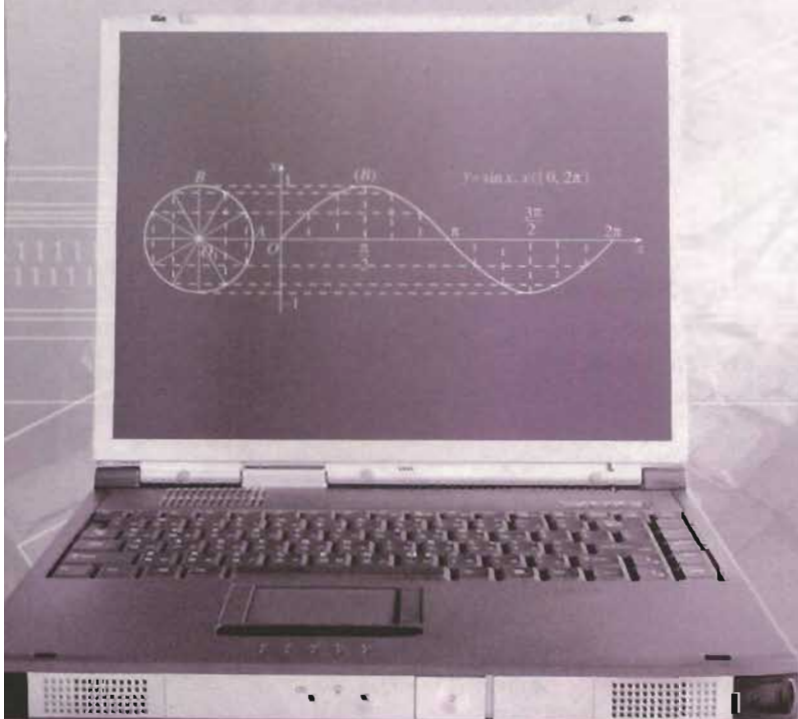


普通高中课程标准实验教科书

数学 4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A 版

普通高中课程标准实验教科书 数学4 必修 A版

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

出版发行 人民教育出版社

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编:100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>

经 销 全国新华书店

印 刷 大厂益利印刷有限公司

版 次 2007年2月第2版

印 次 2019年8月第28次印刷

开 本 890毫米×1240毫米 1/16

印 张 10

字 数 218千字

书 号 ISBN 978-7-107-20334-3

定 价 8.95元

价格依据文件号:京发改规〔2016〕13号

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或盗用本产品任何部分·违者必究

如发现内容质量问题,请登录中小学教材意见反馈平台: jcyjfk.pep.com.cn

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本社联系。电话:400-810-5788

绿色印刷 保护环境 爱护健康

亲爱的同学们:

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制,在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起,北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准(HJ2503-2011)《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分:平版印刷》,绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料,生产过程注重节能减排,印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来,支持绿色印刷,选择绿色印刷产品,共同关爱环境,一起健康成长!

北京市绿色印刷工程

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

本册主编：章建跃

主要编者：章建跃 任子朝 张劲松 蒋佩锦

责任编辑：章建跃 刘长明

美术编辑：王俊宏 王 艾

封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友。

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流。

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识。

数学是有用的。 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用。实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场。数学就在我们身边，她是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具。

学数学能提高能力。 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论。实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处。这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要。

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识。

数学是自然的。 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的。如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味。这将有助于大家的学习。

数学是清楚的。 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊。我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了。

在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法。

学数学要摸索自己的学习方法。 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法。做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性。要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习。在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”。类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”。

学数学趁年轻。 同学们，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期。这个时期下点功夫学数学，将会终生受益。我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长。你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见。预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中。

本 册 导 引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书。

本书是高中数学必修课程5个模块中的一个，包括三角函数、平面向量与三角恒等变换等三章内容。三角函数是一类基本的、重要的函数，在数学、其他科学以及生产实践中都有广泛的应用，三角函数的学习是对函数概念的深化；平面向量有着极其丰富的实际背景，是近代数学中重要和基本的概念之一，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具；三角恒等变换在数学中有一定的应用，对发展我们的推理能力和运算能力都有好处。

在数学1中，同学们学习了函数的一些基本概念，并学了指函数、对数函数、幂函数等具体函数，与这些函数比较，三角函数是刻画现实世界中存在的那些具有周期性变化现象的数学模型。在本章中，同学们将通过实例，学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决具有周期变化规律的问题中的作用。

从解析几何的学习中，同学们可以感受到代数方法（数及其运算）在研究几何问题中的作用和有效性，通过本章的学习可以发现，向量方法（向量及其运算）是研究几何的另一个好工具。在本章中，同学们将在了解向量的实际背景的基础上，学习平面向量及其运算的一些基本知识，用向量的语言和方法来表述和解决数学、物理中的一些问题，从中可以看到向量这一工具的强大力量。

在过去的学习中，同学们曾经接触过大量“只变其形不变其质”的代数变换，这种变换是解决数学问题的重要手段。三角变换也是“只变其形不变其质”的，这种变换也是解决问题所必需的。在本章中，同学们将运用向量的方法推导基本的三角恒等变换公式，由此出发导出其他的三角恒等变换公式，并运用这些公式进行简单的恒等变换。

学习始于疑问。在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动中，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的从具体到抽象、从特殊到一般的抽象概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础。

学而不思则罔。只有通过自己的独立思考，并掌握科学的思维方法才能真正学会数学。在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是蕴涵在数学知识中的数学思想方法，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使同学们学会数学思考与推理，不断提高数学思维能力。

学习的目的在于应用。在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念的理解，认识数学知识与实际的联系，并

学会用数学知识和方法解决一些实际问题。另外，我们还开辟了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为同学们提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究。

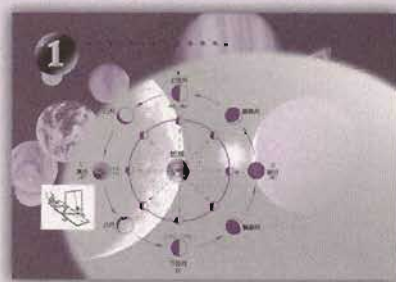
祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、用数学解决问题的能力等方面都有较大提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识。

本书部分数学符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\sin^2 x$	$\sin x$ 的平方
a	向量 a
$\overrightarrow{AB}$	向量 $\overrightarrow{AB}$
$ a $	向量 a 的模 (或长度)
$ \overrightarrow{AB} $	向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 (或长度)
0	零向量
i, j	平面直角坐标系中 x 轴, y 轴方向的单位向量
$a // b$	向量 a 与向量 b 平行 (共线)
$a \perp b$	向量 a 与向量 b 垂直
$a + b$	向量 a 与 b 的和
$a - b$	向量 a 与 b 的差
λa	实数 λ 与向量 a 的积
$a \cdot b$	向量 a 与 b 的数量积

目 录

第一章 三角函数	1
1.1 任意角和弧度制	2
1.2 任意角的三角函数	11
阅读与思考 三角学与天文学	17
1.3 三角函数的诱导公式	23
1.4 三角函数的图象与性质	30
探究与发现 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及	
函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期	36
探究与发现 利用单位圆中的三角函数线研究	
正弦函数、余弦函数的性质	41
信息技术应用 利用正切线画函数	
$y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象	48
1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	49
阅读与思考 振幅、周期、频率、相位	56
1.6 三角函数模型的简单应用	60



小结	67
复习参考题	69

第二章 平面向量 73

2.1 平面向量的实际背景及基本概念	74
阅读与思考 向量及向量符号的由来	78
2.2 平面向量的线性运算	80
2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	93
2.4 平面向量的数量积	103
2.5 平面向量应用举例	109
阅读与思考 向量的运算(运算律)与图形 性质	114
小结	116
复习参考题	118

