

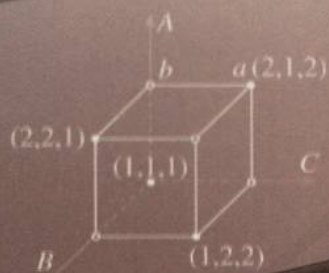
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-7 A 版 优选法与试验设计初步

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

出版发行 人民教育出版社

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编: 100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>

经 销 全国新华书店

印 刷 北京天宇星印刷厂

版 次 2007 年 1 月第 2 版

印 次 2019 年 8 月第 25 次印刷

开 本 890 毫米×1240 毫米 1/16

印 张 3.75

字 数 123 千字

书 号 ISBN 978-7-107-18682-0

定 价 3.85 元

价格依据文件号: 京发改规〔2016〕13号

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分·违者必究

如发现内容质量问题, 请登录中小学教材意见反馈平台: jcyjfk.pep.com.cn

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与本社联系。电话: 400-810-5788

绿色印刷 保护环境 爱护健康

亲爱的同学们:

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制, 在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起, 北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准(HJ2503-2011)《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分: 平版印刷》, 绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料, 生产过程注重节能减排, 印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来, 支持绿色印刷, 选择绿色印刷产品, 共同关爱环境, 一起健康成长!

北京市绿色印刷工程

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

编 者：张唯一 田载今

责任编辑：章建跃 刘长明

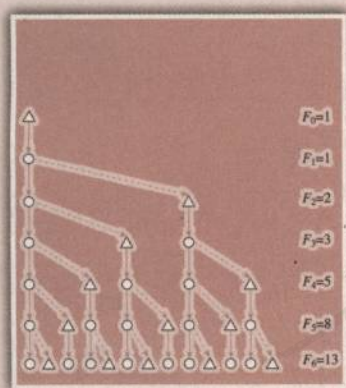
美术编辑：王 艾

封面设计：吴 敬

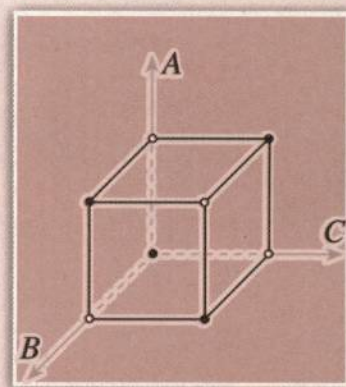
人教版®

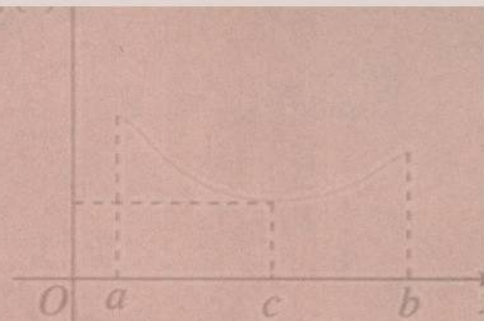
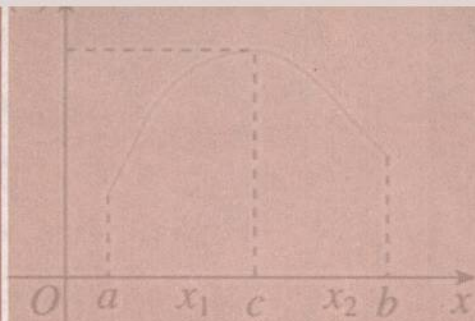
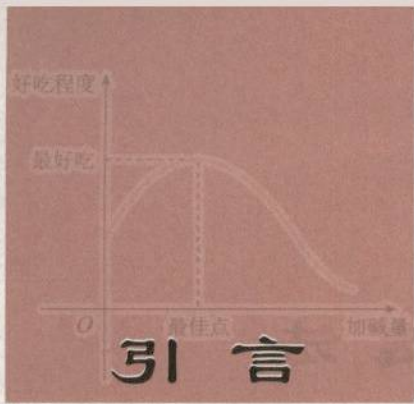
目 录

引言	1
第一讲 优选法	2
一 什么叫优选法	2
二 单峰函数	3
三 黄金分割法——0.618 法	5
1. 黄金分割常数	5
2. 黄金分割法——0.618 法	8
阅读与思考 黄金分割研究简史	10
四 分数法	11
1. 分数法	11
阅读与思考 斐波那契数列和黄金分割	15
2. 分数法的最优性	16
五 其他几种常用的优选法	18
1. 对分法	18
2. 盲人爬山法	19



3. 分批试验法	20
4. 多峰的情形	22
六 多因素方法	23
1. 纵横对折法和从好点出发法	24
2. 平行线法	26
3. 双因素盲人爬山法	27
第二讲 试验设计初步	29
一 正交试验设计法	30
1. 正交表	30
2. 正交试验设计	31
3. 试验结果的分析	31
4. 正交表的特性	34
二 正交试验的应用	35
学习总结报告	43
附录一	45
附录二	48
附录三	50





引言

有一种商品价格竞猜游戏，参与者在只知道售价范围的前提下，对一件商品的价格进行竞猜。当竞猜者给出的估价不正确时，主持人以“高了”“低了”作为提示语，再让竞猜者继续估价，在规定时间内猜对的，即可获得这件商品。如果参加类似的游戏，每次你将怎么给出估价呢？

蒸馒头是日常生活中常做的事情，为了使蒸出的馒头好吃，就要放碱。如果碱放少了，蒸出的馒头就发酸；碱放多了，馒头就会发黄且有碱味。对一定量的面粉来说，放多少碱最适合呢？如果你没有做馒头的经验，也没有人可以请教，如何迅速地找出合适的碱量？

一个农场希望知道某个玉米品种的高产栽培条件，假如可以掌握的因素是：种植密度、施化肥量、施化肥时间，如何迅速地找出高产栽培的条件？如何找出其中对玉米的产量影响比较大的因素呢？

事实上，现实中类似的问题举不胜数。你想过如何解决这些问题吗？通过本书的学习，你可以学到研究和解决这些问题的一些方法。

在生产、生活和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目的，需要对有关因素的最佳组合(简称**最佳点**)进行选择。关于最佳点的选择问题，称为优选问题。优选问题很常见，引言中提到的商品价格竞猜、蒸馒头放碱等都是优选问题。又如生煤炉，为了节省时间，降低耗煤量，往往在不使用的时候，就把炉门关闭，但如果炉门关闭得太死，炉子就容易灭；关得太松(即留的缝隙太宽)则耗煤量就大。炉门关到什么程度合适呢？这也是一个优选问题。在生产和科学试验中，选取“合适”的配方，寻找“合适”的操作和工艺条件，给出产品的“合理”设计参数，把仪器调节器调到“合适”的程度等都是优选问题。总之，优选问题在生产、科研和日常生活中大量存在。

对于那些试验结果和相关因素的关系不易用数学形式表达或数学表达太复杂的优选问题，人们往往通过做试验^①的办法来寻找各种因素的最佳点。

通过试验方法求最佳点时, 如果不合理安排, 我们可能面临大量的试验, 不仅要花费大量人力、财力和时间, 而且有时可能不具操作性. 例如, 找一个 1 km^2 池塘的最深点. 如果每隔 1 m 测量一次, 则差不多要测量 $1\,000 \times 1\,000$ 次, 即差不多 $1\,000\,000$ 个点, 虽然这里只有横竖两个因素, 但测量点是一个不小的数目. 如果要测量的不是池塘而是海

① 这里对试验应作广义的理解,即它可以是物理、化学、生物或生活生产中的实物试验,也可以是数学试验(例如在计算机上进行试验).



华罗庚(1910. 11. 12— 1985. 6. 12), 江苏金坛人, 世界著名数学家, 中国科学院院士。

洋,或涉及的因素是3个、4个,甚至10个,那么需要做的试验数目就更可观了.可以说做完这些试验几乎是不可能的.

有没有用最少的试验次数就能找到最理想结果的方法呢？或者说怎样迅速找到最优方案？这就是优选法要解决的问题。**优选法**是根据生产和科学研究中的不同问题，利用数学原理，合理安排试验，以最少的试验次数迅速找到最佳点的科学试验方法。用优选法的目的在于减少试验的次数。对上面的测池塘最深点问题，如果用优选法，试验次数将大大减少。

优选法和其他科学一样,是在实践的基础上产生和发展起来的.20世纪60年代,著名数学家华罗庚亲自组织推广了优选法,使优选法得到了广泛应用,取得了可喜成果.

习题1.1



1. 什么叫优选法?
2. 你能举一些自己生活中遇到过的优选问题吗?

二、单峰函数

在军事训练中,经常要考虑发射角度多大时炮弹的射程最远.这是一个优选问题.

如图 1-1, 设炮弹的初速度为 v , 发射角度为 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 在时刻 t , 炮弹距发射点的水平距离为 x , 离地面的高度为 y . 如果忽略空气阻力, 则有

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2 \cos^2 \theta} x^2,$$

其中 $v = |v|$, g 为重力加速度.

令 $y=0$, 得

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta.$$

因此, 炮弹的射程为 $\frac{v^2}{g} \sin 2\theta$.

从上述讨论可以发现, 在一定的发射速度下, 炮弹的射程是发射角的函数. 当发射角 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ 时, 射程随发射角的增加而增加; 当发射角为 $\frac{\pi}{4}$ 时, 射程最大, 因此 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是发射角的最佳点; 当发射角 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 射程随发射角的增加而减小(图 1-2).

许多优选问题都有如上所述的情形. 就是说, 我们常常仅知道在试验范围内有一个最佳点, 当试验范围内变化因素的取值比最佳点再大些或再小些时, 试验效果都差, 而且取距离最佳点越远试验效果越差. 通常称这样的试验具有单峰性.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上只有唯一的最大值点(或最小值点) C , 而在最大值点

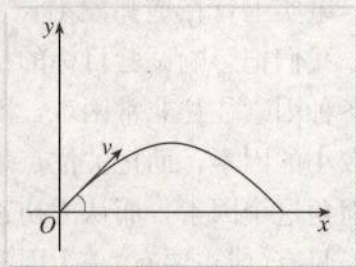


图 1-1

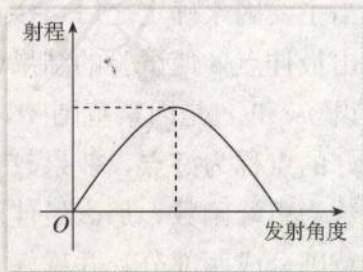


图 1-2

(或最小值点) C 的左侧,函数单调增加(减少);在点 C 的右侧,函数单调减少(增加),则称这个函数为区间 $[a, b]$ 上的**单峰函数**.例如,图 1-3 中的两个函数 $f(x)$, $g(x)$ 就是单峰函数.

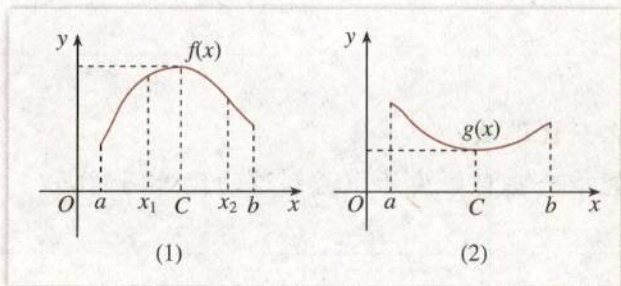


图 1-3

我们规定,区间 $[a, b]$ 上的单调函数也是单峰函数.

由于对有最大值点和最小值点的处理方法类似,下面我们仅考虑有最大值点的单峰函数.

事实上,在炮弹发射试验中,除发射角外,初速度、空气阻力等也会影响炮弹的射程.我们把影响试验目标的初速度、发射角、空气阻力等称为**因素**.由于全面考虑试验中的各种因素往往非常困难,因此我们常常会假设其中的某些因素保持不变,或忽略某些影响较小的因素,而把关注点集中在感兴趣的某个因素上.例如,上述过程中,我们只考虑发射角这个因素,而认为初速度保持不变,并忽略了空气阻力.像这样,在一个试验过程中,只有(或主要有)一个因素在变化的问题,称为**单因素问题**.另外,我们把试验中可以人为调控的因素(例如发射角)叫做可控因素,而把那些不能人为调控的因素(例如空气阻力)叫做不可控因素.一般的,我们感兴趣的都是可控因素.

由上述过程可以看到,射程(目标)可以表示为发射角(因素)的函数.像这样表示目标与因素之间对应关系的函数,称为**目标函数**.我们常用 x 表示因素, $f(x)$ 表示目标函数(并不需要 $f(x)$ 的真正表达式).假定包含最佳点的因素范围(试验范围)下限用 a 表示,上限用 b 表示,因素范围可以用 a 到 b 的线段来表示,并记作 $[a, b]$.如果不考虑端点 a, b ,就记成 (a, b) .

当主要因素确定之后,接下来的任务是选择某种方法安排**试验点**(简称**试点**),通过试验找出最佳点,使试验的结果(目标)最好.

设 x_1 和 x_2 是因素范围 $[a, b]$ 内的任意两个试点, C 点为最佳点,并把两个试点中效果较好的点称为**好点**,效果较差的点称为**差点**.由图 1-4(1)、(2)可以直观地发现:若目标函数为单峰函数,那么最佳点与好点必在差点的同侧.于是,我们以差点为分界点,把因素范围分成两部分,并称好点所在部分为**存优范围**.

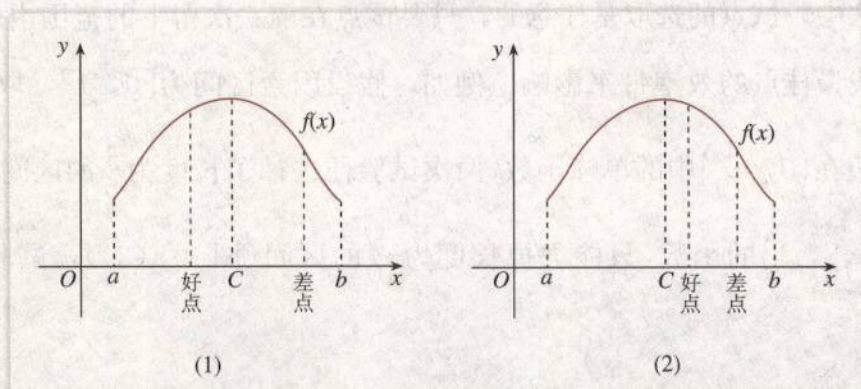


图 1-4

习题 1.2



1. 判断下列函数在区间 $[-1, 5]$ 上哪些是单峰函数:

- (1) $y = 3x^2 - 5x + 2$;
- (2) $y = -x^2 - 3x + 1$;
- (3) $y = \cos x$;
- (4) $y = e^x$;
- (5) $y = x^3$.

2. 你在现实生活中遇到过哪些具有单峰性质的现象? 举例说明.

三、黄金分割法——0.618 法

1. 黄金分割常数

探究

对于一般的单峰函数, 如何安排试点才能迅速找到最佳点?

由于单峰函数最佳点与好点必在差点的同侧, 因此, 可按如下想法安排试点: 先在因素范围 $[a, b]$ 内任选两点各做一次试验, 根据试验结果确定差点与好点, 在差点处把 $[a, b]$ 分成两段, 截掉不含好点的一段, 留下存优范围 $[a_1, b_1]$, 显然有 $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$; 再在 $[a_1, b_1]$ 内任选两点各做一次试验, 并与上次的好点比较, 确定新的好点和新的差点, 并在新的差点处把 $[a_1, b_1]$ 分成两段, 截掉不包含新好点的那段, 留下新的存优范围 $[a_2, b_2]$, 同样有 $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ ……重复上述步骤, 可使存优范围逐步缩小.

在这种方法中,试点的选取是任意的,只要试点在前一次留下的范围内就行了.这种任意性会给寻找最佳点的效率带来影响.例如,假设因素区间为 $[0, 1]$,取两个试点 $\frac{2}{10}$ 、 $\frac{1}{10}$,那么对峰值在 $(0, \frac{1}{10})$ 中的单峰函数,两次试验便去掉了长度为 $\frac{4}{5}$ 的区间(图 1-5(1));但对于峰值在 $(\frac{2}{10}, 1)$ 的函数,只能去掉长度为 $\frac{1}{10}$ 的区间(图 1-5(2)),试验效率就不理想了.

