普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-7

优选法与试验设计初步

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4-7优选法与试验设计初步（A版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —2版. —北京：人民教育出版社，2016. 8
ISBN 978-7-107-19205-0

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①人… ②课… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633. 603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第033885号

人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销
2007年5月第2版 2016年8月第11次印刷
开本：890毫米×1 240毫米 1/16 印张：2.25 字数：38千字
定价：5.10元

联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081
电话：010-58759215 电子邮箱：yzzlfk@pep.com.cn

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

编　　者：田载今　张唯一
责任编辑：章建跃　刘长明
美术编辑：王　艾
封面设计：李宏庆

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列1～5以及选修1、2中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的Peano公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1．作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的度量却不受这种限制．

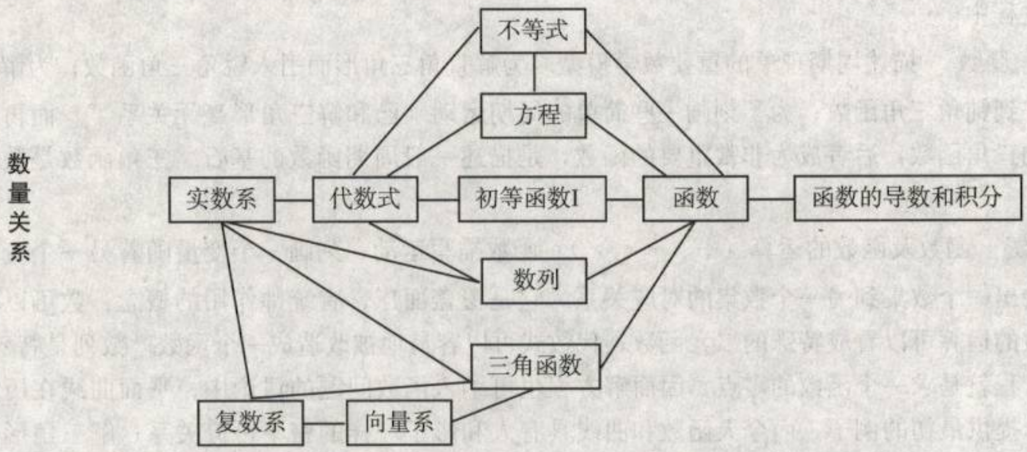
2．概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

"数量关系"

"数量关系"所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数).

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+xi+yj+zk)$，而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是"数"（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等).

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数式 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的"="换成实数系所特有的">"（或"<"）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有"同解"变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的"边界点"类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的"边界". ">"的性质比"="的性质"坏"许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数I 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数.

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

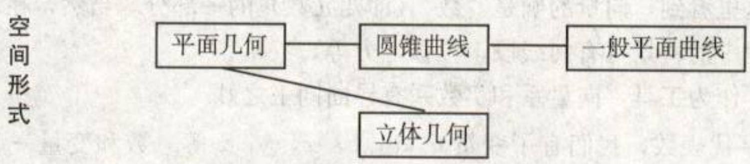
函数 函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分 虽然函数 $f(x)$的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点、直线、直线的平行和垂直、三角形、圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线 在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何 线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看三角函数．把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

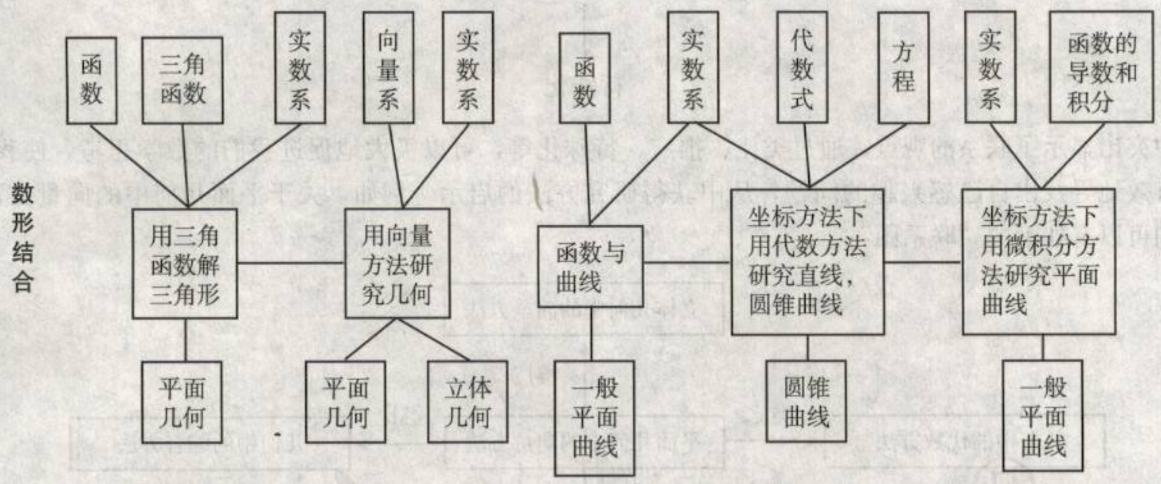
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具．用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线　用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具．用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法．它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了．

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵．让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感．

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点．参看函数．

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等．

4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形．直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等．一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了．

5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质．这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等

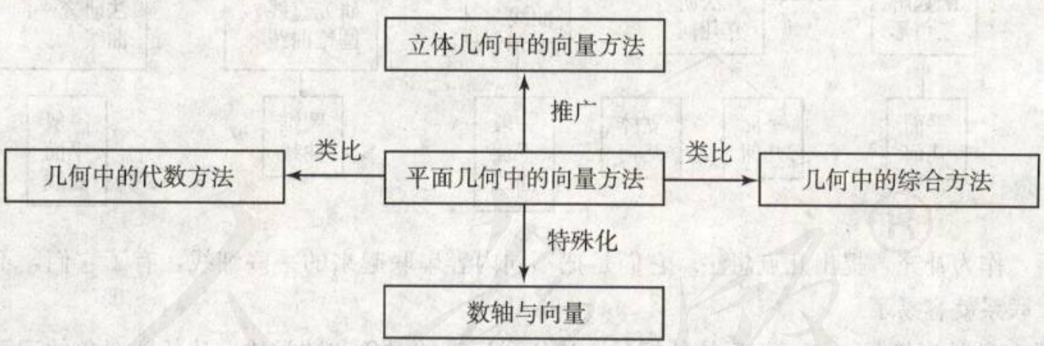
变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：

其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境，使学生感到数学是自然的，水到渠成的，激发学生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方，将作者的感受用“旁批”等方式呈现，与学生交流，增强了教科书的“亲和力”，启发学生更深入的数学思考，不断引发学习激情．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

提问是创新的开始．“看过问题三百个，不会解题也会问”，通过恰时恰点地提出问题，提好问题，给学生示范提问的方法，使他们领悟发现和提出问题的艺术，引导他们更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，逐步培养学生的问题意识，孕育创新精神．

3．“思想性”：螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括．

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”，体现寻求一般性模式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”．

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神.

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd}
 & \text{推广} & \\
\text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\
 & \text{特殊化} &
\end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系.

选修系列4的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想．包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等.

(1) 课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图．主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）．说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容.

(1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

(2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

(3) 重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

(4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是选修系列 4—7《优选法与试验设计初步》的教师教学用书，包含优选法和试验设计初步等两讲内容. 全书共 18 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　优选法	约 10 课时
第二讲　试验设计初步	约 6 课时
学习总结报告	约 2 课时

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

目录

I 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

在生产和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目标，需要对有关因素的最佳组合（简称最佳点）进行选择，关于最佳组合（最佳点）的选择问题，称为优选问题. 在实践中的许多情况下，试验结果与因素的关系，要么很难用数学形式来表达，要么表达式很复杂，优选法与试验设计是解决这类问题的常用数学方法. 20 世纪 60 年代，著名数学家华罗庚亲自组织推广了优选法，并在全国工业部门得到了广泛的应用，取得了可喜的成果.

简单地说，优选法是合理地安排实验以求迅速找到最佳点的数学方法. 试验设计也是一种数学方法，一般说来，它是考虑在多因素情况下安排试验的方法，它可以帮助人们通过较少的试验次数得到较好的因素组合，形成较好的设计方案.

本专题将结合具体实例，初步地介绍单因素、双因素的优选方法和多因素的正交试验设计方法，并对方法给予简单说明，帮助学生理解这些方法的基本思想，并能思考和解决一些简单的实际问题.

2. 学习目标

(1) 通过丰富的生活、生产案例，使学生感受到现实生活中存在着大量的优选问题.

(2) 通过分析和解决具体实际问题，使学生掌握分数法、0.618 法及其适用范围，可以利用计算机（或计算器）安排试验方案，并能思考和尝试运用这些方法解决一些实际问题，体会优选的思想方法.

