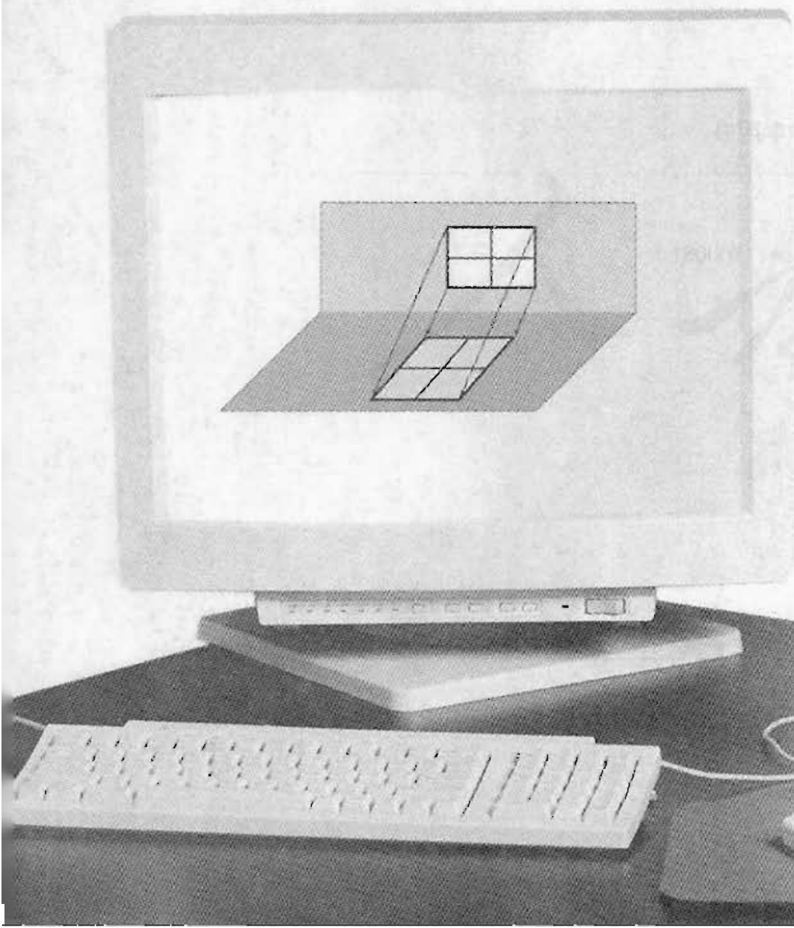
普通高中课程标准实验教科书

数学②

必修

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编：高存明　韩际清
本册主编：范登晨　田明泉
审　　定：段发善
编　　者：田明泉　秦　岩　臧　浩　袁　竞　李知屹
　　　　　刘　莉　邵丽云　王　虎　韩际清
责任编辑：龙正武

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学 2 必修（B版）教师教学用书／人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著．—3 版．—北京：人民教育出版社，2007.5（2018.7重印）

ISBN 978-7-107-17922-8

Ⅰ．①普…　Ⅱ．①人…　②课…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 031306号

普通高中课程标准实验教科书　数学2　必修　B版　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
　　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　北京新华印刷有限公司
版　　次　2007年 5 月第 3 版
印　　次　2018年 7 月第 18 次印刷
开　　本　890毫米 ×1 240毫米　1/16
印　　张　6.75
字　　数　170 千字
定　　价　24.80 元

说　明

本套教师教学用书是依据《普通高中数学课程标准（实验）》和《普通高中课程标准实验教科书 数学（B版）》，由中学数学教材实验研究组组织编写的.

编写的原则是：

1. 努力体现B版教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这套教师教学用书的每章包括六部分：一、课程目标，二、教材分析，三、拓展资源，四、教学案例，五、习题参考答案与提示，六、反馈与评价.

本书课程目标确定的主要依据是，《普通高中数学课程标准（实验）》相关内容的教学要求. 考虑到教学的实际需要，对相关内容的教学要求作了一些调整. 教科书中，通过增加选修内容，增设“思考与讨论”和“探索与研究”等栏目，同时将练习和习题分成A、B两组，以达到不同的教学要求. 教师可根据实际情况，确定相应的教学要求.

在教材分析中，首先指出教材的编写特色，然后分析内容结构，给出课时分配建议，接着分小节给出教学建议.

为了帮助教师教学，我们提供了一些教学资源供教师选用. 另外，还设计了一些教学案例供教师参考.

每章除了给出练习与习题的参考答案与提示外，还给出一份知识与方法测试题，用作课堂测试，检查学生学习本章内容的效果.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述. 希望教师在教学时努力贯彻这套教材的指导思想，体现各章编写的特色.

在教学中一定要贯彻“温故而知新”的原则. 数学知识的连贯性是十分强的，学生如果基础不好，继续学习就会有一些困难，也会因此丧失学好数学的信心. 所以在教材编写时，我们尽量降低了知识的起点，采取循序渐进的方式编排主要知识点，以此来帮助学生克服数学学习中的障碍，提高学生学习数学的兴趣.

B版教材把学习数学的思想方法放到首位. 教材中涉及到的数学方法有：（一）代数基本方法和技能（例如，设未知数列方程和解方程、待定系数法、配方法），（二）坐标法，（三）微分法等. 这些方法在教材中都得到了加强. 教师要重视这些基本数学思想方法的教学.

强调数形结合是本套教材的重要特色. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了如下的阐述：

数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直观，形少数时难入微. 数形结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系、切莫分离！

这段话精辟地阐述了数与形之间的密切关系和相互作用. 教师在教学时一定要努力贯彻这一思想.

另外，B版教材还特别重视算法思想的渗透，培养学生用“通性、通法”思考问题的习惯．为此，我们选用了科学计算软件Scilab来实现具体的算法．希望教师能运用好这一工具，从而达到使用计算机技术辅助教学的目的．同时，也希望教师能积极研究算法在数学教学中的作用和意义，为算法这一内容进入中学数学课堂贡献自己的力量．

数学1～5教师教学用书均附有两张光盘．一张内容是课堂实录，供教师教学时参考；另一张内容是为相关教学内容研制的课件（其中几何画板课件由北京20中学几何画板研究组协助制作），供教师教学时选用．数学3的课件光盘中还附有Scilab的安装程序，供大家使用．

本套教师教学用书的编写得到了山东省教学研究室、济南市教学研究室、潍坊市教学研究室、日照市教学研究室、山东省实验中学、山东师范大学附属中学等单位的大力协助，在此深表谢意！

由于时间紧，书中一定存在不少缺点，恳切希望教师、教研人员和有关专家提出意见，以便再版时订正．

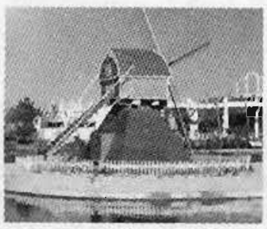
我们的联系方式如下：

电　话：010－58758523　010－58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

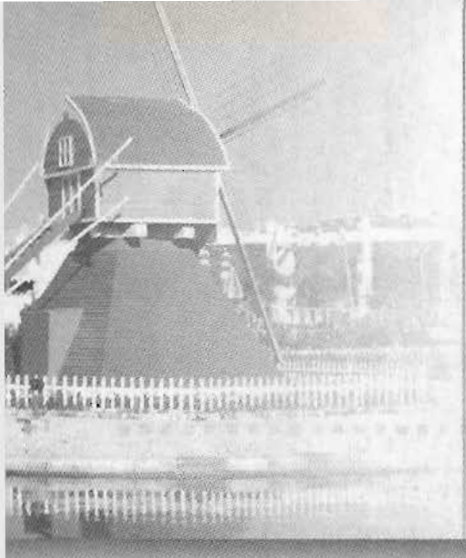
中学数学教材实验研究组

目录



第一章 立体几何初步

第二章 平面解析几何初步



第一章

立体几何初步

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

2. 了解空间图形的不同表示形式，能画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的三视图，能识别这样的三视图所表示的立体模型，会使用材料（如：纸板）制作模型，会用斜二测画法画出简单空间图形的直观图，会画出某些建筑物或零件的直观图和三视图.

3. 了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式（不要求记忆公式）.

4. 借助长方体模型，直观认识和理解点、线、面的位置关系，并在此基础上抽象出空间线、面关系的定义，了解作为推理依据的一些公理和定理.

5. 以上述定义、公理和定理为基础，通过直观感知、操作确认、思辨论证，归纳出空间中线面平行、垂直的有关判定定理和性质定理.

6. 能运用已获得的结论证明一些关于空间位置关系的简单命题.

（二）过程与方法目标

1. 学生从对空间几何体的整体观察入手，遵循从整体到局部、具体到抽象的原则，认识空间图形. 即采用先直观感知，后推理论证的学习方法.

2. 以长方体为载体，通过直观认识、操作确认、思辨论证等方法，去判断或证明空间点、线、面的位置关系.

3. 学会将自然语言转化为图形语言和符号语言，能用这些语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并对某些结论进行论证. 培养和发展学生的空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力. 初步掌握用推理论证学习空间图形性质的方法和基本技能.

4. 使用现代信息技术展示空间图形，帮助学生理解并掌握图形的几何性质，平行投影与中心投影的性质，进一步掌握画直观图方法的依据.

（三）情感、态度与价值观目标

1. 几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科. 三维空间是人类生存的现实空间，认识空间图形，培养和发展学生的空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力，是高中阶段数学必修系列课程的基本要求.

2. 结合祖暅原理等内容的学习，了解我国古代数学家在数学发展上作出的杰出贡献，渗透爱国主义教育，激发学生热爱科学，培养科学精神和态度，提高学习数学的兴趣.

3. 在教学中，要激发学生的好奇心和求知欲，要启发学生发现和提出问题，善于独立思考和钻研问题，鼓励学生创造性地解决问题. 教师可以指导和帮助学生运用立体几何知识选择课题，进行探究. 这有助于学生深化所学知识，解决实际问题，培养创新意识和实践能力.

二、教材分析

（一）编写特色

1. 依据“课标”的基本理念编写. “课标”的基本理念是，先直观认识“体”的结构，然后建立点、线、面关系的逻辑体系. 这与传统教材的编排顺序相反，并且采用重探索推理过程的教学理念.

2. 在小学和初中，对几何体的认识，只局限在直观的层面上. 这一章要使学生认识几何体的结构和性质. 教材从动和静两个方面观察和认识几何体. 通过几何体的实际制作（有条件的学校可使用计算机作图），了解几何体的结构.

制作动态的数学课件观察几何体的生成过程，来认识和研究柱、锥、台、球等几何体的性质.

3. 通过观察和进行适当的直观说理，让学生理解平行投影的性质，理解为什么能用几何体的直观图（平面图形）表示空间的几何图形. 全章渗透对称和变换的观点.

4. 通过画空间图形的直观图和三视图，进一步加深对几何体结构的认识.

5. 在学习几何体的基础上，通过直观推理和适当的逻辑论证学习空间图形的基本性质.

6. 通过平移的性质，把平面内的平行关系推广到空间；通过平面内的轴对称推广为空间中的镜面对称，把“垂直”概念推广到空间.

（二）内容结构

1. 内容编排

根据新的课程标准，本章首先通过直观感知、观察，发现柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特

征．然后归纳出空间中线面平行、垂直的判定和性质．这与旧立体几何教材有重要区别．这样编排，把对事物的感性认知作为理论研究的基础，更加符合学生的认知规律，将使学生经历更为科学地获取知识的过程，更扎实地掌握有关立体几何的初步知识．

本章的第一大节是空间几何体，主要有以下内容：

首先，使学生认识空间的点、线、面、体、轨迹与图形，直观了解空间中的线面垂直、平行的有关概念；

接着由学生观察和总结多面体、棱柱、棱锥、棱台的结构特征，在复习圆柱、圆锥的基础上了解圆台和球的概念，并认识由这些几何体组成的简单组合体；

然后，在了解几种投影的特征和关系的基础上，学习直观图和三视图的画法；

最后，让学生了解球、棱柱、棱锥、台的侧面积及体积公式，并进行计算表面积和体积的相关练习．

为了培养学生应用数学知识的意识，本大节设置了让学生动手解决一些简单的实际应用题或画图题．

本章的第二大节是点、线、面之间的位置关系，主要有以下内容：

首先了解作为推理论证基础的关于平面的基本性质及其推论；

然后分别研究空间中的平行和垂直关系，学习有关线面平行、垂直的概念、判定和性质，在学习中，通过直观感知、操作确认归纳出判定定理并对性质定理进行证明，应用这些知识进行一些推理和论证．

本书编排了配套光盘，光盘中使用了立体几何的动态直观图，它们能较好地使学生认识从各个方向观察图形时所看到的不同形象，理解不同的直观图可能表示相同的几何体，有助于学生建立和提高空间想象力，也为用直观图和三视图表示几何体打下基础．但是在使用中应该避免学生对动态直观图的依赖性，观察静态图形时能想象出它的动态形象，才是培养学生空间想象能力的方向．在这本教学用书中，附有光盘，其中有各课件的使用目的和操作说明．

不具备条件的学校不使用配套光盘也不会影响教学的进行，但是仍希望教师能研究此光盘并作为教学的参考，同时应该更加注意让学生动手制作模型，以促进他们观察与想象能力的发展．

2. 地位与作用

教材中充分注意到对学生数学思维能力的培养，要求学生对空间图形的认识不仅停留在直观感知和观察上，而是要进行空间想象、抽象概括，得到有关的定义及基本性质、定理．使学生对空间图形的认识在初中几何的基础上能适当地上升到理性的层面．

基于数学本身的抽象性和科学性，教材对数量、公式的表示，体积、面积的数据处理和运算求解，以及简单命题的演绎证明都提出了恰当的要求，力求准确、严谨、简明，但不求难求全．

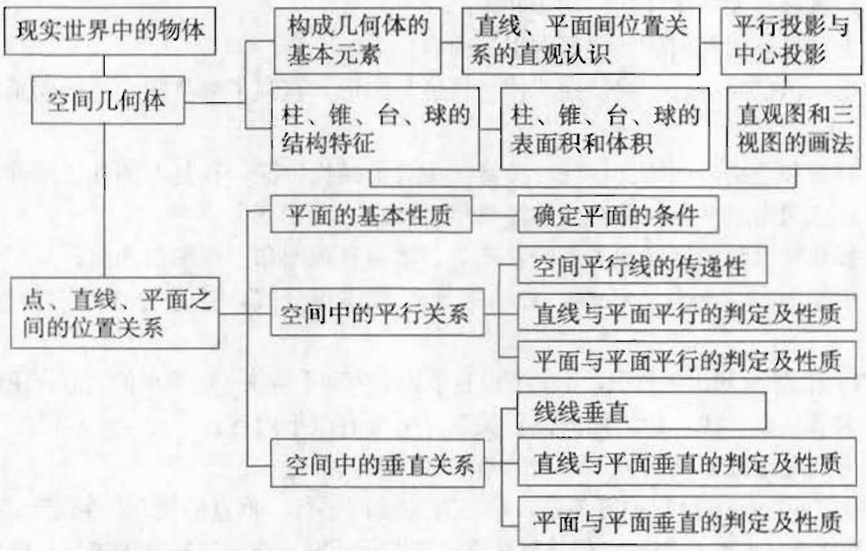
为了提倡积极主动、勇于探索的学习方式，本章教材注意了学生对教学过程的充分参与，提出了配合教学内容的思考问题，配置了探索与研究的内容，提出了制作模型、测绘图形的具体任务，还选编了阅读材料．

3. 重点与难点

本章的重点是，通过学生探索、研究，发现空间柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征；在了解平行和中心投影的特征和关系的基础上，学习直观图和三视图的画法，培养学生的空间想象能力和应用数学的意识；通过归纳、抽象概括空间线面关系的定义和平面的基本性质及推论，重点探究空间线面平行和垂直的概念、判定和性质．要注意对空间图形的认识不能仅仅停留在直观感知和观察上，在探索归纳线面关系的有关定义及基本性质、定理的过程中，要培养学生空间想象、抽象概括和逻辑推理能力．以此培养学生的数学思维能力和积极主动、勇于探索的学习方式．

本章的难点是对空间垂直概念的理解和掌握，以及从二维到三维空间思维方式的改变.

4. 本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 空间几何体	约需 9 课时
1.1.1 构成空间几何体的基本元素	约 1 课时
1.1.2 棱柱、棱锥和棱台的结构特征	约 2 课时
1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球	约 1 课时
1.1.4 投影与直观图	约 2 课时
1.1.5 三视图	约 1 课时
1.1.6 棱柱、棱锥、棱台和球的表面积	约 1 课时
1.1.7 柱、锥、台和球的体积	约 1 课时
1.2 点、线、面之间的位置关系	约需 7 课时
1.2.1 平面的基本性质与推论	约 1 课时
1.2.2 空间中的平行关系	约 3 课时
1.2.3 空间中的垂直关系	约 3 课时
本章复习与小结	约需 1 课时
全章机动课时	约需 1 课时

（四）教学建议

进行本章的教学前，应该要求学生做好以下的课前准备：

1. 观察课本上本章标题栏中及引言中的图形，说出图中的几何体并说出熟悉的几何体的名称.

2. 试做课本1.1.1练习B，1.1.2练习A第1题和练习B第1题，根据图中所给的平面图形折出几何体模型，以备课上或课下观察.

1.1 空间几何体

教材是通过“物体占有空间的部分”来描述几何体的，说明几何体已是抽象的几何概念. 在小学和初中，主要是通过几何体具有“长、宽、高”度（三个度量），来理解几何体. 这一节，将通过静态和动态观察，认识各种不同几何体的特征性质，来区分各几何体之间的差异，并建立它们之间的联系. 通过观察光线的平行投影，直观理解平行投影的性质. 通过画图和识图，培养学生的空间想象力.

1.1.1构成空间几何体的基本元素

（一）教学的重点和难点

教学重点是从运动的观点来初步认识点、线、面、体之间的生成关系和位置关系. 教学难点是通过几何体的直观图观察其基本元素间的关系以及注意到空间中存在既不平行也不相交的直线.

（二）教学建议

1. 几何体可从静与动两方面进行观察. 从静态观察几何体，把一个几何体分解为点、线（段）、面（片）. 应注意，这里的线应包括曲线，面应包括曲面. 建议增加观察柱面的例子. 应向学生指出，在几何体中，线线相交确定交点的位置，面面相交确定交线的位置. 从动态观察，线可看作点运动的轨迹，面可看作线运动的轨迹，几何体可看作面运动的轨迹. 在教学中要让学生体会空间几何图形的构成和生成.

2. 在直观几何中，困难是理解几何体的高度和线线、线面、面面之间的距离. 教材是以长方体为例进一步感知距离和高这两个概念的. 在学习点、线、面的逻辑关系时，再给出严格的定义. 对空间的平行和垂直的概念，在直观几何中，要引导学生观察、讨论，发现它们的一些特征，并能对“平行”与“垂直”进行直观地判断.

3. 理解空间点、线、面位置关系的关键，是理解异面直线的概念. 在直观立体几何中，应把它作为重点考察对象，但由于课标对异面直线不作要求，教材编写时，只是提及，没有作认真细致的考察. 建议对异面直线作认真的考察，强化学生对异面直线的理解.

4. 在教学中要充分利用学生自己制作的模型或画出的图形，直观认识几何体的结构，为下一节上升为理性知识打下基础. 具备计算机条件的学校应该充分使用计算机展示动态的图形，还可以使用作图软件对点、线、面的跟踪功能，观察点动成线、线动成面、面动成体的情况，帮助学生认识构成空间几何体基本元素之间的位置关系，培养空间想象能力.

1.1.2棱柱、棱锥和棱台的结构特征

（一）教学重点和难点

教学重点是棱柱、棱锥和棱台的定义、性质及它们之间的关系. 教学难点是几种概念相近的几何体（如：平行六面体、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体等）的特征性质的区别.

（二）教学建议

1. 要结合模型、动态的或静态的直观图，了解、认识和研究各种几何体，使对概念和性质的理解与图形密切地结合起来. 其中几何体的“特征性质”是指某种几何体的能够区别于其他几何体的本质属

性，这样的性质可以作为这种几何体的定义.

正是由于定义依据的是几何体的特征性质，因而根据定义可以判定一个几何体是否是某种几何体，当已知几何体是这种几何体时，根据它的定义又可以说出它的特征性质．换言之，定义发挥着判定定理和性质定理的双重作用．因此明确各种几何体的定义是十分重要的.

2. 结合集合的观点来认识各种几何体的性质是很有必要的，一个集合的子集中的元素具有比原集合中元素的共性更多的性质．例如在了解棱柱性质的基础上，再添加新的特征就了解了直棱柱的性质，再添加新的特征就了解了正棱柱的性质.

3. 除了由集合的观点认识几种多面体间的关系外，还要注意结合动态直观图从运动变化的观点认识它们之间的关系，例如由棱锥可以截得棱台，随着棱台上底面面积的变化，它也可以转化为棱柱或棱锥．从这样的观点出发就比较容易看到它们性质之间的联系.

4. 一定要通过观察图形或模型，开展讨论得出各种几何体的定义及性质，还要特别注意结合图形认识棱锥或棱台中，可以称之为它们的核心图形的那些直角三角形或直角梯形.

5. 对于凸多面体和平行六面体等概念，作为应该了解的常识，有必要结合图形和实例向学生作简要的介绍．对平行六面体——直平行六面体——长方体——正四棱柱——正方体这一系列平行六面体的定义及性质的认识，对于培养学生的逻辑思维和空间想象能力都很有益处.

6. 要注意观察棱柱、棱锥、棱台中的一些特殊截面的形状与位置特征，如过高及侧棱的截面、平行于底面的截面等．掌握棱锥、棱台平行于底面的截面性质时，要注意初中几何中所学习的相似形知识的应用，并体会空间问题向平面问题转化的过程和重要性.

7. 虽然还没有学习直观图的画法，在学习上面所提到的几何体的知识或解答有关的习题时，也可以要求学生模仿课本画出图形，为以后的学习打下感知体验的基础.

1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球

（一）教学重点和难点

教学重点是对旋转体概念的再认识．教学难点是球面距离的概念和应用以及组合体的分解与合成.

（二）教学建议

1. 圆柱、圆锥、圆台和球是学生在小学、初中就已经了解的常见几何体．本小节的学习中要在原有的基础上有所提高．首先应该组织学生讨论交流得出它们的定义，会用旋转的方法定义圆柱、圆锥、圆台和球，会用集合的观点定义球.

在学习中要让学生自己动手操作课件生成多种旋转体的图形，以加深对旋转体概念的认识，也可以结合课件介绍旋转面的知识.

2. 了解这几种几何体的轴截面的概念和它在决定几何体时的重要作用．对圆柱、圆锥、圆台还要注意平行于底面的截面，可以发现它们在平行于底面的截面方面分别与棱柱、棱锥、棱台具有一些相同的性质．对于球，要注意它的轴截面过球心，截球面所得的圆是球的大圆，其他平面截球面所得的圆都是球的小圆．课本上对关系式 $r=\sqrt{R^2-d^2}$（其中 r 为截面与球面交线上任意一点到球心在截面上正投影的距离，d 为截面到球心的距离，R 为球的半径）中 r 是一个定值的说明，实际上是对球的截面是圆的证明，这一关系式也体现了球的性质.

最好能够应用课件对截面位置进行动态的观察，与初中几何中直线和圆的位置关系类比，通过对球的截面到球心距离 d 的变化过程的研究与讨论，学生可以自己解决本小节“思考与讨论”中提出的问

题，理解平面与球的各种位置关系.

3. 经度和纬度是球的知识在地理方面的典型应用，很好地体现着数学知识的实用性，解决这类问题时，要注意对照观察直观图与轴截面图形，明确所进行的计算是在经线所在的大圆中进行的，还是在纬线所在的大圆（赤道）或小圆中进行的. 这里也有一个空间问题与平面问题的相互转化的思想方法.

4. 对组合体的观察和分析是对本大节所认识的几何体的复习，也为后面学习和画出几何体的直观图或三视图打下了基础，对于培养学生通过分解、组合或割补处理图形的能力也有着重要的作用. 学习中应以明确组合体是由哪些我们熟悉的几何体组成的为主要目标.

5. 引导学生自己动手操作课件或动手制作各种旋转体，加深对旋转体性质的认识. 教学时，可使用光盘中的相关配套课件.

1.1.4 投影与直观图

（一）教学重点和难点

教学重点是平行投影的性质和斜二测画法. 教学难点是正确地把握斜二测画法的要点（如：所画出的直观图中的虚实线、平行关系和长度比例等）以及选择放置直观图的角度.

（二）教学建议

1. 本小节以使学生会画出和看懂前面所学的一些几何体的直观图为主要目标，对于中心投影、平行投影和正投影，只要求学生了解它们的主要特征，知道它们是画出直观图及三视图的基础，可以根据直观图进行简单的计算.

2. 首先通过对平行投影课件的观察或对阳光（也可用光源较远的光线代替）照射下的实物投影的观察，了解平行投影的主要性质，直观感知可以用平行四边形（窗口的投影）来形象地表示矩形（窗口实物）.

3. 斜二测画法是画几何体直观图的主要方法，只要求学生能够运用斜二测画法的画图规则正确地画图和看图，不要求表达作图过程. 这种画法的作图规则可以简要地说成：“竖直或水平方向放置的线段画出时方向、长度都不变，前后方向放置的线段画出时方向与水平方向成 45°（或 135°）角，长度画成原长度的一半（仍表示原长度）.”

由于图形的形状、位置和大小通常是由一些关键的点决定的，因而在画出直观图时，首先应该正确地画出这些点.

4. 画出水平放置的圆——椭圆是画出旋转体直观图的关键. 这里只要求用椭圆模版画出椭圆，不要求学生用其他方法画椭圆.

5. 中心投影在立体几何中应用较少，学生在美术课堂上已了解一些中心投影的画法，在此为了与平行投影相对比，可以结合相关课件作简单的介绍. 当我们对直观图的尺寸放大或缩小时，可以认为是对这个图形进行了一次中心投影.

对于正投影，也可以作为平行投影的一种特殊情况在这一小节提前介绍给学生，由学生在与平行投影的对比中探索正投影的性质.

1.1.5 三视图

（一）教学重点和难点

教学重点是正投影与三视图的画法以及应用. 教学难点是三视图的画法以及应用.

（二）教学建议

1. 三视图的教学，应在初中学习的基础上提高一步. 主要是加强学生对直观图的理解，通过直观图能进行相关的计算.

2. 正投影是作出几何体三视图的根据. 通过研究几何体模型在教室地面和两个相交的互相垂直的墙面上的正投影，或观察相应课件中的动态图形，都可以帮助学生理解三视图的形成过程.

3. 理解了三视图的原理和视图间的相互关系后，首先可以一一画出前面学习过的几种简单几何体的三视图，可以根据三视图进行简单的计算.

画出三视图时，可以把垂直投影面的视线想象成平行光线从不同出发点射向几何体，体会可见的轮廓线（包括被遮挡但是可以经过想象透视到的轮廓线）的投影就是所要画出的视图. 画出的三视图要检验是否符合“长对正，宽相等，高平齐”的基本特征.

4. 由三视图想象几何体时也要根据“长对正，宽相等，高平齐”的基本特征，想象视图中每部分对应的实物部分的形象. 要特别注意几何体中与投影面垂直或平行的线及面的位置.

5. 对三视图的学习要紧密地结合实际应用. 可以到工厂去考察机器零件的实物和图纸，要认真完成本大节后面的实习作业，可以利用课外活动的时间探索与研究本小节后面提出的问题，看一看旋转体的三视图中是否一定有两个视图相同，这两个相同的视图中是否都包含有这个旋转体的轴截面.

1.1.6 棱柱、棱锥、棱台和球的表面积

（一）教学重点和难点

教学重点是棱柱、棱锥和棱台的表面积公式的推导方法，进一步加强空间与平面问题相互转化的思想方法的应用. 教学难点是棱柱、棱锥、棱台和球的表面积公式的应用.

（二）教学建议

1. 棱柱、棱锥、棱台的表面都可展开成平面图形，于是把求这些多面体的表面积转化为平面图形的面积来求.

2. 研究柱、锥、台表面积的关键是明确它们的平面展开图的形状，为此应该复习在小学、初中所学到的有关知识，还要结合在前面的学习中动手折叠几何体的体验，理解展开是折叠的逆过程. 认识了侧面展开图的形状，学生自己就可以得出侧面积公式了.

3. 球的表面积，在教材中没有证明. 对好的学生，最好引导他们去思考. 最好讲一下，数学家在探索球面面积计算公式的艰辛历程，然后再给出公式，并给出必要的说明. 如“球面面积为大圆面积的4倍”. 求球面面积的公式只要求学生了解和应用.

4. 对于面积的计算，有些要用表示数字的字母进行计算，有些可以保留准确值及表示圆周率的字母 π，有些实际应用的问题要根据要求的精确度取值，在计算中可以恰当地应用计算器，但要对手算，尤其是对含字母式子的变形进行必要的训练.

5. 在求面积的问题中，要注意应用前面所学的几种几何体的定义和性质，这体现出在高中阶段对表面积的学习比初中有所提高，例如有时候我们需要先根据正棱锥的性质计算它的斜高再求出它的侧面积.

1.1.7 柱、锥、台和球的体积

（一）教学重点和难点

教学重点是棱柱、棱锥和台的体积公式的推导方法，“祖暅原理”充分地体现了空间与平面问题的相互转化的思想方法. 教学难点是对祖暅原理的理解和棱柱、棱锥、台和球的体积公式的应用.

（二）教学建议

1. 对体积公式，课标不要求记忆也不要求证明．但教材还是通过祖暅原理导出了柱、锥、台体的体积公式．

2. 球的体积，在教材中没有证明．对好的学生，最好引导他们去思考．探索一下球面面积公式和体积公式之间的关系．同上一节一样，教学中最好讲一下，数学家在探索球体积计算公式的艰辛历程，然后再给出公式．

3. 本小节使学生了解了怎样以长方体的体积公式和祖暅原理为基础推出几种几何体的体积公式．为了提高教学效率应该尽量使用配套光盘．这样做可以尽可能的展示知识形成的过程，体现比初中所学同样内容的提高．使学生体会到复杂的体积问题怎样转化为较简单的体积问题而得到解决，从而在数学思维能力方面有所提高．

4. 通过对祖暅原理的学习，使学生了解我国古代数学家在这方面作出的突出成就，受到爱国主义教育，激发学生热爱科学，提高学习数学的兴趣．

5. 球的体积公式，本小节只要求学生了解和应用．

6. 对体积的计算的要求与面积相同．

1.2　点、线、面之间的位置关系

传统的推理几何，主要是创建一些与现实空间有关的一些抽象概念和几何图形的基本性质（公理），在此基础上进行逻辑推理，研究图形的其他性质．这一大节中，先创建平面的基本性质，然后给出空间平行和垂直的定义，探索空间一些最基本的性质，如平移、平行射影、对称等．教师应注意的是，和老教材相比，这一节的教学目的发生了重大变化．这一节教学的主要目的是，让学生了解空间的一些基本性质，为用向量工具学习立体几何打下基础．对形式化的逻辑推理，只要求学生理解公理化的意义，对多数学生不要求作过多的训练．

1.2.1 平面的基本性质与推论

（一）教学重点和难点

教学重点是平面的基本性质与推论以及它们的应用．教学难点是自然语言与数学图形语言和符号语言间的相互转化与应用．

（二）教学建议

1. 学生从直观认识平面到理性的理解平面，有一个抽象的过程．通过这个过程可培养学生的抽象能力．这个过程，看似简单，实际上是有难度的．

2. 一个平面是点的集合，平面的特征性质是什么？可引导学生讨论，讨论的过程就是平面抽象概念形成的过程．要使学生能用平面的基本性质描述平面．通过“概念”和“性质”进行必要的推理训练．可从直线的基本性质和直线与平面的关联开始讨论．

3. 要让学生认识平面的三条基本性质的直观背景．学完这三条基本性质，学生应养成用性质理解平面的习惯，学会用直线和平面的基本性质进行推理．基本性质的三条推论，要引导学生自己证明．

平面的基本性质 1 给出了判断直线在平面内的方法，引出了直线在平面内的定义，从而说明了在空间中的每个平面内都存在着各种平面图形，在每个平面内都可以应用初中几何学到的知识．

平面的基本性质2及平面基本性质的三个推论，说明了怎样的条件可以确定一个平面，从而使我们知道什么条件下可以画出确定的平面，什么条件下两个平面互相重合，这些都是研究空间图形时首先需要明确的.