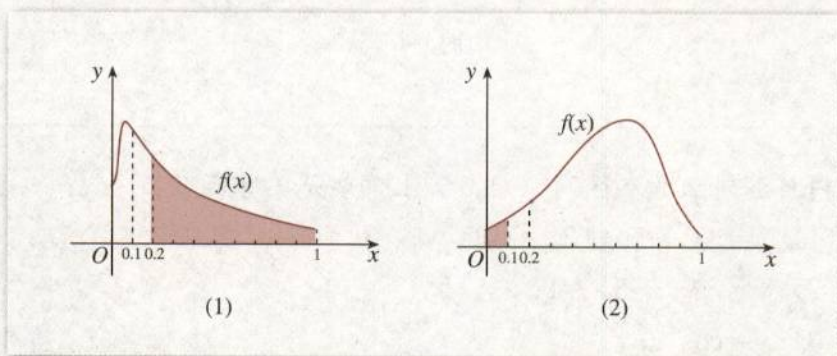


图 1-5

思考

怎样选取各个试点,可以最快地达到或接近最佳点?

我们希望能“最快”找到或接近最佳点的方法不只针对某个具体的单峰函数,而是对这类函数有普遍意义.由于在试验之前无法预先知道哪一次试验效果好,哪一次差,即这两个试点有同样的可能性作为因素范围 $[a, b]$ 的分界点,所以为了克服盲目性和侥幸心理,在安排试点时,最好使两个试点关于 $[a, b]$ 的中心 $\frac{a+b}{2}$ 对称.同时,为了尽快找到最佳点,每次截去的区间不能太短,但是也不能很长.因为为了一次截得足够长,就要使两个试点 x_1 和 x_2 与 $\frac{a+b}{2}$ 足够近,这样,第一次可以截去 $[a, b]$ 的将近一半.但是按照对称原则,做第三次试验后就会发现,以后每次只能截去很小的一段,结果反而不利于很快接近最佳点.

为了使每次去掉的区间有一定的规律性,我们这样来考虑:每次舍去的区间占舍去前的区间的比例数相同.

下面进一步分析如何按上述两个原则确定合适的试点.如图 1-6,设第 1 试点、第 2 试点分别为 x_1 和 x_2 , $x_2 < x_1$ 且 x_1, x_2 关于 $[a, b]$ 的中心对称,即 $x_2 - a = b - x_1$.

显然, 不论点 x_2 (或点 x_1) 是好点还是差点, 由对称性, 舍去的区间长度都等于 $b-x_1$. 不妨设 x_2 是好点, x_1 是差点, 于是舍去 $(x_1, b]$. 再在存优范围 $[a, x_1]$ 内安排第 3 次试验, 设试点为 x_3 , x_3 与 x_2 关于 $[a, x_1]$ 的中心对称 (如图 1-7 所示).

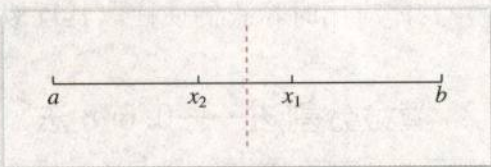


图 1-6

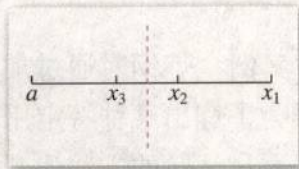


图 1-7

点 x_3 应在点 x_2 左侧. 因为如果点 x_3 在点 x_2 的右侧, 那么当 x_3 是好点, x_2 是差点时, 要舍去区间 $[a, x_2]$, 而它的长度与上次舍去的区间 $(x_1, b]$ 的长度相同, 违背成比例舍去的原则. 于是, 不论点 x_3 (或点 x_2) 是好点还是差点, 被舍去的区间长度都等于 x_1-x_2 . 按成比例舍去的原则, 我们有等式

$$\frac{b-x_1}{b-a} = \frac{x_1-x_2}{x_1-a}, \quad (1)$$

其中, 左边是第一次舍去的比例数, 右边是第二次舍去的比例数. 对式(1)变形, 得

$$1 - \frac{b-x_1}{b-a} = 1 - \frac{x_1-x_2}{x_1-a},$$

即

$$\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{x_2-a}{x_1-a}. \quad (2)$$

式(2)两边分别是两次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数. 设每次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数为 t , 即

$$\frac{x_1-a}{b-a} = t, \quad (3)$$

则由 $b-x_2 = x_1-a$ 可得

$$\frac{x_2-a}{b-a} = 1-t. \quad (4)$$

由式(2)得

$$\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{\frac{x_2-a}{b-a}}{\frac{x_1-a}{b-a}}, \quad (5)$$

把(3)与(4)代入(5), 得

$$t = \frac{1-t}{t},$$

即

$$t^2 + t - 1 = 0.$$

解得 $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 其中 t_1 为对本问题有意义的根, 这就是**黄金分割常数**, 用 ω 表示.

试验方法中, 利用黄金分割常数 ω 确定试点的方法叫做**黄金分割法**. 由于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是无

理数,具体应用时,我们往往取其近似值 0.618,相应地,也把黄金分割法叫做 0.618 法.

2. 黄金分割法——0.618 法

把试点安排在黄金分割点来寻找最佳点的方法,即黄金分割法,是最常用的单因素单峰目标函数的优选法之一.下面我们通过例子说明它的具体操作方法.

案例 炼钢时通过加入含有特定化学元素的材料,使炼出的钢满足一定的指标要求.假设为了炼出某种特定用途的钢,每吨需要加入某元素的量在 1 000 g 到 2 000 g 之间,问如何通过试验的方法找到它的最优加入量?

最朴素的想法就是以 1 g 为间隔,从 1 001 开始一直到 1 999,把 1 000~2 000 g 间所有的可能性都做一遍试验,就一定能找到最优值.这种方法称为均分法.但这样要做 1 000 次试验,在时间、人力和物力上都是一种浪费.用 0.618 法,可以更快、更有效地找出最佳点.具体操作方法如下:

用一张纸条表示 1 000~2 000 g,以 1 000 为起点标出刻度.找出它的黄金分割点 x_1 (在长度的 0.618 处)作为第 1 试点;再对折纸条,找出 x_1 的对称点 x_2 作为第 2 试点(图 1-8).

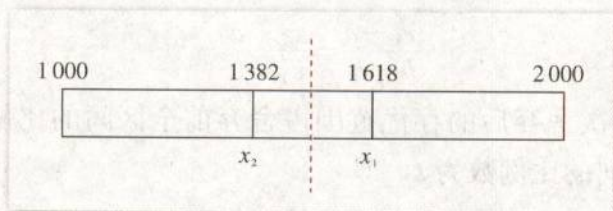


图 1-8

这两点的材料加入量是

$$x_1 = 1\,000 + 0.618 \times (2\,000 - 1\,000) = 1\,618(\text{g}),$$

$$x_2 = 1\,000 + 2\,000 - x_1 = 1\,382(\text{g}).$$

如果称因素范围的两端分别为小头和大头,那么上述两式可表示为

$$x_1 = \text{小} + 0.618 \times (\text{大} - \text{小}); \quad (1)$$

$$x_2 = \text{小} + \text{大} - x_1. \quad (2)$$

对于式(2),相当于是“加两头,减中间”.类似的,在确定第 n 个试点 x_n 时,如果存优范围内相应的好点是 x_m ,那么有

$$x_n = \text{小} + \text{大} - x_m. \quad (*)$$

比较两次试验结果,如果第 2 试点比第 1 试点好,则沿 1 618 处将纸条剪断,去掉 1 618 以上部分,保留 1 618 以下部分.将保留的纸条对折,找出第 2 试点 x_2 的对称点 x_3 作为第 3 试点(图 1-9).按公式(*),有

$$x_3 = 1\,000 + 1\,618 - 1\,382 = 1\,236,$$

即第 3 次的材料加入量是 1 236 g.

如果这两次试验结果一样,则应具体分析,看最佳点可能在哪一边,再决定取舍.在一般情况下,可以同时划去因素范围 $[1\,000, 1\,382]$ 和 $[1\,618, 2\,000]$,仅保留中间因素范围 $[1\,382, 1\,618]$.那么这样做会不会划去最佳点呢?

如果第2试点仍是好点,则剪掉1 236以下部分,在留下部分内寻找 x_2 的对称点 x_4 作为第4试点(图1-10),按照公式(*)可得第4试点的材料加入量为1 472.

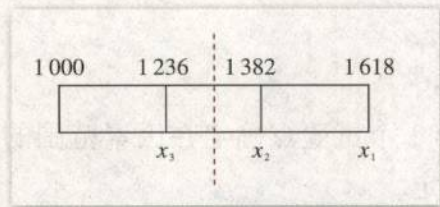


图 1-9

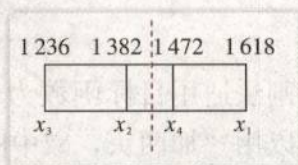


图 1-10

如果这点比第2点好,则剪掉1 382以下部分,在留下的部分内按同样的方法继续下去,就能迅速逼近该元素的最佳加入量.

对于一般的因素范围 $[a, b]$,用0.618法确定试点的操作过程与上述过程完全一致.

从上述过程可以看到,用0.618法寻找最佳点时,虽然不能保证在有限次内准确找出最佳点,但随着试验次数的增加,最佳点被限定在越来越小的范围内,即存优范围会越来越小.我们用存优范围与原始范围的比值来衡量一种试验方法的效率,这个比值叫做**精度**,即 n 次试验后的精度为

$$\delta_n = \frac{n \text{ 次试验后的存优范围}}{\text{原始的因素范围}}.$$

显然,在相同试验次数下,精度越高,方法越好.

用0.618法确定试点时,从第2次试验开始,每一次试验都把存优范围缩小为原来的0.618.因此, n 次试验后的精度为

$$\delta_n = 0.618^{n-1}.$$

探究

用0.618法寻找最佳点时,达到精度0.05的要求需要多少次试验?精度0.01呢?精度 δ 呢?

设达到精度0.05的要求需要 n 次试验,那么

$$0.618^{n-1} \leq 0.05,$$

即

$$n \geq \frac{\lg 0.05}{\lg 0.618} + 1 \approx 7.22.$$

于是,只要安排8次试验,就能保证精度达到0.05.同理可得,安排11次试验,就能保证精度达到0.01.

一般地,给定精度 δ ,为了达到这个精度,所要做的试验次数 n 满足

$$0.618^{n-1} \leq \delta < 1,$$

即

$$(n-1)\lg 0.618 \leq \lg \delta < 0,$$

所以

$$n \geq \frac{\lg \delta}{\lg 0.618} + 1.$$

黄金分割法适用目标函数为单峰的情形,第1个试验点确定在因素范围的0.618处,后续试点可以用“加两头,减中间”的方法来确定.

习题 1.3

1. 二氧化锰可作为在较高温度下分解的氯酸钾的催化剂,氯酸钾分解产生氧气的速率快慢跟所加二氧化锰量有关.一般二氧化锰与氯酸钾的质量比取1:10至1:1.现要在相同的温度和其他条件下,找出二氧化锰与氯酸钾比例使产生氧气速率最快,该如何安排试验,你能亲自做实验找出最优比例吗?
2. 把神舟5号送入太空的长征2号F(CZ-2F)运载火箭是捆绑式两级大型液体运载火箭.火箭分级是为了第一级推进剂燃烧完以后可以扔掉,这样可以减少飞行重量,提高火箭性能.为了找出两级合理的分点,要进行大量复杂的计算.通过模拟试验可以避免大量的计算,为了找出最优的两级比例,你能给出试点的安排方法吗?
3. 举出现实生活或学习过程中可应用0.618法寻找最佳点的例子.



阅读与思考

黄金分割研究简史

公元前3世纪,古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus,约公元前400—前347)在深入研究比例理论时,提出了分线段的“中末比”问题:将一线段AB分为两线段AM,MB,使得其中较长的一段AM是全长AB与另一段MB的比例中项(图1),即

$$AB : AM = AM : MB.$$

为简单起见,令 $AB=1$, $AM=\omega$,

则有

$$1 : \omega = \omega : (1 - \omega),$$

即

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0. \quad (1)$$

解方程,得

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

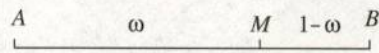


图1

根据问题的实际意义, 取 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\ 033\ 988\ 749\ 89\cdots$, 这就是黄金分割常数.

中世纪以后, “中末比”被披上神秘的外衣, 意大利数学家帕乔利(Luca Pacioli, 约 1445—1517)称之为“神圣比例”. 17 世纪欧洲著名的天文学家开普勒称之为神圣分割, 并说“勾股定理和中末比是几何中的双宝, 前者好比黄金, 后者堪称珠宝”. 他用黄金来形容勾股定理而不是中末比. 黄金分割的名称是很晚才出现的. 最早正式使用“黄金分割”这个名词的是欧姆(Martin Ohm, 1792—1892), 他是以发现电学上欧姆定律著称的 G. S. 欧姆的弟弟. 19 世纪以后, 黄金分割之名逐渐通行起来.

对黄金分割的研究最早见于公元前 500 多年的毕达哥拉斯学派. 大约在公元前 530 年, 古希腊著名数学家毕达哥拉斯在意大利南部的克罗吞(Crotona)建立了讨论宗教、科学和哲学问题的毕达哥拉斯学派. 该学派在分析正五边形性质时发现了黄金分割作图法: 五边形对角线的交点恰好是对角线上的黄金分割点(如图 2 所示, 正五边形的对角线恰好构成了一个正五角星). 如果用 d 表示对角线长, s 表示边长, 可以推出公式 $d(d-s)=s^2$, 这是表示黄金分割关系的公式, 类似于式(1).

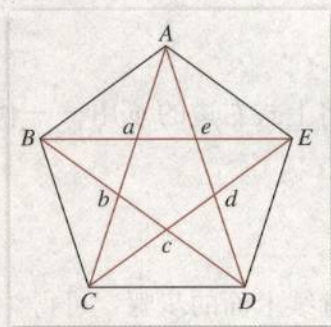


图 2

关于黄金分割有种种传说. 例如古希腊和欧洲的建筑师应用黄金分割使建筑优美协调; 古希腊的智慧女神雅典娜和太阳神阿波罗塑像用黄金分割比设计身段而显得很美; 以黄金分割所得的两线段作边的矩形, 比其他矩形美观; 等等.

对黄金分割这一古老的数学问题, 过去人们只是从趣味或艺术上研究它. 黄金分割的实际应用, 最著名的例子就是优选学中的黄金分割法或 0.618 法.

四、分数法

1. 分数法

案例 1 在配置某种清洗液时, 需要加入某种材料. 经验表明, 加入量大于 130 ml 肯定不好. 用 150 ml 的锥形量杯计量加入量, 该量杯的量程分为 15 格, 每格代表 10 ml. 用试验法找出这种材料的最优加入量.

思考

这个问题能否用 0.618 法? 如果不能, 该如何安排试验?

如果用 0.618 法, 那么算出的试点不是 10 ml 的整数倍. 由于量杯是锥形的, 每格为 10 ml, 所以用它去量一个不是 10 ml 的整数倍的材料量, 很难做到精确. 因此, 这个问题用 0.618 法不方便.

我们知道, 0.618 是黄金分割常数 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似数. 是否可以用其他形式的数作为 ω 的近似数来解决上面的问题呢?

由于 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是方程 $\omega^2 + \omega - 1 = 0$ 的根, 因此 $\omega(\omega+1) = 1$, 即

$$\omega = \frac{1}{1+\omega}.$$

将上式右边的 ω 用 $\frac{1}{1+\omega}$ 代替, 得

$$\omega = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\omega}}.$$

继续上面的步骤, 可得

$$\omega = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}. \quad (1)$$

式(1)右边是一个繁分式, 我们称它为**连分数**^①, 准确地说是无穷连分数. 为了书写简便, (1) 式可以写成

$$\omega = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}. \quad (2)$$

① 连分数的知识见附录一.

式(2)表示 ω 可以看作无穷多项的和. 下面计算这个无穷分数的前几项:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1, \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{5}{8}, \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{8}{13}, \\ &\dots \end{aligned}$$

可以发现,由上面的结果可以组成一个各项为分数的数列

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots, \frac{F_n}{F_{n+1}}, \dots \quad (3)$$

数列(3)的项 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 中,分子和分母分别是数列 $\{F_n\}$ 中的相邻两项.数列 $\{F_n\}$ 为

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

它的前两项为 $F_0=1$ 和 $F_1=1$,从第三项起每一项是其相邻的前两项的和,即

$$F_0=1, F_1=1, F_2=F_1+F_0, F_3=F_2+F_1, \dots, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \dots$$

数列 $\{F_n\}$ 叫做斐波那契数列,后面的“阅读与思考”中有关于它的介绍.