(3) 了解斐波那契数列 $\{F_n\}$，理解在试验次数确定的情况下分数法最佳性的证明，通过连分数知道$\frac{F_{n-1}}{F_n}$和黄金分割的关系.

(4) 通过一些具体的实例，使学生知道分数法、爬山法、分批试验法，以及目标函数为多峰情况下的相应处理方法.

(5) 通过丰富的实例，了解多因素优选问题，了解处理双因素问题的一些优选方法，进一步体会优选的思想方法.

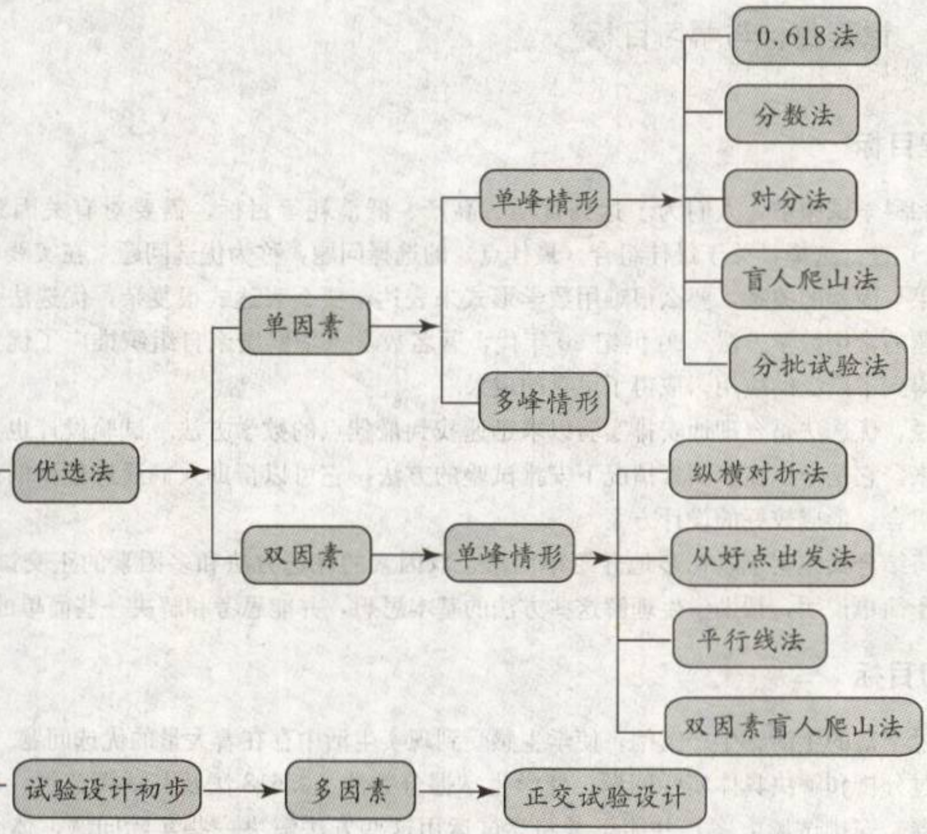
(6) 通过丰富的生活、生产案例，使学生感受到现实生活中存在着大量的试验设计问题.

(7) 通过对具体案例（因素不超过 3，水平不超过 4）的分析，理解运用正交试验设计方法解决简单问题的过程，了解正交试验的思想和方法，并能运用这种方法思考和解决一些简单的实际问题.

(8) 完成一个学习总结报告. 报告应包括三方面的内容：第一，知识的总结. 对本专题的整体结构和内容的理解，对试验设计方法及其意义的认识. 第二，拓展. 通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入讨论. 第三，对本专题的感受、体会、看法.

二、内容安排

1. 本专题知识框图



2. 对知识框图的说明

(1) 本专题主要是介绍如何合理高效地安排试验的数学方法——优选法和试验设计，帮助人们通过较少的试验次数，迅速找到最佳点或较好的因素组合. 优选法主要针对单因素和双因素优选问题，而对多因素优选问题我们介绍运用正交试验设计来安排试验.

(2) 教材分两讲，优选法和试验设计. 优选法的内容的安排根据处理因素由少到多，先处理单因素优选问题，再安排处理双因素优选问题. 介绍完单因素优选方法，双因素优选问题可以通过降维归结到单因素优选问题上来，用单因素的优选方法来解决. 解决单因素优选问题的具体方法有 0.618 法（也叫黄金分割法）、分数法、对分法、盲人爬山法、分批试验法等优选方法，重点在于 0.618 法和分数法，教材花了比较大的篇幅介绍这两种方法；而对双因素优选问题，通过降维，固定一个因素，对另一个问题进行优选，然后固定第二个因素，对第一个因素进行优选，具体的有纵横对折法、从好点出发法、平行线法、双因素盲人爬山法等. 上面提到的这些优选法（包括单因素和双因素）的使用有一个前提，优选问题具有单峰性. 对多峰情形，教材给出了两种处理方法.

(3) 试验设计有很多方法，教材只介绍了正交试验设计来处理多因素问题. 正交方法的介绍也是通过案例来引入，根据因素数和水平数，由少到多安排教材内容.

三、课时安排

本专题教学时间约为 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲　优选法	约 10 课时
一　什么叫优选法	1 课时
二　单峰函数	1 课时
三　黄金分割法——0.618 法	2 课时
四　分数法	2 课时
五　其他几种常用的优选方法	2 课时
六　多因素方法	2 课时
第二讲　试验设计初步	约 6 课时
一　正交试验设计方法	4 课时
二　正交试验的应用	2 课时
学习总结报告	约 2 课时

II　教科书分析

教科书分析

第一讲　优选法

一、本讲知识结构框图

优选法的概念
↓
单峰函数
↓
黄金分割法 —— 0.618 法
↓
分数法
↓
其他几种常用的优选法
↓
多因素方法

二、教学重点与难点

重点：

单因素问题的 0.618 法和分数法.

难点：

1. 认识 0.618 法和分数法的原理；
2. 认识分数法的最优性.

三、编写意图与教学建议

本讲的核心内容为优选法的最基础知识.

本讲内容分为两部分. 第一部分为教科书中的第一至第五个问题，介绍单因素问题的优选法，这也是本讲的重点知识. 第二部分为教科书中的第六个问题，简介多因素问题的优选法，作为对第一部分的简单拓展.

本讲先举例简单说明什么叫优选法，然后结合炮弹飞行问题给出单峰函数等优选法的预备概念，接着通过探究和思考寻找单峰函数的最佳点问题，引出黄金分割常数 $\omega=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0.618$，并结合炼钢中加料的案例较详细地讲解了单因素优选法中的黄金分割法——0.618 法，这是本讲第一次介绍具体的优选法，学生通过认识它可以对优选法有更深入的了解. 本讲介绍的第二个具体的优选法——分数法，是以渐进分数逼近黄金分割常数 ω 的一种优选法. 教科书结合具体案例来介绍它，并简单地讨论了其最优性. 以上两种具体的优选方法是本讲的核心内容. 接下来，本讲又简介了其他几种常用的优选法——对分法、盲人爬山法、分批试验法，并提出多峰情形的基本解决策略——转化为单峰问题以及分区试验，这可以使学生感受优选法的多样性. 本讲最后简单介绍了多因素方法，分别说明纵横对折法和从好点出发法、平行线法、双因素盲人爬山法等的基本做法，并给出了相应案例，由此学生可以认识到：随着问题的复杂化，适用的优选法也相应会更复杂，但是利用相应的简单方法就能够发展得出需要的复杂方法.

教学中应注意抓住 0.618 法和分数法这两个重点，以使学生了解最基本的优选法为基本目标，注意结合案例，引导学生借助具体问题学习各种优选方法.

（一）什么叫优选法

1. 在本讲的引言中提到三个具体问题：商品价格竞猜游戏，蒸馒头放碱，玉米高产的条件. 这些问题为本讲的第一个问题“什么叫优选法”作了铺垫. 在“什么叫优选法”这段内容中，主要有以下几个概念.

（1）**最佳点** 如果影响试验的某个因素（记为 x）处于某种状态（记为 $x=x_0$）时，试验结果最好，那么这种状态（$x=x_0$）就是这个因素（x）的最佳点.

（2）**优选问题** 对试验中相关因素的最佳点的选择问题，称为优选问题.

（3）**优选法** 利用数学原理，合理安排试验，以最少的试验次数迅速找到最佳点，从而解决优选问题的科学试验方法.

这三个概念相互联系，只有了解了前面的概念才能了解后面的概念，教科书正是以这种顺序循序渐进地提出它们的.