平面的基本性质3主要说明了两个相交平面的特征，对我们确定或画出两个平面的交线有着重要的指导作用.

4. 要让学生知道如何从逻辑上去判断两条直线为异面直线.

5. 学习中要注意应用实例验证平面的基本性质及其推论的正确性，画出平面时应该正确应用前一节所学到的画空间图形直观图的方法.

6. 结合对“共面”的认识，学习异面直线的概念及作图是比较恰当和自然的.

7. 对于点、直线、平面之间的位置关系，要能够用描述元素、集合间关系的符号表示，但是读出这些符号时应该使用几何中的语言. 例如对于点A和平面α，把$A\in\alpha$读作A在α内. 结合对这些符号的应用，可以引导学生对空间中点、直线、平面之间的位置关系的各种可能性进行研究和分类，为下面的学习作好准备.

这里需要注意，对于直线与平面平行或直线与平面相交这两种位置关系可以说是：直线不在平面内，但是不宜说成：直线在平面外.

1.2.2 空间中的平行关系

（一）教学重点和难点

教学重点是线、线平行及平行线的传递性和面、面平行的定义与判定. 教学难点是如何由平行公理以及其他基本性质推出空间线、线，线、面和面、面平行的判定和性质定理，并掌握这些定理的应用.

（二）教学建议

1. 平行直线

教学中先复习平面几何中的直线平行的性质，然后向空间推广. 全面认识空间两直线的位置关系，并一步步地研究空间的平行问题. 和学习初中几何一样，对于位置关系的学习应该抓住定义、判定和性质这三个重要环节.

在平行公理和平面三条基本性质的基础上，空间平行线的传递性是可以证明的，但我国传统教材把它扩大为公理，以减轻学生的学习难度.

应注意在平面几何中，平行线的传递性是作为平行公理的推论的，而教材中，把空间平行线的传递性质作为基本性质. 对平行直线的认识和初中几何最主要的区别，在于初中平面几何中若干条平行直线都在同一个平面内，立体几何中多条互相平行的直线可以不在同一平面内（其中任意两条一定在同一平面内），对于其他有关空间中平行直线的问题也要注意不在同一平面内的情形.

关于平行直线的定理和例题中，除了要注意图形可能不在同一平面内，还要注意在证明中正确应用初中几何的知识和推理证明过程的正确性，把对学生推理论证能力的培养作为教学目标之一.

这一单元的重点是角平移的性质. 很多教辅把这个定理叫做“等角定理”. 这个名称起得不太好. 这个定理反映的本质是，空间的平移的性质：图形平移后，对应角的大小和对应两点间的距离不变. 由于课标没有安排要求，正文就没有写. 由于平移的性质太重要了，作者只好通过“思考与讨论”和“探索与研究”让学生掌握这一重要性质. 建议这一节的“思考与讨论”及“探索与研究”，都作为必须学习的内容. 学生掌握平移的性质，能为学习空间向量打下坚实的基础.

2. 直线与平面平行

先研讨直线与平面的位置关系，给出直线与平面平行的定义. 然后通过直线平移出平面，探索直线与平面平行的条件.

对直线和平面的三种位置关系进行小结，并知道这三种关系又可以分为在和不在平面内两类.

学习直线与平面平行的判定定理时，要明确思路是用直线与直线平行判定直线与平面平行，用较简单的位置关系去认识较复杂的位置关系. 探索直线与平面平行的判定方法时，可以用计算机或实物演示把一条直线“平移出”一个平面的过程（例如教鞭“移出”黑板）.

在证明这个定理的正确性时，应用了下面的思路：某结论和它的反面只有一个成立的情况下，“设结论的反面成立，如果推出矛盾，则结论应该成立”. 这种论证的方法叫做“反证法”，在此可以提出“反证法”的名称，但是更重要的是了解这种逻辑思维的重要形式. 这里不要给出反证法的一般性定义. 高二有推理与证明一章，那里还要专门讨论反证法.

在立体几何中，较复杂的位置关系的性质，常常以较简单的位置关系的形式体现出来. 直线与平面平行的性质就体现于直线与直线平行，直线与平面平行的性质定理就表达了这样的事实. 对这一定理的证明体现了平行直线的定义在判断两直线平行时的作用.

3. 平面与平面平行

通过平面内的两条相交直线平移出平面，探索平面与平面平行的条件. 平面平行的传递性为向量共面的概念打下了基础，课标没有安排这一内容. 我们把这些安排在 A 组练习中. 建议教学时，把它作为思考与讨论让学生直观认知，也可引导学生证明.

结合对关于平面基本性质 3 的复习，可以小结两平面位置关系的两种情况，并对两平面平行给出定义.

对于两平面平行的判定定理，仍要注意用较简单的位置关系去认识较复杂的位置关系. 探索两平面平行的判定方法时，也可以用计算机或实物演示把两条相交直线“平移出”一个平面的过程（例如三角板的两边“移出”黑板）. 说明两平面平行的判定定理的正确性时，再次应用了“设结论的反面成立，如果推出矛盾，则结论应该成立”的思路，即反证法. 练习中，没有反证法的题目，在教学中可增加一、两道题.

两平面平行的性质怎样由较简单的平行关系——线、线平行或线、面平行体现出来？这一问题可以由学生讨论交流得出结论. 除了教材中的性质定理外，还可以得出下面的性质：如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任意一条直线平行于另一个平面.

在关于两个平面平行的例题中需要添加辅助平面，这时，要特别注意根据平面的基本性质，保证平面可以画出.

1.2.3 空间中的垂直关系

（一）教学重点和难点

教学重点是空间线、面垂直的定义、判定和性质. 空间的镜面对称是空间最重要的性质，一定要求学生熟练掌握. 教学难点是空间线线、线面和面面垂直的判定和性质定理的推导以及应用.

（二）教学建议

1. 直线与平面垂直

先复习平面内的直线与直线垂直、平面的轴对称，然后通过轴对称探索直线与平面垂直的判定定

理．由于两条相交直线确定一个平面，学生会发现直线与平面垂直的条件．

定理“如果一条直线垂直于一个平面，那么它就和平面内的任何一条直线垂直”和定理“如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行”都可以看作直线与平面垂直的性质．对定理的证明及所选例题再次复习与巩固了“反证法”的思路．

点到平面的距离、三垂线定理等内容移到高二理科中学习．这样，文科学生只要停留在直观层面上理解这些概念．在学习平面的垂线后，引入以上概念，只是举手之劳，不妨在这里给出，但不要作练习或较难的练习，对文科学生还是有益的．不进入高考的内容，就一点不学，不是太好的选择．学点重要的东西，有时对全面理解所学知识是必要的，对考试也会有益．

课标没有直接安排镜面对称的内容．教材通过“探索与研究”栏目给出了镜面对称的概念，可引导学生阅读这一栏目．

2．平面与平面垂直

传统教材是先引入二面角概念，再研究平面与平面垂直的．这里是通过两个相交平面与第三个平面的交线是否垂直来定义两平面垂直的．“垂直”是空间中除平行之外的另一个最重要的概念．抓住“垂直”的性质，研讨空间其他图形的性质，是抓住了本质．这在以往的国内外的立体几何教材中是常见的，教师应体会这种编排．当一个平面与两个相交平面都相交，如果形成的平面角垂直，就给我们两个平面垂直的形象，学生是容易理解的．

对文科学生，二面角在课标中已不作要求，建议教学时可以提一下，只作直观理解，就可以了．学习理科的学生，高二将用向量代数的方法处理这些内容．用“形到形的推理”学习空间图形的性质是艰难的，用来训练学生的逻辑推理能力，对多数学生也不太适合．现在转用向量和坐标法学习立体几何，培养学生代数运算推理能力，是这次数学改革的重大举措．教师一定要充分理解，加强自己用代数方法解立体几何题的能力．

对两平面垂直的判定定理的证明，要应用上面的定义．在教材图 1-87 中，需要先证明两相交平面的交线 CD 垂直于平面 ABE，再说明 $\angle ABE=90°$，就可以根据定义得出这两个平面垂直了．

两平面垂直的性质定理“如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面”是由两平面垂直得出直线与平面垂直的重要根据之一，这也使我们再次体会平面图形与立体图形性质的内在联系．

把平面图形的性质推广到空间，把空间图形转化为平面图形，是研讨空间图形性质的重要手法．

三、拓展资源

（一）空城计与反证法

空城计相传始于三国时代，蜀国丞相兼军师诸葛亮屯兵阳平（今陕西阳平关）时，派大将魏延领兵去攻打魏国，只留下少数老弱军士守城，不料魏国大都督司马懿率大队兵马杀来，靠几个老弱兵士出城应战，犹如鸡蛋碰石头，怎么办？诸葛亮冷静思考之后，传令大开城门，让老弱军士在城门口打扫道

路，自己则登上城楼，摆好香案，端坐弹琴，态度从容，琴声优雅．司马懿来到城前，见此情况，心中疑惑，他想："诸葛亮一生精明过人，谨慎有余，从不冒险．今天如此这般，与其一生表现矛盾．恐怕城内必有伏兵，故意诱我入城．决不能中计也！"于是急令退兵．

诸葛亮正是利用了司马懿这种心理上的矛盾，才以"不守城"来达到暂时"守住城"的目的．诸葛亮从问题（守住城）的反面（不守城）考虑，来解决用直接或正面方法（用少数老弱军士去拼杀）很难或无法解决的问题，在历史上留下美谈．这就是家喻户晓的"空城计"．

这种从问题的反面考虑问题的思想方法，是数学中一种很重要的思想方法——反证法．在数学上，证明一个命题，不是直接去证明命题的结论，而是从反面考虑，先提出与结论相反的假设，然后正确推导出相矛盾的结果，说明假设不成立，肯定原结论是正确的．这种从反面考虑，从而证明命题的方法，常常能出奇制胜，达到证明的目的．反证法在社会实践和数学各个领域中都有着广泛的应用，它还是创造发明的一种工具，例如无理数和非欧几何的发现都得益于反证法．

反证法在立体几何中用得较多，教材中很多定理都是用反证法来证明的．具体地说，反证法可用来证明以下一些方面的问题：

（1）证明两条直线是异面直线；（2）证明否定型命题；（3）证明唯一性命题；（4）证明平行；（5）证明相交；（6）证明线在面内；（7）证明"至多""至少"问题等．

举例如下：

例 1　已知：如图 1-1，$a\cap\alpha=A$．求证：在平面 α 内不存在直线与 a 平行．

分析：不存在直线与 a 平行的反面是至少有一条直线与 a 平行，不妨设为 b．从而由 $b/\!/a$，$b\subset\alpha$ 和 $a\not\subset\alpha$，可推出 $a/\!/\alpha$，与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾．

证明：假设原结论不成立，则在 α 内有一条直线与 a 平行，不妨设为 b，则 $b/\!/a$．

因为 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，$a\not\subset\alpha$，所以 $a/\!/\alpha$，这与已知 $a\cap\alpha=A$ 相矛盾．

于是假设不成立，即原命题成立．

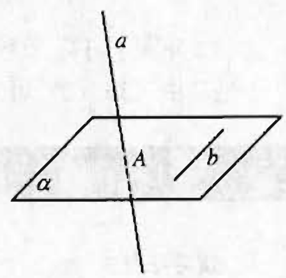


图 1-1

例 2　已知：$PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，且 A，B 不重合（图 1-2）．求证：α 与 β 相交．（由 1980 年全国高考理科试题第五题改编）

分析：假设 α 与 β 不相交，则 α 与 β 重合或平行．若 α 与 β 重合，则由 $PA\perp\alpha$，$PB\perp\alpha$ 和 A，B 不重合，可得过一点有两条直线都垂直于同一平面，这是不可能的．若 $\alpha/\!/\beta$，则由 $PB\perp\beta$，可得 $PB\perp\alpha$，从而 PA，PB 都垂直于 α，这也是不可能的．

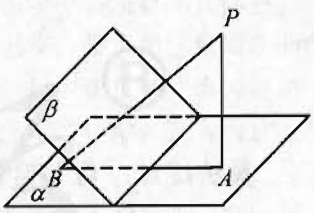


图 1-2

证明：假设 α 与 β 不相交，则 α 与 β 重合或平行．

当 α 与 β 重合时，

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha\text{与}\beta\text{重合}\\ PB\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}PB\perp\beta\\ PA\perp\alpha\\ A\text{与}B\text{不重合}\end{array}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 与过点 P 有且只有一条直线与 α 垂直矛盾．

当 $\alpha/\!/\beta$ 时，

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \\ PB\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}PB\perp\alpha \\ PA\perp\alpha \\ A\text{ 与 }B\text{ 不重合}\end{array}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 与过点 P 有且只有一条直线与 α 垂直矛盾.

于是假设不成立. 故 α 与 β 相交.

例 3　已知直线 a 不垂直于平面 α（图 1-3）. 求证：过 a 有且只有一个平面与 α 垂直.

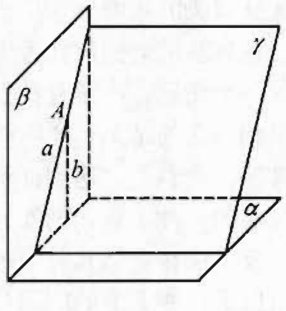


图 1-3

分析：这是一个唯一性命题，其证明可分两步进行：先证存在性，即过 a 有一个平面与 α 垂直；再证唯一性，用直接证明"只有一个"不好下手. 我们用反证法，假设还有一个平面垂直于 α，去寻找矛盾.

证明：(1) 设 $A\in a$，过 A 作 $b\perp\alpha$. $a\cap b=A\Rightarrow a$，b 确定一个平面，记作 β. $\left.\begin{array}{l}b\perp\alpha \\ b\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

(2) 假设过 a 不只一个平面垂直于 α，可设除 β 以外还有平面 $\gamma\perp\alpha$，

$$\left.\begin{array}{l}\beta\perp\alpha \\ \gamma\perp\alpha \\ \beta\cap\gamma=a\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\alpha.$$

这与 a 不垂直于 α 矛盾. 从而假设不成立，所以只有一个平面垂直于 α.

于是，由 (1)(2) 可知原命题成立.

(二) 数学探究课例——正方体的截面形状

1. 教学目标

知识与技能目标：了解正方体的截面变化情况，能判断和画出常见几何体的简单截面，对截面问题形成比较完整的知识结构.

过程与方法目标：学生通过利用《几何画板》的操作演示，发现、探索截面变化的规律，培养空间想象能力以及发散思维和类比思维能力.

情感、态度与价值观目标：借助课件演示，创设问题情景，激发学生学习的热情和积极性，培养学生创新意识，提高学习数学的兴趣.

2. 教法设计（可结合课件 2107-2）

演示法：把已制作的课件让学生操作，便于学生对截面形成演变和形状变化的过程进行多角度的观察，并从中获得启发，从而掌握有关截面的知识和方法.

谈话法：在教师指导下，由全班或小组成员围绕某一中心问题发表自己的看法，开展合作学习，集思广益，共同促进.

成果展示法：鼓励学生自己制作课件进行演示，让学生参与到教学活动中来. 在探究学习中获得成功的喜悦和认同，激发学习的热情.

讨论法：就学生探索所得成果，各小组可自由提问，或者师生共同评价，最后对正方体的截面有一个比较系统完整的认识.

3. 教学过程设计

（1）先期准备

《几何画板》是建立立体几何的图形工具包，方便学生在较短的时间内作出准确的几何体图形，以方便学生进行探究性学习，避免在作图上花费过多时间和精力.

（2）教学策略与问题设计

教学策略：教师提出问题，然后逐层展开，分步进行探究（需学生进行探索和分析），然后学生进行分组讨论和实际操作，通过自主学习、探究学习以及合作学习等学习方式，让学生自己动手演示课件，在探索中学会如何观察和作出正方体的截面，形成正方体截面的完整的知识结构.

问题 1. 正方体的截面可能是什么形状的图形？

本问题可以有如下各种肯定或否定性的答案.

①截面可以是三角形：等边三角形、等腰三角形、一般三角形；

②截面三角形是锐角三角形；截面三角形不能是直角三角形、钝角三角形；

③截面可以是四边形：平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形、等腰梯形；截面为四边形时，这个四边形中至少有一组对边平行；

④截面不能是直角梯形；

⑤截面可以是五边形；截面五边形必有两组分别平行的边，同时有两个角相等；截面五边形不可能是正五边形；

⑥截面可以是六边形；截面六边形必有分别平行的边，同时有两个角相等；

⑦截面六边形可以是等角（均为 120°）的六边形. 特别地，可以是正六边形.

（3）学习指导

本课例以正方体的截面为核心，让学生借助《几何画板》的实际模拟和探索功能进行学习，由学生结合自主学习与小组合作学习的形式，进行观察、试验、探究，通过尝试、归纳、类比，自己去发现并总结有关截面问题的知识和方法. 教师在此过程中要进行必要的点拨和在学生学习出现困难时进行适当的指导，由此培养学生的自学能力，使学生真正成为学习的主人.

（4）截面图形举例

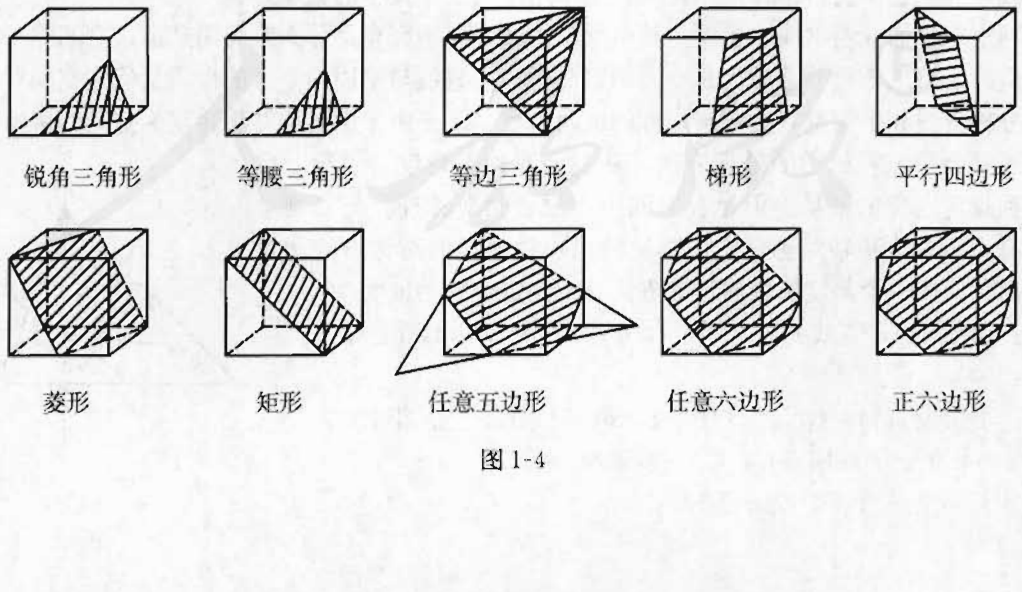


图 1-4

(5) 截面问题拓展

问题 2. 三棱柱、四棱柱、五棱柱的截面情况怎样？

问题 3. 三棱锥、四棱锥、五棱锥的截面情况怎样？

问题 4. 三棱台、四棱台、五棱台的截面情况怎样？

（三）数学格言

音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学能给予以上的一切. ——克莱因（M. Kline）

问题是数学的心脏. ——哈尔默斯（P. R. Halmos）

只有一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的终止或衰亡. ——希尔伯特（D. Hilbert）

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要. ——康托尔（G. F. P. Cantor）

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深. ——高斯（C. F. Gauss）

（四）空间的对称变换

线面垂直判定定理的另一个证明

直线和平面的判定定理是全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）数学第二册（下 B）中，关于线面、面面平行及垂直的判定和性质定理中唯一没有给出书面证明的定理. 教材中只给出了判定定理的分析过程，要求学生自己完成证明过程. 其中主要原因是：此判定定理的几何证法独特、单一，构造图形复杂，证明过程较长，而实验教材降低了对几何推理论证的要求，学生只要了解就可以了，而且后面还可以利用空间向量的方法对其进行更简洁的证明. 教材中只给出了分析过程，许多教师在教学实践中通常也不会给出详细地证明，更不用说去挖掘其中的数学思想.

那么判定定理的证明本质，也就是其中反映的数学思想究竟是什么？我们知道，空间除平移和平行射影的性质外，第二个重要性质就是空间的镜面对称. 直线与平面的垂直的性质是研究空间对称性的基础，细心分析直线和平面垂直的判定定理的证明过程，就是由平面的轴对称转化为空间的镜面对称的过程. 教师通常会按照教材中的处理方法，从镜面对称的角度，引导、启发学生得到判定定理的证明. 但是在空间中，除镜面对称外，与二维空间一样还有中心对称和轴对称，它们都反映出一种数学的对称方法和对称美. 下面我们换一个角度用轴对称的方法分析判定定理的证明.

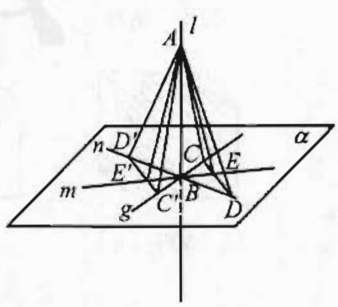


图 1-5

已知：如图 1-5，直线 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=B$，$l\perp m$，$l\perp n$.

求证：$l\perp\alpha$.

分析：不妨设 $l\cap\alpha=B$，过 B 任作 $g\subset\alpha$，只须证 $l\perp g$ 即可.

如图 1-5，在 g 上取两点 C，C'，使得 $BC=BC'$.

过 C 作 CD 交 m 于 E，交 n 于 D.

过 C' 作 $C'D' // DC$ 交 m 于 E'，交 n 于 D'.

由 $\triangle BCE \cong \triangle BC'E'$，得 $BE=BE'$.

连接 AC，AE，AD，AC'，AE'，AD'.

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABE \cong \mathrm{Rt}\triangle ABE'$，得 $AE=AE'$.

同理 $\mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle ABD'$，得 $AD=AD'$.

又因为 $\triangle BDE \cong \triangle BD'E'$，得 $DE=D'E'$.

故 $\triangle ADE \cong \triangle AD'E'$，得 $\angle ADE=\angle AD'E'$.

因此可得 $\triangle ADC \cong \triangle AD'C'$，所以 $AC=AC'$.

由此可得 $l \perp g$.

证明：略.

由于轴对称的概念和方法在初中已被学生认知，因此这种利用空间轴对称思想的证明方法，应该比教材中的镜面对称的证法更容易被学生接受. 当然如果两种方法均向学生介绍一下，可能会有利于学生在更广泛普遍的对称意义上来理解判定定理的证明，解题思路更加开阔，有助于提高学生的数学思维能力. 这应该是当今推理几何消弱过程中还需要在教学中保留和突出的数学思想方法.

（五）奇特的数学碑文——阿基米德的图形碑文

阿基米德是古希腊伟大的数学家、力学家，他一生中曾得到过许多杰出的成果，如物理学中的“阿基米德定律”，力学中的“杠杆定律”都是由他首先确立的. 他还有许多发明，也因此被誉为是最伟大的机械学的天才之一. 然而他的非凡成就更多表现在数学方面，他被公认为是古代最伟大的数学家，后人尊称其为“数学之神”. 他的数学著作很多，其中《论球与圆柱》是他最得意之作，在这本杰作中他推导出了关于球的著名定理：球的体积等于和它外切而等高的圆柱体体积的 $\frac{2}{3}$，球的表面积等于这个圆柱体的表面积的 $\frac{2}{3}$. 对这一定理的成功证明曾使他在精神上得到极大的安慰，为此他要求后人在他的墓碑上刻一个内盛球体的圆柱体，并且使球体按照二者之间的比例（3∶2）内切于圆柱体. 最终当阿基米德不幸死于一罗马士兵之手后，当时的罗马统帅遵从他的意愿，为他建造墓碑，上面刻着球和它的外切圆柱这样一个几何图形，以使后世永远缅怀他的伟大业绩.

（六）数学小故事

聪明、执着的丹尼尔

这件事发生在美国的佛罗里达州. 在一次大规模中学数学竞赛中，应考学生多达 83 万，试题共 50 道，其中第 44 题是这样的：

一个正三棱锥和一个正四棱锥，所有的棱长都相等. 问重合一个面后还有（　）个暴露面.

A. 4　　　B. 5　　　C. 6　　　D. 7

标准答案注明为“7”.

一个叫丹尼尔的学生回答为 5 个，结果该题被判为错而未能得分．小丹尼尔感到委屈，找到教授们说理，而教授们坚持按标准答案给分．回家后丹尼尔和父亲一起动手做了两个实实在在的模型（图 1-6，Ⅰ，Ⅱ），重合一个面后（图 1-6，Ⅲ），果然只有五个面！这件事引发了一场官司，结果是小丹尼尔尚未出庭，便告胜诉！

可能读者要问，难道说凭几个模型，就能说明丹尼尔正确吗？就能说服教授们吗？

当然不行，事实上教授也作了两个共面、并列、相同的正四棱锥，可以清楚看到（并能很快证明）中间空着一个正四面体（图 1-6，Ⅳ）．

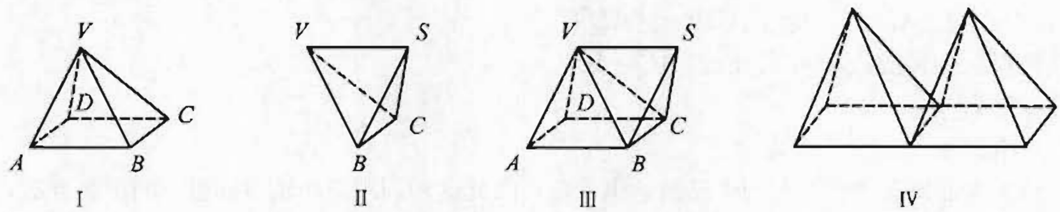


图 1-6

不仅如此，丹尼尔自己也提供了一种图 1-6Ⅲ的理论证明．聪明的读者，你能知道丹尼尔是怎样证明的吗？

（七）欧几里得与《原本》

《原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作，是当时整个希腊的数学成果、方法、思想和精神的结晶，其内容和形式对几何学本身和数学逻辑的发展有着巨大的影响．自它问世之日起，在长达二千多年的时间里一直盛行不衰．它历经多次翻译和修订，自 1482 年第一个印刷本出版后，至今已有一千多种不同的版本．除了《圣经》之外，没有任何其他著作，其研究、使用和传播之广泛，能够与欧几里得的《原本》相比．《原本》超越了民族、种族、宗教信仰、文化意识方面的影响，这是《圣经》所无法比拟的．

公元前 7 世纪之后，希腊几何学迅猛地发展，积累了丰富的材料．希腊学者们开始对当时的数学知识作有计划的整理，并试图将其组成一个严密的知识系统．首先做出这方面尝试的是公元前 5 世纪的希波克拉底（Hippocrates)，其后经过了众多数学家的修改和补充．到了公元前 4 世纪时，希腊学者们已经为建构数学的理论大厦打下了坚实的基础．

欧几里得在前人工作的基础之上，对希腊丰富的数学成果进行了收集、整理，用命题的形式重新表述，对一些结论作了严格的证明．他最大的贡献就是选择了一系列具有重大意义的、最原始的定义和公理，并将它们严格地按逻辑的顺序进行排列，然后在此基础上进行演绎和证明，形成了具有公理化结构的，具有严密逻辑体系的《原本》．

《原本》的希腊原始抄本已经流失了，它的所有现代版本都是以希腊评注家泰奥恩（Theon，约比欧几里得晚七百年）编写的修订本为依据的．《原本》的泰奥恩修订本分 13 卷，总共有 465 个命题，其内容是阐述平面几何、立体几何及算术理论的系统化知识．

第一卷首先给出了一些必要的基本定义、解释、公设和公理，还包括一些关于全等形、平行线和直线形的熟知的定理．该卷的最后两个命题是毕达哥拉斯定理及其逆定理．这里我们想到了关于英国哲学家霍布斯的一个小故事．有一天，霍布斯偶然翻阅欧几里得的《原本》，看到毕达哥拉斯定理，感到十

分惊讶，他说："上帝啊！这是不可能的."他由后向前仔细阅读第一卷的每个命题的证明，直到公理和公设，他终于完全信服了.

第二卷篇幅不大，主要讨论毕达哥拉斯学派的几何代数学.

第三卷包括圆、弦、割线、切线以及圆心角和圆周角的一些熟知的定理．这些定理大多都能在现在的中学数学课本中找到.

第四卷则讨论了定圆的某些内接和外切正多边形的尺规作图问题.

第五卷对欧多克斯的比例理论作了精彩的解释，被认为是最重要的数学杰作之一．据说，前捷克斯洛伐克的一位并不出名的数学家和牧师波尔查诺（Bolzano，1781—1848）在布拉格度假时，恰好生病，为了分散注意力，他拿起《原本》阅读了第五卷的内容．他说，这种高明的方法使他兴奋无比，以致于从病痛中完全解脱出来．此后，每当他朋友生病时，他总是把这作为一剂灵丹妙药向病人推荐.

第六卷讲相似多边形理论.

第七、八、九卷讨论的是初等数论，给出了求两个或多个整数的最大公因子的"欧几里得算法"，讨论了比例、几何级数，还给出了许多关于数论的重要定理.

第十卷讨论无理量，即不可公度的线段，是很难读懂的一卷．最后三卷，即第十一、十二和十三卷，论述立体几何．目前中学几何课本中的内容，绝大多数都可以在《原本》中找到.

《原本》按照公理化结构，运用了亚里士多德的逻辑方法，建立了第一个完整的关于几何学的演绎知识体系．所谓公理化结构就是：选取少量的原始概念和不需证明的命题，作为定义、公设和公理，使它们成为整个体系的出发点和逻辑依据，然后运用逻辑推理证明其他命题．《原本》成为了两千多年来运用公理化方法的一个绝好典范.

值得一提的是意大利传教士利玛窦和中国科学家徐光启，他们对我国数学的发展作出了很大的贡献．他们翻译的《原本》前六卷是第一个内容较多且正式的中文译本，其简练、准确、图文并茂．梁启超曾评价它为"字字精金美玉，是千古不朽的著作"．在这里他们创造了许多数学概念，如：点、线、面、平面、曲线、曲面、直角、钝角、垂线、平行线、对角线、三角形、四边形、多边形、圆、圆心、平边三角形（等边三角形）、斜方形（菱形）、相似、外切、几何等等．这些概念一直使用到今天．并且，其一改中国古代数学书籍编写方式，引入了公理化方法，使用了证明等．这些做法，在当时产生了极大的影响，使得当时一大批学者倾服.

诚然，正如一些现代数学家所指出的那样，《原本》存在着一些结构上的缺陷，但这丝毫无损于这部著作的崇高价值．它的影响之深远，使得"欧几里得"与"几何学"几乎成了同义语．它集中体现了希腊数学所奠定的数学思想、数学精神，是人类文化遗产中的一块瑰宝.

四、教学案例

案例1　棱锥和棱台

（一）教学目标

1．知识与技能目标：认识和了解棱锥和棱台的结构特征，掌握其定义和性质.

2. 过程与方法目标：在教学过程中体现的主要数学能力及数学思想方法.

(1) 空间想象能力：通过对大量的实物模型和电脑课件的观察，归纳出棱锥、棱台的定义，培养学生的几何直观以及空间想象能力.

(2) 转化的思想方法：棱台是由棱锥用平行于底面的平面截取得到的，而棱锥也可以认为是由棱台补形得到. 从运动的观点来看，棱柱、棱锥与棱台可以互相转化，正棱锥（台）中求高、斜高、底边长等可转化为解直角三角形（直角梯形）的问题，这正是将空间问题转化为平面问题（升降维）的数学思想方法.

(3) 类比的思想方法：通过棱柱、棱锥、棱台定义及性质的比较、结构的比较和正棱柱、正棱锥、正棱台的定义及性质的比较，培养类比的思想方法.

