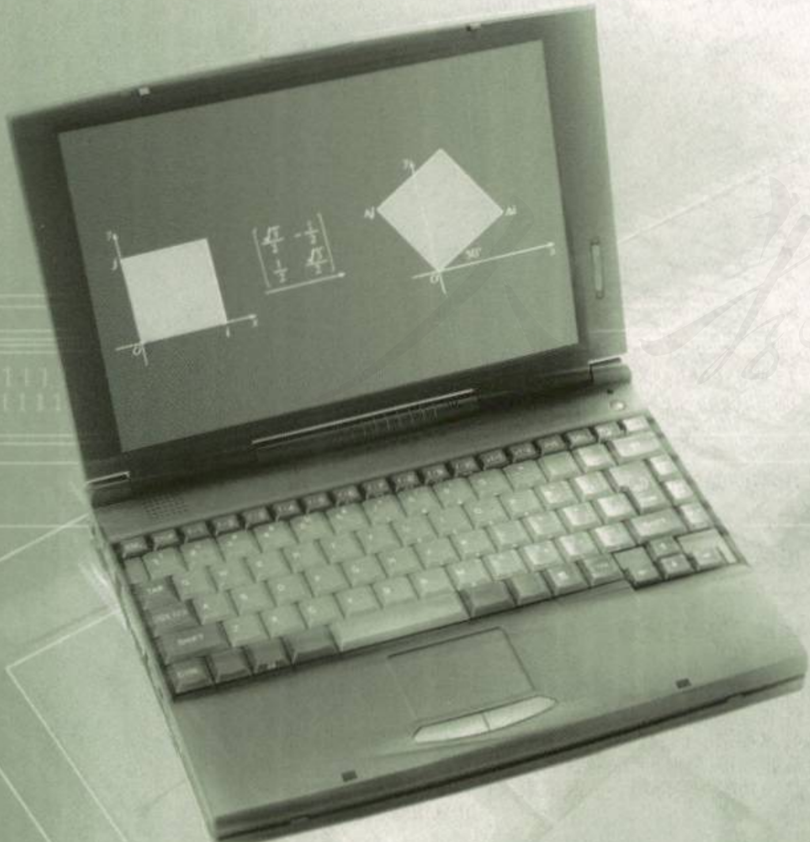
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修4-2 A版 矩阵与变换
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 北京天宇星印刷厂
版 次 2008年12月第3版
印 次 2019年7月第26次印刷
开 本 890毫米×1240毫米 1/16
印 张 5.25
字 数 114千字
书 号 ISBN 978-7-107-19623-2
定 价 5.10元
价格依据文件号：京发改规［2016］13号

绿色印刷 保护环境 爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

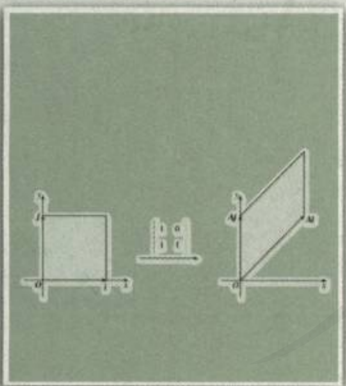
北京市绿色印刷工程

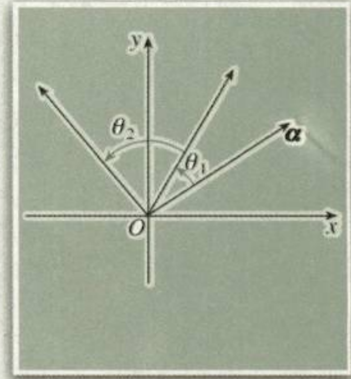
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

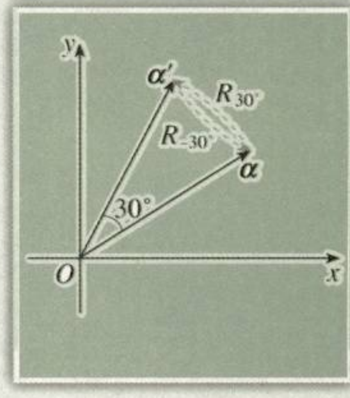
主要作者：李龙才　章建跃
责任编辑：俞求是

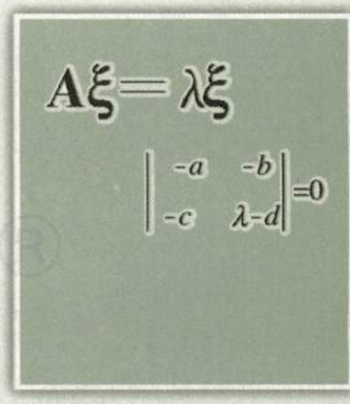
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：李宏庆

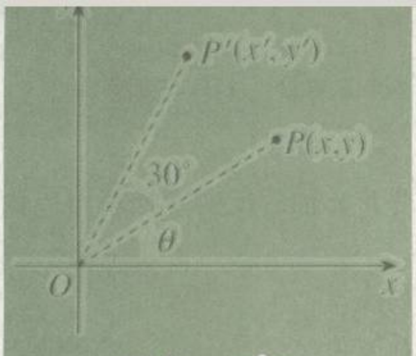
目 录

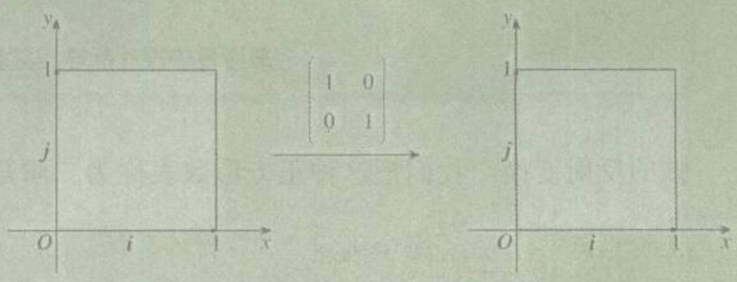



y
θ2
θ1
α
O
x


y
α′
R30°
R-30°
α
30°
O
x


Aξ= λξ
-a -b
-c λ-d
=0





引言

在初中，我们已学过轴对称、旋转、相似等平面图形的变换．例如，我们知道，把一个平面图形沿着平面上一条直线 l 折叠，可以得到它关于直线 l 对称的图形，这个图形和原图形全等，新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点，连接任意一对对称点的线段被直线 l 垂直平分．像这样，由一个平面图形（如图 0-1 中的$\triangle ABC$）得到它关于某条直线 l 的轴对称图形（图 0-1 中的$\triangle A'B'C'$）叫做平面图形的轴对称变换．

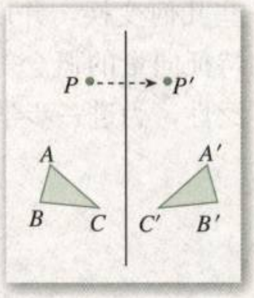


图 0-1

我们也可以这样来看平面图形的轴对称变换：如图 0-1，设直线 l 在平面 α 内，那么对于平面 α 内任意一点 P，都存在平面 α 内唯一一点 P'，使 P'与 P 关于直线 l 对称．我们称这样的对应关系为平面 α 关于直线 l 的反射变换．这样，经过这个反射变换，平面 α 内的$\triangle ABC$ 就被对应到$\triangle A'B'C'$．

进一步地，如果在平面 α 内建立直角坐标系 Oxy，那么平面内的点和有序实数对（x，y）之间就建立了一一对应．这样，我们又可以从代数的角度来研究反射变换．例如，关于 x 轴的反射变换，把平面 α 内的任意一点 $P(x，y)$变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x'，y')$．对于坐标$P(x，y)$与 $P'(x'，y')$，可以得到

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases} \qquad ①$$

显然，表达式①完全刻画了关于 x 轴的反射变换．因此，也称表达式①为关于 x 轴的反射变换．

我们将反射变换①变形为

$$\begin{cases} x'=x+0y, \\ y'=0x-y. \end{cases} \qquad ②$$

由于②式由右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把它们按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，就得到正方形数表$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$．这个正方形数表也完全刻画了关于 x

轴的反射变换．我们把这种正方形数表称为二阶矩阵．这样关于 x 轴的反射变换就可以由二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ 完全确定．

类似地，在直角坐标系 Oxy 中，平面内的许多变换都具有形式

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\y'=cx+dy,\end{cases} \tag{③}$$

其中 a，b，c，d 均为常数．变换③可以由二阶矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 完全确定．

数学中经常通过引入新的工具，建立不同对象之间的联系来研究问题．例如，引入平面直角坐标系后，我们可以通过方程来研究平面曲线，也可以通过平面曲线来研究方程．在引进二阶矩阵概念后，能否对二阶矩阵与平面内的某些几何变换进行类似的研究呢？这就是本专题要解决的主要问题．

本专题将以矩阵为工具，研究一些几何变换，并以平面图形的变换为背景，讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量的概念等，用变换的观点理解解二元一次方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性，为进一步学习打下基础．

第一讲　线性变换与二阶矩阵

在平面直角坐标系中，平面内的点和有序实数对有一一对应关系. 这样，借助直角坐标系，我们可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换. 本讲中，我们将在建立一些几何变换的代数表示的基础上，引入线性变换的概念，通过线性变换引入二阶矩阵，并进一步建立线性变换和二阶矩阵的联系，用矩阵研究线性变换的基本性质.

一　线性变换与二阶矩阵

（一）几类特殊线性变换及其二阶矩阵

1. 旋转变换

探究

将直角坐标系中所有点绕原点沿逆时针方向旋转一个角度 α. 设平面内点 $P(x, y)$经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，那么如何用 P 的坐标（x，y）表示 P'的坐标（x'，y'）？

我们先从简单情形开始.

如图 1.1-1 所示，在直角坐标系 Oxy 内，每个点都绕原点 O 按逆时针方向旋转 180°. 设点 $P(x, y)$ 经过旋转后变成点 $P'(x', y')$，x'，y'与 x，y 有什么关系呢？

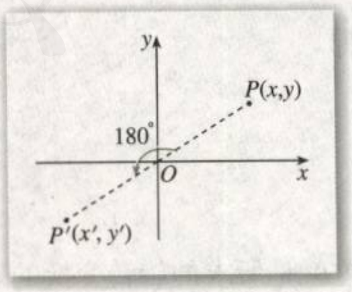


图 1.1-1

可以得到，$x'=-x$，$y'=-y$，即

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-y. \end{cases} \quad ①$$

我们将①称为旋转角为 180°的旋转变换的表达式，它建立了平面内的每个点 P 到其对应点 P'的对应关系，我们称 P'是 P 在这个旋转变换作用下的像.

例 1　在直角坐标系 Oxy 内，将每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 30°的变换称为旋

转角是 30°的旋转变换.

（1）求点 $A(1, 0)$ 在这个旋转变换作用下的像 A'；

（2）写出这个旋转变换的表达式.

解：（1）如图 1.1-2，不难看出，点 A'的横坐标和纵坐标分别为

$$\begin{aligned} x &= |OA|\cos 30^\circ \\ &= 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y &= |OA|\sin 30^\circ \\ &= 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此，点 $A(1, 0)$ 在这个旋转变换作用下的像为 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$；

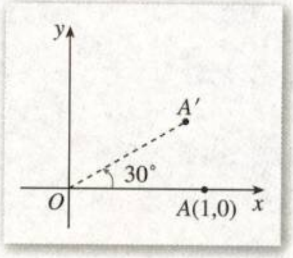


图 1.1-2

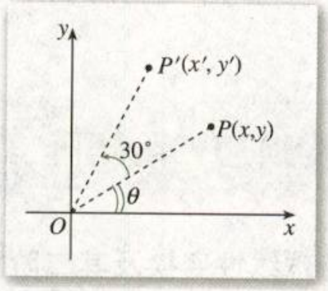


图 1.1-3

（2）如图 1.1-3，分别连接 OP，OP'，设 $OP=OP'=r$，记 θ 是以 x 轴的正半轴为始边、以射线 OP 为终边的角. 由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+30^\circ), \\ y'=r\sin(\theta+30^\circ). \end{cases}$$

由两角和的三角函数公式得

$$\begin{cases} x'=x\cos 30^\circ-y\sin 30^\circ, \\ y'=x\sin 30^\circ+y\cos 30^\circ, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases} \qquad ②$$

这就是所求的旋转变换的表达式.

由于②式由其右端式子中 x，y 的系数唯一确定，我们把这些系数按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，得到一个正方形数表 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. 可以发现，这个正

方形数表由旋转角是 30°的旋转变换唯一确定；反之，旋转角是 30°的旋转变换也可以由这个正方形数表唯一确定. 所以，这个正方形数表唯一刻画了旋转角是 30°的旋转变换.

事实上，在平面直角坐标系 Oxy 内，很多几何变换都具有下列形式：

$$\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy. \end{cases} \quad ③$$

其中系数 a，b，c，d 均为常数. 我们把形如③的几何变换叫做**线性变换**❶ (linear transformation)，③式叫做这个线性变换的**坐标变换公式**. $P'(x', y')$是 $P(x, y)$在这个线性变换作用下的像.

❶ 在表达式③中，x'，y' 都是关于 x，y 的常数项为 0 的一次式，通常称“一次表达式”为“线性表达式”.

与例 1 的解答一样，我们引进正方形数表 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，那么线性变换③可以由 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 唯一确定；反之，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 也可以由线性变换③唯一确定.

像这样，由 4 个数 a，b，c，d 排成的正方形数表 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 称为二阶**矩阵**❷ (matrix)，数 a，b，c，d 称为矩阵的元素. 在二阶矩阵中，横的叫行，从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行；竖的叫列，从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列. 矩阵通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示.

❷ 二阶矩阵仅仅是一个包含两行、两列的数表，它既不是数，也不是代数式.

元素全为 0 的二阶矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 称为**零矩阵**，简记为 $\mathbf{0}$. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 称为二阶**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_2$.

有了二阶矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，我们就可以利用它来研究线性变换③.

与例 1(2) 的解答过程一样，我们可以得到直角坐标系 Oxy 内的每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换（通常记为 R_α）的坐标变换公式：

如图 1.1-4，分别连接 OP，OP'，设 $OP=OP'=r$，记 θ 是以 x 轴的正半轴为始边、以射线 OP 为终边的角. 由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+\alpha), \\ y'=r\sin(\theta+\alpha). \end{cases}$$

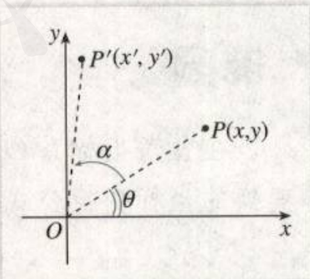


图 1.1-4

所以，绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \quad ④$$

对应的二阶矩阵为

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

2. 反射变换

在引言中我们已经看到，关于 x 轴的反射变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于 x 轴的对称点 $P'(x', y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-y.\end{cases}$$

与之对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

同样，关于 y 轴的反射变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于 y 轴的对称点 $P'(x', y')$. 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=-x,\\ y'=y.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

我们知道，在直角坐标系 Oxy 内，任意一点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(y, x)$. 所以，关于直线 $y=x$ 的反射变换把直角坐标系内任意一点 $P(x, y)$ 变成它关于直线 $y=x$ 的对称点 $P'(x', y')$，相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases}x'=y,\\ y'=x.\end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

一般地，我们把平面上的任意一点 P 变成它关于直线 l 的对称点 P' 的线性变换叫做关于直线 l 的**反射**（reflection）.

探 究

在直角坐标系 Oxy 内，直线 l 过原点，倾斜角为 α. 你能求出关于直线 l 的反射变换的坐标变换公式吗？

3. 伸缩变换

在直角坐标系 Oxy 内，将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍，其中 k_1，k_2 均为非零常数，我们称这样的几何变换为**伸缩变换**（stretching）.

例 2 在直角坐标系 Oxy 内，将每一点的纵坐标变为原来的 2 倍，横坐标保持不变.

(1) 试确定该伸缩变换的坐标变换公式及其对应的二阶矩阵；

(2) 求点 $A(1,\ -1)$ 在该伸缩变换作用下的像 A'.