安排这段内容的目的，是让学生对优选法先有初步的了解．建议教学中能结合具体例子帮助学生认识这些概念，而不要以记抽象定义的方式学习它们．

2．本讲中多次提到“试验”一词．这里对试验应作广义的理解，即它既可以是物理、化学、生物等实验科学中的实验，也可以是数学试验，还可以是生产、生活中的实践检验．

建议在本讲开始的教学中能多举出一些实际例子，涉及面较为广泛，帮助学生了解优选问题广泛存在，优选法大有用武之地，并形成对试验的广义理解．

3．课文中提到了探求池塘最深点的例子，建议在本讲第六个问题“多因素方法”的学习中回顾这个问题，让学生自己讨论如何解决它．

（二）单峰函数

1．教科书以炮弹飞行问题作为情境引入，炮弹飞行问题属于物理中的斜抛物体运动，即竖直上抛运动与水平匀速直线运动的合成．当初速度 v 确定后，忽略空气阻力，影响炮弹射程的因素就是发射角 θ，即炮弹射程为 $s=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$．$\theta$ 的变化范围是 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时射程最远，因此 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是最佳点．

教科书中图 1-1 是函数 $y=x\tan\theta-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}$ 的图象，由这个函数可以得出炮弹射程为 $s=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ 这一结论．

教科书中图 1-2 是函数 $s=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ 的图象，它是单峰形状．由它可以直观地反映出：$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，s 有最大值；$\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 时，$s=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ 是增函数；$\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$s=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ 是减函数．这是一个单峰函数的具体例子，教科书以它为基础进而给出一般单峰函数的定义，这是一个从具体到抽象，从特殊到一般的安排．

2．具有单峰性的试验是优选法研究的最简单的试验，这样的试验中，试验结果可以表示为试验因素的单峰函数．

单峰函数的定义中有两个要点：

(1) $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上只有唯一的最大（小）值点 C；

(2) $f(x)$ 在 $[a,\ C]$ 上递增（减），在 $[C,\ b]$ 上递减（增）．

教学中可以结合函数图象对上述两点作出直观解释，以帮助学生理解它们．可以用教科书图 1-3 来帮助理解单峰函数的定义，但是不能用图 1-3 来代替单峰函数的定义，这是因为虽然图 1-3 包括了上凸与下凹两种情形，但画出的仅是连续函数的图象，而单峰函数只要满足定义中的两要点即可，并不一定是连续函数．

教学中应注意：在给出单峰函数定义后，要补充说明“我们规定，区间 $[a,\ b]$ 上的单调（递增或递减）函数也是单峰函数”．需要指出：这样的函数的最大（小）值点是区间的端点．

3．单因素问题指只考虑试验过程中的一个因素对试验结果的影响的问题．这样的问题中，试验结果可以表示为一个一元函数 $f(x)$（不一定要写出具体表达式），自变量 x 就是要考虑的影响试验结果的因素，定义域就是试验中因素 x 的变化范围 $[a,\ b]$（或 $(a,\ b)$），这个函数称为目标函数．解决优选问题，就是要寻找 $[a,\ b]$ 上 $f(x)$ 的最大（小）值点．建议教学中能结合例子说明单因素问题、目标函数等概念，使学生能认识它们的意义，理解解决优选问题就是建立实际问题的数学模型（目标函数）并寻找模型的最佳点，从数学角度加深对解决优选问题的认识．

4．“若目标函数为单峰函数，则最佳点与好点必在差点的同侧”，这是缩小试验范围时，保留好点所在部分的重要理论根据．对于这个结论，除可以让学生通过单峰函数图象来认识以外，还可以利用

单峰函数定义，根据函数的单调性加以证明.

下面仅对单峰函数 $f(x)$ 上凸的情形进行证明.

设点 C 为 $[a, b]$ 上的单峰函数 $f(x)$ 的最大值点，$m, n\in[a, b]$ 且 $f(m)>f(n)$.

因为 $f(x)$ 为单峰函数，所以 $f(x)$ 在 $[a, C]$ 递增，在 $[C, b]$ 递减.

(1) 设 $n\in[a, C]$.

因为 $m, n\in[a, b]$ 且 $f(m)>f(n)$，所以 $m\notin[a, n]$，即 $m\in[n, b]$.

因为 $n\in[a, C]$，所以 $C\in[n, b]$.

因此，点 m，C 在点 n 的右侧.

(2) 设 $n\in[C, b]$.

因为 $m, n\in[a, b]$ 且 $f(m)>f(n)$，所以 $m\notin[n, b]$，即 $m\in[a, n]$.

因为 $n\in[C, b]$，所以 $C\in[a, n]$.

因此，点 m，C 在点 n 的左侧.

由 (1) (2) 可知，点 m，C 始终在点 n 的同侧.

(三) 黄金分割法——0.618 法

1. 寻找最佳点，就是把要考虑的因素 x 的取值范围缩小，逐渐逼近最佳点. 为寻找最佳点，根据“若目标函数为单峰函数，则最佳点与好点必在差点的同侧”的结论，可以先找出两点，比较好差，然后保留存优范围（含有好点的区间），继续这样做，就能使 x 的取值范围不断缩小，逐渐逼近最佳点.

建议教学中可以用图示或纸条演示的方式，说明上述寻找最佳点的具体操作过程，使学生理解这样做的道理，体会这样做的步骤，这可以为后面学习具体的优选方法作准备.

2. 教科书在第 6 页安排了举例说明试验效率的问题，并配了图 1-5. 这可以起到承上启下的作用，引出下面的主要内容——黄金分割常数. 通过这个例子可以说明：任意选取试验点，对某些优选问题会使试验效率低，这样就不能用较少次试验找到最佳点. 因此，“为提高试验效率，应如何选取试验点”，这是需要在试验之前考虑的问题. 这样就能自然地转向下面关于如何选取试验点的讨论. 希望教师能体会教材这样安排的用意.

3. 为了合理地选取试验点，需要注意两点：

(1) 每次要进行比较的两个试验点，应关于相应试验区间的中点对称；

(2) 每次舍去的区间长占舍去前的区间长的比例数应相同.

其中第 (1) 点可以使两个试验点的选择比较均衡，第 (2) 点可以使试验过程比较平稳而有规律.

为满足上述两点，可以推导出每次舍去区间后留下的存优区间长占舍去前的区间长的比例数应是方程 $x^2+x-1=0$ 的正根 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618$，它就是单位长线段的中末比分点，也称为黄金分割常数. 教科书较详细地对这一结果进行了推导，教学中应注意结合几何图形说明推导过程. 教学中也可以参考以下做法简化推导过程.

为简单起见，不妨假设试验区间为 $[0, 1]$. 如图 1，设右边的试验点为 x，由对称性知另一个试验点为 $1-x$，不论哪点为好点，舍去的区间长都为 $1-x$，留下的区间长为 x.

不妨设 $1-x$ 为保留下的好点，则第三个试验点 x' 与 $1-x$ 关于留下的区间的中点 $\frac{x}{2}$ 对称，故 $x'=x-(1-x)=2x-1$. 不论 $1-x$ 与 $2x-1$ 哪点为好点，舍去的区间长都为 $2x-1$.

由每次舍去的区间长占舍去前的区间长的比例数应相同，有

$$\frac{1-x}{1}=\frac{2x-1}{x}，即 x^2+x-1=0，$$

所以

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618.$$

因此，每次舍去区间后留下的存优区间长与舍去前的区间长的比值为常数 $\omega=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618$.

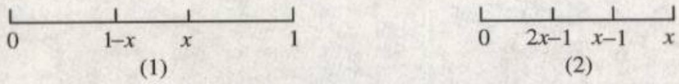


图 1

4. 在前面讨论过黄金分割常数的基础上，教科书通过案例具体说明黄金分割法——0.618 法的操作方法.

用折剪纸条的方法，可以简化计算过程，这样做是使用几何操作方法来保证以下两点：

(1) 每次要进行比较的两个试验点，应关于相应试验区间的中点对称；

(2) 每次舍去的区间长占舍去前的区间长的比例数应相同.

具体操作步骤中“对折”可以保证对称性，第一个试验点选在试验区间的 0.618 处可以保证每次操作对应相同的比例数. 这部分内容的教学除教师讲解和演示外，还应带领学生实际操作，使其在了解做法依据的道理的基础上熟悉操作过程.

5. 教科书中给出了黄金分割法中确定第一个试验点 x_1 的方法 x_1＝小＋0.618×(大－小)，在此基础上，根据对称性即可得出第二个试验点 x_2＝小＋大－x_1，即这可以概括为“加两头，减中间”，教学中应注意使学生理解“加两头，减中间”的确切含义.

在确定第 n 个试验点 x_n 时，如果存优区间内的好点是 x_m，则 x_n＝小＋大－x_m，仍有“加两头，减中间”. 对此结论可以如下推出：如图 2 所示，x_n＝小＋(大－x_m)＝小＋大－x_m 或 x_n＝大－(x_m－小)＝小＋大－x_m，总之都有 x_n＝小＋大－x_m.

