使用此法要特别注意自变量的取值范围；

换元法：通过对函数的解析式进行适当换元，将复杂的函数化归为几个简单的函数，从而利用基本函数的取值范围来求函数的值域.

求函数的值域没有通用的方法和固定的模式，除了上述常用方法外，还有最值法、数形结合法等. 总之，求函数的值域关键是重视对应法则的作用，还要特别注意定义域对值域的制约.

在讲例 2 时，可以先用计算机作出函数的图象，然后通过解析式引导学生进行分析，数形结合地来加以认识. 通过本例题还应当使学生进一步熟悉符号 $f(x)$和 $f(a)$的区别和联系.

例 3 主要是使学生进一步明确符号 $f(x)$的意义，第(2)小题可先放手让学生思考，尽量让学生自己发现方法，教师再作点拨总结.

在这里涉及常用的数学方法——换元法. 解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化的方法，叫做换元法. 换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理.

8. 映射作为函数概念的推广，其教学要求不能太高. 在教学中，主要是结合实例(如课本中的例 4 到例 6)使学生对映射有所了解.

关于映射的定义，要结合具体例子，讲清以下几点：

(1) 有两个集合 A，B，它们可以是数集，也可以是点集或其他集合. 这两个集合有先后次序，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是截然不同的.

(2) 存在一个集合 A 到 B 的对应法则 f，在对应法则 f 的作用下，与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a(在 f 下)的象，a 叫做 b 的原象.

(3) 集合 A 中的任何一个元素都有象，并且象是唯一的. 例如，设 $A=\{0, 1, 2\}$，$B=\left\{0, 1, \frac{1}{2}\right\}$，对应法则 f 是“取倒数”，这时由于 A 中的元素 0 无象，A，B，f 不能构成映射. 但对于映射来说，A 中两个(或几个)元素可以允许有相同的象.

(4) 不要求集合 B 中每一个元素都有原象，即 B 中可能有些元素不是集合 A 中的元素的象. 例如，已知集合 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$，对应法则 f 是“加$\sqrt{2}$”，它使 $\mathbf{R}$ 中的元素 $a+\sqrt{2}$和 $\mathbf{Q}$ 中的元素 a 对应. 这时虽然 $\mathbf{R}$ 中有许多元素，如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，1，π 等，都不是 $\mathbf{Q}$ 中任何元素的象，但 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，f 三者之间符合构成映射的条件，所以 f：$\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$，$x\to f(x)$是从 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.

为了便于学生理解，教材中关于映射的例子都是学生熟悉的，教学中可以让学生自己再举一些例子，说明原象集、象集以及对应关系各是什么.

9. 一一映射作为一种特殊的映射，使学生能够初步了解定义即可，教学时可结合例 7 让学生判断一下哪些是一一映射.

10. 选学内容“用 Scilab 语言求函数值的方法”，主要培养学生使用计算机技术学习数学的习惯与技能. 培养师生使用计算机技术学习数学和讲授数学，现今变得非常紧迫和必要. 有条件的学校要充分利用好教学资源，上好本部分内容，以扩大学生的认知范围，激发学生学习数学的兴趣.

2.1.2 函数的表示方法

1. 本小节的重点是对函数图象的分析，难点是通过函数的解析式分析函数的图象.

2. 本小节主要介绍三种常用的表示方法，即列表法、图象法、解析法.

列表法就是列出表格表示两个变量的函数关系，这种方法学生是熟悉的，学生生活中也遇到过列表法，如银行利率表、列车时刻表等，都是用列表法表示的. 教材中我国的人口普查表也是其中的一种. 列表法的优点是不需要计算就可以直接得到与自变量的值相对应的函数值.

图象法就是用图象来表示两个变量的函数关系. 这种方法的优点是能够直观形象地表示与自变量的变化相应的函数值的变化趋势，使得我们可以通过图象来研究函数的性质. 图象法也常常用到生产和生活中去，如工厂的生产进度图、股市的股价指数走向图等都是这样的例子.

解析法就是将两个变量的函数关系，用一个式子表示. 解析式有两个优点：一是简明、全面地概括了变量之间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值.

函数的三种表示方法各有优点，有的函数三种表示方法都能用，有的函数则只能用某种表示方法. 中学遇到的函数大多数用解析法表示，并且大多数能借助于计算机画出函数的图象. 所以，在教函数表示方法时，应让学生多画一些给定了解析式的函数图象，这样，不仅有利于学生理解函数解析式的意义，也可以加强学生数形结合的观念.

3. 函数的图象是一种特殊的图形，根据函数的定义，自变量 x 在定义域中取每一个值时，相应的函数值 y 是唯一的，反应到图象上是和 y 轴平行的直线与函数的图象只有一个交点，或者没有交点. 若有两个或两个以上交点，则这个图形必定不是函数的图象. 对于教材中设计的思考与讨论的问题，能够帮助学生认清函数图象的本质特征.

4. 例 1 主要介绍了通过列表、描点、连线这三个步骤来作函数图象的方法. 要提醒学生在画函数图象时注意：一是 x 的取值分布要恰当，二是连线时要用光滑曲线连接，不要把光滑的曲线画成锯齿状. 结合这两个例子要努力培养学生函数作图的能力和运用数形结合的思想方法研究问题和解决问题的能力.

数形结合的数学思想方法，包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面，其应用大致可以分为两种情形：或者是借助形的生动和直观性来阐明数之间的联系；或者是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性. 运用好这种方法，可以使这一类数学问题变得非常直观形象.

5. 例 2 介绍的是个特殊的函数，称作高斯函数. 公元 1800 年，德国数学家高斯(Gauss，1777—1855)在研究圆内整点问题时，引进了这个函数

$$y=[x].$$

高斯函数的图象像台阶，不连续. 由此可进一步说明，函数的图象不一定是一条或几条无限长的平滑曲线，也可以是一些点，一些线段，一段曲线等.

6. 例 3 这个函数的解析式是用递归式给出的，这个函数的图象让学生画一下，会发现这个函数的图象是由一些不连续的点构成的.

7. 表示函数的式子也可以不止一个(见例 4、例 5)，对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对

应法则的函数，称为分段函数，应注意不要把它误认为是"几个函数"．由于分段函数学生接受起来比较困难，但分段函数又是普遍存在、比较重要的一类函数，因此课本中通过两个例子专门做了介绍．教学上不必要求学生的认识一次完成，可以根据学生的具体情况，采取不同的要求．

对于分段函数中的"段"，学生可能认为是等长的，实际并不是这样，在此可给学生举一些不等长的例子，如：

$$y=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$$

其图象如图 2-1 所示．

例 5 是源于生活的一个实例，在教学过程中，可以要求学生去邮局搜集一些关于邮资方面的资料．引导学生绘图时注意自变量取值区间端点处函数的取值情况．

8．函数的各种表示方法具有内在的联系，认识这种联系并能相互转化是函数学习的重要内容，同时也是深化理解函数概念的重要步骤．因此，教学中应给予关注．本节中的几个例子所涉及到的函数，实际上既可以通过解析法表示又可以用图象法表示，例 5 的数据也可以用列表法给出，因此教学中可以引导学生先列表后求解析式，最后画图象．

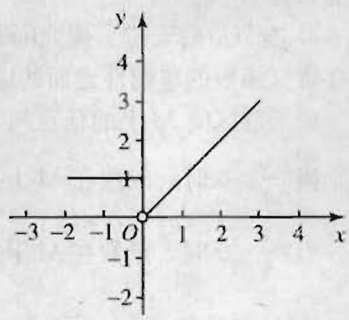


图 2-1

2.1.3 函数的单调性

1．本小节的重点是函数的单调性的概念和判断某些函数的增减性的方法．由于判断或证明函数的单调性时，常常要综合运用一些知识(如不等式、因式分解、配方法及数形结合的思想方法等)，因此函数单调性的判断或证明是本小节的一个难点．

2．函数的单调性是培养学生数形结合思想的重要内容，也是研究变量的变化范围(如函数的最值、值域)的有利工具，因此，应把这一内容的教学视为学生学习数学思想方法的奠基性活动．

3．为了研究函数的单调性，教材先给出了学生比较熟悉的一次函数和二次函数的图象，本节的教学应以这些基本的函数图象为素材，逐步由形到数，引导学生发现函数图象在上升或下降时函数值的变化规律，然后再推广到一般得出单调性的定义．每一阶段的活动，都是学生认识上的升华．

4．函数的单调性是对某个区间而言的．应从以下两个方面理解这句话：

对于单独的一个点，由于它的函数值是唯一的常数，因而没有增减变化，所以不存在单调性问题．另一方面，中学阶段所研究的函数主要是连续函数或分段连续函数，对于闭区间上的连续函数来说，只要在开区间上单调，它在闭区间上也就单调．因此，在考虑它的单调区间时，包括不包括端点都可以．必须注意，对于在某些点上不连续的函数，单调区间不包括不连续点．

有些函数是在整个定义域内具有单调性．例如教材中的例 1．

有些函数在整个定义域上不单调，只有在定义域的某些区间上是单调函数．如 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数．

有些函数没有单调区间，或者它的定义域根本就不是区间．例如函数

$$y=5x,\ x\in\{1, 2, 3\}.$$

5．本节中的例 2 证明了函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数，同样可以证明它在 $(-\infty, 0)$ 上也

是减函数，这可放手让学生自己证明.

注意：$x=0$ 不属于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域，因此，切不可把这里的区间 $(0,+\infty)$ 误写成 $[0,+\infty)$. 不能说 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数. 也不可以说 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上是减函数.

6. 考察函数的单调性，可以从函数的图象、函数值的变化情况、增(减)函数的定义等多方面进行，但是要让学生认识到这几个方面的异同点与内在联系，任一方面的作用都不能由其他几方面代替. 函数的单调性的证明，仅由函数的图象或一些函数值的变化加以说明是不够的，最终应根据增(减)函数的定义加以证明.

7. 本节最后安排了探究问题，结合“探索与研究”，既可使学生了解函数的平均变化率的定义，及其在研究函数的单调性方面的应用，又为我们研究函数的单调性提供了一种新的方法.

如果取区间 M 上的任意两个值 x_1，x_2，$\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

当 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 时，函数在 M 上是增函数；

当 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 时，函数在 M 上是减函数；

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的绝对值越大，函数值在区间上增长或减少得就越快.

平均变化率的引入为以后学习导数的概念打下了基础.

2.1.4 函数的奇偶性

1. 本小节的重点是函数奇、偶性及其它们的图象特征. 难点是函数奇偶性的判断.

2. 函数的奇偶性是考查函数性质时的又一个重要方面，利用函数的这一性质，可为我们研究函数的求值、定义域、值域、单调性、图象的绘制等问题提供方便.

3. 教材在给出奇函数与偶函数的定义前，先列举了两个特例 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$，$g(x)=x^2$. 教学时可要求学生作出这两个函数的图象，引导学生发现规律 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，由此给出奇函数和偶函数的定义，同时为奇函数和偶函数图象的对称性——这一结论的给出做好铺垫.

讲完奇函数和偶函数的定义后，可让学生再列举一些奇函数和偶函数的例子.

4. 判断一个函数是奇函数，或者是偶函数，或者既不是奇函数也不是偶函数，叫做判断函数的奇偶性. 由奇函数和偶函数的定义知，一个函数具有奇偶性的前提条件是它的定义域关于原点对称. 例如 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 既不是奇函数也不是偶函数，因为它们的定义域分别是 $[0,+\infty)$ 与 $(0,+\infty)$，即 x 取负值时函数无意义，所以不能满足奇函数与偶函数的定义.

5. 教材中“奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称”这两个结论是通过观察图象得出的. 为了不增加教学上的难度，此处没有给予证明. 如果学生复习了初中学过的在平面内点 $P(x,y)$ 与点 $P'(-x,-y)$ 关于坐标原点对称；点 $P(x,y)$ 与点 $P'(-x,y)$ 关于 y 轴对称的知识，这两个结论的证明也是不难的.

下面的证明供参考：

设函数 $f(x)$ 是奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$. 如图 2-2(1)，在 $f(x)$ 的图象上任取一点

$P(a, f(a))$，那么点 P 关于原点的对称点是点 $P'(-a, f(-a))$. 而点$P'(-a, f(-a))$是函数 $f(x)$ 的图象上的点. 这就是说，函数$f(x)$图象上任意一点关于原点的对称点都在函数$f(x)$的图象上，所以函数$f(x)$的图象关于原点成中心对称.

偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，证明可以仿照上述证明过程，如图 2-2(2)所示.

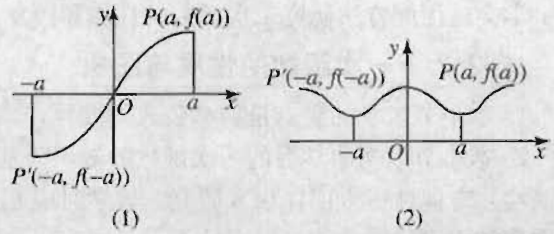


图 2-2

6. 教材中例 1 是根据奇函数、偶函数的定义判断函数的奇偶性. 有时也可以根据下面的式子来判断函数的奇偶性：

$$f(x) \pm f(-x)=0.$$

对于定义域内任意一个 x，有

$$f(x)-f(-x)=0$$

成立，则 $f(x)$为偶函数；

对于定义域内任意一个 x，有

$$f(x)+f(-x)=0$$

成立，则 $f(x)$为奇函数.

7. 对于一个函数的奇偶性来说，有四种可能：

是奇函数但不是偶函数；

是偶函数但不是奇函数；

是奇函数又是偶函数；

既不是奇函数也不是偶函数.

如果一个函数既是奇函数又是偶函数，那么这个函数在其定义域内恒为 0. 事实上，对于定义域内的任一个 x，由于 $f(-x)=f(x)$，且 $f(-x)=-f(x)$，则有 $f(x)=-f(x)$，即 $f(x)=0$.

2.1.5 用计算机作函数的图象（选学）

1. 本小节以作函数 $y=x^2$ 的图象为例，让学生了解运用计算机作函数图象的方法，注重了信息技术与数学教学的整合.

2. 通过本小节的学习让学生进一步感受做事情需要有一定的程序. 特别是让计算机做事，必须严格按操作步骤进行. 因此，应将平时解题中没有想清楚的每一个步骤都想清楚.

3. Scilab 是一个非常优秀的科学计算软件，在本册教材的附录 1 中，对该软件的功能进行了较为详细的介绍.

2.2 一次函数和二次函数

本大节以一次函数和二次函数这两个重要的函数模型为载体，学习研究函数性质的一般方法，并通过对这两个函数有关知识的复习与提高，沟通了初中和高中数学内容的内在联系，实现由初中数学向高中数学的平稳过渡. 本大节介绍的数学方法有配方法、待定系数法以及数形结合的思想方法.

学会运用配方法研究二次函数的性质和图象是本大节的重点内容.

2.2.1 一次函数的性质与图象

1. 本小节教学的重点是斜率公式的推导，难点是理解一次函数的性质.

2. 本小节以初中学习的一次函数的知识为基础，进一步研究其性质和图象，从函数的平均变化率、单调性、奇偶性等方面作深入研究. 教学时应充分借助函数的图象来加深学生对知识的认识，由于这部分内容初中阶段已介绍过，因此本小节内容完全可以让学生自学.

3. 注意强调一次函数定义中的一次项系数 $k\neq 0$ 这一条件，当 $k=0$ 时，函数为 $y=b$，它不再是一次函数，它的图象是一条与 x 轴平行的直线，通常称为常值函数.

4. 函数值的改变量 y_2-y_1 与自变量的改变量 x_2-x_1 的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，称作函数在 x_1 到 x_2 之间的平均变化率，对一次函数来说它是一个常数，等于这条直线的斜率.

5. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的单调性与一次项系数的正负有关，当 $k>0$ 时，函数为增函数，当 $k<0$ 时，函数为减函数. 这个性质的证明可由学生自己根据单调性的定义给出.

如果 $k>0$，设 x_1、x_2 是任意两个不相等的实数，且 $x_1<x_2$，则 $\Delta x=x_2-x_1>0$，

所以 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(kx_2+b)-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)=k\Delta x.$

当 $k>0$ 时，$k\Delta x>0$，所以 $\Delta y>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

当 $k<0$ 时，同样可证 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

6. 要准确地作出一次函数的图象，只要找准图象上的两个点即可，这两个点通常是找图象与坐标轴的交点.

2.2.2 二次函数的性质与图象

1. 本小节的重点是让学生掌握研究二次函数图象和性质的重要方法——配方法. 对于任何一个二次函数，只要通过配方变形为 $y=(x-h)^2+k$ 的形式，就可知道函数的图象特征和有关的性质，而不必要求学生记忆过多的结论，解题时这样一些通法的运用是最有效的. 难点是通过“配方式”，分析二次函数的性质和图象特性.

2. 教材在总体设计上遵循由特殊到一般的认知规律，先由学生观察图象，研究函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的性质，然后通过两个一般的二次函数的例子，运用数形结合的方法，推广得出二次函数的图象和性质，以及研究二次函数的重要方法.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中的系数 a，b，c 决定着函数的图象和性质.

二次项系数 a 决定了函数图象的开口方向、开口的大小和单调性，当 $a>0$ 时，开口向上，a 越大，开口越大，函数在对称轴两侧先减后增；当 $a<0$ 时，开口向下，a 的绝对值越大开口越大，函数在对称轴两侧先增后减.

b 是否为零决定着函数的奇偶性. 当 $b=0$ 时，函数为偶函数；当 $b\neq 0$ 且 $c\neq 0$ 时，函数既不是奇函数也不是偶函数.

c 是否为零决定着函数的图象是否经过原点.

另外，a 和 b 共同决定着函数的对称轴，a，b 和 c 三者共同决定着函数的顶点位置.

2.2.3 待定系数法

1. 本小节的重点是根据已知条件设未知函数列方程（组），难点是解方程，确定待定系数.

2. 要确定变量间的函数关系，根据所给条件设出某些未定系数，并确定这一关系式的基本表达形式，从而进一步求出表达式中含有的未定系数的方法，叫做待定系数法. 其理论依据是多项式恒等原理，也就是依据了多项式 $f(x)\equiv g(x)$ 的充要条件是：对于一个任意的 a 值，都有 $f(a)\equiv g(a)$. 或者两个标准多项式中各同类项的系数对应相等.

待定系数法解题的关键是依据已知条件，正确列出含有未定系数的等式. 运用待定系数法，就是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决，要判断一个问题是否用待定系数法求解，主要是看所求解的数学问题是否具有某种确定的数学表达式，如果具有，就可以用待定系数法求解. 例如分解因式、拆分分式、数列求和、求函数式、求复数、解析几何中求曲线方程等，这些问题都具有确定的数学表达形式，所以都可以用待定系数法求解.

使用待定系数法解题的基本步骤是：

第一步，设出含有待定系数的解析式；

第二步，根据恒等的条件，列出含待定系数的方程或方程组；

第三步，解方程或方程组或者消去待定系数，从而使问题得到解决.

当然，本小节重点应放在运用待定系数法求函数的解析式上，对于其他方面的应用不必过多延伸.

3. 运用待定系数法求二次函数的解析式时，一般可设出二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$，但如果已知函数的对称轴或顶点坐标或最值，则解析式设为 $y=a(x-h)^2+k$ 会使求解比较方便. 具体来说：

已知顶点坐标为 (m, n)，可设 $y=a(x-m)^2+n$，再利用一个独立条件求 a；

已知对称轴方程 $x=m$，可设 $y=a(x-m)^2+k$，再利用两个独立的条件求 a 与 k；

已知最大值或最小值为 n，可设 $y=a(x+h)^2+n$，再利用两个独立条件求 a 与 h；

二次函数的图象与 x 轴只有一个交点时，可设 $y=a(x+h)^2$，再利用两个独立条件求 a 与 h.

对于用待定系数法求二次函数的解析式，在课堂上要展开讨论，要让学生探索所需的已知条件，然后可由学生自行设计问题、解决问题.

2.3 函数的应用（I）

1. 本节的重点是一次和二次函数模型的应用，难点是数学建模.

2. 函数的应用是学习函数的一个重要的方面. 学生学习函数的应用，目的就是利用已有的函数知识分析问题和解决问题. 通过函数的应用，对学生完善函数的思想、激发应用数学的意识、培养分析问题解决问题的能力、增强进行实践的能力等，都有很大的帮助.

3. 本节共 4 个例题，从知识的应用看，一类是一次和二次函数模型的应用，另一类是建立函数数学模型的例子. 从设计的问题情景看，分别是物理方面的问题、客房租金收入问题、几何问题和建立国内生产总值的函数模型问题. 本节学生第一次学习数学建模，数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程. 数学建模可以通过框图（图 2-3）体现：

“数学建模”是数学学习的一种新的方式，它为学生提供了自主学习的空间，有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用，体验数学与日常生活和其他学科的联系，体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程，增强应用意识；有助于激发学生学习数学的兴趣，发展学生的创新精神和实践能力.

4. 本节的教学要求是通过实际问题的例子，培养学生的数学应用意识，在解决问题中加深学生对

函数概念的认识和理解.

5. 例 1 是一次函数模型的应用，关键是审题，时间 t 是匀速行驶的时间，$S_0=13$. 一般地，一次函数的模型问题，常设为 $y=kx+b(k\neq 0)$，然后用待定系数法求 k，b 的值.

6. 例 2 是客房租金如何定价收入才能最高的实际应用问题，是二次函数模型的应用. 解题的关键是读懂题意，合理设出未知量，列出函数关系式. 方法一，通过列表的形式求解，直观性强，有助于学生理解，但运算过程比较繁琐，作为探求思路的方法还是可行的. 方法二，根据题目的条件列出函数关系式，利用二次函数求极值，是常用的方法.

7. 例 3 是利用二次函数求极值的问题，正确地列出函数解析式并配方是解决此问题的关键.

8. 例 4 是建立一个真实的函数模型解决实际问题的例子. 教材中采用分步设问的办法，降低了问题的难度. 在解决实际问题中，提出问题——收集数据——整理、分析数据——建立函数模型——解决问题——代入检验，这是一个完整的过程. 作出散点图，观察散点图的形状，是选择函数模型的基础，确定函数模型后，经常需要检验，如误差较大，就要修正得到的函数模型.

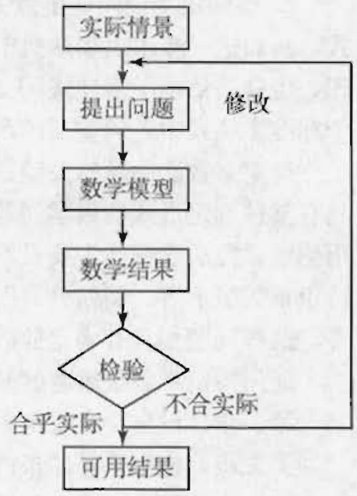


图 2-3

2.4 函数与方程

本大节内容主要包括函数的零点，求函数零点的近似解的一种算法——二分法. 教材以二次函数为例给出了函数零点的概念，讨论了二次函数零点个数的判定方法，给出了函数零点的性质. 用二分法求函数的变号零点是零点性质的应用. 算法是数学及其应用的重要组成部分，是计算科学的重要基础，随着现代信息技术的飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养. 教材有目的、有意识地将算法思想渗透在高中数学的有关内容中，让学生不断加深对算法思想的理解，体会算法思想在解决问题和培养理性思维中的意义和作用. 二分法正是这一思想的体现.

2.4.1 函数的零点

1. 本小节重点是理解函数零点的概念，判定二次函数零点的个数，会求函数的零点，能够借助计算器或数学软件用二分法求相应方程的近似解. 难点是函数零点的应用.

2. 函数的零点. 教材以二次函数 $y=x^2-x-6$ 为例，求出零点，并通过作图加以说明，从而给出了函数零点的概念，体现了由特殊到一般的思维方法. 教学中，应引导学生自主探索，通过抽象、概括形成概念. 值得注意的是：不是所有函数都有零点，如 $y=1$，$y=x^2+1$ 就不存在零点.

3. 函数零点个数的判定. 将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点个数的判定，转化为二次方程 $ax^2+bx+c=0$实根个数的判定，这是初中已学过的内容，可以由学生自己归纳总结.

4. 零点的两条性质. 教学时，应结合函数图象加以说明. 这两条性质对其他连续函数也适用.

5. 求三次函数的零点，并作出图象. 求零点的关键是学生能正确地进行因式分解，而作出它的图

象，可先由零点分析出函数值的正负变化情况，再进行适当的取点. 通过例题进一步总结求函数零点的方法，以及零点在作图中的应用.

2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法

1. 本小节教学重点是，学会用二分法求函数的零点，难点是理解用二分法求函数零点的原理.

2. 二分法的一般算法，比较抽象，学生不易理解. 但它是一种通法，只要按部就班地去做，总会算出结果，这可让计算机来实现. 教学中，也可以不先讲一般的理论，而是先结合课本中的例题来引导学生探究，然后再讲一般理论. 这样更便于学生理解. 事实上，第一步是取初始区间$[a, b]$，使 $f(a)f(b)<0$；第二步是取区间$[a, b]$的中点 x_1，求 $f(x_1)$的值，并作出判断，若 $f(x_1)=0$，x_1 就是所求的零点，计算结束；若 $f(x_1)\neq 0$，判定零点是在区间$[a, x_1]$或$[x_1, b]$上，从而进入下一步计算；第三步对已确定的区间，重复第二步的方法……直到达到规定的精确度要求，计算结束.

3. 例题是用二分法求函数的近似零点. 教学时，可让学生用计算器或数学软件完成题目，通过解题，让学生感受、体验二分法中的算法思想.

三、拓展资源

（一）函数概念的发展

函数这一名词，是微积分的奠基人之一——德国的哲学家兼数学家莱布尼茨(Leibniz，1646—1716)所首先采用的. 在最初，莱布尼茨用函数一词表示变量 x 的幂，即 x^2，x^3，…. 其后莱布尼茨还用函数一词表示曲线上的横坐标、纵坐标、切线的长度、垂线的长度等所有与曲线上的点有关的量.

与莱布尼茨几乎同时，瑞士数学家雅克·柏努利(Jacques Bernoulli，1645—1705)给出了和莱布尼茨相同的函数定义. 1718 年，作为雅克·柏努利的弟弟的约翰·柏努利(Jean Bernoulli，1667—1748)给出了函数的如下定义：由任一变数和常数的任意形式所构成的量叫做这一变数的函数. 换句话说，按照约翰·柏努利的定义：由 x 和常量所构成的任一式子都可称之为关于 x 的函数.

约翰·柏努利的学生欧拉(Euler，1709—1783)，把约翰·柏努利关于函数的定义又推进了一步，使之更加明朗化. 欧拉在他非常著名的著作《无穷小分析引论》中指出，把凡是可以给出"解析式表示"的，通称之为函数. 欧拉这里所谓的"解析式表示"要比莱布尼茨所谓的"幂"、比约翰·柏努利所谓的"任意形式所构成的量"都要广泛得多. 欧拉把变数和常数之间由加、减、乘、除、开方、三角、指数、对数等运算所构成的式子都叫做解析函数，还将它分成"代数函数"与"超越函数"两类. 欧拉的这个函数定义和中学的函数定义已经比较接近了.

欧拉在提出"解析的函数"定义的同时，又考虑了用来表示任意画出的曲线的函数，并把它叫做"随意函数"，其定义为："在 xy 平面上任意画出的曲线所确定了的 x，y 之间的关系."这样使人们把当时仅可用图像给出的关系也称之为函数.

1775 年，欧拉又给出了如下的一个函数定义："如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变

量，即当后面的变量变化时，前面的这些变量也随之变化，则将前面的变量称之为后面的变量的函数".应该指出，在这里所谓的"随着变化而变化"中的"变化"一词，它的含义仍然是不够确切的.

由此可以看到，由莱布尼茨到欧拉所引入的函数概念，都还是和解析表达式、曲线表达等概念纠缠在一起.

由于法国数学家富里埃(Fourler，1763—1830)的工作，使以前对函数概念的理解中，用曲线(连续的或不连续的)表达、用一个式子表达、用多个式子表达都统一起来了.

为了适应当时所出现的各种情况，为了适应数学的发展，法国数学家柯西(Cauchy，1789—1857)引入了新的函数定义："在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值也可随之而确定时，则将最初的变数称之为'自变数'，其他各变数则称为'函数'."

人们不难看出，这一定义和中学课本的定义是很相近的. 在这里，函数的概念和曲线、连续、不连续等概念之间的纠缠不清的情况，已经得到了澄清.

但是，柯西的定义总还是考虑到 x，y 之间的关系可用解析式表示. 德国数学家黎曼(Riemann，1826—1866)和狄里赫莱(Dirichlet，1805—1859)又分别引入了新的定义.

黎曼的定义："对于 x 的每一个值，y 总有完全确定了的值与之对应，而不论建立 x，y 之间的对应方法如何，均将 y 称为 x 的函数."

狄里赫莱的定义："对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值和它对应，y 就叫做 x 的函数." 这定义后来被引入了数学分析教程. 至于黎曼的函数定义就是中学课程里的函数定义.

十九世纪七十年代，康托尔(Cantor，1845—1918)的集合论问世，维布伦(Veblen，1880—1960)、韦纳(Wiener，1894—1964)用映射观点定义函数，这里涉及到的变元 x，y 既可以是数，也可以是点、线段、区间……它被称为函数概念的近代定义. 显然，这个定义具有广泛性，揭示了函数概念的实质.

现代数学的发展和深入研究，使人们进一步感到函数定义中"对应"这个不明确的概念应避免. 1914 年，德国的豪斯道夫(Hansdorff，1868—1942)用"有序对"来定义函数. 1921 年，波兰的库拉托夫斯基(Kuratowski，1896—　)进一步用集合来定义有序对：$(a, b)=(\{a\}, \{a, b\})$，于是，20 世纪 60 年代，又给出了有序对集的函数定义.

上面我们对函数概念的历史发展作了概述，我们看到，"函数"这个重要概念发展到近代，经过了一段如此漫长的道路，从某种意义上来说，它反映了人类对事物逐渐精确化的认识过程.

（二）秦九韶法求方程的近似解

我国古代数学家秦九韶约在 1247 年(南宋时代)发现了一种高次方程根的近似计算法，我们称之为秦九韶法. 这种方法在有的国家叫霍耐(Horner)法，霍耐是英国数学家，他在 1819 年才发现这个方法，迟于我国 500 多年.

但由于这种方法计算程序冗长，不便于精确度要求较高的运算. 如果精确度要求不高，如要求到小数点后一位，可用此法来求，例如：

试求 $f(x)=x^3-8x+1$ 在区间 $[2, 3]$ 内的实根的近似值，精确到 0.1.

解：将区间 $[2, 3]$ 十等分，对各分点值逐个代入 $f(x)$，得下表：

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$f(x)$	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+

由于 x 从 2.7 变到 2.8 有一变号零点．所以 $f(x)$ 在区间 $(2.7,\ 2.8)$ 内有一实根，而 $f(2.75)<0$，因此，$x=2.8$ 就是 $f(x)$ 在区间 $[2,\ 3]$ 内，精确到 0.1 的实根近似值.

（三）揭示星期几的奥秘

公元 321 年 3 月 7 日，古罗马皇帝君士坦丁，正式宣布采用“星期制”，规定每一星期为七天，第一天为星期日，尔后星期一、星期二直至星期六，尔后再回到星期日，如此永远循环下去！君士坦丁大帝还规定，宣布的那天日子为星期一.

一星期为什么定为七天？这大约是出自月相变化的缘故．天空中再没有别的天象变化得如此明显，每隔七天便一改旧貌！另外，“七”这个数，恰与古代人已经知道的日、月、金、木、水、火、土七星的数目巧合，因此在古代神话中就用一颗星作为一日的保护神，“星期”的名称也因之而起.

我想读者一定很想知道历史上的某一天究竟是星期几的奥秘！为了揭开这个奥秘，我们先从闰年的设置讲起.

我们知道：一个回归年不是恰好 365 日，而是 365 日 5 小时 48 分 46 秒，或 365.242 2 日．为了防止这多出的 0.242 2 日积累起来，造成新年逐渐往后推移．因此我们每隔 4 年时间便设置一个闰年，这一年的二月从普通的 28 天改为 29 天．这样，闰年便有 366 天．不过，这样补来也不刚好，每百年差不多又多补了一天．因此又规定，遇到年数为“百年”的不设闰，扣它回来！这就是常说的“百年 24 闰”．但是，百年扣一天闰还是不刚好，又需要每四百年再补回来一天．因此又规定，公元年数为 400 倍数者设闰．就这么补来扣去，终于补得差不多刚好了！例如，1976、1988 这些年数被 4 整除的年份为闰年；而 1900、2100 这些年则不设闰；2000 年的年数恰能被 400 整除，又要设闰，如此等等.

闰年的设置，无疑增加了我们对星期几推算的难度．为了揭示关于星期几的奥秘，我们还要用到一个简单的数学工具——高斯函数：

$$y=[x].$$

这里 $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数，如：

$$[\pi]=3,$$
$$[-4.75]=-5,$$
$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=0,$$
$$[1\ 988]=1\ 988.$$

利用高斯函数，我们可以根据设闰的规律，推算出在公元 x 年第 y 天是星期几．这里变量 x 是公元的年数；变量 y 是从这一年的元旦，算到这一天为止(包含这一天)的天数．历法家已经为我们找到了这样的公式：

$$S=x-1+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+y.$$

按上式求出 S 后，除以 7，如果恰能除尽，则这一天为星期天；否则余数为几，则为星期几！

例如，君士坦丁大帝宣布星期制开始的第一天为公元 321 年 3 月 7 日. 容易算得：

$$\begin{cases}x-1=320\\ y=66\end{cases}$$

$$\begin{aligned}S&=320+\left[\frac{320}{4}\right]-\left[\frac{320}{100}\right]+\left[\frac{320}{400}\right]+66\\&=320+80-3+0+66\\&=463\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7).\end{aligned}$$

最后一个式子的符号表示 463 除以 7 余 1. 也就是说，这一天为星期一. 这是可以预料到的，因为当初就是这么规定的！

又如，我们共和国成立于 1949 年 10 月 1 日：

$$\begin{cases}x-1=1\ 948\\ y=274\end{cases}$$

$$\begin{aligned}S&=1\ 948+\left[\frac{1\ 948}{4}\right]-\left[\frac{1\ 948}{100}\right]+\left[\frac{1\ 948}{400}\right]+274\\&=1\ 948+487-19+4+274\\&=2\ 694\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7).\end{aligned}$$

原来，这一普天同庆的日子为星期六.

公元 2000 年 1 月 1 日，人类跨进了高度文明的 21 世纪，那么这一天是星期几呢？

$$\begin{cases}x-1=1\ 999\\ y=1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}S&=1\ 999+\left[\frac{1\ 999}{4}\right]-\left[\frac{1\ 999}{100}\right]+\left[\frac{1\ 999}{400}\right]+1\\&=1\ 999+499-19+4+1\\&=2\ 484\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7).\end{aligned}$$

计算表明：这一天也是星期六！

（四）函数思想在解题中的应用

函数是高中数学的主线，它是用运动、变化的观点研究、描述客观世界中相互关联的量之间的依存关系，形成变量数学的一大重要基础和分支. 函数的思想是指用运动和变化的观点，集合与对应的思想，去分析和研究数学问题中的数量关系；或建立函数关系，利用函数加以研究，从而使问题获得解决；或运用函数的图象和性质，去分析、解决函数的某些问题；或对于一些从形式上看是非函数问题，但经适当的数学变换或构造，使这一非函数的问题转化为函数的形式，并运用函数的有关性质来处理这一问题，从而使问题得到解决.