可以证明,随着 n 的增大,数列(3)的项 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 越来越趋向于 ω .这样,分数 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 可以作为 ω 的近似值,而且 n 越大近似程度越高.我们称数列(3)为 ω 的渐近分数列, $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 为 ω 的第 n 项渐近分数.

既然数列(3)是 ω 的渐近分数列,那么解决案例1能否选数列(3)中的项代替 ω 来确定试点呢?

案例1中,加入量大于130 ml时肯定不好,因此试验范围就定为0~130 ml.我们看到,10 ml, 20 ml, 30 ml, ..., 120 ml把试验范围分为13格,对照 ω 的渐近分数列,如果用 $\frac{8}{13}=\frac{F_5}{F_6}$ 来代替0.618,那么我们有

$$x_1=0+\frac{8}{13}\times(130-0)=80,$$

这样,第1个试点安排在80 ml处,其对称点用“加两头,减中间”的方法,得

$$x_2=0+130-80=50,$$

即第2个试点安排在50 ml处,在整个因素范围的 $\frac{5}{13}=\frac{F_4}{F_6}$ 位置(图1-11).

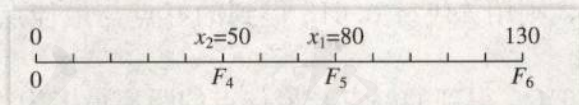


图 1-11

比较两次试验结果,如果 x_1 是好点,则去掉 x_2 以下部分,存优范围为50~130 ml,其中有8格(7个试点,包括一个已作过试验的80 ml处).

在存优范围50~130 ml内,用“加两头,减中间”的方法求 x_1 的对称点,得

$$x_3=50+130-80=100,$$

所以第3试点在100 ml处.这个点相当于对存优范围重新进

行编号后的 $\frac{F_4}{F_5}$ 位置,而 x_1 在存优范围的 $\frac{F_3}{F_5}$ 位置(图1-12).

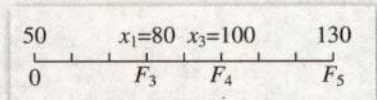


图 1-12

继续用“加两头,减中间”的方法确定试点,几次试验后,就能找到满意的结果.

优选法中,像上面这样用渐进分数近似代替 ω 确定试点的方法叫**分数法**.

如果因素范围由一些不连续的、间隔不等的点组成,试点只能取某些特定数,这时只能采用分数法.

案例 2 在调试某设备的线路中,要选一个电阻,但调试者手里只有阻值为 $0.5\text{ K}\Omega$, $1\text{ K}\Omega$, $1.3\text{ K}\Omega$, $2\text{ K}\Omega$, $3\text{ K}\Omega$, $5\text{ K}\Omega$, $5.5\text{ K}\Omega$ 等七种阻值不等的定值电阻.他应当如何优选这个阻值?

如果用 0.618 法,则计算出来的电阻调试者手里可能没有.这时,可以先把这些电阻由小到大顺序排列:

阻值(K Ω)	0.5	1	1.3	2	3	5	5.5
排列	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

这样,就把阻值优选变为排列序号的优选,问题就容易解决了.

为了便于用分数法,可在两端增加虚点(0), (8),使因素范围凑成为8格,用 $\frac{5}{8}$ 来代替 0.618 .第1个试点取序号(5),即取 $3\text{ K}\Omega$;第2个试点按“加两头,减中间”的方法得 $(0)+(8)-(5)=(3)$,即取 $1.3\text{ K}\Omega$.以下按分数法顺次确定试点,就可以较快地找到较好的点.

现实中,由于时间、人力、物力和财力的关系,往往使试验次数受到限制,这种情况下,采用分数法可以达到较好的效果.例如,设因素范围是 $[0, 1]$,如果只能做1次试验,用 $\frac{1}{2}$ 代替 0.618 ,选 $\frac{1}{2}$ 为试点,这一点与最佳点的距离最多为 $\frac{1}{2}$;如果只能做2次试验,则用 $\frac{2}{3}$ 代替 0.618 ,第1试点选在 $\frac{2}{3}$ 处,第2试点选在 $\frac{1}{3}$ 处,好点与最佳点的距离最多为 $\frac{1}{3}$;如果能做3次试验,则用 $\frac{3}{5}$ 代替 0.618 得到的好点与最佳点的距离最多为 $\frac{1}{5}$ ……做 k 次试验就用 $\frac{F_k}{F_{k+1}}$ 代替 0.618 ,得到的好点与最佳点的距离最多为 $\frac{1}{F_{k+1}}$.

一般地,用分数法安排试点时,可以分两种情况考虑.

(1) 可能的试点总数正好是某一个 $(F_n - 1)$.

这时,前两个试点放在因素范围的 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 和 $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ 位置上,即先在第 F_{n-1} 和 F_{n-2} 点上做试验(图1-13).

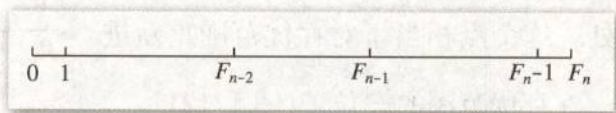


图 1-13

比较两个试验结果,如果 F_{n-1} 是好点,则划去 F_{n-2} 点以下的因素范围;如果 F_{n-2} 是好点,则划去 F_{n-1} 点以上的因素范围.经过两次试验,存优范围中还剩下 $(F_{n-1} - 1)$ 个试

点. 重新编号后, 第 F_{n-2} 和 F_{n-3} 个分点, 其中有一个是刚才留下的好点, 另一个是下一步的试点. 比较 F_{n-2} , F_{n-3} 的试验结果, 和前面的做法一样, 从坏点把因素范围切开, 去掉短的一段. 这时, 新的存优范围就只有 $(F_{n-2}-1)$ 个试点了. 重复上述步骤, 直到因素范围内没有应该试验的点为止.

在 $(F_n - 1)$ 个可能的试点中, 用分数法安排试验, 最多只需作 $(n - 1)$ 次试验就能找到其中的最佳点 (当然, 如果在试验中遇到一个满足要求的好点, 则可停止后续试验). 这样, 如果最多只能作 k 次试验, 那么就可以把试验范围等分成 F_{k+1} 份, 在 $(F_{k+1} - 1)$ 个分点安排试验, 这样可以使 k 个试验的结果达到最高精度.

(2) 所有可能的试点总数大于某一 $(F_n - 1)$, 而小于 $(F_{n+1} - 1)$. 这时可以用如下方法解决.

先分析能否减少试点数,把所有可能的试点减少为 (F_n-1) 个,从而转化为前一种情形.如果不能减少,则采取在试点范围之外,虚设几个试点,凑成 $(F_{n+1}-1)$ 个试点,从而转化成(1)的情形.对于这些虚设点,并不真正做试验,而是直接把它们作为坏点.很明显,这种虚设点,并不增加实际试验次数.

分数法也是适合单因素单峰函数的方法，它与 0.618 法的本质是相同的，两者的区别只是用分数 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 和 $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ 代替 0.618 和 0.382 来确定试点，后续的步骤都是相同的。分数法中，一旦用 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 确定了第一个试点，后续试点可以用“加两头，减中间”的方法来确定。



阅读与思考

斐波那契数列和黄金分割

假定一对（一雌一雄）兔子出生两个月后就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子，而且所有兔子都能成活，那么一年后总共共有多少对兔子？

第1个月和第2月小兔子没有繁殖能力，所以兔子数都是一对；第三个月，生下一对小兔，于是兔子数变为2对；第4个月，大兔子又生一对，小兔子还没有繁殖能力，所以兔子数为3对；以后每个月的兔子数依次类推。用 F_n 表示第 $n+1$ 个月兔子的总对数，图1表示兔子的繁殖规律，图中 $\triangle$ 表示一对小兔子， $\bigcirc$ 表示一对大兔子，实箭头表示一对小兔子长大成为一对大兔子或表示一对大兔子照样生长，虚箭头表示一对大

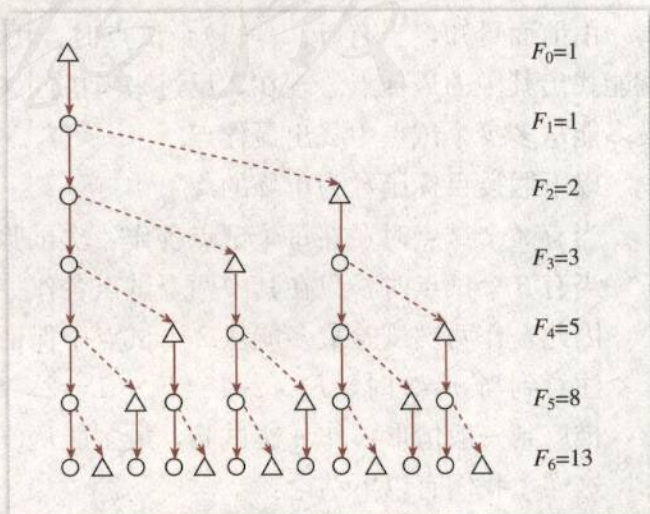


图 1

兔子生出一对小兔子.

将上图整理成表格, 则有:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	一年后
对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

仔细观察每个月的兔子数构成的数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...,

可以发现, 从第 3 项开始, 每一项都是相邻的前两项之和, 即:

$$1+1=2,$$

$$1+2=3,$$

$$2+3=5,$$

.....

这个数列是意大利数学家斐波那契首先给出的. 为了纪念他, 此数列被称为斐波那契数列^①.

用 $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$ 依次表示上述数列中的各项, 它们满足递推关系:

$$F_2 = F_1 + F_0,$$

$$F_3 = F_2 + F_1,$$

.....

一般地,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

显然, 当 F_0, F_1 确定后, 斐波那契数列也就确定了.

斐波那契数列有着广泛的应用, 其中之一是由它可以构造出黄金分割常数 ω 的近似分数列.

① 斐波那契数列的通项公式是 F_n

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

公式表明, 虽然 F_n 是整数, 但它却是由一些无理数表示的.

2. 分数法的最优性

由前面可知, 当有 $(F_{n+1}-1)$ 个试点时, 用分数法安排试验, 最多只需要作 n 次试验就能找出其中的最佳点. 现在, 反过来考虑问题, 无论用什么方法安排试验, 作 n 次试验最多能从多少个试点中找出最佳点.

以下假设目标函数为单峰的.

当有 2 个试点时, 在每个试点各作一次试验, 通过比较就能找出其中的最佳点.

当有 3 个试点时, 只在其中两个试点各作一次试验, 不能确定全部试点中的最佳点.

因此, 作两次试验最多能从 2 个试点中保证找出最佳点.

注意到当 $n=2$ 时, $F_{n+1}-1=F_3-1=2$, 事实上, 我们可以将上面作 2 次试验的情形, 推广到一般情形: 作 n 次试验, 最多能从 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中保证找出最佳点.

这样, 我们有以下结论:

在目标函数为单峰的情形, 通过 n 次试验, 最多能从 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中保证找出最

佳点, 并且这个最佳点就是 n 次试验中的最优试验点.^①

我们知道, 用分数法安排试验, 对于 $(F_{n+1}-1)$ 个试点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{(F_{n+1}-1)}$, 最先安排的试点是 x_{F_n} 和 $x_{F_{n-1}}$, 然后通过 n 次试验保证找出最佳点. 如果不用分数法安排试验, 就不能保证通过 n 次试验找出 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中的最佳点. 事实上, 有以下结论:

在目标函数为单峰的情形, 只有按照分数法安排试验, 才能通过 n 次试验保证从 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中找出最佳点.

上面结论的证明思路是: 对于 $(F_{n+1}-1)$ 个试点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{(F_{n+1}-1)}$, 证明最初两个试验要安排在点 x_{F_n} 和 $x_{F_{n-1}}$ 上 (这与分数法是相同的), 否则不能在 n 次试验后保证找出最佳点; 后续的试验选点也如分数法一样逐一选取. 因此, 只有分数法能够通过 n 次试验保证找出上面点中的最佳点. 具体证明过程较复杂, 见附录二 (二).

设某个优选法问题有 m (m 为正整数) 个试点, 当 m 等于某个 $(F_{n+1}-1)$ (n 为某个正整数) 形式的数时, 上面的结论说明用分数法所用试验次数最少; 当 m 不是某个 $(F_{n+1}-1)$ (n 为某个正整数) 形式的数时, 我们可以假设有 $F_n-1 < m < F_{n+1}-1$, 则可以先将试点个数调整为某个适当的 $(F_{n+1}-1)$ (n 为某个正整数) 形式的数, 然后使用分数法找出最佳点, 所用试验次数最多为 n . 如果不用分数法, 用其他方法安排试验, 所用试验次数不会少于 n , 这是因为对 (F_n-1) 个试点只有分数法才能用 $(n-1)$ 次试验保证找出最佳点, 其他方法所作试验次数至少比 $(n-1)$ 大, 即至少为 n 次, 而现在 $m > F_n-1$, 所以从 m 个点中找出最佳点至少要作 n 次试验.

综上所述, 对于试点个数为某常数时, 用分数法找出其中最佳点的试验次数最少, 这就是分数法的最优性. 分数法在有有限个试点的优选问题中被广泛使用.

① 这个结论的证明要用数学归纳法, 我们把它作为附录二 (一) 列于书后供大家参考.



习题 1.4

1. 说明分数法适用的范围.
2. 卡那霉素发酵液生物测定, 一般都规定培养温度为 $(37 \pm 1)^\circ\text{C}$, 培养时间在 16 小时以上. 某制药厂为了缩短时间, 决定优选培养温度, 试验范围定为 $29^\circ\text{C} \sim 50^\circ\text{C}$, 精确度要求 $\pm 1^\circ\text{C}$. 能用分数法安排试验吗? 如何安排?
3. 现有 10 层梯田需要灌溉, 需要从山脚用水泵往上抽水, 抽到某一层的水可以灌溉这层和其以下的所有层. 如现有两台水泵, 可以安置在 10 层梯田中的任一层, 安置后不能移动. 如何安置这两台水泵, 才能使所有的梯田被灌溉而做功最少? 你能用合适的优选法迅速找其中的最佳点吗?
4. 你能举出实际中可用分数法进行优选的例子吗?

五、其他几种常用的优选法

1. 对分法

案例 1 有一条 10 km 长的输电线路出现了故障, 在线路的一端 A 处有电, 在另一端 B 处没有电, 要迅速查出故障所在位置.

0.618 法和分数法都是先做两个试验, 然后再通过比较, 确定出存优范围, 不断地将试验范围缩小, 最后找到最佳点. 现在找输电线路故障所在位置, 我们只需在 AB 之间的任意点 C 做检查, 就能根据点 C 是否有电, 判断出故障在哪一段, 从而缩小故障范围, 而不需要做两个试验进行比较. 那么, 如何选取每次的检查点才能迅速找出故障位置呢?

由于在检查之前无法预知检查结果, 因此也就无法知道要排除的是检查点左边还是右边的线路. 为了克服盲目性, 我们把每次检查点安排在线路的中间, 这样每次就可以去掉一半的长度. 第一个检查点 C 安排在线路中间, 如果有电, 说明故障不在 AC 而在 CB 段, 接着在 CB 中点 D 检查, 如果没有电, 说明故障在 CD 部分, 再在 CD 中点 E 处检查, 如此类推, 很快就能找出故障的位置(图 1-14).

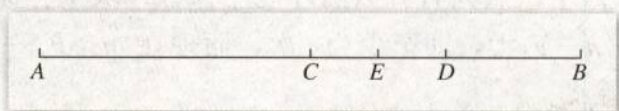


图 1-14

对分法最简单, 在实践中应用非常普遍.

这个方法要点是每个试点都取在因素范围的中点, 将因素范围对分为两半, 所以这种方法就称为**对分法**. 用这种方法做试验的效果较 0.618 法好, 每次可以去掉一半.

那么是不是所有的问题都可以用对分法呢? 不是的. 如果每作一次试验, 根据结果, 可以决定下次试验的方向, 就可以用对分法. 例如案例 1 中, 根据有没有电就可以判断是哪段线路有故障, 下次就在有故障的一段检查. 决定下次试验方向, 只要满足以下两个条件就可以: 一是要有一个标准, 对分法每次只有一个试验结果, 如果没有一个标准, 就无法鉴别试验结果的好坏, 案例 1 中的标准是有没有电; 二是要预知该因素对指标的影响规律, 也就是说, 能够从一个试验的结果直接分析出该因素的值是取大了还是取小了, 案例 1 中, 根据检查点是否有电, 知道下一个应该离 A 点更近些还是更远些. 如果没有这一条件就不能确定下一次应该在哪个因素范围进行试验.