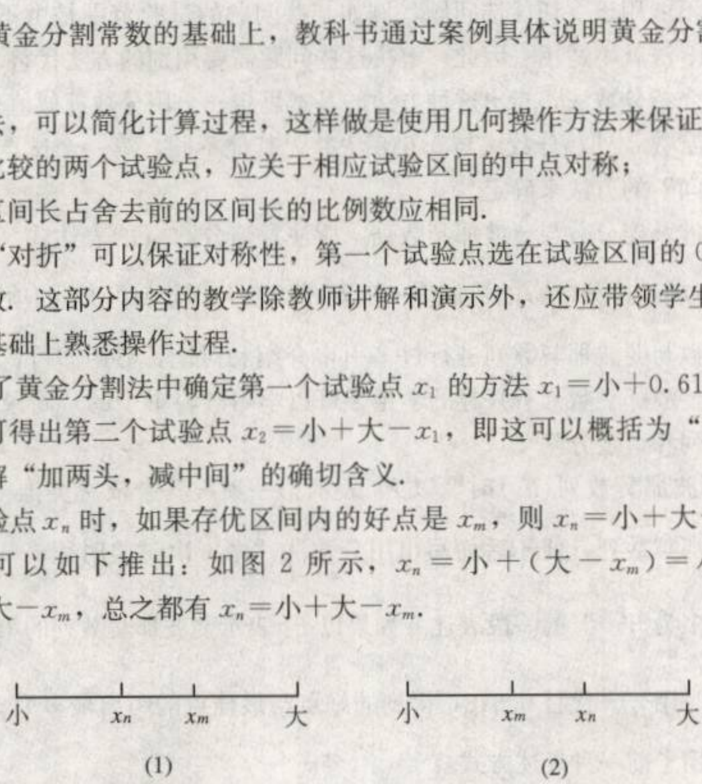


图 2

6. 教科书第 8 页边空提问：如果两次试验结果一样，在一般情况下，仅保留中间范围，会不会划去最佳点呢？答案是：如果目标函数是单峰函数，那么这样做不会划去最佳点. 对这个问题可以引导学生根据单峰函数的定义找出答案，具体推理过程可以参考如下.

若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单峰函数，$x=c$ 是最佳点，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则根据 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上单调，可知 x_1，x_2 不会同在 $[a, c]$ 或 $[c, b]$ 上，因此 x_1，x_2 分别在 c 的两侧，即 c 在保留的中间范围 $[x_1, x_2]$ 上.

7. 精度是反映试验效率的数值，它与试验次数有关. 0.618 法中 n 次试验后的精度 $\delta_n=0.618^{n-1}$，这是由精度定义 $\delta_n=\frac{n\text{次试验后的存优范围}}{\text{原始的因素范围}}$ 推出的. 教科书中安排了按照给出的精度考虑试验次数的探究，并通过解指数不等式得出一般性的计算公式 $n\geqslant\frac{\lg\delta}{\lg 0.618}+1$. 在这个问题的探究中，可以把有关不等式、指数、对数的知识与 0.618 法结合起来. 教学中可以让学生对这个问题进行自主探究.

8. “阅读与思考　**黄金分割研究简史**”这篇短文是拓展性学习的材料，它从历史角度介绍了与黄金分割相关的一些材料，具有一定的数学文化内涵.

短文从公元前 3 世纪古希腊人研究比例说起，由线段的中末比提到黄金分割常数. 然后追述到公

元前 500 多年前的毕达哥拉斯学派，他们研究正五边形时发现了黄金分割作图法，这又是从几何问题出发认识黄金分割．短文还提到了“黄金分割”一词的由来以及关于它在建筑、艺术等方面的传说，最后提到优选法中的 0.618 法是黄金分割常数的重要实际应用．

作为阅读材料，这篇短文本是供学生自学的．教学中也可以将其中一些内容穿插于讲授之中，以丰富教学内容，传播数学文化．

（四）分数法

1．教科书安排案例 1 有两个目的：

（1）说明 0.618 法不能用于一切优选问题，例如某些问题的试验范围是由不连续的点组成，试点只能取特定数，用 0.618 法就不适用．因此，解决这些问题需要用别的方法代替 0.618 法．

（2）结合具体问题介绍分数法，指出这种方法的基本思想——用分数近似值来代替黄金分割常数．除以分数代替黄金分割常数 ω 外，分数法与 0.618 法并无其他不同，第一个试点确定后，后续试点都可以用“加两头，减中间”的方法来确定．

案例 1 的讨论中，涉及连分数与斐波那契数列．应注意连分数 ω 的表达式（2）与数列（3）两者的联系，数列（3）中各项是连分数 ω 的近似值．随着 n 的增大，数列（3）的项$\frac{F_n}{F_{n+1}}$越来越趋近于 ω．建议教学中不要对连分数与斐波那契数列进行过多引申介绍和讨论，够用即可，而要以介绍分数法本身为重点．对连分数与斐波那契数列有兴趣的学生，可以学习教科书中的“附录一　连分数”与“阅读与思考　斐波那契数列和黄金分割”．

2．教科书中表示斐波那契数列 $\{F_n\}$ 时，以 F_0 表示第一项，其余依次类推．为什么这样表示呢？这是因为这样表示斐波那契数列，便于后面写出用分数法“做 k 次试验时用$\frac{F_k}{F_{k+1}}$代替 0.618，得到的好点与最佳点的距离最多为$\frac{1}{F_{k+1}}$”的一段表述．如果以 F_1 表示斐波那契数列的第一项，有关表述就要相应改为“做 k 次试验时用$\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}$代替 0.618，得到的好点与最佳点的距离最多为$\frac{1}{F_{k+2}}$”，但这样表述不如前一种简单，所以采用了前一种表述方式．

3．案例 1 代表了对试验范围的划分恰好与斐波那契数有直接关系的类型，其中把试验范围分为 13 格，即把表示试验范围大小的线段分为 13 段，而 13 恰好为斐波那契数列中的一项 F_6，于是以$\frac{F_5}{F_6}$代替 0.618．案例 2 代表了另一类型，即对试验范围的所分段数不是斐波那契数的类型，通过这个案例说明可以调整试点的个数来选择代替 0.618 的近似分数，这是在案例 1 基础上的拓展．

4．试点总数为 F_n-1 时，使用分数法为什么要“前两个试点放在因素范围的$\frac{F_{n-1}}{F_n}$和$\frac{F_{n-2}}{F_n}$位置上”呢？

(F_n-1) 个试点将试验范围分为 F_n 段，因素范围为 $[0, F_n]$．一方面，从斐波那契数列角度看，$F_{n-2}-0=F_n-F_{n-1}$，即 F_{n-2}，F_{n-1}关于因素范围的中点对称．另一方面，用$\frac{F_{n-1}}{F_n}$可以作为 0.618 的近似值，这时第一个试点应选 $0+\frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot F_n=F_{n-1}$，这点正对应因素范围的$\frac{F_{n-1}}{F_n}$位置；再“加两头，减中间”，即第二个试点选 $0+F_n-F_{n-1}=F_{n-2}$，这点正对应因素范围的$\frac{F_{n-2}}{F_n}$位置．因此，有“前两个试点放在因素范围的$\frac{F_{n-1}}{F_n}$和$\frac{F_{n-2}}{F_n}$位置上”的做法．

5. 为什么“在（F_n-1）个试点中，用分数法最多只需作（$n-1$）次试验就能找到最佳点”呢？

可以结合教科书中图 1-13 考虑，2 次试验后，去掉一个长为 F_n-F_{n-1} 的因素区间，剩下的因素区间长为 F_{n-1}，内有试点（$F_{n-1}-1$）个；3 次试验后，又去掉一个长为 $F_{n-1}-F_{n-2}$ 的因素区间，剩下的因素区间长为 F_{n-2}，内有试点（$F_{n-2}-1$）个；如此继续下去，$(n-2)$次试验后，又去掉一个长为 F_4-F_3 的因素区间，剩下的因素区间长为 F_3，内有试点（F_3-1）$=3-1=2$ 个；$(n-1)$次试验后，又去掉一个长为 F_3-F_2 的因素区间，剩下的因素区间长为 F_2，内有试点（F_2-1）$=2-1=1$ 个，这个试点即最佳点.

6. “阅读与思考　**斐波那契数列和黄金分割**”这篇拓展性学习的材料，从兔子繁殖的问题情境说起，分析其中的数量关系，得出它的数学模型——斐波那契数列，并且由具体到抽象地研究了这个数列中的递推规律，最后提及由这个数列可以产生黄金分割常数 ω 的近似分数列. 通过阅读这篇短文，可以扩大知识面，增加对斐波那契数列的了解.

7. 教科书对单峰函数有两个结论：

(1) 通过 n 次试验，最多能从$(F_{n+1}-1)$个试点中保证找出最佳点；

(2) 只有用分数法才能通过 n 次试验保证从$(F_{n+1}-1)$个试点中找出最佳点.