3. 情感、态度与价值观目标：通过大量的实物模型及计算机课件演示，体现一种几何体的数学直观美. 自然界中的任何物体，可以通过我们的观察，从数学的角度去认识它们，了解它们，给它们以新的定义. 在数学与实际问题的密切联系中，激发学生的学习欲望和探究精神. 在课堂学习中，学生既有独立思考，又有合作讨论，有意识、有目的地培养学生自主学习的良好习惯以及协作共进的团队精神.

（二）教学重点与难点

教学重点是棱锥、棱台的定义及性质以及简单应用. 教学难点是棱锥、棱台中的截面问题.

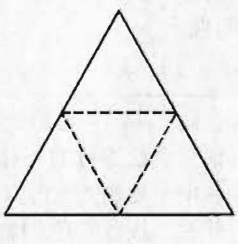
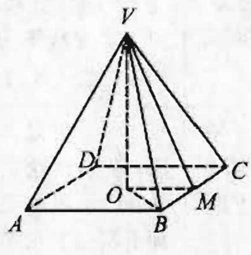
（三）教学方法

根据本节课的特点，尝试运用“问题探究式”教学法. 由学生观察归纳出棱锥与棱台的结构特征，以及棱锥平行于底面的截面性质，通过学生对问题步步深入地探究和解决，逐步建构起棱锥和棱台的知识框架.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	演示电脑课件2107和棱锥模型. 提出问题： (1) 这些是什么形状的多面体？ (2) 为什么会判定它们是棱锥呢？ (3) 棱锥有哪些性质？哪些性质可以作为棱锥集合的特征性质？	教师演示课件及模型，提出问题. 学生观察课件、模型，先思考然后相互讨论，互相补充，得到棱锥的主要结构特征.	通过课件演示，模型展示，使学生直观了解棱锥的定义和性质.
概念形成	1. 棱锥定义：棱锥是有一个面是多边形，而其余各面是有一个公共顶点的三角形的多面体. 2. 棱锥的有关概念： (1) 侧面、顶点、侧棱、底面、高； (2) 棱锥的记法； (3) 棱锥的分类； (4) 正棱锥：棱锥的底面是正多边形，并且顶点在过正多边形中心且垂直于底面的直线上. 常用的对象是直角三角形、斜高等.	1. 学生动手试画出其中三棱锥、四棱锥的直观图. 师生一起得出棱锥的有关概念. 2. 教师演示正棱锥的课件、模型，学生观察指出其特征.	通过模型及计算机课件使学生直观了解棱锥的结构特点，培养学生的几何直观能力.
概念深化	提出问题： (1) 底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥吗？ (2) 已知正四棱锥 S-$ABCD$，O 是正方形 $ABCD$ 的中心，以点 S，O 以及 A，B，C，D 中一点为顶点的三角形是否是直角三角形？	教师提出问题，学生分组讨论. 由学生探索归纳问题结论，教师适当地进行点评.	问题的设置意在加强对正棱锥定义的理解.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	练习 1： (1) 设计一个平面图形，使它能够折成一个侧面与底面都是等边三角形的正三棱锥. 解析：因为三棱锥的侧面与底面都是等边三角形，所以它的棱长都相等（图 1-7），于是作一等边三角形及其三条中位线，沿图中的实线剪下这个三角形，再以虚线（中位线）为折痕就可折成符合题意的几何体. 本题也可采取逆向思维的方法，想象将正三棱锥沿着三条侧棱剪开，然后展开到一个平面上.  图 1-7  图 1-8 (2) 如图 1-8，已知正四棱锥 $V\text{-}ABCD$，底面面积为 16，侧棱长为 $2\sqrt{11}$，计算它的高和斜高. 解析：设 VO 是棱锥 $V\text{-}ABCD$ 的高，作 $VM\perp BC$ 于点 M，则 M 为 BC 中点. 因为底面正方形 $ABCD$ 面积为 16，所以 $BC=4$，$BM=CM=2$， $OB=\sqrt{BM^2+OM^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. 又因 $VB=2\sqrt{11}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle VOB$ 中，由勾股定理可得 $VO=\sqrt{VB^2-OB^2}=\sqrt{(2\sqrt{11})^2-(2\sqrt{2})^2}=6$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle VOM$ 中，由勾股定理可得 $VM=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$. 即棱锥的高为 6，斜高为 $2\sqrt{10}$. 注：若其他条件和结论不变，将正四棱锥改为正三棱锥呢? 请同学上讲台解答，然后由学生相互讨论之后评析.	1. 练习 1（1）请同学们自己完成，然后让他们相互讨论、订正. 教师引导学生从各种角度去思考，培养学生发散性思维. 2. 练习 1（2）学生分组共同探究，分析解题思路. 展示解题过程，注意规范解题步骤，教师板演.	1. 让学生充分发挥自己的想象力和创造力，多角度的进行探索. 2. 正棱锥的基础直角三角形，在解决正棱锥的问题中扮演着重要角色，另一方面通过变形，培养学生的发散思维能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	1. 棱台的定义：棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面间的部分叫做棱台. 原棱锥的底面和截面分别称为棱台的下底面、上底面. 棱台的其他各面叫做它的侧面，相邻两侧面的公共边叫做棱台的侧棱，两底面间的距离叫做棱台的高. 2. 正棱锥被平行于底面的平面所截，截得的棱台是正棱台（观察课件和模型）. 3. 由直观图指出棱台的记法：棱台可用表示上下底面的字母来命名，如记作棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 或记作棱台 AC'. 下底面为 $ABCD$，上底面为 $A'B'C'D'$，棱台的高为 OO'.	1. 学生观察演示课件或模型，教师引导得到棱台的定义. 2. 学生试画出一个三棱台和正四棱台的直观图，同时教师或同学在黑板上示范. 3. 学生作图中可能会出现：画的侧棱延长后不交于一点，正棱台画得倾斜，实虚线不分等问题，可与学生一起讨论订正.	通过课件演示，模型展示，使学生直观了解棱台的定义和性质.
概念深化	1. 正棱锥中有斜高和基础直角三角形. 在斜高、高和底面边长三个基本量中，已知两个就可以求得另外一个. 正棱台是否有类似的结论呢？以正四棱台为例说明之. 2. 通过基础直角梯形，上、下两个底边长、高、斜高和侧棱长五个基本量就建立了联系，已知三个量就可以求另外两个.	学生可以先思考、画图，然后讨论完成，请同学在已画出的正四棱台中标出基础直角梯形，并说明其中包含的基本量，教师给予适当点拨和总结. 演示课件 2108 说明正棱台斜高的概念.	问题的设置意在通过已学过的正棱锥的性质，通过类比的方法，得到正棱台的有关特征性质.
应用举例	练习 2：设正三棱台的上下底面的边长分别为 2 cm 和 5 cm，侧棱长为 5 cm，求这个棱台的高. 学生独立解决，书写解题过程，做完后同学之间互相订正，展示学生作业. 这里引导学生注意正三棱台与正四棱台的联系与区别. 问题（1） 过棱锥的高及侧棱的截面是什么图形？平行于底的截面呢？（以三棱锥为例）学生想象、画图、观察模型、讨论、判断. 教师演示模型、电脑课件. 学生进一步思考、讨论以下问题： 问题（2） 棱锥平行于底面的截面与底面有什么关系？为什么呢？在此可引导学生复习多边形相似的定义，由学生得到：截面与底面面积的比等于相似比的平方，等于所截得的小棱锥与大棱锥对应高的比的平方. 练习 3：棱锥的底面面积为 S，过棱锥高的中点作截面（中截面），求截面面积. 过棱锥高的三等分点作截面呢？	1. 练习 2 的处理由学生独立解决，书写解题过程，做完后同学之间互相讨论，展示学生作业. 这里引导学生注意正三棱台与正四棱台的联系与区别. 2.（以三棱锥为例）学生想象、画图、观察模型、讨论、判断. 教师演示模型、电脑课件.	1. 练习 2 的设计意图是：直观演示与抽象概括相结合，独立思考与相互协作讨论相结合. 充分调动学生的学习积极性，激发其学习兴趣，让学生充分参与到课堂活动中来. 2. 截面问题是一个难点，在这里注意控制难度. 难点的突破，主要是依靠实物模型（将棱锥截割），电脑动画演示，从直观上让学生有一个初步的认识，然后通过利用初中所学的相似三角形的知识加以论证，学生之间互相讨论、协作完成，教师适时予以点拨.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳小结	1. 演示电脑课件（动画：棱柱、棱锥、棱台的互相转化），请学生概括三种几何体的定义和性质； 2. 正棱锥、正棱台的特征性质； 3. 截面问题.	教师演示电脑课件（动画：棱柱、棱锥、棱台的互相转化），学生归纳小结.	使学生对本节所学知识有一个系统的认识.
布置作业	练习 A，1；练习 B，1. 思考题：已知正三棱台的上下底边长分别为 a 和 b $(b>a)$，侧棱长为 l，求正三棱台的高和斜高. 将正三棱台改为正四棱台，其他条件不变，求其高和斜高.		学生课后巩固所学知识.

案例 2　直线与平面垂直

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：掌握直线与直线、直线与平面垂直的定义以及直线与平面垂直的判定定理.

2. 过程与方法目标：在教学过程中体现的主要数学能力及数学思想方法.

(1) 空间想象能力：认识空间图形的位置关系，遵循从较简单的位置关系认识较复杂的位置关系的原则，从空间的线线垂直过渡到线面垂直，逐步培养和发展学生的几何直观和空间想象能力.

(2) 转化的思想方法：在三维与二维空间的转化以及线面关系与线线关系的转化过程中，体现出转化的思想方法.

(3) 逻辑思维能力：通过对判定定理和其推论的证明以及应用，加强学生逻辑思维能力和推理论证能力的培养.

3. 情感、态度与价值观目标：体验线面垂直的判定定理的发现过程和线面垂直的概念在实际问题中的应用，培养创新意识和数学应用意识，提高学生学习数学的兴趣. 并注意在小组合作学习中培养学生的协作精神.

（二）教学重点与难点

教学重点是直线和平面垂直的概念，直线和平面垂直的判定定理及应用. 教学难点是直线与平面垂直的判定定理证明思路的理解.

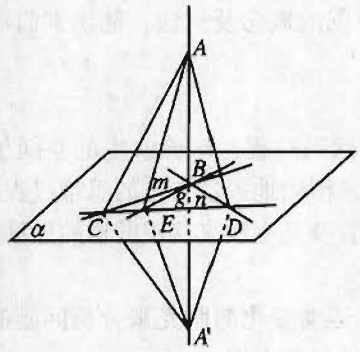
（三）教学方法

“问题探究式”教学法，通过学生发现问题、分析问题和解决问题的过程，让学生主动参与到教学和学习活动中来，并且始终处于积极地动手操作、问题探究和辨析思考的学习气氛之中，形成以学生为中心的探究性学习活动.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	【问题1】长方体中哪些棱是互相平行的？哪些棱是互相垂直的？ 【问题2】火箭与发射台地面、灯塔与海平面是什么位置关系？ 【问题3】长方体的棱 AA_1 与面 $ABCD$ 什么位置关系？ 【问题4】在平面上线段 AB 的垂直平分线有几条？在空间呢？你能用你手中的笔演示一下吗？	1. 教师引导学生利用手中的两支笔，由垂直相交，经过平移其中的一条，得到异面的两直线垂直的情形．从而引出空间两条直线互相垂直的定义． 2. 演示火箭发射现场、灯塔与海平面的课件，观察长方体模型的各棱与各面的关系． 3. 学生通过观察，从直观上对线面垂直有了一定的认识，让学生再举一些线面垂直的实例．然后适时地引导学生做深层次的思考． 4. 请一名同学到讲台演示（一支笔 a 固定，另一支笔 b 绕着 a 的中点保持垂直同时旋转），学生观察． 请学生回答：① b 所在的直线的运动轨迹是什么？② a 所在的直线与这个轨迹的位置关系是什么？ 教师演示电脑课件：两条直线垂直相交，其中一条旋转，形成一个面．	学生观察长方体模型的各条棱的关系，电脑演示课件．通过实物模型课件演示，比较直观地观察认识线线垂直、异面直线垂直．另外通过学生自己操作（两支笔），观察教室内的线线位置关系，直观认识，培养学生的善于观察、发现、归纳的能力．通过线线垂直的概念，为引入线面垂直概念打下基础．
概念形成	1. 空间两条直线互相垂直的定义：如果两条直线相交于一点或经过平移后相交于一点，并且交角为直角，则称这两条直线互相垂直． 2. 直线与平面垂直的定义：如果一条直线 AB 和一个平面 α 相交于点 O，并且和这个平面内过交点 O 的任何直线都垂直，我们就说这条直线和这个平面垂直．直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面，交点叫做垂足，垂线上任一点到垂足间的线段，叫做这点到这个平面的垂线段，垂线段的长度叫做这点到平面的距离． 画法：画直线和平面垂直时，通常要把直线画成和表示平面的平行四边形的一边垂直． 记法：直线 l 和平面 α 垂直，记做 $l\perp\alpha$．	教师提出问题，学生在教室里寻找线线垂直、线面垂直的实例．教师可给学生充分时间举例，使学生有一个比较形象的直观认识．	通过实际举例，直观认识，使学生直观理解概念，认识数学的应用性．

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	【问题 5】① 一条直线垂直于平面内的一条直线，这条直线一定垂直于这个平面吗？ ② 一条直线垂直于平面内的两条平行直线，这条直线一定垂直于这个平面吗？ ③ 一条直线垂直于平面内的无数条直线，这条直线一定垂直于这个平面吗？ ④ 一条直线垂直于平面内的两条相交直线，这条直线一定垂直于这个平面吗？ 1. 直线与平面垂直的判定定理：如果一条直线与平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直. 2. 定理的推论：两条平行直线中，有一条垂直于平面，那么另一条也垂直于这个平面.	1. 学生思考讨论，教师提示用几支笔摆一摆，请同学演示，其他同学观察订正. 2. 观察长方体模型以及教室内的线面垂直关系，进一步验证定理，并引出结论. 3. 学生证明，同学之间交换批阅，学生代表回答，展示证明过程. 归纳判定线面垂直的方法.	通过以上四个问题的设置，充分发挥学生的空间想象力，以及同学之间的协作精神，不断探索，层层递进，排除、筛选线面垂直的条件及性质.
应用举例	【问题 6】如图 1-9 所示，在空间如果直线 m, n 都是线段 AA' 的垂直平分线，设 m, n 确定的平面为 α，你能否证明在平面 α 内，通过线段 AA' 中点 B 的所有直线都是线段 AA' 的垂直平分线？线段 AA' 的任一条垂直平分线都在平面 α 内？  图 1-9 证明：(1) 设 $g\subset\alpha$，且 g 过 B. 因为 $AA'\perp m$，$AA'\perp n$，所以 $AA'\perp\alpha$. 又因为 $g\subset\alpha$，所以 $AA'\perp g$. 因为 B 为 AA' 的中点，所以 g 为线段 AA' 的垂直平分线. (2) 设 k 为线段 AA' 的任一条垂直平分线，则 $AA'\perp k$，且 AA' 过 B. 证法一　假设 k 不在 α 内. 设 m 与 k，n 与 k 确定的平面分别为 β 和 γ. 则 $AA'\perp\beta$，$AA'\perp\gamma$. 与过 B 有且只有一个平面与直线垂直矛盾. 所以 $k\subset\alpha$. 证法二　假设 k 不在 α 内，k 与 AA' 确定的平面为 β，$\alpha\cap\beta=l$，则 $AA'\perp l$，$AA'\perp k$. 与在一平面内过一点有且只有一条直线与另一直线垂直矛盾，所以 $k\subset\alpha$. 【问题 7】教材中例 2. 请同学独立完成，教师适时点拨，注意规范解题步骤.	1. 问题 6 的处理：本题的处理可以采用放手让学生先思考、后讨论、再讲评的形式，教师可将部分学生的证明过程进行演示. 2. 问题 7：请同学独立完成，教师适时点拨，注意规范解题步骤.	1. 问题 6 的设计目的：本题的解法一方面体现线面垂直判定定理的应用，另一方面锻炼学生逆向思维的能力，由平面的轴对称过渡到空间的镜面对称，反映了转化和对称思想的广泛应用. 2. 问题 7 的目的：本题体现了线面垂直与实际问题的密切联系. 在学生书写解题过程中，可培养逻辑思维能力和运用数学语言的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳小结	1. 学生练习，练习 A，3，4. 2. 小结：(1) 线线垂直的定义；(2) 线面垂直的定义和判定定理；(3) 线面垂直的判定定理的应用.	学生总结.	使学生对本节所学知识有一个系统的认识.
布置作业	1. 练习 B，1，2，3. 2. 探究题：你能从空间对称的角度，再给出一个线面垂直判定定理的证明方法吗？	学生练习.	学生巩固本节所学知识方法.

案例 3　三视图

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：理解和掌握三视图的概念及画法，能识别简单物体的三视图，会画简单几何体（组合体）的三视图.

2. 过程与方法目标：

(1) 经历"从不同方向观察物体"的活动过程，培养学生的空间想象力，发展学生的空间思维能力，使他们能在与他人交流的过程中，合理清晰地表达自己的思维过程.

(2) 在学习的过程中体会通过图形位置及其变换来认识图形的思维方法，体会立体图形和平面图形间的转化关系，渗透应用数学的意识.

3. 情感、态度与价值观目标：培养用运动变化的眼光来分析问题的习惯，培养学生认真参与、积极交流的主体意识和乐于探索、勇于创新的科学态度.

（二）教学重点与难点

教学重点是三视图的概念和画法. 教学难点是三视图的画法，几何体与其三视图之间的关系.

（三）教学方法

问题解决、启发探究.

（四）教学过程

一、温故知新，复习引入

[复习 1]

中心投影与平行投影的区别是什么（结合课件 2114）？要画出一条线段的投影，只需画出它上面几点的投影？

[复习 2]

立体几何中几何体的直观图是根据哪一种投影画出的？

【问题 1】

在物体的平行投影中，如果投射线与投射面垂直，这样的平行投影有何特点？（结合课件 2114）

在物体的平行投影中，如果投射线与投射面垂直，则称这样的平行投影为正投影.

正投影除具有平行投影的性质外还有下列性质：

（1）垂直于投射面的直线或线段的正投影是点；

（2）垂直于投射面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分.

【问题 2】

在画正投影时，如图 1-10，和投影面垂直或平行的线段及矩形的正投影有什么特征（结合课件 2114）？

（垂直时：是点或线段；平行时：形状相同，长度和大小相同.）

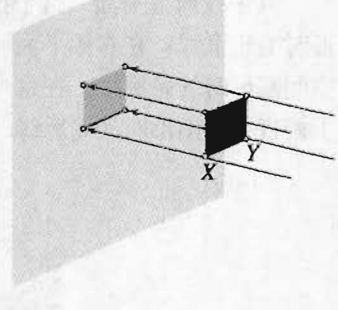


图 1-10

【问题 3】

读诗并思考诗人是怎样观察庐山的.

横看成岭侧成峰，远近高低各不同.

不识庐山真面目，只缘身在此山中.

（横看、侧看、近看、身处山中看，注意从不同的方向观察事物.）

二、设问激疑，探究新知

【问题 4】

这是什么？——观察模型（你自己的拳头）理解三个图的成图（图 1-11）过程（正投影）. 这种表示几何体的平面图形叫做视图（画几个称为几视图）.

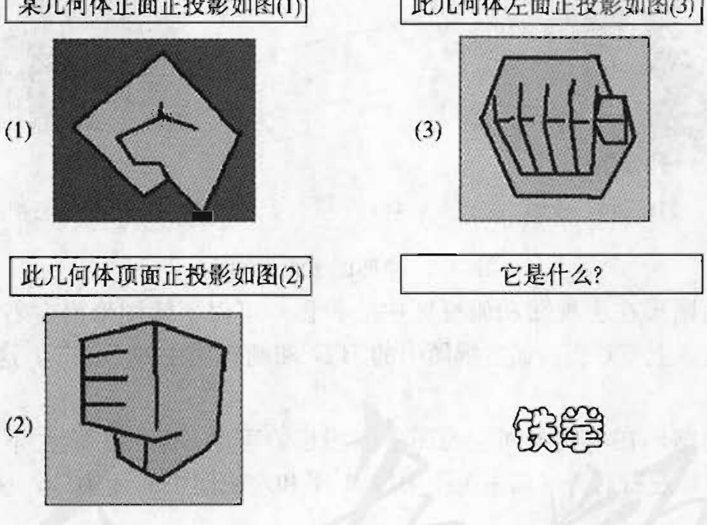


图 1-11

有了直观图为什么还要学习视图？请比较它们的优缺点.

（视图更真实地反映了几何体的形状和大小，可度量.）

为了更准确地反映空间图形的大小和形状，往往需要把图形向几个不同的平面分别作正投影，然后把这些投影图放在同一平面内，并有机地结合起来表示物体的形状和大小.

引出课题：用平面图形表示几何体的第二种常用方法——三视图.

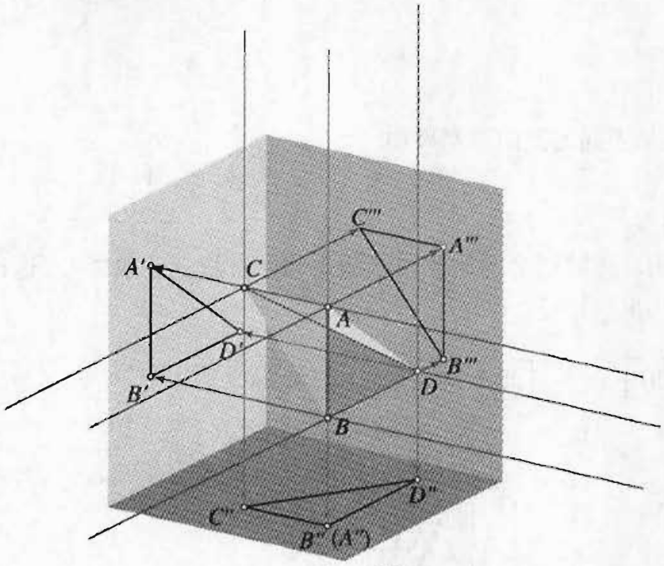
【问题 5】

通过研究画出几何体三视图的过程（学生动手操作课件 2115，如图 1-12）说明：

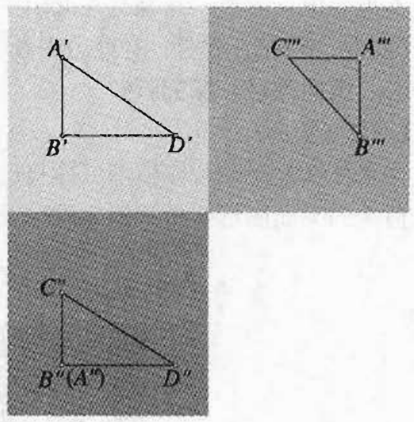
什么是三视图？每个视图有什么特征？每两个视图间有什么关系？

作出同一空间图形在三个两两垂直的平面（称为**投射面**）上（如长方体形教室中前方、右侧墙面和地面）的正投影，再像图 1-12（2）中那样把三种投影放在同一个平面内，得到的图形叫做空间图形的**三视图**（其中被面遮挡的轮廓线的正投影画成虚线）.

其中在前方平面（这个投影面叫**直立投射面**）上的正投影叫空间图形的**主视图**，它画出了正视空间图形时的轮廓线；在右侧平面（这个投影面叫**侧立投射面**）上的正投影叫空间图形的**左视图**，它画出了左视空间图形时的轮廓线；在水平平面（这个投影面叫**水平投射面**）上的正投影叫空间图形的**俯视图**，它画出了俯视空间图形时的轮廓线. 被面遮挡的轮廓线的正投影画成虚线. 工业上常使用这种方法绘制零件图.



(1) 三种正投影



(2) 三视图

图 1-12　空间图形的三视图

对照同一部分空间图形在主视图和俯视图中的投影，可以了解图形沿左右方向占据空间的情况（长），在画图时它们应该上下对正（如主视图中的 $B'D'$ 和俯视图中的 $B''D''$），这一关系常被称作“**长对正**”.

对照同一部分空间图形在主视图和左视图中的投影，可以了解图形沿上下方向占据空间的情况（高），在画图时它们应该左右对齐（如主视图中的 $A'B'$ 和左视图中的 $A'''B'''$），这一关系常被称作“**高平齐**”.

对照同一部分空间图形在俯视图和左视图中的投影，可以了解图形沿前后方向占据空间的情况（宽），在画图时要注意它们应该相等（如俯视图中的 $A''C''$ 和左视图中的 $A'''C'''$），这一关系常被称作“**宽相等**”.

（注意结合课件 2114，理解即可.）

三、反思交流，内化提高

【问题 6】结合基本例题体会：

怎样画出三视图？怎样由三视图想象几何体，并画出直观图？

［例 1］如图 1-13 所示的是一个零件的直观图（尺寸画图时自选），画出这个几何体的三视图.

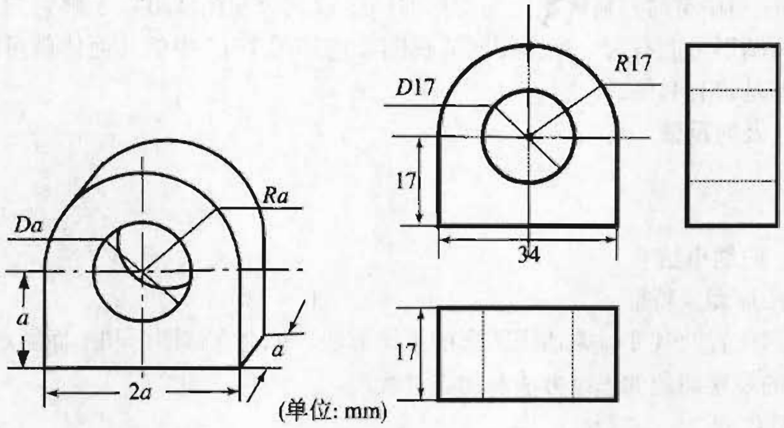


图 1-13　画几何体的三视图

分析：

画图时应注意：由体现形状特征的方向和可见轮廓线入手，抓住与投影面垂直或平行的线或面．注意长对正、高平齐、宽相等的规律．

［例 2］已知两个几何体的三视图如图 1-14，试画出它们的直观图．

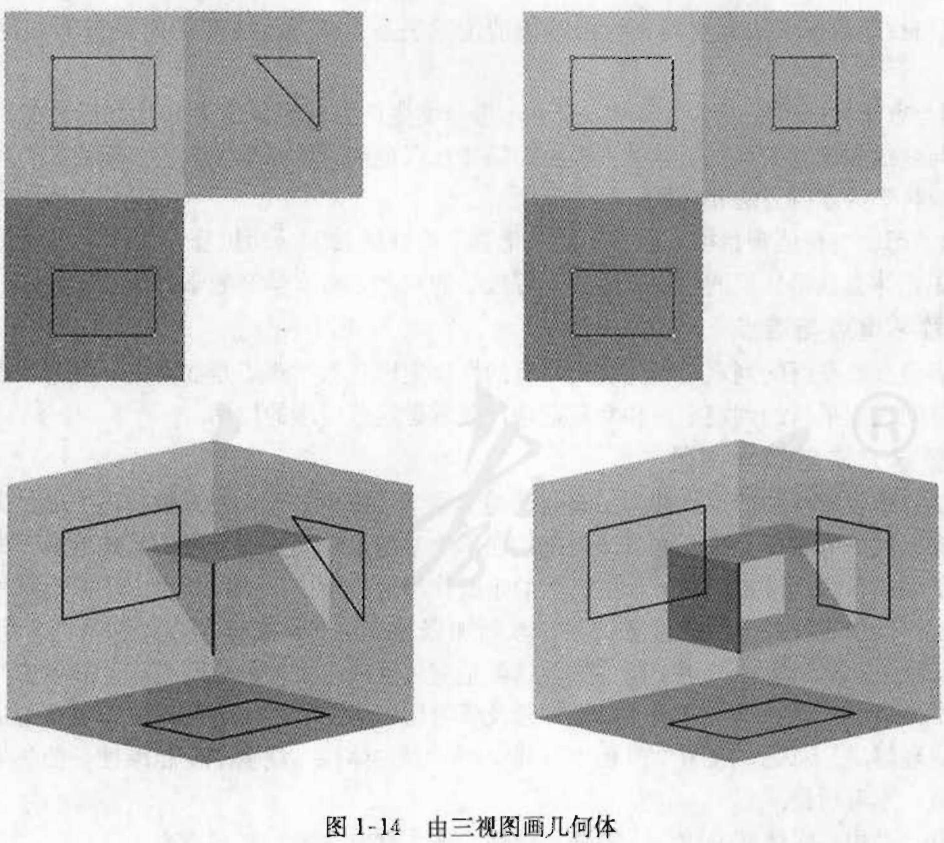


图 1-14　由三视图画几何体

[说明] 在实际应用中有时只需画出空间图形的一个或两个视图就可以了解它的形状和大小，但是有时两个不同的空间图形可能有两个完全相同的视图，例如图 1-14 中的几何体就可能是这样，因此掌握空间图形的三视图是很有必要的.

四、巩固练习、及时反馈

练习 A，1，2.

练习 B，2.

五、梳理新知，归纳小结

1. 三视图的作图原理及特征.
2. 体会通过图形位置及其变换来认识图形的思维方法，体会立体图形和平面图形间的转化关系.
3. 体会多角度的观察问题的思维方法和动态过程.

六、课后思考及作业

作业：习题 1-1A，5，6，习题 1-1B，1.

思考：几何体中的任意一条线段的长度都可以由三视图直接度量到吗?

七、课后记

案例 4　直线与平面平行

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：掌握空间直线与平面的位置关系；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理.

2. 过程与方法目标：通过本节学习，进一步培养学生的空间想象能力和几何论证能力. 通过复习平面内直线与直线的位置关系，引导学生提出问题并加以论证，培养学生归纳总结的能力和抽象概括能力，进而形成科学的思维方法和良好的思维品质.

3. 情感、态度与价值观目标：通过不断强化数学论证的教学活动过程，使学生不断由感性认识上升到理性认识，体会获得知识的愉悦，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心.

（二）教学重点与难点

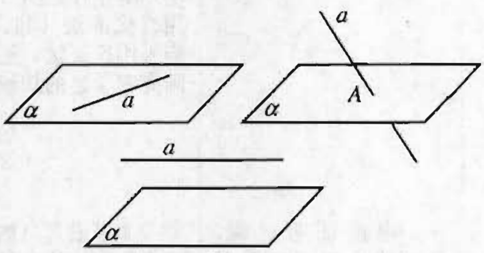
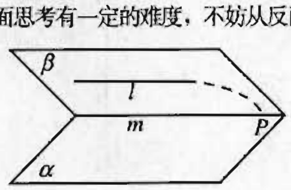
教学重点是线面平行的判定定理与线面平行的性质定理，教学难点是如何由平行公理以及其他基本性质，推出空间线面平行的判定定理和性质定理，并掌握这些定理的应用.

（三）教学方法与教学手段

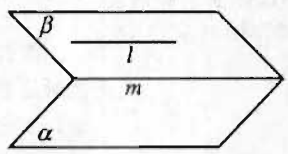
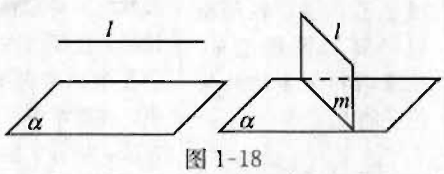
教学方法：结合教材的特点，并为了充分调动学生学习的积极性，使课堂教学生动、高效，教学中采取"问题探究式"的教学方法. 本节课内容是在学生学习了空间直线平行的基础上展开的，同时又为学习平面与平面的平行作准备，有着承上启下的重要作用. 教学中，引导学生由平面内直线与直线的位置关系总结出空间中直线与平面的位置关系，教师加以补充讲解. 在证明直线和平面平行的判定定理时，使用了反证法，思考题中使用了同一法，这都是立体几何中重要的证明方法，教学中注意渗透其数学思想，使学生进一步熟悉这些方法. 对于例题及练习题，引导学生结合线面位置关系的定义以及线面平行的两个定理解决. 总之，在教学过程中，要突出学生主体性，注重学生思维性，使学生积极投入进各个教学环节，学有所得.

教学手段：采用多媒体辅助教学，增强直观性，增大课堂容量，提高效率.