解：(1) 设在这个伸缩变换作用下，直角坐标系 Oxy 内的任意一点 $P(x,\ y)$ 变成点 $P'(x',\ y')$，则

$$x'=x,\ y'=2y.$$

因此，所求的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(2) 将点 $A(1,\ -1)$ 的坐标代入坐标变换公式，得

$$\begin{cases} x'=1, \\ y'=2\times(-1)=-2. \end{cases}$$

从而 A' 的坐标为 $(1,\ -2)$.

一般地，在直角坐标系 Oxy 内，将每个点的纵坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），横坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k 倍（k 是非零常数），纵坐标保持不变的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

将每个点的横坐标变为原来的 k_1 倍，纵坐标变为原来的 k_2 倍（k_1，k_2 均为非零常数）的线性变换，其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=k_1x, \\ y'=k_2y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$.

4. 投影变换

设 l 是平面内一条给定的直线. 对平面内的任意一点 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 P'，则称点 P' 为点 P 在直线 l 上的投影. 将平面上每一点 P 变成它在直线 l 上的投影 P'，这个

变换称为关于直线 l 的**投影**（projection）**变换**.

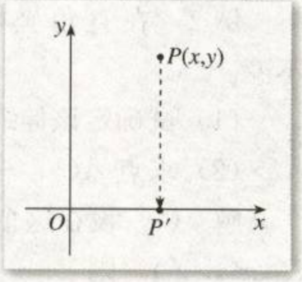


图 1.1-5

例 3 如图 1.1-5，在直角坐标系 Oxy 内，过任意一点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 P'，我们称点 P' 为点 P 在 x 轴上的（正）投影. 如果一个变换把直角坐标系内的每一点变成它在 x 轴上的（正）投影，那么称这个变换为关于 x 轴的（正）投影变换.

设在关于 x 轴的（正）投影变换的作用下，点 $P(x, y)$ 变成点 $P'(x', y')$，则

$$x'=x,\ y'=0.$$

因此，该变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=0. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

如果以直线 l 为 x 轴建立直角坐标系 Oxy，则所有的投影变换都可以看成关于 x 轴的投影变换.

5. 切变变换

如图 1.1-6，在直角坐标系 Oxy 内，将每一点 $P(x, y)$ 沿着与 x 轴平行的方向平移 ky 个单位变成点 P'，其中 k 是非零常数，称这类变换为平行于 x 轴的**切变**（shears）**变换**.

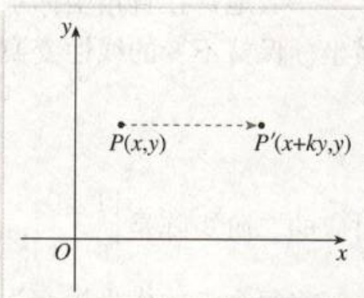


图 1.1-6

设 $P'(x', y')$，则

$$x'=x+ky,\ y'=y.$$

因此，平行于 x 轴的切变变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x+ky, \\ y'=y. \end{cases}$$

从而，对应的二阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

类似的，平行于 y 轴的切变变换是指将直角坐标系内的每一点 $P(x, y)$ 沿着与 y 轴平行的方向平移 kx 个单位（其中 k 是非零常数）的线性变换. 其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=kx+y. \end{cases}$$

对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$.

（二）变换、矩阵的相等

我们知道，在直角坐标系 Oxy 内，把每个点绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{3\pi}{2}$，与把每个点绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的变换效果是一样的. 实际上，旋转角是 $\frac{3\pi}{2}$ 的旋转变换的

坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{3\pi}{2}-y\sin\frac{3\pi}{2}, \\ y'=x\sin\frac{3\pi}{2}+y\cos\frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

旋转角是$-\frac{\pi}{2}$的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x'=x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-y\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ y'=x\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+y\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，这两个旋转变换的坐标变换公式及对应的二阶矩阵是分别相同的．这时我们称这两个旋转变换相等．

> 变换与函数类似．函数把实数对应到实数；变换把点对应到点．

一般地，设 σ，ρ 是同一个直角坐标平面内的两个线性变换．如果对平面内的任意一点 P，都有 $\sigma(P)=\rho(P)$，则称这两个线性变换相等，简记为 $\sigma=\rho$．

设 σ，ρ 所对应的二阶矩阵分别为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$．

如果 $\sigma=\rho$，那么它们对应的系数分别相等，即 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$，$d_1=d_2$. 这时我们也称二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，即

对于两个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果它们的对应元素都分别相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & x-1\\ y & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}p-1 & -2\\ 2 & q\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 p，q，x，y.

解：由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases}1=p-1,\\ x-1=-2,\\ y=2,\\ 0=q.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}p=2,\\ q=0,\\ x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

习题1.1

1. 在直角坐标系 Oxy 内，如果把绕原点 O 按逆时针方向旋转 α 角的旋转变换记为 R_α，试给出下列旋转变换的坐标变换公式以及对应的矩阵：

   (1) R_{45°；　(2) R_{90°；　(3) R_{360°.

2. 如果一个几何变换把直角坐标系 Oxy 内任意一点变成这一点关于坐标原点 O 的对称点，那么称这个几何变换为关于坐标原点 O 的反射变换，试求出这个反射变换的变换公式及其矩阵.

3. 过直角坐标系 Oxy 内的一点 A 作一条与 $x+y=0$ 平行的直线交 x 轴于点 A'，则称 A' 点为过 A 点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 设一个几何变换把直角坐标系 Oxy 内的任意一点变成过这一点沿着平行于直线 $x+y=0$ 的方向在 x 轴上的投影. 试求

   (1) 点 $A(2,1)$ 在这个投影变换下的像；

   (2) 这个投影变换的坐标变换公式及其矩阵.

4. 对于旋转变换 $R_{\frac{3\pi}{2}}$，除了 $R_{-\frac{\pi}{2}}=R_{\frac{3\pi}{2}}$ 以外，你还能再找出一些与 $R_{\frac{3\pi}{2}}$ 相等的平面变换吗？

5. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ x & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}2 & -y\\ 3 & z\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，求 x，y，z.

6. (1) 求直角坐标系 Oxy 内关于直线 l：$y=2x$ 的反射变换的坐标变换公式及其矩阵；

(2) 如果直线 l 为 $Ax+By=0$(其中 A，B 不全为 0)，那么关于直线 l 的反射变换的坐标变换公式及其矩阵分别是什么？

二 二阶矩阵与平面向量的乘法

我们知道，线性变换与二阶矩阵是一一对应的. 能否直接用二阶矩阵表示线性变换呢？

在直角坐标系 Oxy 内，如果规定每个向量都以坐标原点 O 为起点，那么任何一个向量 $\overrightarrow{OA}$ 就由其终点 A 唯一确定；反之，对直角坐标系 Oxy 内的任意一点 A，有唯一的向量 $\overrightarrow{OA}$ 与之对应. 从而，直角坐标系内的向量与点是一一对应的. 因为平面内的点与有序实数对是一一对应的，从而平面内的向量与有序实数对也是一一对应的. 今后，为了方便，我们对向量、点以及有序实数对这三者不加区别. 例如，我们称点 A 的坐标 $(x,\ y)$ 就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标，或直接把向量 $\overrightarrow{OA}$ 叫做向量 $(x,\ y)$.

向量 $(x,\ y)$ 是一对有序数组，x，y 叫做它的两个分量. 我们把这两个分量按照 x 在上，y 在下的次序写成一列 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，这种形式的向量称为列向量. 相应的，形如 $(x,\ y)$ 的向量称为行向量. 在本专题中，规定所有的平面向量都写成列向量的形式.

为了得到用二阶矩阵表示线性变换的方法，我们先考察上一节例 1 中得到的旋转角是 30°的旋转变换公式

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

上式表明，在旋转变换的作用下，直角坐标系内的向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新的向量 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$. 我们设想 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ 是二阶矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ “相乘”的结果，即如果引进二阶矩阵与平面向量的乘法，使得乘积为

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix},$$

那么旋转角是 30° 的旋转变换的坐标变换公式就可以写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

这样就达到了用二阶矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 表示旋转角是 30° 的旋转变换公式的目的. 即通过如下的方式唯一地确定了旋转变换 R_{30°：

把任何一个向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 变成了新的向量 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

因此，二阶矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 所对应的旋转变换可写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

一般地，我们引入下面的定义.

定义 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，规定二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**乘积**（product）为向量 $\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$，记为 $\boldsymbol{A\alpha}$ 或 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，即

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

这样就定义了矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的乘法.

由上述定义可知，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积仍然是一个平面向量，它的第一个分量为 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的元素与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的对应位置元素乘积的和，第二个分量为 $\boldsymbol{A}$ 的第二行的元素与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的对应位置元素乘积的和.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A\alpha}$.

解：$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\times(-1)+2\times3\\0\times(-1)+1\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}.$$

定义了二阶矩阵与平面向量的乘法以后，任何一个线性变换

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\y'=cx+dy\end{cases}\text{（}a,\ b,\ c,\ d\text{ 均为常数）}$$

都可以表示成

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix};$$

反之，在直角坐标系 Oxy 内，任何一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都唯一确定了一个线性变换，这个变换把每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 变成了新向量 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. 这样，我们就实现了用二阶矩阵和平面向量的乘积表示线性变换的目的.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$，求点 $P(2,\ 2)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换的作用下的像 P' 的坐标.

解：因为向量 $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换作用下变为向量

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix},$$

所以，点 P' 的坐标为 $(-2,\ 2)$.

习题1.2

1. 直角坐标系 Oxy 内的平移变换 $\begin{cases}x'=x+h,\\y'=y+k\end{cases}$（其中 h，k 是不全为 0 的常数）能写成二阶矩阵与平面向量乘积的形式吗？

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，直角坐标系 Oxy 内的点 $P(1,\ 1)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换的作

用下变成点 $P'(x', y')$，求 x'，y'.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是任意一个二阶矩阵（其中 a，b，c，d 均为常数），记 $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A0}$，$\boldsymbol{Ai}$，$\boldsymbol{Aj}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应的线性变换把点 $A(1, 2)$ 变成点 $A'(2, 3)$，把点 $B(-1, 3)$ 变成点 $B'(2, 1)$，那么这个线性变换把点 $C(-2, 3)$ 变成什么？

三　线性变换的基本性质

在平面几何的学习中我们直观地看出，经过轴对称变换、旋转变换等，平面上的直线变为直线，三角形变为三角形. 一般地，在线性变换下，是否仍然有直线变为直线，三角形变为三角形呢？这就是本节要研究的线性变换的性质问题. 我们将以二阶矩阵为工具研究线性变换的基本性质，并进一步研究线性变换对平面图形的作用.

（一）线性变换的基本性质

为了研究线性变换的性质，我们先定义“数乘平面向量”和“平面向量加法”：

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$；

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，规定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$.

探究

你能作图说明上述数乘平面向量和平面向量加法的几何意义吗？

前面定义了二阶矩阵与平面向量的乘法. 自然地，我们要考察相应的运算律问题.

探究

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. 如图 1.3-1，把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 先伸长到原来的 2 倍再按逆时针方向旋转 90°；把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 先按逆时针方向旋转 90°再伸长到原来的 2 倍. 这两个过程的结果相同吗?

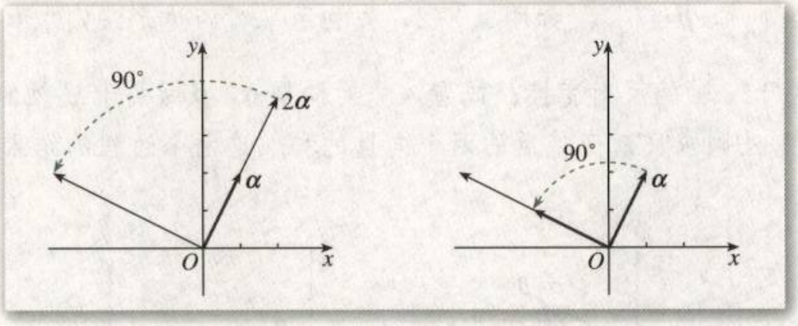


图 1.3-1

绕原点按逆时针方向旋转 90°的旋转变换的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$. 上面的结果可以表示为 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{A\alpha}$. 利用矩阵与向量的乘法也能验证这个结果，请同学们自己完成.

一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是平面上的任意一个向量，λ 是一个任意实数，是否也有 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A\alpha}$ 成立呢?

事实上，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\left[\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right]\\&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a\lambda x+b\lambda y\\c\lambda x+d\lambda y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda ax+\lambda by\\\lambda cx+\lambda dy\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{A\alpha}&=\lambda\left[\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right]\\&=\lambda\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda ax+\lambda by\\\lambda cx+\lambda dy\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

探究

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$. 如图 1.3-2，先利用平行四边形法则求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，再对向量 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$ 进行关于 x 轴的反射变换；或者，先对向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 做关于 x 轴的反射变换，再利用平行四边形法则求反射变换后的两个向量的和. 这两个过程的结果相同吗？

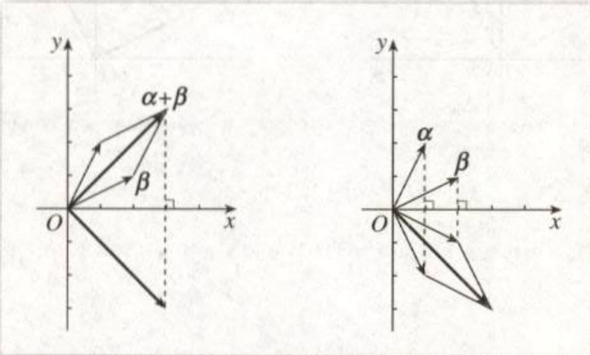


图 1.3-2

关于 x 轴的反射变换的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$. 上面的结果可以表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}.$$

利用矩阵与向量的乘法也能验证这个结果，请同学们自己完成.

一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是平面上的任意两个向量，是否也有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 成立呢？

事实上，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right]\\&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)\\c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}(ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)\\(cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}ax_1+by_1\\cx_1+dy_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ax_2+by_2\\cx_2+dy_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)\\(cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2)\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}.$$

综上所述，线性变换有如下基本性质.

性质 1 设 A 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是平面上的任意两个向量，λ 是一个任意实数，则

(1) $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$.

综合上述两条性质，可以得到：

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是平面上的任意两个向量，λ_1，λ_2 是任意两个实数，则

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}. \quad ①$$

证明：由性质 1 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})&=\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{A}(\lambda_2\boldsymbol{\beta})\\&=\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

思考

点、线是构成平面基本图形. 由变换的概念可知，线性变换把平面上的点（或向量）变成点（或向量），那么线性变换把平面上的直线（或线段）变成什么图形呢？

从几何图形上容易发现，在直角坐标系内，关于 x 轴的（正）投影变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

把垂直于 x 轴的直线 $x=a$（a 为常数）变成点 $(a, 0)$，把其他的直线变成直线 $y=0$.

我们再考察在伸缩变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

作用下，直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成了什么图形.

由伸缩变换知，

$$x'=x,\ y'=2y.$$

代入直线方程 $y=kx+b$，得 $\frac{y'}{2}=kx'+b$，即 $y'=2kx'+2b$. 分别用 x，y 代替 x'，y' 得

$$y=2kx+2b.$$

因此，伸缩变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

把直线 $y=kx+b$ 变成了直线 $y=2kx+2b$（如图 1.3-3 所示）.

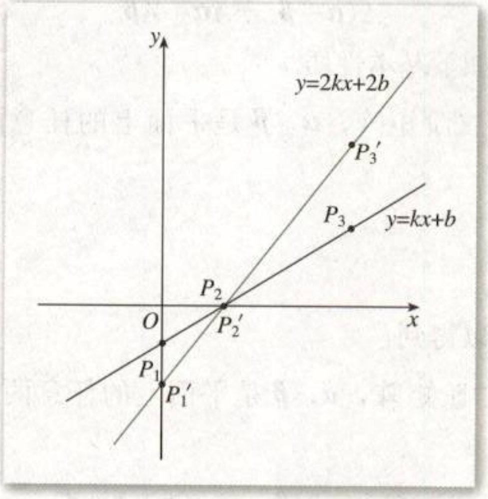


图 1.3-3

我们发现，这两个线性变换或把直线变成了直线，或把直线变成了一点.