结论（1）可以用数学归纳法证明，结论（2）可以从试点的选取方式上证明. 教学中要介绍这些结论，提及它们的证明思路，但不需进行具体的证明，详细证明过程可以参阅教科书的附录二.

8. 由上面两个结论可以推出分数法的最优性，即寻找单峰函数的最佳点时，用分数法安排试验最节约试验次数.

以上结论的推导可以分两步完成：

(1) 试点个数 $m=F_{n+1}-1$，用分数法才能通过 n 次试验保证找出最佳点，用其他方法的试验次数都大于 n；

(2) 试点个数 $F_n-1<m<F_{n+1}-1$，无论用什么方法，通过（$n-1$）次试验不能保证找出最佳点，用分数法能通过 n 次试验保证找出最佳点.

教学中应使学生认识到分数法的最优性的含义，并能初步了解它的推导原理.

（五）其他几种常用的优选法

1. 案例 1 以查输电线路故障为问题情境，具体介绍对分法的操作步骤，并分析这种方法的适用问题类型. 教学中应结合具体案例，强调这种方法操作比较简单，选试点的方法是单一的取中点法. 这类试验问题的特点是有已知的试验标准，且能根据一次试验的结果确定下次试验的选择方向.

2. 猜价格问题是引言中提过的例子，安排它作为案例 2，既可以加强对于对分法的介绍，又可以起到前后呼应的作用. 建议教学中先让学生独立地分析此案例，然后再进行讨论交流.

3. 蒸馒头的放碱量问题，用对分法安排试验比用 0.618 法更有效. 这是因为：第一，合适的放碱量事先有明确标准，容易判断放碱量合适与否以及多或少；第二，用 0.618 法需要相对准确的计量，对于这个问题似必要性不大；第三，用对分法可以比用 0.618 法做较少次数的试验就能达到最佳点.

4. 盲人爬山法是一种采用小步调整策略的优选法，其依据的原理就是“单峰函数的最佳点与好点在差点的同侧”. 教学中介绍这种方法时，应注意结合能表示上述原理的单峰函数的图象（教科书图 1-15），借图说话，使学生能直观地感受它的合理性. 虽然教科书中没有安排案例说明这种方法，但是因为它本身比较简单，所以不难认识它.

5. 分批试验法是为加快试验进度而采用的方法，教学中应强调其特点是分批进行试验，每批同时做几个试验. 教科书中由易到难地介绍了两种分批试验法，即均分分批试验法和比例分割分批试验法. 两者的区别在于第一批试验时选点的方式不同，前者均匀划分试验因素的取值范围，在分点上进行试

验；后者按一定比例划分试验因素的取值范围，在分点上进行试验. 从第二批试验起，两者的操作方法相同.

6. 用均分分批试验法安排案例 3 的试验中，教科书对于第二批试验的安排介绍得较简单，详细说应包括三种情况（图 3）：

(1) 在 0.25，0.30，0.35 中，0.35 是好点，则存优范围是 (0.30，0.40)；

(2) 在 0.25，0.30，0.35 中，0.30 是好点，则存优范围是 (0.25，0.35)；

(3) 在 0.25，0.30，0.35 中，0.25 是好点，则存优范围是 (0.20，0.30).

教学中应提醒学生全面考虑问题，不能以偏概全.

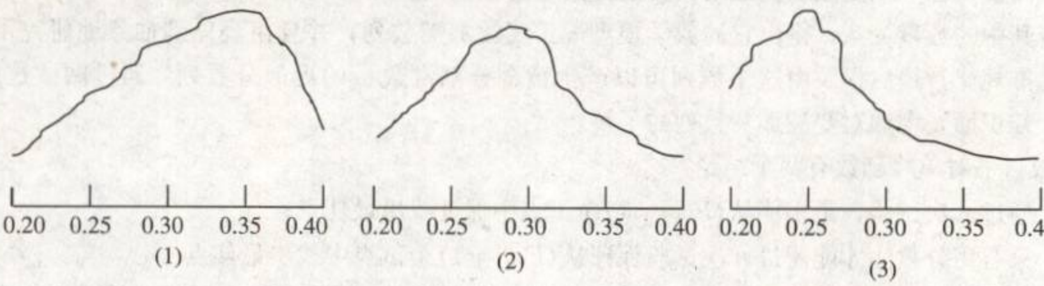


图 3

7. 教科书以 $\frac{4}{7}$ 为例说明比例分割分批试验法，实际上比例数并不是必须取某个固定的数值，而要根据具体问题来选定. 教科书中说“从效果上看，比例分割法比均分法好”，对此可以结合具体数值来理解，案例 3 中第一批试验后，均分法的存优范围为原范围的 $\frac{2}{3}$，比例法的存优范围为原范围的 $\frac{4}{7}$，$\frac{2}{3}>\frac{4}{7}$，而存优范围越小效率越高，所以比例法比均分法效果好.

8. 多峰情形不是教学的重点，而是对单峰情形的进一步拓展. 教学中应重在使学生认识到化多峰为单峰是解决多峰问题的基本思路.

（六）多因素方法

1. 对于多因素问题，采取抓住主要因素，略去次要因素. 每减少一个因素可以很大程度上减低处理问题的难度. 当剩下的因素不能再略去时，就只能用多因素方法了. 教材中提到的优选法有纵横对折法、从好点出发法、平行线法、平行线加速法、双因素盲人爬山法，都是处理双因素问题的方法. 主要让学生体会一下双因素问题的一些优选法，进一步体会优选的思想方法.

2. 教科书对双因素的单峰性只是通过形象的说法给予介绍，没有给出严格的数学定义. 后面介绍的双因素优选法是在单峰性这个假设下来做. 纵横对折法是先固定一个因素，对另一个因素进行优选，对单个因素的优选可以选用前面学过的优选法.

3. 教科书没有讨论再舍弃区间时不会把最佳点所在区域舍弃. 老师可以补充向学生解释，如在教科书图 1-25 中，B_1 比 A_1 好，舍弃左边的区域. 假如最佳点在被舍弃的区域，那么经过 B_1 的这条等高线，必然要穿越 A_1 所在的这条纵线（图 1-25)，这样的结果就是等高线和纵线相交，交点如果为 C_1，那么 C_1 和 B_1 等值，好于 A_1，这就和 A_1 是所在直线上的最佳点矛盾了. 从好点出发法可以看成是纵横对折法的改良. 平行线法比较适用于有一个因素不容易调整的情况. 双因素盲人爬山法适用于某些因素不允许大幅度调整的场合. 学生需要掌握各种优选法的适用范围.

四、教学情景设计

黄金分割法—— 0.618法

1. 教学任务分析

黄金分割法——0.618 法是非常著名的优选法，在生产实践中有广泛应用．通过学习这一内容，不仅可以使学生学会一种用数学知识解决实际问题的方法（数学建模），而且还可以使学生感受数学在解决实际问题中的作用．本节课要通过分析和解决具体实际问题，使学生掌握 0.618 法，体会优选的思想．

2. 教学重点与难点

重点：通过实例概括出 0.618 法的基本思想和步骤，能用 0.618 法解决一些实际问题，体会优选思想．

难点：概括出 x_n＝小＋大－x_m，即“加两头，减中间”公式．

3. 教学基本流程

给出案例，创设问题情境

↓

介绍0.618法的基本思想

↓

总结公式 x_n=小＋大－x_m

↓

概括0.618法的基本思想，给出精度的概念

↓

小结

4. 教学情景设计

问　题	设 计 意 图	师 生 活 动
（1）在某化学反应中，催化剂 A 的多少会影响化合物 B 的产量．现在反应物质量一定，要通过试验方法来寻找放合适的催化剂 A 的量，使 B 产量最高．如果已知催化剂 A 的用量范围为［0，1］，你会如何安排试验？	创设问题情景，对一般性的试验问题进行讨论，为以后的优选法要有单峰性的前提铺垫．	教师组织学生进行讨论，然后学生回答．教师对学生的各种方法给予评价．引导学生认识，因为对 A 是如何影响 B 知之甚少，所以只能把［0，1］分为很多段，将各分点的值作为 A 的用量，做多次试验去寻找最优点．如果分得很细，也就是每个步长很小，那么试验次数就会很多，代价会比较大．