就中学数学而言，函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的.

以下内容及例题，仅供教师参考，不要求学生掌握.

1. 运用函数的单调性解题

单调性是函数的重要性质，某些数学问题，通过函数的单调性，可将函数值间的关系转化为自变量间的关系进行研究，从而达到化繁为简的目的. 特别是在比较数式大小、证明不等式，求值或最值，解方程(组)等方面应用十分广泛.

例 1 已知 a, b, c 为正实数，$c<a+b$ 且 $c>a-b$.

求证：$\frac{c}{c+1}<\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$.

证明：构造函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{x+1}\ (x\geqslant 0)$，由此可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调递增函数. $c<a+b$，从而有 $f(c)<f(a+b)$，所以

$$\frac{c}{c+1}<\frac{a+b}{(a+b)+1}=\frac{a}{(a+b)+1}+\frac{b}{(a+b)+1}<\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}.$$

即 $\frac{c}{c+1}<\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$.

***例 2** 解不等式 $(x^2-20x+38)^3+4x^2+152<x^3+84x$.

解：原不等式可变形为

$$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)<x^3+4x.$$

令 $f(x)=x^3+4x$，原不等式即为

$$f(x^2-20x+38)<f(x). \qquad ①$$

因为函数 $f(x)=x^3+4x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以不等式①与 $x^2-20x+38<x$ 同解.

解此不等式，得 $2<x<19$.

2. 用函数的奇偶性解题

奇偶性是函数的又一重要性质，利用奇偶函数的对称性，常能使求解的问题避免复杂的讨论.

例 3 证明不等式 $\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}\ (x\neq 0)$.

证明：令 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}\ (x\neq 0)$，

则
$$\begin{aligned} f(-x)&=\frac{-x}{1-2^{-x}}+\frac{x}{2}=\frac{-x\cdot 2^x}{2^x-1}+\frac{x}{2}\\ &=\frac{x+x(2^x-1)}{1-2^x}+\frac{x}{2}=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}\\ &=f(x). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x>0$ 时，因 $1-2^x<0$，故 $f(x)<0$. 于是当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)<0$. 故当 $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)<0$，即原不等式成立.

3. 用函数的值域解题

求函数的值域，涉及到众多的数学知识，构成了中学数学的重要横向知识体系，同时也为利用函数值域解题提供了广阔天地. 尤其对某些含参数的不等式，在分离参数的基础上，通过求函数的值域进而达到确定参数的取值范围，从而避免了对参数的繁琐讨论.

***例 4** 已知不等式 $1\leqslant \cos^2 x+\sin x+a\leqslant \frac{17}{4}$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：令 $f(x)=\cos^2 x+\sin x+a=-\sin^2 x+\sin x+1+a=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}+a$，

所以 $y_{\min}=-1+a$，$y_{\max}=\frac{5}{4}+a$.

要使命题成立，只需

$$\begin{cases}y_{\min}\geqslant 1\\ y_{\max}\leqslant\frac{17}{4}\end{cases}\quad 即\begin{cases}-1+a\geqslant 1\\ \frac{5}{4}+a\leqslant\frac{17}{4}\end{cases}$$

解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

4. 用一次函数的性质解题

某些数学问题，通过构造一次函数，将问题转化为判断一次函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上函数值的符号问题，从而使问题获得解决.

例 5 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的一切实数，不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立，试求 x 的取值范围.

解：令 $f(p)=(x-1)p+(x^2-4x+3)$，

当 $x=1$ 时，$f(p)=0$，不满足 $f(p)>0$.

所以函数 $f(p)$ 的图象是一条线段，要使 $f(p)>0$ 恒成立，当且仅当 $f(0)>0$，且 $f(4)>0$.

解不等式组得 $x\in(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$.

例 6 设 a，b，c 为绝对值小于 1 的实数，求证 $ab+bc+ca+1>0$.

证明：因为 $ab+bc+ca+1=(b+c)a+bc+1$ 且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，所以当 $b+c=0$ 时，有 $ab+bc+ca+1=1-c^2>0$. 当 $b+c\neq 0$ 时，构造函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$，由 $f(1)=b+c+bc+1=(b+1)(c+1)>0$，$f(-1)=-b-c+bc+1=(1-b)(1-c)>0$，知对 $-1<x<1$，都有 $f(x)>0$ 成立，所以 $f(a)>0$，即 $ab+bc+ca+1>0$.

5. 用二次函数的性质解题

二次函数的应用十分广泛. 当所给问题含有形如 $m+n=p$，$mn=q$ 的等式，或含有与二次函数的判别式相似的结构时，常可通过构造相关的二次函数来促使问题的解决.

例 7 已知 a 为正实数，$2c>a+b$，求证：$c^2>ab$；$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

证明：构造函数 $f(x)=ax^2-2cx+b$，由 $2c>a+b$，知 $f(1)<0$，又因 $a>0$，故函数图像与 x 轴在 $x=1$ 的两边各有一个交点，从而有 $\Delta=4c^2-4ab>0$，即 $c^2>ab$.

解方程 $f(x)=ax^2-2cx+b=0$，得 $x_1=\frac{c-\sqrt{c^2-ab}}{a}$，$x_2=\frac{c+\sqrt{c^2-ab}}{a}$.

所以 $\frac{c-\sqrt{c^2-ab}}{a}<1<\frac{c+\sqrt{c^2-ab}}{a}$，即 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

***例 8** 已知 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$ 且满足 $a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，试确定 e 的最大值.（第七届美国中学生数学奥林匹克竞赛试题）

解：构造二次函数 $f(x)=4x^2+2(a+b+c+d)x+(a^2+b^2+c^2+d^2)=(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2\geqslant 0$，即 $f(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x)\geqslant 0$，所以有 $\Delta=4(a+b+c+d)^2-16(a^2+b^2+c^2+d^2)\leqslant 0$. 将 $a+b+c+d=8-e$，$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$ 代入上式，得 $(8-e)^2-4(16-e^2)\leqslant 0$，解得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$，所以 e 的最大值为 $\frac{16}{5}$.

四、教学案例

案例1：2.1.1 函数

一、教学目标

1. 知识目标：(1) 会用集合与对应的语言刻画函数；(2) 会求一些简单函数的定义域和值域，初步掌握换元法的简单运用.

2. 能力目标：通过对实例的探究，让学生感受、体验对应关系在刻画函数概念中的作用，使学生对数学的高度抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性有进一步的认识，提高抽象概括、分析总结、数学表达交流等基本数学思维能力；培养学生分析、解决问题的能力.

3. 情感目标：通过师生、生生互动的教学活动过程，让学生体会成功的愉悦，培养学生热爱数学的态度，提高数学学习的兴趣，树立学好数学的信心.

二、教学重点、难点

重点是函数概念的理解，难点是对函数符号 $y=f(x)$ 的理解.

三、教学方法与教学手段

教学方法：采用"学案教学"的教学方法，通过不同实例的探究，让学生积极参与教学活动.

教学手段：采用多媒体辅助教学，增强直观性，增大课堂容量，提高课堂效率.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课题引入	1. 实例引入 复习初中的常量、变量与函数的概念. 问题1：在加油站为汽车加油，油价为每升4.16元，启动加油机开关后表示加油量和金额的两个窗口的数字不停地跳动直到加油量为12升时停下. 问金额 y 元与加油量 x 升之间的关系式是什么？	学生积极思考，回答教师提出的问题.	从多媒体展示的生活问题入手，再现初中变量观点描述函数的概念，为后面用集合和对应的观点来定义函数奠定基础. 通过实例：①认识生活中充满变量间的依赖关系；②激发学生学习兴趣，提高发散思维能力.
概念形成	让同学们看课本第32页例1～3，回答下列问题： 问题2：①你从例题中了解到哪些信息？ ②自变量的取值范围是什么？	学生独立思考2～3分钟，然后分组讨论，交流. 讨论、整理出本组同学所想到的各种想法. 教师巡视，关注学生讨论的情况.	实际问题引出概念，激发学生兴趣，给学生思考、探索的空间，让学生体验数学发现和创造的历程，提高分析和解决问题的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	③自变量与因变量之间有何关系？ ④因变量的取值范围是什么？ 2. 函数的概念 设集合 A 是一个非空的数集，对 A 内任意数 x，按照确定的法则 f，都有唯一确定的数值 y 与它对应，则这种对应关系叫做集合 A 上的一个函数，记作 $y=f(x), x\in A$. 其中 x 叫做自变量，自变量取值的范围（数集 A）叫做这个函数的定义域. 如果自变量取值 a，则有法则 f 确定的值 y 称为函数在 a 处的函数值，记为 $y=f(a)$ 或 $y\|_{x=a}$. 所有函数值构成的集合 $\{y\mid y=f(x), x\in A\}$ 叫做这个函数的值域. 问题 3： (1) 下列对应法则是否是在给定集合上的一个函数？ ①$\mathbf{R}$，g：自变量的倒数； ②$\mathbf{R}_+$，h：自变量的平方根； ③$\mathbf{R}$，s：自变量 t 的平方减 2. (2) 下面一组函数，是否为相同的函数？ ①$f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$； ②$s(t)=t^2$，$t\in\mathbf{R}$； ③$g(x-2)=(x-2)^2$，$x\in\mathbf{R}$. 确定一个函数的两要素：定义域和对应法则. 两个变量之间是否具有函数关系，只要检验：(1) 定义域和对应法则是否给出；(2) 根据给出的对应法则，自变量 x 在其定义域中的每一个值，是否都能确定唯一的函数值 y. 未明确指出定义域的函数，约定其定义域就是：不使函数式失去意义、不使实际问题失去意义的自变量取值范围.	总结出函数关系实质. 在整个交流讨论中，教师既有对正确认识的赞赏，又有对错误见解的分析.	1. 师生互动，抓住函数概念这一重点，举出实例来突破理解对应法则 f 这一难点. 2. 教师在讲解概念时，在多媒体屏幕上有意识地用不同颜色的字体，突出强调重点，调动学生的非智力因素理解概念.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
习题研讨	3. 习题研讨 1. 求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域. 2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$x\in\mathbf{R}$，在 $x=0$，1，2 处的函数值和值域. 3. (1)若函数 $f(x)=x^2$，求 $f(x-1)$； (2)若函数 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x)$.	例 1 让学生独立进行求解，规范解题格式，小结求函数定义域的方法. 例 2 让学生通过自主解答，发现困难，教师适时引导，小结求函数值域的数学方法. 例 3 让学生分组讨论、交流，启发学生联想到整体代换.师生共同完成，小结求函数对应法则.	教师先分析每个例题，学生分组讨论，然后自己独立解答，最后通过大屏幕展示规范的解题格式，培养解题规范的习惯. 使学生体会整体代换的思想.
巩固落实	4. 巩固练习 教材第 33 页练习 A 第 1，3，4，5 题；教材第 33～34 页练习 B 第 1，2，3，4，5 题.	通过实物投影仪，展示学生解题过程，师生共同分析出现的问题，引导学生规范解题步骤.	通过不同形式的练习使学生理解函数的概念，能熟练地求函数的定义域和对应法则.
归纳小结	5. 小结 ①理解函数的概念； ②会求简单函数的定义域、值域、对应法则.	在老师启发诱导下，学生观察、归纳、总结，教师完善.	让学生积极发言，归纳总结本节课的收获，教师及时点评并归纳总结，使学生对所学内容有一个整体的认识.
布置作业	6. 作业 教材第 56 页习题 2-1A 第 4 题；教材第 53 页习题 2-1B 第 1 题. 预习教材 34～36 页“映射与函数”； 提高性习题： 1. 求函数 $f(x)=\frac{3}{1-\sqrt{1-x}}$ 的定义域. 2. 求函数 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ 的值域. 3. 若 $f(x-4)=\frac{x}{x-8}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.		分层次布置作业，基础层次的只做课本作业，提高层次的要完成思考题. 帮助学生巩固所学知识，反馈课堂教学效果.

五、板书设计

		§2.1.1 函数 1. 变量与函数的概念	
一、复习引入	二、新课讲解	三、习题研讨	四、巩固落实
	函数的概念	题 1	
		题 2	
		题 3	
	小结：		
	作业：		

案例 2：2.1.4 函数的奇偶性

一、教学目标

1. 知识目标：使学生理解奇函数、偶函数的概念，学会运用定义判断函数的奇偶性.

2. 能力目标：通过设置问题情境培养学生判断、推理的能力.

3. 情感目标：通过绘制和展示优美的函数图象来陶冶学生的情操. 通过组织学生分组讨论，培养学生主动交流的合作精神，使学生学会认识事物的特殊性与一般性之间的关系，培养学生善于探索的思维品质.

二、教学重点、难点

重点是函数的奇偶性的概念；难点是函数奇偶性的判断.

三、教学方法

本节课采用观察、归纳、启发探究相结合的教学方法，运用现代化多媒体教学手段，进行教学活动. 首先按照由特殊到一般的认知规律，由形及数、数形结合，通过设置问题引导学生观察分析归纳，形成概念，使学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探索和交流的过程中获得对函数奇偶性的全面的体验和理解. 对于奇偶性的应用采取讲练结合的方式进行处理，使学生边学边练，及时巩固，同时设计问题，探究问题，深化对概念的理解.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习在初中学习的轴对称图形和中心对称图形的定义.	教师提出问题，学生回答.	为学生认识奇、偶函数的图象特征做好准备.
概念形成	1. 要求学生同桌两人分别画出函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ 与 $g(x)=x^2$ 的图象.	1. 教师巡视指导，学生作图，学生作完图后教师提问：观察我们画出的两个函数的图象，分别具有怎样的对称性？ 学生回答：$f(x)=\frac{1}{4}x^3$ 关于原点成中心对称图形；$g(x)=x^2$ 关于 y 轴成轴对称图形.	1. 要求学生动手作图以锻炼学生的动手实践能力，为下一步问题的提出做好准备. 并通过问题的提出来引导学生从形的角度认识两个函数各自的特征.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	2. 多媒体屏幕上展示函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ 和函数 $g(x)=x^2$ 的图象，并让学生分别求出 $x=\pm 3$，$x=\pm 2$，$x=\pm\frac{1}{2}$，…时的函数值，同时令两个函数图象上对应的点在两个函数图象上闪现，让学生发现两个函数的对称性反映到函数值上具有的特性：$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$. 然后通过解析式给出证明，进一步说明这两个特性对定义域内的任意一个 x 都成立. 3. 奇函数、偶函数的定义： 奇函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意一个 x，都有 $$f(-x)=-f(x),$$ 则这个函数叫奇函数. 偶函数：设函数 $y=g(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意一个 x，都有 $$g(-x)=g(x),$$ 则这个函数叫做偶函数.	2. 老师边让学生计算相应的函数值，边操作课件，引导学生发现规律，总结规律，然后要求学生给出证明；学生通过观察和运算逐步发现两个函数具有的不同特性：$$f(-x)=-f(x),$$ $$g(-x)=g(x).$$ 3. 教师引导归纳：这时我们称像函数 $f(x)=x^3$ 这样的函数为奇函数，像函数 $g(x)=x^2$ 这样的函数为偶函数，请同学们根据对奇函数和偶函数的初步认识来加以推广，给奇函数和偶函数分别下一个定义. 学生讨论后回答，然后老师引导使定义完善. 在屏幕展示奇函数和偶函数的定义. 老师：根据定义，哪位同学能举出另外一些奇函数和偶函数的例子？ 学生：$f(x)=x^7+\frac{1}{2}x$，$f(x)=-x^6-4x^4$，….	2. 通过特殊值让学生认识两个函数各自的对称性实质：是自变量互为相反数时，函数值互为相反数和相等这两种关系. 3. 通过引例使学生对奇函数和偶函数的形和数的特征有了初步的认识，此时再让学生给奇函数和偶函数下定义应是水到渠成.
概念深化	(1) 强调定义中“任意”二字，说明函数的奇偶性是函数在定义域上的一个整体性质，它不同于函数的单调性. (2) 奇函数与偶函数的定义域的特征是关于原点对称. (3) 奇函数与偶函数图象的对称性： 如果一个函数是奇函数，则这个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形. 反之，如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数. 如果一个函数是偶函数，则它的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形；反之，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，则这个函数是偶函数.	教师设计以下问题组织学生讨论思考回答. 问题1：奇函数、偶函数的定义中有“任意”二字，说明函数的奇偶性是怎样的一个性质？与单调性有何区别？ 问题2：$-x$ 与 x 在几何上有何关系？具有奇偶性的函数的定义域有何特征？ 问题3：结合函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ 的图象回答以下问题： (1) 对于任意一个奇函数 $f(x)$，图象上的点 $P(x, f(x))$ 关于原点的对称点 P' 的坐标是什么？点 P' 是否也在函数 $f(x)$ 的图象上？由此可得到怎样的结论. (2) 如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心	通过对两个问题的探讨，引导学生认识以下两点：(1) 函数的奇偶性是函数在定义域上的一个整体性质，它不同于单调性. (2) 函数的定义域关于原点对称是一个函数为奇函数或偶函数的必要条件. 教师层层深入地提出问题，学生根据教师的诱导，思考问题并积极回答问题，加深对定义的理解. 由于学生对函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ 和函数 $g(x)=x^2$ 的图象的对称性已有所认识，在此加以推广得到奇函数和偶函数的图象的性质是比较容易的，经过由形到数再由数到形的过程，可使学生加深对本小节内容的理解.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
		对称图形，能否判断它的奇偶性？ 学生通过回答问题3可以把奇函数图象的性质总结出来，然后教师让学生自己研究一下偶函数图象的性质.	
应用举例	例1　判断下列函数的奇偶性： (1) $f(x)=x+x^3+x^5$； (2) $f(x)=x^2+1$； (3) $f(x)=x+1$； (4) $f(x)=x^2$，$x\in[-1, 3]$； (5) $f(x)=0$. 学生练习：教材第49页，练习A第1题. 例2　研究函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的性质并作出它的图象. 学生练习：教材第53页，练习A第2小题，教材第54页练习B第1～2题.	1. 选例1的第(1)小题板书来示范解题的步骤，其他例题让几个学生板演，其余学生在下面自己完成，针对板演的同学所出现的步骤上的问题进行及时纠正，教师要适时引导学生做好总结归纳. 2. 例2可让学生来设计如何研究函数的性质和图象的方案，并根据学生提供的方案，点评方案的可行性，并比较哪种方案简单. 3. 做完例1和例2后要求学生做练习，及时巩固. 在学生练习过程中，教师做好巡视指导.	1. 通过例1解决如下问题： ① 根据定义判断一个函数是奇函数还是偶函数的方法和步骤是：第一步先判断函数的定义域是否关于原点对称；第二步判断 $f(-x)=f(x)$ 还是 $f(-x)=-f(x)$. ② 通过例1中的第(3)题说明有的函数既不是奇函数也不是偶函数. ③ 例1中的第(4)小题说明判断函数的奇偶性先要看一下定义域是否关于原点对称. ④ $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数. 可进一步引导学生探究一个函数既是奇函数又是偶函数的函数是函数值为0的常值函数. 前提是定义域关于原点对称. ⑤ 总结：对于一个函数来说，它的奇偶性有四种可能：是奇函数但不是偶函数；是偶函数但不是奇函数；既是奇函数又是偶函数；既不是奇函数也不是偶函数. 2. 对于例2主要让学生体会学习了函数的奇偶性后为研究函数的性质带来的方便. 在此问题的处理上要先求一下函数的定义域，这是研究函数性质的基础，然后判断函数的奇偶性，再根据奇、偶函数图象的对称性，只研究函数在 y 轴一侧的图象和性质就可以知道在另一侧的图象和性质.
归纳小结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.	让学生谈本节课的收获，并进行反思.	关注学生的自主体验，反思和发表本堂课的体验和收获.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
布置作业	层次一：教材第 52 页，习题 2－1A，第 6～8 题. 层次二：教材第 53 页，习题 2－1B，第 2～4 题. 层次三：补充题：判断下列函数的奇偶性： (1) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x+3\rvert-3}$； (2) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$； (3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-1}$.		通过分层作业使学生进一步巩固本节课所学内容，并为学有余力和学习兴趣浓厚的学生提供进一步学习的机会.

案例 3：2.2.2　二次函数的图象与性质

一、教学目标

1. 知识目标：

(1) 使学生掌握研究二次函数的一般方法——配方法；

(2) 进一步掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象的顶点坐标、对称轴方程、单调区间和最值的求法.

2. 能力目标：

(1) 培养学生的观察分析能力，引导学生学会用数形结合的方法研究问题；

(2) 培养学生由特殊事例发现一般规律的归纳能力.

3. 情感目标：

(1) 通过新旧知识的认识冲突，激发学生的求知欲；

(2) 通过合作学习，培养学生团结协作的思想品质.

二、教学重点、难点

运用配方法研究二次函数的性质.

三、教学方法

利用多媒体辅助教学手段，从感性认识入手升华到理性认识，结合精心设计的问题，引导学生思考、探索，在解决问题中建构新知.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 二次函数的定义. 2. 求二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的对称轴和顶点坐标.	教师通过多媒体展示问题，学生思考后回答.	通过对旧知识的回顾为新知识的学习做好认知铺垫.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	1. 研究二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象和性质： (1) 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质和图象特征： ① 偶函数，图象关于 y 轴对称； ② 顶点坐标(0，0)； ③ 当 $a>0$ 时，开口向上，在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，当 $x=0$ 时，有最小值 0； ④ 当 $a<0$ 时，开口向下，在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，当 $x=0$ 时，有最大值 0. (2) 函数图象随 a 值变化的规律： 当 $a<0$ 时，抛物线在 x 轴下方，开口向下并随 a 的增大逐渐变大；当 $a>0$ 时，在 x 轴上方，开口向上并随 a 的增大逐渐变小. 2. 研究一般的二次函数的性质和图象： 引例 1：研讨二次函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+6$ 的性质与图象. 引例 2：研讨二次函数 $f(x)=-x^2-4x+3$ 的性质和图象. 结论： 对于任何的二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 都可通过配方化为： $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ $=a(x-h)^2+k$ 其中，$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 二次函数的性质如下： (1) 函数的图象是一条抛物线，抛物线顶点的坐标是 (h, k)，抛物线的对称轴是直线 $x=h$； (2) 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，函数在 $x=h$ 处取最小值 $k=f(h)$；在区间 $(-\infty, h]$ 上是减函数，在区间 $[h, +\infty)$ 上是增函数； (3) 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数在 $x=h$ 处取最大值 $k=f(h)$；在区间 $(-\infty, h]$ 上是增函数，在区间 $[h, +\infty)$ 上是减函数.	1. 教师展示问题：要求在同一坐标系中作出下列函数的图象：$y=-3x^2$，$y=-2x^2$，$y=-x^2$，$y=x^2$，$y=2x^2$，$y=3x^2$，回答下列问题： (1) 指出函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的单调性、奇偶性、最值与图象开口方向、对称性、顶点； (2) 观察函数图象随 a 值变化的规律. 学生作图过程中，教师提醒学生注意 $y=ax^2$ 与 $y=-ax^2$ 的图象具有怎样的对称性，以便提高作图的速度. 学生作完图后，教师要学生观察图象讨论提出的问题，回答问题. 教师借助多媒体手段，展示函数图象随 a 值变化的过程. 教师问：若将函数的图象进行平移，则函数的哪些性质将不发生变化？哪些将发生变化？ 组织学生讨论. 2. 教师设计问题，学生探究： 问题 1：指出两个函数的开口方向，并说明哪个函数图象的开口较大？ 问题 2：分别将二次函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+6$ 与 $f(x)=-x^2-4x+3$ 配方，然后分别求出两个函数的最值以及与 x 轴的交点. 问题 3：列表画图，分别在直角坐标系中作出两个函数的图象： (1) 推测两个函数图象的对称轴，并给出证明. (2) $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的对称轴是______，顶点坐标是______. (3) 分别指出两个函数的单调区间.	1. 因为学生对二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 已比较熟悉，首先由此基本二次函数认识二次函数的有关性质：单调性，最值和图象的对称性. 另外，通过学生所作的一组函数的图象，引导学生发现二次函数图象开口大小和方向随二次项系数 a 的变化规律. 培养学生的观察和分析能力. 2. (1) 通过设计四组问题，引导学生运用数形结合的方法来解决问题，在解决问题的同时，使学生发现研究二次函数性质的主要方法——配方法. (2) 通过学生对问题的解决，充分发挥学生的主体作用，教师的主导作用，让学生动手、动脑、动口，合作交流，充分体会知识的形成过程.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
		问题4：将二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 配方，并回答下列问题： (1) 函数图象的顶点坐标是______，对称轴是______. (2) 对于 $a>0$ 和 $a<0$ 分别指出函数图象的开口方向，单调区间和最值. 学生在完成以上问题的过程中教师要适时启发，并在最后加以总结.	
概念深化	1. "配方法"是研究二次函数的主要方法，熟练地掌握配方法是掌握二次函数性质的关键，对一个具体的二次函数，通过配方就能知道这个二次函数的主要性质. 2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的 a、b、c 对函数性质与图象的影响.	1. 教师指出配方法是研究二次函数性质的通法，对于二次函数性质的有关结论不必死记硬背，关键在于学会如何运用配方法来研究二次函数的性质. 2. 组织学生合理分组，进行讨论交流.	加深学生对所学知识的理解.
应用举例	1. 例题：求函数 $y=3x^2+2x+1$ 的最小值和它的图象的对称轴，并说出它在哪个区间上是增函数？在哪个区间上是减函数？ 2. 巩固练习： 教材第60页练习A第1，2题； 教材第60页练习B第1～3题.	1. 例题由学生板演完成，对出现的问题及时给予纠正. 2. 学生练习. 完成后找学生口答题目答案，教师进行及时评价.	1. (1) 让学生充分体验研究二次函数的方法——配方法. (2) 通过学生板演，可以发现学生在解题过程中出现的问题，并及时加以纠正. 2. 巩固配方法的运用.
归纳小结	方法：研究二次函数的主要方法——配方法. 知识：二次函数的图象与性质的有关结论.	1. 由学生口答二次函数通过配方以后就可得到它的有关性质. 2. 分组讨论课本第61页"探索与研究"提出的思考与讨论的问题. 学生回答后，教师加以总结.	通过分组思考和讨论使学生对二次函数的性质和图象有一个深刻的认识.
布置作业	层次一：教材第63页习题2－2A第5～9题. 层次二：教材第64页习题2－2B第1～4题.	层次一的题目要求所有学生完成，层次二的题目要求中等以上水平的学生完成.	使学生进一步巩固和应用所学知识.

案例 4：2.3　函数的应用（I）

一、教学目标

① 知识目标：初步掌握一次和二次函数模型的应用，会解决较简单的实际应用问题.

② 能力目标：尝试运用一次和二次函数模型解决实际问题，提高学生的数学建模能力.

③ 情感目标：了解数学知识来源于生活，又服务于实际，从而培养学生的应用意识，提高学习数学的兴趣.

二、教学重点、难点

一次和二次函数模型的应用是本节的重点，数学建模是本节的难点.

三、教学方法

本节内容主要是例题教学，因此采用学生探究解题方法，总结解题规律，教师启发诱导的方法进行教学.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	一次和二次函数的有关知识.	教师提出问题，学生回答.	以旧引新，激发兴趣.
应用举例	1. 一次函数模型的应用 例 1　某列火车从北京西站开往石家庄，全程 277 km. 火车出发 10 min 开出 13 km 后，以 120 km/h 的速度匀速行驶. 试写出火车行驶的总路程 s 与匀速行驶的时间 t 之间的关系，并求火车离开北京 2 h 内行驶的路程.	教师提出问题，让学生读题，找关键字句，联想学过的函数模型，求出函数关系式. 学生根据要求，完成例 1.	通过此问题背景，让学生恰当选择相应一次函数模型解决问题，加深对函数概念本质的认识和理解. 让学生体验解决实际问题的过程和方法.
	解题方法： 1. 读题，找关键点； 2. 抽象成数学模型； 3. 求出数学模型的解； 4. 做答.	学生总结，教师完善.	培养学生分析归纳、概括能力. 从而初步体验解应用题的规律和方法.
	例 2　试说明函数 $f(x)=(1+x)^3$ 在区间[0, 0.1]上各点的值，可近似地用函数 $g(x)=1+3x$ 在相应各点的值来表示，其绝对误差小于 0.1.	教师提问，学生思考并回答下列问题： ① 比较两函数的值常采用什么方法? ② 要证绝对误差小于 0.1，如何用式子表示? 教师分析： $\lvert f(x)-g(x)\rvert=x^2\lvert 3+x\rvert$（*） 只要注意到在区间[0, 0.1]上等式右边是增函数，求出其最大值，若最大值小于 0.1 即可. 由学生完成证明. ③学生完成题目.	① 此问题不易入手，由教师讲解会影响学生的参与. 采用分步设问的方法，有利于引导学生参与解题过程. ② 让学生体验比较两个函数值的大小方法—作差比较，并加深对函数的性质及求函数的最值的应用. 体验近似与精确的关系，进一步加深学生对函数本质的理解. 因（*）式是本题的难点，由教师分析，学生完成，有利于学生掌握方法.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	方法总结：用作差法证明在给定区间上两函数值的绝对误差.	学生总结，教师补充.	提炼方法，提高解题能力.
	2. 二次函数模型的应用 例 3　某农家旅游公司有客房 300 间，每间日房租 20 元，每天都客满. 公司欲提高档次，并提高租金. 如果每间客房每日增加 2 元，客房出租数就会减少 10 间. 若不考虑其他因素，旅社将房间租金提高到多少时，每天客房的租金总收入最高？	让学生自己读题，并回答下列问题： ① 题目求什么，应怎样设未知量； ② 每天客房的租金收入与每间客房的租金、客房的出租数有怎样的关系； ③ 学生完成题目. 法一：用列表法求解. 此法可作为学生探求思路的方法，但由于运算比较繁琐，一般不用，应以法二求解为重点. 对法二让学生读题，回答问题. 教师指导，学生自己动手解题.	解应用题首先要读懂题意，设计出问题指导学生审题，建立正确的数学模型. 同时，培养学生独立解决问题的能力.
巩固练习	课堂练习 教材第 68 页习题 2—3A 第 1、3 题.	学生练习，师生点评.	巩固本节所学方法.
归纳小结	课堂小结 解决应用问题的步骤： 读题——列式——解答.	学生总结，师生完善.	使学生养成归纳总结的好习惯. 让学生初步掌握数学建模的基本过程.
布置作业	教材第 69 页习题 2—3B 第 1、3 题； 教材第 66 页“思考与讨论”.	学生练习.	使学生巩固本节所学知识与方法.

案例 5：2.4.1　函数的零点

一、教学目标

1. 知识目标：理解函数零点的意义，能判断二次函数零点的存在性，会求简单函数的零点，了解函数的零点与方程根的关系.

2. 能力目标：体验函数零点概念的形成过程，提高数学知识的综合应用能力.

3. 情感目标：让学生初步体会事物间相互转化的辩证思想.

二、教学重点、难点

重点是函数零点的概念及求法；难点是利用函数的零点作图.

三、教学方法

本节课是对初中内容的加深，学生对相关知识比较熟悉，因此采用以学生活动为主，自主探究，合作交流的教学方法为宜.

四、教学过程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>复习引入</td><td>（1）一元二次方程是否有实根的判定方法.
（2）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标、对称轴方程等相关内容.</td><td>学生思考后回答.</td><td>以旧引新，利于学生建构知识网络.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">概念形成</td><td>1. 实例引入
引例：已知函数 $y=x^2-x-6$，
（1）当 x 取何值时，$y=0$?
（2）作出函数的简图.
$x=-2$ 或 $x=3$ 是函数 $y=x^2-x-6$ 的零点.</td><td>问题一：观察函数的零点在其图象上的位置.
学生动手解题，并观察思考，教师总结引例.</td><td>让学生动手动脑来感知知识发生发展的过程，了解函数的零点和方程根的联系，提高作图与识图以及自主解决问题的能力，使学生养成独立思考的好习惯.</td></tr>
<tr><td>2. 函数的零点
一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在实数 a 处的值等于零，即 $f(a)=0$，则 a 叫做这个函数的零点.</td><td>问题二：结合引例给函数的零点下定义.
教师提出问题，学生思考回答，师生完善.</td><td>培养学生的归纳能力，让学生尝试由特殊到一般的思维方法.</td></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>3. 深化概念
引导学生回答下列问题：
① 如何求函数的零点?
② 函数的零点与图象的关系.
③ 结合引例指出函数、方程、不等式三者间存在的联系.</td><td>学生思考、回答，师生点评、总结.</td><td>以问题研讨形式替代教师的说明，有利于学生对知识的掌握，并进一步深化对函数零点概念的理解.</td></tr>
<tr><td>巩固练习</td><td>练习：求函数 $y=-x^2-2x+3$ 的零点，并指出 $y>0$，$y<0$ 时，x 的取值范围.</td><td>学生练习.</td><td>让学生进行模仿练习，能及时巩固所学知识与方法. 也突出了对二次函数零点的应用.</td></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>4. 二次函数零点的判定
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点个数，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根个数见下表.
<table><tr><th>判别式</th><th>方程的根</th><th>函数的零点</th></tr><tr><td>$\Delta>0$</td><td>两个不相等的实根</td><td>两个零点</td></tr><tr><td>$\Delta=0$</td><td>两个相等的实根</td><td>一个二重零点</td></tr><tr><td>$\Delta<0$</td><td>无实根</td><td>无零点</td></tr></table></td><td>问题三：对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是否一定有零点? 如何判定?
学生讨论，小组代表发言，师生共同总结，并完成表格.</td><td>倡导学生合作学习，让学生体验成功的快乐，激发学生的学习兴趣. 利用表格的形式，有利于学生对比记忆.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	5. 二次函数零点的性质 ① 二次函数的图象是连续的，当它通过零点时（不是二重零点），函数值变号. ② 相邻两个零点之间的所有的函数值保持同号. 对任意函数，只要它的图象是连续不间断的，上述性质同样成立. 6. 二次函数的零点的应用 ① 利用二次函数的零点研究函数的性质，作出函数的简图； ② 根据函数的零点判断相邻两个零点间函数值的符号，观察函数的一些性质.	结合引例，教师引导学生总结.	结合引例，引导学生初步了解函数零点的性质及应用．既有利于突出重点，又有利于培养学生观察、分析、归纳的数学能力，同时也深化了对函数零点的认识.
	例　求函数 $y=x^3-2x^2-x+2$ 的零点，并画出它的图象.	学生求出零点，教师引导，师生共同完成作图，并归纳作图的方法.	学生利用零点作图有一定的困难，故师生共同分析怎样列表、取值、画函数的简图，突出重点，解决难点.
巩固练习	7. 课堂练习 教材第 72 页练习 A 第 1 (2) (4) 题，第 2 (1) 题.	学生练习.	进一步巩固本节所学内容.
	思考题：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在唯一的零点，则 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的符号会有怎样的关系？	课后练习.	让学生体验正确运用所学知识自主探求问题的方法，激发学生获取新知识的兴趣，为进一步学习新知识做准备.
归纳小结	课堂小结 (1) 知识方面 学习了函数的零点的定义及其求法，利用函数的零点作函数的简图. (2) 数学思想方法 主要有转化的思想、数形结合的思想.	学生总结，师生补充完善.	让学生回顾本节所学知识与方法，以逐步提高学生自我获取知识的能力．有利于发现教与学中存在的问题，并及时反馈纠正，使知识结构更系统、更完善.
布置作业	教材第 72 页练习 B 第 1 (3)，2 (2) 题.	学生练习.	让学生巩固所学内容．为下节课的学习做好准备.