思考

旋转变换

$$R_{30^\circ}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成了什么图形?

切变变换

$$\sigma:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

把直线 $y=kx+b$（其中 k，b 均为常数）变成了什么图形?

一般地，我们有

性质 2 二阶矩阵对应的变换（线性变换）把平面上的直线变成直线（或一点）.

为了证明性质 2，我们先用向量的形式来表示直线.

设 P_1，P_2 是直角坐标系 Oxy 内的两个定点，P 是这个平面上的任意一点. 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\overrightarrow{OP_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\overrightarrow{OP_2}$，$\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OP}$，则 P 点在直线 P_1P_2 上当且仅当 $\overrightarrow{P_1P}/\!/\overrightarrow{P_1P_2}$，即存在一个实数 λ，

使得$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{P_1P_2}$，即

$$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1).$$

从而

$$\boldsymbol{\gamma}=(1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda\boldsymbol{\alpha}_2.$$

令 $\lambda_1=1-\lambda$，$\lambda_2=\lambda$，则

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\text{（其中 }\lambda_1,\ \lambda_2\text{ 是实数，且 }\lambda_1+\lambda_2=1\text{），}\qquad ②$$

这就是由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的终点所确定的直线的向量形式（如图 1.3-4）.

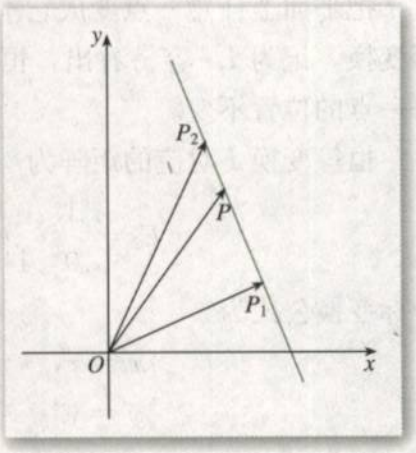


图 1.3-4

因此，对任意两个不同的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，由它们的终点所确定的直线 l 可表示为：

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta},$$

其中 λ_1，λ_2 是实参数，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

根据定理 1，直线 l 在线性变换 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 的作用下变成

$$\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\beta},\qquad ③$$

其中 λ_1，λ_2 是实参数，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

（1）如果 $\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{A\beta}$，那么③表示由向量 $\boldsymbol{A\alpha}$，$\boldsymbol{A\beta}$ 的终点所确定的直线. 此时，二阶矩阵 A 所对应的线性变换把平面上的直线变成直线；

（2）如果 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A\beta}$，那么 $\lambda_1\boldsymbol{A\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A\alpha}$. 由于向量 $\boldsymbol{A\alpha}$ 的终点是平面上一个确定的点，因而，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换把平面上的直线 l：$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$ 变成了一个点 $\boldsymbol{A\alpha}$.

这就证明了性质 2.

性质 2 表明，矩阵所对应的线性变换把平面上的直线变成直线（特殊情况下变成一点）.

（二）一些重要线性变换对单位正方形区域的作用

我们已经知道，在线性变换的作用下，直线变为直线（或一个点）. 那么，平面图形在线性变换的作用下会变成什么图形呢？

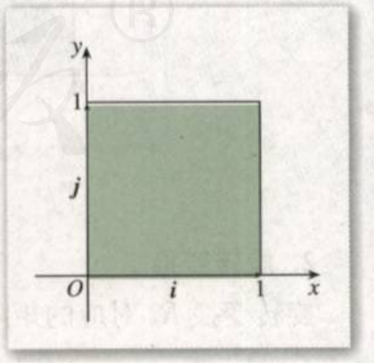


图 1.3-5

下面我们利用线性变换的基本性质，研究平面图形在线性变换的作用下的结果. 为了方便，我们只考察在线性变换下，直角坐标系 Oxy 内的单位正方形区域（如图 1.3-5）变成了什么图形.

根据向量加法的平行四边形法则，图 1.3-5 中的单位正方形区域可用向量形式表示为

$$x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}\ (0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1).\ ❶$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，由矩阵与平面向量乘积的性质得

$$\boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j})=x_1(\boldsymbol{Ai})+x_2(\boldsymbol{Aj})\ (0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1).$$

由于上述等式的右端表示以$\boldsymbol{Ai}$，$\boldsymbol{Aj}$为邻边的平行四边形区域，所以，

❶ 你能说明一下理由吗？

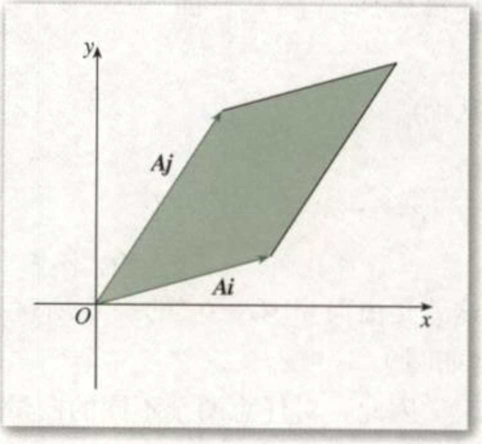


图 1.3-6

矩阵 $\mathbf{A}$ 所对应的线性变换把图 1.3-5 中的单位正方形区域，变成以 $\mathbf{A}\boldsymbol{i}$，$\mathbf{A}\boldsymbol{j}$ 为邻边的平行四边形区域（如图 1.3-6）．因此，我们只需考察单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 在线性变换作用下的结果，就能得到单位正方形区域在线性变换作用下所变成的图形．

1. 恒等变换

把平面上任意一点变成它本身的几何变换称为恒等变换，记为 I．容易看出，恒等变换保持平面上的每一点的位置不变．

恒等变换 I 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=y.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{E}_2\,\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_2\,\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

所以，我们有

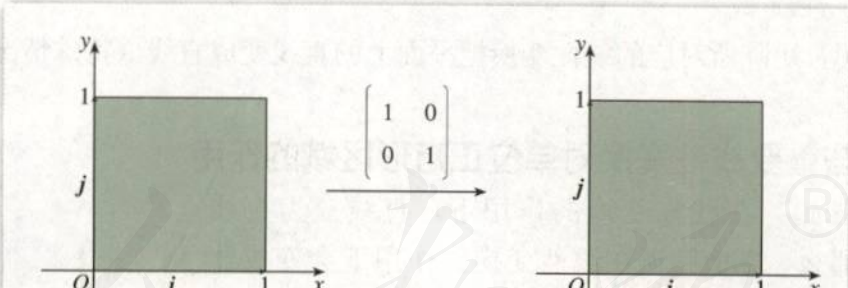


图 1.3-7

2. 旋转变换

旋转变换 R_α 对应的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix};$$

坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{cases}$$

（1）当 $\alpha=30^\circ$时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

所以，我们有

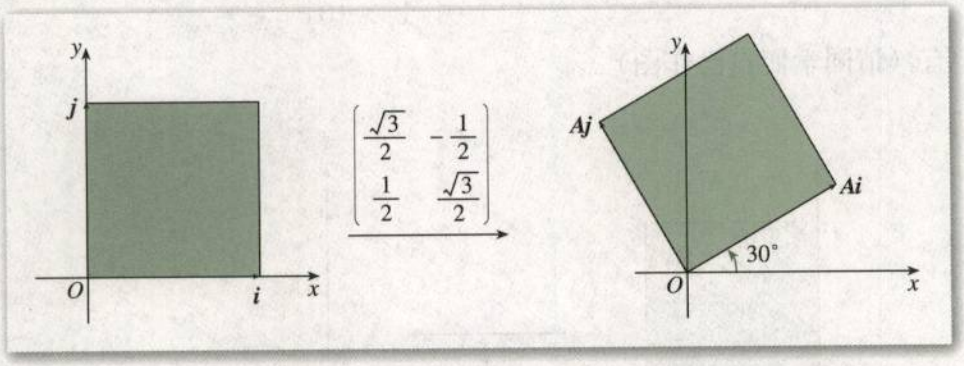


图 1.3-8

（2）当 $\alpha=90^\circ$时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=-y,\\ y'=x.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},$$

所以，我们有

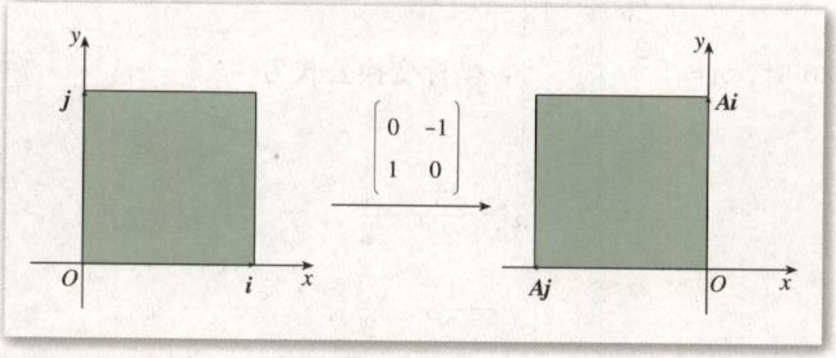


图 1.3-9

(3) 当 $\alpha=270°$时，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=y,\\y'=-x.\end{cases}$$

因为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

所以，我们有（请同学们自己作图）

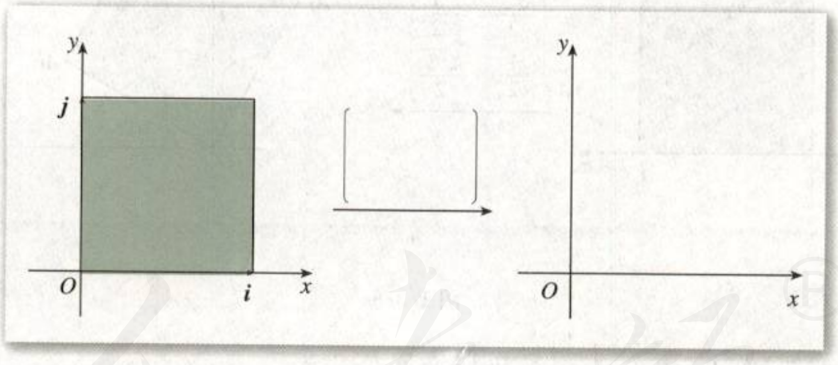


图 1.3-10

3. 切变变换

(1) 平行于 x 轴的切变变换，对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$，其中 k 是非零常数，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x+ky,\\y'=y.\end{cases}$$

令 $k=1$，则 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，坐标变换公式为$\begin{cases}x'=x+y,\\y'=y.\end{cases}$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

所以，我们有

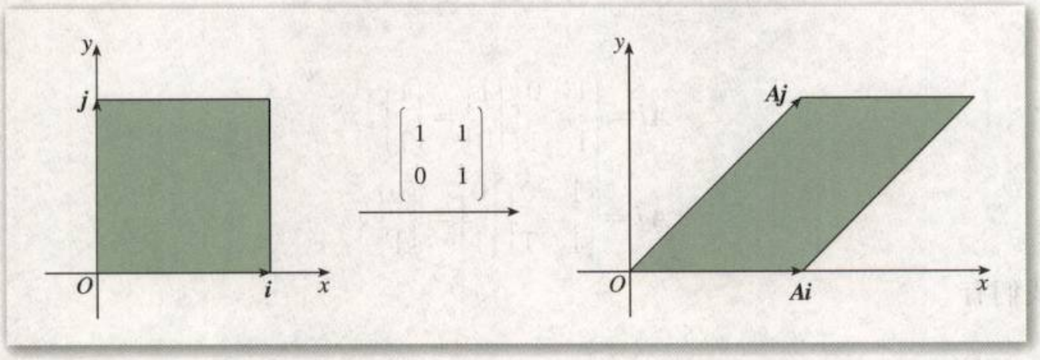


图 1.3-11

令 $k=-\dfrac{1}{2}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\underline{\qquad\qquad},\\y'=\underline{\qquad\qquad}.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{pmatrix}\quad&\quad\\\quad&\quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{pmatrix}\quad&\quad\\\quad&\quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix},$$

所以，我们有（请同学们自己作图）

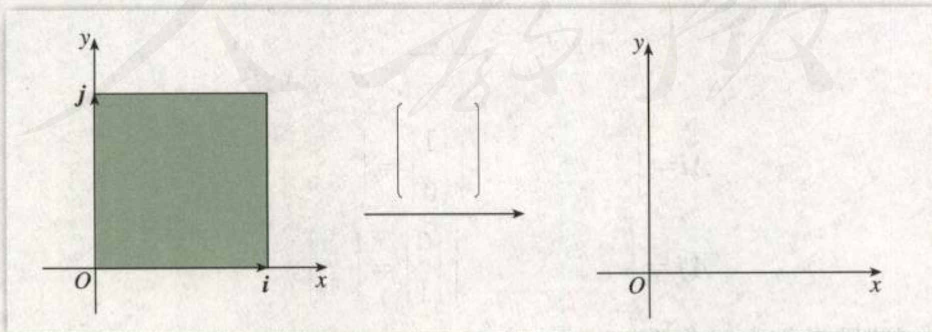


图 1.3-12

（2）平行于 y 轴的切变变换，对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$，其中 k 是非零常数，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=kx+y. \end{cases}$$

令 $k=1$，则 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=x+y. \end{cases}$$

因为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

所以，我们有

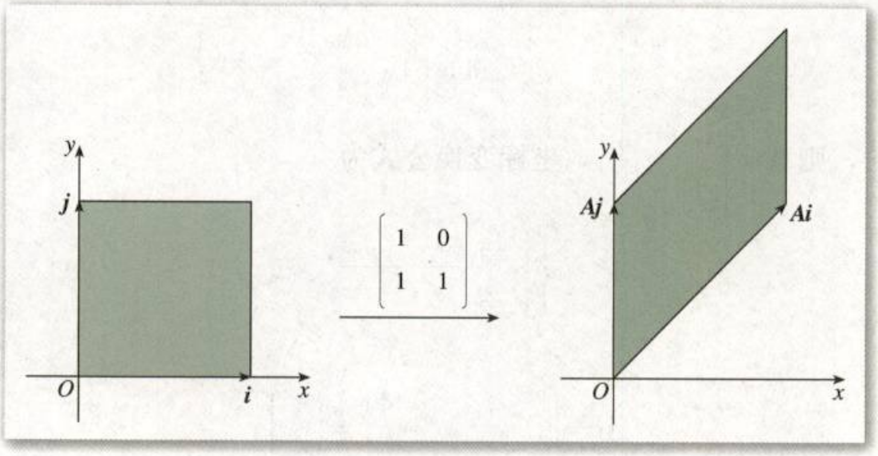


图 1.3-13

令 $k=-\dfrac{1}{2}$，则 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-\dfrac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\underline{\qquad\qquad}, \\ y'=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}\qquad & \qquad\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\qquad\\ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}\qquad & \qquad\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\qquad\\ \end{bmatrix},$$

所以，我们有（请同学们自己作图）：

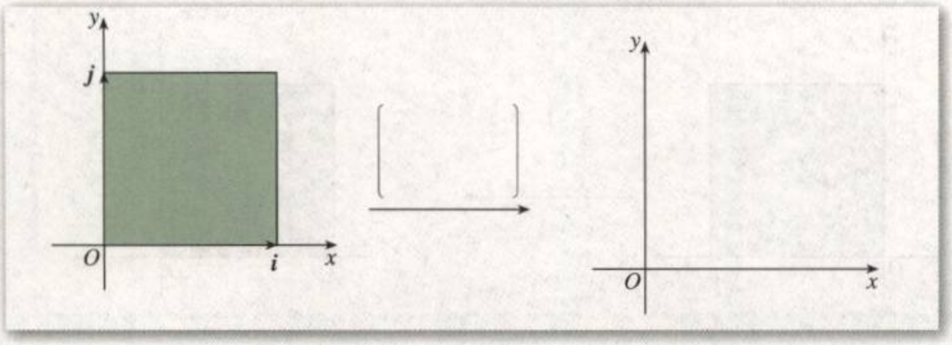


图 1.3-14

4. 反射变换

(1) 关于 x 轴的反射变换，对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\y'=-y.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