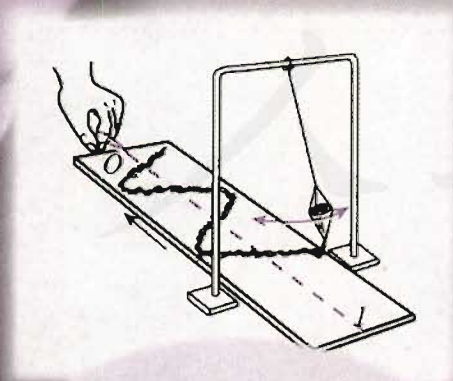
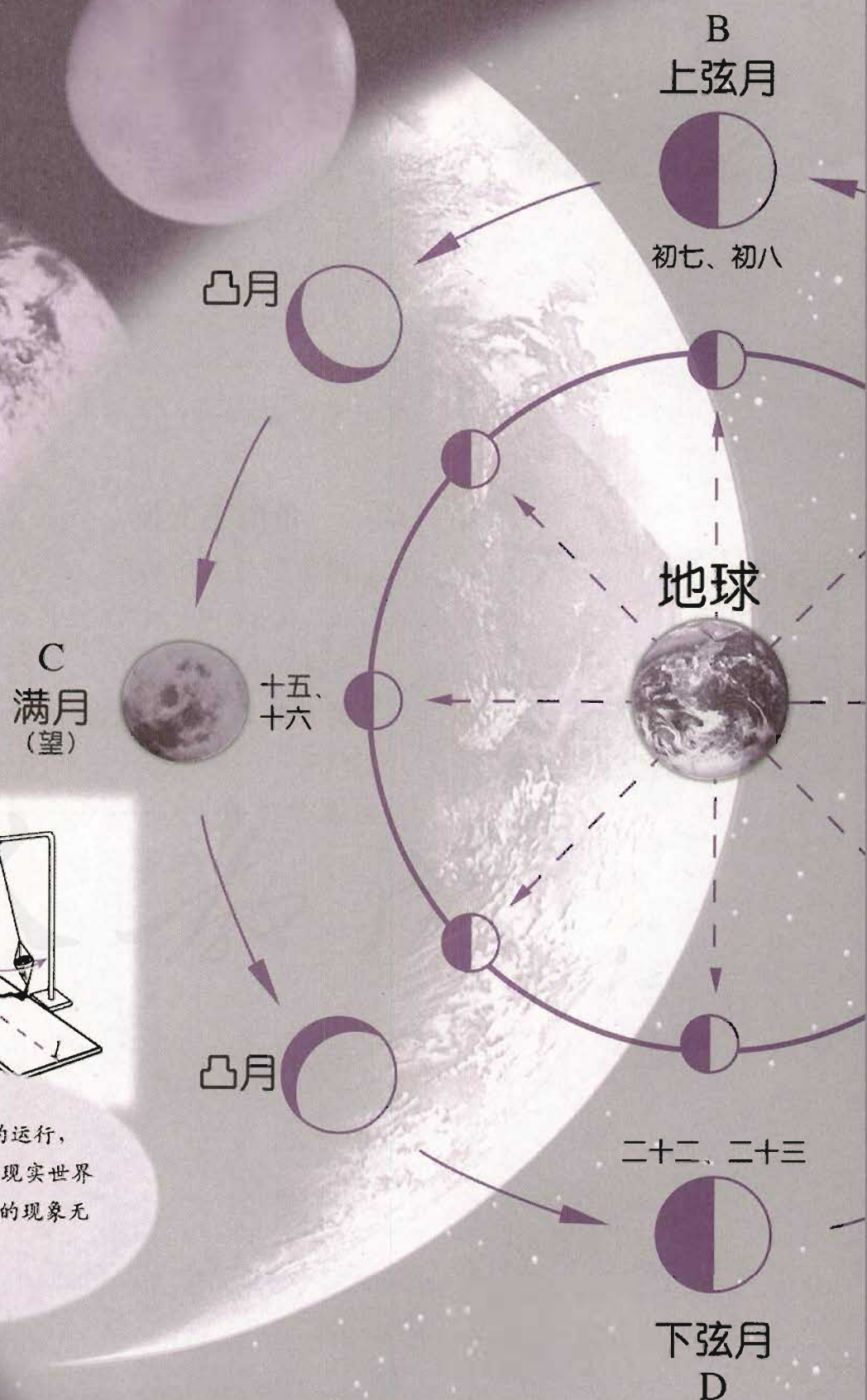


第三章 三角恒等变换 123

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	124
信息技术应用 利用信息技术制作 三角函数表	136
3.2 简单的三角恒等变换	139
小结	145
复习参考题	146



1



大到宇宙天体的运行，
小到质点的运动，现实世界
中具有周期性变化的现象无
处不在。

第一章

三角函数

1.1

任意角和弧度制

1.2

任意角的三角函数

1.3

三角函数的诱导公式

1.4

三角函数的图象与性质

1.5

函数 $y=A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

1.6

三角函数模型的简单应用

蛾眉月

初一

A
新月
(朔)

蛾眉月

现实世界中的许多运动、变化都有着循环往复、周而复始的现象，这种变化规律称为周期性。例如：地球自转引起的昼夜交替变化和公转引起的四季交替变化；月亮圆缺变化的周期性，即朔—上弦—望—下弦—朔；潮汐变化的周期性，即海水在月球和太阳引力作用下发生的周期性涨落现象；物体做匀速圆周运动时位置变化的周期性；做简谐运动的物体的位移变化的周期性；交变电流变化的周期性；等等。如何用数学的方法来刻画这种变化规律呢？

我们知道，函数是刻画客观世界变化规律的数学模型。在数学1中，我们学习了指数函数、对数函数等，知道这些函数可以用来刻画现实问题中某些类型的变化规律。那么，在数学中又如何刻画客观世界中的周期性变化规律呢？本章要学习的三角函数就是刻画这种变化规律的数学模型。

三角函数到底是一种怎样的函数？它具有哪些特有的性质？在解决具有周期性变化规律的问题中到底能发挥哪些作用？下面我们就来研究这些问题。

CHAPTER 1

1.1

任意角和弧度制

1.1.1 任意角



你的手表慢了5分钟，你是怎样将它校准的？假如你的手表快了1.25小时，你应当如何将它校准？当时间校准后，分针旋转了多少度？

我们知道，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形。如图 1.1-1，一条射线的端点是 O ，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB ，形成一个角 α ，射线 OA 、 OB 分别是角 α 的始边和终边。

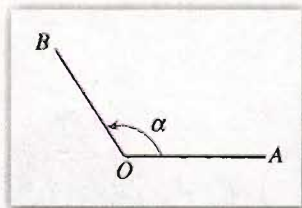


图 1.1-1

过去我们研究过 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围的角，但现实中还有其他角。例如，体操中有“转体 720° ”（即“转体 2 周”），“转体 1080° ”（即“转体 3 周”）这样的动作名称，而旋转的方向也有顺时针与逆时针的不同；又如，图 1.1-2 是两个齿轮旋转的示意图，被动轮随着主动轮的旋转而旋转，而且被动轮与主动轮有相反的旋转方向。这样， OA 绕 O 旋转所成的角与 $O'B$ 绕 O' 旋转所成的角就会有不同的方向。因此，要准确地描述这些现象，不仅要知道角形成的结果，而且要知道角形成的过程，即必须既要知道旋转量，又要知道旋转方向。这就需要对角的概念进行推广。

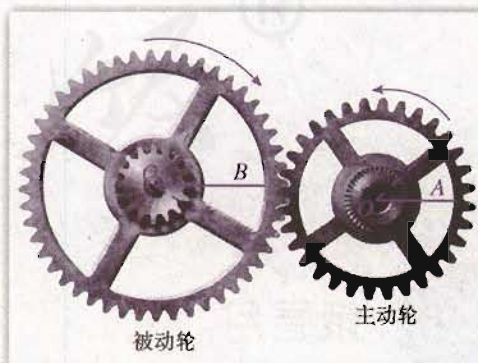


图 1.1-2

我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角** (positive angle)，按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角** (negative angle)，如果一条射线没有作任何旋转，我们称它

形成了一个零角 (zero angle). 这样, 零角的始边与终边重合. 如果 α 是零角, 那么 $\alpha=0^\circ$.

图 1.1-3(1) 中的角是一个正角, 它等于 750° ; 图 1.1-3(2) 中, 正角 $\alpha=210^\circ$, 负角 $\beta=-150^\circ$, $\gamma=-660^\circ$; 正常情况下, 如果以零时为起始位置, 那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角.