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 33 页）

1. 略.
2. 略.
3. $f(0)=1$，$f(-2)=-3$，$f(15)=-224$.
4. (1) $\{x \mid x\neq 5\}$.　　(2) $[1, +\infty)$.

   (3) $\left[\frac{3}{2}, 7\right]$.　　(4) $\{0\}$.
5. $f(-x)=2x^2$；

   $f(1+x)=2x^2+4x+2$.
6. $f(x)=x^2-2x+1$.
7. $B=\{29, 30, 31\}$，31、29、31、31、30.
8. $[-2, 3]$.

练习 B（第 33 页）

1. $s=5+110t$，$0<t\leqslant 8$.
2. 解：A 随 h 的增大而增大.

   由题意知，等腰梯形的上底长为$(2+2h)$ m，由等腰梯形的面积公式，得

   $A=\frac{1}{2}(2+2+2h)h=(2+h)h=h^2+2h$，

   则所求函数关系式为 $A=h^2+2h$，其中 $h\in[0, 1.8]$.
3. (1) 是.

   (2) 是.

   (3) 不是，由$\frac{1}{x}$有意义可得 $x\neq 0$，即定义域是$\{x \mid x\neq 0\}$.

   (4) 不是，由$\sqrt{x}$有意义可得 $x\geqslant 0$，即定义域是 $[0, +\infty)$.
4. (1) $[2, 8]$. (2) $(-\infty, 0]$.
5. 因为 $f[f(x)]=[f(x)]^2+m$

   $=(x^2+m)^2+m$

   $=x^4+2mx^2+m^2+m$，

   所以，$g(x)=x^4+2mx^2+m^2+m$.

练习 A（第 36 页）

1. (1) (3) (4)是 A 到 B 的映射；(2) (5)不是 A 到 B 的映射.
2. (1) $f(2)=1$，$f(5)=10$，$f(8)=19$.

(2) 由 $f(x)=3x-5=35$，解得 $x=\dfrac{40}{3}$.

由 $f(x)=3x-5=47$，解得 $x=\dfrac{52}{3}$.

$f(x)$为 35，47 时的原象依次为 $\dfrac{40}{3}$，$\dfrac{52}{3}$.

3. (1) x 为-3，-2，0，2，3 时的象依次为 10，5，1，5，10.

   (2) $f(x)=10$ 时的原象为-3 和 3；

   $f(x)=5$ 时的原象为-2 和 2；

   $f(x)=1$ 时的原象为 0.

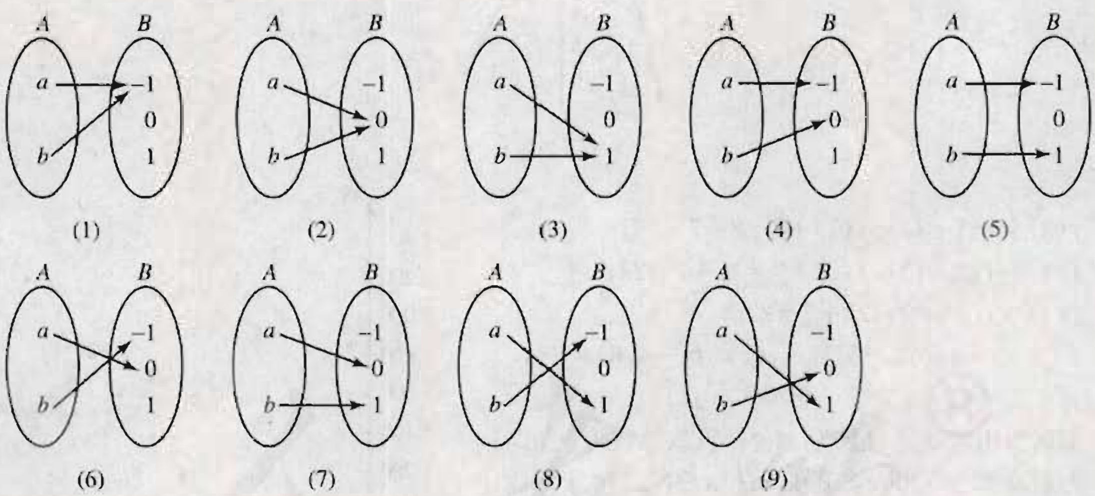
4. 不一定是唯一的，例如上题的第(2)问中 1 的原象是唯一的，但 10，5 的原象就不唯一.

练习 B（第 37 页）

1. 略.
2. 由 $z=(2x+1)^2-1=4x^2+4x$，得集合 A 到 C 的映射 f：$x\to z=4x^2+4x=4x(x+1)$；

   $1\in A$ 在 f 作用下，有象 $8\in C$；

   $0\in C$，由 $4x(x+1)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-1$. 这就是说，0 在 A 中的原象有两个：0 或-1.
3. (1) 是.　　(2) 是.　　(3) 是.
4. 有 9 种.



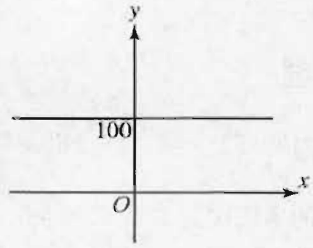
（第 4 题）

5. 4 种映射，其中有 2 种一一映射.

练习 A（第 41 页）

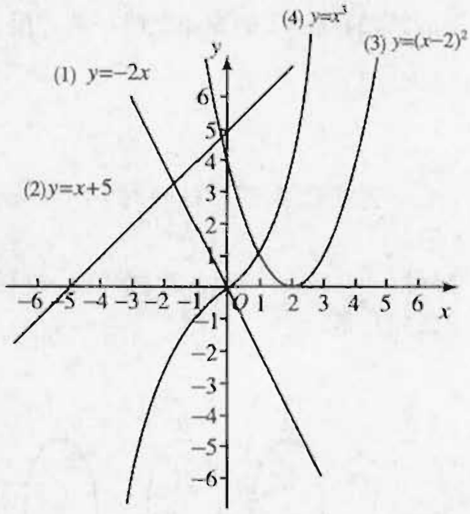
1. 函数 $y=f(x)=100$ （$x\in\mathbf{R}$） 的图象如图所示.

   $f(-10)=f(0)=f(1\,000)=100$.



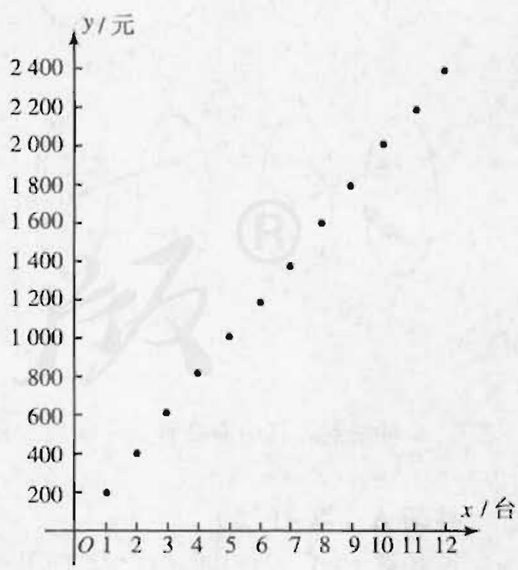
（第 1 题）

2.



（第 2 题）

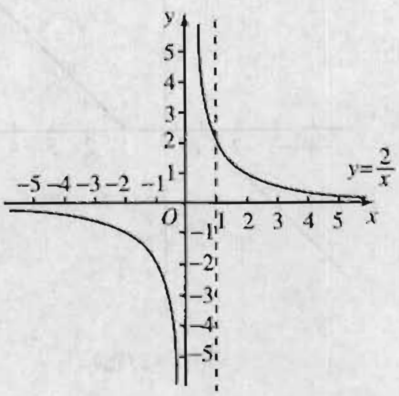
3. $f(2)=f(1+1)=f(1)+7=8+7=15$；
   $f(3)=f(2+1)=f(2)+7=15+7=22$；
   $f(4)=f(3)+7=22+7=29$.
4. $f(3.2)=4$，$f(-5.1)=-5$，$f(-4.8)=-4$，
   $f(7.2)=8$.
5. 商店售出游戏机台数为 x 台，收款总数为 y 元.
   由题意知 $y=200x$，其中 $x\in\{x\in\mathbf{N}_+ \mid 1\leqslant x\leqslant 12\}$.
   函数图象如图所示.
6. (2) (4)是以 x 为自变量的函数的图象.



（第 5 题）

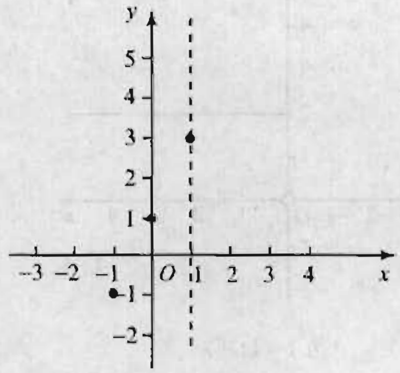
练习 B（第 42 页）

1. (1)



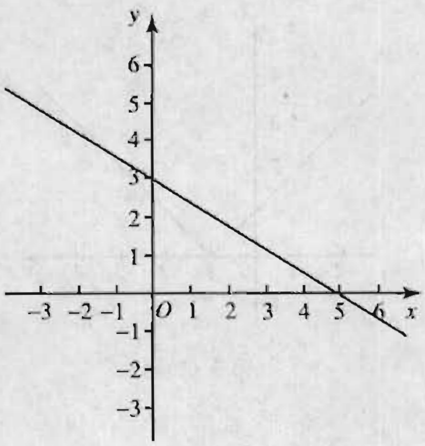
（第 1 (1)题）

(2) $y=2x+1$，$x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|<2$



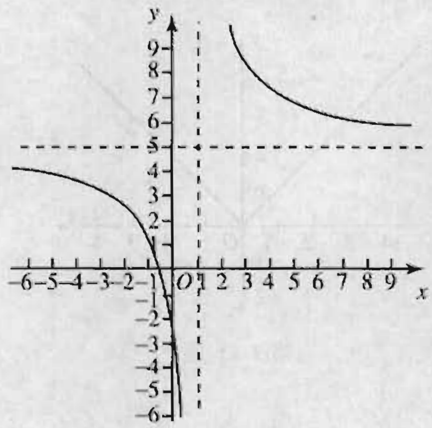
（第 1 (2)题）

2. (1) $y=-\frac{3}{5}x+3$，图象如图所示.



（第 2 (1)题）

(2) $y=\frac{5x+2}{x-1}$，图象如图所示.



（第 2 (2)题）

3. $f(2)=6$，$f(3)=18$，$f(4)=54$，$f(5)=162$.

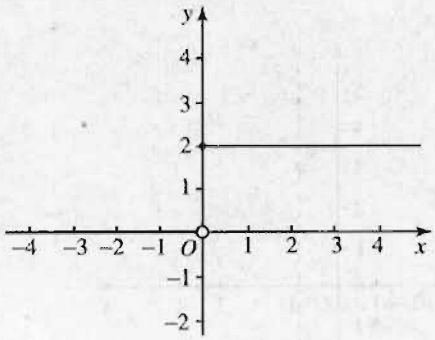
练习 A（第 43 页）

1. (1) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$

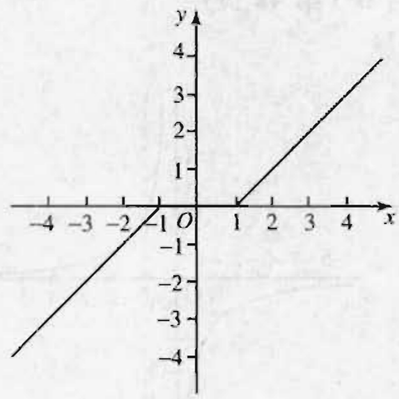
图象如图所示.

(2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant -1\\ 0, & -1<x<1\\ x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$

图象如图所示.



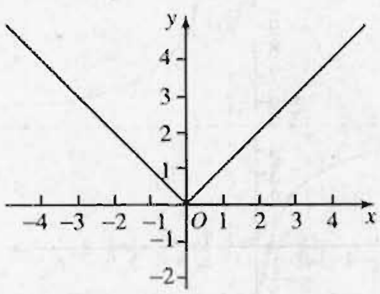
（第 1 (1)题）



（第 1 (2)题）

2. (1) $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

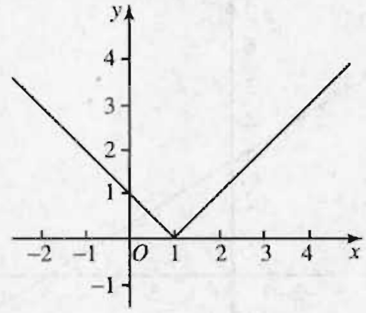
图象如图所示.



（第 2 (1)题）

(2) $y=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$

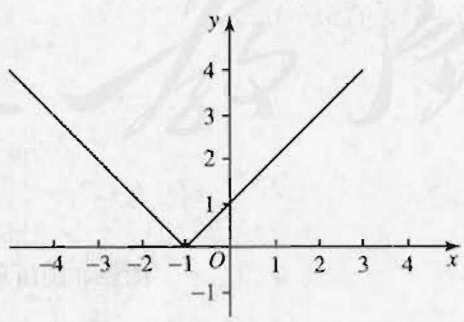
图象如图所示.



（第 2 (2)题）

(3) $y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant -1\\ -x-1, & x<-1\end{cases}$

图象如图所示.

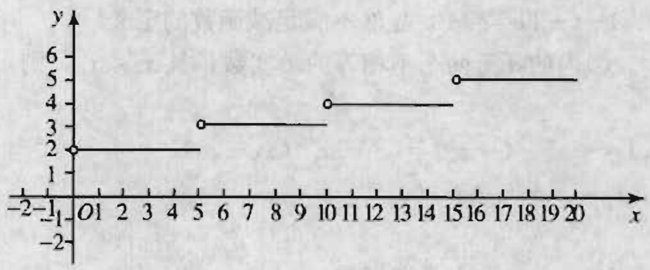


（第 2 (3)题）

3. 解：设公共汽车票价为 y 元，汽车行驶里程为 x km，则

$$y=\begin{cases}2, & 0<x\leqslant 5\\ 3, & 5<x\leqslant 10\\ 4, & 10<x\leqslant 15\\ 5, & 15<x\leqslant 20\end{cases}$$

图象如图所示.

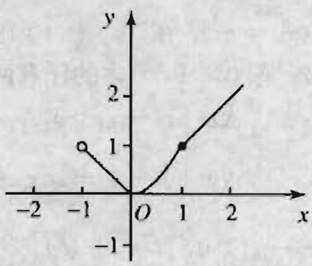


（第 3 题）

练习 B（第 44 页）

1. $f(-0.8)=0.8$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

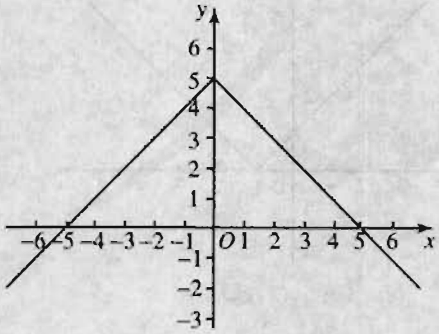
图象如图所示.



（第 1 题）

2. (1) $f(x)=\begin{cases}5+x, & x<0\\ 5-x, & x\geqslant 0\end{cases}$

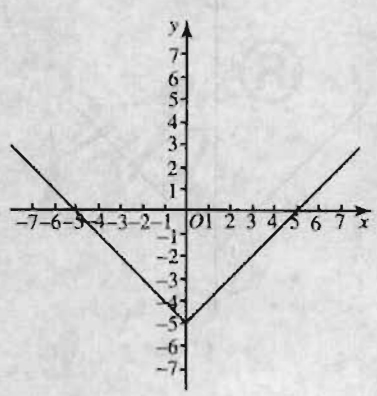
图象如图所示.



（第 2 (1)题）

(2) $f(x)=\begin{cases}-5-x, & x<0\\ -5+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

图象如图所示.



（第 2 (2)题）

练习 A（第 46 页）

1. 函数 $f(x)$ 的单调区间有 $[-2, -1]$，$[-1, 0]$，$[0, 1]$，$[1, 2]$.

   在区间 $[-2, -1]$，$[0, 1]$ 上是减函数. 在区间 $[-1, 0]$，$[1, 2]$ 上是增函数.

   函数 $g(x)$ 的单调区间有 $[-3, -1.5]$，$[-1.5, 1.5]$，$[1.5, 3]$.

   在区间 $[-3, -1.5]$，$[1.5, 3]$ 上是减函数，在区间 $[-1.5, 1.5]$ 上是增函数.

2. 不能. 原因一：函数定义域是 $\{x|x\neq 0\}$，不是 **R**；原因二：取 $x_1=-1$，$x_2=1$ 时，$\Delta x=x_2-x_1>0$，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=1-(-1)=2>0$，显然不满足减函数的定义.

3. 设 x_1，x_2 是 $(-\infty, 0)$ 内的任意两个不相等的负实数，且 $x_1<x_2$，则

   $\Delta x=x_2-x_1>0$，

   $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=-x_2^2-(-x_1^2)=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$.

   因为　$x_1+x_2<0$，$x_1-x_2=-\Delta x<0$，

   所以　$\Delta y>0$，

   所以　$f(x)=-x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数.

   同理，对区间 $(0, +\infty)$ 内的任意两个不相等的正实数 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，有

   $$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)<0,$$

   所以　$f(x)=-x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

4. 设 x_1，x_2 是 $[0, +\infty)$ 内的任意两个不相等实数，且 $x_1<x_2$，则

   $$\Delta x=x_2-x_1>0,$$

   $$\Delta y=y_2-y_1=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

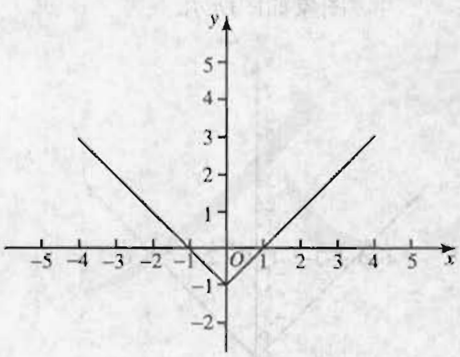
   因为　$x_2-x_1>0$，$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$，

   所以　$\Delta y>0$，

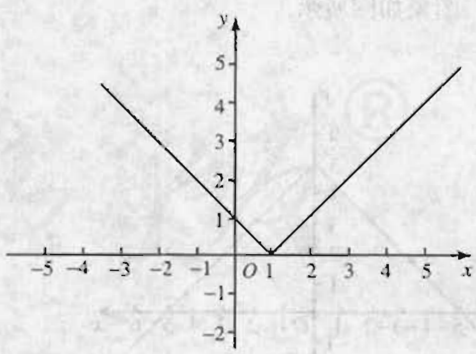
   所以　$y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

5. (1) 函数的单调减区间是 $(-\infty, 0]$，单调增区间是 $[0, +\infty)$.

   (2) 函数的单调减区间是 $(-\infty, 1]$，单调增区间是 $[1, +\infty)$.



（第 5 (1)题）



（第 5 (2)题）

练习 B（第 46 页）

1. 因为　$y=f(x)$ 在 **R** 上是增函数，

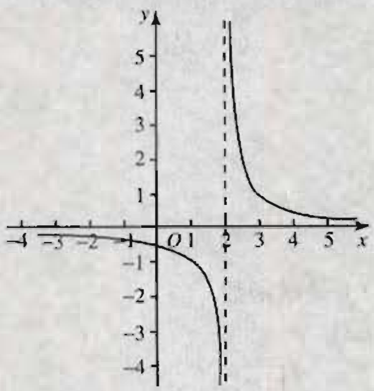
所以　对任意 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，当 $\Delta x=x_2-x_1>0$ 时，有 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

因为　$k>0$，所以　对于 $kf(x)$，有 $\Delta y=kf(x_2)-kf(x_1)=k[f(x_2)-f(x_1)]>0$.

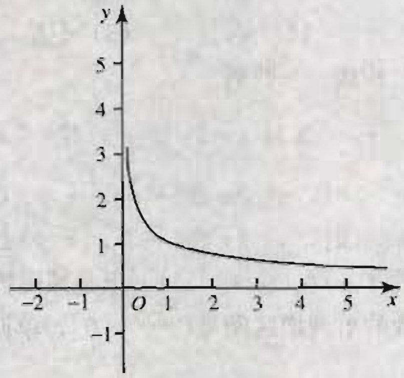
所以　$kf(x)$在 $\mathbf{R}$ 上也是增函数.

2. (1) 函数的单调减区间是$(-\infty,\ 2)$和$(2,\ +\infty)$.

(2) 函数的单调减区间是$(0,\ +\infty)$.



(第 2 (1)题)



(第 2 (2)题)

练习 A（第 49 页）

1. (1) 奇函数.　　(2) 偶函数.

(3) 非奇非偶函数.　　(4) 非奇非偶函数.

(5) 偶函数.　　(6) 非奇非偶函数.

(7) 奇函数.　　(8) 偶函数.

2. (1) 不正确.　(2) 正确.　(3) 不正确.　(4) 正确.

3. $f(-4)=-2$. 由图象知奇函数 $y=f(x)$ 过点$(4,\ 2)$，又因为奇函数的图象关于坐标原点对称，故函数也过点$(-4,\ -2)$，所以 $f(-4)=-2$.

4. $f(1)<f(3)$.

因为偶函数的图象关于 y 轴对称，所以 $f(-3)=f(3)$，$f(-1)=f(1)$.

而由函数图象知 $f(-3)>f(-1)$，故 $f(3)>f(1)$.

5. 增函数；最大值-4，最小值-10.

练习 B（第 50 页）

1. 不可以是奇函数，可以是偶函数.

若 $f(x)$是奇函数，则 $f(0)=-f(0)$，可求得 $f(0)=0$，即 $a=0$，这与已知 $a\neq 0$ 是矛盾的.

2. 一定是偶函数，特别地，可能既是奇函数又是偶函数.

由于 $f(x)$、$g(x)$ 为定义域相同的偶函数，则 $F(x)$ 的定义域关于原点对称，又由于 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，则 $F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$，所以 $F(x)$是偶函数. 特别地，当 $f(x)+g(x)=0$ 时，$F(-x)=F(x)$，且 $F(-x)=-F(x)$，此时 $F(x)$既是偶函数又是奇函数.

练习 A、B（第 51 页）

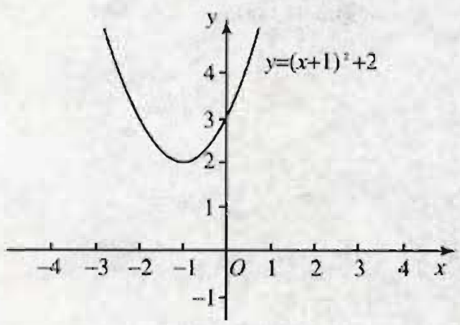
略.

习题 2—1A（第 52 页）

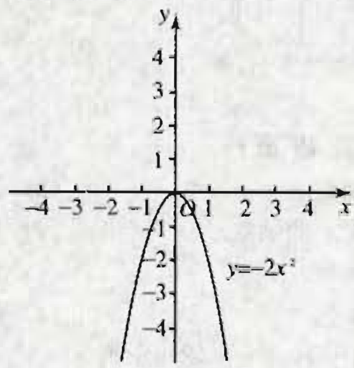
1. 略.
2. (1) 是.　　(2) 是.　　(3) 不是，因为 2 的象不唯一.　　(4) 是.
3. (1)(3) 构成一一映射.
4. (1) $\{x \mid x \geqslant -3$ 且 $x \neq 5\}$.　　(2) $\left\{x \mid x > \dfrac{2}{3}\right\}$.
5. (1) 当 $k>0$ 时，$y=kx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

   (2) 当 $k<0$ 时，$y=kx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.
6. (1) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上是减函数，在 $[-1, +\infty)$ 上是增函数.

   (2) 函数的单调增区间是 $(-\infty, 0]$，单调减区间是 $[0, +\infty)$.



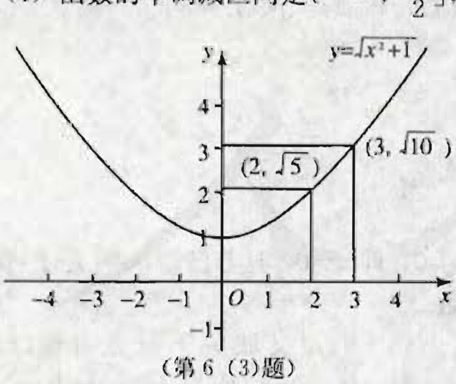
（第 6 (1)题）



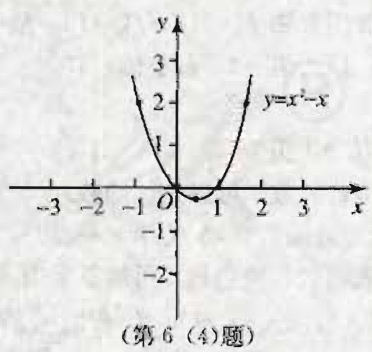
（第 6 (2)题）

   (3) 函数的单调减区间是 $(-\infty, 0]$，单调增区间是 $[0, +\infty)$.

   (4) 函数的单调减区间是 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$，单调增区间是 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.



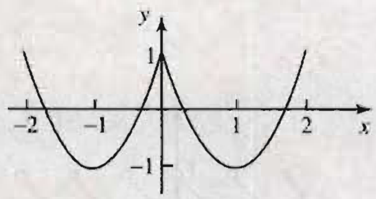
（第 6 (3)题）



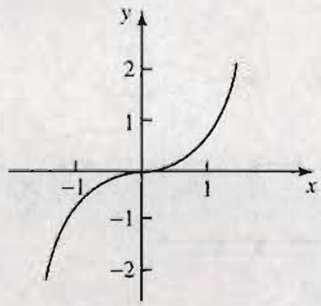
（第 6 (4)题）

7. (2)(6)是奇函数；(3)(5)是偶函数；(1)(4)既不是奇函数也不是偶函数.
8. (1) 根据偶函数图象关于 y 轴对称的性质可以画出函数在 y 轴左边的图象，如图所示.

   (2) 根据奇函数的图象关于原点对称的性质可以画出函数在 y 轴左边的图象，如图所示.



（第 8（1）题）

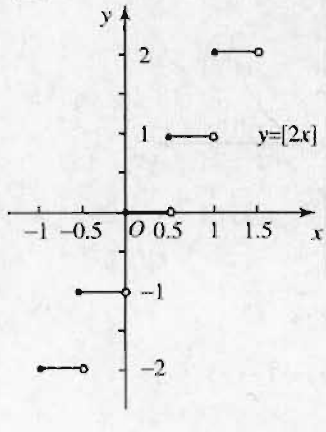


（第 8（2）题）

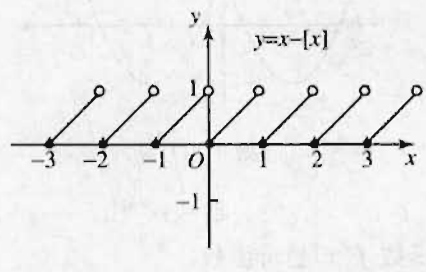
9. 解：设 $x\in(-\infty, 0)$，则 $-x\in(0, +\infty)$，由题意可知 $f(-x)=(-x)^2=x^2$.
   因为　函数 $f(x)$ 是奇函数，
   所以　$f(-x)=-f(x)$.
   所以　$f(x)=-f(-x)=-x^2$，
   即　函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上的解析式是 $f(x)=-x^2$.

习题 2—1B（第 53 页）

1. (1) $\{x|x\neq0$ 且 $x\neq-2\}$.　　(2) $\{t|t\neq4\}$.　　(3) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.
   证明：设 x_1、x_2 是 $(-\infty, 0)$ 内任意两个不相等的实数，且 $x_1<x_2$，则
   $$\Delta x=x_2-x_1>0,\ -x_1,\ -x_2\in(0, +\infty),\ 且(-x_1)-(-x_2)>0.$$
   因为　函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，
   所以　$f(-x_1)-f(-x_2)<0$.
   又因为　$f(x)$ 是奇函数，$f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$，
   所以　$-f(x_1)+f(x_2)<0$.
   所以　$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)<0$.
   所以　函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.
3. 是偶函数.
4. 证明：设 $f(x)$ 的定义域是 D，$g(x)$ 的定义域为 D，则 $G(x)$ 的定义域也是 D，
   由题意可知对于任意的 $x\in D$，$-x\in D$ 都有
   $$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x),$$
   所以
   $$\begin{aligned}G(-x)&=f(-x)\cdot g(-x)\\&=-f(x)\cdot g(x)\\&=-G(x).\end{aligned}$$
   所以　$G(x)$ 是奇函数.

5. (1) 

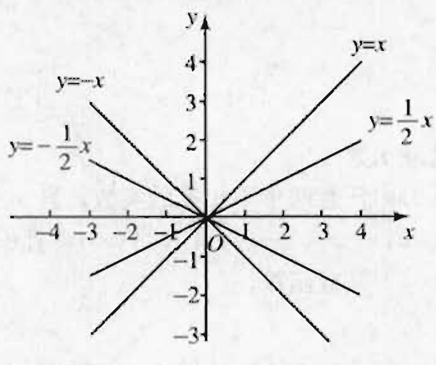
(第 5 (1)题)

(2) 

(第 5 (2)题)

练习 A（第 56 页）

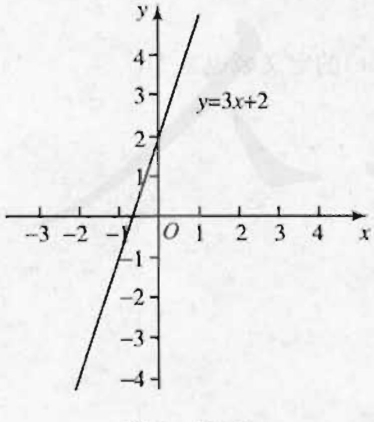
1. (1)(2)(3)是正比例函数；(4)不是正比例函数.

2. 

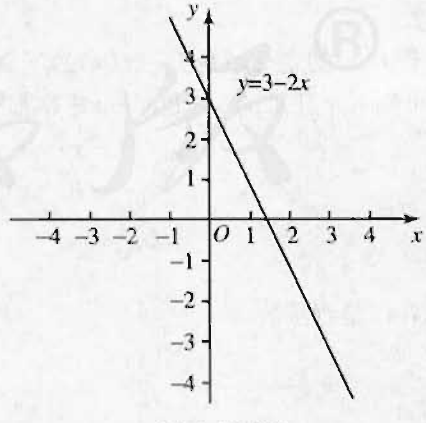
(第 2 题)

3. (1) 斜率为 3，在 y 轴上的截距为 2.

(2) 斜率为 −2，在 y 轴上的截距为 3.



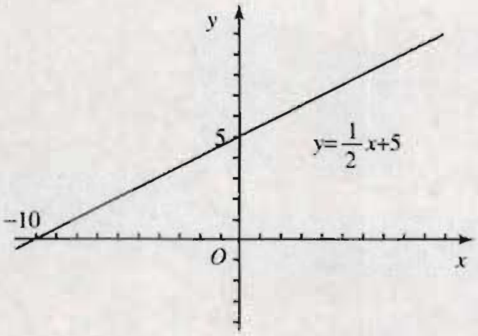
(第 3 (1)题)



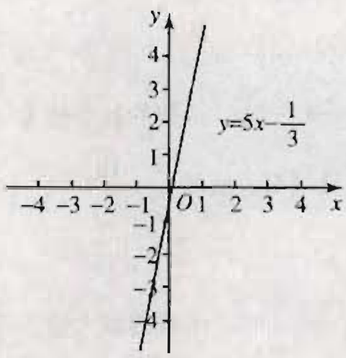
(第 3 (2)题)

(3) 斜率为$\frac{1}{2}$，在 y 轴上的截距为 5.

(4) 斜率为 5，在 y 轴上的截距为$-\frac{1}{3}$.



（第 3（3）题）



（第 3（4）题）

4. 正比例函数是一类特殊的一次函数，它是在 y 轴上的截距等于 0 的一次函数.

5. (1) 令$\frac{1}{3}x-1=0$，解得 $x=3$. 所以当 $x>3$ 时，$y>0$；$x=3$ 时，$y=0$；$x<3$ 时，$y<0$.

(2) 令 $4-3x=0$，解得 $x=\frac{4}{3}$. 所以当 $x>\frac{4}{3}$时，$y<0$；$x=\frac{4}{3}$时，$y=0$；$x<\frac{4}{3}$时，$y>0$.

练习 B（第 56 页）

1. 解方程组$\begin{cases}y=x-3\\y=-x-5\end{cases}$ 可得$\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$

所以两直线的交点为 $A(-1, -4)$.

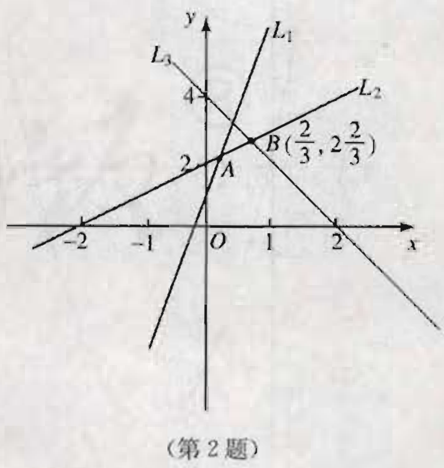
当 $y=0$ 时，直线与 x 轴相交. 令 $y=0$，由两已知直线方程可分别得 $x=3$，$x=-5$.

所以两直线与 x 轴分别交于 $B(3, 0)$，$C(-5, 0)$.

2. 由直线 $y=4x+1$ 与 $y=x+2$，求得交点 $A\left(\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$；

再由直线 $y=x+2$ 与 $y=-2x+4$，求出交点 $B\left(\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$. 由图象可看出：

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & (\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3})\\ -2x+4, & (x\geqslant\frac{2}{3})\\ 4x+1, & (x\leqslant\frac{1}{3})\end{cases}$$



（第 2 题）

练习A（第60页）

1. (1) $f(x)=(x+4)^2-13$，

当 $x=-4$ 时，函数的最小值为 -13.

定义域 $\mathbf{R}$，值域 $[-13, +\infty)$.

(2) $f(x)=5\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2-\dfrac{19}{5}$，

当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时，函数的最小值为 $-\dfrac{19}{5}$.

定义域 $\mathbf{R}$，值域 $\left[-\dfrac{19}{5}, +\infty\right)$.

(3) $f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$，

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数的最大值为 $\dfrac{5}{4}$.

定义域 $\mathbf{R}$，值域 $\left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right]$.