续表

<table>
<tr><th>问　　题</th><th>设 计 意 图</th><th>师 生 活 动</th></tr>
<tr><td>(2) 如果我们给上面这个试验加上具有单峰性这个条件，同学们想想，能找出少做试验又能快速找到最佳点的方法吗?</td><td>让学生自己尝试解决问题，体会单峰性的假设对下面分析寻找最佳点的重要性.</td><td>学生讨论后回答. 教师点评学生的方法，指出合理和不合理的地方. 教师可以适当引导学生认识要充分利用单峰性这个条件，注意最佳点和好点必在差点的同侧.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(3) 将上面的问题一般化，就是教材中提到的探究，找单峰函数的最佳点. 教师分析对于单峰函数可以先作两点试验再进行比较，通过舍弃区间的方法，使存优范围逐步缩小.</td></tr>
<tr><td>(4) 这种试点的任意选取是否会影响寻找最佳点的效率?</td><td>试验点的选取是安排试验的关键，这里的效率是对这一类函数说，而不是对某个特定的函数.</td><td>教师可以通过教科书第 6 页中的例子进行说明.</td></tr>
<tr><td>(5) 应该如何来选取前两个试验点?</td><td>让学生思考对点的选择必须按照什么原则去找.</td><td>学生回答，教师评价.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(6) 教师归纳出：第一，每次要进行比较的两个试验点，应关于相应试验区间的中点对称；第二，每次舍去的区间长占舍去前的区间长的比例数应相同. 最后导出黄金分割常数（为了简单起见，推导时可以设最初的区间为 $[0, 1]$）.</td></tr>
<tr><td>(7) 如果两次试验结果一样，在一般情况下，仅保留中间范围，会不会划去最佳点呢?</td><td>要对方法的合理性进行考证.</td><td>引导学生由单峰性的定义得出答案.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(8) 教师可以讲述对黄金分割的研究史，或让学生自己阅读《黄金分割研究简史》，增加他们的数学文化内涵.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(9) 对教科书中的案例除教师讲解和演示外，还应带领学生实际操作，使其在了解做法依据的道理的基础上熟悉操作过程. 第一个试点选取后，后续可以按照“加两头，减中间”的方法来确定.</td></tr>
<tr><td>(10) 对一般的因素范围 $[a, b]$，用 0.618 法要多少次才能找到最佳点?</td><td>引出精度的定义，也就给出了方法的有效性标准.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">(11) 和学生一起总结 0.618 法.</td></tr>
</table>

五、习题答案

习题 1.1（第 3 页）

1. 利用数学原理，合理安排试验，以最少的试验次数迅速找到最佳点，从而解决优选问题的科学试验方法. 简单说，优选法就是科学合理地选择最佳点的方法.
2. 略.

习题 1.2（第 5 页）

1. 在区间 $[-1, 5]$ 上，下列函数是单峰函数

$$y=3x^2-5x+2,\ y=-x^2-3x+1,\ y=e^x,\ y=x^3.$$

2. 略.

习题 1.3（第 10 页）

1. 原始试验区间取为[1，10]，用 0.618 法进行优选，第一个试验点选在 $1+0.618\times9=6.562$ 处，第二个试验点选在 $9+1-6.562=3.438$ 处.
2. 先根据经验设定原始试验区间[a，b]，其中 a，b 为预定的比例数，再用 0.618 法进行优选，第一个试验点选在 $a+0.618\ (b-a)\ =0.382a+0.618b$ 处，第二个试验点选在 $0.618a+0.382b$ 处.
3. 略.

习题 1.4（第 17 页）

1. 目标函数为单峰函数，可以应用于试点只能取整数或某些特定数的情形，以及限定次数或给定精确度的问题，因为和 0.618 一样，这些分数都是黄金分割常数的近似值，所以对试验范围为连续的情形也可以用.
2. 用分数法进行优选，试验区间为[29，50]，等分为 21 段，分点为 30，31，…，48，49，第一试点选在 $29+\frac{13}{21}\times(50-29)=42$ ℃，第二试点选在 $29+\frac{8}{21}\times(50-29)=37$ ℃.
3. 至少有一台水泵安排在第 10 层，考虑另一台水泵的位置，用分数法进行优选，现有 10 个试点（第 1，2，…，10 层），再虚设 2 个试点，共 $12=F_6-1$ 个试点，将范围分为 13 段. 第一试点选在对应 $\frac{8}{13}$ 的第 8 层，第二试点选在对应 $\frac{5}{13}$ 的第 5 层.
4. 略.

习题 1.5（第 23 页）

1. 使用对分法的条件：目标函数为单峰函数，事先有确定的标准，由每次试验可以确定下次试点的选择方向. 对分法用一个试点的结果与事先的标准进行比较，分数法、0.618 法是用两个试点的结果进行比较.
2. 设 $f(x)=x^2+x-1$，则 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$. 以[0，1]为考察范围，用对分法，因 $f(0.5)=-0.25<0$，考虑[0.5，1]；因 $f(0.75)>0$，考虑[0.5，0.75]；因 $f(0.63)<0$，考虑[0.63，0.75]……继续下去，求出方程 $x^2+x-1=0$ 的正根.
3. 用对分法考虑，先查上半月的账，如上半月收支平衡，则再查前 $\frac{3}{4}$ 个月的账；如上半月收支不平衡，则再查前 $\frac{1}{4}$ 个月的账……继续下去，查出账中问题.
4. 以 16% 为起点，先以 1% 为步长，用盲人爬山法试验.
5. 起点和步长.
6. 各种方法的适用范围和优缺点略（可参阅教科书）.

   选取适当比例，能使比例分割法的存优范围比均分法的存优范围小，故效率高，效果好.

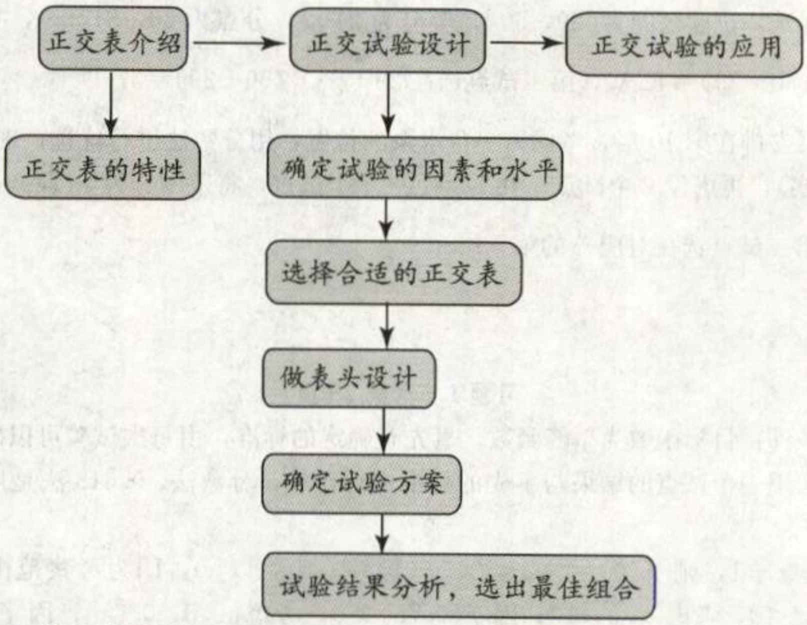
   可以通过选择合适的比例数，提高比例分割法的效率. 例如，选择 $\frac{5}{9}$ 比选择 $\frac{4}{7}$ 效率更高，做过第一批试验后，前者的存优范围为整个范围的 $\frac{5}{9}$，后者的存优范围为整个范围的 $\frac{4}{7}$，$\frac{5}{9}<\frac{4}{7}$.
7. 略.
8. 如果没有峰，则说明考察的因素对试验效果没有什么影响，故不必再考察它.

习题 1.6（第 28 页）

1. 如果在生产中进行调整试验，我们选用爬山法比较合适，因为这时因素不允许大幅度的调整．如果不是在生产中，我们可以选用从好点出发法也可以．
2. 略．

第二讲 试验设计初步

一、本讲知识结构图



二、教学重点与难点

重点：了解用正交试验设计方法解决简单问题的过程，会合理地选择正交表，正确安排试验并对试验结果作出正确分析．

难点：了解正交试验的思想和方法，正确应用正交法．

三、编写意图与教学建议

本讲一开始交待引入试验设计的必要性．第一讲介绍的优选法，对于单因素优选问题能够很好的安排试验，迅速找出最佳点；对双因素优选问题的解决基本是通过降维法，转化为单因素的优选问题再解决．多因素问题当然也可以通过降维的方法进行处理．但如果因素个数较多，降维法可以想象会比较麻烦，而且优选法要有单峰性的假设，所以操作性将越来越差．

我们通过案例来进行阐述试验设计的必要性，案例 1 有 3 个因素，每个因素各有 2 个水平，案例的选取在不失代表性的前提下，尽量简单．

通过案例 1，可以发现现实中碰到的问题，往往具有多个因素影响结果，而且这些因素对结果影

响的大小、主次也不一定了解．教材尝试用类似优选法降维的思想找出三因素在规定水平上的最佳组合，以与第一讲中学习的优选法思想相呼应．但是通过教科书的分析，要告诉学生所找出的结果未必是最好的，因此通过部分试验找出规定因素水平下的最佳组合，必须在方法上寻求突破．