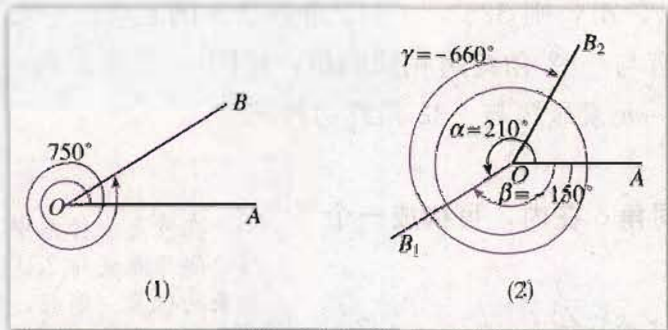


图 1.1-3

这样, 我们就把角的概念推广到了任意角 (any angle), 包括正角、负角和零角.

今后我们常在直角坐标系内讨论角. 为了讨论问题的方便, 我们使角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么, 角的终边在第几象限, 我们就说这个角是第几象限角 (quadrant angle). 例如, 图 1.1-4 中的 30° 角、 -120° 角分别是第一象限角和第三象限角. 如果角的终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何一个象限.

你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗?

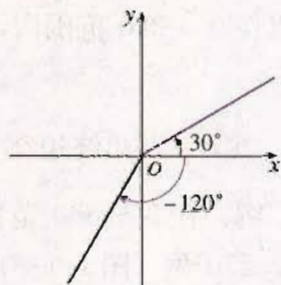


图 1.1-4

探究

将角按照上述方法放在直角坐标系中后, 给定一个角, 就有唯一的一条终边与之对应. 反之, 对于直角坐标系内任意一条射线 OB (如图 1.1-5), 以它为终边的角是否唯一? 如果不唯一, 那么终边相同的角有什么关系?

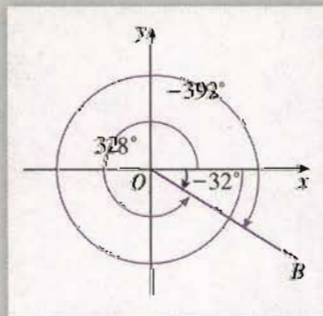


图 1.1-5

手表快了 1.25 小时, 只需将分针旋转 -3870° (或 450°) 就可以将它校准.



不难发现,在图 1.1-5 中,如果 -32° 的终边是 OB ,那么 $328^\circ, -392^\circ, \dots$ 角的终边都是 OB ,并且与 -32° 角终边相同的这些角都可以表示成 -32° 的角与 k 个 ($k \in \mathbf{Z}$) 周角的和,如

$$328^\circ = -32^\circ + 360^\circ \text{ (这里 } k = \underline{\quad} \text{),}$$

$$-392^\circ = -32^\circ - 360^\circ \text{ (这里 } k = \underline{\quad} \text{).}$$

设 $S = \{\beta | \beta = -32^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $328^\circ, -392^\circ$ 角都是 S 的元素, -32° 角也是 S 的元素 (此时 $k = \underline{\quad}$). 因此,所有与 -32° 角终边相同的角,连同 -32° 角在内,都是集合 S 的元素;反过来,集合 S 的任一元素显然与 -32° 角终边相同.

一般地,我们有:

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

在直角坐标系中,角的终边绕原点旋转 360° 后回到原来的位置. 因此,在直角坐标系中讨论角可以很好地表现角的“周而复始”的变化规律.

例 1 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ ① 范围内,找出与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角,并判定它是第几象限角.

解: $-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ$,

所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角是 $129^\circ 48'$,它是第二象限角.

例 2 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,终边在 y 轴上的角有两个,即 $90^\circ, 270^\circ$ 角 (图 1.1-6). 因此,所有与 90° 角终边相同的角构成集合

$$S_1 = \{\beta | \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

而所有与 270° 角终边相同的角构成集合

$$S_2 = \{\beta | \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

于是,终边在 y 轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &\quad \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &\quad \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

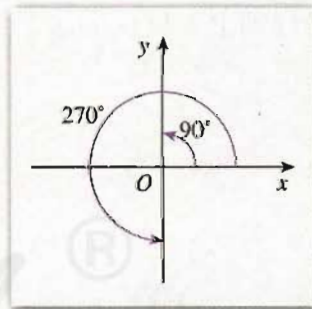


图 1.1-6

① $0^\circ \sim 360^\circ$ 是指 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

例 3 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合 S , 并把 S 中适合不等式 $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$ 的元素 β 写出来.

解: 如图 1.1-7, 在直角坐标系中画出直线 $y=x$, 可以发现它与 x 轴的夹角是 45° , 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 终边在直线 $y=x$ 上的角有两个: $45^\circ, 225^\circ$. 因此, 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合

$$S = \{\beta | \beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\beta | \beta = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

S 中适合 $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$ 的元素是

$$45^\circ - 2 \times 180^\circ = -315^\circ,$$

$$45^\circ - 1 \times 180^\circ = -135^\circ,$$

$$45^\circ + 0 \times 180^\circ = 45^\circ,$$

$$45^\circ + 1 \times 180^\circ = 225^\circ,$$

$$45^\circ + 2 \times 180^\circ = 405^\circ,$$

$$45^\circ + 3 \times 180^\circ = 585^\circ.$$

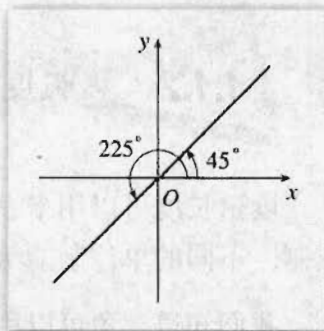


图 1.1-7

练习

- (口答) 锐角是第几象限角? 第一象限角一定是锐角吗? 再分别就直角、钝角来回答这两个问题.
- (口答) 今天是星期三, 那么 $7k (k \in \mathbb{Z})$ 天后的一天是星期几? $7k (k \in \mathbb{Z})$ 天前的一天是星期几? 100 天后的一天是星期几?
- 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 作出下列各角, 并指出它们是第几象限角:
 - 420° ;
 - -75° ;
 - 855° ;
 - -510° .
- 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是第几象限角:
 - $-54^\circ 18'$;
 - $395^\circ 8'$;
 - $-1\ 190^\circ 30'$.
- 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并把集合中适合不等式 $-720^\circ \leq \beta < 360^\circ$ 的元素 β 写出来:
 - $1\ 303^\circ 18'$;
 - -225° .

1.1.2 弧度制

度量长度可以用米、英尺、码等不同的单位制，度量重量可以用千克、磅等不同的单位制，不同的单位制能给解决问题带来方便，角的度量是否也能用不同的单位制呢？

我们知道，角可以用度为单位进行度量，1度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$ ，这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制 (degree measure)，为了使用方便，数学上还采用另一种度量角的单位制——弧度制 (radian measure)：

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度(radian)的角，用符号 rad 表示，读作弧度。如图 1.1-8，圆 O 的半径为 1， $\widehat{AB}$ 的长等于 1， $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角。

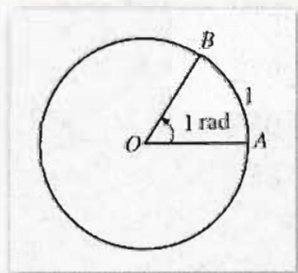


图 1.1-8

可以证明，一定大小的圆心角 α 所对应的弧长与半径的比值是唯一确定的，与半径大小无关。

探究

如图 1.1-9，半径为 r 的圆的圆心与原点重合，角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，交圆于点 A ，终边与圆交于点 B 。请在下列表格中填空，并思考：如果一个半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长是 l ，那么 α 的弧度数是多少？既然角度制、弧度制都是角的度量制，那么它们之间如何换算？

表 1.1-1

$\widehat{AB}$ 的长	OB 旋转的方向	$\angle AOB$ 的弧度数	$\angle AOB$ 的度数
πr	逆时针方向		
$2\pi r$	逆时针方向		
r		1	
$2r$		-2	
		$-\pi$	
		0	
			180°
			360°

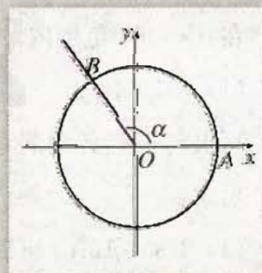


图 1.1-9

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0。

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 那么, 角 α 的弧度数的绝对值是

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

这里, α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

用角度制和弧度制来度量零角, 单位不同, 但量数相同 (都是 0); 用角度制和弧度制度量任一非零角, 单位不同, 量数也不同. 因为周角的弧度数是 2π , 而在角度制下的度数是 360, 所以

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

反过来有:

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

一般地, 我们只需根据

$180^\circ = \pi \text{ rad}$	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$
	$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$

就可以进行弧度与角度的换算了.