一般地, 对分法可以按照如下步骤操作:

首先根据经验确定因素范围, 设因素范围为 $[a, b]$. 第一次试验在 $[a, b]$ 的中点 x_1 ($x_1 = \frac{a+b}{2}$) 处做. 然后根据试验结果判断下次试验的方向, 如果试验结果表明 x_1 取小了, 那么存优范围是 $[\frac{a+b}{2}, b]$, 就把此次试点(中点)以下的因素范围 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 截去; 如果试验结果表明 x_1 取大了, 那么存优范围是 $[a, \frac{a+b}{2}]$, 就把此次试点(中点)以上的因素

范围 $(\frac{a+b}{2}, b]$ 截去. 这样, 每试验一次, 存优范围就缩小一半. 重复上面的操作, 即在存优范围的中点做试验, 根据试验结果截去范围的一半, 直到找出一个满意的试点, 或存优范围已变得足够小, 再试下去结果无显著变化为止.

案例 2 在商品价格竞猜游戏中, 每一次试猜时, 如何给出商品估价就可以最迅速地猜出真实价格?

因为每次给出估价都会得到“高了”或“低了”的提示语, 于是, 我们可以根据提示语确定下一次该往高还是往低估. 这说明可以用对分法给出商品估价, 每次给出的估价都是存优区间的中点. 每给一次估价, 可以使价格范围缩小 $\frac{1}{2}$, 迅速猜中商品价格.

可以发现对分法和 0.618 法及分数法, 在确定下一个试点时, 比较的对象是不同的. 后两种方法是两个试点上的试验结果的比较, 而对分法是一个试点上的试验结果与已知标准(或要求)的比较. 所以在满足目标函数为单峰的假设下, 使用对分法还需要满足具有已知标准这个条件. 从效果上看, 对分法比 0.618 法及分数法好, 每一次试验可以去掉一半的因素范围. 相对于 0.618 法及分数法, 对分法更简单, 易操作.

思考

分别用 0.618 法和对分法安排试验, 找出蒸馒头时合适的放碱量, 哪种方法会更有效呢? 为什么?

2. 盲人爬山法

前面介绍的 0.618 法、分数法及对分法都是很有有效的优选法, 可以大幅度减少试验次数. 但在实际的生产实践和科学试验中, 某些因素不允许大幅度调整. 例如, 设备正在运行中, 如果坏一次损失会很大; 某些成分含量的多少对结果影响很大, 甚至由于该成分的过量破坏了试验装置的清洁度, 而影响下一次试验结果的正确性. 这些试验用 0.618 法、分数法或对分法就不很合适. 这种限制要求我们在原有生产条件的基础上逐步探索, 逐步提高, 就像盲人爬山一样, 在立足处, 对前后两个方向进行试探, 如果前面高了就向前走一步, 否则试探后面, 如果前后都比某点低, 就说明到达山顶了.

具体可以按如下方法操作:

先找一个起点 A(这个起点可以根据经验或估计), 在 A 点做试验后可以向该因素的减少方向找一点 B' 做试验. 如果好, 就继续减少; 如果不好, 就往增加方向找一点 C 做试验. 如果 C 点好就继续增加, 这样一步一步地提高. 如果增加到 E 点, 再增加到 F 点时反而坏了, 这时可以从 E 点减少增加的步长, 如果还是没有 E 点好, 则 E 就是该因素的最佳点(图 1-15). 这就是单因素问题的盲人爬山法.

爬山法的效果快慢与起点关系很大, 起点选得好可以省好多次试验. 所以对爬山法来

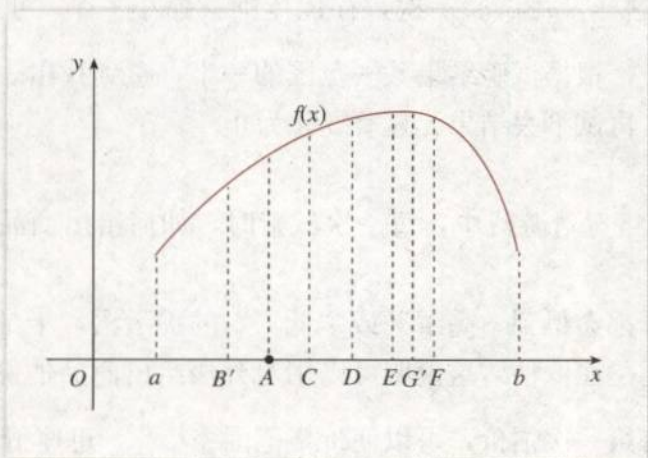


图 1-15

说, 试验范围的正确与否很重要. 另外, 每步间隔的大小, 对试验效果关系也很大. 在实践中往往采取“两头小、中间大”的办法, 也就是说, 先在各个方向上用小步试探一下, 找出有利于寻找目标的方向, 当方向确定后, 再根据具体情况跨大步, 快接近最佳点时再改为小步. 如果由于估计不正确, 大步跨过最佳点, 这时可退回一步, 在这一步内改用小步进行. 一般说来, 越接近最佳点的时候, 效果随因素的变化越缓慢.

这个方法还可以应用在某些可变因素要调到某点, 必须经过由小到大或由大到小的连续过程的问题上. 像改变气体和液体的流速、温度; 仪器调试中的可变电容、可变电阻; 等等, 采用爬山法比较合适. 试验中, 可以边调整边检查, 调到最佳点时就固定下来. 一般在大生产中爬山法较常用.

3. 分批试验法

案例 3 电机修理厂根据原工艺要求, 单晶切片厚度为 0.54 mm 左右, 经研磨损失 0.15 mm 左右, 1 kg 单晶只出 12 000 左右小片. 为了节约原材料、提高工效、降低成本, 对减小单晶片厚度, 在 (0.20, 0.50) 范围内做优选法试验. 切割不同厚度的单晶片很方便, 但要检验究竟哪一种厚度好, 则要经过磨片、化学腐蚀、烘干、烧结、参数测定等工序, 试验周期长达三天(生产中则更长, 要一个多星期), 而且有些工序必须在同一条件下才能得到正确结果.

0.618 法、分数法、对分法和爬山法有一个共同的特点, 即后续的试验安排依赖于前面的试验结果. 它们的优点是总的试验次数少, 缺点是如果试验结果需要很长时间才能得到, 则试验周期累加, 耗时太多.

为了加快试验进度, 我们很容易想到把所有可能的试验同时安排进行, 根据试验结果, 找出最佳点. 同时进行多个试验, 优点是试验总时间短, 缺点是总的试验次数比较多. 如果每个试验的代价不大, 又有足够的设备, 这样做是可以接受的.

较好的办法是全部试验分几批做, 一批同时安排几个试验, 同时进行比较, 一批一批做下去, 直到找出最佳点. 这样可以兼顾试验设备、代价和时间上的要求. 这种方法称为分批试验法.

分批试验法可以分为均分分批试验法和比例分割分批试验法两种.

(1) 均分分批试验法.

我们用均分分批试验法优选单晶片厚度, 这种方法是每批试验均匀地安排在试验范围内.

每批安排 2 个试验, 先将试验范围 $(0.20, 0.50)$ 均分为 3 份, 在其 2 个分点 0.30, 0.40 处做 2 个试验(图 1-16).



图 1-16

将 2 个试点的试验结果进行比较, 设 0.30 点为好点, 则存优范围为 $(0.20, 0.40)$. 然后将存优范围再均分为 4 份, 在未做过试验的 2 个点上做第 2 批试验, 这 2 个点分别为 0.25, 0.35(图 1-17). 设 0.35 点为好点, 则存优范围是 $(0.30, 0.40)$, 去掉包含 0.25 点的 0.20 至 0.30 这部分.

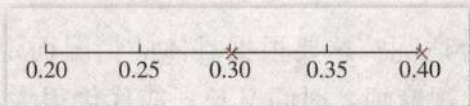


图 1-17

重复第 2 批的做法, 直到找出最佳点.

可以看到, 第 1 批试验后, 存优范围为原来的 $\frac{2}{3}$; 从第 2 批试验起, 每做一批试验, 都使存优范围缩短为前次留下的 $\frac{1}{2}$.

对于一批做偶数个试验的一般情况, 与上面两个情况类似. 假设每批做 $2n$ 个试验. 首先把试验范围均分为 $2n+1$ 份. 在其 $2n$ 个均分点 $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ 上做试验. 比较 $2n$ 个试点上的试验结果, 如果 x_i 最好, 则去掉小于 x_{i-1} 和大于 x_{i+1} 部分, 存优范围是 (x_{i-1}, x_{i+1}) . 然后将 (x_{i-1}, x_{i+1}) 均分为 $2n+2$ 份, 就是将 $2n$ 个试验均匀地安排在 x_i 的两旁, 在未做过试验的 $2n$ 个分点上再做试验. 如此反复, 就能找到最佳点. 用这个方法, 第一批试验后存优范围为原来的 $\frac{2}{2n+1}$, 以后每批试验后, 存优范围都为前次留下的 $\frac{1}{n+1}$.

(2) 比例分割分批试验法.

比例分割分批试验法是将第 1 批试验点按比例地安排在试验范围内. 以每批做 2 个试验为例, 将试验范围 7 等分, 第 1 批安排在左起第 3, 4 两个点上进行(图 1-18);

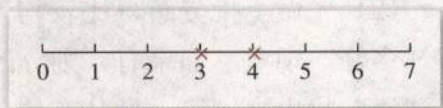


图 1-18

第 2 批将存优范围 4 等分(共有 3 个分点), 设第 4 个分点为好点, 则去掉小于第 3 个分点的部分, 存优范围为第 3 个分点到右端. 在没有做过的 2 个分点(第 5、6 分点)上进行试验(图 1-19).

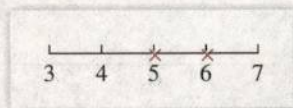


图 1-19

第 1 批试验后存优范围为原来的 $\frac{4}{7}$, 第 2 批试验后都为前次留下的 $\frac{1}{2}$.

每批更多个试验点的情形, 原理类似. 每批做 2 个, 4 个, 6 个和 8 个试验点的安排如表 1-1, 图示中的 $\times$ 代表第一批的试点位置, 数字代表第一批不安排的试点个数.

表 1-1

每批试验个数	试验范围等分数	第一批试点	图示
2	7	3, 4	$2 \times \times 2$
4	17	5, 6, 11, 12	$4 \times \times 4 \times \times 4$
6	31	7, 8, 15, 16, 23, 24	$6 \times \times 6 \times \times 6 \times \times 6$
8	49	9, 10, 19, 20, 29, 30, 39, 40	$8 \times \times 8 \times \times 8 \times \times 8 \times \times 8$

从效果上看, 比例分割法比均分法好. 但是比例分割法每批中的试验点挨得太近, 如果试验效果差别不显著的话, 就不好鉴别. 因此, 这种方法比较适用于小的因素变动就能引起结果的显著变化的情形.

究竟一批安排几个试验合适呢? 这要根据具体的情况而定. 如果做一次试验很方便, 消耗很少, 时间很短; 或检验很麻烦, 时间又长; 或代价很大, 而且每次检验可以有好多样品同时进行, 在这种情况下每批试验可多做几个, 即将试验范围分得细一些; 否则就少做几个.

4. 多峰的情形

前面介绍的方法都只适用于“单峰”的情况. 现实生产、生活中也经常碰到“多峰”情形(图 1-20), 有时甚至连“单峰”还是“多峰”都不知道, 那又该如何下手呢?

一般可以采用以下两种方法.

(1) 先不管它是“单峰”还是“多峰”, 用前面介绍的处理单峰的方法去做, 找到一个“峰”后, 如果达到预先要求, 就先用于生产, 以后再找其他更高的“峰”(即分区寻找).

(2) 先做一批分布得比较均匀的试验, 看它是否有“多峰”现象. 如果有, 则分区寻找, 在每个可能出现“高峰”的范围内做试验, 把这些“峰”找出来. 第一批分布均匀的试点最好以下述比例划分: $\alpha : \beta = 0.618 : 0.382$ (图 1-21). 这样有峰值的范围总是成 (α, β) 或 (β, α) 形式, 如图 1-22.

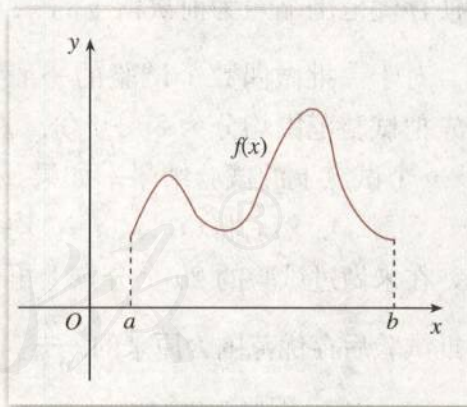


图 1-20

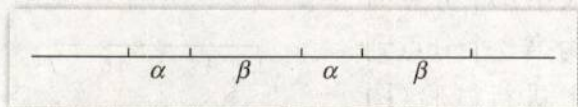


图 1-21

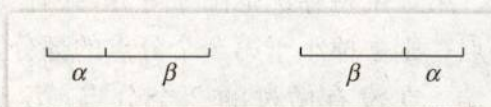


图 1-22

对每个留下的区域应用 0.618 法就可以用上已做过的试验结果,从而减少试验的次数.

习题 1.5



1. 使用对分法的条件是什么? 对分法与分数法、0.618 法有哪些不同?
2. 用对分法求方程 $x^2+x-1=0$ 的一个正根, 精确度为 0.01.
3. 一般的, 会计在月底需要对账, 如果发现账户不平, 即借方余额合计不等于贷方余额合计, 就说明账目记录有问题, 就需要查账. 当然可以从月初开始一天天往下查, 总能找出出错的账目. 如果你是会计, 你能用学过的优选方法快速查出错误的记录吗?
4. 某一产品的成分中, 需要某种贵重金属来保证其质量. 已知这种金属的含量在 16% 时的产品质量是合格的. 为了降低成本, 在保证质量的前提下, 需要减少这种贵重金属的含量. 你认为可以如何安排优选法试验?
5. 影响爬山法效果的因素有哪些?
6. 你能说出爬山法、0.618 法、分数法和对分法的适用范围和优缺点吗? 为什么从效果上看, 比例分割法比均匀法效果好? 比例分割法能否进一步优化或改进? 如何优化或改进?
7. 举出现实生活中能应用对分法和分批试验法优选的例子各一个.
8. 会不会出现没有峰的情况? 为什么?

六、多因素方法

现实中, 我们也会面临多因素优选问题. 例如在生产某种药品时, 它的产量受三个因素的影响——转化温度、投料量和真空度, 如何使产量最高就是一个三因素的优选问题; 农场种植玉米, 如果优选受施肥量和种植密度两个因素影响, 如何使产量最高就是一个双因素的优选问题; 等等.

解决多因素问题要比单因素问题困难得多. 在遇到多因素问题时, 首先应对各个因素进行分析, 取出主要因素, 略去次要因素, 从而把因素由“多”化“少”, 以利于问题的解决. 若经过分析, 最后还剩下两个或两个以上的因素, 就必须使用多因素方法. 解决多因素问题的方法很多, 但往往采用降维法来解决. 降维法是把一个多因素的问题转化为一列较少因素的问题, 而较少因素的问题相对地说是比较容易解决的.

对于双因素问题的降维法, 我们可以先固定一个因素, 对另一个因素进行优选, 然后固定第二个因素, 再做第一个因素的优选, 具体的有纵横对折法、平行线法、从好点出发法等, 有时也采用双因素盲人爬山法等其他方法.

1. 纵横对折法和从好点出发法

用 x, y 表示两个因素的取值, $z=f(x, y)$ 表示目标函数(并不需要 $z=f(x, y)$ 的真正表达式). 双因素的优选问题, 就是迅速地找到二元目标函数 $z=f(x, y)$ 的最大值(或最小值)及其对应的 (x, y) 点的问题. 假设函数 $z=f(x, y)$ 在某一区域内单峰, 其几何意义是把曲面 $z=f(x, y)$ 看作一座山, 顶峰只有一个(图 1-23). 双因素的优选问题就是找出曲面 $z=f(x, y)$ 的最高峰.