（一）正交试验设计法

1．正交表

为了承接前面提到的案例 1，教材直接给出适用案例 1 的正交表 $L_4(2^3)$．教科书介绍了正交表符号 $L_4(2^3)$各个数字代表的意义，但没有给出正交表的特征性质．这么处理主要是为了保持解决问题的连续性，突出用正交表解决简单问题的过程．案例处理完之后，再回过头来讨论正交表的特征性质．有了解决案例的经历，学生就能够对正交表的特性有比较感性的认识，反过来对用正交表解决问题的过程也会有进一步理解．

2．正交试验设计

这一部分讨论如何利用正交表来做正交试验设计．主要有以下几个步骤：

（1）确定试验的因素和水平，就是试验中涉及多少个因素，各有多少个水平．

（2）选择一张合适的正交表．这里的合适是指找出的正交表的水平数和试验的水平数一致，正交表的列数不少于试验确定的因素数，且在所有满足前两条件的正交表中是最小的（当然也可以不找最小的，而是根据打算做试验的次数来找，比如打算做 8 次，在满足水平和因素的所有表中选行数为 8 的正交表）．让学生明确选择最小的正交表的好处，就是可以做最少次数的试验．

（3）根据选定的正交表做表头设计（教科书没有强调表头设计这一说法）．就是把 3 个因素 A，B，C 分别安置在表的 3 个列的头上．教科书中提到哪一因素安排在哪一列，一般来说是任意的，这里我们附加了一个没有言明的条件，即不涉及交互作用的问题．如果涉及特定的交互作用，则在做表头设计时需要小心，这里我们不展开叙述．

（4）从表头设计确定要拿哪些因素水平做试验，这就是所确定的试验方案．

要让学生明白一个正交表最多可以安排几个因素的意义．例如正交表 $L_8(2^7)$ 最多可以安排 7 个因素的试验，但也可以用来安排少于 7 个因素的试验，如案例 1 的试验．只是试验次数多了，正交表越大，做的试验次数也要增加．这也就是为什么我们要选最小正交表的原因．

3．试验结果的分析

（1）对试验结果的分析，教科书提到两种方法，即直接对比法和直观分析法．直接对比法学生最容易想到，也最简单，教师可以从这里切入，引导学生尝试分析试验结果，然后对学生提到的方法进行评价，指出优缺点．直接对比法很重要，但要让学生明白，分析结果时，这种方法有很大的不足，其中之一就是不能判断未做试验的组合的优劣．

（2）直观分析法，通过对特定列中特定水平的试验结果求平均值，刚好抵消了其他因素的影响，而只显示出特定列对应因素在特定水平下对试验结果的影响（学生可以从这里体会到正交表的巧妙和威力，当然不要求学生明白正交表的构造），通过几个水平的比较，就能找出某因素哪个水平比较理想，这就为它弥补了直接对比法的缺陷，而且由于求和平均，减弱了随机误差对分析试验结果的影响．通过求均值来消除一部分的随机误差，是一种常用的方法．在概率中，用样本的平均值去估计总体的均值，比单个样本估计好的原因也在于求均值的过程中，抵消了一部分的随机误差．

（3）在比较影响结果的因素的主次时，教科书定义了

$$R_q=\max\{k_{1q},\ k_{2q}\}-\min\{k_{1q},\ k_{2q}\},$$

通过 R_q 来给因素主次排序，很直观地，R_q 越大反映因素越影响约显著，相反，R_q 越小影响越弱．为了直观地表现这种主次，可以通过类似于教科书中的产量和因果图来表示．

(4) 最后要对整个正交试验过程作一个总结.

4. 正交表的特性

这一部分内容介绍正交表的特性，教科书以案例中提到的试验安排为例进行说明，然后得出一般正交表具有的特性.

通过对案例的试点进行分析，可以发现试点的分布很均匀，选出的试点具有很强的代表性，各种因素和水平都有相碰且仅有一次，搭配很均匀. 这就保证了按照正交表安排试验，只做一部分就能够选出好点. 这也是按照正交表安排试验的好处.

这里需要指出：

(1) 并非在任何情况下都可以做这样的部分实施.

(2) 做部分实施，试验次数是减少了，但并不是没有代价. 代价之一是因为数据少而导致估计精度的下降. 在试验精度很高时这一点问题不大. 如果试验精度不高（受随机误差影响较大）、试验的费用不太昂贵且总的试验次数不太大时，就不必使用部分实施. 代价之二是，如果参与试验的各因素之间存在交互效应，则在做部分实施时，有些（不一定是全部）交互效应将无法估计. 哪些能估计，哪些不能估计，与所选择的具体的部分实施有关. 因此，如果探讨交互效应是试验的主要目的，则部分实施或不可行，或者其实施效率不能太低.

(二) 正交试验的应用

这一小节安排了几个用正交试验的实际应用案例，分别来自农业和工业，让学生体会到正交试验的实际应用背景，学的是有用的数学.

案例的安排由 2 个水平到 4 个水平，先易后难. 但所用的方法都是上一节介绍的. 只要理解和掌握了上一节的内容，学生就能很好的处理这一节的内容.

四、教学情景设计

正交表的特性

1. 教学任务分析

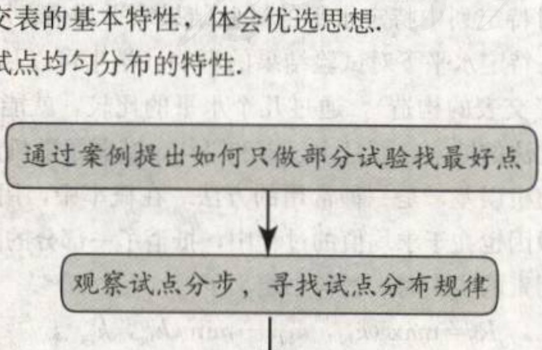
正交表在实验设计中具有重要的作用. 本节课要通过具体实例，引导学生熟悉正交表的结构特点，学习用正交表设计试验的基本过程，体会优选的思想.

2. 教学重点与难点

重点：通过实例概括正交表的基本特性，体会优选思想.

难点：概括出正交表中试点均匀分布的特性.

3. 教学基本流程



4. 教学情景设计

问　　题	设 计 意 图	师 生 活 动
(1) 从教材中的案例 1 可以发现，用正交表安排试验只做了因素和水平所有组合中的一部分，那么只做部分试验能找出所有可能组合中的最好点吗？	引起学生对正交试验点选取特点的思考，也就是正交表的特性的思考.	教师提醒学生观察案例 1 用的正交表 $L_4(2^3)$ 的特点.
(2) 我们可以通过图 2-2 观察一下试点的分布，能看出有什么特点吗？	学生能从图中看出试点分布的规律，比较均匀，包括面上和棱上两个方面.	教师可以在黑板上画图 2-2. 学生回答，教师点评.
(3) 教师总结试点分布的规律，选出的试点具有很强的代表性，各种因素和水平都有相碰且仅有一次. 可以归结出正交表的两条特性.		
(4) 现在我们再来观察一下图 2-2 (即图 2-4)，如果我们对图上的一个试点和一个非试点作交换，还能不能保持我们上面提到的这种均匀性？	让学生明白正交表的设计是有规律的，且非常巧妙.	教师向学生交待：很多正交表已经由数学家替我们做好了，我们只要会选择合适的正交表就可以了.
(5) 我们可以回过头去观察一下案例 1 是如何安排试验的，强调正因为正交表的这种特性保证了我们能够对各个因素水平进行比较，选出比较好的组合.		
(6) 补充指出不是在任何情况下都可以做部分实施的试验，而且虽然我们减少了试验次数，但也是有代价的.		

五、习题答案

习题 2.1 (第 35 页)

1. 这个是由正交表的特性来保证，按正交表安排的试点的分布很均匀，选出的试点具有很强的代表性，各种因素和水平都有相碰且仅有一次. 这个就保证了按照正交表来安排试验只做一部分就能够选出好点.
2. 不一定. 因为试验部分实施代替全面试验，由于试验次数减少导致精度降低，受随机的影响比较大，可能会影响结果的判断. 还有就是做试验的各因素之间可能存在交互作用. 用我们介绍的部分实施正交法，有可能不是最好点. 所以我们在用正交方法的时候，要考虑到上面的两条.

习题 2.2 (第 41 页)

1. 由于水平数为 2，所以在二水平的表里找，又考虑到因素为 4，所以按照找最小表的原则，选择表 $L_8(2^7)$ 安排试验. 试验安排如下：

试验号 \ 列号	A 催化剂种类	B 催化剂量（g）	C 溶剂用量（mL）	D 反应时间（h）	5	6	7
1	A_1（甲）	B_1（0.9）	C_1（10）	D_1（3.5）	1	1	1
2	A_1（甲）	B_1（0.9）	C_1（10）	D_2（2.5）	2	2	2
3	A_1（甲）	B_2（1.2）	C_2（20）	D_1（3.5）	1	2	2
4	A_1（甲）	B_2（1.2）	C_2（20）	D_2（2.5）	2	1	1
5	A_2（乙）	B_1（0.9）	C_2（20）	D_1（3.5）	2	1	2
6	A_2（乙）	B_1（0.9）	C_2（20）	D_2（2.5）	1	2	1
7	A_2（乙）	B_2（1.2）	C_1（10）	D_1（3.5）	2	2	1
8	A_2（乙）	B_2（1.2）	C_1（10）	D_2（2.5）	1	1	2

2.