例 1 按照下列要求, 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度:

(1) 精确值; (2) 精确到 0.001 的近似值.

解: (1) 因为 $67^\circ 30' = \left(\frac{135}{2}\right)^\circ$, 所以

$$67^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \times \frac{135}{2} = \frac{3}{8}\pi \text{ rad}.$$

(2) 利用计算器有

MODE MODE 2

67 **° ' "** 30 **° ' "** **SHIFT DRG 1 =** 1.178097245.

因此, $67^\circ 30' \approx 1.178 \text{ rad}$.

例 2 将 3.14 rad 换算成角度 (用度数表示, 精确到 0.001).

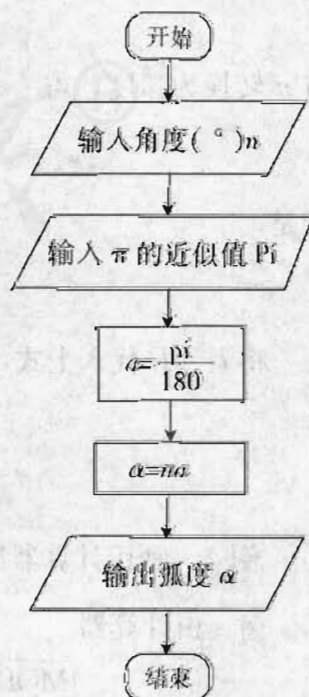
解: 利用计算器

MODE MODE 1

3.14 **SHIFT DRG 2 =** 179.9087477.

6 世纪, 印度人在制作正弦表时, 曾用同一单位度量半径和圆周, 孕育着最早的弧度制概念. 欧拉是明确提出弧度制思想的数学家. 1748 年, 在他的一部划时代著作《无穷小分析概论》中, 提出把圆的半径作为弧长的度量单位, 使一个圆周角等于 2π 弧度, 1 弧度等于周角的 $\frac{1}{2\pi}$. 这一思想将线段与弧的度量统一起来, 大大简化了三角公式及计算.

利用下列算法可以把角度换算为弧度, 你能在计算机上实现一下吗?



因此, $3.14 \text{ rad} \approx 179.909^\circ$.

今后用弧度制表示角时,“弧度”二字或“rad”通常略去不写,而只写该角所对应的弧度数.例如,角 $\alpha=2$ 就表示 α 是 2 rad 的角, $\sin \frac{\pi}{3}$ 就表示 $\frac{\pi}{3}$ rad 的角的正弦,即

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

填写下列特殊角的度数与弧度数的对应表:

度	0°	30°	45°			120°	135°	150°			360°
弧度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3\pi}{2}$	

角的概念推广后,在弧度制下,角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应的关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应(图 1.1-10).

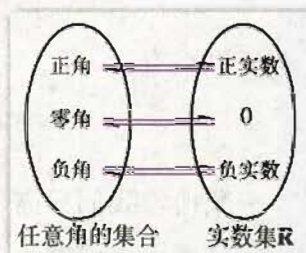


图 1.1-10

例 3 利用弧度制证明下列关于扇形的公式:

$$(1) l = \alpha R; \quad (2) S = \frac{1}{2} \alpha R^2; \quad (3) S = \frac{1}{2} l R.$$

其中 R 是半径, l 是弧长, $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$ 为圆心角, S 是扇形的面积.

证明: 由公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 立即可得

$$l = \alpha R.$$

下面证明 (2) (3). 由于半径为 R , 圆心角为 n° 的扇形的弧长公式和面积公式分别是:

$$l = \frac{n\pi R}{180}, \quad S = \frac{n\pi R^2}{360},$$

将 n° 转换为弧度, 得

$$\alpha = \frac{n\pi}{180},$$

于是,

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

将 $l = \alpha R$ 代入上式, 即得

$$S = \frac{1}{2} l R.$$

由例 3 看出, 采用弧度制时, 弧长公式和扇形面积公式简单了. 这正是引入弧度制的原因之一.

例 4 利用计算器比较 $\sin 1.5$ 和 $\sin 85^\circ$ 的大小.

解: 由计算器

MODE MODE 2

$$\sin 1.5 = 0.997494986.$$

$$\text{MODE} \text{ MODE } 1$$

$$\sin 85^\circ = 0.996194698.$$

所以

$$\sin 1.5 > \sin 85^\circ.$$

练习

1. 把下列角度化成弧度:

$$(1) 22^\circ 30'; \quad (2) -210^\circ; \quad (3) 1\,200^\circ.$$

2. 把下列弧度化成度:

$$(1) \frac{\pi}{12}; \quad (2) -\frac{4\pi}{3}; \quad (3) \frac{3\pi}{10}.$$

3. 用弧度表示:

(1) 终边在 x 轴上的角的集合;

(2) 终边在 y 轴上的角的集合.

4. 利用计算器比较下列各对值的大小 (精确到 0.001):

$$(1) \cos 0.75^\circ \text{ 和 } \cos 0.75; \quad (2) \tan 1.2^\circ \text{ 和 } \tan 1.2.$$

5. 分别用角度制、弧度制下的弧长公式, 计算半径为 1 m 的圆中, 60° 的圆心角所对的弧的长度 (可用计算器).

6. 已知半径为 120 mm 的圆上, 有一条弧的长是 144 mm, 求该弧所对的圆心角 (正角) 的弧度数.

习题 1.1

A 组

1. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是哪个象限的角:

$$(1) -265^\circ; \quad (2) -1\,000^\circ; \quad (3) -843^\circ 10'; \quad (4) 3\,900^\circ.$$

2. 写出终边在 x 轴上的角的集合.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并把集合中适合不等式 $-360^\circ \leq \beta < 360^\circ$ 的元素 β 写出来:

$$(1) 60^\circ; \quad (2) -75^\circ; \quad (3) -824^\circ 30'; \quad (4) 475^\circ;$$

$$(5) 90^\circ; \quad (6) 270^\circ; \quad (7) 180^\circ; \quad (8) 0^\circ.$$

4. 分别用角度和弧度写出第一、二、三、四象限角的集合.

5. 选择题:

(1) 已知 α 是锐角, 那么 2α 是 ().

(A) 第一象限角

(B) 第二象限角

(C) 小于 180° 的正角

(D) 第一或第二象限角

(2) 已知 α 是第一象限角, 那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ().

(A) 第一象限角

(B) 第二象限角

(C) 第一或第二象限角

(D) 第一或第三象限角

6. 一条弦的长等于半径, 这条弦所对的圆心角等于 1 弧度吗? 为什么?

7. 把下列各角度化成弧度:

(1) 36° ;(2) -150° ;(3) $1\,095^\circ$;(4) $1\,440^\circ$.

8. 把下列各弧度化成度:

(1) $-\frac{7}{6}\pi$;(2) $-\frac{10}{3}\pi$;

(3) 1.4;

(4) $\frac{2}{3}$.9. 要在半径 $OA=100$ cm 的圆形金属板上截取一块扇形板, 使其弧 AB 的长为 112 cm, 求圆心角 $\angle AOB$ 是多少度 (可用计算器, 精确到 1°).10. 已知弧长 50 cm 的弧所对圆心角为 200° , 求这条弧所在的圆的半径 (可用计算器, 精确到 1 cm).

B 组

1. 每人准备一把扇形的扇子, 然后与本小组其他同学的对比, 从中选出一把展开后看上去形状较为美观的扇子, 并用计算器算出它的面积 S_1 .(1) 假设这把扇子是从一个圆面中剪下的, 而剩余部分的面积为 S_2 , 求 S_1 与 S_2 的比值;(2) 要使 S_1 与 S_2 的比值为 0.618, 则扇子的圆心角应为几度 (精确到 10°)?

2. (1) 时间经过 4 h (时), 时针、分针各转了多少度? 各等于多少弧度?

(2) 有人说, 钟的时针和分针一天内会重合 24 次. 你认为这种说法是否正确? 请说明理由.

(提示: 从午夜零时算起, 假设分针走了 t min 会与时针重合, 一天内分针和时针会重合 n 次, 建立 t 关于 n 的函数关系式, 并画出其图象, 然后求出每次重合的时间.)3. 已知相互啮合的两个齿轮, 大轮有 48 齿, 小轮有 20 齿, 当大轮转动一周时, 小轮转动的角是 _____ 度, 即 _____ rad. 如果大轮的转速为 180 r/min (转/分), 小轮的半径为 10.5 cm, 那么小轮周上一点每 1 s 转过的弧长是 _____.