(4) $f(x)=-3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{71}{12}$，

当 $x=\dfrac{5}{6}$ 时，函数的最大值为 $-\dfrac{71}{12}$.

定义域 $\mathbf{R}$，值域 $\left(-\infty, -\dfrac{71}{12}\right]$.

2. (1) 对称轴是 $x=5$，顶点坐标是 $\left(5, -\dfrac{23}{2}\right)$.

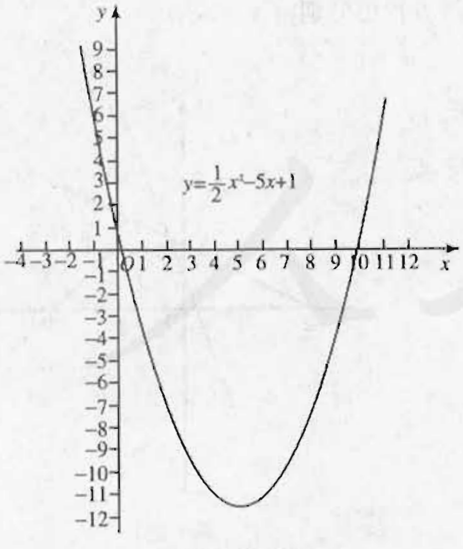
单调增区间为 $[5, +\infty)$；

单调减区间为 $(-\infty, 5]$.

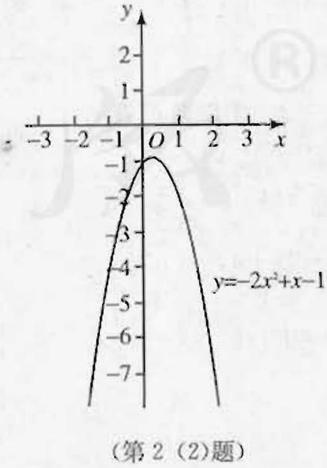
(2) 对称轴是 $x=\dfrac{1}{4}$，顶点坐标为 $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{7}{8}\right)$.

单调增区间为 $\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$；

单调减区间为 $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.



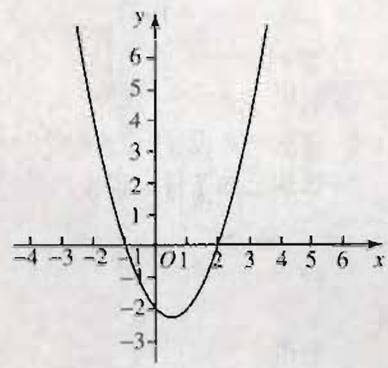
（第2 (1)题）



（第2 (2)题）

3. 函数 $y=x^2-x-2$ 的图象如图所示.

由图象可知，函数值小于或等于 0 时，自变量的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 2$.



（第 3 题）

练习 B（第 60 页）

1. $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{21}{4}$.

（1）顶点坐标为 $\left(3,\ -\frac{21}{4}\right)$，对称轴为直线 $x=3$.

（2）因为点 $\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$ 和点 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 关于对称轴 $x=3$ 对称，

所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{41}{8}$.

（3）此二次函数的图象开口向上，则图象上的点距离对称轴 $x=3$ 越远，对应的函数值就越大.

因为 $\left|-\frac{1}{4}-3\right|>\left|\frac{15}{4}-3\right|$，所以 $f\left(-\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{15}{4}\right)$.

2. $f(x)=(x-1)^2-4$，

函数图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，数形结合可知函数图象上的点距对称轴越远对应的函数值就越大.

因为 $|-2-1|=|4-1|$，所以 $f(-2)=f(4)$.

因为 $|-3-1|>|3-1|$，所以 $f(-3)>f(3)$.

3. （1）定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[\sqrt{5},\ +\infty)$.　　（2）定义域为 $\{3\}$，值域为 $\{0\}$.

练习 A（第 62 页）

1. 设函数的解析式为 $y=kx$，

依题意有 $8=2k$，解得 $k=4$，

所以函数的解析式为 $y=4x$.

2. 因为　$A(1,\ 3)$ 在直线 $y=kx$ 上，

所以　$k=3$.

所以　正比例函数的解析式为 $y=3x$.

将 $x=3$ 代入解析式可得 $y=9$.

即 B 点的纵坐标为 9.

3. 依题意得 $-2k+b=0$，$k+b=3$，解得 $k=1$，$b=2$，

所以函数的解析式为 $y=x+2$.

4. 设所求一次函数为 $f(x)=kx+b$.

由已知条件可得方程组

$$\begin{cases}3(-k+b)-2k-b=-19\\ 2b+k+b=14\end{cases}$$ 即

$\begin{cases}2b-5k=-19\\3b+k=14\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5,\\b=3.\end{cases}$

所以 $y=5x+3$.

5. 解法一：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

根据已知条件，得方程组

$$\begin{cases}c=3\\9a+(-3)b+c=0\\25a+(-5)b+c=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\b=\frac{8}{5}\\c=3\end{cases}$$

所以所求函数的解析式为 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x+3$.

解法二：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，因为 $f(0)=3$，所以 $c=3$.

令 $f(x)=0$，由韦达定理得 $\frac{c}{a}=\frac{3}{a}=15$，$-\frac{b}{a}=-8$，

解得 $a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{8}{5}$.

所以所求函数的解析式为 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x+3$.

练习 B（第 63 页）

1. 设二次函数的解析式为 $f(x)=a(x-6)^2-12$，

将点 $(8, 0)$ 代入得 $a=3$，

所以所求二次函数的解析式为 $f(x)=3(x-6)^2-12$.

即 $f(x)=3x^2-36x+96$.

2. 依题意 $2x^2+x-3=ax^2+(b-a)x-b$，

由对应项系数相等可得

$$\begin{cases}2=a\\1=b-a\\-3=-b\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

习题 2—2A（第 63 页）

1. 可求得 $y=2x$，当 $x=2$ 时，$y=4$；当 $x=5$ 时，$y=10$.

2. 可求得 $y=5\sqrt{x}$.

(1) 当 $x=64$ 时，$y=40$.

(2) 当 $y=75$ 时，$x=225$.

3. $y=3x+12$ 的图象如图所示.

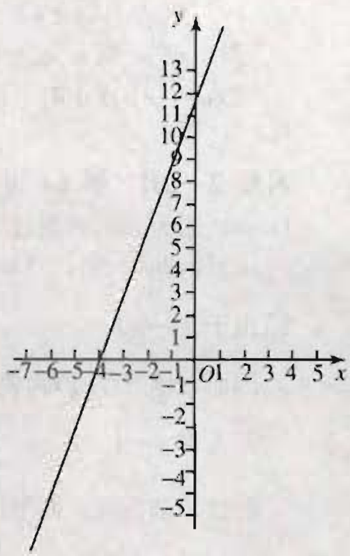
(1) 该图象与两坐标轴的交点坐标为$(-4, 0)$，$(0, 12)$. 两交点间的距离是$4\sqrt{10}$.

(2) $\{x \mid x>-4\}$.

(3) 当 $x<-4$ 时，$y<0$.

(4) 依题意$-6<3x+12<6$，所以 x 的取值范围为

$$-6<x<-2.$$

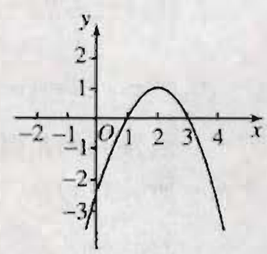


(第 3 题)

4. (1) 开口向下.

(2) 顶点坐标为$(2, 1)$，对称轴为 $x=2$.

(3) 与 x 轴的交点坐标为$(1, 0)$，$(3, 0)$，草图如图所示.



(第 4 题)

5. (1) 顶点坐标为$(2, -7)$，最小值为-7，值域为 $[-7, +\infty)$.

(2) 顶点坐标为$(1, 5)$，最大值为 5，值域为 $(-\infty, 5]$.

6. 解法 1：设所求二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c$，则由已知可得

$$\begin{cases} c=-3 \\ a+b+c=0 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases} \qquad \text{解得 } a=1,\ b=2,\ c=-3.$$

所以 $y=f(x)=x^2+2x-3$

解法 2：设所求二次函数 $y=f(x)=a(x-1)(x+3)$.

由 $f(0)=-3$，得$-3a=-3$，所以 $a=1$.

所以 $f(x)=(x-1)(x+3)$

$=x^2+2x-3$.

7. (1) $b=0$ 时，是奇函数；

$b\neq0$ 时，非奇非偶.

(2) $b=0$ 时，是偶函数；

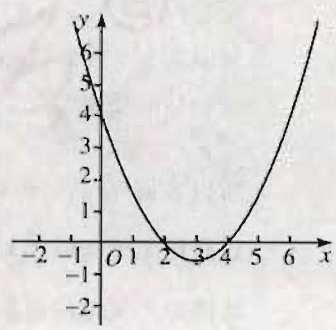
$b\neq0$ 时，非奇非偶.

8. $a\geqslant-3$.

9. 配方得：$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-3)^2-\dfrac{1}{2}$.

(1) 顶点为$\left(3, -\dfrac{1}{2}\right)$，与 x 轴的交点坐标为$(2, 0)$和$(4, 0)$.

(2) 图象如图所示：



(第 9 (2)题)

(3) $\left(5, \dfrac{3}{2}\right)$.

10. (1) $f(a+1)-f(a)=(a+1)^2+2a(a+1)-3-(a^2+2a^2-3)=9$，解得 $a=2$.

(2) $f(x)=(x+a)^2-a^2-3$,

当 $x=-a$ 时，$y_{\min}=-a^2-3=-4$，得 $a=\pm 1$.

即 $a=-1$ 或 1 时，函数的最小值为 -4.

习题 2—2B（第 64 页）

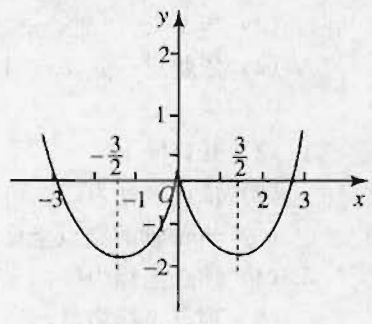
1. (1) 因为二次函数过原点，所以 $f(0)=2m-m^2=0$，解得 $m=0$ 或 $m=2$.

(2) 由题知 $2(m-1)=0$，解得 $m=1$. 所以函数的解析式为 $f(x)=-x^2+1$.

2. 由于 $f(-x)=(-x)^2-3\mid -x\mid+\frac{1}{4}=x^2-3\mid x\mid+\frac{1}{4}=f(x)$，

因而，函数 $f(x)$ 为偶函数.

配方得 $y=\left(\mid x\mid-\frac{3}{2}\right)^2-2$. 作出图象如图所示.



(第 2 题)

所以，函数的单调增区间是 $\left[-\frac{3}{2},\ 0\right]$，$\left[\frac{3}{2},\ +\infty\right)$.

函数的单调减区间是 $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right]$，$\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

3. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，$x\in\mathbf{R}$.

4. $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$.

因为 $f(x)$ 是偶函数，且在 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是减函数，对一切 $a\in\mathbf{R}$，

$f(a^2-a+1)\leqslant f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

习题 2—3A（第 68 页）

1. 设汽车行驶的时间为 t h，则汽车行驶的路程 s km 与时间 t h 之间的函数关系为

$$s=vt.$$

当 $t=1.5$ 时，$s=90$，则 $v=60$.

因此所求的函数关系为 $s=60t$.

当 $t=3$ 时，$s=180$.

所以汽车 3 h 所行驶的路程为 180 km.

2. 设食品的质量为 x kg. 则食品的价格 y 元与质量 x kg 之间的函数关系式为 $y=8x$.

当 $x=8$ 时，$y=64$，

所以 8 kg 食品的价格为 64 元.

3. 设矩形菜地与墙相对的一边长为 x m，则另一组对边的长为 $\frac{300-x}{2}$ m，

从而矩形菜地的面积为：

$$S=\frac{1}{2}x(300-x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x-150)^2+11\ 250 \quad (0<x<300).$$

当 $x=150$ 时，$S_{\max}=11\ 250$.

即当矩形的长为 150 m，宽为 75 m 时，菜地的面积最大.

4. 所求函数的关系式为

$$f=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 4\\ 10+1.2(s-4), & 4<s\leqslant 15\\ 23.2+1.8(s-15), & s>15\end{cases}$$

5. 设每件产品定价 x 元，从而售出件数与定价之间的函数关系式为

$$y=kx+b.$$

由于直线过点(80，30)，(120，20)，代入上式，可得

$$k=-\frac{1}{4},\ b=50.$$

即 $y=-\frac{1}{4}x+50$（$x\in(0,\ 200)$，且 x 为 4 的倍数）.

6. $l=60G+7.7$.

7. 由题意知，生产第 x 个档次的产品每件的利润为 $8+2(x-1)$元，该档次的产量为 $60-3(x-1)$ 件，则相同时间内第 x 档次的总利润 $y=(2x+6)(63-3x)$，其中 $x\in\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$.

即 $y=-6x^2+108x+378=-6(x-9)^2+864$，

则当 $x=9$ 时，y 有最大值为 864.

所以在相同的时间内，生产第 9 档次的产品的总利润最大，最大利润为 864 元.

习题 2—3B（第 69 页）

1. 设经过 t h 两船距离最近，从而

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{(16t)^2+(10-12t)^2}\\&=\sqrt{400\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+64}.\end{aligned}$$

当 $t=0.3$ h 时，$y_{\min}=8$ n mile.

所以 0.3 h 后，两船距离最近，最近距离为 8 n mile.

2. 设半圆的半径为 r m，从而窗户的透光面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\pi r^2+2r\cdot\frac{6-\pi r-2r}{2}\\&=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r^2+6r,\end{aligned}$$

其中 $r\in\left(0,\ \frac{6}{\pi+2}\right)$.

所以当半圆的半径为 $\frac{6}{\pi+4}$ m 时，窗户的透光面积最大为 $\frac{18}{4+\pi}$ m^2.

3. 设等腰梯形的腰长为 x cm，则高为$\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm，上底为$\left(30-\frac{3}{2}x\right)$cm，下底为$\left(30-\frac{x}{2}\right)$cm，从而梯形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(60-2x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-15)^2+\frac{225}{2}\sqrt{3},$$

其中 $x\in(0,\ 20)$.

所以当梯形的腰长为 15 cm，上底为 7.5 cm，下底为 22.5 cm 时，梯形的面积最大.

4. (1) 空闲率为$\frac{m-x}{m}$，由已知得 $y=kx\cdot\frac{m-x}{m}=kx\left(1-\frac{x}{m}\right)$，$0<x<m$.

(2) 因为 $y=-\frac{k}{m}x^2+kx=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{mk}{4}$，所以当 $x=\frac{m}{2}$时，$y_{\max}=\frac{mk}{4}$.

(3) 由题意得 $0<x+y<m$，即 $0<\frac{m}{2}+\frac{mk}{4}<m$，解得$-2<k<2$.

但由于 $k>0$，因此 $0<k<2$.

练习 A（第 72 页）

1. (1) $\frac{2}{3}$. (2) 1，4. (3) 0，5. (4) $-2\sqrt{2}$，0，$2\sqrt{2}$. (5) -3，$\frac{2}{3}$. (6) $-\frac{2}{3}$，3.

2. (1) 当 $x\in(-\infty,\ 1-\sqrt{11})\cup(1+\sqrt{11},\ +\infty)$时，$y>0$；当 $x\in(1-\sqrt{11},\ 1+\sqrt{11})$时，$y<0$；

当 $x=1-\sqrt{11}$或 $x=1+\sqrt{11}$时，$y=0$.

(2) 当 $x\in(-3,\ 1)$时，$y>0$；当 $x\in(-\infty,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$时，$y<0$；

当 $x=-3$ 或 $x=1$ 时，$y=0$.

练习 B（第 72 页）

1. (1) $-\frac{7}{2}$. (2) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$，$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$. (3) -3，1，2.

2. (1) 当 $x\in(-\infty,\ -8)\cup(1,\ +\infty)$时，$y>0$；

当 $x\in(-8,\ 1)$时，$y<0$；

当 $x=-8$ 或 $x=1$ 时，$y=0$.

(2) 当 $x\in(-2,\ 4)$时，$y>0$；

当 $x\in(-\infty,\ -2)\cup(4,\ +\infty)$时，$y<0$；

当 $x=-2$ 或 $x=4$ 时，$y=0$.

练习 A（第 74 页）

1. 由于 $f(0)=-2<0$，$f(2)=2>0$，可取区间[0，2]作为计算的初始区间.

用二分法逐步计算，列表如下：

端点(中点)坐标	计算中点的函数值	取区间
		[0, 2]
$x_1=1$	$f(x_1)=-1<0$	[1, 2]
$x_2=1.5$	$f(x_2)=0.25>0$	[1, 1.5]
$x_3=1.25$	$f(x_3)=-0.438<0$	[1.25, 1.5]
$x_4=1.375$	$f(x_4)=-0.109<0$	[1.375, 1.5]
$x_5=1.437\ 5$	$f(x_5)=0.066>0$	[1.375, 1.437 5]
$x_6=1.406\ 25$	$f(x_6)=-0.022<0$	[1.406 25, 1.437 5]
$x_7=1.421\ 875$	$f(x_7)=0.022>0$	[1.406 25, 1.421 875]
$x_8=1.414\ 062\ 5$	$f(x_8)=-0.000\ 4<0$	[1.414 062 5, 1.421 875]
$x_9=1.417\ 968\ 75$	$f(x_9)=0.011>0$	[1.414 062 5, 1.417 968 75]
$x_{10}=1.416\ 015\ 625$	$f(x_{10})=0.005>0$	[1.414 062 5, 1.416 015 625]
$x_{11}=1.415\ 039\ 063$	$f(x_{11})=0.002>0$	[1.414 062 5, 1.415 039 063]

由上表计算可知，区间 [1.414 062 5，1.415 039 063] 的区间长度不大于 0.001，所以可取 1.414 5 作为所求函数的一个正实数零点的近似值.

2. 由于 $f(0)=-6<0$，$f(4)=18>0$，可取区间[0，4]作为计算的初始区间.

用二分法逐步计算，列表如下：

端点(中点)坐标	计算中点的函数值	取区间
		[0, 4]
$x_1=2$	$f(x_1)=-6<0$	[2, 4]
$x_2=3$	$f(x_2)=0$	

由上式计算可知，$x_2=3$ 就是所求函数的一个正零点.

练习 B（第 75 页）

1. 由于 $f(0)=-2<0$，$f(2)=6>0$，可取区间[0，2]作为计算的初始区间.

用二分法逐步计算，列表如下：

端点(中点)坐标	计算中点的函数值	取区间
		$[0, 2]$
$x_1=1$	$f(x_1)=-1<0$	$[1, 2]$
$x_2=1.5$	$f(x_2)=1.375>0$	$[1, 1.5]$
$x_3=1.25$	$f(x_3)=-0.047<0$	$[1.25, 1.5]$
$x_4=1.375$	$f(x_4)=0.6>0$	$[1.25, 1.375]$
$x_5=1.3125$	$f(x_5)=0.261>0$	$[1.25, 1.3125]$
$x_6=1.28125$	$f(x_6)=0.103>0$	$[1.25, 1.28125]$
$x_7=1.265625$	$f(x_7)=0.027>0$	$[1.25, 1.265625]$
$x_8=1.2578125$	$f(x_8)=-0.010<0$	$[1.2578125, 1.265625]$

由上表的计算可知，区间$[1.2578125, 1.261625]$的区间长度不大于0.01，所以可取1.26作为所求函数的一个零点的近似值.

2. 提示：取$[1.5, 2]$作为初始区间.

习题 2—4A（第 75 页）

1. (1) $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, 0)$，$(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, 0)$.

(2) $(\frac{4-\sqrt{10}}{3}, 0)$，$(\frac{4+\sqrt{10}}{3}, 0)$.

2. (1) -2，7. (2) -5，4. (3) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，1，$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. (4) $-\sqrt{2}$，1，$\sqrt{2}$，2.

3. (1) 已知函数的零点为$3-\sqrt{6}$，$3+\sqrt{6}$，顶点坐标为$(3, -2)$，当$x\in(-\infty, 3-\sqrt{6})\cup(3+\sqrt{6}, +\infty)$时，$y>0$；当$x\in(3-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6})$时，$y<0$. 图象略.

(2) 已知函数的零点为$-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$，$-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，顶点坐标为$(-1, 3)$，当$x\in\left(-1-\frac{\sqrt{6}}{2}, -1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$时，$y>0$；当$x\in\left(-\infty, -1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$时，$y<0$. 图象略.

4. $k>\frac{4}{3}$.

5. (1) 要使函数$f(x)$的图象与x轴有两个交点，需有

$$\begin{cases} m+1\neq 0 \\ \Delta=16m^2-8(m+1)(2m-1)>0 \end{cases}$$

所以 m 的取值范围为 $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)$.

(2) 由 $f(0)=0$ 得 $m=\frac{1}{2}$.

6. (1) $(-\infty, 0]\cup[2, +\infty)$.

(2) $(-\infty, -4]\cup[1, +\infty)$.

(3) $\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 6\}$.

7. 由于 $f(0)=-5<0$，$f(3)=4>0$，可取区间 $[0, 3]$ 作为计算的初始区间.

用二分法逐步计算，列表如下：

端点(中点)坐标	计算中点的函数值	取区间
		$[0, 3]$
$x_1=1.5$	$f(x_1)=-2.75<0$	$[1.5, 3]$
$x_2=2.25$	$f(x_2)=0.062\ 5>0$	$[1.5, 2.25]$
$x_3=1.875$	$f(x_3)=-1.484<0$	$[1.875, 2.25]$
$x_4=2.062\ 5$	$f(x_4)=-0.746<0$	$[2.062\ 5, 2.25]$
$x_5=2.156\ 25$	$f(x_5)=-0.351<0$	$[2.156\ 25, 2.25]$
$x_6=2.203\ 125$	$f(x_6)=-0.146<0$	$[2.203\ 125, 2.25]$
$x_7=2.226\ 562\ 5$	$f(x_7)=-0.042<0$	$[2.226\ 562\ 5, 2.25]$
$x_8=2.238\ 281\ 25$	$f(x_8)=0.009\ 9>0$	$[2.226\ 562\ 5, 2.238\ 281\ 25]$
$x_9=2.232\ 421\ 875$	$f(x_9)=-0.016<0$	$[2.232\ 421\ 875, 2.238\ 281\ 25]$

由上表计算可知，区间 $[2.232\ 421\ 875, 2.238\ 281\ 25]$ 的区间长度不大于 0.01，所以可取 2.232 作为所求函数的一个正零点的近似值.

习题 2—4B（第 75 页）

1. $f(x)$ 是偶函数，因而方程 $f(x)=0$ 有四个(两对)互为相反数的实根，其总和为零.

2. 设 $f(x)=x^4-4x-2$，由于 $f(-1)=3>0$，$f(0)=-2<0$，$f(2)=6>0$. 所以函数 $f(x)$ 分别在 $[-1, 0]$、$[0, 2]$ 上至少各有一个变号零点，因此，方程 $f(x)=0$ 在 $[-1, 2]$ 上就至少有两个实根.

本章小结

III 巩固与提高（第 77 页）

1. (1) 不是．因为集合 A 中的元素 c 在集合 B 中没有对应元素．

   (2) 是．

   (3) 不是．因为集合 A 中的元素 a 在 B 中的对应元素不唯一．

   (4) 是．

2. (1) (2)是函数的图象．

3. (1) $f(1)=1$.

   (2) $f(0)=2$.

   (3) $f(-2)=\frac{2}{3}$.

   (4) $f(0.5)=1.5$.

   (5) $f(-0.5)=\frac{5}{3}$.

   (6) $f(3.2)=1.6$.

   (7) $[-3, 4]$.

   (8) $[0, 2]$.

4. (1) $f(2)=4$，$f(a)=3a^2-5a+2$.

   (2) $g(-3)=110$，$g(b)=-2b^3+5b^2-3b+2$.

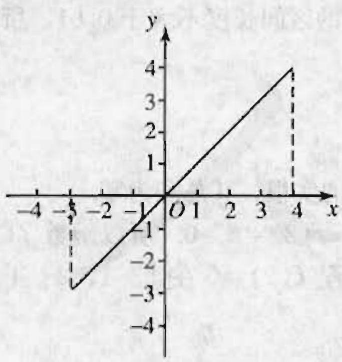
   (3) $h(8)=\frac{1}{16}$，$h(a)=\frac{|4-a|}{a^2}$.

   (4) $r(3)=\frac{7}{3}$，$r(-6)=-\frac{7}{6}$.

5. (1) (4)可以表示成以 x 为自变量的函数关系．

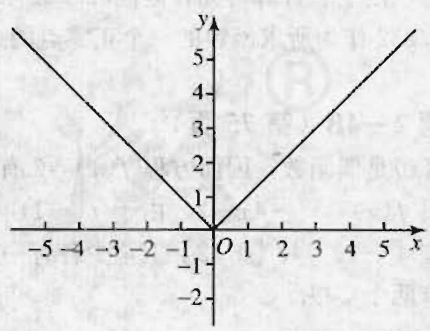
6. (1) $\left\{x \mid x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$．(2) $\mathbf{R}$．(3) $\{x \mid x>1\}$．(4) $[-5, 3)\cup(3, +\infty)$．

7. (1)



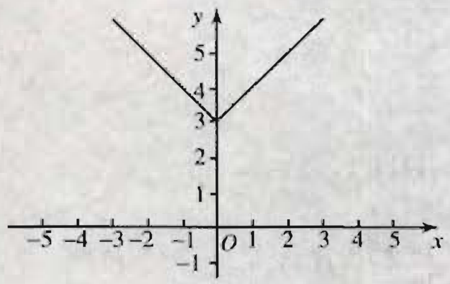
(第 7 (1)题)

(2)



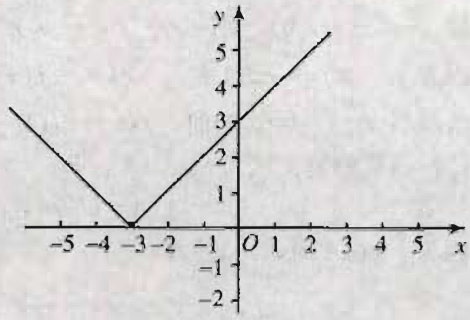
(第 7 (2)题)

(3)



(第 7 (3)题)

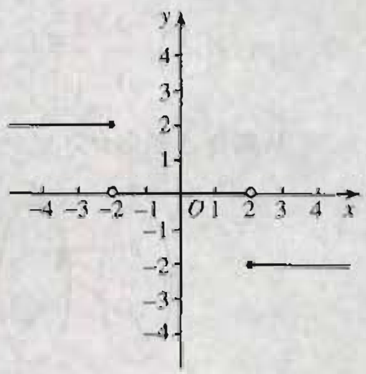
(4)



(第 7 (4)题)

8. $f(-3)=2$, $f(2)=-2$.

$f(-1)=0$, $f(1)=0$, $f(100)=-2$.



(第 8 题)

9. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

10. $y_{\min}=5$.

11. $y_{\max}=50$.

12. $x\in(-\infty, 1]$时，函数单调递增；$x\in[1, +\infty)$时，函数单调递减.

13. 已知函数的零点为-3，1，顶点坐标为$(-1, -4)$.

14. 因为二次函数 $y=x^2+kx-(k-8)$ 与 x 轴至多有一个交点，所以关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx-(k-8)=0$ 至多有一个实根，则

$\Delta=k^2+4(k-8)\leqslant 0$,

即$-8\leqslant k\leqslant 4$.

所以 k 的取值范围为 $[-8, 4]$.

15. 设所求函数为

$$f(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0),$$

其中 a，b，c 待定.

根据已知条件，得方程组

$$\begin{cases}4a+2b+c=0\\25a-5b+c=0\\0+0+c=1\end{cases}$$

解此方程组，得$\begin{cases}a=-\frac{1}{10}\\b=-\frac{3}{10}\\c=1\end{cases}$

因此所求的函数为 $f(x)=-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{10}x+1$.

16. (1) 奇函数. (2) 非奇非偶函数. (3) 偶函数. (4) 奇函数.

17. 设 $x\in(-\infty, 0)$, 则 $-x\in(0, +\infty)$.

因为 $f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-f(x)$ (奇函数),

所以当 $x\in(-\infty, 0)$时, $f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$.

18. (1) 函数的定义域为

$$A=(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty).$$

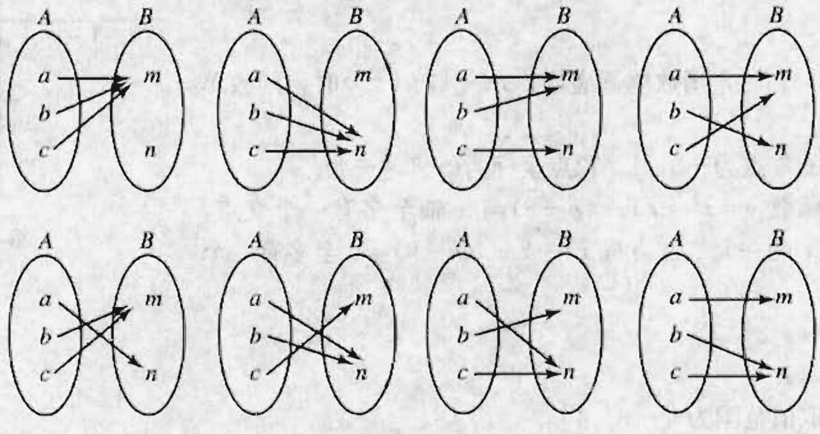
因为　$x\in A$ 时, $-x\in A$,

$$f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=f(x),$$

所以　$f(x)$是偶函数.

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\frac{1+x^2}{1-x^2}=-f(x).$

19. 从集合 A 到集合 B 的映射有 8 个, 它们分别是



(第 19 题)

20. (1) 设 x_1, x_2 是$[-3, +\infty)$上的任意两个不相等的实数, 且 $x_1<x_2$, 则

$$\Delta x=x_2-x_1>0,$$

$$\begin{aligned}\Delta y=f(x_2)-f(x_1)&=x_2{}^2+6x_2-x_1{}^2-6x_1\\&=(x_2-x_1)(x_1+x_2+6)\\&=\Delta x(x_1+x_2+6).\end{aligned}$$

因为　$\Delta x>0$, $x_1\geqslant-3$, $x_2>-3$, $x_1+x_2>-6$, $x_1+x_2+6>0$,

所以　$\Delta y>0$,

所以　$y=x^2+6x$ 在$[-3, +\infty)$上是增函数.

(2) 设 x_1, x_2 是$(0, +\infty)$上的任意两个不相等的实数, 且 $x_1<x_2$, 则

$\Delta x=x_2-x_1>0$,

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2{}^2}-\frac{1}{x_1{}^2}=\frac{-\Delta x(x_1+x_2)}{x_1{}^2x_2{}^2}.$

因为　$\Delta x>0$，$x_1>0$，$x_2>0$，$x_1+x_2>0$，$x_1{}^2x_2{}^2>0$，

所以　$\Delta y<0$，

所以　$y=\frac{1}{x^2}$在（0，$+\infty$）上是减函数.

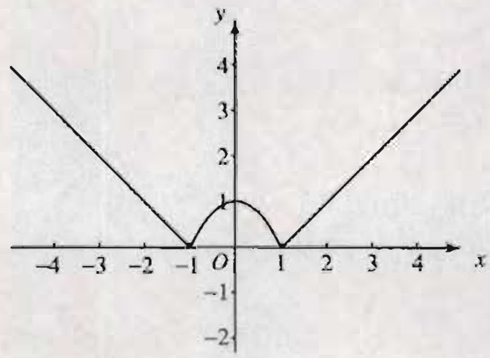
21. 这个函数具有下列性质：

① 定义域为 **R**；

② 值域为$[0，+\infty)$；

③ 在$[-1，0]$和$[1，+\infty)$上是增函数，在$(-\infty，-1]$和$[0，1]$上是减函数；

④ 是偶函数.



（第 21 题）

22. 由于 $f(0)=-3<0$，$f(2)=5>0$，可取区间$[0，2]$作为计算的初始区间.

用二分法逐步计算，列表如下：

端点(中点)坐标	计算中点的函数值	取区间
		$[0,2]$
$x_1=1$	$f(x_1)=-2<0$	$[1,2]$
$x_2=1.5$	$f(x_2)=0.375>0$	$[1,1.5]$
$x_3=1.25$	$f(x_3)=-1.047<0$	$[1.25,1.5]$
$x_4=1.375$	$f(x_4)=-0.4<0$	$[1.375,1.5]$
$x_5=1.437\,5$	$f(x_5)=-0.03<0$	$[1.437\,5,1.5]$
$x_6=1.468\,75$	$f(x_6)=0.168>0$	$[1.437\,5,1.468\,75]$
$x_7=1.453\,125$	$f(x_7)=0.068>0$	$[1.437\,5,1.453\,125]$
$x_8=1.445\,312\,5$	$f(x_8)=0.019>0$	$[1.437\,5,1.445\,312\,5]$
$x_9=1.441\,406\,25$	$f(x_9)=-0.005<0$	$[1.441\,406\,25,1.445\,312\,5]$
$x_{10}=1.443\,359\,375$	$f(x_{10})=0.007>0$	$[1.441\,406\,25,1.443\,359\,375]$

由上表计算可知，区间 [1.441 406 25，1.443 359 375] 的区间长度小于 0.002，所以可取 1.442 作为所求函数的一个正零点的近似值.

23.* 解法一：$x^3+2x^2-5x-6=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$，由对应项系数相等可得

$$\begin{cases}a+b+c=2\\ab+ac+bc=-5\\abc=-6\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=3\\b=1\\c=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\b=-2\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=3\\c=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=3\\c=1\end{cases}$

解法二：
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&x^3+x^2+x^2-5x-6\\=&x^2(x+1)+(x-6)(x+1)\\=&(x+1)(x^2+x-6)\\=&(x+1)(x+3)(x-2),\end{aligned}$$

因为 $x^3+2x^2-5x-6=(x+a)(x+b)(x+c)$，

所以 $\begin{cases}a=3\\b=1\\c=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\b=-2\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=3\\c=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=3\\c=1\end{cases}$

24.* 提示：扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}l\cdot r$，l 是扇形的弧长，r 是半径. 设扇形半径为 r，则所求函数关系为：

$$S=\frac{1}{2}(20-2r)\cdot r=10r-r^2=-(r-5)^2+25.$$

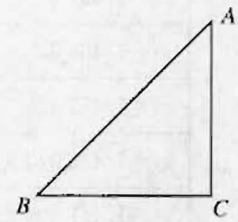
由 $0<20-2r<2\pi r$，解得定义域为 $\left(\frac{10}{\pi+1},\ 10\right)$.

当 $r=5(\text{cm})$ 时，$S_{\max}=25(\text{cm}^2)$.

IV 自测与评估（第 79 页）

1. (1) B. (2) A. (3) B. (4) C. (5) A.
2. $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$.
3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，设 $BC=x$，$AC=1$，则 $AB=\sqrt{1+x^2}$，从而

$$\tan A=x,$$
$$\sin A=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$



（第 3 题）

当 x 由 0 逐渐增大时，$\tan A$ 逐渐增大，$\sin A$ 逐渐增大，$\cos A$ 逐渐减小.