所以，我们有

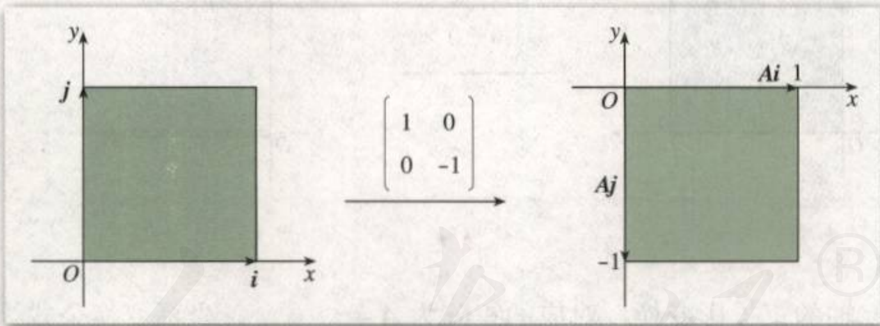


图 1.3-15

(2) 关于 y 轴的反射变换，对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=-x,\\y'=y.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

所以，我们有

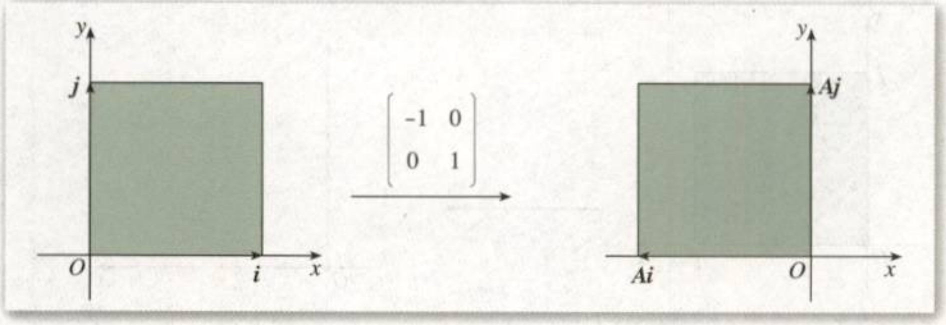


图 1.3-16

5. 投影变换

（1）关于 x 轴的正投影变换，对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，坐标变换公式为 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=0. \end{cases}$ 因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以，我们有

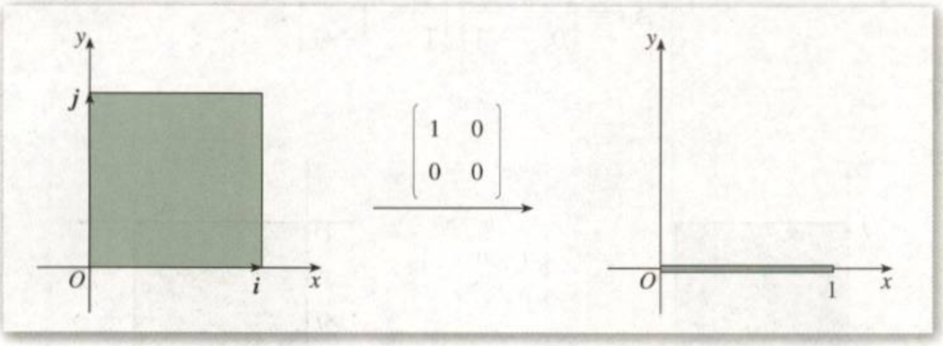


图 1.3-17

（2）关于 y 轴的正投影变换，对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\underline{\qquad\qquad}, \\ y'=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{Ai}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Aj}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix},$$

所以，我们有（请同学们自己作图）

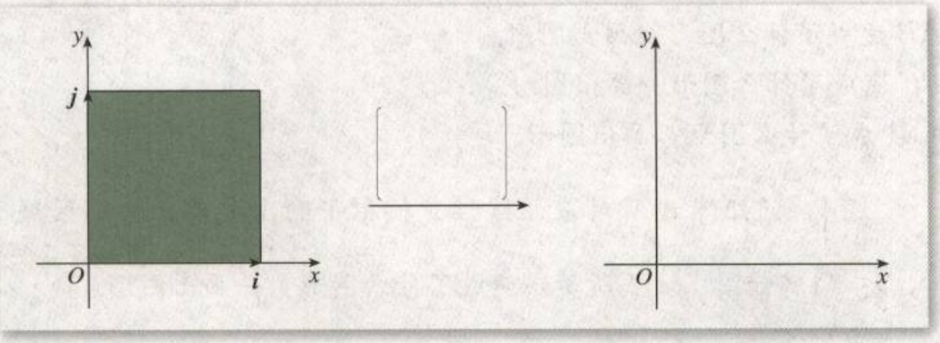


图 1.3-18

思考

1. 上面的两个投影变换都把单位正方形区域变成了线段. 你能从几何直观上说明原因吗?

2. 你能类比上面讨论线性变换对单位正方形区域的作用的过程，证明关于 x 轴的反射变换、旋转变换把直角坐标系 Oxy 内的三角形区域变为三角形区域吗?

习题1.3

1. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的线性变换把直线 $y=x-2$ 变成什么?

2. 过点 $M_0(x_0, y_0)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$ 的直线 l 的向量方程为: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OM_0}+t\boldsymbol{v}$, $t\in\mathbf{R}$, 即

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}, \quad t\in\mathbf{R},$$

其中 $X(x, y)$ 是直线上的任意一点.

利用直线的向量方程解决下列问题:

(1) 直线 l 经过点 $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, 考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ 对应的切变变换把直线 l 变成了什么?

(2) 直线 l 过点 $A(2, 1)$ 且垂直于 x 轴, 考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 对应的投影变换把直线 l 变成了什么?

3. 已知平面上的三点 A (1, 1), B (1, 2), C (2, 1), 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ 对应的线性变换的作用下, 问

（1）直线 AB 变成了什么图形？画出图形.

（2）直线 BC 变成了什么图形？画出图形.

（3）$\triangle ABC$ 变成了什么图形？画出图形.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换把平面上单位正方形区域 $x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}$，其中 $0\leqslant x_1$，$x_2\leqslant 1$（如图 1.3-5 所示）变成了什么图形？并画出图形.

5. 把矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 对应的线性变换作用在双曲线 $xy=1$ 上，求所得曲线的方程，并画出图形.

6. 已知直角坐标系 Oxy 内的单位圆 $x^2+y^2=1$，分别把下列矩阵：

（1）$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

对应的线性变换作用在该单位圆上. 分别写出所得曲线的方程，并画出图形.

第二讲 变换的复合与二阶矩阵的乘法

在上一讲中，我们学习了二阶矩阵与平面向量的乘法运算，并用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换. 在那里矩阵与向量的乘法起了非常重要的作用. 本讲中，将通过考察线性变换的复合，引进二阶矩阵的一种重要运算——矩阵的乘法，并研究矩阵乘法的运算律.

一 复合变换与二阶矩阵的乘法

探究

在直角坐标系 Oxy 内，连续施行两次线性变换，其作用效果是否能用一个变换表示？是否存在一个二阶矩阵与这个新变换对应？如果存在，这个二阶矩阵与原来的两个线性变换的二阶矩阵有什么关系？

为了方便同学们理解，我们先从具体例子入手考察.

例 1 在直角坐标系 Oxy 内，二阶矩阵

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}$$

与

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$$

对应的线性变换分别为旋转变换 R_{θ_1}，R_{θ_2}. 对平面上的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，依次作旋转变换 R_{θ_1} 和 R_{θ_2}（如图 2.1-1），可以看出，作用的效果可以用一个变换 $R_{\theta_1+\theta_2}$ 来表示. 旋转变换 $R_{\theta_1+\theta_2}$ 仍然是线性变换，对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}.$$

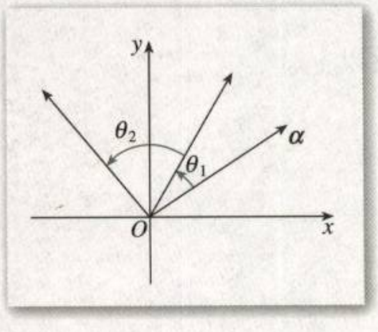


图 2.1-1

例 2 在直角坐标系 Oxy 内，由矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 确定的变换是旋转变换

$$R_{30^\circ}:\ \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix};$$

由矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 确定的变换是切变变换

$$\rho:\ \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

（1）求向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ 先经过旋转变换 R_{30° 作用，再经过切变变换 ρ 作用的结果；

（2）把任意一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ 先经过旋转变换 R_{30° 作用，再经过切变变换 ρ 作用，最终变成向量 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$，求向量 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$.

解：（1）因为

$$R_{30^\circ}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以

$$\rho\left(R_{30^\circ}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

（2）因为

$$R_{30^\circ}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}&=\rho(R_{30^\circ}\boldsymbol{\alpha})\\ &=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}(1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2})x+(1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2})y\\(0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2})x+(0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2})y\end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix}(1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2})x+(1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2})y\\(0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2})x+(0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2})y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2} & 1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2} & 0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

因此，连续施行线性变换 R_{30° 和 ρ，作用效果可以用线性变换

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2} & 1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2} & 0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

来表示. 记这个线性变换为 $\rho\cdot R_{30^\circ}$，其对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2} & 1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2} & 0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\c_2 & d_2\end{bmatrix}$，在直角坐标系 Oxy 内，它们所对应的线性变换分别为

$$f:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

$$g:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\c_2 & d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

对平面上的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 依次作变换 g 和 f，其作用效果为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=f(g\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})=f(\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})$$

$$=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\c_2 & d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\c_1 & d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2x+b_2y\\c_2x+d_2y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(a_1a_2+b_1c_2)x+(a_1b_2+b_1d_2)y\\(c_1a_2+d_1c_2)x+(c_1b_2+d_1d_2)y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad ①$$

这也是一个线性变换，我们称它为变换 g 与变换 f 的**复合变换**（composite transformation），记为 $f\cdot g$[1]．从而，对任意平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 有

$$(f\cdot g)\boldsymbol{\alpha}=f(g\boldsymbol{\alpha}).$$

[1] 在进行线性变换的复合时，要特别注意复合的顺序：先施行变换 g，再施行变换 f，它们的复合变换记为 $f\cdot g$ 而不记为 $g\cdot f$.

由①式知，上述复合变换 $f\cdot g$ 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix},$$

称这个二阶矩阵为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**（product），记为 $\boldsymbol{AB}$，即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix}.$$

这样就定义了二阶矩阵的乘法.

从线性变换上看，$\boldsymbol{AB}$ 是线性变换

$$g:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

与线性变换

$$f:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

的复合变换 $f\cdot g$ 的矩阵，矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的次序与对应的复合变换 $f\cdot g$ 的复合次序相同．从而，对直角坐标系 Oxy 内的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha},$$

如图 2.1-2 所示.

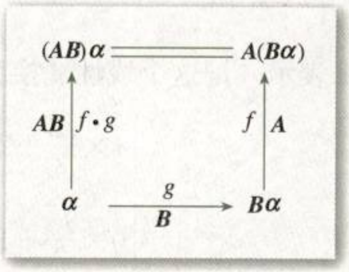


图 2.1-2

对于例 2 中的两个矩阵，由矩阵乘积的定义得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2} & 1\times(-\frac{1}{2})+2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2} & 0\times(-\frac{1}{2})+1\times\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{1}{2}+\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

与例 2 的结果相吻合．所以我们可以直接通过矩阵相乘得到复合变换 $\rho\cdot R_{30^\circ}$ 所对应的矩阵.

思考

你能用矩阵的乘积证明下面的等式吗？

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}.$$

例 3 计算

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

解：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times1+1\times(-2) & 1\times(-1)+1\times3 \\ 0\times1+1\times(-2) & 0\times(-1)+1\times3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times0+2\times1 & 1\times1+2\times0 \\ 3\times0+4\times1 & 3\times1+4\times0 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

例 4 在直角坐标系 Oxy 中，切变变换 σ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，切变变换 ρ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，变换 $\sigma\cdot\rho$ 将向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 变成向量 $\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{\beta}$.

解：$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1\times1+0\times0 & 1\times2+0\times1 \\ (-1)\times1+1\times0 & (-1)\times2+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

例 5 在直角坐标系 Oxy 中，把矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 确定的压缩变换

$$\sigma：\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

与矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 确定的旋转变换

$$R_{90^\circ}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

进行复合，得到复合变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$.

（1）求向量 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 在复合变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 作用下的像；

（2）求复合变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 的坐标变换公式（用矩阵）；

（3）复合变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 把单位正方形区域变成了什么图形？

解：（1）$(R_{90^\circ}\cdot\sigma)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix};$$

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是平面 Oxy 上的任意一个向量，它在压缩变换的作用下变为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\y\end{bmatrix},$$

再经过旋转变换的作用变为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0\times\frac{1}{2}x+(-1)\times y\\1\times\frac{1}{2}x+0\times y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-y\\\frac{1}{2}x\end{bmatrix},\end{aligned}$$

记 $x'=x''$，$y'=y''$，则该复合变换的坐标变换公式为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}&=\mathbf{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\\&=\begin{bmatrix}0\times\frac{1}{2}+(-1)\times 0 & 0\times 0+(-1)\times 1\\1\times\frac{1}{2}+0\times 0 & 1\times 0+0\times 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & -1\\\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即所求的坐标变换公式为

$$R_{90^\circ}\cdot\sigma:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix};$$

(3) 因为 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 是一个线性变换，所以只需求出单位坐标向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$在线性变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 作用下的结果，就能得到单位正方形区域在线性变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 作用下所变成的图形．因为

$$\sigma\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},$$

$$\sigma\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

所以

$$(R_{90^\circ}\cdot\sigma)\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$(R_{90^\circ}\cdot\sigma)\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

因此，$R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 把单位正方形变成了一个长为 1，宽为$\frac{1}{2}$的矩形（图 2.1-3(3)）.

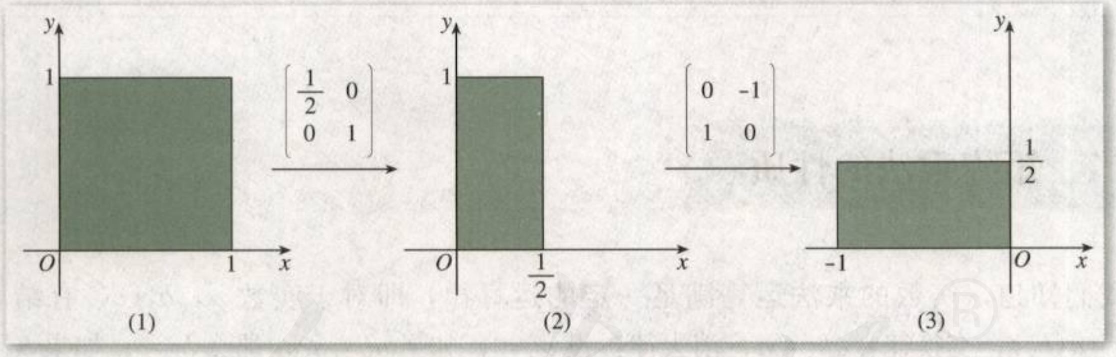


图 2.1-3

习题2.1

1. 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\-1&7\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$．在直角坐标系 Oxy 内，分别写出矩阵 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 所对应的线性变换的坐标变换公式．

3. 已知旋转变换 R_{30°：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$与切变变换 ρ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$．

（1）求单位坐标向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 在复合变换 $\rho\cdot R_{30^\circ}$ 作用下的像．

（2）复合变换 $\rho\cdot R_{30^\circ}$ 把直角坐标系 Oxy 内单位正方形区域（如图 2.1-3(1)）变成了什么图形？

4. 请你分别从第一讲第三节中的图 1.3-7 至图 1.3-18 出发，再分别选择一个线性变换，作用在这些平面区域上，画出最终得到的平面区域．

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$（其中 a，b，c，d 均为常数），当 $\boldsymbol{B}$ 分别为下列矩阵时，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$．

（1）$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，　　（2）$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$（其中 k 为非零常数），

（3）$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$（其中 k 为非零常数），　　（4）$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$（其中 k 为非零常数）．

二　矩阵乘法的性质

我们知道，实数的乘法运算满足一定的运算律，即对于实数 a，b，c，有结合律：$(ab)c=a(bc)$；交换律：$ab=ba$；消去律：设 $a\neq0$，如果 $ab=ac$，那么 $b=c$；如果 $ba=ca$，那么 $b=c$.