把试验范围中 $z=f(x, y)$ 取同一值的曲线叫作等高线, 就如山上同一高度的点的连线在水平面上的投影(图 1-24).

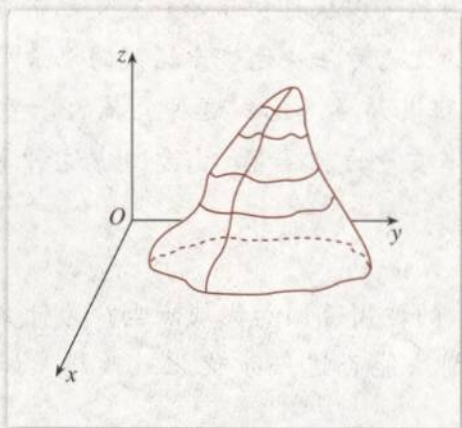


图 1-23

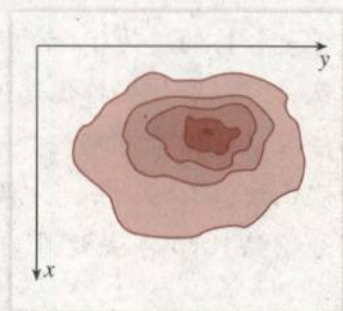


图 1-24

等高线一圈套一圈, 越高越在里边. 所以双因素问题就是通过试验、比较的方法来寻找比较靠里边的等高线, 直到找到最里边的一圈等高线(即最佳点)为止.

以横坐标表示因素 I, 纵坐标表示因素 II. 假设因素 I 的试验范围为 $[a_1, b_1]$, 因素 II 的试验范围为 $[a_2, b_2]$.

先将因素 I 固定在试验范围的中点 c_1 , 即 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 处, 对因素 II 进行单因素优选, 得到最佳点 A_1 . 同样将因素 II 固定在中点 c_2 , 即 $\frac{1}{2}(a_2+b_2)$ 处, 对因素 I 进行单因素优选, 得到最佳点 B_1 . 比较 A_1 和 B_1 的试验结果, 如果 B_1 比 A_1 好, 则沿坏点 A_1 所在的线, 丢弃不包括好点 B_1 所在的半个平面区域, 即丢弃平面区域: $a_1 \leq I \leq c_1, a_2 \leq II \leq b_2$ (图 1-25).

然后再在因素 I 的新范围即 $(c_1, b_1]$ 的中点 d_1 , 用单因素方法优选因素 II, 如果最佳点为 A_2 , 而且 A_2 比 B_1 好, 则沿坏点 B_1 所在的线, 丢弃不包括好点 A_2 所在的半个平面区域, 即丢弃平面区域: $c_1 \leq I \leq b_1, a_2 \leq II \leq c_2$ (图 1-26).

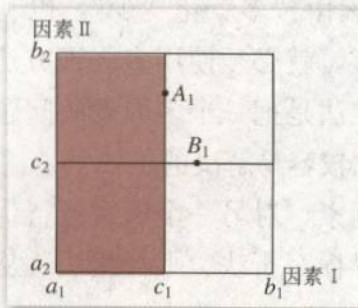


图 1-25

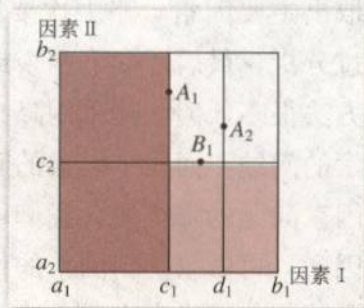


图 1-26

如此继续下去，不断地将试验范围缩小，直到找到满意的结果为止。这个方法称为**纵横对折法**。

思考

是否每次都要固定在该因素试验的中点？还有没有改进的余地？

不一定。实践证明，用下面的方法更好。

先固定因素 I 于原生产点(或 0.618 点) c_1 ，用单因素方法优选因素 II，得到最佳点为 $A_1(c_1, c_2)$ ，然后把因素 II 固定在 c_2 ，用单因素法优选因素 I，得到最佳点 $B_1(d_1, c_2)$ ，则去掉 A_1 右边的平面区域，试验范围缩小到 $a_1 \leq I < c_1$ ， $a_2 \leq II \leq b_2$ 。再将因素 I 固定在 d_1 ，优选因素 II，得到最佳点 $A_2(d_1, d_2)$ ，则去掉 B_1 以上部分，试验范围缩小到： $a_1 \leq I < c_1$ ， $a_2 \leq II < c_2$ ，再将因素 II 固定在 d_2 ，用单因素方法在 $[a_1, c_1]$ 范围内优选因素 I，这样继续下去，就能找到所需要的最佳点(图 1-27)。

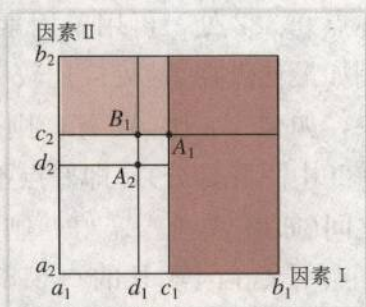


图 1-27

这个方法的要点是：对某一因素进行优选试验时，另一因素固定在上次试验结果的好点上(除第一次外)，所以称为**从好点出发法**。

案例 1 阿托品是一种抗胆碱药。为了提高产量、降低成本，利用优选法选择合适的脂化工艺条件。根据分析，主要因素为温度与时间，定出其试验范围为

温度：55℃~75℃，

时间：30 min~210 min。

用从好点出发法对工艺条件进行优选：

(1) 参照生产条件，先固定温度为 55℃，用单因素法优选时间，得最优时间为 150 min，其产率为 41.6%。

(2) 固定时间为 150 min，用单因素法优选温度，得最优温度为 67℃，其产率为 51.59%。

(3) 固定温度为 67℃，用单因素法再优选时间，得最优时间为 80 min，其产率为 56.9%。

(4) 再固定时间为 80 min，又对温度进行优选，结果还是 67℃好。试验到此结束，可以认为最好的工艺条件为温度：67℃，时间：80 min (图 1-28)。实际中采用这个工艺进行生产，平均产率提高了 15%。

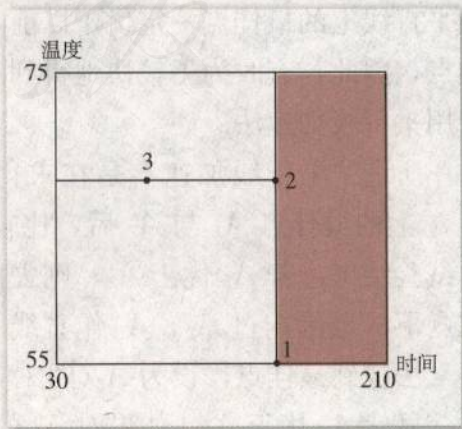


图 1-28

2. 平行线法

前面讲的方法都是先固定因素 I, 优选因素 II; 再固定因素 II, 优选因素 I, 来回进行优选试验. 实践中, 经常会遇到由于设备或其他条件的限制, 有一个因素不容易调整, 而另一个因素比较容易调整的情况. 比如一个是浓度, 一个是流速, 调整浓度就比调整流速困难. 在这种情况下, 不便于应用上述方法.

设影响某试验结果的因素有 I、II 两个, 而因素 II 难以调整. 首先把难以调整的因素 II 固定在 0.618 处, 用单因素方法对另一个因素 I 的进行优选, 例如最佳点在 A_1 处. 然后再把因素 II 固定在 0.618 的对称点 0.382 处, 再用单因素方法对因素 I 进行优选, 例如最佳点在 A_2 处. 比较 A_2 和 A_1 两点上的试验结果, 如果 A_1 比 A_2 好, 则去掉 A_2 以下的部分(图 1-29 中阴影部分), 即好点不会在因素 II 的 $0 \sim 0.382$ 之间(如果 A_2 比 A_1 好, 则去掉 A_1 以上的部分, 即好点不会在因素 II 的 $0.618 \sim 1$ 之间).

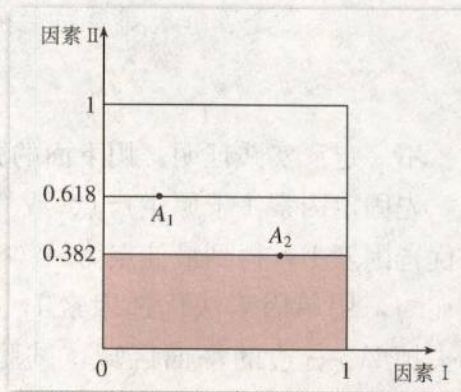


图 1-29

然后按 0.618 法找出因素 II 的第三点 0.764. 第三次试验时, 将因素 II 固定在 0.764, 用单因素优选方法对因素 I 进行优选, 例如最佳点在 A_3 处. 比较 A_3 和 A_1 , 如果仍然是 A_1 好, 则去掉 0.764 以上部分(图 1-30). 如此继续下去, 直到找到满意的结果为止.

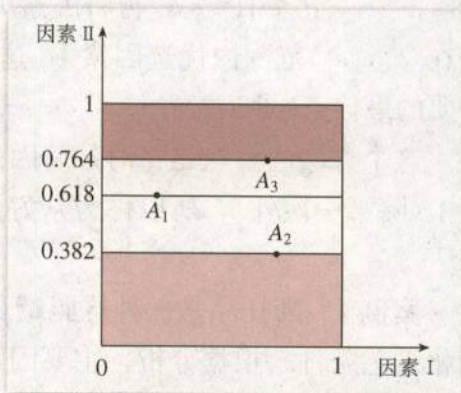


图 1-30

这个方法的特点是, 每次试验都是在相互平行的直线上做, 因此叫做**平行线法**.

因素 II 上的取点方法是否一定要按 0.618 法? 不一定, 也可以用其他方法, 例如可以固定在原有生产水平上, 这样可以少做试验.

在用平行线法处理两因素问题时, 不能保证下一条平行线上的最佳点一定优于以前各条平行线上的最佳点, 因此, 有时为了较快地得到满意的结果, 常常采用平行线加速法.

所谓“平行线加速”是在求得两条平行直线 l_1 与 l_2 上的最佳点 A_1 与 A_2 后, 比较 A_1 与 A_2 两点上的试验结果, 若 A_1 优于 A_2 , 则去掉下面一块. 然后在剩下的范围内过 A_2, A_1 作直线 L_1 , 在 L_1 上用单因素法找到最佳点, 设为 A_3 (图 1-31).

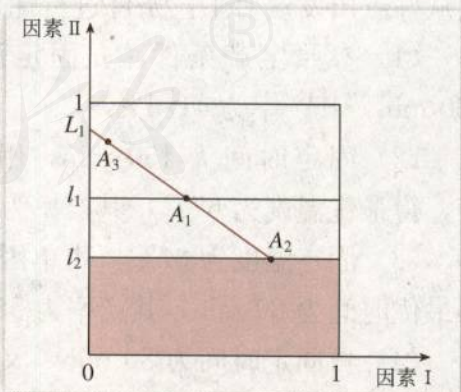


图 1-31

显然 A_3 优于 A_1 . 如果对 A_3 的试验结果还不满意, 则再过 A_3 作 l_1 的平行线 l_3 , 在 l_3 上用单因素法求得最佳点 A_4 . 显然 A_4 优于 A_3 (若 A_4 与 A_3 重合, 则可以认为 A_4 即为最佳点), 因此可去掉图 1-32 的下边一块.

若 A_4 的试验结果还不满意, 则在剩下的试验范围内过 A_1, A_4 作直线 L_2 , 在 L_2 上用单因素法进行优选, 依次进行, 直到结果满意为止.

对于 A_2 优于 A_1 的情况也可以类似地讨论.

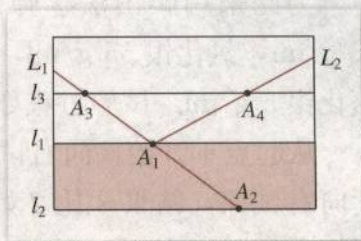


图 1-32

案例 2 “除草醚”配方试验中, 所用原料为硝基氯化苯, 2,4-二氯苯酚和碱, 试验目的是寻找 2,4-二氯苯酚和碱的最佳配比, 使其质量稳定、产量高.

碱的变化范围: 1.1~1.6(克分子比);

酚的变化范围: 1.1~1.42(克分子比).

首先固定酚的用量 1.30(即 0.618 处), 对碱的用量进行优选, 得最优用量为 1.30, 即图 1-33 上的点 A_1 .

再固定酚的用量 1.22(即 0.382 处), 对碱的用量进行优选, 得碱的最优用量为 1.22, 即图 1-33 上的点 A_2 . 过 A_1, A_2 作直线 L (直线 L 上的点是酚: 碱=1:1), 在直线 L 上用单因素法进行优选(因为 A_1 优于 A_2 , 所以酚的用量低于 1.22 时就不必做了), 最佳点为 A_3 , 即酚与碱的用量均为 1.27.

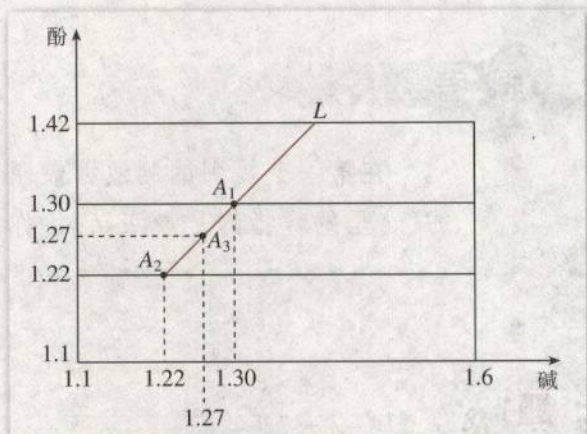


图 1-33

3. 双因素盲人爬山法

在单因素试验方法中已经提到, 试验在大生产中进行, 某些因素不允许大幅度调整时, 只能用盲人爬山法. 如果是双因素问题, 那么在用盲人爬山法找到第一个因素最佳点以后, 就应该以这一点为起点, 再对第二个因素应用同样的方法找最佳点. 如果到达某点后, 不管改变哪个因素的量, 其结果都比这点差, 则这一点就是最佳点.

是否一定要先找出第一个因素的最佳点, 然后再找另一个因素的最佳点呢? 不一定. 在双因素寻找最佳点的过程, 就像盲人爬山可以朝前后左右四个方向前进一样. 盲人在山上某点, 想要爬到山顶, 怎么办? 从立足处用明杖向前一试, 觉得高些, 就往前一步; 如果前面不高, 向左一试, 高就向左一步; 不高再试后面, 高就退后一步; 不高再试右面, 高就向右走一步; 四面都不高, 就原地不动. 总之, 某个方向高了就朝这个方向走一步, 否则试其他方向, 这样一步一步地走, 就一定能走上山顶. 在寻找最佳点时也可以以起点为中心, 向四周探索一下, 找出有利于寻找目标的方向, 在这个方向上跨一步, 然后再探索. 这样边探索边前进, 直到找到最佳点为止. 这就是双因素问题的盲人爬山法.

案例 3 对某种物品镀银时, 要选择氯化银和氰化钠的用量, 使得镀银速度快, 质量好.

为此采用爬山法选择最佳点. 起点: 氰化钠 85 g/ml, 氯化银 55 g/ml, 步长: 氰化钠 10 g/ml, 氯化银 5 g/ml. 试验过程如图 1-34 所示.

从起点 1 开始, 向右试探, 结果 2 比 1 好, 继续向右试探, 结果 3 比 2 好, 再向右试探, 结果 4 不如 3 好, 回到 3 再向上试探, 5 比 3 好, 继续向上试探, 6 比 5 好, 再继续试探, 直到其他三个方向不如 6 号, 并且 6 的结果满足生产条件, 即可以停止试验.