试验号 \ 列号	A	B	C	试验结果
1	A_1	B_1	C_1	79
2	A_1	B_2	C_2	65
3	A_2	B_1	C_2	88
4	A_2	B_2	C_1	81
$k_{1q}=\frac{1}{2}K_{1q}$	72	83.5	80	
$k_{2q}=\frac{1}{2}K_{2q}$	84.5	73	76.5	
R_q	8.5	10.5	3.5	

从 k 值可以看出，最佳因素组合为（A_2，B_1，C_1）；从 R 值可知，影响试验结果的最主要因素是 B.

III 自我检测题

1. 判断下列哪些函数在区间［1，5］上是单峰函数，并说明理由.

（1）$y=\sin x$；

（2）$y=x$；

（3）$y=\ln x$；

（4）$y=x^3-12x$.

2. 从存优范围内选两个试点进行比较时，一般需要遵循哪些原则？

3. 请你简述 0.618 法的选取试点过程. 如果试验区间为［2，4］，第一试点 x_1 应选在何处？如果 x_1 处的结果比 x_2 处好，那第三个试点应取在何处？

4. 现在有电阻若干，阻值分别为 0.5 kΩ，1 kΩ，1.5 kΩ，2 kΩ，2.5 kΩ，3 kΩ，3.5 kΩ，4 kΩ，

4.5 kΩ，5 kΩ，5.5 kΩ，6 kΩ，调试某设备线路需要选用一个电阻，为了能够快速找到合适的电阻，应当如何选取？

5. 试比较 0.618 法、分数法、对分法和爬山法应用范围的异同？

6. 对多峰情形一般的处理方法是什么？

7. 某化学反应，温度和反应时间会影响最终化合物的生成量，根据以往经验，定出其试验范围为

温度：20 ℃～40 ℃；

时间：20 min～100 min；

请说明如何用纵横对折法安排试验.

8. 请叙述正交表的特性.

9. 已知某化学反应中较重要的因素有 A——催化剂的量；因素 B——溶剂的用量；因素 C——反应时间. 各因素的取值如下表：

因素 / 水平	A——催化剂的量（g）	B——溶剂的用量（mL）	C——反应时间（min）
1	0.9	10	20
2	1.2	15	30
3	1.5	20	35

请选择合适的正交表，并做表头设计，安排试验.

10. 一个 3 因素 3 水平的正交试验结果如下表：

列号 / 试验号	A	B	C	4	试验结果
1	A_1	B_1	C_1	1	45
2	A_1	B_2	C_2	2	53
3	A_1	B_3	C_3	3	61
4	A_2	B_1	C_2	3	55
5	A_2	B_2	C_3	1	57
6	A_2	B_3	C_1	2	48
7	A_3	B_1	C_3	2	64
8	A_3	B_2	C_1	3	52
9	A_3	B_3	C_2	1	58
$k_{1q}=\frac{1}{3}K_{1q}$					
$k_{2q}=\frac{1}{3}K_{2q}$					
$k_{3q}=\frac{1}{3}K_{3q}$					
R_q					

完成上表，求使得试验结果最优（数值最大）的因素组合，并找出影响试验结果的最主要因素.

参考答案

1. (1) 不是，以$\frac{\pi}{2}$处为峰，$[1, \frac{\pi}{2}]$单调增加，但在$[\frac{\pi}{2}, 5]$不是单调减少；以$\frac{3\pi}{2}$为峰（最小值），同样也不满足单峰函数条件.

   (2) 是，因为我们定义在区间上的单调函数也是单峰函数.

   (3) 是，在区间上单调.

   (4) 是，因为$y'=3x^2-12=3(x^2-4)$，当$x\in[1, 2)$，$y'<0$，说明函数单调减少；当$x\in(2, 5]$，$y'>0$，说明函数单调增加. 说明函数在$x=2$时取到峰值（最小值）.

2. (1) 每次要进行比较的两个试点，应关于相应试验区间的中点对称；

   (2) 每次舍去的区间占舍去前的区间的比例数应相同.

3. 第一个试点选在试验区间长度的0.618处，以后的试验点可以根据“加两头，减中间”的方法进行选取. 这里第一个试验点x_1应选在3.236，第三点应选在3.528.

4. 因为所有的阻值是不连续的，所以可以用分数法安排试验. 把阻值从小到大排列，就把阻值优选变为排列序号的优选.

阻值（kΩ）	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
排列	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)

   为了便于用分数法，可在两端增加（0），（13）. 这样第一个试点取（8），即4 kΩ，以后就按照“加两头，减中间”的方法. 例如第二个试点为$(0)+(13)-8=5$，即2.5 kΩ.

5. 就应用范围而言，以分数法最广，因为它还可以应用于试点只能取整数或某些特定数的情形，以及限定次数或给定精确度的问题. 0.618法和分数法的基础都是黄金分割法. 这两种方法中比较对象是两个试点上的试验结果；对分法的比较对象是试点上的试验结果和已知标准（或要求）. 而爬山法比较适用优选对象不宜调整或不易大幅度调整的问题. 它比较的对象是前后两个试点上的试验结果.

6. (1) 先不管它是单峰还是多峰，用处理单峰的方法去做，找到一个峰后，如果达到预先要求，就先用于生产，以后再找其他更高的峰.

   (2) 先做一批分布得比较均匀的试验，看它是否有多峰现象. 如果有，则分区寻找，在每个可能出现“高峰”的范围内做试验，把这些峰找出来.

7. 先把温度固定在试验区间中点30 ℃，对时间进行优选（优选方法可以是0.618法），例如找到点为A_1；然后把时间固定在试验区间中点60 min，对温度进行优选（优选方法可以是0.618法），例如找到点为B_1；比较A_1和B_1，如果好点为B_1，丢弃不包括好点B_1的平面区域. 然后在新范围的温度的中点，对因素时间进行重新优选. 类似这样做下去，直到找出满意的点.

8. 正交表的特性有：

   (1) 每一列中，不同的数字出现的次数相等，即同一因素的任一水平在试验中出现的机会相等.

   (2) 任意两列，将同一行的两个数字看成有序数对时，每种数对出现的次数相等，即任何两因素的各种水平搭配，在试验中出现的机会也相等.

9. 因为有三个水平，所以在三水平正交表里选，选择正交表$L_9(3^4)$. 进行如下的表头设计和试验安排：

列号 试验号	A——催化剂的量（g）	B——溶剂的用量（mL）	C——反应时间（min）	4	试验结果
1	A_1（0.9）	B_1（10）	C_1（20）	1	
2	A_1（0.9）	B_2（15）	C_2（30）	2	

续表

列号 / 试验号	A——催化剂的量（g）	B——溶剂的用量（mL）	C——反应时间（min）	4	试验结果
3	A_1（0.9）	B_3（20）	C_3（35）	3	
4	A_2（1.2）	B_1（10）	C_2（30）	3	
5	A_2（1.2）	B_2（15）	C_3（35）	1	
6	A_2（1.2）	B_3（20）	C_1（20）	2	
7	A_3（1.5）	B_1（10）	C_3（35）	2	
8	A_3（1.5）	B_2（15）	C_1（20）	3	
9	A_3（1.5）	B_3（20）	C_2（30）	1	
$k_{1q}=\frac{1}{3}K_{1q}$					
$k_{2q}=\frac{1}{3}K_{2q}$					
$k_{3q}=\frac{1}{3}K_{3q}$					
R_q					

10.

列号 / 试验号	A	B	C	4	试验结果
1	A_1	B_1	C_1	1	58
2	A_1	B_2	C_2	2	61
3	A_1	B_3	C_3	3	64
4	A_2	B_1	C_2	3	55
5	A_2	B_2	C_3	1	57
6	A_2	B_3	C_1	2	48
7	A_3	B_1	C_3	2	61
8	A_3	B_2	C_1	3	52
9	A_3	B_3	C_2	1	58
$k_{1q}=\frac{1}{3}K_{1q}$	61	58	53		
$k_{2q}=\frac{1}{3}K_{2q}$	53	57	58		
$k_{3q}=\frac{1}{3}K_{3q}$	54	57	60		
R_q	8	1	7		

从上表可以看出，影响结果最显著的是因素 A，其次是因素 C，因素 B 的影响最小．最优组合为（A_1，B_1，C_3）．