4.（1）要使函数有意义，当且仅当 $3x-2\neq0$，

所以函数的定义域为 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

（2）要使函数有意义，当且仅当

$$\begin{cases}4-x\geqslant0\\(x+1)(x-1)\neq0\end{cases}$$

解得 $x\leqslant4$，且 $x\neq\pm1$.

所以　此函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,4]$.

5. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

6. 所求函数的关系式为

$$y=\begin{cases}10 & 0<x<3\\10+1.6(x-3) & 3\leqslant x<15\\29.2+2.4(x-15) & 15\leqslant x\leqslant20\end{cases}$$

图象略.

六、反馈与评价

I　知识与方法测试（100 分钟 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

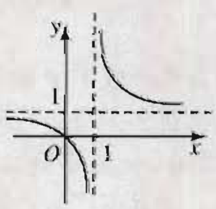
1. 已知映射 f：$A\to B$，其中，集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是（　　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

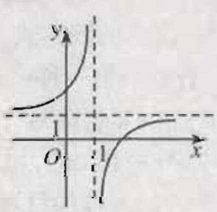
2. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$，则 $f(x)$ 的表达式为（　　）.

(A) $\frac{x+1}{x-1}$　(B) $\frac{1-x}{1+x}$　(C) $\frac{1+x}{1-x}$　(D) $\frac{2x}{x+1}$

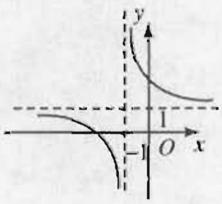
3. 函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图象是（　　）.



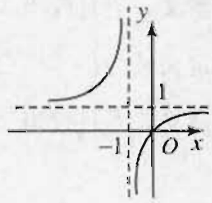
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知函数 $f(x)=3ax+1-2a$ 在$(-1,1)$内存在一个零点，则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $-1<a<\frac{1}{5}$　　(B) $a>\frac{1}{5}$　　(C) $a>\frac{1}{5}$或 $a<-1$　　(D) $a<-1$

5. 设 $f(x)$为定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，则 $f(-2)$，$f(-\pi)$，$f(3)$的大小顺序是(　　).

(A) $f(-\pi)<f(-2)<f(3)$　　(B) $f(-\pi)>f(-2)>f(3)$

(C) $f(-\pi)<f(3)<f(-2)$　　(D) $f(-\pi)>f(3)>f(-2)$

6. 如果奇函数 $y=f(x)(x\neq 0)$，在 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=x-1$，那么使 $f(x-1)<0$ 的 x 的取值范围是(　　).

(A) $x<0$　　(B) $1<x<2$　　(C) $x<0$ 或 $1<x<2$　　(D) $x<2$ 且 $x\neq 0$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 函数 $y=\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$的定义域是__________.

8. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)$等于__________.

9. 国家规定个人稿费纳税办法为：不超过 800 元的不纳税；超过 800 元而不超过 4 000 元的按超过 800 元的 14%纳税；超过 4 000 元的按全稿酬的 11%纳税．某人出版了一书共纳税 420 元，这个人的稿费为__________元.

10. 已知函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间$(-\infty,4]$上是减函数，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 50 分）

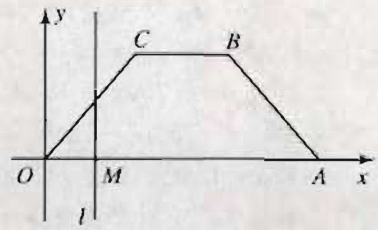
11. (12 分)用单调性的定义证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

12. (12 分) 设 $f(x)$为定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=x+b$，且 $f(x)$的图象经过点$(-2,0)$，又在 $y=f(x)$的图象中，另一部分是顶点在$(0,2)$，且过点$(-1,1)$ 的一段抛物线，试写出函数 $f(x)$的表达式，并作出其图象.

13. (12 分) 某工厂计划出售一种产品，经销人员并不是根据生产成本来确定这种产品的价格，而是通过对经营产品的零售商对于不同的价格情况下他们会进多少货进行调查．通过调查确定了关系式 $P=-750x+15\,000$，其中 P 为零售商进货的数量，x 为零售商愿意支付的每件价格．现估计生产这种产品每件的材料和劳动生产费用为 4 元，并且工厂生产这种产品的总固定成本为 7 000 元(固定成本是除材料和劳动费用外的其他费用)，为获得最大利润，工厂应对零售商

每件收取多少元?

14. (14分)如图,梯形 $OABC$ 各顶点的坐标分别为 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(4,2)$, $C(2,2)$. 一条与 y 轴平行的动直线 l 从 O 点开始作平行移动,到 A 点为止. 设直线 l 与 x 轴的交点为 M, $OM=x$, 记梯形被直线 l 截得的在 l 左侧的图形的面积为 y. 求函数 $y=f(x)$ 的解析式、定义域、值域以及 $f\left[f\left(\frac{7}{2}\right)\right]$ 的值.



(第14题)

知识与方法测试参考答案:

一、选择题

1. A; 2. B; 3. B; 4. C; 5. D; 6. C.

二、填空题

7. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$; 8. -26; 9. 3 800; 10. $a\leqslant-3$.

三、解答题

11. 证明:设 x_1, x_2 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意两个不相等的实数,且 $x_1<x_2$,则

$$\Delta x=x_2-x_1>0,$$

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(-x_2{}^3+1)-(-x_1{}^3+1)=x_2{}^3-x_1{}^3$$
$$=(x_2-x_1)(x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2)$$
$$=\Delta x[(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}x_2{}^2].$$

因为 $\Delta x>0$, $\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2{}^2\right]>0$,

所以 $\Delta x\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2{}^2\right]>0$, 即 $\Delta y>0$.

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

12. 解:因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(-2,0)$,

所以 $0=-2+b$, 解得 $b=2$,

所以 当 $x\leqslant-1$ 时, $f(x)=x+2$.

当 $x\geqslant1$ 时, $-x\leqslant1$, 又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $f(x)=f(-x)=-x+2$.

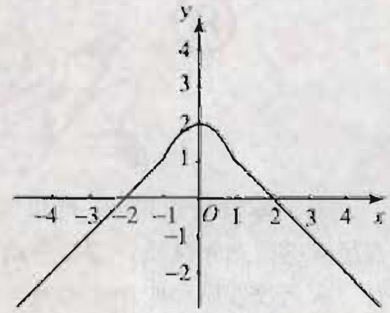
当 $-1<x<1$ 时,由题意设 $f(x)=ax^2+2$,

则 $1=a(-1)^2+2$,

解得 $a=-1$.

所以当 $-1<x<1$ 时, $f(x)=-x^2+2$.

综上 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant-1\\ -x^2+2, & -1<x<1\\ -x+2, & x\geqslant1\end{cases}$



(第12题)

13. 解：设总生产成本为 Q 元，总收入为 S 元，总利润为 y 元，

$y=S-Q$，$Q=4P+7\,000=4(-750x+15\,000)+7\,000$，

即 $Q=-3\,000x+67\,000$，$S=Px=(-750x+150\,000)x=-750x^2+15\,000x$.

所以 $y=-750x^2+18\,000x-67\,000(x>0)$.

即 $y=-750(x-12)^2+41\,000(x>0)$.

当 $x=12$ 时，$y_{\max}=41\,000$.

答：工厂应对零售商每件收取 12 元，才能获得最大利润.

14. 解：当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，图形为等腰直角三角形，此时 $y=\frac{1}{2}x^2$；

当 $2<x\leqslant 4$ 时，图形为一个直角梯形，它又可分割成一个等腰直角三角形(确定的)与一个矩形，此时 $y=\frac{1}{2}\times 2\times 2+(x-2)\times 2=2x-2$；

当 $4<x\leqslant 6$ 时，图形为一个五边形，它可看作是原梯形去掉一个等腰直角三角形(位于直线 l 右侧)，此时 $y=\frac{1}{2}(6+2)\times 2-\frac{1}{2}(6-x)^2=-\frac{1}{2}x^2+6x-10$.

于是 $y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2x-2 & 2<x\leqslant 4\\ -\frac{1}{2}x^2+6x-10 & 4<x\leqslant 6\end{cases}$

并且函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,\ 6]$.

又当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$0\leqslant\frac{1}{2}x^2\leqslant 2$；当 $2<x\leqslant 4$ 时，$2<2x-2\leqslant 6$；当 $4<x\leqslant 6$ 时，$6<-\frac{1}{2}x^2+6x-10\leqslant 8$.

所以函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[0,\ 2]\cup(2,\ 6]\cup(6,\ 8]$，即 $[0,\ 8]$.

由于 $\frac{7}{2}\in(2,\ 4]$，因此 $f\left(\frac{7}{2}\right)=2\times\frac{7}{2}-2=5$.

又 $5\in(4,\ 6]$，所以 $f(5)=-\frac{1}{2}\times 5^2+6\times 5-10=\frac{15}{2}$，

于是 $f\left[f\left(\frac{7}{2}\right)\right]=f(5)=\frac{15}{2}$.

II 评价建议

1. 针对本章所学知识，除进行总测试外，在学习过程中可进行两次诊断性小测试：第一次应重点考查函数的概念和性质，立足基础，题目不易过难，以加深学生对函数的认识和理解；第二次应重点突出对二次函数性质和应用的考查，通过测试提高学生运用所学知识解决实际问题的能力. 测试后，除教师对学生进行评价外，还要组织学生进行自评和互评，以及时发现问题并得到矫正，让学生成为学习和评价的主人，让评价成为反思、调节和提高的动力.

2. 函数在实际生活中应用是比较普遍的，为加强学生的应用意识，可组织学生广泛搜集有关资料，

例如，邮局的邮资问题，出租车的车费问题，商品出售的定价与利润关系问题等. 学生可根据自己对这些实际问题的认识，设计相应的数学应用问题或者写出有关的小论文，教师要针对学生设计的问题和写出的小论文写出指导性或激励性的评语，优秀的问题或小论文可进行展览.

3. 根据某个主题(如函数概念的形成、函数概念的发展、函数的应用等)，收集17世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物(开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨等)的有关资料或现实生活中的函数实例，以小组为单位，查阅资料或进行调查，写一篇有关函数概念形成、发展或应用的文章，在班级中进行交流，对于优秀的作品应当给予鼓励、展示和推荐.

4. 对有条件的学校，针对计算机在本章教学中的应用，可组织一次计算机应用比赛，比赛可分笔试(让学生编程作图或求值)和上机实践两种形式进行，可对优胜者给以相应的奖励. 通过比赛训练学生的逻辑思维能力，培养学生使用计算机技术学习数学的习惯与技能，提高学生学习数学的兴趣.

第三章

基本初等函数（Ⅰ）

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 理解分数指数幂的概念．理解有理指数幂的意义，通过具体实例了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算．

2. 理解指数函数的概念和意义，能画出具体指数函数的图象，探索并理解其单调性与特殊点．

3. 理解对数的概念及其运算性质，知道换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；通过阅读材料，了解对数的发现历史及对简化运算的作用．

4. 通过具体实例，直观了解对数函数模型所刻画的数量关系，初步理解对数函数的概念，能画出具体对数函数的图象，探索并理解其单调性与特殊点．

5. 知道同底的指数函数与对数函数互为反函数．能以具体函数为例对反函数进行解释和直观理解．

6. 通过实例，了解幂函数的概念，结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，了解它们的变化情况．

7. 能够运用函数（指数函数、对数函数、幂函数等）的性质，解决某些简单的实际问题．通过收集一些社会生活中普遍使用的此类函数模型的实例，了解和体会函数模型的广泛应用．培养学生应用数学的意识以及分析问题、解决问题的能力．

8. 实习作业应以开阔数学视野，强化应用意识为内容，根据某个主题，收集 17 世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物（开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）的有关资料或现实生活中的函数实例，采取小组合作的方式写一篇有关函数概念的形成、发展或应用的文章，在班级中交流．

（二）过程与方法目标

1. 通过复习回顾初中所学整数幂运算，用类比的思想来完成实数指数幂的学习.

2. 借助计算器或计算机进一步体会"用有理数逼近无理数"的数学思想.

3. 根据图象探索、理解指数函数、对数函数的单调性与特殊点，感受数形结合的数学思想.

4. 根据几个特殊幂函数的图象，探求两类幂函数性质的异同.

5. 通过梳理知识点、查阅资料，仿照课本的例题，收集现实生活中的有关素材，尝试用建立数学模型的方式分析、解决实际问题.

6. 通过阅读材料以及利用互联网资源，了解幂、指、对函数产生的背景，体会其中所蕴含的数学思想和方法.

7. 利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数的增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 指数幂的教学中，充分利用计算器或计算机进行实际操作，感受"逼近过程".

2. 体会在解决简单实际问题的过程中，指数函数和对数函数是一类重要的数学模型.

3. 提高用数学方法提出问题、分析和解决问题（包括简单的实际问题）的能力以及数学表达和交流的能力.

4. 增强学生应用意识和创新意识，力求对现实世界中蕴含的一些数学模式进行思考和做出判断.

5. 通过指、对、幂函数的实际应用，提高学生学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，激发学习数学的热情，养成锲而不舍的钻研精神和科学态度.

6. 开阔数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，培养数学的理性思维，体会、领悟数学的美学价值.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 通过温故知新完成由正整指数幂到实数指数幂及其运算的逐步推广. 让学生体验推广的过程，培养学生数学的思维方式和思维特点.

2. 通过实例引入指数函数.

3. 由求指数的逆运算引入对数运算，并研究对数运算的性质.

4. 专设一节函数的应用(Ⅱ)研究指数函数、对数函数和一些幂函数的应用.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章教材共分四个大节：第一大节是指数与指数函数；第二大节是对数与对数函数；第三大节是幂函数；第四大节是函数的应用．最后还安排了实习作业．

（1）为学习指数函数，首先引入了分数指数幂和根式的概念．初中学习了数的开平方、开立方以及二次根式的概念，又学习了正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂的概念，并且学习了整数指数幂的运算法则．有了这些知识，本章将指数幂的概念扩充到有理指数幂以及学习有理指数幂的运算性质是不困难的．在此基础上，学习指数函数及其图象和性质，这是本单元的重点内容．

（2）为学习对数函数，首先学习对数和对数的运算法则、换底公式，然后再学习对数函数及其图象和性质．

（3）为学习幂函数，首先以简单的幂函数为主要例子，通过图象分析了幂函数的性质．

（4）为加强数学的应用意识，本章安排了“函数的应用（Ⅱ）”．主要以例题的形式，介绍如何建立函数关系式，即数学模型，其中包括了社会学、经济学和核物理学等学科的应用例题．

（5）为让学生体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，寻求数学进步的历史轨迹，激发对数学创新原动力的认识，接受优秀数学文化的熏陶，领会数学的美学价值，从而提高自身的文化素养和创新意识、应用意识，本章在最后安排了“实习作业”．

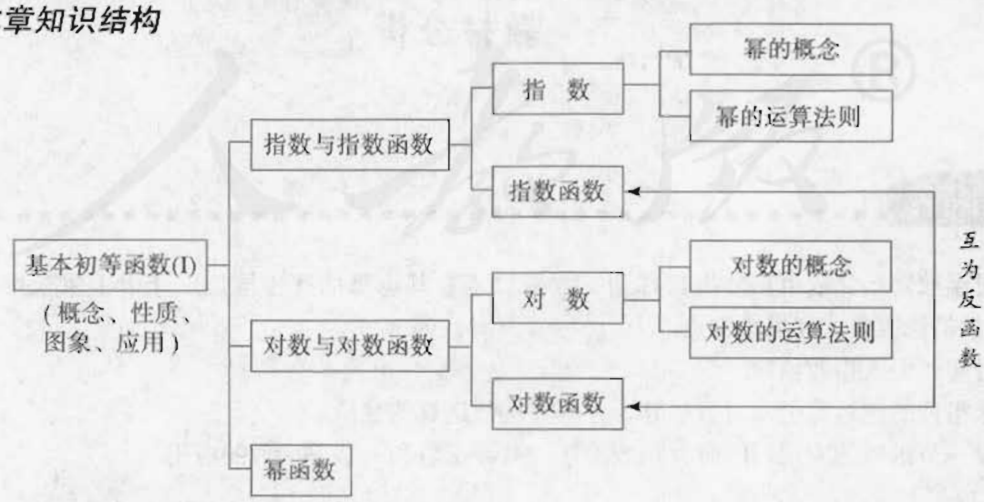
2. 地位与作用

本章是在上一章学习函数及其性质的基础上，具体研究指数函数、对数函数、幂函数这三个高中阶段重要的函数．这是高中函数学习的第二个阶段，目的是使学生在这一阶段获得较为系统的函数知识，并初步培养函数应用意识，为今后的学习打下坚实的基础，同时使学生对函数的认识由感性上升到理性．可以说这一章起到了承上启下的重要作用，本章所涉及到的一些重要思想方法，对学生掌握基础的数学语言，学好高中数学起着重要的作用．

3. 重点与难点

本章的重点是指数函数和对数函数的性质；难点是无理指数幂的含义以及指数和对数的关系．

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约 14 课时，具体分配如下(仅供参考)：

3.1　指数与指数函数	
3.1.1　有理指数幂及其运算	2 课时
3.1.2　指数函数	2 课时
3.2　对数与对数函数	
3.2.1　对数及其运算	3 课时
3.2.2　对数函数	1 课时
3.2.3　指数函数与对数函数的关系	1 课时
3.3　幂函数	1 课时
3.4　函数的应用（Ⅱ）	1 课时
实习作业	1 课时
小结与复习	2 课时

（四）教学建议

3.1　指数与指数函数

3.1.1 有理指数幂及其运算

1. 本小节的重点是分数指数幂的概念及分数指数的运算性质，难点是根式的概念及分数指数概念.

2. 本小节内容结构分析：

（1）本小节内容包括整数指数幂、分数指数幂、根式的概念以及利用分数指数的运算性质进行指数的运算.

（2）为了学习分数指数幂，本小节首先引导学生回顾初中学过的整数指数幂的概念，即正整数指数幂、零指数和负整数指数幂的意义.

引进零指数与负整数指数幂的过程，是由正整数指数幂的运算性质$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$中取消了 $m>n$ 的限制，补充了规定，从而合理地将正整数指数幂推广到了整数指数幂.

在这里，应该指出：由于零指数或负整数指数幂要求底数不等于 0，因而，对于整数指数幂而言，当然就要求“底数不等于 0”.

（3）教材中安排根式这部分内容，是为讲分数指数幂做准备，所以本节教材只讲根式的概念及其性质. 教材先复习了平方根、立方根的定义，然后给出 n 次方根的定义. 同时，教材根据 n 次方根的意义得出了 n 次方根的性质：

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$　（$n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$）

② $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (\text{当 } n \text{ 为奇数}) \\ |a| & (\text{当 } n \text{ 为偶数})\end{cases}$

(4) 分数指数是指数概念的又一个推广．教材通过两个实例说明，当n是大于1的整数，m不是n的整数倍时，分数指数幂写成根式$\sqrt[n]{a^m}$的合理性，仿此定义$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$)．

教材又类比负整数指数幂得出负分数指数幂，规定：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a>0,\ n,\ m\in \mathbf{N}_+,\ \text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}).$$

(5) 整数指数幂的运算性质，对于分数指数幂也同样适用．为此，对任意有理数α、β教材归结出如下运算法则：

$$a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta},$$
$$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},$$
$$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha.$$

(6) 实数指数幂的意义及其运算性质，是由具体实例$3^{\sqrt{2}}$来加以说明的：

按照要求的精确度取$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值，相应地可以得到$3^{\sqrt{2}}$的不足或过剩近似值有理数序列3^{a_n}，3^{b_n}，并且由这两个序列无限逼近$3^{\sqrt{2}}$．

3. 引导学生回顾初中学过的整数指数幂的概念时，要向学生指出：0的零次幂没有意义；0的负整数次幂也没有意义．强调$a\neq 0$．

4. 根式的概念是教学的难点．教学时，可以举几个具体实例，例如：

① 如果$2^4=16$，那么2是16的4次方根；

② 如果$3^5=243$，那么3是243的5次方根．

然后再给出n次方根的一般定义．

方根的性质，可以结合立方根与平方根的性质来讲述．也就是说，n次方根的性质实际上是平方根和立方根性质的推广．因此，教学时可以以平方根与立方根为基础来说明．

与立方根的情况类似，奇次方根有下列性质：在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数．例如：27的3次方根是3；-27的3次方根是-3；32的5次方根是2；-1的7次方根是-1．

与平方根的情况类似，偶次方根有下列性质：在实数范围内，正数的偶次方根是两个绝对值相等的符号相反的数；负数的偶次方根没有意义．例如：36的平方根是± 6；16的4次方根有两个± 2；-16的4次方根没有意义．

0的任何次方根都是0．

教学时可以举几个具体数字的例子，说明它的含义和用途．

5. 关于分数指数幂的意义，教学中要让学生反复理解，它不表示相同因式的乘积，而是根式的另一种表示方法．可以通过根式与分数指数幂的互化来巩固加深这一概念的理解．

由于学过负整数指数幂，因而在正分数指数幂引入后，学生不难理解负分数指数幂的意义，教学中可以引导学生自己得出：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a>0,\ n,\ m\in \mathbf{N}_+,\ \text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}).$$

并补充规定："0的正分数次幂是0，0的负分数次幂没有意义．"

6. 讲述实数指数幂的意义及其运算性质时，让学生进一步体会“用有理数逼近无理数”的思想，并且结合例 1、例 2 让学生利用计算器或计算机进行实际操作，感受“逼近”过程.

7. 讲例 3 时，因为刚刚学过分数指数的定义和运算性质，学生还不太熟悉它，所以，教学时要严格按照例题的解题步骤进行.

对于计算的结果，不强求统一形式表示. 没有特别要求，就用分数指数幂的形式表示，如果有特殊要求，可根据要求写出结果. 但结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数.

8. 本节应熟练掌握的基本技能：运算能力、处理数据的能力以及运用科学计算器的能力. 应避免过于繁杂的运算和技巧性过强的训练.

3.1.2 指数函数

1. 本小节的重点是指数函数的图象和性质，难点是对于底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时指数函数的不同性质.

2. 本小节内容结构分析：

(1) 本小节包括指数函数的概念、图象和性质.

(2) 教材从一个关于细胞分裂的具体问题引入指数函数的概念，既说明指数函数的概念来自实践，也便于学生接受. 在讲解指数函数的定义时，要说明它的定义域是什么，为什么要规定 a 是一个大于零且不等于 1 的常量.

① 定义域：因为指数函数概念已经扩充到有理数和无理数，所以在底数 $a>0$ 的前提下，x 可以是任意实数.

② 规定底数 a 大于零且不等于 1 的理由：

如果 $a=0$，$\begin{cases}\text{当 } x>0 \text{ 时，} a^x \text{ 恒等于 } 0\\ \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时，} a^x \text{ 无意义}\end{cases}$

如果 $a<0$，比如 $y=(-4)^x$，这时对于 $x=\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$，…，$(-4)^x$ 都无意义.

如果 $a=1$，对于任何实数 x，$y=1^x=1$ 是一个常量，对它就没有研究的必要.

(3) 函数图象是研究函数性质的直观工具，利用图象便于学生理解并掌握函数的性质和变化规律. 在用描点法画指数函数的图象时，首先要通过计算列出对应值表.

(4) 教材中利用两个指数函数 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象，分析它们的特征，并由此得出指数函数的性质.

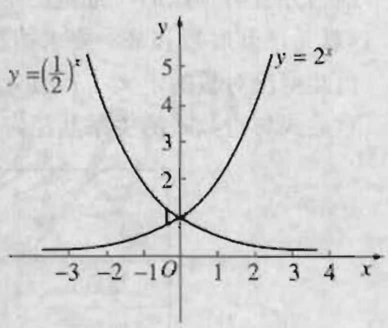


图 3-1

(5) 指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的单调性是可以证明的. 以下证明仅供教师参考，教学中不做要求.

证明当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数.

证明：设 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$.

因为 $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$，因而当 $a>1$ 时，由于 $x_1-x_2<0$，

因此 $a^{x_1-x_2}<1$，即 $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}<1$.

又因为 $a^{x_2}>0$，

所以　$a^{x_1}<a^{x_2}$.

即当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数.

当 $0<a<1$ 时，仿此可证得函数 $y=a^x$ 是减函数.

3. 本小节是在有理指数扩充到实数指数的基础上引入指数函数的. 因此在指数函数教学之前，先要复习零指数、负指数、分数指数幂的意义及其运算. 无理指数幂的意义要用极限才能解释清楚，教学中可根据教材第 3.1.1 节向学生解释.

4. 在理解指数函数定义的基础上掌握指数函数的图象和性质，这是本小节教材的重点，其关键在于弄清底数 a 对于函数值变化的影响. 对于 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时函数值变化的不同情况，学生往往容易混淆，这是教学中的一个难点. 攻克这一难点应特别重视直观教学，即应充分利用函数图象理解函数的性质.

5. 为了充分利用图象来讲清指数函数的性质，建议在教学中，可先要求学生在同一坐标系内画出 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 这两个指数函数的图象；然后根据图象，引导学生共同分析它们的特征，并由此得出指数函数的性质.

6. 本小节要强化对运算、作图、处理数据、科学计算器的使用等基本技能的训练.

7. 充分利用本小节内容，加强数形结合、分类讨论等数学思想的渗透.

3.2　对数与对数函数

3.2.1 对数及其运算

1. 本小节的重点是对数的定义及对数的运算性质，难点是换底公式及对数式变形.

2. 本小节内容结构分析：

(1) 本小节内容包括对数的概念、常用对数、对数式与指数式互化、对数的运算性质、换底公式与自然对数.

(2) 教材从细胞分裂的实际问题引入：

细胞分裂第 x 次后，细胞的个数 $y=2^x$，若知道细胞分裂若干次后的个数为 y，如何求分裂的次数 x. 这就是已知底数和幂，要求指数的问题是上述问题的逆问题，即本节的对数问题.

由此得出对数的定义：$x=\log_a y$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$.

对数式与指数式的关系及相应名称列表如下：

	式子	名称		
		a	b	N
指数式	$a^b=N$	底数	指数	幂值
对数式	$\log_a N=b$	底数	对数	真数

(3) 特例：常用对数 $\lg N$.

当底数 $a=10$ 时，$\log_a N$ 叫做常用对数，简记作 $\lg N$. 以后如果没有指出对数的底数，一般都是指常用对数. 如 “100 的对数是 2”，就是 “100 的常用对数是 2”.

(4) 对数的运算性质是本小节的重点之一：

① $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$ 并推广到

$$\log_a(N_1N_2\cdots N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k;$$

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

③ $\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M$；

用文字语言描述以上三条性质：

① 正因数乘积的对数，等于同一底数的各因数对数之和（简言之：积的对数等于对数的和）；

② 两个正数商的对数，等于同一底数被除数的对数减去除数的对数（简言之：商的对数等于对数的差）；

③ 正数幂的对数，等于幂指数乘以同一底数幂的底数的对数.

(5) 换底公式的意义是如何把一个对数式的底数换成另外一个数（大于 0 且不等于 1），这在对数式的恒等变形和计算求值中有重要的作用.

换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

(6) 自然对数与常用对数一样，是一般对数的特例.

当底数 $a=\mathrm{e}$（其中 $\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$ 是一个无理数）时，$\log_a N$ 叫做自然对数，简记为 $\ln N$.

3. 引进对数的定义后，要说明两点：

(1) 要让学生弄清楚对数式 $\log_a N=b$ 的含义. 要清楚 a，N，b 相对于指数式 $a^b=N$ 各是什么数，并找出它们之间有什么关系；其次要掌握各数的名称和式子的读法.

(2) 注意对数式 $\log_a N=b$ 中字母的取值范围. 对数定义中为什么规定 $a>0$，$a\neq1$？因为若 $a<0$，则 N 为某些值时，b 不存在. 如：$\log_{(-2)}8$ 不存在；N 为 0 时，b 可以为任何正数，是不唯一的，即 $\log_0 0$ 有无数个值；若 $a=1$，N 不为 1 时，b 不存在. 如：$\log_1 3$ 不存在. N 为 1 时，b 可以是任何数，是不唯一的，即 $\log_1 1$ 有无数多个值. 这样就规定了 $a>0$，$a\neq1$.

在 $\log_a N=b$ 中，必须 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数. 因而，$a^b=N$ 中 N 总是正数. 因此要特别强调：**0 和负数没有对数**.

由对数的定义可以直接得到对数的两个性质：

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1(a>0,\ a\neq1).$$

这两个十分简单的性质以后经常用到，所以要求学生掌握.

4. 学生要熟练运用计算器计算一个正实数的常用对数和自然对数.

5. 因为对数运算法则的证明要用到指数运算法则，所以，在熟悉对数式与指数式的关系的基础上，教学中要引导学生复习指数的运算法则.

让学生理解推导对数运算法则的依据和过程，并能熟练地用语言叙述法则，从而记住这些法则.

6. 要让学生理解证明对数运算性质的思想. 对于性质①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

(1) 先要弄清条件和结论，即已知 $\log_a M$、$\log_a N$ 求 $\log_a(MN)$，要明确这里 $a>0$，$a\neq1$，且 $M>0$，$N>0$.

(2) 为了利用幂的运算性质，设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，转化成指数式 $M=a^p$，$N=a^q$，于是 $MN=a^{p+q}$.

(3) 重新转化成对数式，代换得证，即有 $\log_a(MN)=p+q=\log_a M+\log_a N$.

(4) 这一对数运算性质还可以这样证明：

因为 $M=a^{\log_a M}$，$N=a^{\log_a N}$，所以，$MN=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=a^{\log_a M+\log_a N}$.

根据定义，得 $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

(5) 当因数超过 2 个时，上述对数运算性质仍然成立．例如：$\log_a(LMN)=\log_a L+\log_a M+\log_a N$.

证明如下：设 $\log_a L=p$，$\log_a(MN)=q$，则 $L=a^p$，$MN=a^q$，于是 $LMN=a^{p+q}$，所以 $\log_a(LMN)=\log_a L+\log_a(MN)=\log_a L+\log_a M+\log_a N$.

7. 教学时可以将指数与对数的运算性质列表进行对照加以复习和巩固.

8. 利用对数运算法则时，要注意各个字母的取值约束：$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq1$．要注意，只有所列等式中的对数都存在时，等式才有意义.

例如，$\log_2(-3)(-5)$是存在的，但 $\log_2(-3)$，$\log_2(-5)$都不存在，因此，不能得出 $\log_2[(-3)(-5)]=\log_2(-3)+\log_2(-5)$.

又如，$\log_{10}(-10)^2$ 是存在的，但 $\log_{10}(-10)$无意义，因此，得出 $\log_{10}(-10)^2=2\log_{10}(-10)$是无意义的.

9. 学生初学这四个运算法则时，容易出现下面的错误：

$$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N;$$

$$\log_a(MN)=\log_a M\cdot\log_a N;$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\frac{\log_a M}{\log_a N}.$$

产生这种错误的原因是将积商幂的对数与对数的积商幂混淆起来，把对数符号当作表示数的字母进行运算了．纠正错误的方法是在正确理解概念的基础上，利用一些实际题目检验，并及时纠正其错误.

10. 换底公式的证明可以根据对数运算性质(3)给出第二种证法：

要证 $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$，只要证 $\log_b N\cdot\log_a b=\log_a N$.

根据对数运算性质③，这里只要证 $\log_a b^{\log_b N}=\log_a N$.

因为 $b^{\log_b N}=N$ 成立，所以上式成立．从而换底公式成立.

3.2.2 对数函数

1. 本小节的重点是对数函数的图象和性质；难点是对于底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时，对数函数的不同性质.

2. 本小节内容结构分析：

(1) 本小节内容包括对数函数的概念、图象与性质.

(2) 教材是根据对数式 $x=\log_a y$ ($a>0$，$a\neq1$)的意义及函数的概念给出对数函数定义：函数 $x=\log_a y$ ($a>0$，$a\neq1$)叫做对数函数．它的定义域是正实数集，值域是实数集 **R**.

在指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 中，x，y 两个变量之间的关系是一样的．所不同的是，在指数函数 $y=a^x$ 里，x 是自变量，y 是因变量；而在对数函数 $x=\log_a y$ 中，y 是自变量，x 是因变量．根据习惯，对数函数通常写成：$y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq1$，$x>0$).

(3) 对数函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象仍然是用描点法画出的．根据指数函数、对数函数的定

义，在作 x，y 的对应值表时，借用了 3.1.2 节的两个指数函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的对应值表，并进行对调获得的.

利用同一坐标系中 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象（图 3-2），引导学生分析它们的特征，从而得出对数函数的性质：

图象特征	函数性质
(1) 这些图象都在 x 轴的右边	(1) 定义域是 $(0,+\infty)$
(2) 函数图象都经过 $(1,0)$ 点	(2) 1 的对数是 0
(3) 图象（Ⅰ）在 $(1,0)$ 点右边的纵坐标都大于零；在 $(1,0)$ 点左边的纵坐标都小于零；图象（Ⅱ）正好相反，在 $(1,0)$ 点右边的纵坐标都小于零；在 $(1,0)$ 点左边的纵坐标都大于零.	(3) 当底数 $a>1$ 时，$\begin{cases}x>1, 则 \log_a x>0\\0<x<1, 则 \log_a x<0\end{cases}$ 当底数 $0<a<1$ 时，$\begin{cases}x>1, 则 \log_a x<0\\0<x<1, 则 \log_a x>0\end{cases}$
(4) 从左向右看，图象（Ⅰ）逐渐上升；图象（Ⅱ）逐渐下降.	(4) 当底数 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；当底数 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数.

3. 本小节是在学生已经学过对数与常用对数以及指数函数的基础上，引入对数函数的概念的. 因此在讲授对数函数前，应复习一下有关知识. 因为对数函数与指数函数密切相关，所以在学习对数函数的概念、图象与性质时，要处处与指数函数相对照.

指数函数的值域 $(0,+\infty)$，变成了对数函数的定义域；而指数函数的定义域实数集 $\mathbf{R}$，则变成了对数函数的值域.

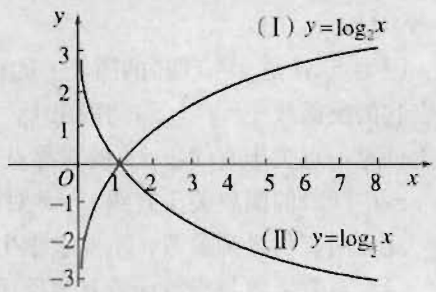


图 3-2

4. 在理解对数函数定义的基础上，掌握对数函数的图象和性质，是本小节的重点. 讲授对数函数的性质时，也应像讲授指数函数那样，对照同一坐标系中的两个不同类对数函数图象，引导学生共同分析它们的特征，并在理解的基础上予以熟记.

5. 充分利用本节内容强化计算、作图、类比、数形结合、分类讨论等基本技能和思想方法的训练、渗透.

3.2.3 指数函数与对数函数的关系

1. 本小节的重点是反函数的概念及互为反函数图象间的关系，难点是反函数的概念.

2. 本小节内容结构分析：

(1) 本小节内容主要包括反函数的概念、互为反函数图象之间的关系、指数函数与对数函数互为反函数的关系.