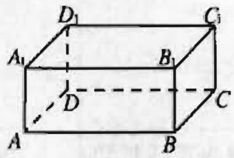
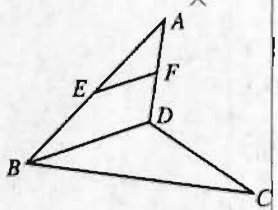
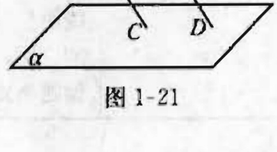
（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课题引入	复习 初中我们学习的直线与直线的位置关系有哪几种？ 引导学生从公共点的个数出发思考回答.	教师提问，学生复习回答.	由平面内直线与直线的位置关系引入，开门见山地切入课题，引出空间直线与平面的位置关系.
新课讲解	一、直线与平面的位置关系 （一）位置关系 1. 直线在平面内. 2. 直线不在平面内：直线与平面相交或直线与平面平行. （二）位置关系图示（图 1-15）  图 1-15 作图时注意： ①直线在平面内，应把直线画在表示平面的平行四边形内，直线不要超过平行四边形边线； ②线面相交，被平面遮住的部分不画或画成虚线； ③线面平行，直线要与表示平面的平行四边形的一组对边平行. （三）符号表示 直线 a 在平面 α 内，记做 $a\subset\alpha$； 直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作 $a\cap\alpha=A$； 直线 a 与平面 α 平行，记作 $a//\alpha$. 二、直线和平面平行的判定定理与性质定理 （一）思考 与一个确定平面没有公共点的直线是否存在，如何判定？ （二）数学分析（反证） 从正面思考有一定的难度，不妨从反面想一想.  图 1-16	由复习引入让学生展开讨论，归纳总结线面位置关系，然后教师讲解，给出必要的说明. 多媒体演示画法，并强调作图时应注意的问题. 教师讲解线面位置关系的符号表示. 提示学生从反面思考问题，让学生积极思考回答，教师给以必要的说理论证，注重培养学生的几何论证能力.	引导学生由平面基本性质与平行公理发散思维，不断提出问题并解决问题，可以活跃课堂气氛，激发学生的学习兴趣，培养学生的空间想象能力和归纳总结的能力. 能否直观准确地画出空间图形是学好立体几何的重要方面，演示正确画法并指出常见错误，规范学生的作图，培养学生的作图能力. 指导学生正确使用数学符号语言. 反证法是数学中一种重要的思想方法，从反面考虑问题常常能出奇制胜，达到证明的目的，反证法在社会实践和数学各个领域都有着广泛的应用，在教学中注意渗透其思想方法，培养学生利用反证法证明问题的数学品质.

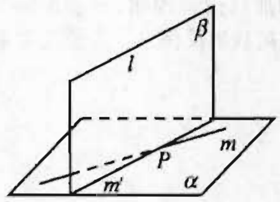
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲解	已知：如图 1-16，$l\not\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，$m/\!/l$. 求证：$l/\!/\alpha$. 证明：如果 l 和 α 相交，设 $l\cap\alpha=P$. l 与 m 确定一个平面 β，则 P 在交线 m 上，于是 l 和 m 相交，这与 $l/\!/m$ 矛盾. 因此 $l/\!/\alpha$. （三）思考 如果已知线面平行，那么不在平面内的直线与平面内的直线位置关系怎样? 学生思考，总结规律. （四）数学证明 已知：如图 1-17，$l/\!/\alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=m$. 求证：$l/\!/m$.  图 1-17 证明：因为 $l/\!/\alpha$，所以 l 和 α 没有公共点. 又因为 $m\subset\alpha$，所以 l 和 m 也没有公共点. 因为 l 和 m 都在平面 β 内且没有公共点，所以 $l/\!/m$. （五）定理 判定定理：如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行. 判定定理可用符号表示为 $\left.\begin{array}{l}a\not\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha.$ 性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和两平面的交线平行. 性质定理可用符号表示为 $\left.\begin{array}{l}a/\!/\alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b.$ （六）线面平行画法（图 1-18）  图 1-18 画线面平行，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形外面，使它与平行四边形的一条边平行或与平行四边形内的一条线段平行.	学生思考回答，教师通过多媒体演示各种位置关系．师生共同探讨，教师根据学生反馈加以点评. 根据证明过程，教师给出定理内容以及符号记法，加深学生对定理的理解并强化记忆. 多媒体演示线面平行的画法.	由判定定理到性质定理，培养学生逆向思维的思维品质. 师生共同探讨，证明定理的过程也是解决证明线线平行问题的过程，我们已掌握的方法是平行定义及公理 4，然后引导学生选择适当的方法证明，学生在证明过程中可能采用直接证法（如课本），也可能采用反证法，通过教学，不断完善学生的知识结构. 文字语言自然、生动，它能将问题所研究对象的含义明白的表述出来，图形语言易引起清晰的视觉形象，它能直观的表达概念、定理，在抽象的数学思维面前起着具体化和加深理解的作用，各种数学语言互译有利于培养学生思维的广阔性.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	练习： 1. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中（图1-19），有哪些线面平行的位置关系？  图1-19	多媒体演示图形，学生看图回答.	练习1是利用线面平行的判定定理来解答的问题，问题设置为开放性问题，可以使学生广泛思考.
	2. 判断题： （1）如果直线a平行于直线b，则a平行于经过b的任何平面. × （2）如果一条直线不在平面内，则这条直线就与这个平面平行. × （3）如果一条直线与平面平行，则它与平面内的任何直线平行. × （4）平行于同一个平面的两条直线互相平行. ×	多媒体打出练习，给学生几分钟思考时间，然后回答，正确的命题加以论证说明，不正确的找出反例.	练习2是一组判断题，容易引起学生的兴趣，但要注意纠正学生常见的错误，并进一步加深学生对前面空间直线的位置关系的理解.
巩固提高	例1　已知：如图1-20，空间四边形$ABCD$，E，F分别是AB，AD的中点. 求证：EF∥平面BCD.  图1-20		例1利用线面平行判定定理，例2利用线面平行性质定理，及时巩固当堂所学内容.
	证明：连接BD， 在$\triangle ABD$中， 因为E，F分别是AB，AD的中点， 所以$EF/\!/BD$. 又因为平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，$EF\not\subset$平面BCD， 所以EF∥平面BCD. 例2　已知：如图1-21，AB∥平面α，$AC/\!/BD$，且AC，BD与α分别相交于点C，D. 求证：$AC=BD$.  图1-21	多媒体打出例题，学生分析证明，教师选择典型证明方法展示，讲解并给出规范做题步骤. 讲解中注意指导学生如何由文字语言转化为符号语言，并正确画图.	欲证线面平行，须证出此直线与平面内的一条直线平行. 若寻求此直线，中位线是常用的，此题就是利用三角形中位线证得.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
巩固提高	证明：因为 $AC/\!/BD$，所以 AC 与 BD 确定一个平面 β，且与平面 α 相交于 CD. 因为 $AB/\!/$平面 α，过 AB 的平面 β 与 α 相交于 CD，所以 $AB/\!/CD$. 又因为 $AC/\!/BD$，所以 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $AC=BD$.		
思考	思考：过一个平面内的一点作一条直线，使它平行于与该平面平行的一条直线，所作直线是否在平面内？ 已知：如图 1-22，$l/\!/\alpha$，点 $P\in\alpha$，$P\in m$，$m/\!/l$. 求证：$m\subset\alpha$.  图 1-22 证明：设 l 与 P 确定平面 β，且 $\alpha\cap\beta=m'$，则 $l/\!/m'$. 又知 $l/\!/m$，$m\cap m'=P$，由平行公理可知，m 与 m' 重合. 所以 $m\subset\alpha$.	本题为灵活机动题，视课堂时间而定，教师提出问题，学生思考回答，并加以验证.	该题为课本例题 2，学生容易直观猜想出结论，注意引导学生加以论证，培养学生严密的思维品质.
小结	知识点小结 1. 直线与平面的位置关系； 2. 线面平行的判定定理，关键是在平面内找到一条直线与已知直线平行； 3. 线面平行的性质定理，前提是线面平行，关键是找准线、面和交线.	学生归纳总结，教师加以补充与强调说明.	使学生对本节所学知识有一个系统的认识，分清两个定理的作用并会利用定理解决问题.
布置作业	练习 A 及练习 B，1，2 题，做在课本上；练习 B，3，4 题，做在作业本上.		练习 A 及练习 B，1，2 为线面位置关系与线面平行基础练习，学生可利用较少时间完成，并能达到温习回顾课堂知识的目的. 练习 B，3，4 为线面平行判定定理与性质定理的应用，复习课堂知识并规范做题格式.

（此案例已刻成光盘）

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 5 页）

1. 把直尺放在一个面的各个方向上，看直尺的边缘与这个面有无空隙，如果不出现空隙就可以判断这个面是平面的一部分.
2. 略.
3. 略.
4. (1) √；(2) ×；(3) ×.

练习 B（第 5 页）

略.

练习 A（第 8 页）

1. 略.
2. 长方形.
3. 是；不一定是.
4. 略.

练习 B（第 8 页）

1. 直四棱柱.
2. $A\subsetneqq B\subsetneqq C\subsetneqq D$.

练习 A（第 10 页）

1. 略.
2. 不一定.
3. 是.

练习 B（第 11 页）

1. 略.
2. 都是.
3. (1) $\sqrt{178}$；(2) $11\sqrt{57}$；(3) 228.
4. $\sqrt{22}$ cm.

练习 A（第 13 页）

1. 略.
2. 矩形.
3. 扇形、扇环.
4. 20.
5. $10\sqrt{3}$ cm.

练习 B（第 13 页）

1. 略.
2. 略.
3. 4.
4. $10\sqrt{3}$ cm，625π cm^2.

练习 A（第 16 页）

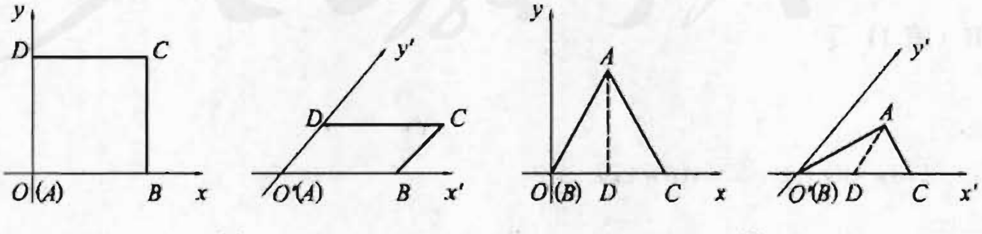
1. 1.852 km.
2. 24 cm.
3. 图中有圆柱、圆锥、圆台、棱柱等几何体.

练习 B（第 16 页）

1. 略.
2. 直线与球有三种位置关系：相离——无公共点或球心到直线的距离大于球半径；
   相切——有且只有一个公共点或球心到直线的距离等于球半径；
   相交——有多于一个公共点或球心到直线的距离小于球半径.
3. 3.

练习 A（第 20 页）

1. （1）不正确；（2）不正确；（3）不正确；（4）正确.
2. 画出投影三角形的两条中线的交点即是.
3. 如图.



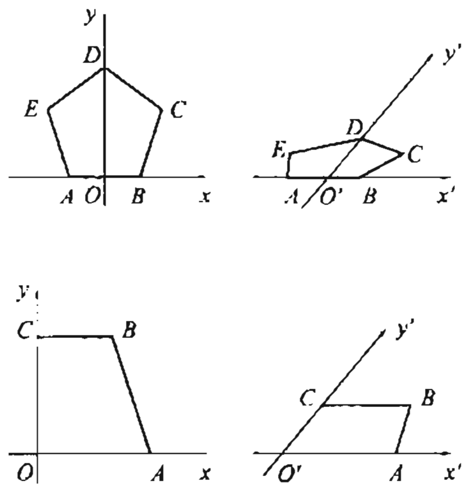
（第 3 题）

4. 略.

练习 B（第 21 页）

1. （1）正确；（2）不正确.

2.



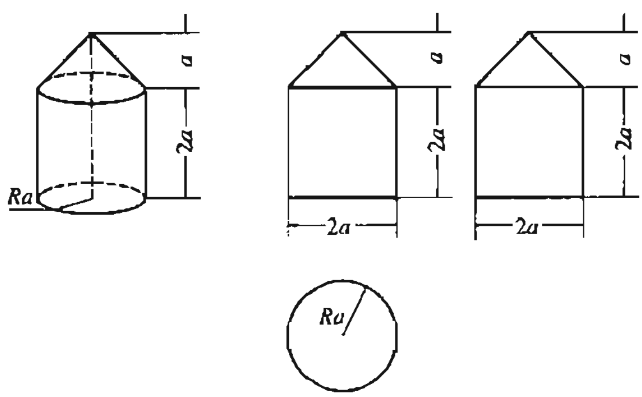
（第 2 题）

3. 图略.

4. 图略.

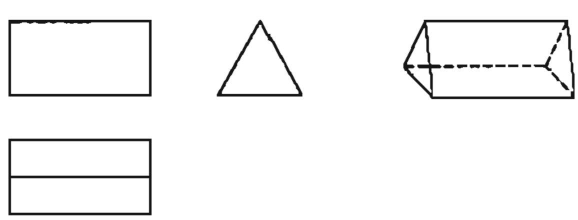
练习 A（第 24 页）

1.



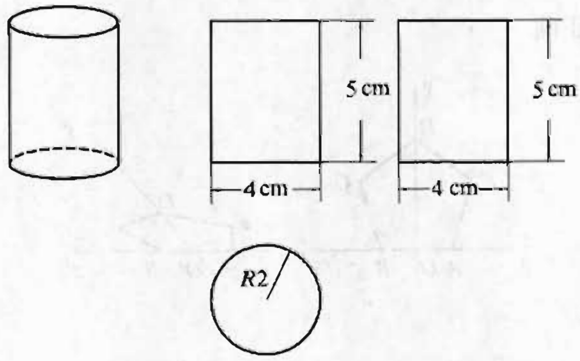
（第 1 题）

2.



（第 2 题）

3.

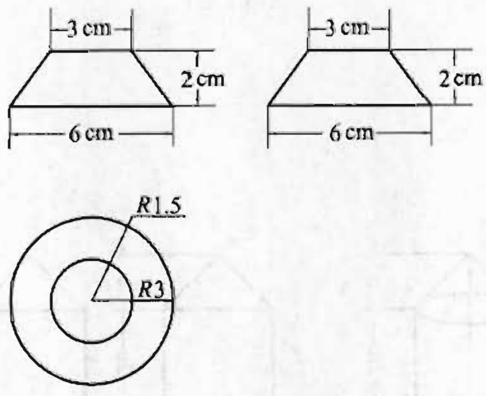


（第 3 题）

4. 可参考课本 24 页练习 A 第 2 题的图形．图略．

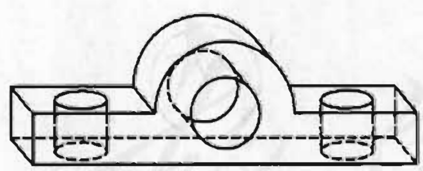
练习 B（第 24 页）

1.



（第 1 题）

2.



（第 2 题）

练习 A（第 28 页）

1. $S_{全}=3a(2h+\sqrt{3}a)$.

2. $S_{侧}=12\sqrt{3}$，$S_{全}=16\sqrt{3}$.

3. $80+48\sqrt{15}\ \text{cm}^2$.

4. 因为 $2\pi R=16\pi$，所以 $R=8$，$S=4\pi R^2=4\pi\times 64=256\pi\ \text{cm}^2$.

练习 B（第 28 页）

1. $\frac{\pi}{2}$.

2. 3.4 m^2.

3. (1) $4:1:3$；(2) $144\sqrt{2}$ cm^2，$144\sqrt{2}+120\sqrt{3}$ cm^2.

练习 A（第 32 页）

1. 4.

2. $\frac{1}{3}$.

3. 增为原来的 1 000 倍.

练习 B（第 32 页）

1. $\pi:4$.

2. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

3. 75 cm.

习题 1-1A（第 32 页）

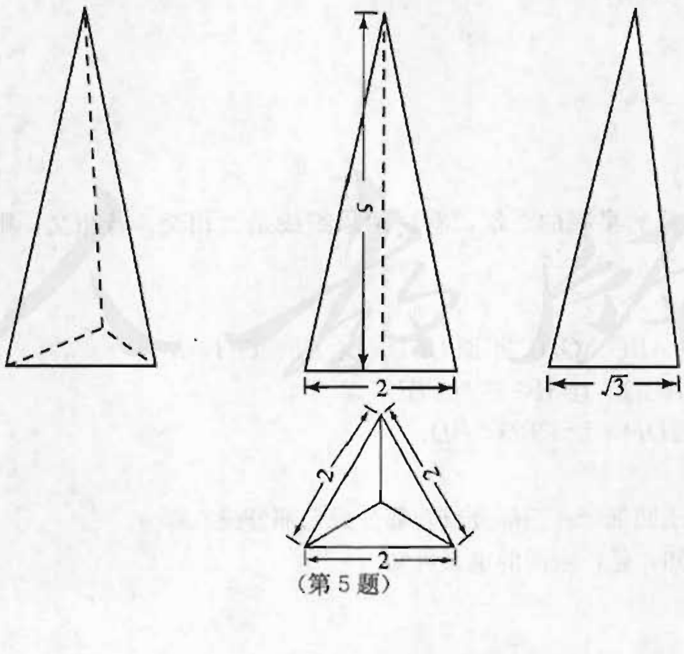
1. 棱柱的侧棱垂直于底面（或相邻侧面垂直于底面）；底面是正多边形.

2. $1:(\sqrt{2}-1)$或$(\sqrt{2}-1):1$.

3. $\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$.

4. (1) 都在同一直线上（有可能是重合的点）；(2) 长度不变化；成比例；(3) 在一条直线上.

5. 如图.



（第 5 题）

6. 图略.

7. 长$=20$ cm，宽$=10$ cm，高$=5$ cm.

8. 1 cm.

9. $8\sqrt{2}$ cm^3.

10. $2\ 250\sqrt{3}$ cm^3.

11. 8 倍；地球的体积约为 1.083×10^{12} km^3，火星的体积约为 1.353×10^{11} km^3.

习题 1-1B（第 33 页）

1. $(24+8\sqrt{3})$ mm^2.

2. 5 倍；$\sqrt{5}$倍.

3. 1 : 4.

4. $\frac{1}{6}a^3$.

5. $\frac{1}{4}\pi a^3$.

6. 12π cm^3.

7. 约 1 315 倍.

练习 A（第 38 页）

1. (1) 正确；　(2) 正确；　(3) 不正确；　(4) 不正确.

2. 由公理 1 可知，直线 AB 在平面 α 内.

3. 基本性质 2.

4. 因为平行四边形中有一组对边分别平行，可确定一个平面；梯形有一组对边平行，也可确定一个平面.

5. 平行，相交，异面.

6. 略.

练习 B（第 38 页）

1. 用细线连接不相邻的桌腿的下端，看这两条细线是否相交，若相交，则在同一平面内，否则不然.

2. 点 M 在交线 BD 上.

   因为　$EF\subset$平面 ABD，$GH\subset$平面 CBD，又 $EF\cap GH=M$，

   所以　$M\in$平面 ABD，且 $M\in$平面 CBD.

   又因为　平面 $ABD\cap$平面 $CBD=BD$，

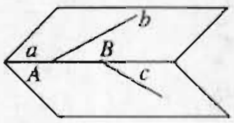
   所以　$M\in BD$.

3. 两部分；三部分或四部分；四部分或六部分或七部分或八部分.

4. 是，由推论 2 可知；是，由圆的定义可知.

5. SA 与 BC；SB 与 AC；SC 与 AB.

6. （1）$A\in l$，$B\notin l$.（2）$l\subset\alpha$，$m\not\subset\alpha$，$m\cap\alpha=M$.（3）$\alpha\cap\beta=l$，$A\in l$.

7. 

练习 A（第 41 页）

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开后（如教科书图所示）得 4 个全等的矩形，每个矩形的竖边是互相平行的，再应用公理 4，可知它们的折痕是互相平行的.

2. 提示：$\left.\begin{array}{l}AA'/\!/BB'\\AA'=BB'\end{array}\right\}\Rightarrow AA'B'B$ 是平行四边形 $\Rightarrow AB=A'B'$.

同理可证 $BC=B'C'$，$AC=A'C'$. 因此$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

练习 B（第 41 页）

1. （1）不正确；（2）不正确.

2. 证明：在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点.

所以 $EF/\!/AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$.

同理 $HG/\!/AC$，$HG=\frac{1}{2}AC$，所以 $EF/\!/HG$，$EF=HG$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又因为 $EF=\frac{1}{2}AC$，$EH=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

所以 $EF=EH$. 所以四边形 $EFGH$ 是菱形.

练习 A（第 43 页）

1. 直线在平面内、直线与平面平行、直线与平面相交.
2. 无数条（且共面）.
3. 是. 因为 $CD/\!/AB$，由直线和平面平行的判定定理，可知 CD 与桌面所在的平面平行.
4. （1）平面 $A'C'$，平面 DC'；（2）平面 $B'C$，平面 DC'；（3）平面 $A'C'$，平面 BC'.

练习 B（第 44 页）

1. （1）不正确；　（2）正确.
2. （1）不正确. 直线不在平面内包括直线与平面平行或者直线与平面相交；

   （2）正确（直线和平面平行的判定定理）；

   （3）不正确. 若直线 $a/\!/\alpha$，过 a 作平面 β 交平面 α 于直线 l，在平面 α 内过 l 上一点作一条与 l 相交的直线 b，则 a 与 b 不平行.
3. 证明：因为 $AC/\!/BD$，所以 AC，BD 可以确定一个平面 AD.

又 $AB /\!/$ 平面 α，平面 $\alpha \cap$ 平面 $AD=CD$，所以 $AB /\!/ CD$，又 $AC /\!/ BD$，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AC=BD$.

4. 证明：连接 BD. 在矩形 $BB'C'C$ 中，$BB' \underline{/\!/} CC'$，

   同理，在矩形 $DD'C'C$ 中，$DD' \underline{/\!/} CC'$，

   所以 $BB' \underline{/\!/} DD'$.

   所以 四边形 $BB'D'D$ 是平行四边形，

   所以 $B'D' /\!/ BD$，又因为 $B'D' \not\subset$ 平面 $ABCD$，

   所以 $B'D' /\!/$ 平面 $ABCD$.

练习 A（第 46 页）

1. (1) 正确；(2) 不正确；(3) 正确；(4) 不正确；(5) 不正确.
2. 是. 作相交平面 ρ，π，分别与平面 α，β，γ 相交于直线 a_1，b_1；a_2，b_2；a_3，b_3.

   因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 $a_1 /\!/ a_2$，$b_1 /\!/ b_2$，

   又 $\beta /\!/ \gamma$，所以 $a_2 /\!/ a_3$，$b_2 /\!/ b_3$.

   所以 $a_1 /\!/ a_3$，$b_1 /\!/ b_3$.

   因此 平面 $\alpha /\!/$ 平面 γ.

（第 2 题）

3. 平面与平面有两种位置关系：一种情形是相交，此时两个平面有无数多个公共点，且这些公共点的集合是一条直线；另一种情形是平行，此时两个平面无公共点.
4. (1) 证明：设直线 PAB 与直线 PCD 确定平面 γ.

   则 $\alpha \cap \gamma = AC$，$\beta \cap \gamma = BD$.

   因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 $AC /\!/ BD$.

   (2) $\dfrac{27}{4}$ cm.

练习 B（第 47 页）

1. (1) 正确；

   (2) 不正确. 只有直线与平面平行时，过直线与平面平行的平面有且只有一个；当直线与平面相交时，过直线不能作出与已知平面平行的平面.
2. 已知：平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，AB 和 CD 为夹在 α，β 间的平行线段.

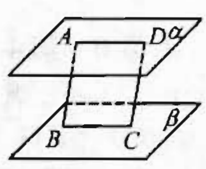
   求证：$AB=CD$.

   证明：因为 $AB /\!/ CD$，所以 AB 和 CD 确定平面 AC.

   又因为直线 AD，BC 分别是平面 AC 与平面 α，β 的交线，

   所以 $AD /\!/ BC$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

   因此 $AB=CD$.



（第 2 题）

3. $\dfrac{15}{4}$ cm；$\dfrac{45}{4}$ cm；15 cm.

练习 A（第 51 页）

1. 不对，有无数条. 因为过该点可以作一个与已知直线垂直的平面，根据线面垂直的定义，在这个平面内的任何直线都与已知直线垂直，所以过该点有无数条直线与已知直线垂直.
2. (1) 平面 AC，平面 A_1C_1；
   (2) 平面 BC_1，平面 AD_1；
   (3) 平面 DC_1，平面 AB_1.
3. 因折痕和桌面与纸的交线都垂直，由直线和平面垂直的判定定理可知，折痕和桌面互相垂直.
4. (1) 垂直. 因为三角形的任意两条边都相交，根据直线和平面垂直的判定定理可知，这条直线与这个平面垂直；
   (2) 不一定垂直. 若这条直线垂直梯形相邻的两条边，则该直线与梯形所在平面垂直；若这条直线垂直梯形的上、下底所在的直线，则该直线未必与梯形所在平面垂直；
   (3) 垂直. 因为圆的任意的两条直径都相交，根据直线和平面垂直的判定定理可知，这条直线与这个平面垂直.
5. 不可以.（反证法）若三角形的两条边能垂直同一个平面，根据直线和平面垂直的性质可知，则这两条边平行与三角形的性质相矛盾.
6. (1) 正确； (2) 正确； (3) 不正确.

练习 B（第 51 页）

1. 不正确. 因为直线 b 有可能在平面内或者与平面相交或者与平面平行.
2. 已知：$OA\perp OB$，$OA\perp OC$，$OB\perp OC$.
   求证：$OA\perp$平面 BOC.
   证明：因为 $OA\perp OB$，$OA\perp OC$，又 $OB\cap OC=O$.
   所以 $OA\perp$平面 BOC.
3. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $OD=OB$.
   又因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$.
   同理 $PO\perp AC$. 所以 $PO\perp\alpha$.
4. 证明：取 BC 的中点 E，连接 AE，DE.
   因为 $AB=AC$，所以 $AE\perp BC$.
   因为 $DB=DC$，所以 $DE\perp BC$.
   所以 $BC\perp$平面 AED，所以 $BC\perp AD$.
5. 垂直.

练习 A（第 54 页）

1. 提示：折叠时可以利用两个直角三角板，将它们的直角顶点和一条直角边重合，两块三角板不共面，其中一个三角板的另一条直角边对齐折痕即可.
2. 垂直.
3. (1) 不正确；
   (2) 不正确. 当直线与平面垂直时，可作无数个；当直线与平面斜交时，只能作一个.

4. 证明：因为 $OX \perp OY$，$OX \perp OZ$，所以 $OX \perp$ 平面 YOZ.
又因为 $OX \subset$ 平面 XOY，所以平面 $XOY \perp$ 平面 YOZ.
同理 平面 $XOY \perp$ 平面 ZOX；平面 $YOZ \perp$ 平面 ZOX.

练习 B（第 55 页）

1. 略.
2. 根据直线与平面垂直的判定定理可知. 如果不转动，紧靠在工件的曲尺的一边未必垂直于平面.
3. 过 P 做 CD 的平行线分别交 AC，AD 于 E，F，则线段 $EF \perp AB$. 取 CD 的中点 M，连接 AM，BM.
因为 $CD \perp AM$，$CD \perp BM$，所以 $CD \perp$ 平面 ABM. 所以 $CD \perp AB$.
因为 $EF /\!/ CD$，所以 $EF \perp AB$.

习题 1-2A（第 55 页）

1. (1) 不正确. 因为平面是无限延展的；
(2) 不正确. 因为两个相交平面的公共点是由无数个点组成的，且它们的集合是两个平面的交线；
(3) 不正确. 因为不共线的三点有且只有一个平面；
(4) 正确. 因为不共线的三点确定一个平面.
2. (1) 不共线；　(2) 平行，相交；　(3) 过该点的；　(4) 异面.
3. 不一定. 因为有可能四个端点不共面.
4. 共面.
5. (1) 正确；(2) 不正确.
6. 证明：在 $\triangle ABC$ 中，$BE=EA$，$BF=FC$.
所以 $EF /\!/ AC$.
又因为 $AC \not\subset$ 平面 EFG，所以 $AC /\!/$ 平面 EFG.
同理可证 $FG /\!/ BD$，所以 $BD /\!/$ 平面 EFG.
7. (1) 正确；(2) 不正确；(3) 不正确；(4) 正确.
8. 证明：如教科书图.
因为 $AB /\!/ \alpha$，过 AB 的一个平面交平面 α 于 a.
所以 $AB /\!/ a$.
同理 $AB /\!/ b$，$AB /\!/ c$，所以 $a /\!/ b /\!/ c$.
9. 证明：连接 EE'，FF'，可得矩形 $A'AFF'$ 和矩形 $E'EAA'$.
由此可得 $EE' \underline{/\!/} AA' \underline{/\!/} FF'$.
所以四边形 $EE'F'F$ 是平行四边形.
所以 $EF \underline{/\!/} E'F'$.
10. 共 8 条：AA'，BB'，CC'，DD'，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.
11. 证明：因为 $a /\!/ b$，$b \subset \beta$，$a \not\subset \beta$，所以 $a /\!/ \beta$.
又 $a \subset \alpha$，$\alpha \cap \beta = l$，所以 $a /\!/ l$.

同理 $b/\!/l$.

12. 证明：因为 $EA\perp\alpha$，$CD\subset\alpha$，所以 $EA\perp CD$.

同理 $EB\perp CD$，所以 $CD\perp$平面 EAB. 所以 $CD\perp AB$.

习题 1-2B（第 56 页）

1. 无数个；无数个；一个.
2. （1）正确；（2）不正确.
3. 不能共线.
4. 三个平面；三个平面.
5. （1）不是；是.

（2）平行四边形.

6. 证明：因为 $\alpha/\!/\beta$，且 AB 与 $A'B'$ 共面，所以 $AB/\!/A'B'$.

所以$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{PA}{PA'}$.

同理$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{PA}{PA'}$，$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{PB}{PB'}$.

又 $AB/\!/A'B'$，所以$\dfrac{PA}{PA'}=\dfrac{PB}{PB'}$.

所以$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

所以$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

7. 证明：连接 DE，BC，直线 AB、AC 可以确定面 ABC.

因为 $\alpha/\!/\beta$，且平面 $ABC\cap\alpha=DE$，平面 $ABC\cap\beta=BC$.

所以 $DE/\!/BC$，所以$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

8. 证明：因为 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$.

又因为 AB 是圆的直径，所以 $AC\perp BC$，又因为 $PA\cap AC=A$.

所以 $BC\perp$平面 PAC.

9. 证明：（1）因为 $AC=AD$，$CE=ED$，所以 $AE\perp CD$.

同理 $BE\perp CD$. 所以 $CD\perp$平面 ABE.

又 $CD\subset$平面 BCD.

所以平面 $ABE\perp$平面 BCD.

（2）由（1）知 $CD\perp$平面 ABE，所以平面 $ABE\perp$平面 ACD.

10. 三角形、四边形、五边形、六边形.（可结合课件 2117）
11. （1）$\dfrac{9}{2}\ \text{cm}^3$；（2）略；（3）略.

巩固与提高（第 59 页）

1. 存在. 如球、正方体等.

2. 略.

3. (1) 假；(2) 真；(3) 假；(4) 真；(5) 假；(6) 真；(7) 真；(8) 真；(9) 假.

4. 13 cm.

5. 20 cm^2，80 cm^2，180 cm^2.

6. 4 条；0 条；18 条.

设 n 棱柱 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_n\text{-}B_1B_2B_3B_4\cdots B_n$.

不妨从 A_3 开始考虑，A_3 可以与下底面上除了 B_3，B_2，B_4 以外的任何一个顶点构成一条体对角线，共有 $n-3$ 条、A_1，A_2，A_4，…依次类推，所以共有 $n(n-3)$ 条. 对五棱柱是适用的.

7. 证明：如果 a，b，c 中有两条直线交于一点 P.

不妨设 $a\cap b=P$，即 $P\in a$、$P\in b$、那么 $P\in\alpha$、$P\in\gamma$.