CHAPTER 1

1.2

任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数



我们已经学过锐角三角函数，知道它们都是以锐角为自变量，以比值为函数值的函数。你能用直角坐标系中角的终边上点的坐标来表示锐角三角函数吗？

如图 1.2-1，设锐角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，那么它的终边在第一象限。在 α 的终边上任取一点 $P(a, b)$ ，它与原点的距离 $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ 。过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，则线段 OM 的长度为 a ，线段 MP 的长度为 b 。

根据初中学过的三角函数定义，我们有

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{b}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{a}.$$

由相似三角形的知识，对于确定的角 α ，这三个比值不会随点 P 在 α 的终边上的位置的改变而改变，因此我们可以将点 P 取在使线段 OP 的长 $r = 1$ 的特殊位置上（如图 1.2-2）。这样就可以得到用直角坐标系内点的坐标表示的锐角三角函数：

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = b, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = a, \quad \tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{a}.$$

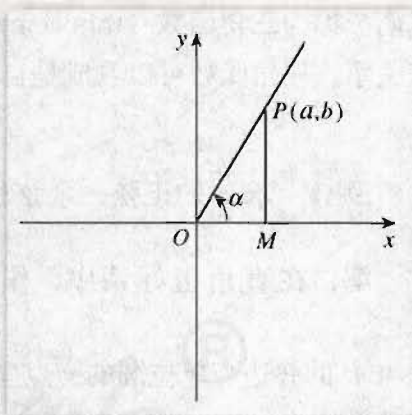


图 1.2-1

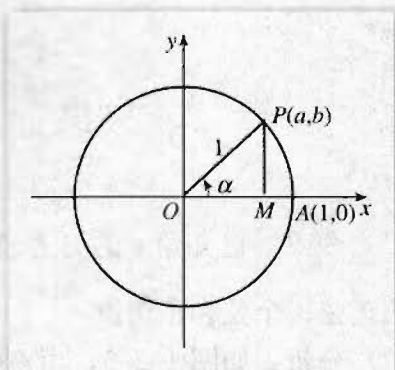


图 1.2-2

在引进弧度制时我们看到, 在半径为单位长的圆中, 角 α 的弧度数的绝对值等于圆心角 α 所对的弧长 (符号由角 α 的终边的旋转方向决定). 在直角坐标系中, 我们称以原点 O 为圆心, 以单位长度为半径的圆为单位圆 (unit circle). 这样, 上述 P 点就是 α 的终边与单位圆的交点. 锐角三角函数可以用单位圆上点的坐标表示.

同样的, 我们可以利用单位圆定义任意角的三角函数.

如图 1.2-3, 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 那么:

(1) y 叫做 α 的正弦 (sine), 记作 $\sin \alpha$, 即

$$\sin \alpha = y;$$

(2) x 叫做 α 的余弦 (cosine), 记作 $\cos \alpha$, 即

$$\cos \alpha = x;$$

(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切 (tangent), 记作 $\tan \alpha$, 即

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

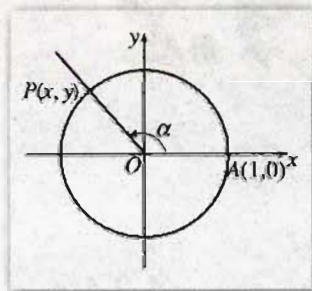


图 1.2-3

可以看出, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时, α 的终边在 y 轴上, 这时点 P 的横坐标 x 等于 0, 所以 $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 无意义. 除此之外, 对于确定的角 α , 上述三个值都是唯一确定的. 所以, 正弦、余弦、正切都是以角为自变量, 以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数, 我们将它们统称为三角函数 (trigonometric function). 由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系, 三角函数可以看成是自变量为实数的函数.

例 1 求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值.

解: 在直角坐标系中, 作 $\angle AOB = \frac{5\pi}{3}$ (如图 1.2-4). 易知

$\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. 所以,

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

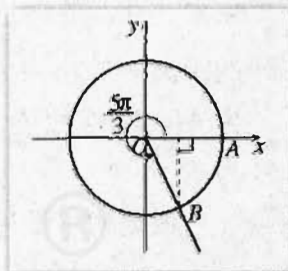


图 1.2-4

例 2 已知角 α 的终边经过点 $P_0(-3, -4)$, 求角 α 的正弦、余弦和正切值.

分析: 如图 1.2-5, 由 $\triangle OMP \sim \triangle OM_0P_0$, 可求出相应的三角函数值.

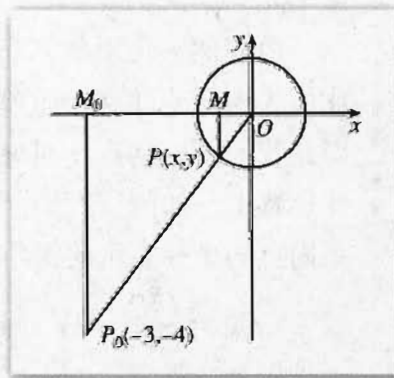


图 1.2-5

解：由已知可得：

$$|OP_0| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

如图 1.2-5，设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ 。

分别过点 P 、 P_0 作 x 轴的垂线 MP 、 M_0P_0 ，则

$$|M_0P_0| = 4, |MP| = -y,$$

$$|OM_0| = 3, |OM| = -x,$$

$$\triangle OMP \sim \triangle OM_0P_0,$$

于是，

$$\sin \alpha = y = \frac{y}{1} = \frac{-|MP|}{|OP|} = -\frac{|M_0P_0|}{|OP_0|} = -\frac{4}{5};$$

$$\cos \alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{-|OM|}{|OP|} = -\frac{|OM_0|}{|OP_0|} = -\frac{3}{5};$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$$

一般地，设角 α 终边上任意一点的坐标为 (x, y) ，它与原点的距离为 r ，则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

你能自己给出证明吗？

探究

请根据上述任意角的三角函数定义，先将正弦、余弦、正切函数在弧度制下的定义域填入下表 1.2-1，再将这三种函数的值在各象限的符号填入图 1.2-6 中的括号。

表 1.2-1

三角函数	定义域
$\sin \alpha$	
$\cos \alpha$	
$\tan \alpha$	

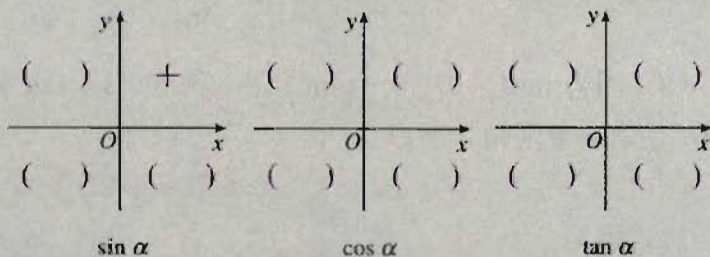


图 1.2-6

例 3 求证：当下列不等式组成立时，角 θ 为第三象限角。反之也对。

$$\begin{cases} \sin \theta < 0, & \text{①} \\ \tan \theta > 0. & \text{②} \end{cases}$$

证明：我们证明如果①②式都成立，那么 θ 为第三象限角。

因为①式 $\sin \theta < 0$ 成立，所以 θ 角的终边可能位于第三或第四象限，也可能与 y 轴的非正半轴重合；

又因为②式 $\tan \theta > 0$ 成立，所以 θ 角的终边可能位于第一或第三象限。

因为①②式都成立，所以 θ 角的终边只能位于第三象限。于是角 θ 为第三象限角。

反过来请同学们自己证明.

由三角函数的定义, 可以知道: 终边相同的角的同一三角函数的值相等. 由此得到一组公式 (公式一):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha+k \cdot 2\pi) &= \tan \alpha, \\ \text{其中 } k \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

由公式一可知, 三角函数值有“周而复始”的变化规律, 即角 α 的终边每绕原点旋转一周, 函数值将重复出现.



利用公式一, 可以把求任意角的三角函数值, 转化为求 0 到 2π (或 $0^\circ \sim 360^\circ$) 角的三角函数值.

例 4 确定下列三角函数值的符号, 然后用计算器验证:

(1) $\cos 250^\circ$; (2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\tan(-672^\circ)$; (4) $\tan 3\pi$.