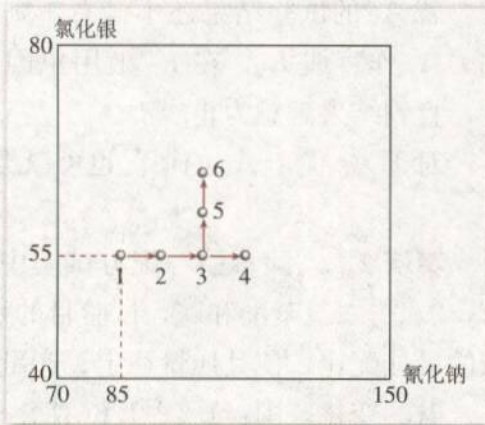


图 1-34

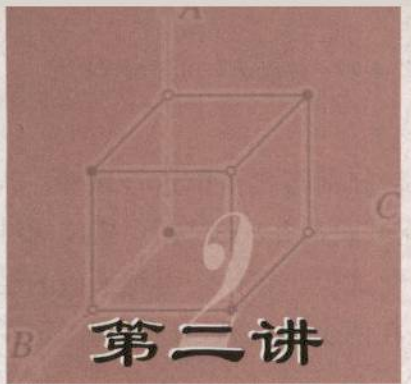
思考

在第一节提到的测池塘最深点问题, 如果假定池塘的深度是双因素单峰的(这里的峰指的是最深点), 你能选择合适的优选法迅速测出最深点吗?

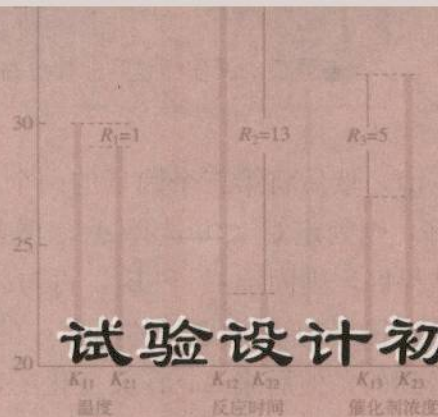
习题 1.8



1. 白油膏是生产擦字橡皮的主要原料, 对产品质量起着决定性作用. 它是蓖麻油、胚芽油、7# 机油、重体 CaCO_3 、 S_2Cl_2 和 H_2O 在一定温度下反应而成的. 根据经验和分析, 可以确定油类、重体 CaCO_3 的配比, 现在需要对 S_2Cl_2 和 H_2O 的用量进行优选. 请你选择合适的优选法安排试验, 并说明理由.
2. 你能举出现实中双因素的优选问题吗? 并选择合适的优选法解决.



第二讲



试验设计初步

在多因素的情况下，我们强调抓住主要矛盾，对各个因素进行分析，找出主要因素，略去次要因素，化多为少。但在某些情况下，例如新产品的试制和旧工艺的革新等研究中，由于资料和信息缺乏，或经验不足，对问题中各因素的主次一时难以分清，都要做试验，并且往往需要反复多次，经过一系列的试验和分析，才能有所认识。另外，对于生产和科学试验来说，除了寻找最优的生产条件外，还希望能认识各个因素之间，谁主谁次，谁大谁小，谁单独起作用，谁与谁搭配起综合作用产生最优效果，等等。对这类问题，在进行试验时，如何安排试验是很值得研究的。安排得好，试验次数不多就能得出规律性认识，引出正确结论。安排得不好，往往做了很多次试验，仍然得不到明确的结果。

为了方便起见，在试验中变化的因素用 $A, B, C, \dots$ 表示，因素在试验中所取的不同状态称为**水平**①，因素 A 的 r 个不同的水平用 $A_1, A_2, \dots, A_r$ 表示。

① 水平可以是因素在其试验范围内取具有代表性的“值”，三个水平就是有代表性的三个“值”。水平有时不限于数值，它可以是原料的种类或操作方式等等。

案例 1 某化工产品的产量受到温度 A 、反应时间 B 和催化剂浓度 C 三个因素的影响。在具体生产过程中，根据经验，温度、反应时间及催化剂浓度分别可以取两个水平：

温度： $A_1=80\text{ }^\circ\text{C}$ ， $A_2=90\text{ }^\circ\text{C}$ ；

反应时间： $B_1=1\text{ h}$ ， $B_2=2\text{ h}$ ；

催化剂浓度： $C_1=5\%$ ， $C_2=6\%$ 。

现在在上述的情况下找出产量最佳的因素组合方案，并分析影响结果的主次因素。

如果按它们所有可能组合的情况做试验，全面试验为：

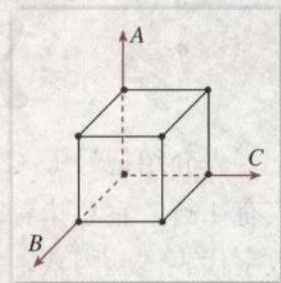
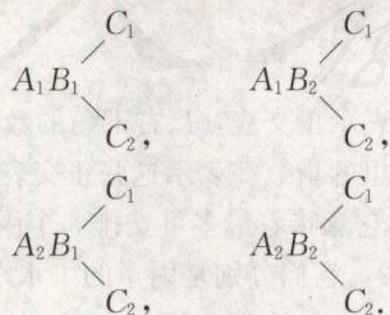


图 2-1

相互位置如图 2-1 所示，每个小黑圆点代表一个试验，共需做 $2^3=8$ 次试验。然后从所有的试验结果中选择最佳方案。这样做，原则上是可以的，但当因素和水平个数较大时，试验的次数会相当大（比如因素为 4，水平为 6 时，需 $6^4=1\,296$ 次试验），实际操作很困难。

为了减少试验次数，人们通常会这样进行试验：先把两个因素固定在某个水平上（如

$A_1=80\text{ }^{\circ}\text{C}$, $B_1=1\text{ h}$), 然后将第三个因素的两个水平 C_1, C_2 分别与之搭配进行试验. 若与 C_1 的搭配结果好, 则固定 C_1 , 并选择 A_1 , 再去与 B_2 搭配试验, 并比较与 B_1 搭配的结果. 若与 B_2 搭配结果好, 则固定 C_1 和 B_2 , 再与 A_1 和 A_2 搭配试验, 经比较得到最后的结果, 等等. 这样做的问题在于最初选择的因素 C 的水平 C_1 是在两个因素 A, B 分别固定在 A_1, B_1 的情况下得到的, 但后来 A, B 又变化了, 这时因素 C 选择水平 C_1 不能说一定仍是最好的, 所以所得结果未必是最好的.

那么, 是否有一种方法, 只做少量一部分试验, 就能对多个因素同时进行考察, 在各个因素都处于变动的情况下, 既能找出较优的试验方案, 又能分析出各因素对试验结果影响的大小呢?

人们在长期的科学试验和生产实践中, 总结出了一种解决这类安排多因素试验问题的方法——**正交试验设计法**. 它借助预先设计好的“正交表”来安排试验和对数据进行统计分析, 帮助人们通过较少的试验次数得到较好的因素组合, 形成较好的试验方案.

一 正交试验设计法

1. 正交表

正交试验设计法用正交表来安排试验. 数学工作者已经整理出常用的正交表, 我们可以直接使用它, 但必须懂得其意义. 下面是一个适合于安排案例 1 中试验的正交表 $L_4(2^3)$, 它的具体形式如表 2-1, 相互位置如图 2-2 所示.

表 2-1

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

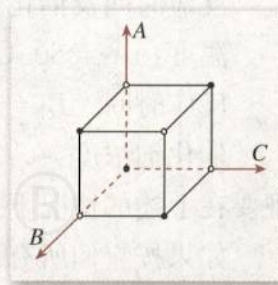


图 2-2

先介绍记号 $L_4(2^3)$ 的含意. 符号“ L ”表示正交表, L 右下角的数字 4 表示这张正交表有 4 行, 它意味着需要做 4 次试验. 括号里的指数 3 表示这张正交表有 3 列, 每列中的数字代表试验因素, 每列仅可放一个因素, 它意味着最多可安排 3 个因素. 括号内的数字 2 表示表的主要部分只有两种数字——1 和 2, 它们分别是因素的 1 水平和 2 水平的代号, 因此 $L_4(2^3)$ 是一张 2 水平的正交表.

常用的正交表有二水平正交表 $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{12}(2^{11})$, $L_{16}(2^{15})$; 三水平正交表 $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$; 四水平正交表 $L_{16}(4^5)$. 为了方便应用, 附录二中列出了这些正交表.

2. 正交试验设计

下面用正交试验设计法安排案例 1 中的试验。

首先要确定试验的因素和水平, 这里已知影响试验结果的有 3 个因素, 每个因素有 2 个水平. 然后根据确定的因素和水平, 选用一张合适的正交表. 从附录二中找到二水平正交表有: $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{16}(2^{15})$, $L_{32}(2^{31})$ ①. 本试验考察 3 个因素, 由于每个因素各需占用 1 列, 故所选表的列数不得少于 3 列. 查二水平正交表, 从中找出列数不少于 3 列的最小正交表是 $L_4(2^3)$ (表 2-1).

接着可以着手安排试验方案了. 用 $L_4(2^3)$ 表安排试验就是先在表中任选 3 列, 由于 $L_4(2^3)$ 中有且仅有 3 列, 所以就不用选择了. 将温度 A, 反应时间 B, 催化剂浓度 C 三个试验因素分别填入 1, 2, 3 三列上 (表 2-2). 哪一个因素安排在哪一列, 一般来说是任意的.

表 2-2

列号 试验号	A 温度(°C)	B 反应时间(h)	C 催化剂浓度	产量
1	$A_1(80)$	$B_1(1)$	$C_1(5\%)$	17
2	$A_1(80)$	$B_2(2)$	$C_2(6\%)$	13
3	$A_2(90)$	$B_1(1)$	$C_2(6\%)$	19
4	$A_2(90)$	$B_2(2)$	$C_1(5\%)$	10

排定因素后, 编排具体试验方案, 就是“对号入座”. 按照这个安排需要做 4 次试验. 第一个试验就是按照表 2-2 的第 1 行排出的水平组合(A_1, B_1, C_1), 在温度为 80 °C, 反应时间为 1 h, 催化剂浓度为 5% 条件下完成; 第二个试验就是按照表的第 2 行排出的水平组合(A_1, B_2, C_2), 在温度为 80 °C, 反应时间为 2 h, 催化剂浓度为 6% 条件下完成; 等等.

经过试验, 将试验的结果, 即产量列在表 2-2 中.

3. 试验结果的分析

从表 2-2 的试验结果列中可以看到, 第 3 号试验在 4 个试验中的产量最高. 这种直接对比法的好处是, 不必另作计算, 只凭试验结果及实际经验进行分析. 显然, 直接对比的结论十分重要, 因为这是拿到手的现实成果.

但是, 由于每个试验号之间因素的水平有变化, 究竟哪个因素的哪个水平引起试验结果的好坏, 就难于分辨了. 而且正交试验是从所有可能的因素组合中抽取其中一部分做试验, 本案例中从 2^3 个组合中抽取了 4 个. 未做过试验的组合情况如何? 更好的组合有没有漏掉? 这是难以回答的. 显然, 这对选取最优生产条件是一个很大的缺陷.

案例 1 中, 除温度、反应时间和催化剂浓度这三个考察因素之外, 其他因素 (如测量

① 这些二水平的正交表, 根据正交表符号的意义, 分别最多可以安排 3, 7, 15, 31 个因素, 而没有规定最少可安排的因素个数, 故这些表也都适用. 选择最小的正交表可以做最少次数的试验.

仪器、操作方法等)也会影响试验结果. 当这些其他因素都处于某种理想状态时, 所得试验结果叫做理论结果. 观察到的试验结果与理论结果之间的偏离量, 叫做试验误差. 观察结果大于理论结果时, 误差为正; 反之, 误差为负.

如果试验中考察因素之外的其他因素的状态差异难以把握, 试验误差带有随机性, 则称之为随机误差. 一般地说, 随机误差在试验活动中是难以避免的. 我们要进一步考虑: 是否可以设法克服随机误差对分析试验结果的影响?

直观分析法是分析各个因素对试验结果影响大小的一种数学方法, 它弥补了直接对比法的缺陷.

用 K_{pq} 表示 $L_4(2^3)$ 表中对应第 q 列中水平 p 的试验结果之和, k_{pq} 表示 K_{pq} 的平均值, 即 $k_{pq} = \frac{K_{pq}}{\text{第 } q \text{ 列中水平 } p \text{ 重复的次数}}$ ($q=1, 2, 3, p=1, 2$), 如表 2-3 所示. 其中

$$K_{11}=17+13=30, k_{11}=\frac{30}{2}=15; K_{21}=19+10=29, k_{21}=\frac{29}{2}=14.5; \dots$$

表 2-3

列号 试验号	A 温度(°C)	B 反应时间(h)	C 催化剂浓度	产量
1	$A_1(80)$	$B_1(1)$	$C_1(5\%)$	17
2	$A_1(80)$	$B_2(2)$	$C_2(6\%)$	13
3	$A_2(90)$	$B_1(1)$	$C_2(6\%)$	19
4	$A_2(90)$	$B_2(2)$	$C_1(5\%)$	10
$k_{1q} = \frac{1}{2} K_{1q}$	15	18	13.5	
$k_{2q} = \frac{1}{2} K_{2q}$	14.5	11.5	16	

k_{11} 是在 A_1 条件下的两个试验产量的平均值, 虽然这两个试验也搭配了 B, C 的水平, 但 B 的两个水平都搭配过一次, B 的不同水平对试验结果的影响在求平均值时也就抵消了, 同样, C 的不同水平对试验结果的影响在求平均值时也被抵消了. 由于随机误差有正有负, 在求平均值过程中, 可以使相当部分正负误差相互抵消 (尤其是试验次数比较多时), 这就减弱了随机误差对分析试验结果的影响. 因此, k_{11} 的大小反映了 A_1 对试验结果的影响. 同理, k_{21} 的大小反映了 A_2 对试验结果的影响.

就因素 A 的两个水平对试验结果的影响来看, k_{11} 大于 k_{21} , 所以在选择好的生产条件时, 在 A_1, A_2 中应该选择 A_1 . 同理在 B_1, B_2 中应该选择 B_1 , 在 C_1, C_2 中应该选择 C_2 , 所以 (A_1, B_1, C_2) 是好的生产条件.

为了比较影响结果的因素的主次, 我们用每列中的最大的 k 值减去最小的 k 值, 为此我们定义

$$R_q = \max\{k_{1q}, k_{2q}\} - \min\{k_{1q}, k_{2q}\}, q=1, 2, 3.$$

所以, $R_1 = 15 - 14.5 = 0.5$; $R_2 = 18 - 11.5 = 6.5$; $R_3 = 16 - 13.5 = 2.5$. 由此得表 2-4.

表 2-4

列号 试验号	A 温度(°C)	B 反应时间(h)	C 催化剂浓度	产量
1	A ₁ (80)	B ₁ (1)	C ₁ (5%)	17
2	A ₁ (80)	B ₂ (2)	C ₂ (6%)	13
3	A ₂ (90)	B ₁ (1)	C ₂ (6%)	19
4	A ₂ (90)	B ₂ (2)	C ₁ (5%)	10
$k_{1q} = \frac{1}{2}K_{1q}$	15	18	13.5	
$k_{2q} = \frac{1}{2}K_{2q}$	14.5	11.5	16	
R_q	0.5	6.5	2.5	

为了直观起见, 我们把 k 和 R 的计算结果绘成产量和因果图 (图 2-3)。

这样, R_1 是 k_{11} 和 k_{21} 差的绝对值, R_1 大说明 A 的两个水平使试验结果产生了大的变化, R_1 小说明 A 的两个水平是试验结果的变化小。所以 R_1 的大小反映了因素 A 对试验结果影响的大小。同样, R_2, R_3 的大小分别反映了因素 B, C 对试验结果的影响大小。因此, 可以通过 R 的大小来确定因素对试验结果影响的主次, 找出影响试验结果的主要因素。对于本例, 我们有 $R_2 > R_3 > R_1$, 说明 B 是主要因素。因此反映时间是影响产量的主要因素, 然后是催化剂浓度, 其次才是温度。

通过 4 个试验, 我们发现影响试验结果的主要因素是 B , 其次是 C , 而 A 对试验结果无显著影响, 可以不考虑。这样我们把三因素问题化为两个或一个主要因素问题。如果需要, 可以用前面的优选方法对 B 和 C 进行优选。

用正交试验设计法安排试验, 通常要经过以下步骤:

(1) 明确试验目的, 确定试验指标。有时生产和科学试验中存在的问题不止一个, 不可能通过一项试验解决所有问题, 而必须根据实际情况, 抓住主要矛盾, 以确定要解决的问题。

(2) 选因素, 定水平。根据试验目的, 结合实践经验, 固定一些比较次要的、比较难于控制的以及已经了解得比较清楚的因素, 只考察与试验目的关系重要的因素。水平一般可以根据具体情况灵活选取, 相邻两个水平的取值既不要太近, 也不要太远。太近了, 试验结果的差异不易辨别, 容易把本来有显著影响的因素误判为无显著影响; 太远了, 会失

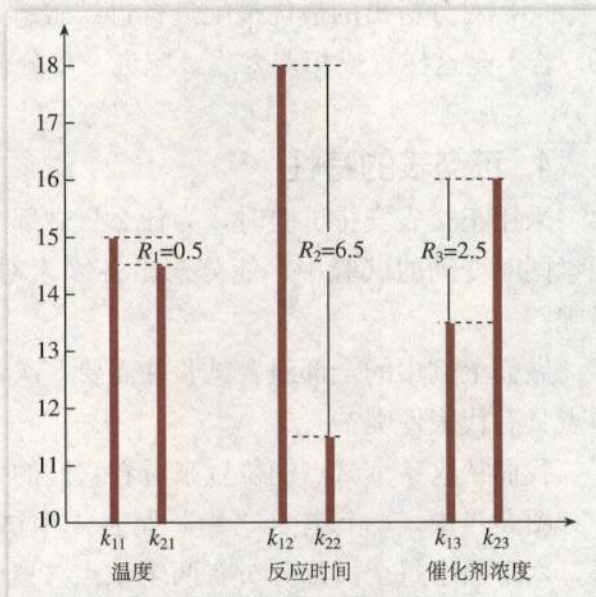


图 2-3

去代表性,也容易引起判断失误.因素、水平选得越准确,试验效果越显著.