探究

类比实数乘法的运算律，二阶矩阵的乘法是否也满足某些运算律？

首先考察矩阵的乘法是否满足结合律.

例如，对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，可以得到：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$$

于是有 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

一般地，设二阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}.$$

一方面，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2\\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2\end{bmatrix},$$

从而

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2\\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_1a_2a_3+b_1c_2a_3+a_1b_2c_3+b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3+b_1c_2b_3+a_1b_2d_3+b_1d_2d_3\\ c_1a_2a_3+d_1c_2a_3+c_1b_2c_3+d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3+d_1c_2b_3+c_1b_2d_3+d_1d_2d_3\end{bmatrix};$$

另一方面，

$$\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2a_3+b_2c_3 & a_2b_3+b_2d_3\\ c_2a_3+d_2c_3 & c_2b_3+d_2d_3\end{bmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2a_3+b_2c_3 & a_2b_3+b_2d_3\\ c_2a_3+d_2c_3 & c_2b_3+d_2d_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_1a_2a_3+a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3+a_1b_2d_3+b_1c_2b_3+b_1d_2d_3\\ c_1a_2a_3+c_1b_2c_3+d_1c_2a_3+d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3+c_1b_2d_3+d_1c_2b_3+d_1d_2d_3\end{bmatrix}.$$

因此

$$(AB)C=A(BC).$$

所以，二阶矩阵的乘法满足结合律．即

性质（结合律） 设 A，B，C 是任意的三个二阶矩阵，则 $A(BC)=(AB)C$.

设 A 是二阶矩阵，n 是任意自然数，规定

$$A^0=E_2,$$
$$A^1=A,$$
$$A^2=AA^1,$$
$$A^3=AA^2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A^n=AA^{n-1},$$

称 A^n 为 A 的 n 次方幂.

根据矩阵乘法的结合律可以证明，二阶矩阵 A 的方幂具有如下性质：

$$A^kA^l=A^{k+l},$$
$$(A^k)^l=A^{kl},$$

其中 k，l 是任意自然数.

例 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，求 A^6.

解法一（根据定义）

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^5=A\cdot A^4=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^6=A\cdot A^5=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

解法二（根据定义以及方幂的性质）

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^6=A^3A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

这个例子让我们初步感受到了运算律的威力.

下面考察二阶矩阵的乘法是否满足交换律．我们从某些具体的二阶矩阵所对应的线性变换对平面图形的作用效果入手．例如：矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$确定的是伸缩变换

$$\sigma:\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

矩阵$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$确定的是旋转变换

$$R_{90^\circ}:\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

变换 $R_{90^\circ}\cdot\sigma$ 对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-1 所示；变换 $\sigma\cdot R_{90^\circ}$ 对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-2 所示．

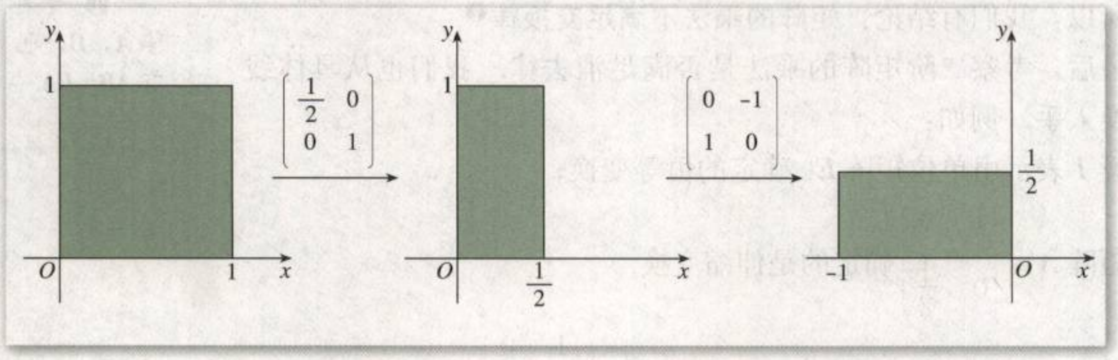


图 2.2-1

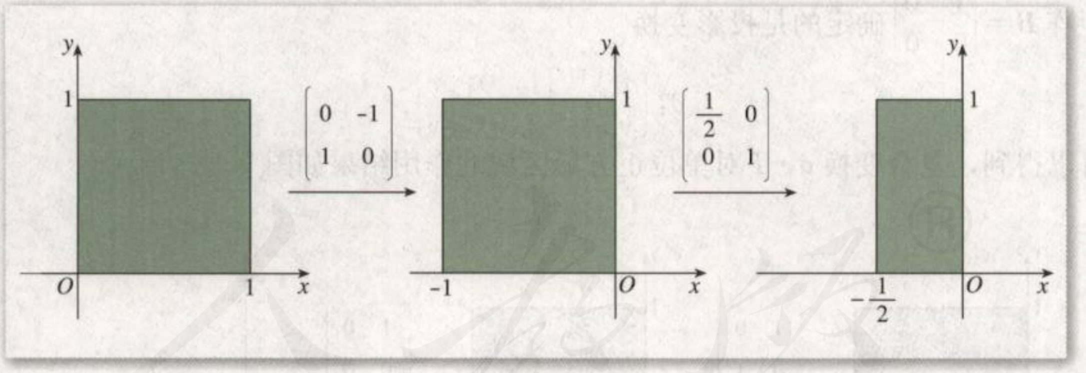


图 2.2-2

比较图 2.2-1 与图 2.2-2，可以看到 $\sigma\cdot R_{90^\circ}\neq R_{90^\circ}\cdot\sigma$．由于二阶矩阵与线性变换是一一对应的，因此有

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

实际上，对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，通过直接计算也可以得到这个结果：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

所以，我们有结论：矩阵的乘法不满足交换律❶.

❶ 对某些矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，也可能有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

最后，考察二阶矩阵的乘法是否满足消去律. 我们也从具体线性变换入手. 例如：

设 I 表示由单位矩阵 $\boldsymbol{E}_2$ 确定的恒等变换；

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 确定的是伸缩变换

$$\rho: \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix};$$

矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 确定的是投影变换

$$\sigma: \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

可以得到，复合变换 $\sigma\cdot I$ 对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-3 所示：

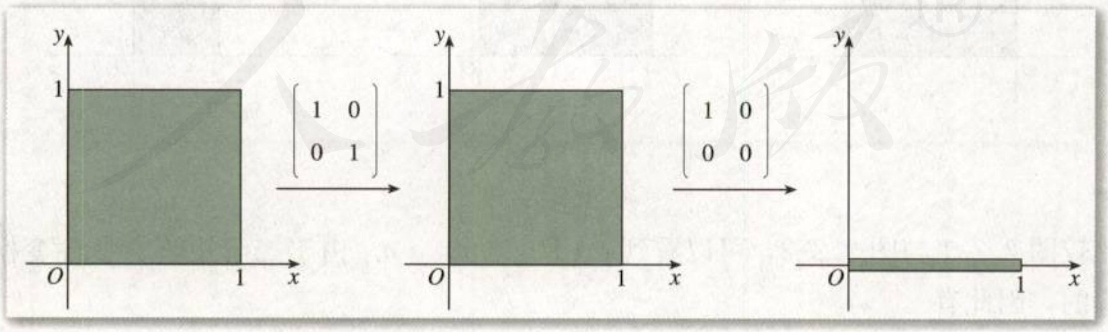


图 2.2-3

复合变换 $\sigma\cdot\rho$ 对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-4 所示：

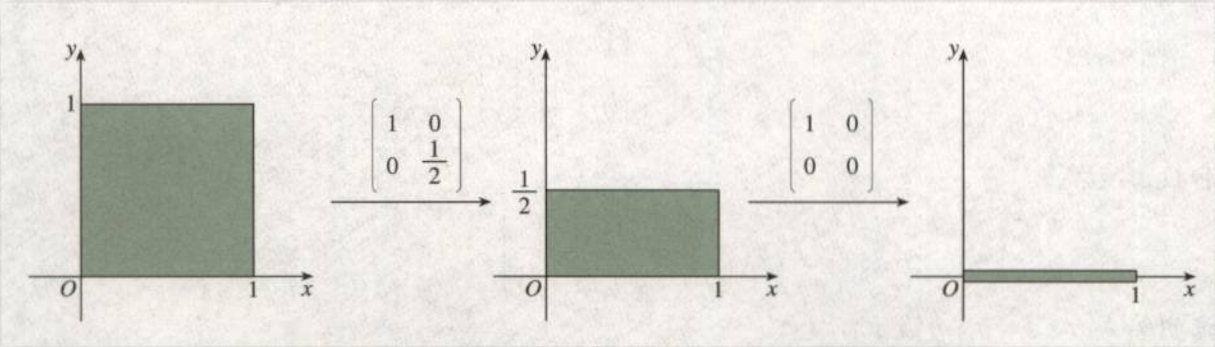


图 2.2-4

于是，$\sigma\cdot I$ 与 $\sigma\cdot\rho$ 对单位正方形区域的作用结果相同.

事实上，不难证明

$$\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho^{❶}.$$

❶ 你能证明这个等式吗?

因此，$\boldsymbol{BE}_2=\boldsymbol{BA}$，但 $\boldsymbol{E}_2\neq\boldsymbol{A}$.

类似地，可以得到，$\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，但 $\boldsymbol{E}_2\neq\boldsymbol{A}$.

所以，我们有结论：矩阵的乘法不满足消去律.

综上所述，矩阵的乘法运算满足结合律，但不满足交换律和消去律.

我们知道，对任意实数 a，$1\cdot a=a\cdot 1=a$. 二阶矩阵中，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 也有相当于实数 1 的作用.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 是任意的二阶矩阵，则

$$\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AE}_2=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}_2=\boldsymbol{A}$.

正是 $\boldsymbol{E}_2$ 在二阶矩阵的乘法运算中扮演这样的角色，所以我们称 $\boldsymbol{E}_2$ 为二阶单位矩阵

习题2.2

1. 设 ρ，σ，τ 是同一个平面上的任意三个线性变换，证明 $\rho\cdot(\sigma\cdot\tau)=(\rho\cdot\sigma)\cdot\tau$（变换的结合律）.
2. I 表示恒等变换，设 ρ，σ 分别表示伸缩变换

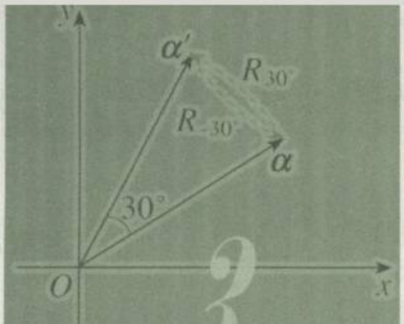
$$\rho:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

和投影变换

$$\sigma:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

证明等式 $\sigma\cdot I=\sigma\cdot\rho$ 成立.

3. 从你学过的线性变换中，再举一个例子，说明矩阵的乘法不满足交换律.
4. 从你学过的线性变换中，再举一个例子，说明矩阵的乘法不满足消去律.
5. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明 $\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$.



$$B_1A=AB_1=E_2$$
$$\Rightarrow B_1=B_2$$
$$A^{-1}A=AA^{-1}=E_2$$

第三讲　逆变换与逆矩阵

上一讲我们引进了矩阵的乘法，研究了矩阵乘法的一些性质．结合矩阵的乘法，是否还可以研究矩阵的其他性质呢？例如，在实数的乘法运算中，如果 $a\neq0$，则 $\frac{1}{a}\cdot a=a\cdot\frac{1}{a}=1$．我们可以分别把恒等变换 I 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}_2$ 作为数 1 的类比对象．那么，能否类比数的这个运算性质研究变换和矩阵呢？

本讲将通过线性变换引进逆矩阵，理解逆矩阵的性质，并进一步引入二阶行列式研究逆矩阵．本讲还将从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义，并利用逆矩阵求解一类特殊的二元一次方程组．

一　逆变换与逆矩阵

1. 逆变换与逆矩阵

探究

对于一个线性变换 ρ，是否存在一个线性变换 σ，使得 $\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$？对于一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，是否存在一个二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2$？

我们知道，在取定的平面直角坐标系中，矩阵与线性变换是一一对应的，下面先从一些特殊的矩阵所对应的线性变换入手进行探究．

例 1　旋转变换

$$R_{30^\circ}:\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\\[2mm] y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\end{cases}$$

把直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 沿逆时针方向绕原点旋转 30°，设 $R_{30^\circ}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'$；如果再进行一次旋转变换

$$R_{-30^\circ}:\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y,\\ y'=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y,\end{cases}$$

即把直角坐标系 Oxy 内的每个向量沿顺时针方向绕原点再旋转 30°，这样向量 $\boldsymbol{\alpha}'$ 在 R_{-30° 的作用下又变回到 $\boldsymbol{\alpha}$. 因此，对直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，均有

$$(R_{-30^\circ}\cdot R_{30^\circ})\boldsymbol{\alpha}=R_{-30^\circ}(R_{30^\circ}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}.$$

即复合变换 $R_{-30^\circ}\cdot R_{30^\circ}$ 使得每个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 保持不动，从而 $R_{-30^\circ}\cdot R_{30^\circ}=I$.

类似地，可以发现，对直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，也有

$$(R_{30^\circ}\cdot R_{-30^\circ})\boldsymbol{\alpha}=R_{30^\circ}(R_{-30^\circ}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},$$

从而 $R_{30^\circ}\cdot R_{-30^\circ}=I$.

综上所述，对旋转变换 R_{30°，我们找到了一个变换 R_{-30°，使得

$$R_{-30^\circ}\cdot R_{30^\circ}=R_{30^\circ}\cdot R_{-30^\circ}=I. \qquad ①$$

从图 3.1-1 中也可以直观地看出等式①成立.

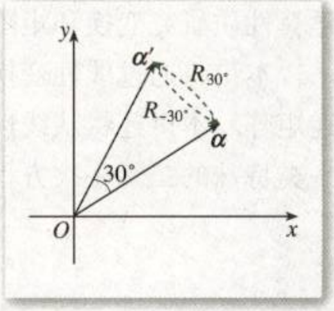


图 3.1-1

旋转变换 R_{30°，R_{-30° 和恒等变换对应的二阶矩阵分别为

$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{E}_2$. 根据矩阵与线性变换的对应关系，把上面的结论用矩阵的语言叙述为：

对于二阶矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，存在二阶矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，使得

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_2. \qquad ②$$

思考

对一般的旋转变换 R_φ，也有类似的结论吗？

例 2 切变变换

$$\rho:\begin{cases}x'=x+ky,\\ y'=0x+y\end{cases}\quad\text{（其中 } k \text{ 是非零常数）}$$

把直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 变成 $\boldsymbol{\alpha}'=\begin{bmatrix}x+ky\\y\end{bmatrix}$；对 $\boldsymbol{\alpha}'=\begin{bmatrix}x+ky\\y\end{bmatrix}$ 再进行一次切变变换

$$\sigma: \begin{cases}x'=x-ky,\\ y'=0x+y,\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}'=\begin{bmatrix}x+ky\\y\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}x+ky-ky\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，即变回到 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. 因此，对直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，均有

$$(\sigma\cdot\rho)\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\rho\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}.$$

可以发现，对直角坐标系 Oxy 内的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，也有

$$(\rho\cdot\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\rho(\sigma\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}.$$

从而，对切变变换 ρ，我们找到了另一个切变变换 σ，使得

$$\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I. \tag{③}$$

切变变换 ρ，σ 和恒等变换对应的二阶矩阵分别为 $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&-k\\0&1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{E}_2$. 根据矩阵与线性变换的对应关系，把上面的结论用矩阵的语言叙述为：

对于二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$，存在二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1&-k\\0&1\end{bmatrix}$，使得

$$\begin{bmatrix}1&-k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-k\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_2. \tag{④}$$

思考

对于另一类切变变换、伸缩变换和反射变换等线性变换，能否找到一个线性变换，使得它们的复合变换是恒等变换 I 呢？

一般地，设 ρ 是一个线性变换，如果存在线性变换 σ，使得 $\sigma\rho=\rho\sigma=I$，则称变换 ρ **可逆**（invertible），并且称 σ 是 ρ 的逆变换.