(2) 课本通过实例引入反函数这一概念，在此应明确以下几点：

① 反函数的定义域与值域正好是原来函数的值域与定义域. 例如：$x=\frac{y}{2}$ $(y\in\mathbf{Z})$ 不是函数 $y=2x$ 的反函数，因为前者的值域显然不是后者的定义域.

② 对于任意一个函数 $y=f(x)$，不一定总有反函数. 只有当确定一个函数的映射是一一映射时，这个函数才存在反函数. 如果有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么原来函数 $y=f(x)$ 也是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，即它们互为反函数.

③ 反函数也是函数，因为它们符合函数的定义.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图象与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，这个结论是在坐标系中横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴，而且横轴与纵轴的单位长度一致的前提下得出的，结论的证明如下：

证明：设 $M(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，那么 $x=a$ 时，$f(x)$ 有唯一的值 $f(a)=b$. 因为 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，所以 $x=b$ 时，$f^{-1}(x)$ 有唯一的值 $f^{-1}(b)=a$，即点 $M'(b,a)$ 在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上.

如果 $a=b$，那么 M，M' 是直线 $y=x$ 上同一个点，因此它们关于直线 $y=x$ 对称.

现设 $a\neq b$，如图 3-3，在直线 $y=x$ 上任取一点 $P(c,c)$，连接 PM，PM'，MM'. 由两点间距离公式，得

$$PM=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2},$$

$$PM'=\sqrt{(b-c)^2+(a-c)^2},$$

所以 $$PM=PM'.$$

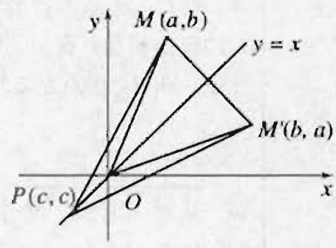


图 3-3

由此可知，直线 $y=x$ 上任意一点到两个定点 M，M' 的距离相等，因此直线 $y=x$ 是线段 MM' 的垂直平分线，从而点 M，M' 关于直线 $y=x$ 对称.

因为点 M 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，所以 $y=f(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点都在它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上. 由 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，可知，函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点也都在它的反函数 $y=f(x)$ 的图象上. 这就是说，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

此证明仅供教师参考，不要求学生掌握.

(4) 对数函数与指数函数互为反函数，为了揭示这两种函数之间的内在联系，教学中，可以引导学生列出指数函数与对数函数的对照表，借以复习指数函数与对数函数的主要性质.

3. 反函数的教学，只要求以具体函数为例进行解释和直观理解，例如：可通过比较同底数的指数函数和对数函数，说明指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数（$a>0$，$a\neq 1$）.

4. 不要求一般地讨论形式化的反函数定义，也不要求求已知函数的反函数以及判断一个函数是否有反函数.

3.3 幂函数

1. 本小节的重点是幂函数的定义、图象和性质，难点是幂函数图象的位置和形状变化.

2. 本小节内容结构分析：

(1) 本小节内容包括幂函数的定义、图象和性质.

(2) 教材是从学生已经掌握的最简单的函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$ 出发引入幂函数的定义：一般

地，形如 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）的函数称为幂函数，其中 α 为常量.

（3）教材根据五个具体的幂函数，通过列对应值表描点画出图象，然后通过观察图象来归纳幂函数的性质.

3. 教材从学生已经掌握的最简单的函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$ 出发引入幂函数的定义. 这里只要讨论指数为有理数的比较简单的幂函数，至于指数为无理数的幂函数，在中学阶段不做研究. 教学中应注意把握好这个尺度.

4. 并不是任意的一次函数和二次函数都是幂函数，例如：函数 $y=x+1$ 和 $y=x^2+2x$ 都不是幂函数，因为它们不符合幂函数的定义. 不过它们可以看作是由幂函数与常数经过算术运算而得到的初等函数.

5. 教材分 $\alpha>0$ 与 $\alpha<0$ 两种情况来研究幂函数的图象和性质.

幂函数图象的位置和形状变化复杂，只要指数稍有不同，图象的位置和形状就可能发生很大的变化. 因此教材中画幂函数的图象就先从列对应值表开始，再用描点法画图.

列出对应值表是描点法画图的关键. 列表之后要引导学生耐心地，力求准确地画出图象，然后再通过观察图象来归纳幂函数的性质.

6. 把幂函数在 $\alpha>0$ 与 $\alpha<0$ 两种不同情况下的性质加以对比，以加深印象.

相同性质：在$(0,+\infty)$上都有定义，并且图象都经过点$(1,1)$.

不同性质：$\alpha>0$ 时图象经过点$(0,0)$，$\alpha<0$ 时图象不经过点$(0,0)$，因为当 $\alpha<0$ 时，如果 $x=0$，函数就没有意义；在第一象限内，$\alpha>0$ 与 $\alpha<0$ 时的单调性正好相反，这是因为 $x^{-s}=\dfrac{1}{x^s}(s>0)$，所以 x^s 增大时，x^{-s} 反而减小；当 $\alpha<0$ 时，x 轴与 y 轴是第一象限内的曲线的渐近线；当 $\alpha>0$ 时，曲线没有渐近线.

7. 教学中要引导学生探索 α 为正偶数、α 为正奇数时的主要性质，以及 $\alpha>1$ 与 $0<\alpha<1$ 图象的区别，着力培养学生的兴趣和探究意识.

3.4 函数的应用（Ⅱ）

1. 本节的教学重点是理解函数应用模型，难点是数学模型的建立.

2. 本节内容结构分析：

（1）本节共 3 个例题，分别涉及人口增长率、经济、物理等方面的内容.

（2）例 1、例 2、例 3 是建立函数关系的内容. 根据已知条件建立函数关系式是函数应用的一个重要方面. 这类问题有两类：一类是根据几何、物理概念等所给条件建立函数关系；另一类是通过观察、实验建立函数关系. 例如，自由落体的距离公式就属于观察、实验建立的函数关系.

3. 掌握本章学过的内容是学好本节知识的前提，因此在学习本节知识之前，可引导学生回顾一下有关内容：如函数的概念；指数函数概念及其性质；对数函数概念及其性质.

本节的例题和习题涉及的知识内容广泛，特别是物理方面的知识，有的学生较为生疏，在教学过程中可适当予以复习和补充，以便排除教学中的障碍.

4. 本节的例题和习题都涉及到数字计算问题，应注意鼓励学生运用现代化技术学习、探索和解决问题. 例如，利用计算器、计算机画出所给函数的图象，探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质，求方程的近似解等.

5. 在函数应用的教学中，教师要引导学生不断地体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数等函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用.

实习作业

具体实施建议：

1. 实习作业的难点是提出实际问题，实际问题一定要到实际生产、生活中去观察、搜集、整理和提炼，切忌从书本上摘抄和虚拟.

2. 实习作业是一个实践性课题，是研究性学习的一种形式，是培养学生综合实践能力和创新精神的课堂，师生都应该给予足够的重视. 通过实习作业还可以进一步培养学生的协作精神和组织能力. 教师要积极引导，积极参与，防止包办代替和流于形式.

3. 实习作业的实习报告是记录和总结实习作业的结果，要认真填写，并注意就实际问题进行深入探究和研究.

三、拓展资源

（一）知识方法与技能

函数是高中数学的主要内容之一. 它是一条纽带，把高中数学的各个分支紧紧地连在一起. 本章所涉及到的思想方法彼此渗透，相互融合，构成了这一章应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性.

1. 运算问题

指数、对数的概念和运算性质是这一章内容中要求非常高的一部分，指、对数的运算是研究指对数函数的重要工具，并且与解析几何、数列、导数等内容联系紧密，因此要熟练掌握.

例1 已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，求下列各式的值：

（1）$a^{-1}+a$；（2）$a^{2}+a^{-2}$；（3）$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$.

分析：从已知条件中解出 a 的值，进而再代入，这是一种小思维量、大计算量的方法. 我们应引导学生从整体上寻求结果与条件 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 的联系.

解：（1）将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 两边平方，得

$$a+\frac{1}{a}+2=9\Rightarrow a^{-1}+a=7.$$

（2）将 $a^{-1}+a=7$ 两边平方，得

$$a^{2}+a^{-2}+2=49\Rightarrow a^{2}+a^{-2}=47.$$

（3）由于 $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^{3}-(a^{-\frac{1}{2}})^{3}$，所以有

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a^{1}+a^{-1}+1)}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=a^{-1}+a+1=8.$$

例 2 （1）已知 $\log_a x=4$，$\log_a y=5$，试求 $A=\left(x\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy^2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的值.

分析：由于指数的层次太多，我们可以通过等式两边分别取对数达到化简的目的.

解：$\log_a A=\frac{1}{2}\left[\log_a x+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\log_a x-\frac{2}{3}\log_a y\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\times4-\frac{2}{3}\times5\right)=0.$

所以 $A=1$.

（2）计算 $\lg 5\cdot\log_{\sqrt{10}}20+(\lg 2^{\sqrt{2}})^2$.

分析：公式 $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ 是换底公式的一个发展，是一个非常有用的结论，在具体问题中要灵活地使用它.

解：原式 $=\lg 5\cdot\log_{10^{\frac{1}{2}}}20+(\sqrt{2}\lg 2)^2$

$=2\lg\frac{10}{2}\cdot\lg(2\times10)+2(\lg 2)^2$

$=2(1-\lg 2)(1+\lg 2)+2(\lg 2)^2=2.$

2. 单调性问题

函数的单调性是函数的重要性质，同时也是考查的重点，而解决函数的单调性问题往往需从对应函数图象、函数定义入手.

例 3 （1）a，b 满足 $0<a<b<1$，下列不等式中正确的是（　　）.

（A）$a^a<a^b$　　（B）$a^a<b^a$　　（C）$b^a<b^b$　　（D）$b^b<a^b$

分析：对于 A，考虑指数函数 $y=a^x$ 的单调性，知 $a^a>a^b$，所以 A 不正确.

对于 C，也只要考虑指数函数 $y=b^x$ 的单调性，知 $b^a>b^b$，所以 C 也不正确.

对于 D，考虑幂函数 $y=x^b$ 的单调性，知 D 不正确.

对于 B，考虑幂函数 $y=x^a$，注意到幂函数的单调性，知 $a^a<b^a$，所以 B 正确.

例 4 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3+4x-x^2}$ 的单调递增区间是（　　）.

A. $[1,2]$　　B. $[2,3]$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $[2,+\infty)$

分析：一般地，对于函数 $y=a^{f(x)}$，当 $a>1$ 时，其单调区间和 $f(x)$ 的单调区间是一致的，并且在相同区间里，其增减性是一致的；当 $0<a<1$ 时，其单调区间和 $f(x)$ 的单调区间一致，但在相同的区间里其增减性是相反的.

解：$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3+4x-x^2}$ 可化为 $y=3^{(x-2)^2-1}$，令 $u=(x-2)^2-1$，易知 $u\geqslant2$ 时，$u(x)$ 是增函数，故 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3+4x-x^2}$ 的单调递增区间是 $[2,+\infty)$.

例 5 求函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x^2-6x+5|$ 的单调递减区间.

分析：数形结合是解决函数问题常用到的重要数学思想方法，通过应用要培养学生这方面的意识和能力.

解：令 $u=|x^2-6x+5|$，则其图象如图 3-4.

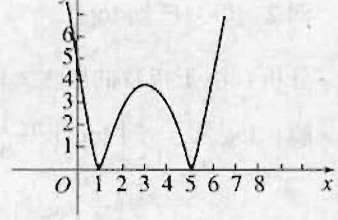


图 3-4

所以函数 u 在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,5)$ 上递减，而在 $(1,3)$ 和 $(5,+\infty)$ 上递增.

于是原函数在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,5)$ 上是增函数，而在 $(1,3)$ 和 $(5,+\infty)$ 上是减函数.

例 6 (1) 比较 $\log_n(n+1)$ 与 $\log_{(n+1)}(n+2)$ $(n>1)$ 的大小.

(2) 如果 $\log_m x<\log_n x$，试求 m，n 满足的条件.

(1) 分析：$\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$ 是一类常见的对数不等式，如 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5>\log_5 6$.

解：$\log_n(n+1)+\log_{(n+1)}n=\dfrac{\lg(n+1)}{\lg n}+\dfrac{\lg n}{\lg(n+1)}>2$，

又因为 $\log_{(n+1)}(n+2)+\log_{(n+1)}n=\log_{(n+1)}(n^2+2n)<\log_{(n+1)}(n+1)^2=2$，

所以 $\log_n(n+1)+\log_{(n+1)}n>\log_{(n+1)}n+\log_{(n+1)}(n+2)$.

所以 $\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$.

(2) 分析：在这里，对数底数不确定，往往要应用分类讨论的思想，去各个击破.

解：①当 $0<x<1$ 时，

$$\log_m x<\log_n x\Leftrightarrow\frac{1}{\log_x m}<\frac{1}{\log_x n}\Leftrightarrow\frac{\log_x n-\log_x m}{\log_x m\cdot\log_x n}<0.$$

若 m，$n\in(0,1)$，因为 $\log_x m>0$，$\log_x n>0$，

所以 $\log_x m<\log_x n$. 所以 $0<m<n<1$.

若 m，$n\in(1,+\infty)$，同样有 $\log_x m\cdot\log_x n>0$，

所以 $1<m<n$.

若 m，n 中有一个属于 $(0,1)$，另一个属于 $(1,+\infty)$，则 $\log_x m\cdot\log_x n<0$，

所以 $\log_x n-\log_x m>0$.

所以 $0<n<1<m$.

②当 $x>1$ 时，$\log_m x<\log_n x\Leftrightarrow\dfrac{\log_x n-\log_x m}{\log_x m\cdot\log_x n}<0$.

若 m，$n\in(0,1)$，则 $\log_x m\cdot\log_x n>0$，

所以 $1<n<m$.

若 m，n 中有一个属于 $(0,1)$，另一个属于 $(1,+\infty)$，则 $\log_x m\cdot\log_x n<0$，

所以 $n>1>m>0$.

综上可知，当 $0<x<1$ 时，m，n 满足 $0<m<n<1$ 或 $1<m<n$ 或 $0<n<1<m$；当 $x>1$ 时，m，n 满足 $0<n<m<1$ 或 $1<n<m$ 或 $0<m<1<n$.

3. 奇偶性问题

函数的奇偶性是函数的又一重要性质，掌握好奇偶性问题的关键是深刻理解定义，从整体上把握定义的特点，从定义中找出解决问题的方法.

例 7 设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=a-\dfrac{2}{2^x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$，若 $f(x)$ 为奇函数，求 a 的值.

解：$f(-x)=a-\frac{2}{2^{-x}+1}=a-\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$，$-f(x)=-a+\frac{2}{2^x+1}$.

因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $a-\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=-a+\frac{2}{2^x+1}$.

所以 $2a=\frac{2^{x+1}+2}{2^x+1}=2$. 所以 $a=1$.

例 8 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$ $(a>0, a\neq1)$，判断 $f(x)$ 的奇偶性，并予以证明.

分析：在未知定义域的情况下，判断函数奇偶性必须先求出定义域，看定义域是否关于原点对称. 这是函数为奇（偶）函数的必要条件.

解：因为 $\frac{1+x}{1-x}>0$，所以 $(1+x)(1-x)>0$. 所以 $(1+x)(x-1)<0$. 所以 $-1<x<1$.

$f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=\log_a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$.

由奇函数定义知，函数 $f(x)$ 是奇函数.

另解：同上 $-1<x<1$，

$f(x)+f(-x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}+\log_a\frac{1-x}{1+x}=\log_a\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\log_a 1=0$.

由奇函数定义知，函数 $f(x)$ 是奇函数.

4. 定义域、值域问题

函数的学习及考查，必然涉及到它的解析式、定义域和值域，只有给出或求出函数的表达方式和定义域，才能利用函数的性质解决问题. 函数的值域往往与函数的最值联系在一起，但问题的本质都是对函数定义的理解和应用.

例 9 求函数的定义域：

(1) $y=\frac{\sqrt{\log_{0.8}x-1}}{2x-1}$；(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\{\lg[\log_a(x^2-1)]\}$，$(a>0, a\neq1)$.

解：(1) 函数的定义域应满足 $\begin{cases}2x-1\neq0\\ \log_{0.8}x-1\geqslant0\\ x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\ \log_{0.8}x\geqslant1\\ x>0\end{cases}$

所以所求函数的定义域为 $0<x\leqslant\frac{4}{5}$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$.

(2) 分析：这是一个与对数函数有关的复合函数定义域，解决这一类问题，首先要掌握各类基本函数式的定义域，然后根据条件将其转化为求不等式或不等式组的解集来处理.

解：要使函数式有意义，必须有

$$\begin{cases}x^2-1>0\\ \log_a(x^2-1)>0\\ \lg[\log_a(x^2-1)]>0,\end{cases}\quad 即\ \begin{cases}x<-1\ 或\ x>1\\ \log_a(x^2-1)>1\end{cases}$$

①当 $a>1$ 时，有 $x^2-1>a$，即 $x^2>a+1$.

解得 $x<-\sqrt{a+1}$ 或 $x>\sqrt{a+1}$.

②当 $0<a<1$ 时，$x^2-1<a$，即 $x^2<a+1$，

解得 $-\sqrt{a+1}<x<-1$ 或 $1<x<\sqrt{a+1}$.

因此，函数的定义域是：当 $a>1$ 时，$\{x \mid x<-\sqrt{a+1}$ 或 $x>\sqrt{a+1}\}$；

当 $0<a<1$ 时，$\{x \mid -\sqrt{a+1}<x<-1$ 或 $1<x<\sqrt{a+1}\}$.

5. 综合性问题

函数综合性问题主要是指对常用的函数思想方法的深入理解、综合思考和灵活应用问题，这些问题往往要综合利用同步等价转化、数形结合和分类讨论等数学思想才能解决. 这是提高学生分析问题、解决问题能力的重要途径.

例 10 已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$，试研究函数的奇偶性，增减性，并求值域.

解：$3^x-3^{-x}\neq 0$，即 $3^{2x}\neq 1$，所以 $x\neq 0$.

所以　函数的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

因为　$f(-x)=\dfrac{3^{-x}+3^x}{3^{-x}-3^x}=-f(x)$，

所以　函数 $f(x)$ 是奇函数.

$y=f(x)=\dfrac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=1+\dfrac{2}{3^{2x}-1}$，

设 $x_1<x_2$，则

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{2(3^{2x_1}-3^{2x_2})}{(3^{2x_1}-1)(3^{2x_2}-1)}$.

当 $0<x_1<x_2$ 时，$1<3^{2x_1}<3^{2x_2}$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$.

所以 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为减函数.

当 $-\infty<x_1<x_2<0$ 时，$1>3^{2x_2}>3^{2x_1}$，

所以 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上也为减函数.

由 $y=1+\dfrac{2}{3^{2x}-1}$，得 $3^{2x}=\dfrac{y+1}{y-1}>0$.

所以 $y>1$ 或 $y<-1$.

所以函数的值域为 $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$.

点评：求此函数的值域还可利用综合分析法.

因为 $0<3^{2x}\neq 1$，所以 $-1<3^{2x}-1\neq 0$.

所以 $\dfrac{1}{3^{2x}-1}>0$ 或 $\dfrac{1}{3^{2x}-1}<-1$.

即 $\dfrac{2}{3^{2x}-1}>0$，或 $\dfrac{2}{3^{2x}-1}<-2$.

所以 $1+\frac{2}{3^{2x}-1}>1$ 或 $1+\frac{2}{3^{2x}-1}<-1$.

即 $y>1$ 或 $y<-1$.

例 11 已知 $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$，求 $f(\lg x)$ 的定义域、值域、单调区间.

解：(1) $f(\lg x)=\sqrt{3-2\lg x-\lg^2 x}$

因为 $3-2x-x^2\geqslant 0$，所以 $x^2+2x-3\leqslant 0$，所以 $-3\leqslant x\leqslant 1$，

所以 $-3\leqslant \lg x\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{1\ 000}\leqslant x\leqslant 10$

所以定义域为 $\left[\frac{1}{1\ 000},\ 10\right]$.

(2) 因为 $3-2\lg x-\lg^2 x=-(\lg x+1)^2+4$

所以 $0\leqslant f(\lg x)\leqslant 2$，即值域为 $[0,\ 2]$

(3) 对于函数 $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ 而言，其单调递增区间为 $[-3,\ -1]$；递减区间为 $[-1,\ 1]$.

又由于 $x\in\left[\frac{1}{1\ 000},\ \frac{1}{10}\right]$ 逐渐增大时，$\lg x\in[-3,\ -1]$ 也随 x 增大而增大，

函数 $y=\sqrt{3-2\lg x-\lg^2 x}$ 也随之而递增.

所以 $y=f(\lg x)$ 在 $\left[\frac{1}{1\ 000},\ \frac{1}{10}\right]$ 上为增函数；

同理可以说明，$x\in\left[\frac{1}{10},\ 10\right]$，$y=f(\lg x)$ 为减函数.

（二）数学史话

纳皮尔和布立格之间的友谊

16 世纪纳皮尔发明了对数，布立格发明了常用对数，这两个人都是英国人，他们在相互帮助、亲密合作中完成了常用对数的大量研究工作.

约翰·纳皮尔诞生在苏格兰的爱丁堡市曼彻斯特城，是曼彻斯特男爵的儿子. 富裕的家庭环境，往往使子女养成懒惰的习惯，因此在 1574 年 24 岁时，纳皮尔离开父亲，去法国留学. 大学毕业后，他一直在法国从事数学研究，直到 1608 年，因其父去世，他才回到了爱丁堡. 40 多年来他读的是数学方面的书籍，从法国回来后，作为曼彻斯特城堡主人的同时，他继续从事研究. 纳皮尔从级数展开发现了对数. 关于对数发现还有另一种说法.

16 世纪后半叶，丹麦成为研究天文学和航海的中心. 有两位数学家，维特和克拉维斯（Clavius, C.，1537—1612）发表了利用三角函数表使计算简单的方法. 纳皮尔从中受到启发，从而发现了对数.

三角函数表是怎样使计算简化的呢？主要在于三角函数公式将积化为和：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

使用上式及三角函数表，就能使相当费事的两个小数的乘积化成求和的简单计算. 例如计算小数乘

法：0.173 6×0.990 3，要用笔算太麻烦．利用三角函数表，

0.173 6=sin 10°，0.990 3=cos 8°，

$$0.173\,6\times 0.996\,3=\sin 10^\circ\times\cos 8^\circ=\frac{1}{2}[\sin(10^\circ+8^\circ)+\sin(10^\circ-8^\circ)]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 18^\circ+\sin 2^\circ)=\frac{1}{2}(0.309\,0+0.034\,9)=\frac{1}{2}\times 0.343\,9=0.171\,95.$$

由此可知，0.173 6×0.990 3=0.171 95

由两个小数直接做乘法，得

$$0.173\,6\times 0.990\,3=0.171\,916\,08.$$

因此，近似算法小数点后前四位都是正确的，误差万分之一以下．

现在有了电脑，这种方法已看不出什么优越性了．

当时，指数定律的理论，还不像现在这么完善，纳皮尔根据三角函数表做了大量的计算，用了大约20多年的时间完成了精密对数表．

1614年，他发表了著作《惊人的对数规则》(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)，向世人公开了对数的计算方法．

纳皮尔这本著作的出版，在欧洲引起了各国的数学家、天文学家和航海界人士的强烈反响，研究对数的人马上多了起来．

在这些人中，有那时在伦敦格雷沙学院任教授的汉利·布立格．他十分赞赏纳皮尔的研究及著作，不顾路途遥远去苏格兰拜会纳皮尔．

由于他们的共同努力，1624年，出版了《对数》(Arithmertical Logarithmica) 一书．

该书中有1万～2万，以及9万～10万的14位对数，是部相当珍贵的文献．

其后，荷兰的阿德利恩·乌拉克对该书加以修订，发表了从1万到10万的一切整数的对数，其值取到小数点后第10位．

布立格是个数学家，又是个天文学家．他生于约克郡的乌里·乌顿．在坎布里厅的约翰森中心学院毕业后，在伦敦的格兰瑟姆学院教授几何和初等代数．后来成为奥克斯夫大学的天文学教授．

为表彰布立格对对数所作的贡献，有时将以10为底的对数叫做“布立格对数”．

主要参考文献：

[日] 堀场芳数．e的奥秘．科学教育出版社，2000.

布尔吉对数和指数定律

如前所述，纳皮尔从三角函数的公式中受到启发，发现了对数．而我们今天所用的对数，包括以10为底的常用对数和以e为底的自然对数，是由瑞士数学家兼天文学家布尔吉完成的，其拉丁名叫Justus Byrgius.

年轻时，他在宫廷任计时师，后来在卡特琳天文台工作，也曾师从开普勒．

他研究数学和天文学，是当时有名的数学家．但他研究成果发表的不多，所以他死后没有留下什么业绩．

与纳皮尔和布立格毫无关联，他从指数理论出发，发现了对数，称为“布尔吉对数”．

有名的天文学家兼数学家开普勒曾说过，“小数和对数是布尔吉发现的．”

1920 年，在他死后 6 年，才发表了布尔吉对数表，而且没有署名.

综上所述，对数的发现是和纳皮尔、布立格和布尔吉等的努力分不开的. 由于对数的发现，使当时很复杂的笔算变得简单了. 从而加速了数学实用化的进程.

历史上，在开普勒、布立格、牛顿、高斯等大数学家的推动作用下，借助于无穷级数，完成了位数更多、更精确的对数表，使这一数学工具像现在这样完善.

主要参考文献：

[日] 堀场芳数. e 的奥秘. 科学教育出版社，2000.

（三）生活中的数学

“血浓于水”多少倍？

基于“血浓于水”的观念，人会对有血统关系的亲人（以至推广到其他同胞），给予更多的关爱. 那么“血浓于水”的倍数是多少？这里我们可以通过对数(logarithm)的概念，把血比水浓的程度计算出来.

液体的酸碱浓度可以用化学上的 pH 表示：$pH=-\lg[H^+]$. 由于纯水中氢离子的浓度 $[H^+]$ 是 1×10^{-7} mol/L（浓度单位），所以纯水的 $pH=-\lg(1\times10^{-7})=7$. 与纯水比较，愈高的 pH 会有愈强的碱浓度；愈低的 pH 值则表示愈强的酸浓度.

血液的 pH 约为 7.4（若高过 7.5 或低于 7.3，人就会有昏迷，甚至有死亡的危险!）. 利用这些资料，便可找到血比水浓的程度.

$pH=-\lg[H^+]=\lg[H^+]^{-1}$,

血液 pH－纯水的 $pH=\lg[H^+]^{-1}_{(血)}-\lg[H^+]^{-1}_{(水)}$,

$$7.4-7.0=\lg\frac{[H^+]^{-1}_{(血)}}{[H^+]^{-1}_{(水)}},$$

$$10^{0.4}=\frac{[H^+]^{-1}_{(血)}}{[H^+]^{-1}_{(水)}},$$

所以 $[H^+]^{-1}_{(血)}=10^{0.4}[H^+]^{-1}_{(水)}\approx2.5[H^+]^{-1}_{(水)}$.

由此可见，血液的碱浓度是纯水的 2.5 倍.

除血液外，日常生活中还有很多液体用品和食品，可与纯水比较其相对酸碱浓度. 比方说，我们洗澡时是否留意沐浴露的 pH？与纯水相比，它的相对浓度又是其多少倍？

主要参考文献：

罗浩源. 生活的数学. 上海远东出版社，2000.

报纸可以对折多少次？

有一天，数学课上甲同学又如常的发呆. 正感无聊之际，顺手拿起桌上的草稿纸，折起飞机来. 但很快被老师发现. 老师没有动怒，还笑着说：“喜欢折叠的人，我总会给予机会的，但只要回答一个问题：一张纸究竟最多可对折多少次？”甲同学便开始尝试对折手上的纸张. 老师立刻制止，并要求“先估后试”. 甲同学顺口说“20 次”. 随即马上把手上的纸对折起来. 可他无论怎样努力也不能令第八次折得上去. 然而，甲同学不服气地说：“我用报纸可以折得更多，虽可能折不到 20 次，但亦不远吧！”

甲同学再一次失望，他把老师给的报纸勉强折上8次后，便不能再折下去了.

但为什么报纸（比一般纸张大）重复对折的次数是这么困难？

因为报纸的厚度与折叠次数之间满足函数 $y=2^x$（$x\in\mathbf{N}$）. 具体如表：

对折次数	报纸厚度	报纸面积
0	t	A
1	$2t$（$2^1\cdot t$）	$\frac{1}{2}A$
2	$4t$（$2^2\cdot t$）	$\frac{1}{4}A$
3	$8t$（$2^3\cdot t$）	$\frac{1}{8}A$
4	$16t$（$2^4\cdot t$）	$\frac{1}{16}A$
…	…	…
8	$256t$（$2^8\cdot t$）	$\frac{1}{256}A$

由此可见，报纸的厚度随着对折次数逐渐递增，而其面积相应的以相同的比例减少. 加上纸本身的拉力，把报纸对折第九次无疑比一次将512张报纸对折更困难.

主要参考文献：

罗浩源. 生活的数学. 上海远东出版社，2000.

四、教学案例

案例1：3.1.2　指数函数

一、教学目标

1. 知识与技能：了解指数函数模型的实际背景，理解指数函数的概念和意义，理解指数函数的单调性与特殊点.

2. 过程与方法：能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象，探索指数函数的单调性与特殊点.

3. 情感、态度与价值观：在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数是一类重要的函数模型，激发学生学习数学的兴趣，努力培养学生的创新意识.

二、教学重点、难点

重点：指数函数的概念和性质.

难点：指数函数的性质及应用.

三、教学方法与手段

采用观察、分析、归纳、抽象、概括、自主探究，合作交流的教学方法，通过各种教学媒体（如计

算机或计算器)，调动学生参与课堂教学的主动性和积极性.

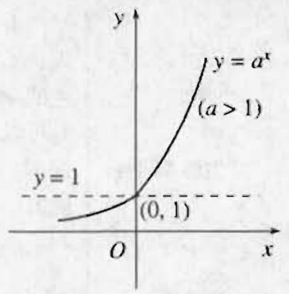
四、教学过程

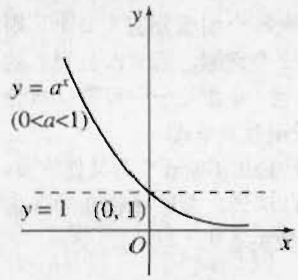
教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	请同学们思考下列问题： 问题1：某种细胞分裂时，每次每个细胞分裂为2个，则1个这样的细胞第1次分裂后变为2个细胞，第2次分裂后就得到4个细胞，第3次分裂后就得到8个细胞……设第x次分裂后得到y个细胞，求y关于x的函数关系式. 问题2：质量为1的一种放射性物质不断衰变为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的50%，求这种物质的剩留量y关于时间x（单位：年）的函数关系式. 问题1：$y=2^x$ $(x\in \mathbf{N})$. 问题2：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $(x\in \mathbf{N}_+)$.	学生思考回答.	由实际问题引入，不仅能激发学生的学习兴趣，而且可以培养学生解决实际问题的能力.
概念形成	函数$y=2^x$与$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的共同特征是什么？你能类比正比例函数，反比例函数的解析式，写出这类函数解析式的一般形式吗？ 共同特征：底数不变而指数可变，即底数是常数，而指数是自变量. 一般形式：$y=a^x$. 为了使$y=a^x$更具有代表性，x可以取全体实数，式中的a应该满足什么条件？ $a>0$，$a\neq 1$. 一般地，函数$y=a^x$ $(a>0$，$a\neq 1$，$x\in \mathbf{R})$叫做指数函数.	学生独立思考，交流讨论，教师巡视，并注意个别指导. 学生探讨分析，教师点拨指导.	由特殊到一般，培养学生的观察、归纳、概括的能力.
概念深化	画出指数函数$y=2^x$和$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图象. 列出$x$，$y$的对应值表（先不显示$x$的取值，让学生发表意见，$x$应选取哪些值?)，用描点法画出图象（图见教材第91页). 分析学生的作图，强调描点后要用光滑曲线把这些点连起来（就像作二次函数图象一样)，注意变化趋势. （借助《几何画板》演示$y=a^x$分别当$a>1$时和$a<1$时的若干个图象.) 请同学们分别观察： (1) 当$a=1.5$，$a=2$，$a=3$，…时，$y=a^x$的图象，看它们有什么共同的特征； (2) 当$a=0.8$，$a=0.5$，$a=0.3$，…时，$y=a^x$的图象，看它们有什么共同的特征.	学生列表计算，描点、作图. 教师动画演示. 学生观察、归纳、总结，教师诱导、点评.	通过列表、计算使学生体会、感受指数函数图象的变化趋势，通过描点，作图培养学生的动手实践能力. 不同情况进行对照，使学生再次经历从特殊到一般，由具体到抽象的思维过程. 培养学生的归纳概括能力.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>

由以上实例，我们可以作出指数函数 $y=a^x$ 在底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图象并归纳出性质.





性质：(1) 定义域：**R**.

(2) 值域：$(0, +\infty)$.

(3) 过点 $(0, 1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$.

(4) 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是减函数.

注：通常，我们把定义域 M 是指数函数定义域 **R** 的真子集 ($M\subsetneqq \mathbf{R}$) 的函数 $y=a^x$ ($x\in M$) 叫做指数函数的“限制函数”.

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>

1. 已知 $y=f(x)$ 是指数函数，且 $f(2)=4$，求函数 $y=f(x)$ 的解析式.

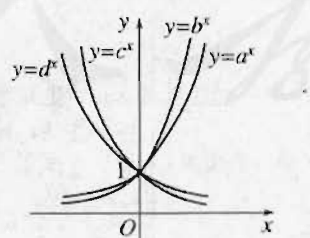
2. 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个值的大小：

(1) 1.7 与 1.7^{a+1}；(2) $0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$；

(3) 已知 $\left(\frac{4}{7}\right)^a>\left(\frac{4}{7}\right)^b$，比较 a，b 的大小.

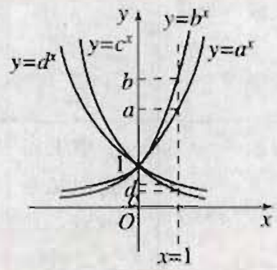
重点分析 2(1) 小题. 要比较 1.7^a 与 1.7^{a+1} 的大小，需归结为考察函数 $y=1.7^x$ 在 **R** 的单调性.

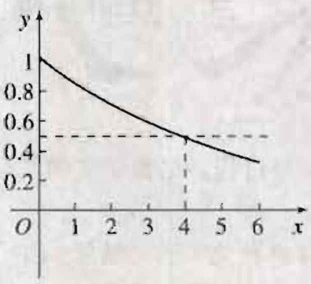
3. 设 a，b，c，d 都是不等于 1 的正数，函数：$y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 在同一坐标系中的图象如图所示. 则 a，b，c，d 的大小关系是 (　　).