解: (1) 因为 250° 是第三象限角, 所以

$$\cos 250^\circ < 0;$$

(2) 因为 $-\frac{\pi}{4}$ 是第四象限角, 所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0;$$

(3) 因为 $\tan(-672^\circ) = \tan(48^\circ - 2 \times 360^\circ) = \tan 48^\circ$, 而 48° 是第一象限角, 所以

$$\tan(-672^\circ) > 0;$$

(4) 因为

$$\tan 3\pi = \tan(\pi + 2\pi) = \tan \pi,$$

而 π 的终边在 x 轴上, 所以

$$\tan \pi = 0.$$

用计算器验证请同学们自己完成.

例 5 求下列三角函数值:

(1) $\sin 1480^\circ 10'$; (2) $\cos \frac{9\pi}{4}$; (3) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.

解: (1) $\sin 1480^\circ 10' = \sin(40^\circ 10' + 4 \times 360^\circ)$
 $= \sin 40^\circ 10' \approx 0.645$;

(2) $\cos \frac{9\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

可以直接利用计算器求三角函数的值. 用计算器求值时要注意角的度量制问题.

$$(3) \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练习

1. 利用三角函数的定义求 $\frac{7\pi}{6}$ 的三个三角函数值.

2. 已知角 θ 的终边过点 $P(-12, 5)$, 求角 θ 的三角函数值.

3. 填表:

角 α	0°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数					
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\tan \alpha$					

4. (口答) 设 α 是三角形的一个内角, 在 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\tan \frac{\alpha}{2}$ 中, 哪些有可能取负值?

5. 确定下列三角函数值的符号:

(1) $\sin 156^\circ$; (2) $\cos \frac{16}{5}\pi$; (3) $\cos(-450^\circ)$;

(4) $\tan\left(-\frac{17}{8}\pi\right)$; (5) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; (6) $\tan 556^\circ$.

6. 选择 ① $\sin \theta > 0$, ② $\sin \theta < 0$, ③ $\cos \theta > 0$, ④ $\cos \theta < 0$, ⑤ $\tan \theta > 0$ 与 ⑥ “ $\tan \theta < 0$ ” 中适当的关系式的序号填空:

(1) 当角 θ 为第一象限角时, _____, 反之也对;

(2) 当角 θ 为第二象限角时, _____, 反之也对;

(3) 当角 θ 为第三象限角时, _____, 反之也对;

(4) 当角 θ 为第四象限角时, _____, 反之也对.

7. 求下列三角函数值 (可用计算器):

(1) $\cos 1109^\circ$; (2) $\tan \frac{19\pi}{3}$;

(3) $\sin(-1050^\circ)$; (4) $\tan\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

下面我们再从图形角度认识一下三角函数.

如图 1.2-7, 角 α 的终边与单位圆交于点 P . 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M . 根据三角函数定义, 我们有:

$$|MP| = |y| = |\sin \alpha|; |OM| = |x| = |\cos \alpha|.$$

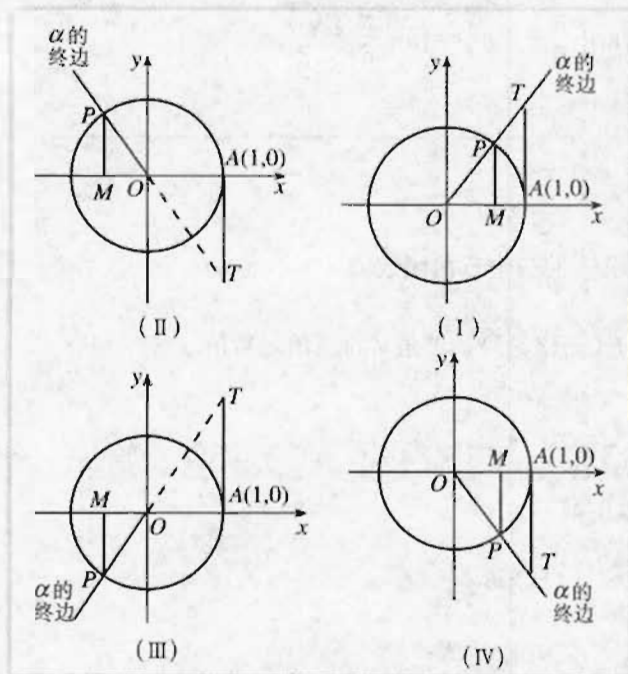


图 1.2-7



(1) 为了去掉上述等式中的绝对值符号, 能否给线段 OM 、 MP 规定一个适当的方向, 使它们的取值与点 P 的坐标一致?

(2) 你能借助单位圆, 找到一条如 OM 、 MP 一样的线段来表示角 α 的正切吗?

我们知道, 直角坐标系内点的坐标与坐标轴的方向有关. 因此一个自然的想法是以坐标轴的方向来规定线段 OM 、 MP 的方向, 以使它们的取值与 P 点的坐标联系起来.

当角 α 的终边不在坐标轴上时, 以 O 为始点、 M 为终点, 规定:

当线段 OM 与 x 轴同向时, OM 的方向为正向, 且有正值 x ; 当线段 OM 与 x 轴反向时, OM 的方向为负向, 且有负值 x . 其中 x 为 P 点的横坐标. 这样, 无论哪一种情况都有

$$OM = x = \cos \alpha.$$

同理, 当角 α 的终边不在坐标轴上时, 以 M 为始点、 P 为终点, 规定:

当线段 MP 与 y 轴同向时, MP 的方向为正向, 且有正值 y ; 当线段 MP 与 y 轴反向时, MP 的方向为负向, 且有负值 y . 其中 y 为 P 点的纵坐标. 这样, 无论哪一种情况都有

$$MP = y = \sin \alpha.$$

像 OM 、 MP 这种被看作带有方向的线段, 叫做有向线段 (directed line segment).

那么, 如何用有向线段来表示角 α 的正切呢?

如图 1.2-7, 过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线, 这条切线必然平行于 y 轴 (为什么?), 设它与 α 的终边 (当 α 为第一、四象限角时) 或其反向延长线 (当 α 为第二、三象限角时) 相交于点 T . 根据正切函数的定义与相似三角形的知识, 借助有向线段 OA 、 AT , 我们有

$$\tan \alpha = AT = \frac{y}{x} \text{ ①}$$

我们把这三条与单位圆有关的有向线段 MP 、 OM 、 AT , 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线, 统称为三角函数线.

当角 α 的终边与 x 轴重合时, 正弦线、正切线分别变成一个点, 此时角 α 的正弦值和正切值都为 0; 当角 α 的终边与 y 轴重合时, 余弦线变成一个点, 正切线不存在, 此时角 α 的正切值不存在.

① 你能自己证明一下这个等式吗?

单位圆中的三角函数线是数形结合的有效工具, 借助它, 不但可以画出准确的三角函数图象, 还可以讨论三角函数的性质.

练习

1. 你能从单位圆中的三角函数线出发得出三角函数的哪些性质?
2. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线:

(1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{5\pi}{6}$; (3) $-\frac{2\pi}{3}$; (4) $-\frac{13\pi}{6}$.

3. 作一个以 5 cm 为单位长度的圆, 然后分别作出 225° 、 330° 角的正弦线、余弦线、正切线, 量出它们的长度, 从而写出这些角的正弦值、余弦值、正切值.
4. 你认为三角函数线对认识三角函数概念有哪些作用?



三角学与天文学

三角学的起源、发展与天文学密不可分, 它是天文观察结果推算的一种方法. 在 1450 年以前的三角学主要是球面三角, 这不但是因为航海、历法推算以及天文观测等人类实践活动的需要, 而且也因为宇宙的奥秘对人类的巨大吸引力, 这种“量天的学问”确实太诱人了. 后来, 由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角.

在欧洲, 最早将三角学从天文学中独立出来的数学家是德国人雷格蒙塔努斯 (J. Regiomontanus, 1436—1476). 他在 1464 年完成的 5 卷本的著作《论各种三角形》, 是欧洲第一部独立于天文学的三角学著作, 这部著作首次对三角学做出了完整、独立的阐

述. 前2卷论述平面三角学, 后3卷讨论球面三角学. 前2卷中, 他采用印度人的正弦, 即弧的半弦, 明确使用了正弦函数, 讨论了一般三角形的正弦定理, 提出了求三角形边长的代数解法; 后3卷中, 给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理. 他的工作为三角学在平面与球面几何中的应用奠定了牢固基础, 对16世纪的数学家产生了极大影响, 也对哥白尼等一批天文学家产生了很大影响.