则 P 在平面 α 和平面 γ 的交线 c 上，即 a，b，c 交于一点 P.

如果 a，b，c 中任意两条都不相交.

那么，因为任意两条都共面，所以 $a/\!/b/\!/c$.

8. 解：因为 $8^2+6^2=10^2$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

因为球心 O 在平面 ABC 内的射影 M 是$\triangle ABC$ 所在截面圆（外接圆）的圆心.

所以 M 是直角三角形斜边 AB 上的中点，且 $OM\perp AB$.

在 Rt$\triangle OAM$ 中，$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

所以球心 O 到平面 ABC 的距离是 12.

自测与评估（第 60 页）

1. (1) 假；(2) 假.

2. (1) 两个定点连线的中垂面；(2) $\sqrt{2a^2+b^2}$；(3) 垂直.

3. 26.

4. $300\sqrt{3}(\sqrt{37}-1)+3\,200\pi$；$6\,000(4\pi-\sqrt{3})$.

5. $(420-81\pi)$ cm^2.

六、反馈与评价

（一）知识与方法测试（100 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列命题中正确的是（　　）.

(A) 四棱柱是平行六面体　　(B) 直平行六面体是长方体

(C) 六个面都是矩形的六面体是长方体　　(D) 底面是矩形的四棱柱是长方体

2. 如果一个水平放置的图形的斜二测直观图是一个底角为 45°，腰和上底均为 1 的等腰梯形，那么

原平面图形的面积是（　　）.

(A) $2+\sqrt{2}$　　(B) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　(D) $1+\sqrt{2}$

3. 若正方体的所有顶点都在球面上，则球的体积与正方体体积之比是（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　(C) $\sqrt{3}\pi$　　(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

4. 已知点 A，直线 a，平面 α：

①$A\in a$，$a\not\subset\alpha\Rightarrow A\notin\alpha$；②$A\in a$，$a\in\alpha\Rightarrow A\in\alpha$；③$A\notin a$，$a\subset\alpha\Rightarrow A\notin\alpha$；④$A\in a$，$a\subset\alpha\Rightarrow A\subset\alpha$.

以上命题表述正确的真命题的个数是（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 给定下列命题：

(1) 若一直线垂直于一个平面，则此直线垂直于平面内的所有直线.

(2) 若一直线平行于一个平面，则此直线平行于平面内的无数条直线.

(3) 若一直线与一个平面不垂直，则此直线与平面内的直线不垂直.

(4) 若一直线与一个平面不平行，则此直线与平面内的直线不平行.

其中错误的命题个数是（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 已知直线 $l\perp$平面 α，直线 $m\subset$平面 β，有下面四个命题：

①$\alpha/\!/\beta\Rightarrow l\perp m$；②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l/\!/m$；③$l/\!/m\Rightarrow\alpha\perp\beta$；④$l\perp m\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

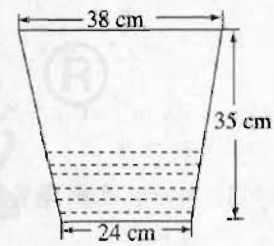
其中正确的两个命题是（　　）.

(A) ①与②　　(B) ③与④　　(C) ②与④　　(D) ①与③

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 已知正四棱锥底面外接圆半径为 5 cm，斜高为 6 cm，则棱锥侧面积为______，体积为______.

8. 降水量是指水平地面上单位面积降雨水的深度，用上口直径为38 cm，底面直径为 24 cm，深度为 35 cm 的圆台形水桶（轴截面如图所示）来测量降水量，如果在一次降雨过程中，此桶盛得的雨水正好是桶深的$\frac{1}{7}$，则本次降雨的降水量是______（精确到 1 mm）.



（第 8 题）

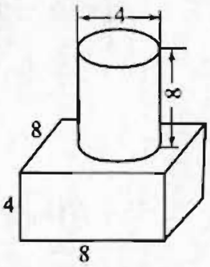
9. 两两平行的三条直线，最多可确定______个平面，这些平面把空间分成______部分.

10. α，β是两个不同的平面，m、n 是平面α 及β 之外的两条不同的直线，给出四个论断：①$m\perp n$；②$\alpha\perp\beta$；③$n\perp\beta$；④$m\perp\alpha$.

以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：__________.

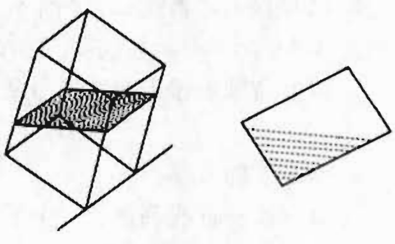
三、解答题（共 50 分）

11.（满分 12 分）李林发现家庭作业中的几何体图形不清楚，他打电话给同学张明请求帮助，张明面对如图的几何体应如何描述.



（第 11 题）

12.（满分 12 分）如图，在透明塑料做成的长方体容器中灌进一些水，固定容器的一边将其倾倒，随着容器的倾斜度不同，水的各个表面的图形的形状和大小也不同. 试尽可能多地找出这些图形的形状和大小之间所存在的各种规律（不少于 3 种）.

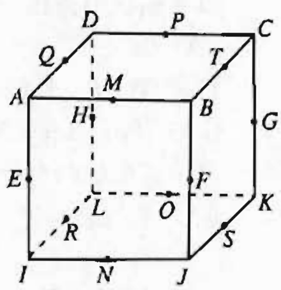

（第 12 题）

13.（满分 12 分）试给出一些命题（至少三个），在二维空间中是真的，在三维空间中也是真的.

14.（满分 14 分）如图，正方体有 8 个顶点和 12 条棱，每条棱上均有一个中点，于是有棱的中点 12 个，顶点与中点合起来共有 20 个. 过其中的两点可作一条直线；过其中不在一直线上的三点可作一个平面.

(1) 试举出一直线与一平面相互垂直的例子（不少于 5 例）；

(2) 试举出两个平面互相垂直的例子（不少于 5 例）.



（第 14 题）

知识与方法测试参考答案

一、1. C.　　2. A.　　3. A.　　4. A.　　5. C.　　6. D.

二、7. $60\sqrt{2}$ cm²，$\frac{25\sqrt{94}}{3}$ cm³.　　8. 22 mm.　　9. 三，七.

10. $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\perp\beta\Rightarrow m\perp n$ 或 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

三、解答题

11. 解析：本题需要对上述几何体作出语言上的描述，有一个语言组织的问题，这里给出如下两种描述：

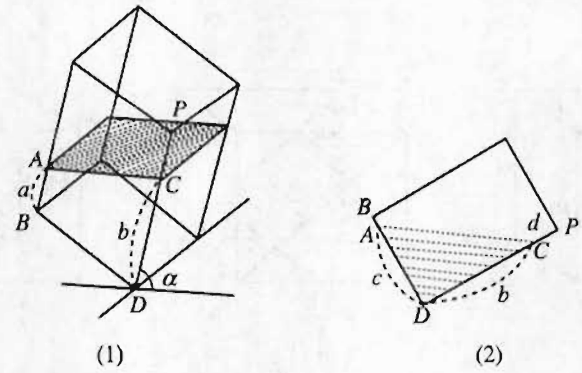
(1) 有一个长方体，它的底面为 8×8 的正方形，高为 4，以上底面的对角线交点为圆心，2 为半径画一个圆. 这个圆的上面有一个高为 8 的圆柱. 也就是说，这个圆柱的下底面恰好与所画的圆重合.

(2) 这个几何体由两部分组成，上面为圆柱体，下面为长方体. 长方体的大小为 4×8×8，8×8 的那一面水平放置. 圆柱下底面的圆心与 8×8 那一面的正方形中心重合. 圆柱底面圆的直径为 4，圆柱的高为 8.

说明：对几何体的语言描述的次序可以不一致，繁简也不同，但一定要根据对方的理解水平作出合理的描述.

12. 解析：思考问题时，最好做一个实际的水槽进行演示. 下面是可能找到的有关水的各个表面的图形的形状和大小之间所存在的规律.

在图中，有：



（第12题）

(1) 水面是矩形.

(2) 四个侧面中，一组对面是直角梯形，另一组对面是矩形.

(3) 水面面积的大小是变化的，如图所示，倾斜度越大（即 α 越小），水面的面积越大.

(4) 形状为直角梯形（如 $ABDC$）的两个侧面的面积是不变的；这两个直角梯形全等.

(5) 侧面积不变.

(6) 在侧面中，两组对面的面积之和相等.

(7) 形状为矩形的两个侧面的面积之和为定值.

在图中，我们可以得到：

(8) $a+b$ 为定值.

(9) 如果长方体的倾斜角为 α，则水面与底面所成的角为 $90^\circ-\alpha$.

(10) 底面的面积＝水面的面积$\times\cos(90^\circ-\alpha)$＝水面的面积$\times\sin\alpha$.

当倾斜度增大，点 A 在 BD 上时，有：

(11) A 与 B 重合时 $b=2h$（h 为原来水面的高度）.

(12) 若容器的高度 $PD<2h$，当 A 与 B 重合时，水将溢出.

(13) 若 A 在 BD 的内部，$\triangle ADC$ 的面积为定值，即 bc 为定值.

13. 解析：应回想类比二维空间和三维空间中的真命题，在这两个不同又相关的领域中寻找相同点. 最简单的结论是关于三角形的：

(1) 两组对应边相等，且它们的夹角也相等的三角形全等.

(2) 有两组对应角相等的两个三角形是相似三角形.

我们还可以得到其他一些结论：

(3) 四边形的对角线互相垂直，则顺次连接它的各边中点所组成的四边形一定是矩形.

(4) 平行于同一条直线的两条直线也平行.

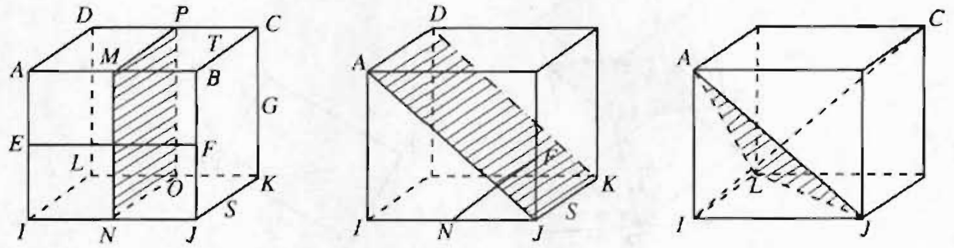
(5) 过直线外一点能作且只能作一条直线与已知直线平行.

(6) 直线 a，b，l，若满足 $a/\!/b$，且 $l\perp a$，则 $l\perp b$.

(7) 若一个角的两边平行于另一个角的两边，则这两个角相等或互补.

14. 解析：此题答案不唯一，可写出很多结果.

(1) 如：$AB\perp$平面 $BCKJ$，$AB\perp$平面 $DAIL$，$AB\perp$平面 $PMNO$，$NF\perp$平面 $ADKJ$，$IC\perp$平面 AJL，见图.



(第 14 题)

(2) 如：平面 $AJ\perp$平面 BK，平面 $AJ\perp$平面 MO，等等.

(二) 评价建议

1. “双基”的书面评价. 针对本章基础知识和基本技能，除在学完本章知识时进行综合试卷评价测试外，在学习过程中还可以进行两次阶段诊断性评价测试：第一次侧重考查 1.1 节空间几何体，主要内容为：多面体、旋转体的有关概念及性质；第二次侧重考查 1.2 节点、线、面之间的位置关系，主要内容为：平面的基本性质、空间中的平行关系及垂直关系. 主要方式为：闭卷、开卷测试或课后作业等书面形式. 通过这些测试，除教师对学生作出评价外，还可以组织学生自评和互评，以便及时发现问题并得到矫正.

2. 数学能力的评价. 本章内容的学习，培养学生的空间想象能力是主要目的之一. 因此可通过学生制作模型和计算机课件等实际操作练习，训练和考查学生的空间想象能力. 如：可以让学生制作一般四棱柱、直四棱柱、平行六面体、长方体、正方体、正四棱柱等有关四棱柱的模型或计算机演示课件. 采用学生互评、教师评议相结合的形式，打出等级分数. 这样，一方面可以激发学生学习数学的热情，培养动手能力；另一方面，可以使学生自己体会到四棱柱的有关特征性质，通过动手动脑体验图形在二维空间和三维空间之间的变化过程和特点.

3. 学生自我建构，自我评价. 学生学习的一个重要环节是对所学知识与方法的一个自我建构，因此可让学生对本章内容写出三次学习小结. 第一次是空间几何体；第二次是点、线、面之间的位置关系；第三次是本章全部内容. 其具体方式可通过小论文的形式，内容可为知识、方法的总结、某一类题目解题思路的总结或对某一问题学习的体会等. 评价时可将同学们论文张贴在教室板报上，请学生参与评议，采用等级分数，评出优秀论文. 必要时教师可以对优秀论文加以指导，推荐到相应的数学杂志上发表，借此激发学生学习数学的兴趣.

需要注意的是，我们教学和学习过程中的评价，不能仅仅为了评价而评价. 评价的目的要更有利于教学和学习活动的有效开展. 应该通过对学生学习过程和结果的综合评价，反思我们的教学活动是否偏离了教学目标，并及时提出改进措施.

第二章 平面解析几何初步

一、课程目标

（一）知识与技能目标

1. 通过对数轴的复习，理解实数和数轴上的点的对应关系，理解实数与位移的对应关系．理解实数运算在数轴上的几何意义．掌握数轴上两点间距离公式，掌握轴上的向量加法的坐标运算．

2. 理解直线的斜率和倾斜角的概念，经历用代数的方法探索直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式．

3. 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式（点斜式、斜截式、两点式及一般式）．理解直线与二元一次方程的对应关系．

4. 会通过解方程组发现直线相交、平行、重合的条件．会用两条直线相交或平行的条件判断两条直线相交、平行和重合．会求两直线的交点坐标．

5. 理解用勾股定理推导两条直线垂直的条件：$A_1A_2+B_1B_2=0$ 和 $1+k_1k_2=0$．会熟练地运用这两个条件判断两条直线是否垂直．

6. 掌握两点间距离公式、点到直线的距离公式，会求两平行直线间的距离．体会这些公式与勾股定理之间的内在联系．

7. 用距离公式和配方法，探索并掌握圆的标准方程和一般方程．

8. 能熟练地掌握二元联立方程组解法，并通过解方程或方程组，解决有关直线与圆，圆与圆的位置关系问题．根据给定的直线、圆的方程，会判断直线和圆、圆与圆的位置关系．

9. 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题．

10. 通过具体情景，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置．

11. 通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式．

（二）过程与方法目标

在平面解析几何初步的教学中，教师应帮助学生经历如下过程：首先用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题求解．体会代数运算过程的几何含义．这种思想应贯穿平面解析几何教学的始终，帮助学生不断地体会“数形结合”的思想方法．

（三）情感、态度与价值观目标

1. 本章的阅读材料简单介绍了解析几何学产生的历史背景和笛卡儿在创立这门学科过程中的主要贡献．通过教师的讲解和学生的阅读，让学生了解数学源于生产实践，并对生产实践产生巨大推动作用，让学生感受数学家的严谨态度和锲而不舍的探索精神，提高学生学习数学的兴趣．

2. 由于解析几何的教学目的是，运用代数的理论和计算方法研究平面几何图形的性质，所以在教学过程中，要让学生弄清曲线与方程的关系，这对发展学生的逻辑思维，特别是辩证思维能力是非常重要的．结合对常见曲线的研究，进一步培养运用所学知识解决一些实际问题的能力，提高学生计算、绘图的技能、技巧和观察、概括问题的能力，发展空间想象能力．

3. 解析几何是用代数方法研究解决几何问题的一门数学学科，在教学过程中要让学生充分体会数形结合的思想，进行辩证唯物主义思想的教育．

二、教材分析

（一）编写特色

1. 整章的主题是建立几何与代数的联系，用代数方法研究几何．传统上学习解析几何是在三角学习以后．按课标的要求，是先学解析几何，后学三角．这样，解析几何中的度量问题如何处理？在编写这部分教材时，经过反复考虑，还是决定按课标给出的顺序编写．这样处理有两个好处：

(1) 加强学生代数运算能力的培养．考虑到义务教育阶段学生学到的代数知识需要提高．设未知数列方程、解方程的能力需要加强．用代数方法讨论直线与直线、直线与圆和圆与圆之间的关系，可以提高学生用代数方法处理数学问题的能力和计算推理能力．

(2) 加强勾股定理的应用．这一章所有度量问题都用勾股定理处理，使学生进一步感受勾股定理的威力．

2. 首先通过对数轴的温故知新，学习一维坐标系．沟通实数及其运算与数轴上的点及两点间的相对位置之间的对应关系，创建直线坐标系中基本计算公式．在学习计算公式时，融入算法思想，写出计算步骤．

3. 坐标法是数学中的大法．引导学生自主建立直线和圆的方程，并用代数方法探索直线和圆的性

质. 反复通过例习题和练习，让学生初步学会用坐标法解几何问题.

4. 除用代数方法外，紧紧抓住相似比和勾股定理两个最重要的几何性质来研究直线和圆的性质并沟通知识间的内在联系：

比——斜率——平行，

勾股定理——距离公式——直线的垂直条件——点到直线的距离——圆的方程.

5. 温故知新复习解方程基本原理.

（二）内容结构

1. 内容编排

本章是解析几何的入门，开始学习用坐标法研究平面上的基本图形：直线和圆. 本章的基本内容及其编写的思路是：

通过章前的序言向学生讲述坐标法的意义，激发学生学习解析几何的积极性；

通过数轴与直角坐标系的复习，帮助学生进一步理解用数描述点的位置的坐标方法，开始引导学生用坐标法研究几何；

通过一次函数与图象的关系建立直线方程的概念，并通过直线方程讨论直线的有关问题，让学生初步领略解析几何的基本思想；

在具体认识直线方程的基础上，再研究圆的方程，用坐标法研究直线与圆和圆与圆的位置关系，强化解析几何的思想；

最后，教材编写了空间直角坐标系，探索空间中的点的坐标，给出了空间直角坐标系中的两点间的距离公式.

在编写用基本公式计算的例题时，为了融入算法思想，使学生养成分步计算的良好习惯，在开始解题时采用了分步求解的方法.

按照新的课程标准，让学生了解空间直角坐标系是必要的. 用坐标刻画空间点的位置，要求学生有较强的空间观念和抽象思维能力. 教材中力求引导学生自主探索由平面图形如何生成空间图形，又如何通过投影把空间图形分解为平面图形，由平面图形的性质研究空间图形的性质.

2. 地位与作用

解析几何是几何学的一个分支，是通过坐标法，运用代数工具研究几何问题的一门学科，它把数学的两个基本对象——形与数有机地联系起来. 解析几何通过形和数的结合，使坐标方法成为一个双面的工具. 一方面，几何概念可用代数表示，几何目标可通过代数方法达到；另一方面，又可给代数语言以几何的解释. 使代数语言更直观、更形象地表达出来，这对于人们发现新结论具有重要的意义. 近代数学的巨大发展，在很大程度上应该归功于解析几何.

本章中，学生将在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，运用代数方法研究它们的几何性质及其相互位置关系，体会数形结合思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力，为学生以后选修圆锥曲线打下基础.

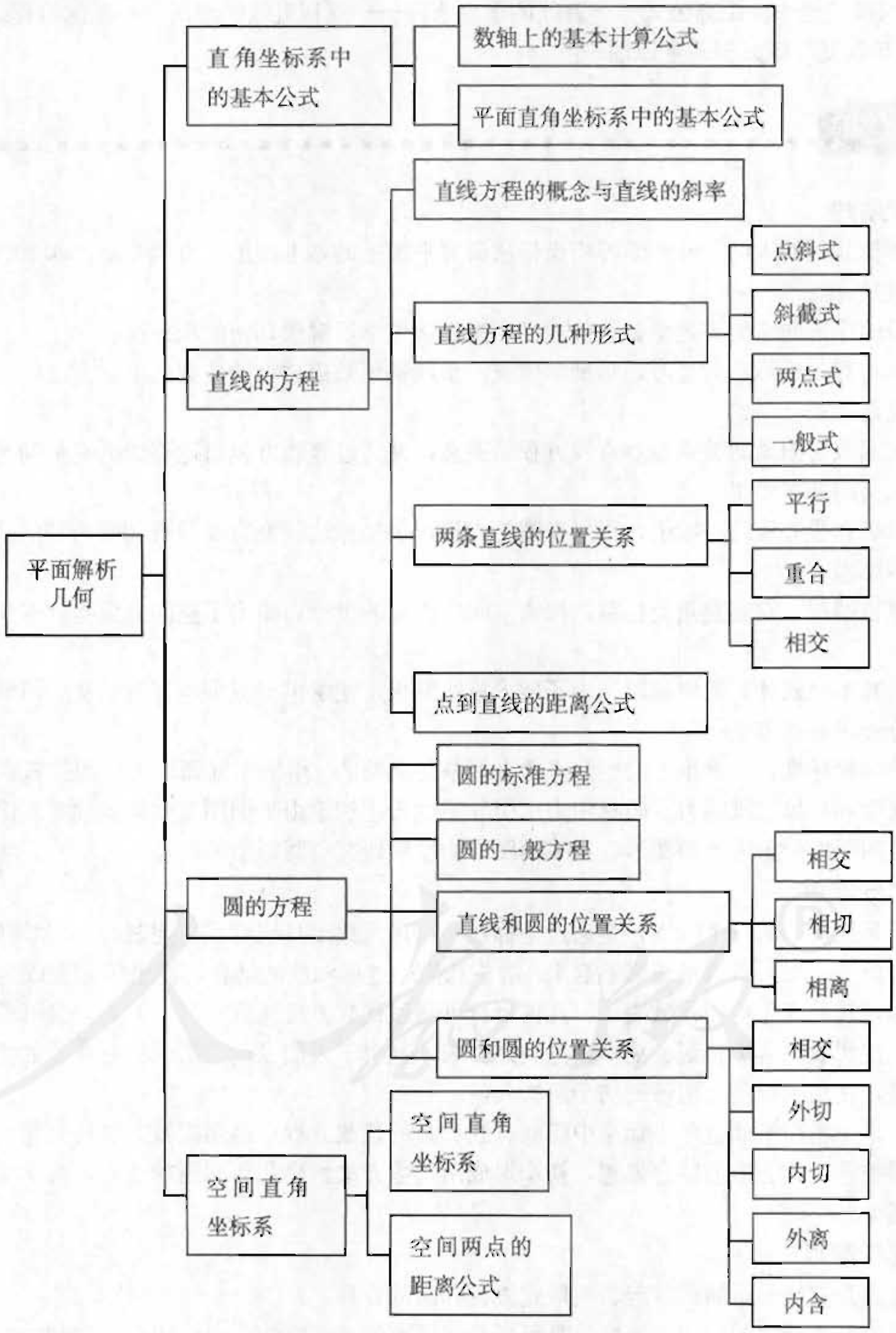
3. 重点与难点

本章的重点是直线的点斜式方程、一般式方程和圆的方程.

本章的难点是坐标法的应用. 坐标法是解析几何研究的基本方法，由曲线求方程和由方程研究曲线

是解析几何的基本问题，它们贯穿于解析几何学习的全过程中．对于本章中所涉及的坐标法的应用和求曲线方程的问题，应注意展现过程和揭示思想方法，强调学生的感受和体验，让学生在教学活动中逐步提高认识和加深理解．

4．本章知识结构



（三）课时分配

本章教学时间约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 平面直角坐标系中的基本公式	约需 2 课时
2.1.1 数轴上的基本公式	约 1 课时
2.1.2 平面直角坐标系中的基本公式	约 1 课时
2.2 直线的方程	约需 6 课时
2.2.1 直线方程的概念与直线的斜率	约 1 课时
2.2.2 直线方程的几种形式	约 2 课时
2.2.3 两条直线的位置关系	约 2 课时
2.2.4 点到直线的距离	约 1 课时
2.3 圆的方程	约需 5 课时
2.3.1 圆的标准方程	约 1 课时
2.3.2 圆的一般方程	约 2 课时
2.3.3 直线与圆的位置关系	约 1 课时
2.3.4 圆与圆的位置关系	约 1 课时
2.4 空间直角坐标系	约需 2 课时
2.4.1 空间直角坐标系	约 1 课时
2.4.2 空间两点的距离公式	约 1 课时
本章复习与小结	约需 1 课时
全章机动课时	约需 1 课时
总复习课	约需 1 课时

（四）教学建议

2.1 平面直角坐标系中的基本公式

2.1.1 数轴上的基本公式

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是理解和掌握数轴上的基本公式，难点是建立实数与数轴上的点或位移的对应关系.

（二）教学建议

1. 首先复习数轴，建立数轴上的点与实数的一一对应关系. 然后引入位移向量的概念，建立直线上的向量与实数的一一对应关系. 以往在平面解析几何中，不引入向量的概念，而是用有向线段替代. 对有向线段，也没有引入运算的概念，解析几何的基本公式，证明起来比较麻烦. 现在高中数学中已引入平面向量，如果在数轴上引入向量及其加减运算，学生会更好地理解坐标几何基本公式的推导. 也为

今后进一步的学习坐标几何打下坚实的基础.

在初中，学习正负数时，就用正负数表示位移的大小和方向，并用位移的合成学习正负数的加法. 这里把轴上相等的位移，定义为一个向量，并与实数建立一一对应关系，学生理解应该不会发生困难. 建议教学时，进行探索.

2. 数轴上的向量的加法运算及用向量表示点的位置，是整个解析几何的基础. 教学时，一定要给予足够的重视. 一定要让学生彻底地理解，熟练地掌握. 教材仍采用传统的习惯，把加法运算表示为公式

$$AB+BC=AC.$$

由此导出解析几何两个最基本的公式

$$AB=x_2-x_1,\ d(A,\ B)=|x_2-x_1|.$$

在这两个公式的基础上，最好引导学生导出中点公式.

3. 本节的练习 A 和 B，要求大多数学生都能熟练地做出. 不仅是要求学生记住上述两个公式，而是要求学生完全理解它们的几何意义和代数意义，为数形结合打下牢固的基础. 练习中出现的不等式，要求学生完全由不等式表示的几何意义求解. 在本大节最后的探索与研究的课题中，安排了用几何意义求解含绝对值的方程的内容，主要是培养学生的数形结合能力，并加深对距离公式的理解.

4. 有条件的学校可结合光盘中的课件 2001，让学生直观理解本小节中基本公式的正确性.

2.1.2 平面直角坐标系中的基本公式

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是用勾股定理和轴上位移数量的计算公式推导平面上两点间的距离公式和中点坐标公式. 难点是应用坐标方法，研讨几何问题.

（二）教学建议

把数轴上的基本公式推广到平面直角坐标系，主要是距离公式和中点公式. 显然，在教材结构上没有完全与直线坐标系衔接. 应该引入平面向量，推导坐标平面内的基本公式并研讨有关直线的问题. 由于不能过大地改变课标的结构，到了二维，不引入平面向量，而是把二维坐标几何转化为一维坐标几何来处理. 等学完平面向量后，可作为练习，让学生用向量方法重新证明这些基本公式和问题. 这样做不是更符合学生的认知规律吗？

1. 距离公式. 有两点提醒老师注意：第一，应向学生指出，距离公式是勾股定理的坐标形式，其实质是通过两点的坐标分量来计算两点间的距离；第二，贯彻算法思想（机械化计算）. 这一点，大家一定要注意，按步骤计算（一点都马虎不得），是学好数学的基本功.

2. 中点公式. 应向学生指出，中点公式是中心对称的坐标表示. 应多做练习，让学生掌握中点公式的应用.

3. 引导学生探索，如何把二维问题转化为一维问题来处理. 平面上两点距离公式的探索，应该从在数轴上的两点或连线平行轴的两点入手，然后注意研究怎样把两点连线（不平行轴的情况）向上面的简单情况转化. 探索中要注意观察和构造直角三角形，以便应用勾股定理. 线段中点公式的探索，同样要注意把问题向数轴上转化.

4. 基本公式要在应用中巩固，除了进行基本应用练习外，应结合例 3 体会建立坐标系的方法证明几何问题的思路，尤其是怎样正确又简单地设出有关点的坐标. 在解决例 4 的问题时要注意体会通过列

方程或方程组求点的未知坐标的方法．这两个例题中应用的方法都是坐标几何中常用的基本方法．

2.2　直线的方程

2.2.1 直线方程的概念与直线的斜率

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是理解直线的斜率的概念，探索如何通过直线上两点求直线的斜率公式．难点是理解斜率的几何意义及其与“相似比”等概念之间的内在联系．

（二）教学建议

1．通过分析一次函数及其图象，建立直线方程的概念．把直线看作点的集合，用集合的观点，把直线的特征性质转化为用方程来表示．

2．直线的斜率是数学中最重要的概念之一，在微积分学中也扮演着极为重要的角色，一定要让学生理解它的几何意义．值得大家思考的是，课标把直线方程的学习安排在三角函数之前．因此倾斜角的正切等于斜率，这一事实还不能直接引人．这与传统习惯相左，大家很难接受．很多老师提前讲数学4．当然，这是一种选择．学完向量和三角后，再学习解析几何会更顺理成章些．作者反复考虑，在学习三角和向量前，学习解析几何初步还是有一定道理的．解析几何最根本的思想是，用代数方法研究几何．在学习解析几何前，如没有三角和向量的知识，就会强化用代数方法学习几何，使学生更深刻地理解坐标法的意义、代数与几何的内在联系．由以上分析，我们建议不要改变课标规定的教学顺序．

3．这一部分是解析几何中重要的内容．研究曲线和方程的理论，从建立直线方程开始，就应予以充分重视，但又不能要求太高．由于学生已经学习了一次函数和二次函数，对学习直线方程有直接影响．教材是由一次函数的图象引入的，是将一次函数与其图象的对应关系，转换成直线方程和直线的对应关系．这样引入比较自然，符合学生的认知特点．

4．在推导出直线的斜率公式后，要引导学生讨论得出：

（1）斜率公式与两点的顺序无关，即两点的纵坐标和横坐标在公式中的前后次序可以同时颠倒；

（2）斜率公式表明，直线对于 x 轴的倾斜程度，可以通过直线上两点的坐标的代数式表示，因而可以使用代数方法研究直线的性质；

（3）当 $x_1=x_2$，$y_1\neq y_2$ 时，直线不存在斜率．

5．斜率和倾斜角都反映直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度．直线的倾斜角分两种情况定义：

第一种对于与 x 轴相交的直线，把直线向上的方向与 x 轴正方向所成的角叫直线的倾斜角；

第二种是与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为零度角．

教学中要讲清楚倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$，并说明这样定义倾斜角，可以使平面内任意一条直线都有唯一的倾斜角．关于直线的斜率和倾斜角的关系在数学4中将再进行讨论．

6．本小节已经说明 $y=kx+b$ 的图象是通过 $(0,\ b)$ 且斜率为 k 的直线，并在例2中先将方程化为 $y=kx+b$ 的形式再画出图象，这为后面学习直线的斜截式方程打下了良好的基础．

2.2.2 直线方程的几种形式

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是，点斜式直线方程的推导（点斜式是直线方程的重中之重）．难点是，直线与二元

一次方程的对应关系．

（二）教学建议

1．知道直线上一点的坐标和斜率，这条直线就完全确定了．点斜式是直线方程最基本的形式．其他确定直线的条件大都可以转化为点斜式来处理．基础较好的学生，可引导他们研究通过一个定点的直线系，如何用方程表示．教师在推导直线的点斜式方程时，注意求动点轨迹方程的步骤和思路：

（1）设动点的坐标(x, y)；

（2）分析动点的几何特征——由定点和动点求出的斜率为k；

（3）用坐标表示动点的几何特征，并进行必要的化简变形；

（4）说明得到的坐标关系式符合直线的方程的定义．教学中可提出求轨迹方程，帮助学生了解求方程的思路，与后面的学习相呼应．

2．在推导直线的点斜式时，教师要引导学生了解：

（1）建立点斜式的依据是，已知斜率并过一已知点可以确定一条直线；

（2）在得出$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=k$后，要把它变成方程$y-y_1=k(x-x_1)$．因为前者表示的直线上缺少一个点，而后者才是整条直线的方程；

（3）当直线的斜率不存在时，不能用点斜式求它的方程，这时直线的方程为$x=x_1$．

3．斜截式可以根据点斜式方程作为练习由学生探索得出，并向学生指出：

（1）$k\neq0$时，斜截式方程就是一次函数的表示形式；

（2）在初中学习的一次函数式$y=kx+b$中，常数k是直线的斜率，常数b是直线在y轴上的截距．

4．对于两点式直线方程，教材要求完全由学生通过思考与讨论得出，教学中一定要和学生一起小结这种方程的一般形式：过点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的直线方程为

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,(x_2\neq x_1,\ y_1\neq y_2).$$

并引导学生讨论得出：当直线没有斜率或斜率为0时，不能用两点式求出它的方程，但把两点式化为整式形式

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1),$$

就可以利用它求出过平面内任意两点的直线的方程．

5．通过上述的学习，教师在教学过程中及时帮助学生总结，确定直线需要两个条件，如已知斜率并过一已知点，或已知直线上两个点．这样学生在以后求直线方程时会有章可循．

6．讲授直线方程的一般式时，可以通过复习直线方程的几种形式（点斜式、斜截式、两点式），观察它们都是关于x，y的二元一次方程，然后引导学生从两个方面进一步研究直线和二元一次方程的关系：

（1）“在平面直角坐标系中，对于任何一条直线，都有一个表示这条直线的关于x，y的二元一次方程．”因为在直角坐标系中，每一条直线都有倾斜角，在$\alpha\neq90^\circ$和$\alpha=90^\circ$两种情形下，直线的方程可以分别写成$y=kx+b$和$x=x_1$这两种形式，它们又都可以变形为$Ax+By+C=0$的形式，且A，B不同时为0．

（2）“在直角坐标系中，任何关于x，y的二元一次方程都表示一条直线．”因为x，y的二元一次方程的一般形式为$Ax+By+C=0$，其中A，B不同时为0．在$B\neq0$和$B=0$两种情形下，一次方程可

以分别化成直线的斜截式方程 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ 和表示与 y 轴平行或重合的直线方程 $x=-\frac{C}{A}$.