</td><td>学生思考、解答、交流，教师巡视，注意个别指导，发现带有普遍性的问题，应及时提到全体学生面前供大家讨论.</td><td>第 1、2 小题巩固所学知识，第 3、4 小题培养学生的数形结合思想和创新能力.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>(A) $a<b<c<d$　　(B) $d<c<b<a$
(C) $b<a<d<c$　　(D) $c<d<a<b$
分析：注意到$x=1$时，各函数值恰好依次为a，b，c，d，为此，作直线$x=1$与四个函数的图象分别相交，交点的纵坐标从下到上依次为c，d，a，b，故选(D)


4. 某种放射性物质不断衰变为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的84%，画出这种物质的剩留量随时间变化的图象，并从图象上求出经过多少年，剩留量是原来的一半(结果保留1个有效数字).
解：设这种物质最初的质量是1，经过x年，剩留量是y.
经过1年，剩留量$y=1\times 84\%=0.84^1$；
经过2年，剩留量$y=0.84\times 0.84=0.84^2$；
……
一般地，经过x年，剩留量$y=0.84^x$.
根据这个函数关系可以列表如下：
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>0.84</td><td>0.71</td><td>0.59</td><td>0.50</td><td>0.42</td><td>0.35</td><td>…</td></tr></table>
画出指数函数$y=0.84^x$的图象，如图所示. 从图上看出$y=0.5$只需$x\approx 4$.


答：约经过4年，剩留量是原来的一半.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	马克思在《资本论》第三卷（P444）中引用了理查·普莱斯博士《关于国债问题告公众书》（1772 年，伦敦，P19）中的有关材料，引用材料之一是： 生复利的钱，起初增长得很慢，以后就不断加快，过了一段时间之后，其速度就超出任何想象．一个便士，在耶稣诞生那一年以 5%的复利放出，到现在（1772 年）会增长成一个比 15 000 万个纯金地球还要大的数目 $y=(1+0.05)^{1771}=1.05^{1771}$．		
归纳小结	引导学生回顾本节课所学的知识及数学思想方法： （1）指数函数的定义； （2）指数函数的图象和性质； （3）待定系数法，特殊化方法，数形结合思想； （4）了解“指数函数”的意义； （5）善于“数学地”思考现实生活中的各种问题．	学生先自觉回忆本节收获，并交流，教师板书．	通过介绍“指数效应”的材料，使学生进一步体会和感悟指数函数图象的变化趋势．通过师生的合作总结，使学生对本节课所学知识的结构有一个明晰的认识，抓住本节的重点．
布置作业	作业： 教材第 92 页练习 A，第 93 页练习 B 和第 93 页习题 3－1A 第 2，3 题，第 94 页习题 3－1B 第 3～5 题． 思考题：A 先生从今天开始每天给你 10 万元，而你第一天给 A 先生 1 元，第二天给 A 先生 2 元，第三天给 A 先生 4 元，第四天给 A 先生 8 元，…… （1）A 先生要和你签订 15 天的合同，你同意签订这个合同吗？ （2）A 先生要和你签订 30 天的合同，你能签这个合同吗？		

案例 2：3.2.1－3　积、商、幂的对数

一、教学目标

1. 知识与技能：理解对数的运算性质．

2. 过程与方法：通过对数的运算性质的探索及推导过程，培养学生的“合情推理能力”、“等价转化”和“演绎归纳”的数学思想方法，以及创新意识．

3. 情感、态度与价值观：通过“合情推理”、“等价转化”和“演绎归纳”的思想运用，培养学生对立统一、相互联系，相互转化以及“特殊——一般”的辩证唯物主义观点，以及大胆探索，实事求是的科学精神．

二、重点、难点

1. 重点：积、商、幂的对数及其推导过程.

2. 难点：积、商、幂的对数的发现过程及其证明.

三、教学方法与手段

针对本节课公式多、思维量大的特点，采取实例归纳，诱思探究，引导发现等方法.

四、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	我们刚刚学过对数的概念和常用对数，请回答下列问题： 1. 对数的定义：________. 2. 对数恒等式：________. 3. 对数的性质：（1）______ （2）______ （3）______. 生答： 1. 若 $a^b=N$（$a>0$，$a\neq1$），则 $b=\log_a N$（$a>0$，$a\neq1$）. 2. $a^{\log_a N}=N$. 3.（1）$N>0$，0 和负数没有对数； （2）1 的对数为 0，即：$\log_a 1=0$； （3）底的对数等于 1，即 $\log_a a=1$.	学生口答，教师板书.	对数的概念和对数恒等式是学习本节课的基础，学习新知前的简单复习，不仅能唤起学生的记忆，而且为学习新课做好了知识上的准备.
概念形成	求下列各式的值，并分别用一个以相应底为底的对数表示出来，据此你有何猜想. （1）$\lg 10+\lg 100$；（2）$\log_3 9+\log_3 27$； （3）$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{2}}8$；（4）$\log_a a^2+\log_a a^5$（$a>0$，$a\neq1$）. 生答：（1）3，$3=\lg 10^3=\lg(10\times100)$； （2）5，$5=\log_3 3^5=\log_3(9\times27)$； （3）$-1$，$-1=\log_{\frac{1}{2}}2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\times8\right)$； （4）7，$7=\log_a a^7=\log_a(a^2\cdot a^5)$； 猜想：$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$（$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$）.	学生计算、构造、猜想，允许交流讨论，汇报结论. 教师巡视指导.	让学生经历从“特殊——一般”，“归纳—猜想”，是培养学生“合情推理”能力的有效方式，同时学生也经历了公式的再发现过程，有利于培养学生的创造能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	猜想：$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$（$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$）. 一定正确吗？ 生：不一定，因为由“归纳—猜想”得出的结论具有或然(似真)性，必须给出严格证明才能承认它的正确性. 师生共同完成证明. 证法一：利用对数的定义及对数恒等式证明. 证法二：利用换元法，借助于对数的定义证明（见教材第98页）. 对数的运算法则1：$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$.　① 因为同底数的幂相乘，不论有多少因数，都是把指数相加，所以这个性质可推广到若干个正因数的积： $\log_a(N_1N_2N_3\cdots N_n)=\log_aN_1+\log_aN_2+\cdots+\log_aN_n$　② 即正因数积的对数等于同一底数的各因数对数的和. 在①式中，令 $M\cdot\dfrac{N}{M}$ 代换 N 得 $\log_a\left(M\cdot\dfrac{N}{M}\right)=\log_aM+\log_a\dfrac{N}{M}$，即 $\log_aN=\log_aM+\log_a\dfrac{N}{M}$，于是 $\log_a\dfrac{N}{M}=\log_aN-\log_aM$. 对数的运算法则2：$\log_a\dfrac{N}{M}=\log_aN-\log_aM$.　③ 在②式中，令 $N_1=N_2=\cdots=N_n=N$，得 $\log_aN^n=n\log_aN$.　④ 又因为 $M=(\sqrt[n]{M})^n$，所以 $\log_aM=\log_a(\sqrt[n]{M})^n=n\log_a\sqrt[n]{M}$. 所以 $\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_aM$.　⑤ 由④、⑤两式，猜想：$\log_aM^\alpha=\alpha\log_aM$（$\alpha\in\mathbf{R}$）. 师生共同完成证明. 证法一：利用对数的定义及对数恒等式证明. 证法二：利用换元法，借助于对数的定义证明.	学生探索证明，教师启发引导. 让学生多角度思考，探究，教师点拨. 让学生讨论、研究，教师引导.	让学生明确由“归纳—猜想”得到的结论不一定正确，但是发现数学结论的有效方法，让学生体会“归纳—猜想—证明”是数学中发现结论，证明结论的完整思维方法，让学生体会回到最原始（定义）的地方是解决数学问题的有效策略. 通过这一环节的教学，训练学生思维的广阔性、发散性，进一步加深学生对字母的认识和利用，体会从“变”中发现规律. 通过本环节的教学，进一步体会上一环节的设计意图.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例 1　判断正误，并说明理由. (1) $\lg[(-8)\times(-3)]=\lg(-8)+\lg(-3)$； (2) $\log_2(4+8)=\log_2 4+\log_2 8=5$； (3) $\frac{\lg 1\ 000}{\lg 100}=\lg\frac{1\ 000}{100}=\lg 10=1$； (4) $\log_3(9\times 81)=\log_3 9\times\log_3 81=8$； (5) $\log_5 25=\log_5 5^2=(\log_5 5)^2=1$. 例 2（处理教材中第 98 页的例 4）. 例 3（处理教材中第 99 页的例 5）.	学生思考，口答，教师板演、点评.	通过这三个例题的解答，巩固所学的对数运算法则，提高运算能力.
归纳小结	1. 对数的三个运算法则； 2. “合情推理”，“归纳—猜想—证明”方法； 3. 字母代换是学好数学，会学数学，发现推广数学问题（结论）的有效方式. 4. 深刻理解数学概念，弄清数学符号的含义是学好数学的关键.	先让学生独自回忆，然后师生共同总结.	通过小结使学生加强对知识的记忆，加深对数学思想方法的理解，养成总结的好习惯.
布置作业	作业：教材第 99 页练习 A 和 100 页练习 B.		

案例 3：3.2.3　指数函数与对数函数的关系

一、教学目标

1. 知识目标：使学生能正确比较指数函数和对数函数性质关系，能以它们为例对反函数进行解释和直观理解.

2. 能力目标：从观察图象到引出概念，培养学生观察、分析、探究问题的能力，数形结合思想的运用能力，提高由特殊到一般的归纳概括能力.

3. 德育目标：引导学生发现指数函数与对数函数的对立统一关系，并欣赏数形和谐的对称美.

二、教学重点与难点

重点是对指数函数和对数函数性质关系的比较，及对反函数概念的理解；难点是反函数的概念.

三、教学方法与教学手段

教学方法：层层设问，启发思维，激发兴趣. 采用以观察图形、发现问题、探究原因、归纳结论、巩固提高为线索的探究式教学方法.

教学手段：采用多媒体辅助教学，突显数形结合思想.

四、教学过程

教学环节	教学内容		设计意图
	教师活动及课件运用	学生活动	
课前准备	投影：来自生活中各个领域，满足轴对称的优美图片.	欣赏图片，做好上课准备.	联系实际，激发兴趣.
新课引入	一、发现对称 问题1：以上图片虽然来自各个领域，但都有一个共同特点，是什么？ 点题：对称美在数学中也是无处不在的，我们这节课的任务就是进一步研究指数函数与对数函数图象之间的对称关系. 课件演示：(1) 函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在同一坐标系内的图象. (2) 函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在同一坐标系内的图象. 结论：底数互为倒数的指数函数图象关于 y 轴对称；底数互为倒数的对数函数图象关于 x 轴对称. 课件演示：在同一坐标系内函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 列表、描点、作图的过程. 问题2：观察两个对应值表、两组点的坐标、两组点的位置、两个函数图象之间各有什么关系？通过对比你得到什么结论？ 问题3：关于直线 $y=x$ 对称的两个点的坐标有什么关系？ 课件演示：简单证明. 课件演示：函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 在同一坐标系内的图象. 问题4：你又得到什么结论？ 结论：同底的指数函数与对数函数图象关于直线 $y=x$ 对称. 引题：数学是严谨的，仅靠观察是不够的. 我们下面的任务就是要进一步解释指数函数和对数函数之间为什么有这种对称关系，这种关系是否具有一般性.	思考、归纳. 回答：都是轴对称图形. 初步明确学习任务. 观察图象，回忆结论. 归纳结论. 逐一观察、细致对比、数形结合、发现对称. 回答：对应值表中 x，y 的值互换；对应点横、纵坐标互换；对应点的位置关于直线 $y=x$ 对称；两个函数图象关于直线 $y=x$ 对称. 回答：横、纵坐标交换. 继续观察，推广结论. 回答：函数图象也是关于直线 $y=x$ 对称. 进一步明确结论，明确任务.	培养观察、归纳能力. 引导学生以发现、欣赏数学美的角度学习数学，提高学习兴趣. 既对所学知识做出总结，又自然引出新课题. 引导学生反复观察，自觉运用数形结合思想. 多角度观察，反复发现、欣赏指数函数与对数函数之间的各种轴对称关系. 由特殊到一般，归纳结论. 培养思维的逻辑性. 启发学生深入探究.

续表

教学环节	教学内容		设计意图
	教师活动及课件运用	学生活动	
知识深化	板书：(课题) 二、解释对称 问题5：指数函数 $y=a^x(a>0，a\neq1)$与对数函数 $y=\log_a x(a>0，a\neq1)$有何内在关系？ 板书： $y=a^x \xrightarrow{\text{互化}} x=\log_a y \xrightarrow{x、y\text{互换}} y=\log_a x$ 强调：先解后换. 问题6：第一步变换有没有引起图象的变化？为什么？ 问题7：第二步变换有没有引起图象的变化？为什么？ 问题8：这两步变换顺序能否交换？ 板书： $y=a^x \xrightarrow{x，y\text{互换}} x=a^y \xrightarrow{\text{互化}} y=\log_a x$ 强调：指数式、对数式互化图象不变，x，y 互换引起图象关于直线 $y=x$ 对称. 结论：指数函数与对数函数之间的这种关系并不是它们所特有的，有大量的函数之间具有这种关系．我们称它们互为反函数. 三、明确定义： 投影：反函数定义. 强调：定义中的要点. 举例：函数 $y=5x(x\in\mathbf{R})$与 $y=\frac{x}{5}(x\in\mathbf{R})$. 投影：函数 $y=5x(x\in\mathbf{R})$与 $y=\frac{x}{5}(x\in\mathbf{R})$图象间的关系. 投影：反函数的符号表示. 四、巩固练习： 投影：练习1　求下列函数的反函数： (1) $y=3^x$；(2) $y=\log_6 x$. 注解：(1) 同底的指数函数与对数函数互为反函数. 投影：练习2　已知函数 $y=f(x)$图象过点$(-2,1)$，则 $y=f^{-1}(x)$图象必过哪个点？ 注解：(2) 互为反函数的函数图象关于直线 $y=x$ 对称. 投影：练习3　求下列函数的反函数：	回顾旧知识，发现新问题. 思考. 回答：没有．x，y 之间的关系是一样的. 回答：变化了．因为 x，y 交换了. 回答：能. 回答：先换后解. 明确结论. 理解、记忆定义. 运用定义解释这两个函数互为反函数．结合投影理解图象间的关系. 认识、会读符号. 通过习题全面理解定义. 回答：(1) $y=\log_3 x$，(2) $y=6^x$. 归纳结论. 回答：必过$(1，-2)$点. 归纳结论. 理解函数的列表表示法，理解反函数定义.	由形的发现转入数的分析，是数形结合思想的重要体现. 运用已有知识解释新问题，提高思维的深度. 此知识点是一个难点，力争讲透. 由知其然到知其所以然，使学生体会思维的快乐. 由特殊到一般，培养归纳概括能力. 再由一般到特殊，帮助理解定义. 遵循课本难度，设计一组习题，帮助学生全面理解概念，克服难点. 将概念中的几个要点分散到每个题目中，有利于学生掌握.

续表

<table>
<tr><th rowspan="2">教学环节</th><th colspan="2">教学内容</th><th rowspan="2">设计意图</th></tr>
<tr><th>教师活动及课件运用</th><th>学生活动</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr>
</table>
注解：(3) 互为反函数的两个函数定义域、值域互换.
投影：练习 4　求下列函数的反函数：
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr>
</table>
投影：问题 9：练习 4 中的函数与函数
<table>
<tr><td>x</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td></tr>
</table>
比较，有何异同？
注解：(4) 只有一一映射的函数才有反函数.
投影：例题：不查表，不使用计算器求值，比较 (1) $\log_2 3$，$\log_4 2$ 的大小；
(2) $\log_2 3$，$2^{1.5}$的大小.
板书：思路.
课件演示：图解法的解题过程.
五、互为反函数的函数图象增减速度比较：
课件演示：函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 在同一坐标系内的图象，及函数变化量的比较.
问题 10：两个函数图象在第一象限增长速度有何关系？
</td><td>
回答：x，y 值互换.
归纳结论.
回答：x，y 值互换.
思考、比较.
归纳结论.
分析、探索.
回答思路.
总结方法.
观察分析，寻找规律.
回答：都是增函数，但在第一象限指数函数增长速度越来越快，对数函数增长速度越来越慢.
</td><td>
学生对列表法表示函数比较陌生，也容易与对应值表混淆，所以此题虽简单，但不容轻视.
培养类比思想，注意前后知识的联系.
数形结合思想的又一次重要体现.
进一步培养观察能力和归纳能力.
</td></tr>
<tr><td>归纳小结</td><td>投影：同底的指数函数和对数函数性质关系对照表.</td><td>归纳总结.</td><td></td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td rowspan="2">教学环节</td><td colspan="2">教学内容</td><td rowspan="2">设计意图</td></tr>
<tr><td>教师活动及课件运用</td><td>学生活动</td></tr>
<tr><td>归纳小结</td><td colspan="2">
<table>
<tr><td colspan="2">性质</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td><td>性质关系</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像</td><td></td><td></td><td>1. 关于 $y=x$ 对称.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">定义域</td><td>指数</td><td></td><td></td><td rowspan="4">2. 定义域、值域互换.</td></tr>
<tr><td>对数</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">值域</td><td>指数</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>对数</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">特殊点</td><td>指数</td><td></td><td></td><td rowspan="2">3. 横、纵坐标互换.</td></tr>
<tr><td>对数</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">单调性</td><td>指数</td><td></td><td></td><td rowspan="2">4. 单调性不变.</td></tr>
<tr><td>对数</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">增减速度</td><td></td><td></td><td>5. 增减速度一快一慢.</td></tr>
</table>
注：同底的指数函数和对数函数性质关系，也体现了所有互为反函数的两函数间性质关系.</td><td>培养学生善于全面总结，自觉归纳知识的好习惯.
数形结合思想的再次重要体现.
使知识更加系统，有利于学生掌握.</td></tr>
<tr><td>布置作业</td><td>1. 教材第 106 页练习 A 第 2 题；第 107 页练习 B 第 2 题；
2. 教材第 126 页“思考与交流”的第 6 题.</td><td>记录作业.</td><td>继续巩固课堂例题的方法，完善关于反函数图象间增减速度比较的结论.</td></tr>
<tr><td>课后思考</td><td>(1) 为什么同底的指数函数和对数函数单调性一致？
(2) 为什么同底的指数函数和对数函数增减速度一快一慢？
提示：运用函数单调性定义和反函数定义解释.</td><td>记录思考题.</td><td></td></tr>
</table>

案例 4：3.3　幂函数

一、教学目标

1. 知识与技能：通过实例，了解幂函数的概念；结合函数的图象，了解它们的变化情况.

2. 过程与方法：使学生体会通过观察、分析函数图象来研究函数性质的方法.

3. 情感、态度与价值观：通过引导学生主动参与作图、分析图象的过程，培养学生的探索精神，并在研究函数变化的过程中渗透辩证唯物主义的观点.

二、重点、难点

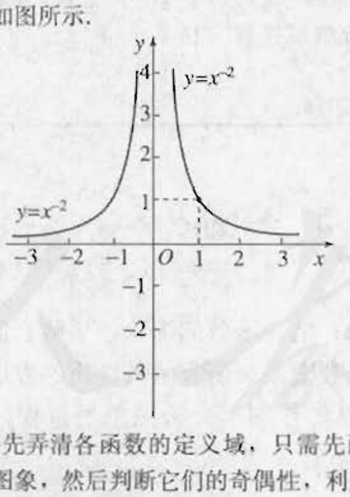
1. 重点：幂函数的概念、图象和性质.

2. 难点：将函数图象的直观特点上升到理性知识，归纳、概括成函数的性质.

三、教学方法与手段

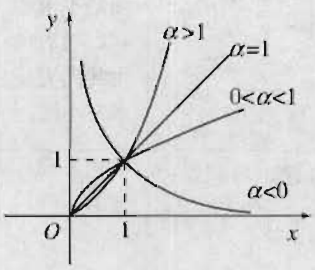
采用师生互动的方式，由学生自我探索、自我分析，合作学习，充分发挥学生的积极性与主动性. 利用实物投影仪及计算机辅助教学.

四、教学过程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>概念形成</td><td>考察以下函数：$y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$，….
这些函数的表达式有什么共同的特征？这类函数表达式的一般形式应如何表示？
生：共同特征：底数可变而指数不变，即：均是以幂的底数为自变量，指数为常数的函数.
一般式：$y=x^{\alpha}$
师：一般地，形如 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）的函数称为幂函数. 其中 α 为常数.</td><td>学生思考、交流、口答，教师板演.</td><td>培养学生的观察、归纳、概括能力.</td></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>作出下列函数的图象：
（1）$y=x$；（2）$y=x^{\frac{1}{2}}$；（3）$y=x^2$；
（4）$y=x^3$；（5）$y=x^{-1}$；（6）$y=x^{-2}$.
解：列各函数的对应值表：
表（一）函数（1）、（2）、（3）、（4）、（5）的对应值见教材第 116 页. 它们的图象见教材第 116 页所示.
表（二）（6）$y=x^{-2}$
<table>
<tr><td>x</td><td>…</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>…</td></tr>
<tr><td>y</td><td>…</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>…</td></tr>
</table>
它的图象如图所示.


（其实，要先弄清各函数的定义域，只需先画出各函数在第一象限内的图象，然后判断它们的奇偶性，利用奇偶函数的图象性质，即可画出整个函数的图象.）
从这些函数的图象我们可以看到，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 随着 α 的取值不同，它们的定义域、性质和图象也不尽相同. 但它们也有一些共同的性质：</td><td>学生列表、描点、连线，作图，教师先用实物投影仪有选择地展示学生的作品，并用计算机展示各函数的图象.
学生观察、归纳，想象，教师巡视指导.</td><td>通过作图训练学生的动手实践能力，并为下面的学习提供丰富的直观材料，使其在实践中发现问题，特别是表（二）中的 $-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 这四个值的探索、发现过程. 培养学生的作图技能、探索创新精神、批判性思维.</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>概念深化</td><td>(1) 所有的幂函数在 $(0, +\infty)$ 上都有定义，并且图象都通过点 $(1, 1)$；
(2) 如果 $\alpha>0$，则幂函数的图象通过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数；
(3) 如果 $\alpha<0$，则幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数，在第一象限内，当 x 从右边趋向于原点时，图象在 y 轴右方无限地逼近 y 轴，当 x 趋于 $+\infty$ 时，图象在 x 轴上方无限地逼近 x 轴.
幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限内，当 $\alpha<0$，$0<\alpha<1$，$\alpha>1$ 时的图象如图所示.

</td><td></td><td>培养学生的看图、析图能力，培养学生的归纳、概括能力，培养学生的想象能力，让学生自主探索，主动学习. 只需弄清了幂函数在第一象限的图象，再借助于奇偶函数的图象性质，即可画出整个函数的图象.</td></tr>
<tr><td>应用举例</td><td>例 1　比较下列各题中两个值的大小：
(1) $0.5^{1.3}$、$0.4^{1.3}$；(2) $3.1^{-\frac{5}{4}}$，$3.7^{-\frac{5}{4}}$.
分析：1. 要比较的两个值有什么特点?
都是幂的形式，且指数相同（不变），底数不同（变）.
因此，我们想通过构造幂函数解决这个问题.
2. 构造一个什么样的幂函数?
3. 要比较的两个值与所构造的幂函数有何关系?
把这两个值看成是两个函数值. 那么，此题就变成了比较两个函数值大小的问题.
4. 根据幂函数在 $(0, +\infty)$ 上的单调性知识，可通过比较自变量取值的大小来比较对应的函数值的大小.
解题过程略.
例 2　设 $a=0.2^{0.3}$，$b=0.3^{0.3}$，$c=0.3^{0.2}$，则（　　）.
(A) $a>b>c$　　(B) $a<b<c$
(C) $a<c<b$　　(D) $b<a<c$
比较 a、b 的大小，需利用幂函数 $y=x^{0.3}$ 的单调性；比较 b，c 的大小，需利用指数函数 $y=0.3^x$ 的单调性，解略.</td><td>学生先思考、交流，教师分析解答.
学生探索、合作交流，教师板书.</td><td>例 1、例 2 的作用主要在于培养学生根据例题构造函数，并利用函数性质来解决问题的能力，同时加深学生对幂函数及其性质的理解.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	思考与讨论： 1. 在幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中，如果 α 是正偶数（$\alpha=2n$，$n\in \mathbf{N}_{+}$），如 $\alpha=2$，4，6，…，试问： 这一类函数具有哪些性质？ 2. 在幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中，如果 α 是正奇数（$\alpha=2n-1$，$n\in \mathbf{N}_{+}$），如 $\alpha=1$，3，5，…，试问： 这一类函数具有哪些重要性质？ 例 3（教材第 109 页例 2）.		培养学生自主探索、合作学习的习惯. 培养学生敢想、敢说的精神，由于是开放性问题，所以答案不唯一，可有效训练学生的发散思维能力.
归纳小结	师生共同完成本节小结： 1. 幂函数的概念； 2. 幂函数的图象和性质； 3. 观察、归纳是发现数学问题的重要方法； 4. 函数思想.	让学生回忆本节收获，然后师生共同完成本节小结.	巩固本节学习成果，使学生逐步养成爱总结、善总结、会总结的习惯和能力.
布置作业	作业：教材第 110 页，习题 3－3A 第 1，3 题，习题 3－3B 第 1～4 题. 阅读：教材第 110～111 页的“探索与研究”.		

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 89 页）

1. （1）x^{12}. （2）$9x^{6}$. （3）$-\frac{1}{8}x^{6}$. （4）$-x^{21}$. （5）$-\frac{4}{x}$. （6）625.

2. $x^{\frac{2}{3}}$；$a^{-\frac{1}{3}}$；$(a+b)^{\frac{3}{4}}$；$(m^{2}+n^{2})^{\frac{1}{3}}$；$x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$.

3. （1）6. （2）$\frac{7}{8}$. （3）9. （4）10. （5）$\frac{1}{2}$. （6）$\frac{125}{8}$.

练习 B（第 90 页）

1. （1）$a^{\frac{29}{24}}$. （2）$a^{\frac{5}{3}}$. （3）$x^{3}y^{-2}$. （4）$-6a$.

2. （1）$2^{\frac{15}{8}}$. （2）$3^{\frac{4}{3}}$. （3）$3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}$. （4）$\frac{4}{25}a^{2}b^{-2}$.

3. （1）1.148 70. （2）1.027 85. （3）1.016 22. （4）1.421 28. （5）1.256 49.
（6）1.474 02. （7）0.072 26. （8）0.895 21. （9）1.371 34. （10）1.371 04.

练习 A（第 92 页）

1. (1) 图略.

相同性质：两图象都在 x 轴上方，都经过点 $(0, 1)$，定义域都是 $\mathbf{R}$. 这说明两函数的值域都是 $(0, +\infty)$，且当 $x=0$ 时，$y=1$.

不同性质：$y=3^{-x}$的图象是下降曲线，这说明前者在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数，后者在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数. 此外，分别观察这两条曲线位于直线 $x=0$ 左右的两部分不同的情况，可见符合指数函数的性质(3).

(2) 略.

2. (1) $3^{0.8}>3^{0.7}$. (2) $0.75^{-0.1}>0.75^{0.1}$. (3) $1.01^{-2}>1.01^{-3.5}$. (4) $0.99^{3}>0.99^{4.5}$.

练习 B（第 93 页）

1. $\frac{1}{2}$；2；8；32.

说明：当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调递增，且增长速度逐渐变快.

2. (1) $0.9^{a}<0.9^{a-0.1}$.　(2) $1.1^{a-2}>1.1^{a-2.1}$.　(3) $1.731^{3}>1.731^{2.1}$.

(4) $0.618^{1.9}<0.618^{1.8}$.

3. (1) $\mathbf{R}$，$\{y \mid y>3\}$.　(2) $\mathbf{R}$，$\{y \mid y>0\}$.

习题 3－1A（第 93 页）

1. (1) 8. (2) 10. (3) $\frac{3}{2}ab^2$. (4) $3^{\frac{5}{6}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}$. (5) 1. (6) $a+b-2\sqrt{ab}$.

(7) $a+b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.　(8) $-\frac{1}{8}a^{-3}$.

2. (1) $\mathbf{R}$，$\{y \mid y>0\}$.　(2) $\{x \mid x\leqslant 0\}$，$\{y \mid 0\leqslant y<1\}$.

(3) $\{x \mid x\geqslant 0\}$，$\{y \mid y\geqslant 1\}$.　(4) $\mathbf{R}$，$\{y \mid y\geqslant 1\}$.

3. (1) $(3, 8)$，$(0, 1)$.　(2) $(-\infty, 0)$，$(3, +\infty)$；$(0, 3)$.

4. (1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}<3^4$.　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}<(2.5)^0<2^{2.5}$.

习题 3－1B（第 94 页）

1. (1) $\{x \mid x\geqslant 1\}$. (2) $\{x \mid x<0\}$.
2. $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$.
3. 因为 $f(x_1)=a^{x_1}$，$f(x_2)=a^{x_2}$，所以 $f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$.
4. 函数定义域为 $\mathbf{R}$，是偶函数，在 $[0, +\infty)$ 单调递增. 所以 $y\in[2, +\infty)$. 列表，描点得到其图象.
5. 图象略.
6. $y=a\left(\frac{1}{4}\right)^x$；4 次.

练习 A（第 97 页）

1. （1）$\log_2 8=3$. （2）$\log_8 64=2$. （3）$\log_2 32=5$. （4）$\log_3 243=5$.

（5）$\log_2 \frac{1}{32}=-5$. （6）$\log_4 \frac{1}{64}=-3$. （7）$\log_{8.8} 1=0$. （8）$\log_{81} \frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$.

（9）$\log_{25} 5=\frac{1}{2}$. （10）$\log_{27} \frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

2. （1）$3^2=9$. （2）$4^2=16$. （3）$5^3=125$. （4）$7^2=49$.

（5）$2^{-2}=\frac{1}{4}$. （6）$2^{-3}=\frac{1}{8}$. （7）$5^{-1}=\frac{1}{5}$. （8）$8^{\frac{4}{3}}=16$.

（9）$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$. （10）$\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=1\ 000$.

3. （1）$x=\lg 25$. （2）$x=\log_2 12$. （3）$x=\log_5 6$. （4）$x=\log_4 \frac{1}{6}$.

4. （1）8. （2）9. （3）5. （4）7.

5. （1）1. （2）4. （3）0. （4）6. （5）-5. （6）-2. （7）-1. （8）-6.

练习 B（第 97 页）

1. （1）2. （2）-3. （3）-3. （4）$-\frac{4}{3}$. （5）$\frac{3}{2}$. （6）-2.

2. （1）3. （2）-6.

3. $x=2$.

练习 A（第 99 页）

1. （1）$\lg x+\lg y+\lg z$. （2）$\lg(x+y)+\lg z$. （3）$\lg(x+y)+\lg(x-y)$. （4）$\lg x+2\lg y-\lg z$.

2. 7；4；-12；$\frac{2}{3}$.

3. （1）1. （2）1. （3）0. （4）-1.

4. （1）错. 差的对数不等于对数的差.

（2）错. 差的对数不等于对数的商.

（3）错. 对数的商不等于对数的差.

练习 B（第 100 页）

1. （1）6. （2）-1. （3）1. （4）$-\frac{2}{3}$.

2. 0.699 0.

3. $2-\log_3 5$.

练习 A（第 101 页）

1. （1）2. （2）π. （3）1.609 44. （4）3.044 52.

2. $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$.

3. $\dfrac{2}{3}$.

4. 1.544 1.

5. 2.321 93.

练习 B（第 102 页）

1. (1) 1. (2) -12. (3) 2.302 6. (4) $-0.693\,1$.

2. $\log_{\sqrt{a}}N=\dfrac{\log_a N}{\log_a\sqrt{a}}=\dfrac{\log_a N}{\frac{1}{2}\log_a a}=2\log_a N$.

3. $\log_x y\cdot\log_y z\cdot\log_z x=\dfrac{\lg y}{\lg x}\cdot\dfrac{\lg z}{\lg y}\cdot\dfrac{\lg x}{\lg z}=1$.

4. $\log_{25}12=\dfrac{\log_5 12}{\log_5 25}=\dfrac{\log_5 3+\log_5 4}{2}=\dfrac{1}{2}(a+b)$.

练习 A（第 104 页）

1. 图略.

相同性质：两图象都位于 y 轴右侧，都经过点 $(1,0)$，这说明两函数定义域都是 $(0,+\infty)$，且当 $x=1$ 时，$y=0$，两函数值域都是全体实数集.

不同性质：$y=\log_3 x$ 的图象是上升曲线，$y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图象是下降曲线，这说明前者在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，后者在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 此外，分别观察这两条曲线位于直线 $x=1$ 左右两部分不同情况，可见符合对数函数性质(2).

2. (1) $\{x\mid x>-1\}$. (2) $\{x\mid x>0$ 且 $x\neq1\}$. (3) $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{3}\right\}$. (4) $\{x\mid x\geqslant1\}$.

3. (1) $\lg 6<\lg 8$. (2) $\log_{0.5}6<\log_{0.5}4$. (3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5>\log_{\frac{2}{3}}0.6$. (4) $\log_{1.5}1.6>\log_{1.5}1.4$.

练习 B（第 104 页）

1. (1) $0<a<1$. (2) $a>1$. (3) $0<a<3$. (4) $a>1$.

2. (1) $\{x\mid x\geqslant1\}$. (2) $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1\}$. (3) $\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$. (4) $\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

练习 A（第 106 页）

1. (1) $y=\log_3 x$ $(x>0)$. (2) $y=6^x$ $(x\in\mathbf{R})$.

2. 指数函数 $y=2^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上，当 x 由 $x_1=-3$ 增加到 $x_2=-1$ 时，$\Delta x=2$，$\Delta y=\dfrac{3}{8}$；对数函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,1]$ 上，当 x 由 $x_1=\dfrac{1}{8}$ 增加到 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 时，$\Delta x=\dfrac{3}{8}$，$\Delta y=2$. 由此可知，在上述区间内，指数函数 $y=2^x$ 随着 x 的增长，函数值的增长较缓慢，而对数函数的增长速度

要快.

练习 B（第 106 页）

1. (1)

x	3	5	7	9
y	1	2	3	4

(2)

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

2. $\log_2 5>\log_4 15>2^{0.5}$.

习题 3－2A（第 106 页）

1. (1) $a^b=N$. (2) $\log_a 1=0$. (3) $\log_a a=1$. (4) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

2. (1) $\log_2 64=\dfrac{\log_8 64}{\log_8 2}=3\log_8 64$.　　(2) $\log_8 81=\dfrac{\log_2 81}{\log_2 8}=\dfrac{4}{3}\log_2 3$.

3. (1) $\dfrac{5}{6}$. (2) 2.

4. (1) $\{x \mid x\geqslant 1\}$. (2) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{3}{4}<x\leqslant 1\right\}$. (3) $\{x \mid x>0\}$.

5. 因为 $f(x_1)=\log_a x_1$，$f(x_2)=\log_a x_2$，
所以 $f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1\cdot x_2)=f(x_1\cdot x_2)$.

6. (1) $x=3$. (2) $x=\dfrac{4}{3}$. (3) $x=\dfrac{6}{5}$. (4) $x=4$.
(5) $x=-5$. (6) $x=3$. (7) $x=5$. (8) $x=10$ 或 $x=10^{-4}$.

习题 3－2B（第 107 页）

1. (1) 3. (2) -2. (3) $\dfrac{3}{2}$. (4) $\dfrac{1}{4}$.

2. $\dfrac{1}{a+b}$.