由于雷格蒙塔努斯仅仅采用正弦函数和余弦函数, 而且函数值也限定在正数范围内, 因而不能推出应有的三角公式, 导致计算的困难. 后来, 哥白尼的学生雷提库斯(G. J. Rheticus, 1514—1576) 将传统的弧与弦的关系改进为角的三角函数关系, 把三角函数定义为直角三角形的边长之比, 从而使平面三角学从球面三角学中独立出来. 他还采用了六个函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割), 制定了更为精确的正弦、正切、正割表. 这些工作都极大推进了三角学的发展. 实际上, 由于天文学研究的需要, 制定更加精确的三角函数表一直是数学家奋斗的目标, 这不但大大推动了三角学的发展, 而且在某种程度上还导致了对数的发明.

法国数学家韦达(F. Vieta, 1540—1603) 所做的平面三角与球面三角系统化工作, 使得三角学得到进一步发展. 他总结了前人的三角学研究成果, 将解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起, 还补充了自己发现的新公式, 如正切公式、和差化积公式等. 他将解斜三角形的问题转化为解直角三角形的问题. 对球面直角三角形, 他给出了计算的方法和一套完整的公式及其记忆法则, 并将这套公式表示成了代数形式, 这是非常重要的工作.

16世纪, 三角学从天文学中分离出来, 成为数学的一个独立分支. 后来, 在微积分、物理学的应用(如对振动、声音传播等的研究)中, 三角学又找到了新的用武之地.

1.2.2 同角三角函数的基本关系

探究



三角函数是以单位圆上点的坐标来定义的. 你能从圆的几何性质出发, 讨论一下同一个角的不同三角函数之间的关系吗?

如图1.2-8, 以正弦线 MP 、余弦线 OM 和半径 OP 三者的长构成直角三角形. 而且 $OP=1$. 由勾股定理有

$$OM^2 + MP^2 = 1,$$

因此 $x^2 + y^2 = 1$, 即

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

显然, 当 α 的终边与坐标轴重合时, 这个公式也成立.

根据三角函数的定义, 当 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \text{ ①}.$$

这就是说, 同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于 1, 商等于角 α 的正切.

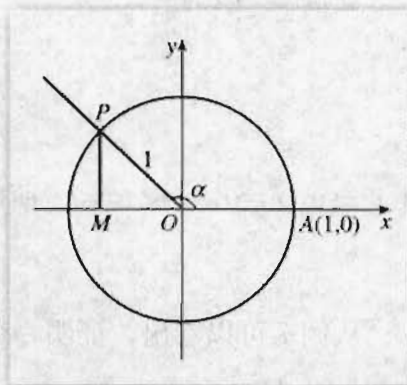


图 1.2-8

例 6 已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

解: 因为 $\sin \alpha < 0$, $\sin \alpha \neq -1$, 所以 α 是第三或第四象限角.

由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 得

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

如果 α 是第三象限角, 那么 $\cos \alpha < 0$. 于是

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

从而

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

如果 α 是第四象限角, 那么

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

例 7 求证 $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.

证法 1: 由 $\cos x \neq 0$, 知 $\sin x \neq -1$, 所以 $1 + \sin x \neq 0$, 于是

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \text{右边}. \end{aligned}$$

所以原式成立.

① 今后, 除特殊注明外, 我们假定三角恒等式是在使两边都有意义的情况下的恒等式.

证法 2: 因为

$$\begin{aligned} & (1 - \sin x)(1 + \sin x) \\ &= 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \\ &= \cos x \cos x, \end{aligned}$$

且 $1 - \sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, 所以

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

从例 7 可以看出, 证明一个三角恒等式的方法多种多样, 你能总结一下吗?

练习

1. 已知 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, 且 α 为第三象限角, 求 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

2. 已知 $\tan \varphi = -\sqrt{3}$, 求 $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ 的值.

3. 已知 $\sin \theta = 0.35$, 求 $\cos \theta$, $\tan \theta$ 的值 (计算结果保留两个有效数字).

4. 化简:

(1) $\cos \theta \tan \theta$;

(2) $\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{1 - 2\sin^2 \alpha}$.

5. 求证:

(1) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;

(2) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

习题 1.2

A 组

1. 用定义法、公式一以及计算器等求下列角的三个三角函数值:

(1) $-\frac{17\pi}{3}$; (2) $\frac{21\pi}{4}$; (3) $-\frac{23\pi}{6}$; (4) 1500° .

2. 已知角 α 的终边上有一点 P 的坐标是 $(3a, 4a)$, 其中 $a \neq 0$, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

3. 计算:

(1) $6\sin(-90^\circ) + 3\sin 0^\circ - 8\sin 270^\circ + 12\cos 180^\circ$;

(2) $10\cos 270^\circ + 4\sin 0^\circ + 9\tan 0^\circ + 15\cos 360^\circ$;

(3) $2\cos \frac{\pi}{2} - \tan \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\tan^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{2}$;

(4) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{3\pi}{2} - \tan^2 \frac{\pi}{3}$.

4. 化简:

$$(1) a \sin 0^\circ + b \cos 90^\circ + c \tan 180^\circ;$$

$$(2) -p^2 \cos 180^\circ + q^2 \sin 90^\circ - 2pq \cos 0^\circ;$$

$$(3) a^2 \cos 2\pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2} + ab \cos \pi - ab \sin \frac{\pi}{2};$$

$$(4) m \tan 0 + n \cos \frac{1}{2}\pi - p \sin \pi - q \cos \frac{3}{2}\pi - r \sin 2\pi.$$

5. 根据下列条件求函数

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

的值:

$$(1) x = \frac{\pi}{4};$$

$$(2) x = \frac{3\pi}{4}.$$

6. 确定下列三角函数值的符号:

$$(1) \sin 186^\circ;$$

$$(2) \tan 505^\circ;$$

$$(3) \sin 7.6\pi;$$

$$(4) \tan\left(-\frac{23}{4}\pi\right);$$

$$(5) \cos 940^\circ;$$

$$(6) \cos\left(-\frac{59}{17}\pi\right).$$

7. 确定下列式子的符号:

$$(1) \tan 125^\circ \cdot \sin 273^\circ;$$

$$(2) \frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ};$$

$$(3) \sin \frac{5}{4}\pi \cdot \cos \frac{4}{5}\pi \cdot \tan \frac{11}{6}\pi; \quad (4) \frac{\cos \frac{5}{6}\pi \cdot \tan \frac{11}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi}.$$

8. 求下列三角函数值 (可用计算器):

$$(1) \sin\left(-\frac{67}{12}\pi\right);$$

$$(2) \tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right);$$

$$(3) \cos 398^\circ 13';$$

$$(4) \tan 766^\circ 15'.$$

9. 求证:

$$(1) \text{角 } \theta \text{ 为第二或第三象限角当且仅当 } \sin \theta \cdot \tan \theta < 0;$$

$$(2) \text{角 } \theta \text{ 为第三或第四象限角当且仅当 } \cos \theta \cdot \tan \theta < 0;$$

$$(3) \text{角 } \theta \text{ 为第一或第四象限角当且仅当 } \frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0;$$

$$(4) \text{角 } \theta \text{ 为第一或第三象限角当且仅当 } \sin \theta \cdot \cos \theta > 0.$$

10. (1) 已知 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 α 为第四象限角, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值;

(2) 已知 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第二象限角, 求 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 的值;

(3) 已知 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的值;

(4) 已知 $\cos \alpha = 0.68$, 求 $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 的值 (计算结果保留两个有效数字).

11. 已知 $\sin x = -\frac{1}{3}$, 求 $\cos x$, $\tan x$ 的值.

12. 已知 $\tan \alpha = \sqrt{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, 求 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值.

13. 求证:

(1) $\frac{1-2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x};$

(2) $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha;$

(3) $(\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta = 2 - 2\cos \beta;$

(4) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$

B 组

1. 化简 $(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha.$ 2. 化简 $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$, 其中 α 为第二象限角.3. 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值.4. 从本节的例 7 可以看出, $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ 就是 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 的一个变形. 你能利用同角三角函数的基本关系推导出更多的关系式吗?