以上两点说明一个重要的事实：在平面直角坐标系中，任何一条直线的方程可以写成关于 x，y 的一次方程；反过来，任何一个关于 x，y 的一次方程都表示一条直线. 通过学习，学生对曲线和方程之间的对应关系有一个初步的认识，为继续学习打下基础.

在讨论直线的有关问题时，常常把直线的不同类型的方程化成同一类型的方程，所以，学习直线方程的相互转化是有一定价值的. 常用的相互转化有：直线方程的点斜式、斜截式、两点式化成一般式，一般式化成斜截式等.

2.2.3 两条直线的位置关系

（一）教学的重点与难点

本小节的重点为两直线平行、垂直的条件，难点为用代数方法推导平行和垂直条件的思路.

（二）教学建议

1. 在用二元一次方程来表示直线的基础上，通过二元一次联立方程组有解或无解来讨论两条直线相交、平行或重合的条件，对高一的学生应当没有太大的困难. 如有困难，可能在于学生不习惯于纯符号的计算与分析. 但这一关，高一的学生必须得过，它有极强的教育价值. 高中学生要学会用代数方法讨论几何. 使代数与几何联姻，代数方程就有了直观的几何意义.

2. 在教学中，教师让学生要明确为什么把对两条直线相交或平行、重合的条件的讨论，转化为对相应方程组的解的讨论，这样做的根据是直线方程的定义. 两条直线的交点同时在这两条直线上，因此交点的坐标同时适合这两条直线的方程，是它们组成的方程组的解；反之，两条直线的方程所组成的方程组的解如果存在，那么以解为坐标的点就同时在两条直线上，是它们的交点.

4. 对系数为字母的两个直线方程组成的方程组的解的讨论，是对学生数学思维能力的一次锻炼和提高，要求学生能在教师的指导下看懂讨论的过程就可以了. 对于教材中所总结的两条直线相交、平行或重合的条件，要注意不用分式表示的是一般性的结论，用分式表示的结论是在分母不为 0 时才成立的. 根据这些结论设计的算法是很有实用价值的.

5. 当两条直线的斜率都存在的时候，可用两条直线的斜率 k_1，k_2 判断这两条直线相交或平行. 直线的斜率是今后学习函数变化率的基础，一定要让学生理解斜率的作用. 要引导学生在关于方程系数的结论的基础上，思考和讨论后得出下面的结论：设斜率都存在的两条直线分别为

$$l_1:\ y=k_1x+b_1,\ l_2:\ y=k_2x+b_2,$$

则 l_1 与 l_2 相交$\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；$l_1 /\!/ l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$；$l_1$ 与 l_2 重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1=b_2$.

在这里指出，本小结所得到的关于两直线相交或平行、重合的条件都是充要条件，由于没有学习充要条件，我们用双向推出符号来表示，要让学生从正逆两方面理解："平行则条件成立""条件成立则平行".

6. 教材中推导两条直线的垂直条件，只用到勾股定理和距离公式，没有涉及到三角函数的知识，并且得到一般性结论，即 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 是两直线垂直的充要条件. 就是说两直线方程系数的关系式 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 和两直线垂直是可以互相推出的. 学生要理解推导过程，这有利于培养学生的数学思维与计算推理的能力.

如果两条直线的方程用一般式给出，则可用条件 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 来判断两条直线是否垂直. 当给出的两条直线方程为点斜式或斜截式时，可用条件 $k_1k_2=-1$ 来判断两条直线是否垂直.

7. 讲授例题 1 和例题 4 后，应引导学生得出：

与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线可表示为 $Ax+By+C_1=0(C_1\neq C)$；

与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线可为 $Bx-Ay+C_2=0$.

这样可用待定系数法求出方程. 待定系数法是求解方程问题的通法，务必让学生进行较多的练习.

2.2.4 点到直线的距离

（一）教学的重点与难点

本小结的重点是点到直线的距离公式，难点是点到直线的距离公式的推导.

（二）教学建议

1. 点到直线的距离公式是用坐标法解决几何问题的基本公式，是对学生应用坐标法解决几何问题的一次很好的训练.

2. 对点到直线的距离公式的推导技巧性较强，这也是为了给学生创造学习思维与推理方法的机会. 学生容易找到下面的思路：先求出过已知点垂直于已知直线的直线方程；再求这两条直线的交点的坐标；然后求出已知点和垂足间的距离. 这一思路的计算过程不容易实现，但是对得出教材中的解法有一定的启发作用，教师可以引导学生，如：垂足的坐标能不能设而不求呢？学生思考后就可以在教师的指导下得到教材中的推导方法：设未知数列方程求解.

教材中的推导过程只与直线一般式方程的系数有关，所以得到的公式适用于所有的直线.

3. 教材中安排了例题 2，推导两平行线间的距离公式，这个公式的表达形式简单，但提醒学生注意，使用公式时，两平行线的方程中关于 x，y 的一次项系数必须是对应相同的.

2.3 圆的方程

2.3.1 圆的标准方程

（一）教学的重点和难点

本小节的重点和难点都是圆的标准方程以及根据已知条件求圆的方程.

（二）教学建议

1. 在求直线的点斜式方程时，已经向学生渗透了求点的轨迹方程的基本思路，本小节求圆的标准方程时，仍需要加强对点的轨迹的理解. 求方程时先让学生回顾怎样用动点的轨迹来定义圆. 即动点 M 在以 O 为圆心 r 为半径的圆上的条件为：$|OM|=r$.

引导学生分析这句话的含义.

3. 引导学生根据两点的距离公式把表示圆的几何条件转化为方程表示，进而导出圆的标准方程，由圆的标准方程，可直接写出圆的圆心坐标和半径长，突出了确定一个圆的基本要素. 根据圆的标准方程可以判断点在圆内、圆上或圆外.

4. 求圆的标准方程，关键是确定圆的圆心和半径长，可以采用直接代入法或待定系数法等求解. 在具体问题的求解过程中，应灵活运用圆的有关几何性质. 教材中例 1 应用标准方程求出圆的方程，是采用了待定系数法解决的. 例 2 的不同解法应该在学生的探索讨论的基础上得出.

5. 通过本小节的学习可以和学生共同总结求轨迹方程的一般步骤，并参看第 2.3.2 小节练习B2、习题 2-3A10 以及习题 2-3B8 等各种类型的问题进行适当的练习. 在研究 2.3.2 小节的例 3 时将进一步

巩固求轨迹方程的方法.

2.3.2 圆的一般方程

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是，由圆的一般方程求圆的标准方程. 难点是，理解关于二元二次方程表示圆的条件及圆一般方程的应用.

（二）教学建议

1. 联想二元一次方程和直线间的关系，让学生自己讨论“圆的方程是否都是二元二次方程？二元二次方程是否都表示圆呢？”通过探索过程建立圆与二元二次方程之间的关系.

2. 方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ 和 } x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

是圆的方程的两个基本形式. 对于第一个方程，它的圆心坐标为$(a,\ b)$半径为r，学生已经掌握，对于第二个方程，要求学生通过配方化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

并引导学生总结在什么情况下，它的轨迹是圆、点或无轨迹. 当轨迹是圆时，可得圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$，应注意不要让学生死记结果，而是要求他们掌握通过配方求出圆心坐标和半径的方法.

教学中要引导学生总结圆的一般方程的特点，比较二元二次方程的一般形式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

和圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的系数，启发学生归纳出如下结论：

方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 满足条件

（1）x^2，y^2 项的系数相等且不为零，即 $A=C\neq 0$；

（2）没有 xy 项，即 $B=0$；

（3）$D^2+E^2-4AF>0$

时才是圆.

和圆的标准方程一样，圆的一般方程中也含有三个参变数，因此必须具备三个独立的条件，才能决定一个圆，例 2 是已知三点的坐标决定一个圆. 当已知曲线是圆时，一般采用待定系数法求它的方程. 对于由已知条件容易求出圆心坐标和半径或需利用圆心坐标列方程的问题，一般采用圆的标准方程，再用待定系数法求出 a，b，r. 如果已知条件和圆心坐标或半径都无直接关系，那么可采用圆的一般方程，再用待定系数法求出常数 D，E，F.

3. 由曲线求它的方程是解析几何的重要技能. 对于这种技能需要在教学过程中逐步培养，教师可以结合教材中的例 2，例 3，对求曲线方程的方法作一个小结.

例 2 利用待定系数法求出圆的方程. 待定系数法是数学中常用的一种方法，教学中可复习小结一下，并指出这种方法在求圆的方程或其他问题中有广泛的应用，要求学生熟练掌握用待定系数法解决有关问题.

例 3 用求动点轨迹方程的方法求曲线方程.

2.3.3 直线与圆的位置关系

直线和圆的位置关系问题是初中几何的学习中已经研究过的．本节的学习就是要把这些几何形式的结论转化为代数方程的形式．这是一次开展“研究性学习”坐标法的良好时机．

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是，直线和圆的位置关系的判断和应用．难点是，培养学生熟练地解二元联立方程组．

（二）教学建议

1. 直线和圆的位置关系问题就是直线和圆公共点个数的问题，结合解决两直线交点问题的经验，学生能够给出通过研究方程组解的个数，得出研究直线和圆位置关系的思路．教学中应该启发学生发现，也可以通过比较圆心到直线的距离和圆的半径来研究直线和圆的位置关系．

2. 关于直线和圆的位置关系的教学，可以利用例1的讨论得出判断直线和圆位置关系的方法，并帮助学生进行小结：

(1) 直线 l 的方程与圆的方程 C 联立，消元后所得一元二次方程的判别式 Δ：

当 $\Delta<0$ 时，直线与圆相离；

当 $\Delta=0$ 时，直线与圆相切；

当 $\Delta>0$ 时，直线与圆相交．

(2) 圆的半径为 R，圆心到直线的距离为 d：

当 $d<R$ 时，直线与圆相交；

当 $d=R$ 时，直线与圆相切；

当 $d>R$ 时，直线与圆相离．

以上命题的逆命题仍然成立．

3. 教材中的例2的解法，是先求切线的斜率 $-\frac{x_0}{y_0}$，然后写出切线方程．为了便于学生掌握解题的一般思路，通常要对得出的一般性结论进行讨论．建议对例2得出圆的切线方程后，可通过验证向学生指出不论斜率是否存在，这个结论都成立．除了教材中的方法，还有其他的解决方法．

2.3.4 圆与圆的位置关系

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是两圆位置关系的判断，难点是通过两圆方程联立方程组的解来研究两圆位置关系．

（二）教学建议

和直线与圆的位置关系一样，可以通过讨论两圆方程所组成的方程组的解来研究两圆的位置关系．因为讨论这类方程组的解比较困难，所以我们根据初中几何关于两圆位置关系的讨论，通过比较两圆半径的和、两圆半径差的绝对值和两圆圆心间的距离，来判断这两个圆的位置关系．

学生只需回顾初中所学的有关知识，并应用圆的方程和两点间距离公式的知识，就可以解决本小节中例题的问题，解题中对所给方程的配方变形学生应该熟练掌握．

在本小节的最后，通过讨论两圆方程联立方程组的解，来研究两圆位置关系．对较好的学生加强用代数方法解决几何问题的训练，再次感受到坐标法在研究几何问题中的作用．

本大节末的探索与研究中的两道题，主要是培养学生用代数方法解几何题的能力．解出问题2需用

要学生有较强的代数变形能力，可在数学课外活动小组中进行，不要在课上研讨．下面给出其中第 2 题的具体解法．

以顶点 B 为坐标原点，以射线 BC 为 x 轴的正方向建立直角坐标系 xOy，则 $B(0,\ 0)$，$C(a,\ 0)$．设 $A(q,\ h)$，设$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 $M(d,\ e)$，则圆 M 的方程为

$$(x-d)^2+(y-e)^2=R^2.$$

分别代入$\triangle ABC$ 各顶点的坐标，得方程组

$$\begin{cases} d^2+e^2=R^2 & ① \\ (a-d)^2+e^2=R^2 & ② \\ (q-d)^2+(h-e)^2=R^2 & ③ \end{cases}$$

由①和③可得 $e=\dfrac{q^2+h^2-2qd}{2h}$．由①式和②式，得 $d=\dfrac{a}{2}$．因此

$$e=\frac{q^2+h^2-aq}{2h}.$$

将上述 d 和 e 的表达式代入①式，可得

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2}{4}+\frac{(q^2+h^2-aq)^2}{4h^2} \\ &= \frac{a^2h^2+(q^2+h^2-aq)^2}{4h^2} \\ &= \frac{a^2h^2+q^4+h^4+a^2q^2+2q^2h^2-2aq^3-2h^2aq}{4h^2} \\ &= \frac{a^2(h^2+q^2)+(h^2+q^2)^2-2aq(h^2+q^2)}{4h^2} \\ &= \frac{(h^2+q^2)[(a-q)^2+h^2]}{4h^2}. \end{aligned}$$

又因为 $(h^2+q^2)=|AB|^2=c^2$，$(a-q)^2+h^2=|AC|^2=b^2$，$S=\dfrac{ah}{2}$，因此

$$R^2=\frac{c^2b^2}{4h^2}=\frac{c^2b^2a^2}{16S^2}.$$

即 $R=\dfrac{abc}{4S}$.

上述关系，在学完正弦定理和三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 后很容易导出，但要走过很长的学习历程．用坐标法求解，推理过程中，只用到了代数变形和距离公式．每一步变形，都有几何意义，展现了坐标法的威力．

这道题的探索与研究以及解析几何初步的编写，又提醒我们思考一些重要的问题：什么是有教育价值的数学？如何通过有价值的数学培养学生的数学能力？如何应对新课标数学教学体系的改变？如直线与圆的方程，可放在学完三角、向量后讲，有了好的数学工具，不论是教学或学生理解都会容易些．现在提前讲，有没有一定的教育价值？

2.4 空间直角坐标系

2.4.1 空间直角坐标系

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是，沟通在直线、平面和空间直角坐标系中，点的坐标之间的联系，及点在空间直角坐标系中的坐标概念．难点是确定点在空间直角坐标系中的坐标．

（二）教学建议

1．建议让学生讨论，如何在空间坐标系中，用数字确定一点的位置．可先复习在直线和平面直角坐标系中，确定点的位置的方法．然后让学生分析，如何把一维推广到二维，又如何把二维转化为一维．学生会发现，在平面上确定点的位置，一个实数做不到了，需要两个实数．如何确定这两个实数，显然，分别作点在两条坐标轴上的投影，把二维转化为一维．接着要让学生讨论，确定空间一点的位置需要几个实数？如何确定这三个实数？学生可能会发现两种方法：一种是过点作与坐标轴垂直的平面，确定这三个平面与三条坐标轴的交点，直接把三维转化为一维，另一种是过点先作一个坐标面的垂线，由垂足再作坐标轴的垂线，这样，把三维转化为二维，再把二维转化为一维．这种讨论会强化学生对坐标系和坐标方法的认识，学会以简驭繁思考问题的思想方法．

2．教学中要引导学生探索空间中八个卦限中的点以及各种特殊位置的点的坐标特点．

3．了解空间直角坐标系是学习空间向量以及用空间向量来解决立体几何问题的基础．

2.4.2 空间两点的距离公式

（一）教学的重点和难点

本小节的重点是空间两点距离公式，难点是空间两点距离公式的推导．

（二）教学建议

1．采用上小节的方法，让学生思考，如何把轴上的距离公式推广到平面直角坐标系的距离公式？如何求空间坐标系中，两点间的距离？

2．空间两点距离公式的推导，需要学生结合前面所学立体几何知识，要有较强的空间想象能力．要让学生自己探索，如何用勾股定理来推导距离公式．

三、拓展资源

（一）解析几何的产生

十六世纪以后，由于生产和科学技术的发展，天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的要求．比如，德国天文学家开普勒发现行星是绕着太阳沿着椭圆轨道运行的，太阳处在这个椭圆的一个焦点上；意大利科学家伽利略发现投掷物体是沿着抛物线运动的．这些发现都涉及到圆锥曲线，要研究这

些比较复杂的曲线，原先的一套方法显然已经不适应了，这就导致了解析几何的出现.

在文艺复兴以后的欧洲，代数学由于受到阿拉伯的影响而迅速发展．另一方面，17 世纪以后，数学分析的发展非常显著．因此，几何学也摆脱了和代数学相隔离的状态．1637 年，法国的哲学家和数学家笛卡儿（1596—1650）发表了他的著作《方法论》，它标志着解析几何的产生．这本书的后面有三篇附录，一篇叫《折光学》，一篇叫《流星学》，一篇叫《几何学》．当时的这个“几何学”实际上指的是数学，就像我国古代“算术”和“数学”是一个意思一样．《几何学》的主要功绩，在于建立了数与图形之间存在的密切的关系，在空间设立坐标，而且以数与数之间关系来表示图形；反过来，可把图形表示成为数与数之间的关系．这样，按照坐标把图形改成数与数之间的关系问题而对之进行处理，这个方法称为解析几何.

笛卡儿的《几何学》共分三卷，第一卷讨论尺规作图；第二卷是曲线的性质；第三卷是立体和“超立体”的作图，但它实际是代数问题，探讨方程的根的性质．后世的数学家和数学史学家都把笛卡儿的《几何学》作为解析几何的起点．恩格斯在其《自然辩证法》中高度评价了笛卡儿的工作，他指出“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，……”.

从笛卡儿的《几何学》中可以看出，笛卡儿的中心思想是建立起一种“普遍”的数学，把算术、代数、几何统一起来．他设想，把任何数学问题化为一个代数问题，再把任何代数问题归结到去解一个方程式.

为了实现上述的设想，笛卡儿从天文和地理的经纬制度出发，指出平面上的点和实数对(x, y)的对应关系．x，y 的不同数值可以确定平面上许多不同的点，这样就可以用代数的方法研究曲线的性质．这就是解析几何的基本思想.

具体地说，平面解析几何的基本思想有两个要点：

在平面上建立坐标系，一点的坐标与一组有序的实数对相对应；

在平面上建立了坐标系后，平面上的一条曲线就可由带两个变数的一个代数方程来表示了.

从这里可以看到，运用坐标法不仅可以把几何问题通过代数的方法解决，而且还把变量、函数以及数和形等重要概念密切联系了起来.

解析几何的产生并不是偶然的．在笛卡儿写《几何学》以前，就有许多学者研究过用两条相交直线作为一种坐标系；也有人在研究天文、地理的时候，提出了一点位置可由两个“坐标”（经度和纬度）来确定．这些都对解析几何的创建产生了很大的影响.

在数学史上，一般认为和笛卡儿同时代的法国业余数学家费马也是解析几何的创建者之一，应该分享这门学科创建的荣誉.

费马是一个业余从事数学研究的学者，在数论、解析几何、概率论三个方面都有重要贡献．他性情谦和、好静成癖，对自己所写的“书”无意发表．但从他的通信中知道，他早在笛卡儿发表《几何学》以前，就已写了关于解析几何的小文，有了解析几何的思想．而且他已得到微积分的要旨，曾提出求函数极大极小值的方法．他建立了很多数论定理，其中“费马大定理”最有名，不过当时只是一个猜想．直到 1994 年才得到最终证明.

笛卡儿的《几何学》，作为一本解析几何的书来看，是不完整的，和现在的解析几何教科书有很大的差距，其中甚至看不到“笛卡儿坐标系”．但可贵的是它引入了革命性的思想，为开辟数学的新园地作出了贡献.

传说中空间坐标系的由来有这么一个故事：有一天，笛卡儿生病卧床，但他头脑一直没有休息，在反复思考一个问题：几何图形是直观的，而代数方程则比较抽象，能不能用几何图形来表示方程

呢？这里，关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩．他就拼命琢磨，通过什么样的办法才能把“点”和“数”联系起来．突然，他看见屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来，一会儿，蜘蛛又顺着丝爬上去，在上边左右拉丝．蜘蛛的“表演”，使笛卡儿思路豁然开朗．他想，可以把蜘蛛看作成一个点，它在屋子里可以上、下、左、右运动，能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置，不是都可以用这三根数轴上找到的有顺序的三个数来表示吗？反过来，任意给一组三个有顺序的数，例如 3，2，1，也可以用空间中的一个点 P 来表示它们(图 2-1)．同样，用一组数(a, b)可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用两个有顺序的数来表示(图 2-2)．于是在蜘蛛的启示下，笛卡儿创建了直角坐标系．

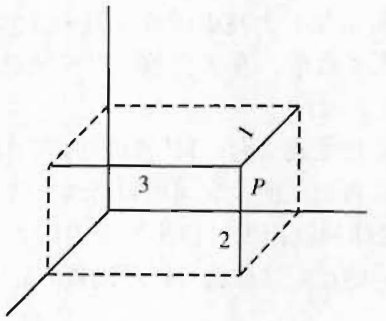


图 2-1

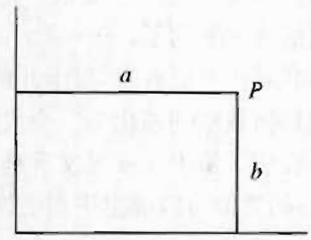


图 2-2

无论这个传说的可靠性如何，有一点是可以肯定的，就是笛卡儿是个勤于思考的人．这个有趣的传说，就像瓦特看到蒸汽冲起开水壶盖发明了蒸汽机一样，说明笛卡儿在创建直角坐标系的过程中，很可能是受到周围一些事物的启发，触发了灵感．

直角坐标系的创建，在代数和几何上架起了一座桥梁．它使几何概念得以用代数的方法来描述，几何图形可以通过代数形式来表达，这样便可将先进的代数方法应用于几何学的研究．

笛卡儿在创建直角坐标系的基础上，创造了用代数方法来研究几何图形的数学分支——解析几何．他的设想是：只要把几何图形看成是动点的运动轨迹，就可以把几何图形看成是由具有某种共同特性的点组成的．比如，我们把圆看成是一个动点对定点 O 作等距离运动的轨迹，也就可以把圆看作是由无数到定点 O 的距离相等的点组成的．我们把点看作是构成图形的基本元素，把数看成是组成方程的基本元素，只要把点和数挂上钩，也就可以把几何和代数挂上钩．

把图形看成点的运动轨迹，这个想法很重要！它从指导思想上，改变了传统的几何方法．笛卡儿根据自己的这个想法，在《几何学》中，最早为运动着的点建立坐标，开创了几何和代数挂钩的解析几何．在解析几何中，动点的坐标就成了变数，这是数学第一次引进变数．

坐标方法在日常生活中用得很多．例如象棋、国际象棋中棋子的定位；电影院、剧院、体育馆的看台、火车车厢的座位及高层建筑的房间编号等都用到坐标的概念．(改编自“人民教育出版社网站”)

（二）轴上向量坐标的加法运算

设 A，B，C 是同一轴上的三个点，那么不论它们的位置怎样，都有 $AB+BC=AC$ 的关系．

推广：设 A_1，A_2，A_3，…，A_n 是同一条轴上的 n 个点，那么不论它们的位置如何，都有 $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$ 的关系.

（三）直线系

具有某种性质的直线的集合叫做直线系，它的方程叫做**直线系方程**. 常见的直线系方程有：

过定点 $M(x_1, y_1)$ 的直线系方程

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

其中 A，B 为不全为零的任意常数.

与已知直线 $Ax+By+C=0$ 平行或重合的直线系方程

$$Ax+By+D=0,$$

其中 D 为任意常数.

与已知直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程

$$Bx-Ay+D=0,$$

其中 D 为任意常数.

过两相交直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线系方程为

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

其中 λ 为任意常数，但这些直线中不包括直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$.

如果取 $\lambda=\dfrac{n}{m}$，方程变为

$$m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

其中 m，n 为任意常数，方程可表示过两已知直线交点的所有直线.

特别地，过一定点的直线系叫做**直线束**.

例题：已知 $(k+1)x-(k-1)y-2k=0$ 为直线 l 的方程，求证不论 k 取何值时，直线 l 必过定点，并求出这个定点的坐标.

证明：整理直线 l 的方程，得 $(x+y)+k(x-y-2)=0$.

不论 k 取何实数值，直线 l 的方程为直线系 $l_1+\lambda l_2=0$ 的形式，因此必过定点，定点坐标可由方程组

$$\begin{cases}x+y=0\\x-y-2=0\end{cases}$$

解得，所以直线 l 过定点 $(1, -1)$.

可引导对数学有兴趣的同学探讨点到直线距离公式的各种证明方法. 距离公式的推导是学生练习坐标方法较好的园地. 这里学生还没有学习三角学，学生推导距离公式主要是用代数方法和勾股定理以及两条直线平行或垂直的条件. 其代数方法是，设未知数列方程和解方程原理及待定系数法. 处理点到直线距离最有效的方法是向量的内积运算. 下面给出一些证法供教师参考.

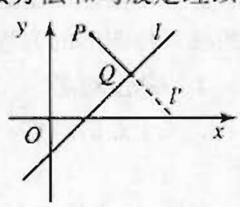


图 2-3

方法一　根据定义，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线的距离是点 P 到直线 $Ax+By+C=0$ 的垂线段的长，如图 2-3.

设过点 P 与直线 l 垂直的直线为 l'，垂足为 Q，则 l' 的方程为

$$Bx-Ay+(-Bx_0+Ay_0)=0,$$

与方程 $Ax+By+C=0$ 联立，解方程组

$$\begin{cases}Bx-Ay=Bx_0-Ay_0\\ Ax+By=-C\end{cases}$$

求得交点

$$Q\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}|PQ|^2&=\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2\\&=\left(\frac{-A^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{-B^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)^2\\&=\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2+B^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}\\&=\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}.\end{aligned}$$

即 $|PQ|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

方法二　(函数法)点 P 到直线上任意一点的距离的最小值就是点 P 到直线的距离. 在直线上取任意点 $Q(x,\ y)$，用两点的距离公式有

$$|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

为了利用条件 $Ax+By+C=0$，上式变形一下，配凑系数处理得

$$\begin{aligned}&(A^2+B^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\\&=A^2(x-x_0)^2+B^2(y-y_0)^2+B^2(x-x_0)^2+A^2(y-y_0)^2\\&=[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2+[A(y-y_0)-B(x-x_0)]^2\\&\geqslant[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2=(Ax_0+By_0+C)^2,\end{aligned}$$

所以 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\geqslant\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

当且仅当 $x=\dfrac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}$，$y=\dfrac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}$ 时取等号，所以最小值就是 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(四) 对称

要求学生能写出给定点或直线关于某点的中心对称点或直线的方程，写出点或直线关于点或某条直线的轴对称图形的方程. 下面给出一般性的结论，不要求学生掌握.

1. 中心对称

点关于点的对称：由中点公式容易求出已知点 $A(x_1,\ y_1)$ 关于 $P(x_0,\ y_0)$ 对称点的坐标为

$$B(2x_0-x_1,2y_0-y_1).$$

直线 $Ax+By+C=0$ 关于点 $P(x_0,\ y_0)$ 对称的直线方程为

$$Ax+By-2Ax_0-2By_0-C=0.$$

2. 轴对称

(1) 点关于直线的对称点：已知点 $M(x_0, y_0)$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 对称的点的坐标为

$$\left(-\frac{(A^2-B^2)x_0+2ABy_0+2AC}{A^2+B^2}, -\frac{2ABx_0+(B^2-A^2)y_0+2BC}{A^2+B^2}\right).$$

(2) 连接空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 线段的垂直平分面的方程为

$$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+2(z_1-z_2)z-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=0.$$

(3) 直线关于直线的对称直线：

① 直线 $Ax+By+C=0$ 关于 $Ax+By+C'=0$ 对称的直线方程为

$$Ax+By+2C'-C=0.$$

② 直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 关于 $Ax+By+C=0\left(\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\right)$ 对称的直线方程为

$$A_1\left[-\frac{(A^2-B^2)x+2ABy+2AC}{A^2+B^2}\right]+B_1\left[-\frac{2ABx+(B^2-A^2)y+2BC}{A^2+B^2}\right]+C_1=0.$$

3. 圆系

具有某种共同性质的圆的集合叫做圆系，它们的方程叫做圆系方程.

常见的圆系方程有：

(1) 同心圆系：方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中 a，b 为常数，r 为任意正实数.

(2) 同轴圆系(也称圆束)：已知两圆

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

以它们的公共弦为弦的圆系方程为

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0,$$

其中 λ 为不等于 -1 的任意常数(不包括圆 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$).

其公共弦的方程为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$.