(3) 选适合的正交表. 根据问题的具体情况选一张合适的正交表. 首先根据因素的水平个数 m , 从 m 水平的正交表中找一张; 再从 m 水平的正交表中找列数不小于因素个数的最小正交表.

(4) 安排试验方案. 利用正交试验表安排试验. 首先安放因素到正交表中, 然后将因素所在列抽出, 用相应因素的不同水平代替表中的数字. 每一横行里列出的各因素的不同水平构成一个试验方案.

(5) 对试验结果进行直观分析. 在同因素中将相同水平的结果相加, 找出每个因素中的最好水平.

(6) 获得最佳搭配方案. 将每个因素中的最好水平进行搭配, 得到最佳方案.

(7) 分析影响结果的主次因素. 根据 R 值的大小, 确定因素对试验结果影响的主次, 找出影响试验结果的主要因素.

(8) 对分析出的最优搭配进行再试验. 一般说, 其结果应不次于已做过的试验中最好的. 若不是这样, 或相差太远, 应进一步分析原因. 若效果比较满意, 试验可暂告一段落.

4. 正交表的特性

采用正交表安排试验时, 为什么只做部分试验就能找到好的试验点呢? 为什么在多个因素同时变动的试验中, 能分辨出各因素对试验结果影响的大小, 从而迅速抓住主要矛盾呢?

做完上例中的全部组合试验共需要 8 次, 应用正交表只做了 4 次, 为什么说这 4 个试验点具有代表性呢?

我们从这 4 个试点的位置来看看它们的分布情况.

图 2-4 中, 4 个黑点“·”代表 4 个试点. 从这个立体图看, 六个面中每个面都分布有两个试点(既不多, 也不少), 每条线段都分布有一个试点(既不多, 也不少), 所以这 4 个试点的分布是均匀的. 如果把其中一个试点和非试点调换位置, 比如把 a 与 b 对调, 那么立方体的六个面中, 有些面有 3 个试点, 有些面只有 1 个试点; 同时, 立方体的边上, 有些边上有 2 个试点, 有些没有试点. 这样, 试点分布的均匀性被破坏了. 所以说, 用正交表所选取的 4 个试点, 是 8 个试验中代表性很强的一部分, 这就使好的试点出现的机会增多.

另一方面, 3 个因素的水平虽然都在变动, 但任一因素的任一水平与其他因素的每一水平相碰一次, 且仅相碰一次, 搭配均匀.

例如, 案例 1 中, 温度有两种: $A_1 = 80^\circ\text{C}$, $A_2 = 90^\circ\text{C}$. A_1 既与反应时间 $B_1 = 1\text{ h}$ 和 $B_2 = 2\text{ h}$ 搭配做过试验, 又与催化剂浓度 $C_1 = 5\%$ 和 $C_2 = 6\%$ 搭配做过试验. 温度 A_2 也如此. 这样就有了合理的比较在温度 A_1 , A_2 下的产品产量的基础.

在正交试验设计中, 经过分析, 就能找出各因素的最优水平组合, 即使试点没有包括它, 也能把它找出来. 在案例 1 的 4 次试验中, 第 3 号试验产量最高 19, 但经过分析, 没

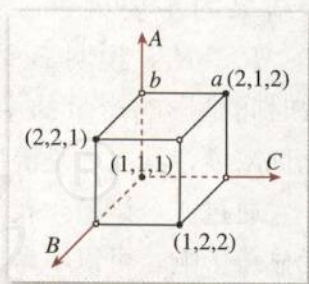


图 2-4

做过的试验(A_1, B_1, C_2), 即温度 80°C , 反应时间 1 h, 催化剂浓度 6% 的试点会比第 3 号还好, 但这个点不是试点. 这是正交法的优点之一. 同时, 经过直观分析, 可以找出影响化工产品产量的主要因素依次是反应时间, 催化剂浓度和温度.

上述特征性在正交表中是通过以下方式表现的:

(1) 每一列中, 不同的数字出现的次数相等, 即同一因素的任一水平在试验中出现的次数相等. 例如在表 $L_4(2^3)$ 中, 每一列的水平数字 1 和 2 出现的次数都是两次.

(2) 任意两列, 将同一行的两个数字看成有序数对时, 每种数对出现的次数相等, 即任何两因素的各种水平搭配, 在试验中出现的次数也相等. 例如在表 $L_4(2^3)$ 中, 有序数对共有四种: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), 每种出现的次数都是一次.

由于实际问题的复杂性, 试验有各种各样的情形. 有的考察因素多些, 有的考察因素少些; 有时因素的水平分为 2 个, 有时是 3 个或更多个. 为了适应各种试验的需要, 数学家已编制了多种正交表. 了解了这些表的结构、功能和使用方法后, 只要根据试验目的, 准确选用正交表安排试验即可.



- 习题 2.1
1. 为什么按正交表安排的试验, 可以以部分代替整体?
 2. 通过正交试验选出各个因素好点的组合, 是否一定是好点? 为什么?

二 正交试验的应用

案例 1 考察表 2-5 所列的对胶鞋弯曲性能有影响的 3 个因素和 2 个水平, 选取主要因素及较好的配方.

表 2-5

水平 \ 因素	A 促进剂总量	B 炭黑品种	C 硫磺用量
1	1.5	甲类炭黑	2.5
2	1.0	乙类炭黑	2.0

首先, 我们要找出适合试验要求的正交表. 案例有 2 个水平, 自然应在 2 水平的正交表中选. 又因为有 3 个因素, 而列数不小于因素个数的最小 3 水平正交表是 $L_4(2^3)$, 如表 2-6.

表 2-6

列号 试验号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

安排试验方案. 类似于上一节的操作, 将促进剂总量 A , 炭黑品种 B , 硫磺用量 C 三个试验因素分别填入三列上. 哪一个因素安排在哪一列是任意的 (表 2-7).

表 2-7

列号 试验号	A 促进剂总量	B 炭黑品种	C 硫磺用量
1	$A_1(1.5)$	$B_1(\text{甲})$	$C_1(2.5)$
2	$A_1(1.5)$	$B_2(\text{乙})$	$C_2(2.0)$
3	$A_2(1.0)$	$B_1(\text{甲})$	$C_2(2.0)$
4	$A_2(1.0)$	$B_2(\text{乙})$	$C_1(2.5)$

按照这个安排需要做 4 次试验. 第一个试验就是按照表 2-7 的第 1 行排出的水平组合 (A_1, B_1, C_1) , 在促进剂总量为 1.5, 炭黑品种为甲类, 硫磺用量为 2.5 的条件下完成; 第二个试验就是按照表 2-7 的第 2 行排出的水平组合 (A_1, B_2, C_2) , 在促进剂总量为 1.5, 炭黑品种为乙类, 硫磺用量为 2.0 条件下完成; 等等.

经过试验, 将试验的结果 (弯曲次数) 列在表 2-8 中.

表 2-8

列号 试验号	A 促进剂总量	B 炭黑品种	C 硫磺用量	试验结果 弯曲次数(万次)
1	$A_1(1.5)$	$B_1(\text{甲})$	$C_1(2.5)$	3.0
2	$A_1(1.5)$	$B_2(\text{乙})$	$C_2(2.0)$	2.6
3	$A_2(1.0)$	$B_1(\text{甲})$	$C_2(2.0)$	2.4
4	$A_2(1.0)$	$B_2(\text{乙})$	$C_1(2.5)$	1.8
$k_{1q} = \frac{1}{2} K_{1q}$	2.8	2.7	2.4	
$k_{2q} = \frac{1}{2} K_{2q}$	2.1	2.2	2.5	
R_q	0.7	0.5	0.1	

接着用直观分析方法分析试验结果. 根据 k 值和 R 值的定义, 先计算 k 值, 然后计算 R 值 (表 2-8).

画弯曲次数和因素的关系图 (图 2-5).

从表 2-8、图 2-5 中可以看出, 因素 A —促进剂总量两个水平对产量的影响中, k_{11} 值

最大,即水平1的时候弯曲次数较高,所以在 A_1, A_2 中应该选择 A_1 .同理,在 B_1, B_2 中选择 B_1 ;在 C_1, C_2 中选择 C_2 .所以组合 (A_1, B_1, C_2) 是最佳生产条件.比较 R_1, R_2, R_3 的大小,有 $R_1 > R_2 > R_3$,说明促进剂总量(A)是主要因素,其次是炭黑品种(B),最后是硫磺用量(C).

由于分析得到的最优生产组合 (A_1, B_1, C_2) 不在表2-8所做的4个试验中,因此需要对 (A_1, B_1, C_2) 做验证试验.经过试验,得其弯曲的次数为4.0万次,而4个试验中最优搭配为 (A_1, B_1, C_1) ,其弯曲的次数为3.0万次. (A_1, B_1, C_2) 的次数高于 (A_1, B_1, C_1) 的次数,这就证实了 (A_1, B_1, C_2) 是最优的水平搭配.

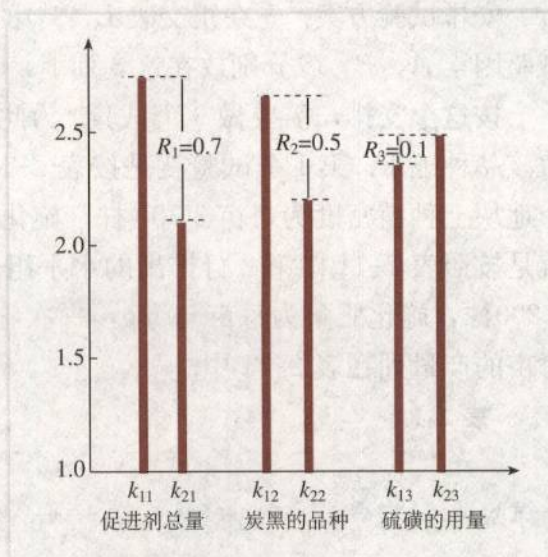


图 2-5

案例 2 某农场希望知道某个玉米品种的高产栽培条件. 研究人员选择了3个试验因素: 种植密度、施化肥量、施化肥时间, 每个试验因素选3个水平, 如表2-9.

表 2-9

因素	A	B	C
水平	施化肥量 (kg/亩)	种植密度 (株/亩)	施化肥时间
1	50	3 700	按 1 : 2 : 1 分 3 次施完
2	40	3 200	一次施完
3	30	2 800	按 3 : 5 分 2 次施完

首先找出适合试验要求的正交表. 由问题中有3个水平和3个因素, 可以选择列数不小于因素个数的最小3水平正交表是 $L_9(3^4)$ (表2-10).

表 2-10

列号	1	2	3	4
试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

安排试验方案. 先在正交表 $L_9(3^4)$ 的 4 列中任选 3 列, 例如选择 1, 2, 3 列, 然后将试验因素 A, B, C 分别放在这 3 列上, 不管第 4 列 (表 2-11).

按这个安排, 需要做 9 个试验. 为此农场选择了 9 块大小、条件尽可能相同的地块种植该品种玉米. 第 1 个试验就是按表 2-11 中第 1 行排出的水平组合 (A_1, B_1, C_1) , 在一个地块上种植密度为每亩 3 700 株, 施化肥量为每亩 50 kg, 分 3 次施完化肥; 第 2 个试验就是按照表 2-11 中第 2 行排出的水平组合 (A_1, B_2, C_2) , 在一个地块上种植密度为每亩 3 200 株, 施化肥量为每亩 50 kg, 一次施完化肥; 等等. 经过试验, 将试验的结果折合为每亩的产量列在表 2-11 中.

表 2-11

试验号	列号	A 施化肥量 (kg/亩)	B 种植密度 (株/亩)	C 施化肥时间	4	试验结果 亩产量 (kg)
1		A_1 (50)	B_1 (3 700)	C_1 (三次)	1	463.5
2		A_1 (50)	B_2 (3 200)	C_2 (一次)	2	409.0
3		A_1 (50)	B_3 (2 800)	C_3 (二次)	3	428.5
4		A_2 (40)	B_1 (3 700)	C_2 (一次)	3	451.5
5		A_2 (40)	B_2 (3 200)	C_3 (二次)	1	435.5
6		A_2 (40)	B_3 (2 800)	C_1 (三次)	2	429.5
7		A_3 (30)	B_1 (3 700)	C_3 (二次)	2	453.5
8		A_3 (30)	B_2 (3 200)	C_1 (三次)	3	426.5
9		A_3 (30)	B_3 (2 800)	C_2 (一次)	1	394.0
$k_{1q} = \frac{1}{3}K_{1q}$		433.7	456.2	439.8		
$k_{2q} = \frac{1}{3}K_{2q}$		438.8	423.7	418.2		
$k_{3q} = \frac{1}{3}K_{3q}$		424.7	417.3	439.2		
R_q		14.1	38.9	21.6		

接着用直观分析方法分析试验结果. 根据 K 值和 R 值的定义, 先计算 K 值, 然后计算 R 值 (表 2-11).

例如

$$K_{11} = 463.5 + 409.0 + 428.5 = 1\,301.0, \quad k_{11} = \frac{1\,301.0}{3} \approx 433.7;$$

$$K_{21} = 451.5 + 435.5 + 429.5 = 1\,316.5, \quad k_{21} = \frac{1\,316.5}{3} \approx 438.8;$$

$$K_{31} = 453.5 + 426.5 + 394.0 = 1\,274.0, \quad k_{31} = \frac{1\,274.0}{3} \approx 424.7;$$

$$R_1 = \max\{433.7, 438.8, 424.7\} - \min\{433.7, 438.8, 424.7\} \\ = 438.8 - 424.7 = 14.1,$$

.....

画产量和因素的关系图(图 2-6).

从表 2-11、图 2-6 中可以看出, 因素 A (施化肥量) 的 3 个水平对产量的影响, 以 K_{21} 为最大, 即水平 2 的时候产量最高, 所以在 A_1, A_2, A_3 中应该选择 A_2 . 同理, 在 B_1, B_2, B_3 中选择 B_1 , 在 C_1, C_2, C_3 中选择 C_1 . 所以 (A_2, B_1, C_1) 是我们寻求的最佳的栽培条件. 比较 R_1, R_2, R_3 的大小, 有 $R_2 > R_3 > R_1$, 说明种植密度(B)是主要因素, 其次是施化肥次数(C), 最后是施化肥量(A).

验证试验显示, (A_2, B_1, C_1) 水平搭配的试验结果为亩产量 493.0 kg, 优于表 2-11 的最好试验结果 (即 (A_1, B_1, C_1) 水平搭配的亩产量 463.5 kg).

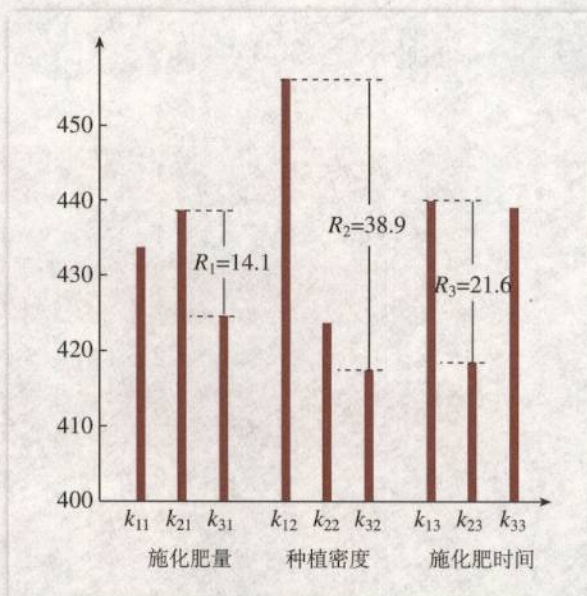


图 2-6



案例 1 和案例 2 的操作过程有什么区别? 这些区别是由问题的哪些条件的不同而引起的?