用矩阵的语言叙述为：

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，如果存在二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2,$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ **可逆**，或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

由①②知，旋转变换 R_{30° 是可逆变换，且逆变换为旋转变换 R_{-30°；旋转变换矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 是可逆的，且逆矩阵为 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，这个逆矩阵恰好是旋转变换 R_{30° 的逆变换

$R_{-30°}$所对应的矩阵．由③④知，切变变换

$$\rho:\begin{cases}x'=x+ky,\\ y'=0x+y\end{cases}\text{（其中 } k \text{ 是非零常数）}$$

是可逆变换，且逆变换为切变变换

$$\sigma:\begin{cases}x'=x-ky,\\ y'=0x+y;\end{cases}$$

切变变换 ρ 的矩阵 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 是可逆的，其逆矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，这个逆矩阵恰好是切变变换 ρ 的逆变换 σ 所对应的矩阵．

一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶可逆矩阵，对应的线性变换为 ρ，由矩阵与线性变换的对应关系可以看出，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵就是 ρ 的逆变换所对应的矩阵．

思考

是否每个二阶矩阵都可逆呢？

不难发现，投影变换 ρ：$\begin{cases}x'=x,\\ y'=0\end{cases}$ 把直线 $x=1$ 变成点（1，0），特别地，

$$\rho\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\rho\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

如果存在线性变换 σ 使得

$$\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I,$$

由 $\rho\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，得

$$\sigma\left(\rho\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\sigma\left(\rho\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\sigma\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

从而

$$(\sigma\cdot\rho)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=(\sigma\cdot\rho)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

再由 $\sigma\cdot\rho=I$ 得 $I\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=I\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，矛盾！

因此，不可能找到线性变换 σ，使得 $\sigma\cdot\rho=\rho\cdot\sigma=I$．即投影变换 $\boldsymbol{\rho}$ 不可逆．

把这个事实用矩阵的语言表述为：

对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，找不到二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2$ 成立．即矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$不可逆.

因此，有些二阶矩阵是不可逆的.

思考

你能再举一个不可逆的二阶矩阵的例子吗？

2. 逆矩阵的性质

探究

如果一个线性变换是可逆的，那么它的逆变换是唯一的吗？如果一个矩阵是可逆的，那么它的逆矩阵唯一吗？

对于旋转变换 $R_{30°}$，我们知道 $R_{-30°}\cdot R_{30°}=R_{30°}\cdot R_{-30°}=I$. 设 σ 是变换 $R_{30°}$ 的任意一个逆变换，则 $\sigma\cdot R_{30°}=R_{30°}\cdot\sigma=I$. 对任意一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们有

$$\begin{aligned}\sigma\boldsymbol{\alpha}&=I(\sigma\boldsymbol{\alpha})=(R_{-30°}\cdot R_{30°})\sigma\boldsymbol{\alpha}=R_{-30°}(R_{30°}(\sigma\boldsymbol{\alpha}))\\&=R_{-30°}((R_{30°}\cdot\sigma)\boldsymbol{\alpha})=R_{-30°}(I\boldsymbol{\alpha})=R_{-30°}\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

因此，$\sigma=R_{-30°}$. 即旋转变换 $R_{30°}$ 的逆变换是唯一的.

用矩阵的语言叙述为：矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

的逆矩阵是唯一的.

一般地，可逆的二阶矩阵的逆矩阵都是唯一的. 即

性质 1　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的❶.

证明：设 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{E}_2.$$

从而

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{B}_2.$$

即 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$.

由于可逆的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的，我们把 $\boldsymbol{A}$ 的逆

❶ 性质 1 用线性变换的语言可叙述为：如果二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换 σ 是可逆的，则其逆变换是唯一的.

矩阵记为 $\mathbf{A}^{-1}$，读作 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵或 $\mathbf{A}$ 的逆❶．从而

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_2.$$

❶ 若线性变换 σ 是可逆的，则记其逆变换为 σ^{-1}，读作 σ 的逆变换或 σ 的逆．

探究

设 ρ，σ 是两个可逆的线性变换，那么它们的复合变换仍可逆吗？

我们知道，伸缩变换

$$\rho: \begin{cases} x'=x, \\ y'=2y \end{cases}$$

和旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y, \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

都是可逆线性变换，它们的逆变换分别是伸缩变换

$$\rho^{-1}: \begin{cases} x'=x, \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

和旋转变换

$$R_{-30^\circ}: \begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y, \\ y'=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

如图 3.1-2 所示，任意一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，经过变换 ρ 的作用变成 $\begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$，再经过变换 R_{30° 的作用变成 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-y \\ \frac{1}{2}x+\sqrt{3}y \end{bmatrix}$．从几何直观上可以看出，向量 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x-y \\ \frac{1}{2}x+\sqrt{3}y \end{bmatrix}$ 经过变换 R_{-30° 的作用变回到 $\begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$，再经过变换 ρ^{-1} 的作用变回到 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，即

$$\rho^{-1}(R_{-30^\circ}(R_{30^\circ}(\rho\boldsymbol{\alpha})))=\boldsymbol{\alpha}.$$

所以

$$((\rho^{-1}\cdot R_{-30^\circ})\cdot(R_{30^\circ}\cdot\rho))\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

从而

$$(\rho^{-1}\cdot R_{-30^\circ})\cdot(R_{30^\circ}\cdot\rho)=I;$$

类似地可得

$$(R_{30^\circ}\cdot\rho)\cdot(\rho^{-1}\cdot R_{-30^\circ})=I.$$

因此

$$\begin{aligned}&(R_{30^\circ}\cdot\rho)\cdot(\rho^{-1}R_{-30^\circ})\\=&(\rho^{-1}\cdot R_{-30^\circ})\cdot(R_{30^\circ}\cdot\rho)=I.\end{aligned}$$

即变换 $R_{30^\circ}\cdot\rho$ 可逆，且

$$(R_{30^\circ}\cdot\rho)^{-1}=\rho^{-1}\cdot R_{-30^\circ}=\rho^{-1}\cdot R_{30^\circ}{}^{-1}.$$

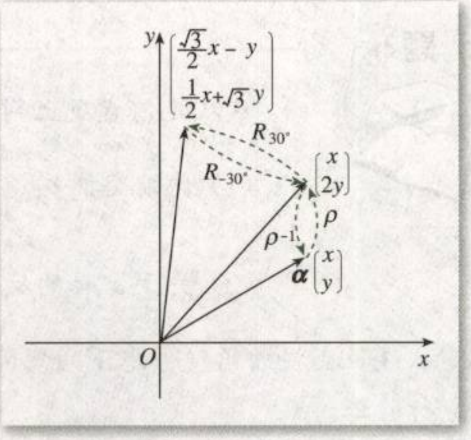


图 3.1-2

这个结论用矩阵的语言叙述为：

矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

是可逆的，且

$$\left[\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{-1}.$$

一般地，我们有

性质 2　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是二阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明：因为

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AE}_2\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}_2,$$
$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_2,$$

即

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{E}_2,$$

所以，$\boldsymbol{AB}$ 可逆且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

性质 2 与我们熟悉的一些生活规律是类似的．例如，在穿衣服时，我们总是先穿衬衣后穿外套；而在脱衣服时，我们会遵循正好相反的顺序，先脱外套后脱衬衣．如果把穿外套和穿衬衣分别用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 表示，那么 $\boldsymbol{AB}$ 就表示穿衣服的全过程，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 就分别表示脱外套和脱衬衣，$(\boldsymbol{AB})^{-1}$ 就表示脱衣服的全过程．自然地，脱衣服的全过程也可表示为 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

习题3.1

1. 试从几何直观上判别下列线性变换是否可逆？若可逆求其逆变换.

(1) 伸缩变换 ρ：$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky \end{cases}$（其中 k 是一个固定的非零常数）；

(2) 关于 x 轴的反射变换 ρ：$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y. \end{cases}$

2. 从线性变换的角度考虑下列矩阵是否可逆. 若可逆，求其逆矩阵，并用逆矩阵的定义进行验证.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

3. 如果一个线性变换是可逆的，证明其逆变换是唯一的.

4. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

5. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{A}^2$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2$.

二　二阶行列式与逆矩阵

探究

我们知道，二阶矩阵不一定可逆. 对任意给定的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如何判别它是否可逆？若可逆，如何求其逆矩阵呢？

例 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆？如果可逆，求其逆矩阵.

解：假设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并设它的逆矩阵是

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix},$$

那么应该有

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2.$$

即

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad ①$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad ②$$

由①得

$$\begin{cases}3x+4y=1, & ③\\ x+2y=0, & ④\\ 3u+4v=0, & ⑤\\ u+2v=1. & ⑥\end{cases}$$

④×3−③×1 得

$$(3\times2-4\times1)y=-1,$$

从而 $y=-\frac{1}{2}$；类似地可得 $x=1$，$u=-2$，$v=\frac{3}{2}$.

把 $x=1$，$y=-\frac{1}{2}$，$u=-2$，$v=\frac{3}{2}$代入②式，②式也成立.

从而，对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$，我们找到了矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

使得

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$是可逆的，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

例 2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆？如果可逆，求其逆矩阵.

解：仿照例 1 的方法，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$是可逆的，其逆矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x&y\\u&v\end{bmatrix}$，那么应该有

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2.$$

即

$$\begin{bmatrix}x&y\\u&v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \qquad ①$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}. \qquad ②$$

由①得

$$\begin{cases}2x+4y=1, & ③\\ x+2y=0, & ④\\ 2u+4v=0, & ⑤\\ u+2v=1. & ⑥\end{cases}$$

④×2－③×1 得

$$(2\times2-4\times1)y=-1,$$

即 $0y=-1$，这说明上面的方程组无解．从而，不存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2$．所以，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ 不可逆．

仔细分析上面两个例子的解答过程可以发现，由于在例 1 的方程组里，前两个方程中 x 项的系数与 y 项的系数不对应成比例，后两个方程中 u 项的系数与 v 项的系数也不对应成比例，即 $\frac{3}{1}\neq\frac{4}{2}$，从而 $3\times2-4\times1\neq0$，因此这个方程组有唯一的解．所以，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ 是可逆的．而在例 2 的方程组里，前两个方程中 x 项的系数与 y 项的系数对应成比例，后两个方程中 u 项的系数与 v 项的系数也对应成比例，均为 $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$，从而 $2\times2-4\times1=0$，因此这个方程组没有解．所以，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ 不可逆．

对一般的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，是否也有类似的结论？即是否有：

当 $ad-bc\neq0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆；当 $ad-bc=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆．

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 是可逆的，其逆矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}$，那么应该有

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2.$$

即

$$\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad ①$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \quad ②$$

由①得

$$\begin{cases}ax+cy=1, & ③\\ bx+dy=0, & ④\\ au+cv=0, & ⑤\\ bu+dv=1. & ⑥\end{cases}$$

即解两个二元一次方程组

$$\begin{cases} ax+cy=1, \\ bx+dy=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} au+cv=0, \\ bu+dv=1. \end{cases}$$

由③④⑤⑥得

$$(ax+cy)(bu+dv)-(bx+dy)(au+cv)=1\times1-0\times0=1,$$

整理并分解因式得

$$(ad-bc)(xv-uy)=1,$$

从而 $ad-bc\neq0$.

于是，我们得到：

如果矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是可逆的，则 $ad-bc\neq0$.

表达式 $ad-bc$ 称为二阶行列式（determinant），记作 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc❶.$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 也称为二阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式，记为 $\det\mathbf{A}$ 或 $|\mathbf{A}|$.

❶ 亦称 $ad-bc$ 为二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的展开式，它是位于两条对角线上元素的乘积之差.

另一方面，当 $\det\mathbf{A}=ad-bc\neq0$ 时，对上面的方程组利用加减消元法得

$$\begin{cases} (ad-bc)x=d, \\ (ad-bc)y=-b, \\ (ad-bc)u=-c, \\ (ad-bc)v=a; \end{cases}$$

从而，方程①有唯一的解：

$$\begin{cases} x=\dfrac{d}{\det\mathbf{A}}, \\ y=-\dfrac{b}{\det\mathbf{A}}, \\ u=-\dfrac{c}{\det\mathbf{A}}, \\ v=\dfrac{a}{\det\mathbf{A}}. \end{cases}$$

不难验证，这组解也满足矩阵方程②. 因此，对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，当 $\det\mathbf{A}=ad-bc\neq0$ 时，我们就找到了一个矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det\mathbf{A}} & \dfrac{-b}{\det\mathbf{A}} \\ \dfrac{-c}{\det\mathbf{A}} & \dfrac{a}{\det\mathbf{A}} \end{bmatrix},$$

满足

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{-b}{\det \boldsymbol{A}} \\ \dfrac{-c}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{a}{\det \boldsymbol{A}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{-b}{\det \boldsymbol{A}} \\ \dfrac{-c}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{a}{\det \boldsymbol{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以，我们得到

定理 二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆，当且仅当 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$.

当矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{-b}{\det \boldsymbol{A}} \\ \dfrac{-c}{\det \boldsymbol{A}} & \dfrac{a}{\det \boldsymbol{A}} \end{bmatrix}$ [1].

> [1] 数据 $ad-bc$ 对于判断矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是否可逆以及求逆矩阵具有特别的重要性，这是我们把它定义为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的重要原因.

至此，我们解决了如何判断二阶矩阵是否可逆以及如何求可逆矩阵的逆矩阵的问题.

例 3 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$.

解：(1) 原式 $=3\times 2-1\times 4=2$；

(2) 原式 $=(\lambda-2)(\lambda-3)-2\times 1$

$=\lambda^2-5\lambda+4$.

例 4 判断下列二阶矩阵是否可逆. 若可逆，求出逆矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解：(1) 因为

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{0}{1} & \dfrac{-1}{1} \\ \dfrac{-(-1)}{1} & \dfrac{0}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(2) 因为

$$\det \boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

思考

二阶矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 与二阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 的主要区别是什么？

习题3.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$.

2. 判别下列二阶矩阵是否可逆？若可逆，求出逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}6 & -3\\ -4 & 2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

3. (1) k 取何值时，矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & k\end{pmatrix}$ 可逆？

(2) k 取何值时，矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & k\end{pmatrix}^{-1}$ 的所有元素都是整数？

4. a，b 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ 可逆？此时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是什么？

5. 利用逆矩阵求适合下列式子的未知二阶矩阵 $\boldsymbol{X}$：

(1) $\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & 1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

三　逆矩阵与二元一次方程组

在初中，我们从解析几何的角度解释过二元一次方程组的解，即二元一次方程组的解可以看作是直角坐标系 Oxy 内相应的两条直线交点的坐标. 现在我们学习了线性变换，线性变换的表达式的形式与二元一次方程组的形式有很多相似之处，能否从线性变换的角度

来解释它呢？本节中，我们将从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义，并利用逆矩阵解一类特殊的二元一次方程组.

1. 二元一次方程组的矩阵形式

把二元一次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y=3,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1\end{cases}\qquad ①$$

写成向量的形式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},$$

根据矩阵与向量乘法的定义，得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\end{bmatrix},$$

于是，方程组①变形为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.\qquad ②$$

类似于上面的过程，一般地，关于变量 x，y 的二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+by=e,\\ cx+dy=f\end{cases}\qquad ③$$

（其中 a，b，c，d 均为常数）可以写成

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},\qquad ④$$

其中矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 是把二元一次方程组③中未知数 x，y 的系数按原来的顺序写出来得到的，所以称之为二元一次方程组③的系数矩阵，④式称为二元一次方程组③的**矩阵形式**. ②式就是二元一次方程组①的矩阵形式.