四、教学案例

案例 1 直线方程的一般形式

(一) 教学目标

1. 知识与技能目标：

(1) 理解并掌握直线方程的一般形式及一般式与特殊式之间的互化；

(2) 了解在直角坐标系中，平面上的直线与关于 x，y 的二元一次方程的对应关系.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过复习直线方程的几种特殊形式，从它们的局限性入手，使学生意识到学习直线方程的一般式的必要性和迫切性；

(2) 经历直线方程的一般形式的探究与应用过程，体会数形结合、分类讨论等数学思想方法及运用

特殊——一般——特殊的思维方式，理解直线与二元一次方程的对应关系．进一步发展学生观察、分析、归纳的能力．

3．情感、态度与价值观目标：

（1）培养学生积极参与、大胆探索的精神以及合作意识；通过让学生体验成功，增强学习数学的信心；

（2）树立事物在一定的条件下可以相互转化的辩证唯物主义观点．

（二）教学重点和难点

重点：直线方程的一般形式及一般式与特殊式之间的互化．

难点：在直角坐标系中，平面上的直线与关于 x，y 的二元一次方程的对应关系的理解．

（三）教学方法

教法上本着“教师为主导，学生为主体，问题解决为主线，能力发展为目标”的教学思想，主要采用“问题探究”式教学方法．通过创设问题情境，以直线方程的特殊形式的局限性为切入点，在认知冲突中激发学生的探索欲望；通过设置一条问题链，引导学生自主探究与合作交流相结合去研究；通过恰当的例题与习题的配置，引导学生积极思考，灵活掌握知识，使学生从“懂”到“会”到“悟”，提高思维品质，力求把传授知识与培养能力融为一体．

同时借助多媒体，增强教学的直观性，提高课堂效率．

（四）教学过程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>提出问题</td><td>【问题1】平面直角坐标系中的任意一条直线，是否都能用方程来表示？</td><td>教师提出问题；学生思考、回答并相互补充．</td><td>问题1设在学生的“最近发展区”内，可引发学生的积极思维，使学生根据新的学习任务主动提取原认知结构，变被动复习为主动复习．</td></tr>
<tr><td>复习引入</td><td><table>
<tr><th>方程名称</th><th>确定条件</th><th>方程形式</th><th>限制条件</th></tr>
<tr><td>点斜式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>斜截式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>两点式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>截距式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
学生经讨论发现：上述特殊形式的直线方程都不能表示与 x 轴垂直的直线，从而引入直线方程的另一种特殊形式：$x=x_1$．即：平面直角坐标系中的任意一条直线都能用方程来表示．</td><td>根据学生回答，教师适当地做一定的启发并借助多媒体动态投影完成此表．</td><td>通过对问题1的回答，引导学生对直线方程的特殊形式进行系统地归纳、整理，为学习新知识作好准备；同时，直线方程的特殊形式的局限性使学生产生认知冲突，激发其求知热情和探索的欲望．</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	【问题 2】能否把上述几个直线方程统一起来？ (1) 直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式都是二元一次方程；它们的共同本质是存在斜率，可选形式较为简单的斜截式代表. (2) 平面直角坐标系中的任何直线，可用斜截式或 $x=x_1$ 表示；引导学生分析：方程 $x=x_1$ 也是关于 x，y 的二元一次方程. (3) 学生得出结论：直线的方程都是关于 x，y 的二元一次方程，一般形式为 $Ax+By+C=0$(A，B 不全为零). 【问题 3】为什么规定 $Ax+By+C=0$ 中 A，B 不全为零，全为零又怎样？ 【问题 4】能否说方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不全为零)就是直线的方程呢？ 【问题 5】任何关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗？ 分 $B\neq0$ 和 $B=0$ 两种情况加以讨论： (1) 当 $B\neq0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可化为：$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. 这就是直线的斜截式方程. 它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线. (2) 当 $B=0$ 时，由于 A，B 不同时为零，必有 $A\neq0$，于是方程 $Ax+By+C=0$ 可化为：$x=-\frac{C}{A}$. 它表示一条与 y 轴平行或重合的直线. 即关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线. 所以，方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不全为零)是直线的方程. 【问题 6】方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不全为零)与直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式有怎样的关系？ 我们把方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不全为零)叫做直线的一般式方程.	学生分析研究、讨论交流并回答问题； 教师引导，学生再分析，得出结论. 学生回答，教师总结. 引导学生回顾“直线的方程”的概念，让学生自己提出问题 4. 学生独立思考并练习，教师巡视，选择一份没有对 B 进行 $B=0$ 和 $B\neq0$ 讨论的练习投影，请学生分析错误. 学生口答；学生得出结论.	在教学中应引导学生主动参与，自主进行问题探究学习，并加强合作交流. 通过对直线方程的特殊形式的分析，使学生的认识不断深入(从最初的“所有直线都可用方程表示”上升到“所有直线都可用关于 x，y 的二元一次方程表示”)，不断精化. 同时抽象概括能力也得以提高. 培养学生思维的严谨性，渗透分类讨论思想. 由“直线方程”的定义知应从两方面来论证“直线方程的一般式是方程 $Ax+By+C=0$”. 学生自己发现问题，提高分析能力. 渗透分类讨论的思想，培养学生周密分析问题的能力. 平面上的直线与关于 x，y 的二元一次方程的对应关系是本节课的难点，通过层层深入的问题设计，将难点化解在三个符合学生实际而又令学生迫切想解决的问题中.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1 已知直线通过点 $(-2, 5)$，且斜率为 $-\frac{3}{4}$，求此直线的一般式方程. 例2 求直线 l：$2x-3y+6=0$ 的斜率及在 y 轴上的截距. 例3 求直线 l：$3x-y+1=0$ 与两条坐标轴围成的三角形的面积.	学生练习；教师点拨.	使学生理解并掌握直线方程的特殊形式与一般式之间的互化. 规范解题格式：求直线方程时，最后的结果如无特殊说明，应化为直线方程的一般式 $Ax+By+C=0$，$A\geqslant 0$，A，B，C 不含分母，且 A，B，C 无公因式. 阐明同一条直线可用不同形式的直线方程表示，而它们的用途也有所不同，应注意灵活运用；培养学生一题多解的能力，让学生认识到直线方程一般式的普遍性，为后面的学习作铺垫.
练习反馈	练习： 1. 根据下列条件，写出直线的方程，并化为一般式： 经过两点 $A(3, -2)$ 和 $B(5, -4)$； 经过点 $B(-2, 0)$，平行于 x 轴； 在 y 轴上的截距是5，并与 x 轴垂直. 2. 在直线 $Ax+By+C=0$ 中，A，B，C 满足什么条件时，直线有如下性质？ (1) 与两条坐标轴都相交； (2) 只与 x 轴相交； (3) 与 y 轴重合. 3. 直线 $ax+by+c=0$ 通过第一、二、四象限，则系数 a，b，c 需满足条件（　　）. (A) a，b，c 符号相同　　(B) $ac<0$，$bc<0$ (C) $c=0$，$ab<0$　　(D) $a=0$，$bc<0$	学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导.	巩固所学知识，进一步促进认知结构的内化，并且可使学生对自己的学习进行自我评价. 也让教师及时了解学生的掌握情况，以便进一步调整自己的教学.
归纳总结	1. 直线方程的一般形式； 2. 直线方程的一般式和特殊式之间的互化； 3. 数学思想方法.	先由学生自己总结，再由师生共同归纳完善.	学生自己从知识、方法两方面进行总结，提高学生的概括、归纳能力. 同时，学生在回顾、总结、反思的过程中，将所学知识条理化、系统化，使自己的认知结构更趋合理. 注重数学思想方法的提炼，可使学生逐渐把经验内化为能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课后作业	1. 必做题：练习 A，1(1)(4)，2(2)(4)，3 和练习 B，2，3； 2. 选做题：直线 $Ax+By+5=0$ 和直线 $Cx+Dy+5=0$ 都过点(2，3)，求过点(A，B)和(C，D)的直线方程.	书面作业的必做题要求所有学生都要完成，选做题则只要求学有余力的同学完成.	设计必做题与选做题，既巩固所学知识，又给学有余力的同学以发展空间，使不同程度的学生都得到提高.

案例 2　两条直线垂直的条件

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：

(1) 理解两条直线垂直的等价关系，特别注意与已知直线垂直的直线系的应用；

(2) 通过学习本节知识，进一步提高学生对直线的认识，提高学生对归纳猜想、类比转化、分类讨论、数形结合等数学思想方法的认识.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过复习两条直线平行时直线方程系数的关系，对照分析两条直线垂直时直线方程的系数关系，探究直线方程系数关系与直线方程位置关系的联系；

(2) 理解用直线方程来研究直线位置关系的过程，并体会其中蕴涵的数学思想方法.

3. 情感、态度与价值观目标：

通过精心设计适宜的教学情境，让学生在师生和谐、互动的氛围中，愉快地、自然地、主动地接受新知识. 通过学习，培养学生辩证思维的方法和能力，以及严谨的治学精神.

（二）教学重点和难点

重点：两条直线的垂直的条件.

难点：两条直线垂直条件的应用.

（三）教学方法

苏霍姆林斯基一再建议教师要“争取学生热爱你的学科”，首先激发学生的学习兴趣、启迪学生的思维，通过设置问题、营造氛围，引导学生尝试、探究等活动，使学生充分体会到“自主探究”获得知识的重要性. 所有这一切都离不开教师的主导作用. 同时借助多媒体、投影辅助教学，提高课堂效率.

（四）教学过程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>提出问题</td><td>【问题 1】怎样根据两条直线的方程，来判断两条直线是否平行？分别讨论直线是斜截式时和一般式时应注意什么？
根据学生回答，多媒体动态显示下表：
<table><tr><th>方程形式</th><th>平行条件</th></tr><tr><td>l_1：$y=k_1x+b_1$
l_2：$y=k_2x+b_2$</td><td></td></tr><tr><td>l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$
l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$</td><td></td></tr></table>
讨论方程为一般式时，与 x 轴平行的两直线平行、与 y 轴平行的两直线平行的条件.</td><td>教师提出问题，学生思考、回答，允许相互讨论.
教师根据学生的回答，恰当地启发、引导.</td><td>问题 1 旨在复习上节课学习的知识，使学生沉浸在老师提供的情境中.
通过两种方程形式的类比，培养学生思维的严谨性，以及分类讨论的数学思想方法.</td></tr>
<tr><td>复习引入</td><td>【问题 2】比较上面的方法，我们能否根据两直线的方程来判断两直线垂直呢？
先从特殊的情形入手：x 轴和 y 轴垂直，即斜率为 0 和斜率不存在的两条直线垂直.
分别与 x 轴，y 轴平行的两条直线也互相垂直.
【问题 3】能否根据通过原点的两条直线的垂直的条件，得到一般性的结论呢？为什么？
【问题 4】假定 l_1'，l_2'都不与坐标轴平行或重合，若 $l_1'\perp l_2'$，且
l_1'：$A_1x+B_1y=0$，l_2'：$A_2x+B_2y=0$，
则两直线系数的关系是什么？
【问题 5】除了以上的方法，同学们还有没有解决问题的妙招？</td><td>学生思考，讨论.
学生回答.
引导学生类比两直线“平行”时，是怎样研究系数关系的？在这里又该怎样解决呢？
放手让学生独立处理，采用数形结合的方法解决此问题，教师点拨，完善.</td><td>数学教学中应将“探索”和“研究”有机穿插，问题 2 从特殊情形入手，有利于学生主动参与.
问题 3 建立了新旧知识之间内在的、和谐的、统一的联系，为下面知识的进一步拓宽打下了基础.
“学而不思则罔”，问题 4 有利于引导学生参与到教学中来.还培养了学生转化的数学思想.
引导学生探求多种思维，变“一言堂”为“群言堂”，这样有利于培养学生的求异思维能力，提高学生思维的深刻性、敏捷性.</td></tr>
<tr><td>概念形成</td><td>【问题 6】$A_1A_2+B_1B_2=0$ 是平面内任意两条直线垂直的条件吗？
【问题 7】两条直线平行时斜率要相等，那么两条直线垂直时斜率满足什么关系？
$l_1\perp l_2\Rightarrow k_1k_2=-1$ 是否成立？
让学生思考、讨论、尝试，教师适时进行启发.</td><td>有利于提高学生思维的监控能力，教师的适当点拨，会使课堂演出波澜壮阔的“话剧”，有利于深化、活化数学知识，加深对知识的理解.</td><td></td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念深化	1. 判断下列各组中的两条直线是否垂直： (1) $2x-y=0$，$x-2y=0$； (2) $2x-4y-7=0$，$2x+y-5=0$； (3) $2x=7$，$3y-5=0$； 2. 求证：直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$垂直. 3. 求过点 $A(1,2)$，且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线方程.	学生练习，教师点拨. 学生自行解决. 教师引申此题为与已知直线垂直的直线系问题. 放手让学生解答，教师用投影展示学生的不同解题方法，通过微机显示标准解题格式.	使学生理解并掌握两种判断两直线垂直的方法，并进一步理解斜率结论的局限性. 可帮助学生构建自己的解题思维模块，而且解后反思可使学生对例题“吃透”，真正起到“做一题，会一类，通一片，带一串”的作用. 不同解法的比较促使每个学生能寻找到适合自己知识的生长点，进一步促进能力的提高. 体现了“学生为主体”的思想.
应用举例	例 1 判断下列各组中的两条直线是否垂直： (1) $y=x$，$2x+2y-7=0$； (2) $x+4y-5=0$，$4x-3y-5=0$； (3) $x=3$，$y=2$. 例 2 已知点 $A(2,5)$，$B(6,-1)$，$C(9,1)$. 求证：$AB\perp BC$. 例 3 求过 $P(2,3)$且垂直于直线 l：$x-y-2=0$ 的直线方程.	学生回答，教师对学生的回答进行评价. 学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生的个别指导.	进一步巩固所学知识，有助于保持学生学习的热情和信心. 教师及时了解学生的掌握情况，以便进一步调整自己的教学.
归纳总结	1. 两条直线垂直的等价条件； 2. 与已知直线垂直的直线的设法； 3. 数学思想方法.	先请一位同学总结，其他同学补充，教师完善，用多媒体展示出来.	引导学生对所学的数学知识、思想方法进行小结. 有利于学生对已有的知识结构进行编码处理，加强理解，记忆. 引导学生对学习过程进行反思，为在今后的学习中进行有效调控打下良好的基础.
课后作业	1. 必做题：练习 A，4(2)(3)；习题 2-2A，12(3)(4)； 2. 选做题：习题 2-2B，7.	书面作业必做题要求所有学生完成；选做题，只要求学有余力的同学完成.	布置作业有弹性，避免一刀切. 使学有余力的同学的创造性得到进一步的发挥.

案例3　圆的标准方程

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：

(1) 理解并掌握圆的标准方程，会根据不同条件求得圆的标准方程，能从圆的标准方程中熟练地求出它的圆心和半径；

(2) 运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过对圆的标准方程的推导，渗透数形结合、待定系数法等数学思想方法，进一步提高学生的观察、比较、分析、概括等思维能力；

(2) 学会借助实例分析探究数学问题.

3. 情感、态度与价值观目标：

(1) 通过学生的主动参与，师生、生生的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发其求知欲，培养探索精神；

(2) 树立事物之间相互联系、相互转化的辩证唯物主义的观点.

（二）教学重点和难点

重点：圆的标准方程的推导以及根据具体条件正确写出圆的标准方程.

难点：运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题.

（三）教学方法

数学学习不是一个“授予——吸收”的过程，而是学习者主动的建构过程，而且高一学生已具备了一定的基础知识和技能，因此，本节课主要采用了“诱思探究”的教学方法．借助学生已有的知识引出新知；在方程的推导过程中，以一系列的问题为主线，采用讨论式，引导学生主动探索，自己构建新知识；通过层层深入的例题配置，使学生的思路逐步开阔，提高解决问题的能力.

借助多媒体，增强教学的直观性，有利于渗透数形结合的思想，同时增大课堂容量，提高课堂效率；为了迅速快捷地展示学生的解题方案，便于讨论，可在教学中使用实物投影仪.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 引导学生回顾： 初中平面几何中所学的是两方面的知识：直线形的和曲线形的，在曲线形方面学习的是圆．学习解析几何以来，已讨论过直线的各种形式的方程及两直线的位置关系．从而使学生自己意识到将要研究的内容是圆的方程. 2. 具有什么性质的点的轨迹称为圆？ 强调确定一个圆需要的条件——圆心与半径，它们分别确定了圆的位置和大小.	教师引导，学生回顾. 教师提问，学生回答，同时教师借助微机画出一个半径为 r 的圆 C，显示在屏幕上.	通过对初中平面几何内容的回顾，使学生理清知识脉络．自己发现需要研究的问题，可激发学生的求知欲，增强问题意识，同时使学生注意到知识之间是相互联系的. 回顾圆的定义及确定圆的几何要素，为建立圆的方程作好准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	1. 让学生根据显示在屏幕上的圆自己探究圆的方程. 通常学生会有两种解法： 解法1：选择圆心 C 为直角坐标系的原点 O（教科书图2-21）. 设 $M(x, y)$ 是任一动点，点 M 在圆 C 上的条件是 $\|CM\|=r$. 由两点间距离公式，所说条件可转化为方程表示： $$\sqrt{x^2+y^2}=r.$$ 两边平方，得 $$x^2+y^2=r^2. \quad ①$$ 解法2：不选择圆心 C 为直角坐标系的原点 O（教科书图2-20）. 设圆心 C 的坐标为 (a, b)，$M(x, y)$ 为任一动点，点 M 在圆 C 上的条件是 $\|CM\|=r$. 由两点间距离公式，所说条件可转化为方程表示： $$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$ 两边平方，得 $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ②$$ 若学生只有一种做法，教师可引导学生建立不同的坐标系，由学生自己发现另一个方程. 2. 上述两个方程是圆的方程吗？ 对照直线的方程的概念，使学生意识到应再说明：若平面上一点 M 的坐标 (x, y) 适合上述方程，则 M 是圆上的点.（要强调当 $a>0$，$\sqrt{f(x)}=a$ 与 $f(x)=a^2$ 是同解方程.） 3. 方程①与②有何关系？ 方程①是方程②的圆心在坐标原点时的特殊形式，因此把方程②称为圆的标准方程.	学生分析研究、独立解决问题. 教师巡视，加强对学生的个别指导. 由学生讲解思路，并相互补充，根据学生的回答，教师利用多媒体展示学生的想法，学生先说哪种解法，就先展示哪种解法，最后将两种解法同时显示在屏幕上，以方便学生对比. 引导学生自己提出该问题并解答. 教师提问，学生回答.	数学教学的核心是学生的“再创造”，即由学生根据自己的体验，用自己的思维方式把要学的知识重新创造出来. 这种“再创造”积累和发展到一定程度，就有可能产生质的飞跃，达到真正的发明、创造的高度. 因此，在教学中应塑造自主探索与合作交流的学习环境，让学生有充分的时间和空间去观察、分析、动手实践，从而主动发现和创造所学的数学知识. 圆的标准方程的推导是本节课的一个重点，其推导方法也是求轨迹方程的一个基本方法. 把该推导过程交给学生探索，让学生经历知识的形成过程，体会数形结合的思想，可加深对知识的理解并逐步提高用代数方法解决几何问题的能力. 培养学生思维的严谨性，巩固直线方程的概念，渗透曲线方程的概念. 强调建系是用代数方法解决几何问题的关键，同一曲线，在不同坐标系中会得到不同的方程.
概念深化	1. 根据上述解法，总结求曲线方程的步骤. 简单地记为： 建系、设点、列式、化简、证明（可省略，验证即可）. 2. 如何表示平面上任一点 $M(x, y)$ 与圆 $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$ 的位置关系？	学生总结，教师完善. 学生解答.	提炼方法，使学生在探索中领会，在总结中提高. 该解法及结果是求圆的方程常用的两种方法（轨迹法和待定系数法），也为后面圆锥曲线方程的学习奠定基础. 发散思维，开阔视野，同时再次渗透数形结合的思想.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	练习1　练习A,1(1)(3)； 练习2　说出方程 $(x+m)^2+(y+n)^2=a^2$ 的圆心和半径. 例1　根据下列条件，求圆的方程： (1) 圆心在点 $C(-2,1)$，并过点 $A(2,-2)$； (2) 圆心在点 $C(1,3)$，并与直线 $3x-4y-6=0$ 相切； 思路一　利用直线与圆相切时，圆心到该直线的距离等于半径求解； 思路二　联立直线与圆的方程，消元后令一元二次方程的根的判别式等于0来解决问题. (3) 过点(0，1)和点(2，1)，半径为$\sqrt{5}$. 例2　求过点 $A(6,0)$，$B(1,5)$，且圆心在直线 l：$2x-7y+8=0$ 上的圆的方程. 例3　赵州桥的跨度是37.02 m，圆拱高约为7.2 m，求这座圆拱桥的拱圆方程.	学生口答. 要求学生尽可能地用多种方法解答各题. 教师将学生的解法投影，由学生点评，教师总结. 根据学生的情况，例1(2)的思路二也可以暂时不讲. 教师播放赵州桥的录像，简介赵州桥的历史. 学生先独立解决，再讨论交流，教师投影学生的解法，师生共同分析.	巩固所学知识，熟悉圆的标准方程的特点. 学生容易错认为半径是 a. 使学生明确：求圆的方程，必须具备三个独立的条件. 确定 a，b，r，可以根据条件，利用待定系数法来解决. 鼓励学生用多种方法解决问题，培养其发散思维能力. 求解过程中，充分利用初中所学的圆的几何性质，可使思路灵活，运算简单；也可以借助“点在曲线(直线)上，点的坐标适合曲线(直线)方程”这一观点，列方程组求解. 例1的(2)为后面直线与圆的位置关系的讨论作了铺垫. 了解中国古代劳动人民的勤劳和智慧，增强学生的民族自豪感. 进一步加深对知识的理解，体验数学在解决实际问题中的作用，增强应用意识. 强调建立适当的坐标系在解析法中的重要性.
归纳小结	1. 圆的标准方程的推导； 2. 圆的标准方程的形式； 3. 求圆的方程的方法； 4. 数学思想方法.	学生小结并互相补充，师生共同整理完善.	学生反思总结，可以提高学生自己获取知识的能力以及归纳概括能力，同时使自己的认知结构更完整，知识更系统化.
课后作业	必做题：1. 查阅有关圆拱桥的资料，撰写一篇小论文或编写一道数学题； 2. 练习A，2；练习B，1，2； 选做题：3. 用两种方法求以 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 为直径端点的圆的方程.	必做题要求所有学生都要完成，选做题只要求学有余力的同学完成.	使学生通过多方渠道获取知识，了解数学在现实生活中的广泛应用. 贯彻因材施教的原则，设计必做题与选做题，既巩固所学知识，又给学有余力的同学以发展空间，使不同程度的学生都得到提高.

案例4　空间直角坐标系

（一）教学目标

1. 知识与技能目标：

（1）掌握空间直角坐标系的有关概念；

（2）会根据坐标找相应的点；

（3）会写一些简单几何体的有关坐标；

（4）掌握空间两点的距离公式，会应用距离公式解决有关问题.

2. 过程与方法目标：

（1）通过空间直角坐标系的建立、空间两点距离公式的推导，使学生初步意识到：将空间问题转化为平面问题是解决空间问题的基本思想方法；

（2）通过本节学习，培养学生类比、迁移、化归的能力.

3. 情感、态度与价值观目标：

培养学生积极参与、大胆探索的精神.

（二）教学重点和难点

1. 重点：

（1）空间直角坐标系的有关概念；

（2）一些简单几何体顶点坐标的写法；

2. 难点（考虑到坐标是否正确是解题的关键）：

（1）简单几何体的顶点坐标的写法；

（2）空间两点的距离公式的推导.

（三）教学方法

本节指导思想为：以学生为主体，以形成完整的知识结构为主线，以发展学生能力为目标. 为在学生头脑中建构完整的知识结构，基础知识的教学一方面可采用以问题为核心，以学生自学为主，教师讲解为辅的方法，师生共同将知识层层展开并深入探究；另一方面运用多媒体动态演示空间直角坐标系的有关概念，以求遵循由感性认识上升到理性认识的认知规律，激发学生学习兴趣，启迪学生思维.

（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习提问	1. 数轴上、坐标平面上点的位置如何确定？ 2. 平面直角坐标系中，点的坐标如何定义？ 3. 平面中两点的距离公式是什么？	教师提出问题，并动态演示在平面直角坐标系中，点的坐标是如何定义的. 学生积极思考，回答问题.	激活学生头脑中的原有知识，为引入新课作准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
提出问题	以课本引言为例，提出问题：确定空间任意点的位置需要几个实数？	动态演示飞机在空中的运行.	以多媒体来引入新课，激发学生学习兴趣.
概念形成	出示自学提纲： (1) 如何建立空间直角坐标系？ (2) 空间任意点与有序数组(x, y, z)之间的对应法则是什么？ (3) 已知点P的坐标分量，如何确定点P的位置？ (4) 构成xOy平面、xOz平面、yOz平面的点，其坐标分量有何特征？构成x轴，y轴，z轴的点，其坐标分量有何特征？ (5) 何为卦限？每个卦限中，点的坐标分量有什么特征？	在学生自学的基础上，教师边动态演示边讲解，对于每个环节都要有动画配合，最后介绍数学文化——笛卡儿.	动态演示可以加深学生对概念的理解，避免理解肤浅，记忆淡薄.
概念深化	1. 练习反馈 (1) 在直角坐标系$Oxyz$中作出以下各点：$(1,1,1)$，$(1,1,-1)$，$(1,-1,1)$，$(1,-1,-1)$，$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(-1,-1,1)$，$(-1,-1,-1)$. (2) 自己建系，写出边长为1的正方体、棱长为1的正四面体的各顶点坐标. (3) 求点(2，3，4)关于各坐标轴、各坐标平面对称点的坐标. 2. 推导空间两点的距离公式 (1) 分两类动态演示平面上两点距离公式的推导： ① 两点连线平行于x轴或y轴时； ② 两点连线不平行于坐标轴时. (2) 提出问题：能否仿照平面上两点距离公式的推导，推导空间两点的距离公式？分组讨论. (3) 动态演示两种推导方法： ① 当两点连线与坐标面不平行时，过两点分别作与三个坐标轴垂直的平面，转化为求长方体的对角线长. 从而只要写出交于一个顶点的三条棱长即可，而棱长可在平面内用平面上两点距离公式求得. ② 利用线段在坐标平面上的正投影推导.	学生分组讨论，教师动态演示并总结： 1. 如何确定点的位置. 2. 不同的建系方法，点的坐标不同，适当的建系，可使点的坐标简单. 3. 点的空间坐标为该点在坐标轴上的投影在这些坐标轴上的坐标. 4. 关于各坐标轴、各坐标平面对称的两点，其点的坐标分量的关系. 在学生分类讨论的基础上，教师抓住新旧知识的联系，借助多媒体动态演示，帮助学生实现由空间问题向平面问题的转化，指出两种推导方法的本质相同，即降维：将空间问题转化为平面问题.	确定简单几何体的顶点坐标是今后正确运用坐标法解题的关键. 抓住新旧知识的联系，借助多媒体动态演示，实现由空间问题向平面问题的转化.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	例1 已知 $A(1, -2, 1)$，$B(2, 2, 2)$，点 P 在 z 轴上，且 $PA=PB$，求点 P 的坐标. 解：设 $P(0, 0, z)$，则 $PA=\sqrt{1+4+(1-z)^2}$， $PB=\sqrt{4+4+(2-z)^2}$， 所以 $z=3$. 所以 $P(0, 0, 3)$. 例2 求到两定点 $A(2,3,0)$，$B(5,1,0)$ 距离相等的点的坐标 $P(x,y,z)$ 满足的条件. 解：设 $P(x, y, z)$，则 $PA=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}$， $PB=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2+z^2}$， $6x-4y-13=0$.	学生讨论完成，教师动态演示，指出例2中点 P 轨迹为平面.	强化基础知识，会应用距离公式解决有关问题.
课堂练习	习题 2-4A，1，2，3，4.		强化基础知识，会应用距离公式解决有关问题.
归纳总结	1. 掌握空间直角坐标系的有关概念； 2. 点与坐标之间的对应关系； 3. 会写一些简单几何体的有关坐标； 4. 会应用距离公式解决有关问题.	学生讨论交流，师生共同总结.	归纳要点，以便学生有清晰认知结构.
作业	习题 2-4B，1.		

案例5 直线与圆的位置关系

(一) 教学目标

1. 知识与技能目标：

掌握直线和圆的位置关系的判断和应用.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过直线和圆的位置关系的探究与应用过程，体验用数形结合、转化、函数、方程等数学思想来解决数学问题的方法，学会用代数方法解决几何问题的能力，感受坐标法在研究几何问题中的作用；

(2) 通过不同形式的自主学习和探究活动，体验数学发现和创造的历程，提高抽象概括，分析总结，数学表达等基本数学思维能力.

3. 情感、态度与价值观目标：

通过师生互动、生生互动的教学活动过程，形成学生的体验性认识，体会成功的愉悦，提高数学学

习的兴趣，树立学好数学的信心，培养锲而不舍的钻研精神和合作交流的科学态度.

（二）教学重点和难点

重点：直线与圆的位置关系的判断和应用.

难点：通过解方程组来研究直线与圆的位置关系，以及求圆的切线方程时关于直线斜率的讨论.

（三）教学方法

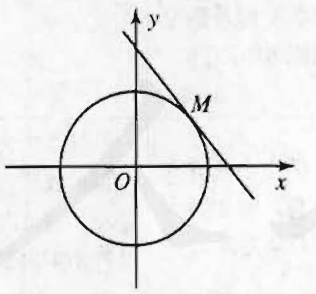
直线和圆的位置关系问题在初中几何中已经得出结论，本节的学习就是利用解析几何的思想和方法，把这些几何形式的结论转化为代数方程的形式，采用“问题探究式”的教学方法，教师通过创设问题情境，让学生积极参与到教学活动中来；通过层层深入的例题配置，使学生的思路逐步开阔，提高解决问题的能力.

同时借助多媒体辅助教学，增强直观性，增大课堂容量，提高课堂效率.

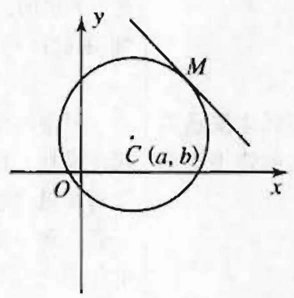
（四）教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	以生活中常见的具体实例（日出）演示直线与圆的位置关系，并提出新的问题.	教师借助多媒体动态演示直线与圆的位置关系的几何特征；学生积极回答教师提出的问题. 教师总结.	在初中直线与圆的位置关系的知识基础上，以实例再现直线和圆的位置关系的几何特征，提出新的问题，有利于保持学生知识结构的连续性，同时开阔视野，激发学生的学习兴趣.
新课讲解及课堂练习	判断直线与圆的位置关系有两种解题思路： 思路一　以上相对应的是直线与圆的三种位置关系：相离，相切，相交. 我们可求出圆心到直线的距离为 d： 当 $d<r$ 时，直线与圆相交； 当 $d=r$ 时，直线与圆相切； 当 $d>r$ 时，直线与圆相离. 思路二　根据求两条直线交点问题的经验，判断直线与圆的交点个数，可以通过研究方程组解的个数，具体作法是联立两个方程，消去 x（或 y）后所得一元二次方程的判别式 Δ： 当 $\Delta>0$ 时，有两组解，即两个公共点； 当 $\Delta=0$ 时，有一组解，即一个公共点； 当 $\Delta<0$ 时，没有解，即没有公共点. 练习 1　试确定下列直线与圆的位置关系： (1) 直线 m：$x=2$， 圆 C：$x^2+y^2=4$； (2) 直线 m：$y=4$， 圆 C：$x^2+y^2=4$；	学生独立思考 3 分钟，然后同桌两人为一组讨论，交流，并整理出本组同学所想到的思路. 在整个交流讨论中，教师既要有对正确认识的赞赏，又要有对错误见解的分析及对学生的鼓励. 多媒体动态演示练习 1 题目及其具体解答过程. 在教师的提示下，学生分组完成练	给学生探索的空间，让学生体验数学发现和创造的历程，提高分析问题的能力： 1. 学生从讨论中逐步体会用数形结合，转化、函数等数学思想解决问题的方法，提高学生发散思维的能力； 2. 教师在展示各种思路的同时，归纳出这两种思路的解题步骤，让学生思路清晰，解题时有章可循.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课讲解及课堂练习	(3) 直线 m：$x=-1$， 圆 C：$x^2+y^2=4$. 思考题　a 为何值时，$x=a$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切、相交、相离？ 练习 2　(1) 判断直线 m：$x+y=\sqrt{2}$，与圆 C：$x^2+y^2=1$ 的位置关系； (2) 练习 A,3(2). 判断圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 和直线 $2x-y+5=0$ 的位置关系.	习2第一题的解答，然后教师投影学生解答情况并演示规范的具体解答过程. 第二题由学生独立练习巩固.	在已有知识基础上，设计的练习题由浅入深，符合学生的思维发展规律；此处练习题设计比较多，便于学生深刻领会其中蕴涵的解题思想与方法，攻克教学难点.
例题讲解	例 1　已知直线 l：$y=x+b$ 与圆 C：$x^2+y^2=2$，当 b 为何值时，圆与直线有两个公共点？只有一个公共点？没有公共点？ 小结 1　总结两种方法的正确解题步骤，详见课件演示.	教师巡视，关注学生的讨论解答，并投影多个学生的解答过程. 多媒体演示两种方法的详细解题过程.	从不同的解题思路中进一步体会用多种数学思想解决问题的方法，提高学生发散思维的能力；同时，又建立起新旧知识之间内在的、和谐的、统一的联系，为以后知识的进一步拓宽打下了基础. 可帮助学生构建自己的解题思维模块，而且解后反思可使学生对知识“吃透”，真正起到“做一题，会一类，通一片，带一串”的作用.
知识应用	圆的切线方程. 例 2　已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，求过圆上一点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线方程，如图 1.  图 1 学生可能会根据例题 1 的探究过程提出两种解题思路： 思路一　设切线的斜率为 k，根据点 M 的坐标$(x_0,\ y_0)$，写出点斜式方程，并与圆方程联立，利用 $\Delta=0$ 求出 k，即得圆的切线方程.	受例1的启发，很多学生会有解题思路. 教师点拨，说出各种解题方法的利弊，并采用最简方案解题. 解题过程由师生共同完成，并向学生说清楚，在做选择、填空题时这可以作为结论直接使用. 在第一种解法中教师验证 $x_0=0$ 时的圆的切线方程.	在上次成功体验的基础上，再次探究，再次体验用数形结合、转化、函数、方程等数学思想来解决数学问题的方法，加强用代数方法解决几何问题的能力，感受坐标法在研究几何问题中的应用. 分类讨论的思想.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
知识应用	思路二　同例1解法二. 其他的思路　利用直线OM与切线垂直以及轨迹法等. 小结2　过圆上一点切线的求法及该结论的使用.	学生可类似地验证$y_0=0$时的情况.	
课堂练习	练习3　练习B，2，4.	学生独立完成练习题.	
能力提高	发散思考，课外探索（例2的拓展）： (1)在例2中，若圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则过圆上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程是什么？如图2.（提示：解法同例2，切线方程是$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.）  图2 (2) 若点$M(x_0,y_0)$在圆外，切线方程如何？ (3) 在以上问题中会有几条切线方程？ 课外练习4　从圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$外一点P（2，3），向该圆引切线，求圆的切线的方程.	动态演示发散思考题. 不断探索，层层推进. 学生在教师引导下课外独立完成探究过程. 学生课外独立完成练习题.	使学生领会不同情况下圆切线的解法，使学生的认知结构更完整，知识更系统化. 继续体验数学思想以及数学方法，提高学生的发散思维，训练学生的解题能力. 让学生大胆发言，提高他们的数学表达能力，激发他们学习数学的兴趣.
归纳总结	1. 直线与圆位置关系的判断：代数法，几何法； 2. 直线与圆位置关系的应用：圆的切线方程.	学生小结并互相补充，师生共同整理总结完善.	让学生大胆发言，归纳总结本节课的收获，教师及时点评并归纳总结，通过大屏幕展示出来，使学生对所学内容有一个系统的认识.
布置作业	1. 习题2-3A，4，5，6. 2. 直线l：$y=x-1$与曲线C：$y=\sqrt{1-x^2}$有几个交点？ 3. 总结圆的切线方程各种情况的具体解法，并写成小论文.		帮助学生巩固所学知识，反馈课堂教学效果，使下一节课的教学有的放矢. 将课堂延伸，使学生将课堂所学内容再认识和升华.