案例 3 某工厂生产弹簧, 为了提高弹簧的弹性, 需要通过试验寻找合适的生产条件. 根据以往的经验, 提出与弹性相关的 3 个因素, 每个因素有 4 个水平, 如表 2-12.

表 2-12

因素	A	B	C
水平	回火温度(°C)	保温时间(min)	工件重量(kg)
1	440	3	7
2	460	4	9
3	500	5	11
4	520	6	13

首先, 找出适合试验要求的正交表. 由 4 个水平和 3 个因素, 确定列数不少于因素个数的最小 4 水平正交表是 $L_{16}(4^5)$ (表 2-13).

表 2-13

列号 试验号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

安排试验方案. 先在正交表 $L_{16}(4^5)$ 的 5 列中任选 3 列, 例如选择 1, 2, 3 列, 然后将 A, B, C 三个试验因素分别放在 3 列上, 不管第 4, 5 列, 见表 2-10.

按这个安排, 工厂需做 16 个试验. 各列的水平数码 1, 2, 3, 4 对应各因素的具体水平. 现把试验安排及分析结果列于表 2-14.

表 2-14

列号 试验号	A 回火温度 (°C)	B 保温时间 (min)	C 工件重量 (kg)	4	5	弹性 (N/m)
1	A_1 (440)	B_1 (3)	C_1 (7)	1	1	377
2	A_1 (440)	B_2 (4)	C_2 (9)	2	2	391
3	A_1 (440)	B_3 (5)	C_3 (11)	3	3	362
4	A_1 (440)	B_4 (6)	C_4 (13)	4	4	350
5	A_2 (460)	B_1 (3)	C_2 (9)	3	4	330
6	A_2 (460)	B_2 (4)	C_1 (7)	4	3	320
7	A_2 (460)	B_3 (5)	C_4 (13)	1	2	326

续表

8	A_2 (460)	B_4 (6)	C_3 (11)	2	1	302
9	A_3 (500)	B_1 (3)	C_3 (11)	4	2	318
10	A_3 (500)	B_2 (4)	C_4 (13)	3	1	343
11	A_3 (500)	B_3 (5)	C_1 (7)	2	4	318
12	A_3 (500)	B_4 (6)	C_2 (9)	1	3	386
13	A_4 (520)	B_1 (3)	C_4 (13)	2	3	320
14	A_4 (520)	B_2 (4)	C_3 (11)	1	4	364
15	A_4 (520)	B_3 (5)	C_2 (9)	4	1	365
16	A_4 (520)	B_4 (6)	C_1 (7)	3	2	321
$k_{1q} = \frac{1}{4} K_{1q}$	370	336	334			
$k_{2q} = \frac{1}{4} K_{2q}$	320	355	368			
$k_{3q} = \frac{1}{4} K_{3q}$	341	343	337			
$k_{4q} = \frac{1}{4} K_{4q}$	343	340	335			
R_q	50	19	34			

以下请你参考前面的案例继续分析,找出影响弹簧弹性的主要因素,确定最优生产条件.

习题2.2



1. 已知某化学反应中较重要的因素有因素 A —催化剂的种类; 因素 B —催化剂的量; 因素 C —溶剂的用量; 因素 D —反应时间. 各因素的取值如下表:

因素 水平	A 催化剂的种类	B 催化剂的量(g)	C 溶剂的用量(ml)	D 反应时间(h)
1	甲种催化剂	0.9	10	3.5
2	乙种催化剂	1.2	20	2.5

试验目的是找出影响该化学反应产率的主要因素.

请选出合适的正交表,并安排试验.

2. 如果一个 3 因素 2 水平的正交试验结果如下表:

列号 试验号	A	B	C	试验结果
1	A_1	B_1	C_1	79
2	A_1	B_2	C_2	65
3	A_2	B_1	C_2	88
4	A_2	B_2	C_1	81
K_{1p}				
K_{2q}				
R_q				

你能完成上表吗? 求使得试验结果最优的因素组合, 并找出影响试验结果的最主要因素.



本专题学习了优选法和试验设计的一些基本方法。现实生活、生产和科学试验中,很多情况下,试验结果与因素的关系,或很难用数学形式表达,或表达形式很复杂,优选法和试验设计是寻求这类问题中最佳点的有力的数学方法。

优选法可以大大减少试验或检验次数,帮助我们迅速找到最佳点。各种优选法都有自己的特点和适用范围。实际应用中,要根据问题的具体背景进行选择。常见的五种优选法基本上可以分为三个类型:

第一类方法包括 0.618 法、分数法、对分法。这三种方法适用于一次只能出一个结果的问题。这些方法中,就效果而言以对分法最好,每一次试验就可以去掉试验范围的一半。就应用范围而言,以分数法最广,因为它还可以应用于试点只能取整数或某些特定数的情形,以及限定试验次数或给定精确度的问题。0.618 法与分数法的基础都是黄金分割法,它们分别用小数和分数近似代替 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。这两种方法中比较对象是两个试点上的试验结果;对分法的比较对象是试点上的试验结果和已知标准(或要求)。

第二类方法是分批试验法。这类方法适用于一次可以同时出若干个试验结果的问题。它的比较对象是每批试验中的所有试验结果。

第三类方法是爬山法。这类方法可以应用于优选对象不宜调整或不易大幅度调整的问题。它的比较对象是前后两个试点上的试验结果。

试验设计是考虑在多因素情况下安排试验的方法,它可以帮助人们通过较少的试验次数得到较好的因素组合,形成较好的试验方案。应用正交试验设计法安排试验,还可以把考察的因素进行排队,看哪些因素是主要的,哪些因素是次要的,从而抓住主要因素进一步试验。当主要因素个数比较少时,可以利用第一讲的方法迅速得到最佳点。

请你写一篇学习总结报告,建议报告包括下列三方面的内容:

1. 知识的总结 主要谈谈对本专题内容的大概理解,对优选法、试验设计方法的认识。

2. 拓展 通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考,举例说明优选法和试验设计方法的应用。你认为优选法还有没有改进的余地?你能提出具体改进意见吗?

3. 学习体会 通过本专题的学习,谈谈你对优选法和试验设计的应用价值的认识和体会。

可以参考下列书籍:

1. 华罗庚,《优选法平话及其补充》.
2. 华罗庚,《优选学》,科学出版社.
3. 中国科学院数学研究所运筹室优选法小组,《优选法》,科学出版社.
4. 北京市优选法应用推广小组编,《优选法及其应用》,北京人民出版社.

人教版®

连分数分为有限连分数和无限连分数.

1. 先考虑两个正整数 a, b . 假定 $b < a$, 用 b 除 a 得商 a_0 , 余 r , 即

$$a = a_0 b + r, \quad 0 \leq r < b.$$

若 $r \neq 0$, 再用 r 除 b 得商 a_1 , 余 r_1 , 即

$$b = a_1 r + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r;$$

若 $r_1 \neq 0$, 再用 r_1 除 r , 得

$$r = a_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1;$$

若 $r_2 \neq 0$, 则继续做下去. 直到 $r_n = 0$, 即

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1}.$$

经有限步之后, 余数必为 0^①. 由此得

$$b > r > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0.$$

这个方法叫做辗转相除法.

我们把上面的式子写为分式, 有

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b},$$

$$\frac{b}{r} = a_1 + \frac{r_1}{r},$$

$$\frac{r}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

.....

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} \quad (r_{n-1} \neq 0),$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_{n+1} \quad (\text{整除}).$$

再将第一式的 $\frac{r}{b}$ 用第二式的 $\frac{b}{r}$ 的倒数代入, 接着将 $\frac{r_1}{r}$ 用第三式的 $\frac{r}{r_1}$ 的倒数代入, 依次类推, 即得

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}}$$



① 在 a, b 为整数时, 为什么辗转相除有限步之后余数必为 0?

$$= \cdots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

上式右边的繁分式称为有限连分数. 为了节省篇幅和简单起见, 把它写成

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}}$$

例如, $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$, $\frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$,

一般地, 我们有

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{1}}}$$

2. 就像每一个有理数 $\frac{a}{b}$ 都可以用简单有限连分数表示一样, 每一个无理数也可以用辗转相除, 表示为简单的无穷连分数. 任一无理数 α , 可以写成

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad a_0 = [\alpha], \quad \alpha_1 > 1,$$

$[\alpha]$ 代表 α 的整数部分. 再令

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad a_1 = [\alpha_1], \quad \alpha_2 > 1.$$

一般地, 令

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}, \quad a_{n-1} = [\alpha_{n-1}], \quad \alpha_n > 1.$$

于是, 得到 α 的连分数表达式为

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \cdots}}}$$

因为任意有限项的连分数一定是有理数, 所以无理数的连分数的项数必然是无限的. 计算其中有限项连分数, 得

$$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1},$$

.....

一般地, 有

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

$\frac{p_n}{q_n}$ 称为 α 的第 n 个渐近分数.

例如, 方程 $\omega^2 + \omega - 1 = 0$ 的正根 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 可以写成无穷连分数的形式.

将 $\omega^2 + \omega - 1 = 0$ 化为:

$$\omega = \frac{1}{1+\omega}.$$

以 $\frac{1}{1+\omega}$ 代上式右边的 ω , 得

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\omega}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+\omega}.$$

不断执行上述操作, 可得

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots.$$

人教版

(一)

在目标函数为单峰的情形, 通过 n 次试验, 最多能从 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中保证找出最佳点, 并且这个最佳点就是 n 次试验中的最优试验点.

证明: 若经 n 次试验, 最多能从 m_n 个点中定出最佳点, 我们的第一个目的是要证明

$$m_n \leq F_{n+1} - 1. \quad (1)$$

下面用数学归纳法给出证明.

显然, 通过 1 次或 2 次试验, 最多只能从 1 点或 2 点而不能从更多的点中定出最佳点, 而 $F_2=2$, $F_3=3$, 所以当 $n=1, 2$ 时, (1) 式成立.

设对小于 n 的任何正整数 k , 都有

$$m_k \leq F_{k+1} - 1 \quad (k \leq n-1), \quad (2)$$

需要由此推出 (1) 式成立.

n 次试验总是分成若干批进行的. 若第 1 批不少于 2 个试验, 则从中任意挑出 2 个试验, 而设相应的试点为 x_i 与 $x_j (i < j)$; 若第 1 批只有 1 个试验, 则将第 1 批与第 2 批合起来考虑, 从中任意挑出 2 个试验, 仍设相应的试点为 x_i 与 $x_j (i < j)$. 若在 x_j 处的试验结果较优, 则由单峰的假设, 最佳点与好点必在差点同侧, 所以最佳点一定是 $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{m_n}$ 这 (m_n-i) 个点中的一个. 现在至少已经做了 2 次试验, 最多还可做 $(n-2)$ 次试验, 所以为了能从这 (m_n-i) 个点中定出最佳点, 连同 x_j 处的那个试验在内, 最多能做 $(n-1)$ 次试验, 所以必须

$$m_n - i \leq m_{n-1}.$$

由归纳假设 (2), 有

$$m_{n-1} \leq F_n - 1,$$

故必须

$$m_n - i \leq F_n - 1. \quad (3)$$

若 x_i 上的试验结果较优, 仍由最佳点与好点必在差点同侧可知, 最佳点一定是 $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ 等 $(j-1)$ 个点中的某一个. 为了确定哪一点最优, 再在这些点中安排一批新的试验, 而设 x_l 为任一新的试点.

若 $x_i < x_l$, 考虑 x_i 处的试验结果优于 x_l 处的情形, 由最佳点与好点必在差点同侧可知, 最佳点一定是 $x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$ 中的某一个; 否则考虑 x_l 处的试验结果优于 x_i 处的情形, 仍由最佳点与好点必在差点同侧知, 最佳点一定是 $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ 中的某一点.

现在已经至少 (在 x_i, x_j, x_l 上) 做了 3 次试验, 最多还能做 $n-3$ 次试验. 为了从这些点中定出最佳点, 连同 x_i 和 x_l 上的那个试验在内, 最多能做 $n-2$ 次试验. 再由归纳假设, 对这两种情形分别有

$$l-1 \leq F_{n-1}-1 \text{ 或 } i-1 \leq F_{n-1}-1.$$

但在前一情形中, 因为 $i < l$, 所以也有 $i-1 \leq F_{n-1}-1$. 因此无论如何

$$i-1 \leq F_{n-1}-1 \quad (4)$$

恒成立. 由 (3) 及 (4), 可得 (1) 式.

(二)

在目标函数为单峰的情形, 只有按照分数法安排试验, 才能通过 n 次试验保证从 $(F_{n+1}-1)$ 个试点中找出最佳点.

证明: 与上一部分附录 (3) (4) 完全类似, 可以证明

$$j-1 \leq F_n-1, m_n-j \leq F_{n-1}-1. \quad (5)$$

因此, 当 $m_n = F_{n+1}-1$ 时, i 与 j 唯一确定, 即

$$i = F_{n-1}, j = F_n.$$

所以, 为了保证通过 n 次试验从 $(F_{n+1}-1)$ 个点中定出最佳点, 第 1 批试验一定不能多于 2 个, 若第 1 批做 2 个试验, 则试点必须取为 $x_{F_{n-1}}$ 与 x_{F_n} ; 若第 1 批做 1 个试验, 则第 2 批也只能做 1 个试验, 而这 2 个试验的试点也必须为 $x_{F_{n-1}}$ 与 x_{F_n} .

比较 $x_{F_{n-1}}$ 与 x_{F_n} 处的试验效果, 利用单峰函数的性质, 若 x_{F_n} 处的试验结果较优, 则最佳点一定落在 $x_{F_{n-1}+1}, x_{F_{n-1}+2}, \dots, x_{F_{n+1}-1}$ 中, 而在相反的情形, 最佳点一定属于 $x_1, x_2, \dots, x_{F_{n-1}}$. 所以不论何种情形, 最佳点一定是某 (F_n-1) 个点中的一个, 且在这 (F_n-1) 点中的第 F_{n-2} 或第 F_{n-1} 点上已经有了 1 个试验. 为了从这 (F_n-1) 点中定出最佳点, 一共可以做 $(n-1)$ 次试验 ($(n-2)$ 次未进行的试验与一次已进行的试验), 这与原问题的差异只在于把 n 换成了 $(n-1)$. 于是重复前面的分析, 既然在这 (F_n-1) 点中的第 F_{n-2} 或第 F_{n-1} 点上已经有了 1 个试验, 那么下一批只能做 1 个试验, 并且试点必须取为这两点中未作试验的那一点. 如此继续进行, 就这证明了只有依照分数法安排各批试点, 才能从 $(F_{n+1}-1)$ 点中定出最佳点.

附录三

常用正交表

二水平正交表

1. $L_4(2^3)$

列号 试验号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

2. $L_8(2^7)$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

3. $L_{12}(2^{11})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

续表

3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

4. $L_{16}(2^{15})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

三水平正交表

5. $L_9(3^4)$

列号 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

6. $L_{27}(3^{13})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2

续表

18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

四水平正交表

7. $L_{16}(4^5)$

列号 试验号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

后 记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

我们聘请北京师范大学刘绍学教授为主编，与高中数学课程标准研制组的部分成员、大学数学教师、数学教育理论工作者、中学数学教研员和数学教师共同组成编写委员会，根据教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》，编写了这套数学实验教科书。这里特别要感谢北京师范大学数学科学学院领导对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持，同时还要感谢所有对本套教科书提出修改意见，提供过帮助与支持的专家、学者和教师，以及社会各界朋友。

本册教科书是编委会全体成员集体智慧的成果。除已列出的主要编写者外，李勇也参加了本册教科书的讨论，中科院科技政策与管理科学研究所计雷研究员提出了许多宝贵的意见和建议。

我们还要感谢使用本套教材的实验区的师生们。希望你们在使用本套教材的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意。让我们携起手来，共同完成教材建设工作。我们的联系方式如下：

电话：(010) 58758333

E-mail: jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心