3.* (1) $x=\dfrac{2}{5}$. (2) $x=\dfrac{1}{4}$. (3) $x=1$ 或 $x=0$. (4) $x=2$.
(5) $x=\dfrac{1}{25}$ 或 $x=5^{\frac{4}{3}}$. (6) $x=3^{\frac{1}{7}}$.

习题 3－3A（第 110 页）

1. 两对函数图象分别关于直线 $y=x$ 对称.

2. (1) $\{x \mid x\neq 0\}$，偶函数.

(2) $\mathbf{R}$，非奇非偶函数.

(3) $\mathbf{R}$，奇函数.

(4) $\{x \mid x>0\}$，非奇非偶函数.

3. 图略．性质：定义域为$\mathbf{R}$，过点 (0，0)、(1，1) 和 (−1，−1)，在$\mathbf{R}$上单调递增，奇函数.

4. $\{x \mid x\neq -2\}$；

$x\in(-\infty, -2)$，函数单调递增；

$x\in(-2, +\infty)$，函数单调递减.

习题 3−3B（第 110 页）

1. (1) $2.3^{\frac{3}{4}}<2.4^{\frac{3}{4}}$. (2) $0.31^{\frac{6}{5}}<0.35^{\frac{6}{5}}$. (3) $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}>(\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}$. (4) $1.1^{-\frac{1}{2}}<0.9^{-\frac{1}{2}}$.

2. 图略．性质：定义域为非负实数集 $[0, +\infty)$，图象过原点和点 (1，1)，在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，函数 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 是非奇非偶函数.

3. 略.

4. 图略．(1) $x\approx 2.6$. (2) $x\approx -1.2$.

习题 3−4A（第 115 页）

1. $y=a(1+p\%)^x(x\in\mathbf{N}^* \text{ 且 } x\leqslant m)$.

2. $y=a(1-p\%)^x(x\in\mathbf{N}^* \text{ 且 } x\leqslant m)$.

3. 先将已知数据代入公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$ 求 k，得

$$52=15+(62-15)e^{-k},$$

$$e^{-k}=\frac{37}{47}=0.787\ 2.$$

两边取对数，得 $-k\lg e=\lg 0.787\ 2=-0.103\ 9$.

所以 $k=\dfrac{0.103\ 9}{\lg e}=2.303\times 0.103\ 9=0.239\ 3$.

又因为 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$，

所以 $\lg(\theta-\theta_0)=\lg(\theta_1-\theta_0)-kt\lg e$.

所以
$$t=\frac{\lg(\theta_1-\theta_0)-\lg(\theta-\theta_0)}{k\lg e}=\frac{\lg(\theta_1-\theta_0)-\lg(\theta-\theta_0)}{0.103\ 9}.$$

把 $\theta_1=62$，$\theta_0=15$ 代入上式，得 $t=\dfrac{\lg 47-\lg(\theta-15)}{0.103\ 9}=\dfrac{1.672\ 1-\lg(\theta-15)}{0.103\ 9}$.

当 $\theta=42$ 时，$t=\dfrac{1.672\ 1-\lg 27}{0.103\ 9}=2.317$ (min).

当 $\theta=32$ 时，$t=\dfrac{1.672\ 1-\lg 17}{0.103\ 9}=4.251$ (min).

当 $\theta=22$ 时，$t=\dfrac{1.672\ 1-\lg 7}{0.103\ 9}=7.960$ (min).

当 $\theta=15.1$ 时，$t=\dfrac{1.6721-\lg 0.1}{0.1039}=25.72$ (min).

当 $\theta=12$ 时，$t=\dfrac{1.6721-\lg(12-15)}{0.1039}=\dfrac{1.6721-\lg(-3)}{0.1039}$.

因为 -3 没有对数，所以这时 t 值不存在．实际上，62 ℃的物体放在 15 ℃的空气中冷却，是不会冷却到 12 ℃的.

答：$k=0.2393$；冷却 2.317 min 后，物体温度是 42 ℃；冷却 4.251 min 后，物体温度是32 ℃；冷却 7.960 min 后，物体温度是 22 ℃；冷却 25.72 min 后，物体温度是 15.1 ℃；物体不会冷却到 12 ℃.

4. 设年平均增长率为 p.
   因为 $y=2.7(1+p)^x$，所以 $1\,436.51=2.7(1+p)^{19}$，解得 $p\approx39.15\%$.
5. 约过 1 600 年质量剩一半.

习题 3—4B（第 115 页）

1. $y=6\,125(1+7\%)^x$（$x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\leqslant5$）．约经过 3 年可以提高到每公顷 7 500 kg.
2. $y=50(1-4.5\%)^x$（$x\in\mathbf{N}^*$）．约经过 20 年价值降为 20 万元.
3. 将 $x=0$，$y=101$；$x=1\,000$，$y=90$ 分别代入函数式 $y=Ce^{kx}$，得

$$\begin{cases}101=Ce^{k\cdot0}\\90=Ce^{1\,000k}\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}C=101\\90=101e^{1\,000k}\end{cases}$

所以 $k=-1.153\times10^{-4}$.

所以 $y=101e^{-1.153\times10^{-4}x}$. ①

将 $x=600$ 代入①式，得

$y=101e^{-1.153\times10^{-4}\times600}$，所以 $y\approx94.2$.

将 $y=96$ 代入①式，得

$96=101e^{-1.153\times10^{-4}x}$，所以 $x\approx440$.

故在 600 m 高空大气压约为 94.2 kPa，在 440 m 高空大气压约为 96 kPa.

4. $0.1^x=\dfrac{1}{5}$．约 0.7 秒后剩下的电量为原有电量的$\dfrac{1}{5}$.

本章小结

III　巩固与提高（第 119 页）

1. (1) 4．(2) 27．(3) (0，1)．(4) (1，0)．(5) (1，1).
   (6) -2．(7) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$．(8) 0.778 1．(9) $\{x\mid 1<x\leqslant2\}$．(10) 2.
2. (1) $5^{\frac{3}{2}}$．(2) 1．(3) 3.
3. (1) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$．(2) $\{x\mid x\geqslant0\}$．(3) $\{x\mid x<2\}$．(4) $\{x\mid x\neq-1\}$.

4. 略.

5. 当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<g(x)$. 图略.

6. 因为 $x\in\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\frac{a^{-x}-a^{x}}{2}=-\frac{a^{x}-a^{-x}}{2}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数.

7. $[10,\ 1\,000]$.

8. 0.333.

9. $A=100$ 时，纯利润 $R=250$；

$A=156.25$ 时，纯利润 $R=312.5$；

$A=169$ 时，纯利润 $R=325$.

10. 略.

11. 略.

IV　自测与评估（第 120 页）

1. (1) B；(2) B.

2. 略.

3. 因为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\frac{(a^{-x}+1)(-x)}{a^{-x}-1}=-\frac{(1+a^{x})x}{1-a^{x}}=\frac{(1+a^{x})x}{a^{x}-1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

4. (1) $m<n$；(2) $m<n$；(3) $m>n$；(4) $m>n$.

5. 80.

6. $[-2,\ 4]$.

7. $\{x_0\mid x_0<-1$ 或 $x_0>1\}$.

8. 取得银行利息金额$=3\times5\,000\times2.7\%=405$(元)，

应纳税金额$=405\times20\%=81$(元)，

实际取出金额$=5\,000+405-81=5\,324$(元).

六、反馈与评价

I　知识与方法测试（100 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 函数 $y=\sqrt{\lg(2-x)}$ 的定义域是（　　）.

(A) $(-\infty,\ +\infty)$　　(B) $(-\infty,\ 2]$　　(C) $(-\infty,\ 0]$　　(D) $(-\infty,\ 1]$

2. 已知 $3^a=5^b=A$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 A 的值是（　　）.

(A) 15　　　　(B) $\sqrt{15}$　　　　(C) $\pm\sqrt{15}$　　　　(D) 225

3. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$，则 $f(8)$等于（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　　　(B) 8　　　　(C) 18　　　　(D) $\frac{4}{3}$

4. 函数 $y=\frac{1}{2^x-1}$的值域是（　　）.

(A) $(-\infty,\ -1)$　　　　(B) $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

(C) $(-1,\ +\infty)$　　　　(D) $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$

5. 若 $0<a<1$，在区间（0，1）上函数 $f(x)=\log_a(x+1)$是（　　）.

(A) 增函数且 $f(x)>0$　　　　(B) 增函数且 $f(x)<0$

(C) 减函数且 $f(x)>0$　　　　(D) 减函数且 $f(x)<0$

6. 三个数 $6^{0.7}$，0.7^6，$\log_{0.7}6$ 的大小顺序是（　　）.

(A) $0.7^6<\log_{0.7}6<6^{0.7}$　　　　(B) $0.7^6<6^{0.7}<\log_{0.7}6$

(C) $\log_{0.7}6<0.7^6<6^{0.7}$　　　　(D) $\log_{0.7}6<6^{0.7}<0.7^6$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\sqrt[3]{a^{13}}}=$__________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ 3^x & (x<0)\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=$__________.

9. 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，则 $\log_{36}45=$__________（用 a、b 表示）.

10. 给出下列 4 个条件（1）$\begin{cases}0<a<1\\ x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$，（2）$\begin{cases}0<a<1\\ x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$，（3）$\begin{cases}a>1\\ x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$，

（4）$\begin{cases}a>1\\ x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$，能使 $y=\log_a\frac{1}{x^2}$为单调减函数的是__________.

三、解答题（共 50 分）

11.（满分 12 分）设函数 $f(x)=|\log_3 x|$，若 $f(a)>f(2)$，则 a 的取值范围.

12.（满分 12 分）求函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 值域.

13.（满分 12 分）已知函数 $f(x)=\log_a\frac{x+1}{x-1}$（$a>0$，$a\neq1$）.

（1）求 $f(x)$的定义域；

（2）讨论 $f(x)$的奇偶性.

14.（满分 14 分）某城市为加快城市发展和新区建设，1999 年做出决定：从 2000 年到 2003 年底更新市内的全部出租车. 若每年更新的出租车数比上一年递增 10%，则 2000 年底更新了年初的多少？

知识与方法测试参考答案：

一、选择题

1. D；2. B；3. A；4. D；5. D；6. C.

二、填空题

7. 1；8. $\frac{1}{9}$；9. $\frac{2b}{2-a}$；10. ①④.

三、解答题

11. 因为 $f(a)=|\log_3 a|$，$f(2)=|\log_3 2|$，

又因为 $f(a)>f(2)$，

所以 $|\log_3 a|>|\log_3 2|$.

所以 $(\log_3 a)^2>(\log_3 2)^2$.

所以 $(\log_3 a+\log_3 2)(\log_3 a-\log_3 2)>0$.

所以 $\log_3 a>\log_3 2$，或 $\log_3 a<-\log_3 2$，解得 $a>2$，或 $0<a<\frac{1}{2}$.

12. 解：设 $x^2-2x=t$，

则 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$.

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ $(t\geqslant -1)$，

所以 $0<f(x)\leqslant 3$.

所以 函数 $f(x)$ 的值域是 $(0, 3]$.

13. (1) 由 $\frac{x+1}{x-1}>0$，得 $(x+1)\cdot(x-1)>0$.

解得 $x<-1$ 或 $x>1$，所以 $f(x)=\log_a \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域是 $\{x \mid x<-1 \text{ 或 } x>1\}$.

(2) 因为 $f(-x)=\log_a \frac{-x+1}{-x-1}=\log_a \frac{x-1}{x+1}=-\log_a \frac{x+1}{x-1}=-f(x)$，

所以 $f(x)=\log_a \frac{x+1}{x-1}$ 为奇函数.

14. 解：设 2000 年底更新了年初的 p，

则2001 年底更新了上一年的 $p\cdot 1.1$，

2002 年底更新了上一年的 $p\cdot 1.1^2$，

2003 年底更新了上一年的 $p\cdot 1.1^3$，

所以 $p+p\cdot 1.1+p\cdot 1.1^2+p\cdot 1.1^3=1$.

解得 $p\approx 21.5\%$.

答：2000 年底约更新了年初的 21.5%.

II 评价建议

1. 针对本章所学知识，除在学完本章知识时进行本章总的测试外，在学习过程中可进行三次阶段性测试：第一次考查指数与指数函数；第二次考查对数与对数函数；第三次考查幂函数与函数的应用

(Ⅱ). 在命题时不要涉及有关指、对数方程和指、对数不等式的复杂问题，幂函数问题也要控制好难度. 通过这些测试，除教师对学生做出评价外，还要组织学生自评和互评，以及时发现问题并得到矫正.

2. 本章知识在实际中的应用较为广泛，为加强学生的应用意识，可组织学生广泛收集，如存款问题、物理中的问题等，让学生根据自己对某些问题的研究，设计相应的实际问题或者写一篇有关的小论文. 在班级中进行交流、展示和评价.

3. 通过小组合作的方式了解指数、对数的发展史，并根据小组掌握的资料写一篇有关指、对数发展史的文章，在班级中进行交流、展示.

Scilab 3.0 作图命令简介

在数学 1 的附录中已对 Scilab 中的作图命令做了简单说明．下面对 Scilab 作图命令做较详细的介绍．

1. plot 指令

plot 是最基本的二维图形绘制指令．

调用形式：

(i) plot(x，y，[xcap，ycap，caption])

(ii) plot(y)

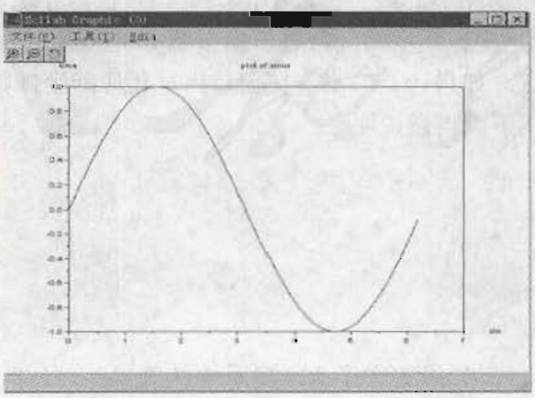
描述

(i) x 和 y 是分量相同的向量．其中，y 是 x 的函数．例如 x=[1，2，3]，y=[6，5，6]，则 plot(x，y)将画出连接点(1，6)、(2，5)和(3，6)的折线．方括号[ ]内是可有可无的参数．xcap、ycap、caption 是字符串类型，分别是 x 轴标题、y 轴标题和这个图形的标题．

(ii) y 是向量或矩阵．例如 $y=[y_1，y_2，\cdots，y_n]$，则 plot(y)将画出连结点$(1，y_1)$，$(2，y_2)\cdots$和$(n，y_n)$的折线．

例 在 Scilab 中输入

```
x=0：0.1：2＊%pi；     // %pi 是圆周率 π.
plot(sin(x))
plot(x，sin(x))        // 观察横坐标，区分这两种方式的不同.
xbasc()                // 清除屏幕上的图象.
plot(x，sin(x)，"sin"，"time"，"plot of sinus")
// 指定横轴、纵轴和图形的标题.
xbasc()
```

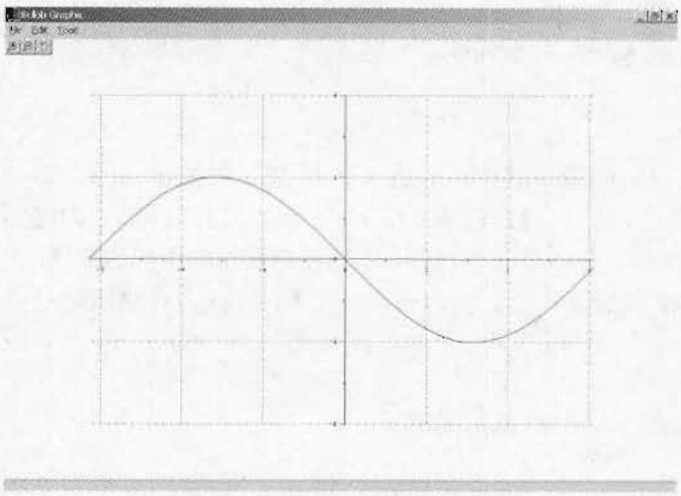


2. Plot2d 指令

Plot2d 是二维图形绘制指令，它比 plot 功能更强．在 2.1.5 节，作为选学内容我们举例说明如何用 Plot2d 命令画函数的图象．这里再做进一步的介绍．

例 作 y=sin x 在(−π，π)上的图象．

```
--> x=-pi: 0.1:%pi;
--> y=sin(x);
-->[x; y];
--> plot2d(x, y, style=[-6], strf="045")
--> xgrid(6)
--> plot2d(x, y, strf="045")
```



其中 Strf 是一个长度为 3 的字符串"xyz"，缺省值是 strf="081"．

➢ x 值控制曲线标题的显示．

x=0：不显示标题．

➢ y 值控制和计算实际的坐标系范围，实际的坐标系范围可能会比最小的要求大．

y=4：绘图的坐标范围是根据图形的最大、最小值决定，并且是等距坐标系．

➢ z 值控制坐标轴的显示，坐标刻度的个数可以由参数 nax 决定．

z=5：以(0，0)为坐标原点．如果(0，0)不落在窗口内，相应的坐标轴将不会被画出．

x，y，z 取其他数值的作用下面再做说明．

plot2d 参数的详细描述：

调用形式

plot2d([x]，y，<opt _ args>)

参数描述

● x 和 y 是一个矩阵或向量．如果省去了 x，则系统认为 x=[1，2，…，n]．其中，n 是 y 的列

数．这与 plot 指令中的 plot(y)类似．

● <opr _ args> 表示参数声明序列 key1=value1，key2=value2，…，这里 key1，key2，…可能是下列参数之一：

➢ style：给出一个向量，该向量给每条曲线设置线型．这个向量的每个分量最好是整数．

➢ rect：给出向量[x_{min}，y_{min}，x_{max}，y_{max}]来设定图形的矩形边界．其中(x_{min}，y_{min})是这个矩形左下角顶点的坐标，(x_{max}，y_{max})是矩形右下角顶点的坐标．

➢ logflag：设置坐标轴的刻度类型（线性或对数型）．它的可选值是以下四个字符串："nn"，"nl"，"ln" 和 "ll"．分别表示横纵坐标均为线型，横坐标为线型而纵坐标为对数型，横坐标为对数型而纵坐标为线型和横纵坐标均为对数型．

➢ frameflag：指定计算绘图框架的方式．这个参数是一个取值范围在 0~8 的整数．

frameflag=0：绘图将使用先前（或缺省）的坐标刻度；

frameflag=1：绘图的坐标范围由 rect 参数决定；

frameflag=2：绘图的坐标范围根据图形的最大、最小值决定；

frameflag=3：绘图的坐标范围由 rect 参数决定，并且是等距坐标系；

frameflag=4：绘图的坐标范围是根据图形的最大、最小值决定，并且是等距坐标系；

frameflag=5：绘图的坐标范围由 rect 参数决定，并且根据美观的需要设定坐标刻度；

frameflag=6：绘图的坐标范围是根据图形的最大、最小值决定，并且根据美观的需要设定坐标刻度；

frameflag=7：类似 frameflag=1 的情形，但是是在原图中画新图，这时，原来的函数图象将根据新刻度重新绘制；

frameflag=8：类似 frameflag=2 的情形，但是是在原图中画新图，这时，原来的函数图象将根据新刻度重新绘制．

➢ axesflag：指定坐标轴的类型．这个参数是一个取值范围在 0~5 的整数．

axesflag=0：不画坐标轴；

axesflag=1：画出坐标轴，且 y 轴画在图象左边；

axesflag=2：画出坐标轴，但不标出刻度；

axesflag=3：画出坐标轴，且 y 轴画在图象右边；

axesflag=4：坐标轴画在窗口中间；

axesflag=5：以(0，0)为坐标原点．如果(0，0)不落在窗口内，相应的坐标轴将不会被画出．

➢ nax：设置坐标轴的刻度和子刻度．这个参数是一个向量[nx，Nx，ny，Ny]．这个参数需先指定图形的矩形边界[x_{min}，y_{min}，x_{max}，y_{max}]．这时 Scilab 将横轴分成 Nx 大格，将纵轴分成 Ny 大格．横轴的每个大格又被分成 nx 小格，纵轴的每个大格被分成 ny 小格．

➢ leg：设置曲线的标题，这个参数是字符串类型，其形式是"leg1@leg2@…"，表示第一个曲线的标题是 leg1，第二条曲线的标题是 leg2……

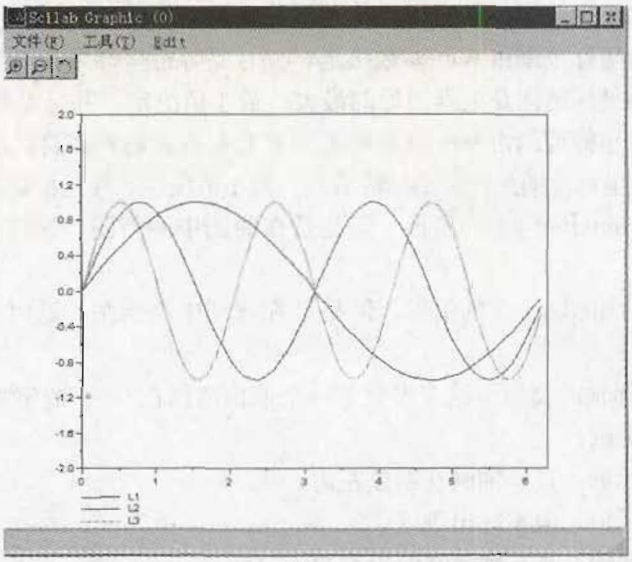
说明

连续地使用绘图命令将会在一个坐标系中重复绘制，如果需要清除以前的绘图，可以用命令 clf()．

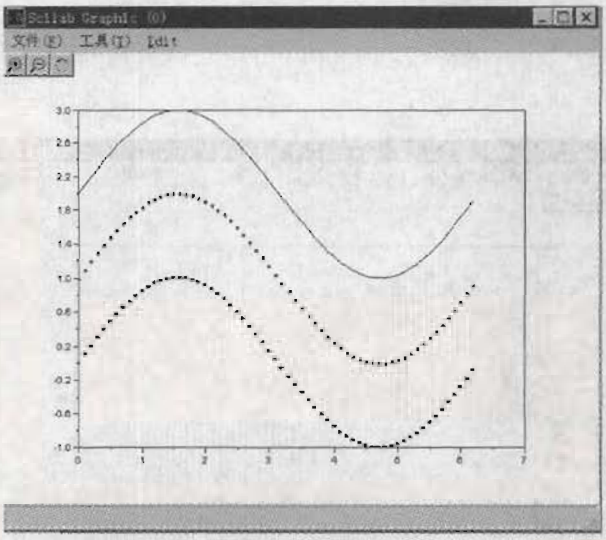
例

x=[0：0.1：2 * %pi]；// 初始化 x．

```
plot2d(sin(x))
clf()
plot2d(x, sin(x))
clf()
plot2d(x, [sin(x) sin(2 * x) sin(3 * x)]) // 在同一个坐标系中画出 3 个函数.
clf()
plot2d(x, [sin(x) sin(2 * x) sin(3 * x)], rect=[0, -2, 6, 2])
// 在指定矩形中绘制 3 个函数.
clf()
plot2d(x, [sin(x) sin(2 * x) sin(3 * x)],
[1, 2, 3], leg="L1@L2@L3", nax=[2, 10, 2, 10], rect=[0, -2, 2 * %pi, 2])
// 指定曲线的标题, 规定坐标轴的刻度.
```




```
clf()
plot2d(x, sin(x), 1, frameflag= 4)
// 等距坐标系.
clf()
plot2d(x, sin(x), 1, frameflag= 6)
// 根据美观自动设置坐标刻度.
clf()
plot2d(x, sin(x), -1)
plot2d(x, 2 * sin(x), 12)
plot2d(2 * x, cos(x), 3)
// 参数 style 的用法.
```



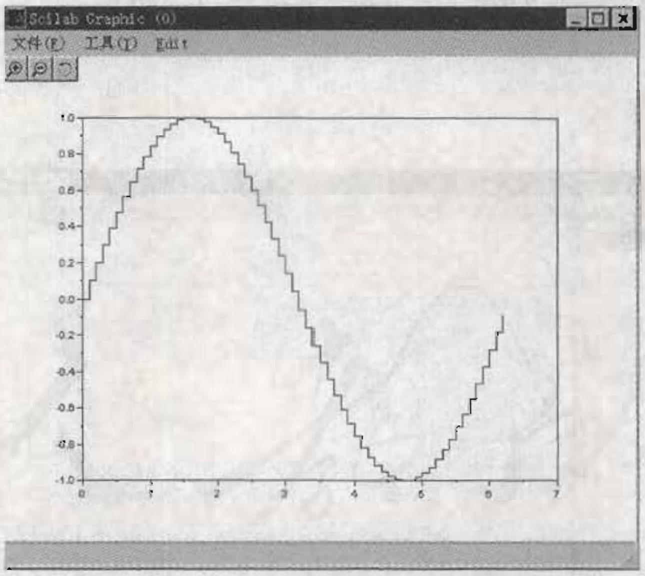
3. Plot2d2 指令

Plot2d2 是用分段连线的方式绘制 2 维图形，其他功能和 plot2d 一样.

例

x=0：0.1：2＊%pi；

plot2d2(x，sin(x))



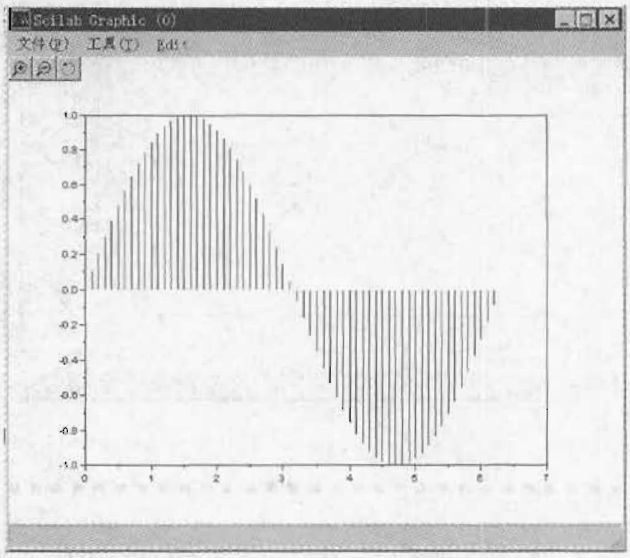
4. Plot2d3 指令

Plot2d3 是用柱形图方式绘制 2 维图形，其他功能和 plot2d 一样.

例

x=0：0.1：2 * %pi；

plot2d3(x，sin(x))



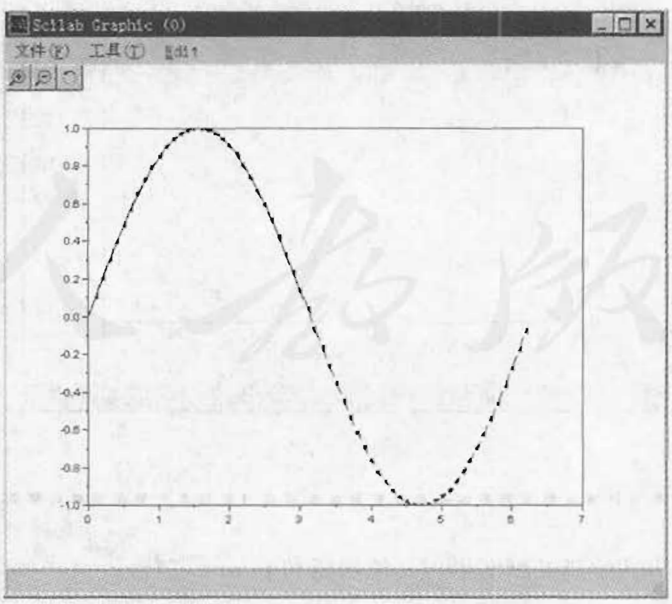
5. Plot2d1 指令

Plot2d4 是用箭头线方式绘制 2 维图形，其他功能和 plot2d 一样.

例

x=0：0.1：2 * %pi；

plot2d4(x，sin(x))



Scliab 2.7 的绘图指令与 Scilab 3.0 的绘图指令略有不同. 这里主要介绍一下 plot2d 的区别. 注意：在 Scilab 3.0 版下运行 Scilab 2.7 以下版本的作图指令时，需要先运行命令：set old _ style on，再运行老版本作图命令. 否则，老版本的作图指令将无法运行.

Plot2d 指令（2.7 版本）

调用形式

plot2d([x]，y，<opt _ args>)

参数说明

参数 style，leg，rect，nax，logflag，frameflag，axesflag，strf.

- Style：与 3.0 版一致；
- Logflag：与 3.0 版一致；
- Leg：设定曲线标题. 如果这个参数已设定，而参数 strf 未设定，则 strf 中的 x 假定为 1；
- Rect：设定图形的矩形边界. 如果这时 frameflag 和 strf 均为设定，则 strf 中的 y 假定为 7；
- Nax：设定刻度，与 3.0 版基本一致. 如果这时 strf 和 axesflag 均为设定，则 strf 中的 z 假定为 1；
- Frameflag：与 3.0 版基本一致，对应于 strf 中的 y 值；
- Axesflag：与 3.0 版基本一致，对应于 strf 中的 z 值；
- Strf：是一个长度为 3 的字符串"xyz"，缺省值是 strf="081".

➢ x 值控制曲线标题的显示

x=0：不显示标题；

x=1：显示参数 leg 中指定的曲线标题.

➢ y 值控制和计算实际的坐标系范围，实际的坐标系范围可能会比最小的要求大.

y=0：绘图将使用先前（或缺省）的坐标刻度；

y=1：绘图的坐标范围由 rect 参数决定；

y=2：绘图的坐标范围根据图形的最大、最小值决定；

y=3：绘图的坐标范围由 rect 参数决定，并且是等距坐标系；

y=4：绘图的坐标范围是根据图形的最大、最小值决定，并且是等距坐标系；

y=5：绘图的坐标范围由 rect 参数决定，并且根据美观的需要设定坐标刻度；

y=6：绘图的坐标范围是根据图形的最大、最小值决定，并且根据美观的需要设定坐标刻度；

y=7：类似 y=1 的情形，但是是在原图中画新图，这时，原来的函数图象将根据新刻度重新绘制；

y=8：类似 y=2 的情形，但是是在原图中画新图，这时，原来的函数图象将根据新刻度重新绘制.

➢ z 值控制坐标轴的显示，坐标刻度的个数可以由参数 nax 决定.

z=0：不画坐标轴；

z=1：画出坐标轴，且 y 轴画在图象左边；

z=2：画出坐标轴，但不标出刻度；

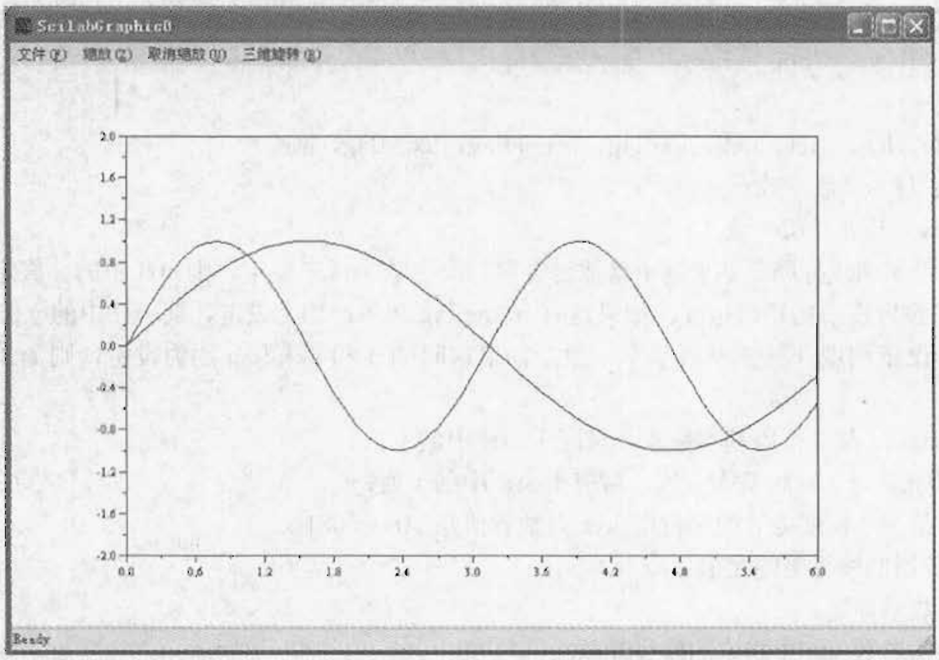
z=3：画出坐标轴，且 y 轴画在图象右边；

z=4：坐标轴画在窗口中间；

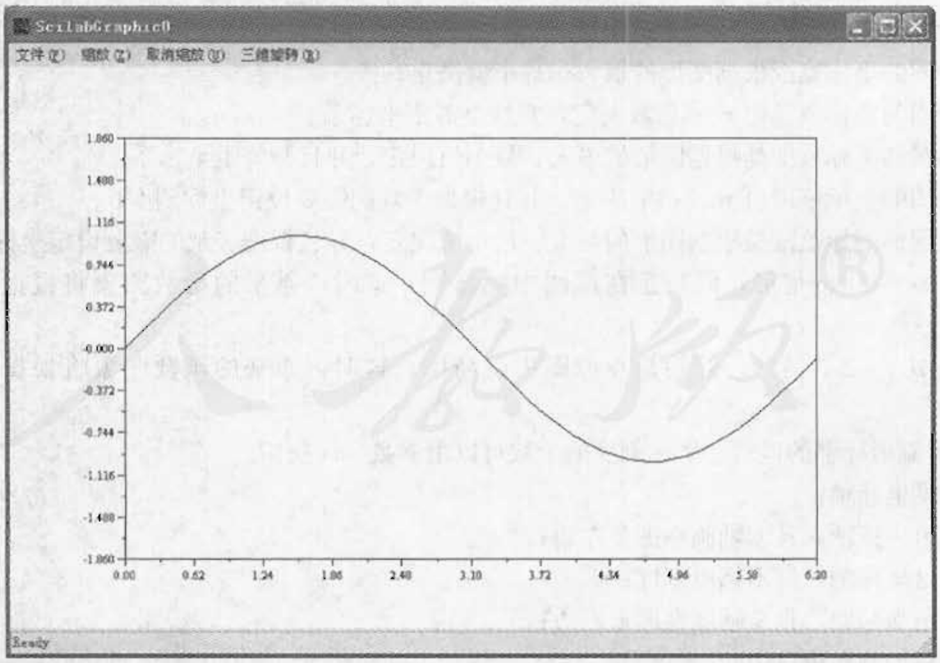
z=5：以(0，0)为坐标原点．如果(0，0)不落在窗口内，相应的坐标轴将不会被画出．

例

```
x=[0：0.1：2*%pi]；
plot2d(x，[sin(x) sin(2*x)]，style=[1，2]，strf="011"，rect=[0，-2，6，2])
```




```
xbasc()
plot2d(x，sin(x)，1，"041")  // 等距坐标系．
```



plot2d(x, sin(x), strf="045")

// 以(0, 0)为坐标原点，作图.

xgrid(6) // 加上粉色的网格，如果用其他的颜色，改变参数即可.