（此案例已录成光盘）

五、习题参考答案与提示

练习 A（第 67 页）

1. 图略.
2. (1) $a>b$;

   (2) $A(-3)$位于$B(-4)$右侧；　$B(4)$ 位于 $A(3)$右侧；

   $B(4)$位于$A(-3)$右侧；　$A(3)$在 $B(-4)$的右侧.
3. 不能.
4. (1) 当 $x>0$ 时，$N(2x)$位于$M(x)$右侧；

   当 $x=0$ 时，$N(2x)$与$M(x)$重合；

   当 $x<0$ 时，$M(x)$位于 $N(2x)$右侧.

   (2) $B(c+2)$位于 $A(c)$右侧.

   (3) 当 $a>0$ 时，$C(x)$位于 $D(x-a)$右侧；

   当 $a=0$ 时，$C(x)$与 $D(x-a)$重合；

   当 $a<0$ 时，$D(x-a)$位于 $C(x)$右侧.

   (4) 当 $x>1$ 或 $x<0$ 时，$F(x^2)$位于$E(x)$右侧；

   当 $x=1$ 或 $x=0$ 时，$F(x^2)$与$E(x)$重合；

   当 $0<x<1$ 时，$E(x)$位于 $F(x^2)$右侧.
5. (1) $AB=|AB|=3$;　(2) $AB=|AB|=5$;　(3) $AB=-3$，$|AB|=3$;

   (4) $AB=-5$，$|AB|=5$.

练习 B（第 68 页）

1. (-1)和(1)两点，图略.
2. (1) $P(-2)$，$P(2)$，图略.

   (2) $A(-3)$的左侧，$A(3)$的右侧，图略.
3. 点(-5)或点(3).
4. (1) 区间 $(4,10)$;　(2) 区间$(-\infty,1)$或$(3,+\infty)$;　(3) (-6) 或 (0).

练习 A（第 71 页）

1. (1) $\sqrt{73}$;　(2) $\sqrt{61}$;　(3) 3;　(4) $\sqrt{13}$.
2. 提示：证 $|AB|=|AC|$.
3. (1) $(0,3)$;　(2) $\left(-\frac{3}{2},-3\right)$.
4. $A'(-2,-3)$，$B'(3,-5)$，$C'(2,4)$，$D'(-3,5)$，$P'(-a,-b)$.

练习 B（第 71 页）

1. $a=\pm 3\sqrt{21}$.

2. $D(-4,\ -1)$.

3. $A'(-6,\ 5)$，$B'(-5,\ -1)$，$C'(-3,\ 5)$，$D'(-1,\ -3)$，图略.

4. 设点 $P(x_0,\ y_0)$是奇函数 $y=f(x)$图象上任一点，即 $y_0=f(x_0)$.

   由中点坐标公式可知，点 P 关于坐标原点的对称点 P' 的坐标为$(-x_0,\ -y_0)$.

   因为 $y=f(x)$是奇函数，所以

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0.$$

   所以点 P' 也在函数 $y=f(x)$的图象上.

   所以奇函数的图象关于坐标原点成中心对称图形.

习题 2-1A（第 72 页）

1. $AB=2$，　$BC=1$，　$CD=-4$，　$EA=-4$.

2. (1) 5；　(2) 2；　(3) 38；　(4) 6.

3. $d(A,\ B)=1$，　$d(B,\ C)=2\sqrt{2}$，　$d(A,\ C)=\sqrt{5}$.

4. $(9,\ 0)$或$(-1,\ 0)$.

5. $M\left(\frac{3}{8},\ 0\right)$.

6. $y=-1$ 或 11.

7. (1) $d(A,\ B)=2\sqrt{5}$，对称中心为$(5,\ 3)$；

   (2) $d(C,\ D)=2\sqrt{17}$，对称中心为$(2,\ -3)$；

   (3) $d(E,\ F)=5$，对称中心为$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$.

8. 提示：设 AB 中点 E，BC 中点 F，AC 中点 G. 所以 $E(0,\ 2)$，所以 $d(C,\ E)=|CE|=3$.

   同理$|AF|=3$，$|BG|=3\sqrt{2}$.

习题 2-1B（第 72 页）

1. $(3,\ 0)$和$(0,\ -3)$.

2. C 为$(0,\ 5)$或$\left(0,\ -\frac{13}{7}\right)$.

3. $x=-1$，$y=-1$.

4. 提示：由于$|AB|+|BC|\geqslant|AC|$，可由证 $d(A,\ C)=d(A,\ B)+d(B,\ C)$得到.

5. 提示：$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$.

6. 提示：过程仿 2.1.2 中的例 3.

7. 设点 $P(x,\ y)$是所求二次函数的图象上任意一点.

   则点 P 关于点 $M(2,\ 0)$的对称点 P' 的坐标为$(4-x,\ -y)$.

   由已知，点 P' 在函数 $y=x^2+1$ 的图象上，所以

$$-y=(4-x)^2+1.$$

整理得 $y=-x^2+8x-17$.

因此所求二次函数的解析式为 $y=-x^2+8x-17$.

探索与研究（第 73 页）

提示：讨论在数轴上与点(−3)和点(1)距离和、差的种种情况.

1. $x=-3\frac{1}{2}$，$x=\frac{3}{2}$.

2. $x=-3$，$-3<x<1$，$x=1$.

3. 无实数解.

4. 无实数解.

5. $x\geqslant 1$.

6. $x=\frac{1}{2}$.

练习 A（第 76 页）

1. (1) $y=5x-3$；　(2) $y=-3x+8$.

2. (1) $k=-\frac{3}{4}$；　(2) $k=0$；　(3) $k=\frac{9}{5}$；　(4) 不存在.

练习 B（第 76 页）

1. $k_{AB}=\frac{1}{2}$，　$k_{BC}=-\frac{4}{3}$，　$k_{AC}=6$.

2. (1) $k=0$，$\theta=0$；　(2) k 不存在，$\theta=90^\circ$；　(3) $k=1$，$\theta=45^\circ$.

3. (1) $y=3x+4$；　(2) $y=x+2$；　(3) $y=-3x+4$；　(4) $y=-x+8$.

练习 A（第 79 页）

1. (1) $y=\frac{2}{3}x$；　(2) $y=\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}$；

(3) $y=-x+2$；　(4) $y=1$；

(5) $x+y-1=0$；　(6) $3x-4y+13=0$.

2. (1) 过点(−1，2)，$k=1$；　(2) 过点(2，−4)，$k=\sqrt{3}$；

(3) 过点(0，3)，$k=-4$；　(4) 过点(0，−3)，$k=\frac{2}{5}$.

3. (1) $y=-2x$；　(2) $y=-x+3$；　(3) $x=2$；　(4) $y=1$；

(5) $y=5x-2$；　(6) $y=-x+5$.

练习 B（第 79 页）

1. 过(−1，1)点.

2. $k=\frac{5}{6}$.

3. (1) $y=-x+3$; (2) $y=\frac{13}{3}x-18$;

(3) $y=-\frac{8}{5}x+\frac{33}{5}$; (4) $y=7$.

4. 设 l 的方程为 $y=kx+b'$，l 过 $(a, 0)$，$(0, b)$ 点，有

$$\begin{cases} ak+b'=0 \\ b'=b \end{cases}$$

得 $b'=b$，$k=-\frac{b}{a}$，由此得直线 l 的方程为 $y=-\frac{b}{a}x+b$，即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

练习 A（第 81 页）

1. (1) $k=\frac{2}{3}$，$b=-2$； (2) $k=3$，$b=-7$；

(3) $k=\frac{2}{5}$，$b=0$； (4) $k=-1$，$b=3$.

2. (1) $S=\frac{1}{6}$； (2) $S=\frac{2}{15}$； (3) $S=\frac{1}{2}$； (4) $S=6$.

3. l_{AC}：$y=\frac{3}{5}x$， l_{BD}：$y=-3x+9$.

练习 B（第 81 页）

1. (1) $C=0$； (2) $A\neq 0$，$B\neq 0$；

(3) $B=0$，$A\neq 0$，$C\neq 0$； (4) $A=0$，$B\neq 0$，$C\neq 0$；

(5) $A=0$，$B\neq 0$； (6) $B=0$，$A\neq 0$.

2. $2x-3y-1=0$.

3. $k_{AB}=-\frac{1}{3}$， $k_{AC}=2$， $k_{BC}=-\frac{3}{2}$.

练习 A（第 84 页）

1. (1) $(\frac{36}{29}, \frac{85}{29})$； (2) $(-8, -9)$.

2. (1) 相交； (2) 重合； (3) 平行； (4) 平行； (5) 相交.

3. (1) $2x+y-7=0$； (2) $2x-3y-10=0$.

练习 B（第 84 页）

1. (1) 相交； (2) 重合； (3) 平行.

2. 平行，图略.

练习 A（第 87 页）

1.（1）垂直；　（2）不垂直；　（3）垂直；　（4）不垂直.

2. l_1 与 l_3，l_2 与 l_6，l_4 与 l_5 分别垂直.

3. 因为 $k_{AB}=-\frac{3}{2}$，$k_{BC}=\frac{2}{3}$，$k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，所以 $AB\perp BC$.

4.（1）$x+y-5=0$；　（2）$y=-3$；　（3）$x=3$；　（4）$x+3y-7=0$.

练习 B（第 87 页）

1. $a=3$.

2. $m=6$ 或 $m=-1$.

3.（1）垂直；　（2）不垂直.

4. $x-y+4=0$.

练习 A（第 89 页）

1.（1）$d=1$；　（2）$d=\sqrt{2}$；　（3）$d=0$；　（4）$d=\frac{\sqrt{10}}{2}$；　（5）$d=4$.

2. $d=2\sqrt{13}$.

练习 B（第 89 页）

1.（1）3；　（2）0；　（3）$\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2. $d=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

3.（10，0）或$\left(-\frac{20}{3},\ 0\right)$.

习题 2-2A（第 90 页）

1. $k_{AC}=\frac{3}{5}$，　$k_{BD}=-\frac{3}{5}$.

2.（1）$\sqrt{3}x-y+3-5\sqrt{3}=0$；　（2）$4x-y-2=0$；
（3）$y-3=0$；　（4）$x+3y+3=0$.

3. $a=4$，　$b=-7$.

4. $\frac{98}{3}$.

5. $7x-4y+9=0$，　$x+2y-9=0$，　$2x-14y+9=0$.

6. $3x-4y+12=0$，　$3x-4y-12=0$.
$3x+4y+12=0$，　$3x+4y-12=0$.

7.（1）$y-3=0$；　（2）$7x-4y-1=0$；

(3) $x+2y-4=0$； (4) $x+2=0$.

8. (1) $k=-4$； (2) $k=0$； (3) $k=\frac{3}{2}$； (4) $k=-1$.

9. (1) $a=-2$, $b=\frac{4}{3}$； (2) $a=3$, $b=5$；

(3) $a=0$, $b=0$； (4) $a=4$, $b=5$.

10. (1) $7x-2y-20=0$； (2) $3x-y-5=0$；

(3) $x-2y-3=0$.

11. (1) 相交，交点为$(3, 5)$； (2) 重合；

(3) 平行； (4) 相交，交点为$(3, 0)$.

12. (1) 平行； (2) 垂直；

(3) 不平行，不垂直； (4) 垂直.

13. $x+y+1=0$.

14. (1) $\sqrt{5}$； (2) 2； (3) 3； (4) $\frac{1}{2}$.

15. $A'(1, 2)$； $B'(-1, -5)$； $C'(-2, 3)$； $D'(4, -3)$.

习题 2-2B（第 91 页）

1. $k_2>k_3>k_1$.

2. $3x+4y-5=0$, $3x+4y+5=0$.

3. $S=\frac{63}{2}$.

4. $y=x+3$ 和 $y=-x-3$.

5. $x=-14$.

6. (1) $8x-5y+25=0$；

(2) $3x-y+4=0$, $x+2y-4=0$, $2x-3y+8=0$.

7. (1) $2x-y-4=0$； (2) $2x+3y-2=0$.

8. $\frac{13}{10}$.

9. $a=-1$.

10. (1) $a=4$； (2) $a=\frac{5}{2}$.

11. $x-y-1=0$.

12. $(2, 4)$.

练习 A（第 96 页）

1. (1) $x^2+y^2=4$； (2) $x^2+(y-1)^2=4$；

(3) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$； (4) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

2. 因为 $1^2+1^2<4$， 所以点 A 在圆内；

因为 $1^2+(\sqrt{3})^2=4$， 所以点 B 在圆上；

因为 $1^2+2^2=5>4$， 所以点 C 在圆外.

3. (1) 圆心$(0, 0)$，半径$\sqrt{5}$； (2) 圆心$(3, 0)$，半径 2；

(3) 圆心$(0, -1)$，半径$\sqrt{2}$； (4) 圆心$(-2, 1)$，半径$\sqrt{3}$.

练习 B（第 96 页）

1. (1) 因为线段 AB 为直径，所以圆心为$(3, 6)$.

设圆的方程为$(x-3)^2+(y-6)^2=r^2$，将 $A(2, 3)$代入这个圆的方程，得 $r^2=10$，

所以圆的方程为 $(x-3)^2+(y-6)^2=10$.

(2) 设圆的方程为 $x^2+(y+3)^2=r^2$，将$(3, 1)$代入该圆的方程，得 $r^2=25$，

所以这个圆的方程为 $x^2+(y+3)^2=25$.

(3) 解法一：设圆的方程为 $x^2+y^2=a$，因为这个圆与直线 $y=-2x+\frac{1}{2}$ 与圆相切，代入圆的方程得

$$5x^2-2x+\frac{1}{4}-a=0,$$

所以 $\Delta=4-4\times5\times\left(\frac{1}{4}-a\right)=0$，所以 $a=\frac{1}{20}$.

所以圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{1}{20}$.

解法二：用点到直线的距离公式求解.（过程略）

(4) 设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=1$，将$(0, 1)$，$(0, 3)$代入该圆的方程得 $a=0$，$b=2$，

所以圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

2. 设圆的方程为 $(x-a)^2+y^2=b$，依题意列方程，求解得 $a=2$，$b=10$，

所以圆的方程为$(x-2)^2+y^2=10$.

练习 A（第 99 页）

1. (1) 圆心$(3, 0)$，$r=3$； (2) 圆心$(0, 2)$，$r=3$；

(3) 圆心$(2, 3)$，$r=1$； (4) 圆心$(1, -2)$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

2. (1) 原点；

(2) 以$(1, -2)$为圆心，$\sqrt{11}$为半径的圆；

(3) 以$(1, 1)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆；

(4) $a\neq0$ 或 $b\neq0$ 时，以$(-a, 0)$为圆心，$\sqrt{b^2+a^2}$为半径的圆；$a=b=0$ 时，表示点$(0, 0)$.

练习 B（第 99 页）

1. $x^2+y^2+4x-\frac{25}{2}y=0$.

2. 轨迹方程为 $x^2+y^2-14x-4y+21=0$，即以(7，2)为圆心，$4\sqrt{2}$为半径的圆.

提示：设$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}=\sqrt{2}$.

练习 A（第 101 页）

1. (1) $d=\sqrt{5}$；

(2) $r>\sqrt{5}$，即直线与圆相交.

2. 相交，交点为(3，2)，(−2，−3).

3. (1) $d=5$，$r=5$，所以相切；(2) $d=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$，$r=1$，所以相离.

练习 B（第 101 页）

1. $-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$时，两交点；

$C=\pm2\sqrt{2}$时，一交点；

$C>2\sqrt{2}$或$C<-2\sqrt{2}$时，无交点.

2. 切线方程为 $\sqrt{6}x+3y-5\sqrt{6}=0$.

设直线方程为 $kx-y+\sqrt{6}-2k=0$，则$\dfrac{\left|\sqrt{6}-2k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{10}$. 解得 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. $m=\pm\sqrt{3}$，$y=\pm\sqrt{3}x+4$.

4. 设 $y=2x+a$，代入 $x^2+y^2-2y-4=0$，可由 $\Delta=0$ 得 $a=6$ 或 $a=-4$，

所以直线方程为 $y=2x+6$ 或 $y=2x-4$.

练习 A（第 103 页）

1. (1，−2)，(3，0).

2. (1) $r_1=2$，$r_2=8$，$d=10$，两圆外切；

(2) $r_1=2$，$r_2=4$，$d=\sqrt{13}$，两圆相交.

练习 B（第 103 页）

1. $a=\pm2\sqrt{5}$或$a=0$.

2. $(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

3. (1)内含；　(2)相交，交点为(0，0)，(−1，−1).

习题 2-3A（第 104 页）

1. (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=40$；　(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=34$；

(3) $(x-3)^2+(y+5)^2=32$；　(4) $x^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{65}{4}$.

2. $x^2+y^2-8x+2y+12=0$.

3. $(x+2)^2+(y-2)^2=10$.

4. $d=5$，$r=5$，直线与圆相切.

5. $C=\pm 5\sqrt{26}$.

6. $x-\sqrt{3}y+4=0$.

7. (1) 圆心$(1, 0)$，$r=\sqrt{6}$； (2) 圆心$(-1, 2)$，$r=3$；

(3) 圆心$(-2, 0)$，$r=2$； (4) 圆心$\left(0, \frac{5}{2}\right)$，$r=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

8. $d=\sqrt{58}$.

9. $d=\frac{3}{\sqrt{5}}$，$r=1$. 因为$d>r$，所以相离.

10. $(x-3)^2+(y-20)^2=225(x\neq 3)$. 轨迹为以$(3, 20)$为圆心，以 15 为半径的圆，但不包括$(3, 5)$和$(3, 35)$两点.

提示：由$|AB|=|AC|$，代入三点的坐标化简.

习题 2-3B（第 104 页）

1. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$或$(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

2. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$或$(x+3)^2+(y-5)^2=25$.

提示：设圆心为$(a, 5)$，则$(x-a)^2+(y-5)^2=25$，由点$(1, 2)$在圆上，可推出$a=5$或-3.

3. 当$k\in(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$，直线与圆相离；

当$k=\pm\sqrt{3}$，直线与圆相切；

当$k\in(-\infty, -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}, +\infty)$，直线与圆相交.

4. 提示：设$P(x, y)$为一动点. 求直线PA和PB的斜率或方程，再利用两条直线垂直的条件就可证明. 此题结论，也可直接用勾股定理证明：设$P(x, y)$为一动点. 则点P在以AB为直径的圆上的条件是

$$PA^2+PB^2=AB^2,$$
$$PA^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,\ PB^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2,$$
$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

代入上式，整理化简后就可得

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

5. 切线方程为$3x+4y-50=0$.

6. 切线长为$\sqrt{20-9}=\sqrt{11}$.

提示：切线长$=\sqrt{d^2-R^2}$.

7. $3x-y\pm 2\sqrt{10}=0$.

提示：切线与$x+3y=10$垂直，所以斜率$k=3$，设切线为$y=3x+b$.

8. $x^2+y^2-15x+54=0$.

提示：设 $M(x, y)$，则 $P(2x-15, 2y)$，代入圆的方程.

9. 解：设圆心为 $C(a, b)$. 由题意，被轴截得的弦所对的圆心角为 $90°$，有

$$\begin{cases} a^2=R^2-1 \\ b^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 \end{cases}$$

消去 R，得 $a^2-2b^2+1=0$. ①

又由已知得

$$\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

可知 $a-2b=1$，即 $a=2b+1$，或 $a-2b=-1$，即 $a=2b-1$. 分别代入①式，解得

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

即圆心为$(1, 1)$或$(-1, -1)$. 由 $a^2=R^2-1$，知圆半径 $R=\sqrt{2}$. 所以圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2.$$

10. 圆拱立柱的高分别为 2.70 m，3.86 m，3.86 m，2.70 m.

练习 A（第 107 页）

1. 图略.
2. (1) $A(0, 0, 0)$，$B(1, 0, 0)$，$D(0, 1, 0)$，$C(1, 1, 0)$，
   $A_1(0, 0, 1)$，$B_1(1, 0, 1)$，$D_1(0, 1, 1)$，$C_1(1, 1, 1)$；
   (2) 棱 CC_1 中点的坐标 $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$；
   (3) $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

练习 B（第 108 页）

1. 关于 xOy 平面的对称点$(2, 3, -4)$，关于 yOz 平面的对称点$(-2, 3, 4)$；
   关于 xOz 平面的对称点$(2, -3, 4)$；关于 x 轴的对称点为 $(2, -3, -4)$，关于 y 轴的对称点为 $(-2, 3, -4)$，关于 z 轴的对称点为 $(-2, -3, 4)$；
   关于原点的对称点为 $(-2, -3, -4)$.
2. 过点$(1, 2, 0)$且平行于 z 轴的一条直线.
3. $(2, -3, -1)$，$(2, 3, -1)$，$(-2, 3, -1)$，$(2, -3, 1)$，$(2, 3, 1)$，$(-2, 3, 1)$，$(-2, -3, 1)$.

练习 A（第 109 页）

1. $\sqrt{3}$， 3， $\sqrt{38}$， 5， $\sqrt{22}$.
2. (1) $d(A, B)=1$； (2) $d(C, D)=\sqrt{14}$.
3. $P(0, 0, 3)$.

练习 B（第 109 页）

1. （1）$5\sqrt{6}$；（2）13；（3）$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$；（4）$\dfrac{\sqrt{73}}{12}$.

2. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$或$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

3. $d(A, B)=4\sqrt{3}$，棱长为 4.

习题 2-4A（第 110 页）

1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2. B，E 在正方体外，C，D 在正方体内，A，F 在正方体边界上.

3. $|x|\leqslant\frac{1}{2}$，$|y|\leqslant\frac{1}{2}$，$|z|\leqslant\frac{1}{2}$.

4. 长=3，宽=2，高=6，对角线长=7.

习题 2-4B（第 110 页）

1. 以原点为圆心，1 为半径的球面上.

2. 满足条件：$6x-4y-13=0(x, y, z\in\mathbf{R})$.
   提示：设动点 $P(x, y, z)$，则条件为$|PA|=|PB|$.

3. $P(x_0, y_0, z_0)$满足 $x_0\in\mathbf{R}$，$y_0=-\frac{1}{2}$，$z_0=0$.

巩固与提高（第 112 页）

1. （1）真；（2）假；（3）假；（4）真；（5）真；（6）真；（7）真；（8）假.

2. （1）$(\frac{11}{2}, 0)$；（2）$x-4y+17=0$；
   （3）$2x-3y+5=0$；（4）$a=\frac{3}{2}$；
   （5）$x+y-5=0$；（6）$C=-3$ 或 $C=7$；
   （7）$(-3, 0)$；（8）$2x+3y+5=0$；（9）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$.

4. （1）$a\neq3$，$b\in\mathbf{R}$；（2）$a=3$，$b\neq2$；（3）$a=3$，$b=2$.

5. （1）$\frac{19}{10}\sqrt{10}$；（2）$\frac{11}{13}\sqrt{26}$；（3）3；（4）13.

6. 距离为$\frac{29}{53}\sqrt{53}$；面积为$\frac{29}{2}$.

7. $\left(-\frac{21}{13}, \frac{14}{13}\right)$.

8. (1) $(-1, 2)$; (2) $(x+1)^2+(y-2)^2=20$;

(3) $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$; (4) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$;

(5) $C=\pm 3\sqrt{5}$; (6) 相离;

(7) $3x-y\pm 2\sqrt{10}=0$; (8) $(2, -5)$.

9. $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=9$.

10. (1) $A(7, 1)$, $B(-5, -5)$; (2) 15.

11. $r=\frac{\sqrt{645}}{10}$.

12. $S=\frac{6\sqrt{154}}{25}$.

13. 提示：从这四个点中任意取出三个点，求出过这三个点的圆的方程，然后验证第四个点的坐标满足此方程即可.

14. $2x+y-5=0$.

15. $4x-3y-1=0$ 或 $3x-4y-6=0$.

16. $3\sqrt{35}$.

17. 通过点$(1, 0, 0)$且垂直于 x 轴(或平行于 yOz 平面)的平面.

18. $x+y+z=3$.

自测与评估（第 114 页）

1. (1) $x-y-8=0$; (2) $x-y-1=0$.

2. 入射光线：$x-y-2=0$；反射光线：$x+y-2=0$.

3. $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

4. $A\left(\frac{-2+\sqrt{46}}{2}, \frac{2+\sqrt{46}}{2}\right)$, $B\left(\frac{-2-\sqrt{46}}{2}, \frac{2-\sqrt{46}}{2}\right)$, $|AB|=2\sqrt{23}$.

5. $3x-4y+6=0$, $x=2$.

6. 分别为直线 $x-\frac{5}{4}=0$ 和圆 $3x^2+3y^2-16x+17=0$.

六、反馈与评价

（一）知识与方法测试（100 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 圆$(x-3)^2+(y-4)^2=1$关于直线 $x+y=0$ 对称的圆的方程是（　　）.

(A) $(x+3)^2+(y-4)^2=1$ (B) $(x+4)^2+(y+3)^2=1$

(C) $(x+4)^2+(y-3)^2=1$　　　　(D) $(x-3)^2+(y-4)^2=1$

2. A，B 为数轴上的两点，A 点的坐标为-1，$AB=6$，那么点 B 的坐标为(　　).

(A) 5　　(B) -7　　(C) 5 或-7　　(D) -5 或 7

3. 直线 $2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $mx+3y-2=0$ 平行，那么 m 的值是(　　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 2 或-3　　(D) -2 或 3

4. 一束光线自点 $P(1,1,1)$发出，被 xOy 平面反射到达点 $Q(3,3,6)$被吸收，那么光所走的距离是(　　).

(A) $\sqrt{37}$　　(B) $\sqrt{47}$　　(C) $\sqrt{33}$　　(D) $\sqrt{57}$

5. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 绕原点按逆时针方向旋转 30°后，所得的直线与圆$(x-2)^2+y^2=3$ 的位置关系是(　　).

(A) 直线过圆心　　(B) 直线与圆相交，但不过圆心

(C) 直线与圆相切　　(D) 直线与圆无公共点

6. 若方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆，那么 a 是(　　).

(A) 2　　(B) -2 或 1　　(C) -1　　(D) -2

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 已知直线 $ax+4y-2=0$ 与 $2x-5y+b=0$ 互相垂直，垂足为$(1,c)$，则 $a+b+c$ 的值是______.

8. 过圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 外一点 $P(-2,1)$，引圆的切线 PQ，Q 为切点. 则线段 PQ 的长为______.

9. 已知实数 x，y，z 满足$(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=2$，那么 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是______.

10. 原点在直线 l 上的射影为$(-2,1)$，那么直线 l 的方程为______.

三、解答题（共 50 分）

11. (满分 12 分)在$\triangle ABC$ 中，已知高 AN 和 BM 所在的直线方程分别为：$x+5y-3=0$ 和 $x+y-1=0$，边 AB 所在直线方程为 $x+3y-1=0$，求直线 BC，CA 和 AB 边上的高所在的直线方程.

12. (满分 12 分)求以相交圆 C_1：$x^2+y^2+4x+y+1=0$ 及 C_2：$x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的公共弦为直径的圆的方程.

13. (满分 12 分)设圆满足：① 截 y 轴所得弦长 2；② 被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为3∶1. 在满足①，②的所有圆中，求圆心到直线 l：$x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程.

14. (满分 14 分)已知 l_1：$x+2y+2=0$，l_2：$x-y+2=0$，过点 $P(1,1)$且与 l_1，l_2 构成三角形的面积为 $S(S>0)$的直线恰有 3 条，求 S.

知识与方法测试参考答案

一、1. B.　　2. A.　　3. C.　　4. D.　　5. C.　　6. C.

二、7. -4.　　8. $\sqrt{13}$.　　9. $27-10\sqrt{2}$.　　10. $2x-y+5=0$.

三、解答题

11. 解：因为 $BC\perp AN$，故 BC 的斜率为 $k_{BC}=5$，又由直线 AB，BM 可解得点 $B(1,0)$，故直线

BC 方程为 $5x-y-5=0$，同理，可得 AC 的斜率 $k_{AC}=1$. AB 边上的高所在的直线 CH 的斜率 $k_{CH}=3$ 及点 $A(-2, 1)$. $\triangle ABC$ 的垂心 $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，故直线 CA 方程为 $x-y+3=0$，AB 边上的高所在的直线方程为 $3x-y-1=0$.

12. 解：两圆方程相减，得 $2x-y=0$，即为两圆公共弦所在直线方程，显然 C_2 的圆心不在 $2x-y=0$ 上，故可设所求圆方程为

$$x^2+y^2+4x+y+1+\lambda(x^2+y^2+2x+2y+1)=0,$$

其圆心为 $\left(-\frac{2+\lambda}{1+\lambda}, -\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}\right)$，代入 $2x-y=0$，解得 $\lambda=-\frac{7}{2}$，故所求圆的方程为

$$5x^2+5y^2+6x+12y+5=0.$$

13. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

14. $\frac{20}{3}$.

（二）评价建议

本章评价应包含如下几个部分：

对双基的评价. 根据本章的知识结构可以在 2.2 节及 2.3 节结束时安排一次单元测试，在本章结束时安排一次章节测试. 以检查学生对基础知识及基本方法的掌握情况.

引导学生根据所学的知识研究一些有一定价值的问题，并形成小论文、小报告.

这里另外提供两个问题：

(1) 用解析法研究：圆内接六边形三组对边两两相交，其交点共线；圆外切六边形对角线交于一点.

(2) 甲、乙两人做游戏，甲按以下规则将一个球埋于某地：以三个已知的目标 A，B，C 为标志，将 AB 绕点 A 逆时针旋转 $90°$，得到 AD，将 CB 绕点 C 顺时针旋转 $90°$，得到 CE，取 DE 的中点 N，甲将球埋于 N 地. 然后甲将标志 B 移走，那么，乙能否找到球？他该如何做？

根据本章内容让学生围绕有关笛卡儿、解析几何的发展历史及解析几何的历史地位等问题搜集资料写一篇论文.