探究

二元一次方程组的系数矩阵对应着一个线性变换，你能从线性变换的角度揭示解二元一次方程组的意义吗？

对二元一次方程组①，它的系数矩阵$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$对应的线性变换为旋转变换

$$R_{30^\circ}：\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

从方程组的矩阵形式②式可以看出，解二元一次方程组①就是找出向量$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，使得它在旋转变换$R_{30^\circ}$的作用下的结果为给定的向量$\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$.

类似地，对于一般的二元一次方程组③，从线性变换的角度来看，解这个方程组可以表述为：

已知线性变换

$$\rho：\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

和平面上的一个确定的向量$\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$，找出平面上的向量$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，使得该向量在线性变换$\rho$的作用下变成已知向量$\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$[1].

> [1] 在实际操作中，如果线性变换ρ的意义不明显或不为我们熟知，那么很难找出向量$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，使得$\rho\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$.

有时我们也把二元一次方程组③的解写成向量$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$的形式，称这种形式的解为二元一次方程组③的解向量.

2. 逆矩阵与二元一次方程组

探究

如果二元一次方程组的系数矩阵可逆，能利用逆矩阵来解方程组吗？

我们知道，二元一次方程组①的系数矩阵$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$是可逆的，从线性变换的角度看，解方程组①就是找出向量$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$使得它在旋转变换

$$R_{30°}：\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

的作用下的结果为给定的向量$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，也就是说，把向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$按逆时针方向绕原点 O 旋转 30°后得到向量$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$. 换个角度看，向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$可以看成是把向量$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$按顺时针方向绕原点 O 旋转 30°后得到的，即

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=R_{-30°}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=R_{30°}^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

因此，二元一次方程组①一定有解，且解为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=R_{-30°}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=R_{30°}^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-3}{2}\end{bmatrix}.$$

由于二元一次方程组①的任意一个解向量都满足

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},$$

从几何上容易看出，只有唯一的一个向量按逆时针方向绕原点 O 旋转 30°后得到向量$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，因此，二元一次方程组①的解是唯一的.

一般地，我们有下面的定理.

定理 如果关于变量 x，y 的二元一次方程组（线性方程组）

$$\begin{cases}ax+by=e,\\ cx+dy=f\end{cases} \quad ②$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$可逆，那么该方程组有唯一解

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}.$$

证明：当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$可逆时，由二元一次方程组②的矩阵形式 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$得，

$$\mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right]=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

从而

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

所以

$$\mathbf{E}_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

因此，二元一次方程组②有解

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}.$$

再设$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$是二元一次方程组②的任意两个解，由上面的证明过程可得，

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix},$$

从而$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$，所以二元一次方程组②的解是唯一的.

推论　关于变量 x，y 的二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+by=0,\\cx+dy=0,\end{cases}\qquad ③$$

其中 a，b，c，d 是不全为零的常数，有非零解的充分必要条件是系数矩阵的行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$.

> 称常数项都为零的线性方程组为齐次线性方程组，显然$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$是其一个解，称之为零解. 如果向量$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$（$x_0$，$y_0$ 不全为零）是该方程组的解（向量），则称之为一个非零解.

证明：（1）必要性

如果二元一次方程组③有非零解，则其系数矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$不可逆. 否则，由上面的定理得，二元一次方程组③有唯一的解$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，矛盾！又因为矩阵$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$可逆的充分必要条件是矩阵的行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$，所以$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$.

（2）充分性

假设系数矩阵的行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$，即 $ad-bc=0$，从而二元一次方程组③中 x，y 项

的系数对应成比例．用加减消元法解方程组③可得，该方程组与方程 $ax+by=0$ 同解．不妨设 $a\neq 0$，令 $y=1$，则 $x=-\dfrac{b}{a}$，从而 $\begin{bmatrix} -\dfrac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}$ 是方程 $ax+by=0$ 的一个非零解，因而也是二元一次方程组③的一个非零解．

例 用逆矩阵解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=2, \\ 4x+2y=0. \end{cases}$

解： 二元一次方程组的系数矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，该方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-1\times 4=2\neq 0$，所以系数矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 可逆，从而方程组有唯一的解 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$．而

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{|\mathbf{A}|} & -\dfrac{1}{|\mathbf{A}|} \\ -\dfrac{4}{|\mathbf{A}|} & \dfrac{3}{|\mathbf{A}|} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -2 & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix},$$

代入上式得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -2 & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-4. \end{cases}$

思考

如果关于变量 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=e, \\ cx+dy=f \end{cases}$ 的系数矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 不可逆，那么它的解的情况如何？

从形式上看，解二元一次方程组是纯粹的代数问题，通过本节的学习，我们看到，还可以用线性变换的观点来认识解二元一次方程组的意义，即从几何变换的角度来认识．这一点与我们学过的用函数图象的观点来认识解一元一次方程、一元二次方程的意义有某些相似性．

需要指出的是，用逆矩阵的方法解二元一次方程组时，必须要求其系数矩阵可逆．我们在解一般的二元一次方程组、三元一次方程组、四元一次方程组等方程组（通常称为线性方程组）时，一般不采用或不能采用本节介绍的方法，同学们将在以后的学习中获得有关方法．

习题3.3

1. 试通过几何直观，从线性变换的角度求解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=-1, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=1. \end{cases}$

2. 用逆矩阵的方法解二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ 2x-y=-2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ x+y=-2; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ 4x+2y=3. \end{cases}$

3. λ 为何值时，二元一次方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

有非零解？

三阶矩阵与三阶行列式

我们知道，正方形数表$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$称为二阶矩阵，数 a，b，c，d 称为二阶矩阵的元素. 利用二阶矩阵及其运算（二阶矩阵与平面向量的乘法运算、二阶矩阵的乘法等），可以研究线性变换的一些性质. 能否将二阶矩阵的概念推广呢？

类似于二阶矩阵，我们可以定义正方形数表

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

为三阶矩阵. 数 a_i，b_i，c_i（$i=1$，2，3）称为矩阵的元素. 在三阶矩阵中，横的叫行，从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行、第三行；竖的叫列，从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列和第三列.

与二阶矩阵类似，我们可以定义三阶矩阵的相等；三阶矩阵与三维列向量$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$的乘法；三阶矩阵的乘法；三阶矩阵的逆矩阵；三阶行列式……我们可以研究前面二阶矩阵中研究过的所有相应的问题. 例如，我们可以定义三阶矩阵与三维列向量的乘法为：

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z \\ a_2x+b_2y+c_2z \\ a_3x+b_3y+c_3z \end{pmatrix};$$

可以利用二阶行列式定义三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

……

你能类比前面的研究，自己定义与三阶矩阵有关的运算，提出一些问题，进行一些研究吗？

$$A\xi=\lambda\xi$$

$$\begin{vmatrix}-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=0$$

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}$$

$$A^n\alpha=\lambda^n\alpha$$

第四讲 变换的不变量与矩阵的特征向量

在前面的学习中，我们看到，单位正方形区域在平行于 x 轴的切变变换作用下，其位置、形状和大小都发生了改变，但其中的线段 $y=0$（$0\leqslant x\leqslant 1$）并没有发生变化，是“不变量”．在许多数学问题中，经常需要研究“不变量”．本讲中，我们研究线性变换的一种重要的不变量——矩阵的特征向量，并应用特征向量的性质解决一类实际问题．

一　变换的不变量——矩阵的特征向量

1. 特征值与特征向量

探究

对于线性变换，是否存在平面内的直线，使得该直线在这个线性变换的作用下保持不变？是否存在向量，使得该向量在这个线性变换的作用下具有某种“不变性”？

我们先从简单的线性变换开始．

例 1　对于关于 x 轴的反射变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，从几何直观上可以发现，只有 x 轴和平行于 y 轴的直线在反射变换 σ 的作用下保持不动，其他的直线都发生了变化．因此，反射变换 σ 只把形如 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\ 0\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ k_2\end{bmatrix}$ 的向量（其中 k_1，k_2 是任意常数），分别变成与自身共线的向量．可以发现，反射变换 σ 分别把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\ 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ k_2\end{bmatrix}$ 变成 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\ 0\end{bmatrix}$，$-\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ -k_2\end{bmatrix}$．特别地，反射变换 σ 把向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ 变成 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，把向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$．用矩阵的形式可表示为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \qquad ①$$

例 2 对于伸缩变换 ρ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，从几何直观上可以发现，只有 x 轴和平行于 y 轴的直线在伸缩变换 ρ 的作用下保持不动，其他的直线都发生了变化. 因此，伸缩变换 ρ 只把形如 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ 的向量（其中 k_1，k_2 是任意常数）分别变成与自身共线的向量. 可以发现，伸缩变换 ρ 分别把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ 变成 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$2\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\2k_2\end{bmatrix}$. 特别地，伸缩变换 ρ 把向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 变成 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，把向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 变成 $2\boldsymbol{\xi}_2=2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. 用矩阵的形式可表示为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \qquad ②$$

通过上面的例子我们看到，在一个线性变换的作用下，平面内的确有一些向量具有“不变性”——变成了与自身共线的向量，即变成了原来向量的某个倍数. 如果这些向量是非零向量，我们称之为该线性变换的矩阵的特征向量.

定义 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，如果存在数 λ 以及非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},$$

则称 λ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个**特征值**（eigenvalue），$\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个**特征向量**❶（eigenvector）.

❶（1）特征向量必须是非零向量；
（2）特征值与特征向量是相伴出现的.

在直角坐标系 Oxy 内，由于矩阵与线性变换是一一对应的，因此可以通过线性变换，借助几何直观来理解这个定义. 记矩阵 $\mathbf{A}$ 对应的线性变换为 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，从线性变换上看，$\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量即为 $\sigma\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$. 由于向量 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\lambda\boldsymbol{\xi}$ 是共线的，因此，从几何直观上看，等式 $\sigma\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 表示线性变换 σ 把特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 变成了共线的向量 $\lambda\boldsymbol{\xi}$：当 $\lambda>0$ 时，所得的向量 $\lambda\boldsymbol{\xi}$ 与特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，所得的向量 $\lambda\boldsymbol{\xi}$ 与特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，所得的向量为零向量.

在例 1 中，反射变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，由①式知，

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 的一个特征向量.

在例 2 中，由②式知，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 的一个特征向量.

进一步地，可以看出，在例 1 中，对任意的非零常数 k_1，所有形如 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$ 的向量都是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量；所有形如 $\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$ 的向量都是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量. 因此，矩阵 $\mathbf{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 的特征向量都有无穷多个.

思考

例 2 中，矩阵 A 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 的特征向量也都有无穷多个吗？

一般地，**设 $\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量，则对任意的非零常数 k，$k\boldsymbol{\xi}$ 也是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.**

事实上，如果 k 是非零常数，则 $k\boldsymbol{\xi}\neq 0$. 由于

$$\mathbf{A}(k\boldsymbol{\xi})=k\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=k(\lambda\boldsymbol{\xi})=(k\lambda)\boldsymbol{\xi}=\lambda(k\boldsymbol{\xi}),$$

所以，$k\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

从几何直观上看，上述结论表示，如果 $\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量，那么与 $\boldsymbol{\xi}$ 共线的所有非零向量都是 $\mathbf{A}$ 的属于这个特征值 λ 的特征向量.

另外，从例 1 还可以发现一个有趣的现象，矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于两个不同特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\k_2\end{bmatrix}$（其中 k_1，k_2 是任意非零常数）不共线. 例 2 也有类似的结论成立.

一般地，**属于矩阵的不同特征值的特征向量不共线.**

请同学们自己证明这个结论.

探究

是否每个二阶矩阵都有特征向量？

我们来看一个例子.

例 3 试从几何直观上，利用线性变换求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解：在直角坐标系 xOy 内，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 对应的线性变换是旋转变换

$$R_{30^\circ}:\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

由于旋转变换 R_{30° 把平面上的每个向量都绕原点按逆时针方向旋转了 30°，因此每个非零平面向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在旋转变换 R_{30° 的作用下所得的向量与 $\boldsymbol{\xi}$ 不共线. 所以，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 没有特征向量，从而也没有特征值.

2. 特征值与特征向量的计算

前面我们通过考察线性变换对平面向量（或直线）的作用结果，从几何直观上“看出了”一些特殊矩阵的特征值和特征向量. 但是，对一般的二阶矩阵，由于我们不太了解与之对应的线性变换的几何特征，所以很难通过几何直观的方法“看出”这些矩阵的特征值和特征向量.

探究

给定二阶矩阵，能否不通过几何直观而直接求出它的特征值和特征向量呢？

我们先看一个具体例子.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量.

分析：由于不熟悉矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 对应的线性变换的几何特征，因此，我们根据定义

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，即求出满足等式 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 的数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. 为此，我们需要先把等式 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 写成我们熟悉的二元一次方程组的形式，再变形得到一个含参数 λ 的齐次线性方程组，则特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 就是它的一个非零解. 根据第三讲中介绍的齐次线性方程组有非零解的充要条件，就能使问题得到解决.

解：设数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 满足

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\qquad ①$$

由此得

$$\begin{cases}2x+2y=\lambda x,\\x+3y=\lambda y.\end{cases}\qquad ②$$

因此

$$\begin{cases}(\lambda-2)x-2y=0,\\-x+(\lambda-3)y=0.\end{cases}\qquad ③$$

如果 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组③的一个非零解；反之，如果 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组③的非零解，则 $\boldsymbol{\xi}$ 满足①式，从而是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

> 请你验证②③两式都能写成①的形式.

因为齐次线性方程组③有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵的行列式等于 0，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\-1 & \lambda-3\end{vmatrix}=0,$$

从而

$$(\lambda-2)(\lambda-3)-(-2)\times(-1)=0,$$

解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$.

把 $\lambda_1=1$ 代入方程组③，得

$$\begin{cases}-x-2y=0,\\-x-2y=0.\end{cases}\qquad ④$$

即

$$-x-2y=0.$$

令 $y=-1$，则 $x=2$. 得该方程的一组非零解 $x=2$，$y=-1$. 从而 $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ 是方程组④的一个非零解.

记 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，由上面的过程知 $\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$. 所以，$\lambda_1=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量.

把 $\lambda_2=4$ 代入方程组③，得

$$\begin{cases}2x-2y=0,\\-x+y=0.\end{cases} \quad ⑤$$

即

$$-x+y=0.$$

令 $x=1$，则 $y=1$. 得该方程的一组非零解 $x=1$，$y=1$. 从而 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是方程组⑤的一个非零解.

记 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，由上面的过程知 $\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. 所以，$\lambda_2=4$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ 的属于特征值 $\lambda_2=4$ 的一个特征向量❶.

❶ 除 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$ 外，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还有其他的特征值吗？

思考

你能求出矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$ 的所有特征向量吗？

一般地，对二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，我们可以采用与例 4 类似的方法求出它的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量，具体过程如下：

设数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 满足

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},$$

由此得齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-a)x-by=0,\\-cx+(\lambda-d)y=0.\end{cases} \quad ⑥$$

如果 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组⑥的一个非零解；反之，如果 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组⑥的一个非零解，则 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

我们知道，齐次线性方程组⑥有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=0. \quad ⑦$$

记

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix},$$

则

$$f(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc,$$

它是关于 λ 的二次多项式，从而方程⑦可写成 $f(\lambda)=0$. 解这个关于 λ 的二元一次方程，得 $\lambda=\lambda_1$，$\lambda_2$❶. 将 $\lambda=\lambda_1$ 和 $\lambda=\lambda_2$ 分别代入方程组⑦，则相应的方程组必有非零解❷，分别求出它们的一个非零解 $\begin{cases}x=x_1\\y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2\\y=y_2\end{cases}$，记 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$.

由上面的过程知，$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$，因此，$\lambda_1$，$\lambda_2$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ 为矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的分别属于特征值 λ_1，λ_2 的一个特征向量.

这样，通过解方程（组）的办法直接求出了二阶矩阵的特征值和特征向量.

从求解过程可以看到，在求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量时，多项式

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}$$

和方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=0$$

具有特别的重要性. 我们称多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}$ 为矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的**特征多项式**（characteristic polynomial），方程 $\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=0$，即 $f(\lambda)=0$ 称为矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的**特征方程**（characteristic equation）.

❶ 本专题中只讨论方程 $f(\lambda)=0$ 有两个不同实根的情形.

❷ 你能给出理由吗？

思考

你能总结出求二阶矩阵特征值和特征向量的简要步骤吗？

例 5　设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 的特征值以及属于每个特征值的一个特征向量.

解：矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\1&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3),$$

令 $f(\lambda)=0$，得矩阵 **A** 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$.

对于特征值 $\lambda_1=2$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}x-2y=0,\\x-2y=0,\end{cases}$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ 因此，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 **A** 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的一个特征向量.

对于特征值 $\lambda_2=3$，解相应的线性方程组

$$\begin{cases}2x-2y=0,\\x-y=0,\end{cases}$$

得一个非零解 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$. 因此，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 **A** 的属于特征值 $\lambda_1=3$ 的一个特征向量.

习题4.1

1. 从几何直观上，找出下列线性变换的所有特征值和特征向量：

   (1) 旋转变换 R_π；

   (2) 恒等变换；

   (3) 零变换 0（把平面上的每个向量都变为 0 向量）；

   (4) 关于 x 轴的正投影变换 σ：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$；

   (5) 关于 y 轴的反射变换 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$；

   (6) 平行于 y 轴的切变变换 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

2. 设二阶矩阵 **A** 有两个不同特征值 λ_1，λ_2，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是分别属于特征值 λ_1，λ_2 的任意特征向量，证明向量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 不共线.

3. 求下列矩阵的特征值及其对应的一个特征向量：

   (1) $\begin{bmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$；

   (3) $\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix}1&5\\2&4\end{bmatrix}$.

4. 设二阶矩阵 **A** 形如 $\begin{bmatrix}2&a\\0&b\end{bmatrix}$，其中 a，b 是实数，找出分别满足下列条件的所有二阶矩阵 **A**：

(1) 向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的一个特征向量；

(2) 向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

二　特征向量的应用

特征向量在数学和实际问题中有着广泛的应用，许多实际问题都可归结为研究二阶矩阵的方幂 $\boldsymbol{A}^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）乘以一个平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 不难想象，当方幂 n 很大时，直接用矩阵的乘法、矩阵与向量的乘法进行计算将会非常麻烦. 能否找到一种方法简化运算呢？本节利用特征向量来研究这些问题.

1. $A^n\alpha$ 的简单表示

探究

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个平面向量，能否简捷地计算 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}(n\in\mathbf{N}^*)$ 呢？进一步地，能否给出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的计算公式呢？

先从简单情况开始研究.

取矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，则与之对应的是关于 x 轴的反射变换 $\boldsymbol{\sigma}$：$\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$，由上一节的讨论知，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$；$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 是分别属于特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 的特征向量. 取向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别为特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$. 我们知道，反射变换 σ 作用在这两个特征向量上，结果具有特别简单的形式：$\sigma\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_1$，$\sigma\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=-\boldsymbol{\xi}_2$. 由此可以得到，对任意的正整数 n，

$$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots\cdot(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1=1^n\boldsymbol{\xi}_1,$$

$$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots\cdot(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2=(-1)^n\boldsymbol{\xi}_2.$$

类似地，可以得到：

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的任意一个特征向量，则

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

请同学们自己证明这个结论.

探究

对前面取的反射变换 σ，若取 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意平面向量，能否给出$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots\cdot(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n}\boldsymbol{\alpha}$ 即 $\mathbf{A}^n\boldsymbol{\alpha}$（其中 n 是一个任意的正整数）的表达式呢?

不难发现，对于任意的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，可以找到实数 t_1，t_2，使得 $\boldsymbol{\alpha}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2$. 事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\xi}_1+b\boldsymbol{\xi}_2$. 于是

$$\sigma\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2)=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$(\sigma\cdot\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{A}[t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)\boldsymbol{\xi}_2]=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^2\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$(\sigma\cdot(\sigma\cdot\sigma))\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{A}[t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^2\boldsymbol{\xi}_2]=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^3\boldsymbol{\xi}_2,$$

……

$$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-2}\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{A}[t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^{n-2}\boldsymbol{\xi}_2]=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^{n-1}\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{n}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{A}[t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^{n-1}\boldsymbol{\xi}_2]=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^{n}\boldsymbol{\xi}_2.$$

因此

$$\underbrace{(\sigma\cdot(\cdots(\sigma\cdot\sigma)\cdots))}_{n}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{n}\boldsymbol{\alpha}=t_1 1^n\boldsymbol{\xi}_1+t_2(-1)^{n}\boldsymbol{\xi}_2.$$

对一般的二阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和一般的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们也有类似的结论. 即

性质 1 设 λ_1，λ_2 是二阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同特征值，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的分别属于特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，对于任意的非零平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，设 $\boldsymbol{\alpha}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2$❶（其中 t_1，t_2 为实数），则对任意的正整数 n，有 $\mathbf{A}^n\boldsymbol{\alpha}=t_1\lambda_1{}^n\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^n\boldsymbol{\xi}_2$.

> ❶ 由于 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 不共线，因而可以证明，任意的非零平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}=t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2$（其中 t_1，t_2 为实数）的形式.

分析：这是一个与全体正整数有关的命题，我们用数学归纳法进行证明.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，因为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(t_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\boldsymbol{\xi}_2)=t_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=t_1\lambda_1{}^1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^1\boldsymbol{\xi}_2,$$

所以，性质 1 成立;

(2) 假设当 $n=k-1$ 时性质 1 成立，即

$$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=t_1\lambda_1{}^{k-1}\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^{k-1}\boldsymbol{\xi}_2.$$

当 $n=k$ 时，因为

$$\mathbf{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{A}(t_1\lambda_1{}^{k-1}\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^{k-1}\boldsymbol{\xi}_2)=t_1\lambda_1{}^{k-1}\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^{k-1}\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=t_1\lambda_1{}^k\boldsymbol{\xi}_1+t_2\lambda_2{}^k\boldsymbol{\xi}_2,$$

所以，当 $n=k$ 时性质 1 也成立.

根据 (1) (2) 知，对所有的正整数 n，性质 1 都成立.

2. 特征向量在实际问题中的应用

下面我们利用 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的简单表示解决一类实际问题.

人口迁移是常见的社会现象. 某国家连续几年对城镇与农村之间的人口流动情况作调查，发现有如下稳定的流动趋势：

(1) 每年，约有 5%的农村居民移居城镇；

(2) 每年，约有 1%的城镇居民移居农村.

现在全国总人口（城镇与农村人口的总和）中 70%住在城镇. 假定全国总人口一直保持不变，并且这种人口流动的趋势继续下去. 那么，1 年以后住在城镇的人口占总人口的比例是多少？2 年以后呢？10 年以后呢？最终的情况如何？

乍看起来好像城镇居民在总人口中所占的比例将逐年增加. 但是，如果由此推断最终全国的人口都会住在城镇，那就不对了.

为了研究的方便，用 t_0，c_0 分别表示现在城镇居民与农村居民占总人口的比例数，t_n，c_n 分别表示 $n(n=1, 2, \cdots)$ 年后城镇居民与农村居民占总人口的比例数. 记总人口为 N，根据假定，这个数在任何时候都不变.

我们先求 t_1，c_1.

可以看出，1 年以后，城镇人口是由现在城镇居民的 99%加上现在农村居民的 5%组成的，即

$$t_1N=0.99t_0N+0.05c_0N. \tag{①}$$

同理可得，1 年以后，农村人口为

$$c_1N=0.01t_0N+0.95c_0N. \tag{②}$$

因此

$$\begin{cases}t_1=0.99t_0+0.05c_0,\\ c_1=0.01t_0+0.95c_0.\end{cases}$$

用矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix}t_1\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99 & 0.05\\ 0.01 & 0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix}. \tag{③}$$

记矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.99 & 0.05\\ 0.01 & 0.95\end{bmatrix}$，则③可写成

$$\begin{bmatrix}t_1\\ c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix}. \tag{④}$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 描述了从现在起到 1 年之后城镇人口和农村人口的转变情况.

类似于④的推导过程，可以得到

$$\begin{bmatrix}t_1\\ c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}t_2\\ c_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_1\\ c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^2\begin{bmatrix}t_0\\ c_0\end{bmatrix};$$

……

$$\begin{bmatrix}t_{10}\\c_{10}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_9\\c_9\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^2\begin{bmatrix}t_8\\c_8\end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{P}^{10}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix};\qquad ⑤$$

……

$$\begin{bmatrix}t_n\\c_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_{n-1}\\c_{n-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^2\begin{bmatrix}t_{n-2}\\c_{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{P}^n\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}.$$

在我们的问题中，$t_0=0.7$，$c_0=0.3$. 于是有

$$\begin{bmatrix}t_1\\c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.708\\0.292\end{bmatrix}.$$

所以，1 年以后，总人口的 70.8%居住在城镇，29.2%居住在农村.

利用⑤式，我们也可以很方便地直接求出

$$\begin{bmatrix}t_2\\c_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}t_1\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.708\\0.292\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.716\\0.284\end{bmatrix},$$

所以，2 年以后，总人口的 71.6%居住在城镇，28.4%居住在农村.

然而，如果我们直接利用⑤式计算 t_{10}，c_{10}，会非常麻烦. 进一步地，我们很难直接从⑤式出发，判断出人口的最终分布情况.

由于问题已转化为计算 $\begin{bmatrix}t_n\\c_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^n\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}$ （$n\in\mathbf{N}^*$），所以可以考虑利用性质 1 来解决问题. 为此，首先要求出矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}$ 的特征值以及对应的特征向量. 可以证明：矩阵

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{bmatrix}\ (0<p,\ q<1),$$

的特征值是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}q\\p\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 从而得到，矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.99&0.05\\0.01&0.95\end{bmatrix}$ 的特征值是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-(0.01+0.05)=0.94$，对应的一个特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0.05\\0.01\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

再把研究的向量 $\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}$ 用特征向量表示. 设

$$\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,\qquad ⑥$$

则

$$\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}0.05\\0.01\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},$$

解得 $k_1=\frac{50}{3}$，$k_2=-\frac{2}{15}$. 所以，由性质 1 得

$$\begin{bmatrix}t_{10}\\c_{10}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{10}\begin{bmatrix}t_0\\c_0\end{bmatrix}=\left(\frac{50}{3}\times1^{10}\right)\begin{bmatrix}0.05\\0.01\end{bmatrix}-\left(\frac{2}{15}\times0.94^{10}\right)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.762\\0.238\end{bmatrix},$$

即 10 年以后，总人口中约 76.2%居住在城镇，约 23.8%居住在农村.

对任意的自然数 n，由性质 1 得

$$\begin{pmatrix} t_n \\ c_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^n\begin{pmatrix} t_0 \\ c_0 \end{pmatrix}=k_1\times 1^n\boldsymbol{\xi}_1+k_2\times 0.94^n\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.01 \end{pmatrix}+k_2\times 0.94^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

从而，$t_n=0.05k_1+0.94^nk_2$，$c_n=0.01k_1-0.94^nk_2$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}0.94^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}(0.05k_1+0.94^nk_2)=0.05k_1=0.05\times\frac{50}{3}=\frac{5}{6},$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(0.01k_1-0.94^nk_2)=0.01k_1=0.01\times\frac{50}{3}=\frac{1}{6},$$

记 $t_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$，$c_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$，则 $\begin{pmatrix} t_\infty \\ c_\infty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. 即最终总人口的$\frac{5}{6}$居住在城镇，$\frac{1}{6}$居住在农村.

进一步地，我们可以发现，无论最初的 t_0，c_0（$0\leqslant t_0$，$c_0\leqslant 1$，$t_0+c_0=1$）是什么，由⑥式可以得到，k_1 的值始终为 $k_1=\frac{50}{3}$❶（但对于不同的$\begin{pmatrix} t_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$，$k_2$ 的取值不同），由上面的计算过程可以看出，仍然有 $t_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\frac{5}{6}$，$c_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{6}$. 这说明，不管最初城镇居民和农村居民的分布如何，最终城镇居民和农村居民都是按 5：1 的比例分布的. 这个最终分布是城镇人口和农村人口之间的平衡状态，即从城镇迁移到农村与从农村迁移到城镇的居民正好抵消.

❶ 你能给出具体计算过程吗？

例　在扩散理论中的应用.

设某物质能以液态和气态的混合状态存在，又假定在任意一段很短的时间内

(1) 液体的 5%蒸发成气态；

(2) 气体的 1%凝结成液态.

那么，我们可以得到，不管该物质最初的液—气比率如何，最终将达到一个平衡状态，此时该物质的$\frac{5}{6}$是气态的，$\frac{1}{6}$是液态的.

事实上，例 1 的分析和解决的过程与前面所研究的人口迁移问题是一样的，只不过是以“液体”代替“农村”，以“气体”代替“城镇”.

习题4.2

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8 & -5\\ 6 & -3\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}6\\ 7\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{bmatrix}$，其中 p，q 均为常数，且满足 $0<p$，$q<1$，试证明：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$；

(2) 向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}q\\ p\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的属于特征值 λ_1，λ_2 的一个特征向量.

3. 请你查阅有关资料，再举一个与例 1 类似的例子.

学习总结报告

本专题中，我们通过线性变换引进二阶矩阵的概念，同时看到，每个二阶矩阵对应着唯一的线性变换，并以二阶矩阵为工具，研究一些线性变换；以平面图形的变换为背景，讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量的概念与性质等，用变换的观点理解解二元一次方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性.

我们知道，曲线与方程是相互对应的，由曲线的性质可以研究对应的方程，由方程的性质也可以研究对应的曲线. 与此类似，二阶矩阵与平面上的线性变换也是一一对应的，因而，我们既可以通过二阶矩阵来研究对应的线性变换，也可以通过平面上的线性变换来研究对应的二阶矩阵. 这是本专题中讨论问题的基本思想方法. 你在本专题的学习中对此有何体会？

本专题中，我们总是先通过具体的线性变换从几何直观上获得感知，进而抽象出一般性的概念或结论，在这些过程中，你体会到了数学所具有的抽象、概括的特点吗？

矩阵对应着唯一的线性变换，这不仅给予矩阵以直观的几何解释，而且也更展示了矩阵作为几何研究工具的一个广阔天地. 事实上，矩阵的功能是非常强大的，它在数学的几乎所有分支以及许多不同领域（例如，物理、控制论、机械人学、生物学、经济学、社会学等）有着广泛的应用，也是工程技术的一个有力工具. 除了本专题中谈到的矩阵的应用外，你还能举出矩阵其他的应用的例子吗？

数学学习的过程是一个渐进的过程，只有不断地反思、归纳、总结，才能逐步领会数学的思想和研究方法. 矩阵是现代数学的重要研究对象，其中蕴涵了丰富的思想方法，值得我们仔细地品味.

请你写一篇学习总结报告. 建议报告包括下列三方面的内容：

1. 知识的总结　理解本专题的整体思路、结构和内容，进一步认识变换的思想；

2. 拓展　通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对线性变换及其应用做进一步探讨；

3. 学习体会　通过本专题的学习，谈谈你对数学中研究问题的思想方法的认识.

同学们可以参考下列书籍：

1. 吕学礼，《代数矩阵与几何变换浅说》，吉林教育出版社；
2. 汉斯・里贝克，《实用代数学》，高等教育出版社.

后　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

根据教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》，我们聘请北京师范大学刘绍学教授为主编，由高中数学课程标准研制组的部分成员、大学数学教师、数学教育理论工作者、中学数学教研员和数学教师共同组成编写委员会，编写了这套数学实验教科书．这里特别要感谢北京师范大学数学科学学院领导对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持，同时还要感谢所有对本套教科书提出修改意见，提供过帮助与支持的专家、学者和教师，以及社会各界朋友．

本册教科书是编委会全体成员集体智慧的成果．除已列出的主要编写者和责任编辑外，参加本册教科书讨论的还有：刘绍学、钱珮玲、范永利等．

我们还要感谢使用本套教材的实验区的师生们．希望你们在使用本套教材的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意．让我们携起手来，共同完成教材建设工作．我们的联系方式如下：

电话：(010) 58758317

E-mail：jcfk@pep. com. cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心