CHAPTER 1

1.3

三角函数的诱导公式



我们利用单位圆定义了三角函数，而圆具有很好的对称性，能否利用圆的这种对称性来研究三角函数的性质呢？例如，能否从单位圆关于 x 轴、 y 轴、直线 $y=x$ 的轴对称性以及关于原点 O 的中心对称性等出发，获得一些三角函数的性质呢？



给定一个角 α 。

- (1) 角 $\pi-\alpha$ 、 $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边有什么关系？它们的三角函数之间有什么关系？
- (2) 角 $-\alpha$ 的终边与角 α 的终边有什么关系？它们的三角函数之间有什么关系？
- (3) 角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与 α 有什么关系？它们的三角函数之间有什么关系？

如图 1.3-1，不难发现：

- (1) $\pi+\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于原点对称；
 $\pi-\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称；
- (2) $-\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称；
- (3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称。

下面，我们结合三角函数的定义，由上述对称性来讨论这些角的三角函数的关系。

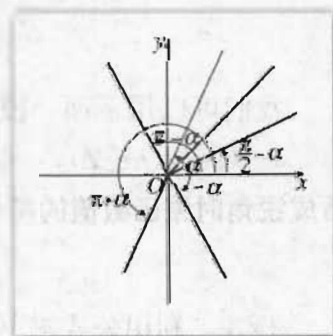


图 1.3-1

如图 1.3-2, 设任意角 α 的终边与单位圆的交点坐标为 $P_1(x, y)$. 由于角 $\pi + \alpha$ 的终边与角 α 的终边关于原点对称, 角 $\pi + \alpha$ 的终边与单位圆的交点 P_2 与点 P_1 关于原点 O 对称, 因此点 P_2 的坐标是 $(-x, -y)$. 由三角函数的定义得:

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x};$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -y, \quad \cos(\pi + \alpha) = -x, \quad \tan(\pi + \alpha) = \frac{y}{x}.$$

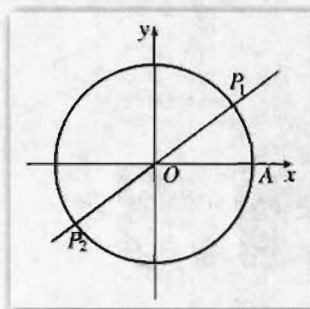


图 1.3-2

从而得

公式二

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha. \end{aligned}$$

同理, 我们有

公式三

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha. \end{aligned}$$

请同学们自己完成公式三、四的推导.

公式四

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha. \end{aligned}$$



你能用简洁的语言概括一下公式一~四吗? 它们的作用是什么?

我们可以用下面一段话来概括公式一~四:

$\alpha + k \cdot 2\pi (k \in \mathbb{Z})$, $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$ 的三角函数值, 等于 α 的同名函数值, 前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

例 1 利用公式求下列三角函数值:

- (1) $\cos 225^\circ$; (2) $\sin \frac{11\pi}{3}$;
 (3) $\sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$; (4) $\cos(-2\,040^\circ)$.

解: (1) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$$= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(2) \sin \frac{11\pi}{3} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} (3) \sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) &= -\sin \frac{16\pi}{3} \\ &= -\sin\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \cos(-2\,040^\circ) &= \cos 2\,040^\circ \\ &= \cos(6 \times 360^\circ - 120^\circ) \\ &= \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由例 1, 你对公式一~四的作用有什么进一步的认识? 你能自己归纳一下把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的步骤吗?

利用公式一~四把任意角的三角函数转化为锐角三角函数, 一般可按下面步骤进行:



事实上, 上述步骤体现了由未知转化为已知的化归思想.

例 2 化简

$$\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \sin(\alpha + 360^\circ)}{\sin(-\alpha - 180^\circ) \cdot \cos(-180^\circ - \alpha)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \sin(-\alpha - 180^\circ) &= \sin[-(180^\circ + \alpha)] \\ &= -\sin(180^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(-\sin \alpha) \\
 &= \sin \alpha, \\
 \cos(-180^\circ - \alpha) &= \cos[-(180^\circ + \alpha)] \\
 &= \cos(180^\circ + \alpha) \\
 &= -\cos \alpha,
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \frac{-\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)} = 1.$$

如图 1.3-3, 设任意角 α 的终边与单位圆的交点 P_1 的坐标为 (x, y) . 由于角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称, 角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的终边与单位圆的交点 P_2 与点 P_1 关于直线 $y=x$ 对称, 因此点 P_2 的坐标是 (y, x) . 于是我们有

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= x, & \sin \alpha &= y; \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= y, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= x.
 \end{aligned}$$

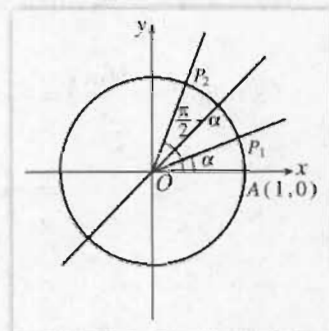


图 1.3-3

从而得

公式五

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

由于 $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, 由公式四及公式五可得

公式六

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha, \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha.
 \end{aligned}$$

公式五和公式六可以概括如下:

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 的正弦(余弦)函数值, 分别等于 α 的余弦(正弦)函数值, 前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

利用公式五或公式六, 可以实现正弦函数与余弦函数的相互转化.

公式一~六都叫做诱导公式(induction formula).

例 3 证明: (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$;

$$(2) \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin \alpha.$$

证明: (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$
 $=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha;$

(2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
 $=-\sin \alpha.$

例 4 化简

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

解: 原式

$$\begin{aligned} &= \frac{(-\sin \alpha)(-\cos \alpha)(-\sin \alpha)\cos\left[5\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos \alpha)\sin(\pi-\alpha)[- \sin(\pi+\alpha)]\sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]} \\ &= \frac{-\sin^2 \alpha \cos \alpha \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos \alpha)\sin \alpha [-(-\sin \alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \\ &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha. \end{aligned}$$

练习

1. 将下列三角函数转化为锐角三角函数, 并填在题中横线上:

(1) $\cos \frac{13}{9}\pi =$ _____;

(2) $\sin(1+\pi) =$ _____;

(3) $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) =$ _____;

(4) $\cos(-70^\circ 6') =$ _____.

2. 利用公式求下列三角函数值:

(1) $\cos(-420^\circ);$

(2) $\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right);$

(3) $\sin(-1300^\circ);$

(4) $\cos\left(-\frac{79}{6}\pi\right).$

3. 化简:

(1) $\sin(\alpha+180^\circ)\cos(-\alpha)\sin(-\alpha-180^\circ);$

(2) $\sin^3(-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)\tan(-\alpha-\pi).$

4. 填表:

α	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\tan \alpha$						

5. 将下列三角函数转化为锐角三角函数, 并填在题中横线上:

(1) $\tan \frac{3}{5}\pi =$ _____; (2) $\tan 100^\circ 21' =$ _____;

(3) $\tan \frac{31}{36}\pi =$ _____; (4) $\tan 324^\circ 32' =$ _____.

6. 用诱导公式求下列三角函数值 (可用计算器):

(1) $\cos \frac{65}{6}\pi$; (2) $\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)$; (3) $\cos(-1\ 182^\circ 13')$;

(4) $\sin 670^\circ 39'$; (5) $\tan\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$; (6) $\tan 580^\circ 21'$.

7. 化简:

(1) $\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \sin(\alpha - 2\pi) \cdot \cos(2\pi - \alpha)$;

(2) $\cos^2(-\alpha) - \frac{\tan(360^\circ + \alpha)}{\sin(-\alpha)}$.

习题 1.3

A 组

1. 将下列三角函数转化为锐角三角函数, 并填在题中横线上:

$$(1) \cos 210^\circ = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \sin 263^\circ 42' = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \cos\left(-\frac{11}{9}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \cos(-104^\circ 26') = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(7) \tan 632^\circ 24' = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(8) \tan \frac{17\pi}{6} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 用诱导公式求下列三角函数值:

$$(1) \cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right);$$

$$(2) \sin(-1574^\circ);$$

$$(3) \sin(-2160^\circ 52');$$

$$(4) \cos(-1751^\circ 36');$$

$$(5) \cos 1615^\circ 8';$$

$$(6) \sin\left(-\frac{26}{3}\pi\right).$$

3. 化简:

$$(1) \sin(-1071^\circ) \cdot \sin 99^\circ + \sin(-171^\circ) \cdot \sin(-261^\circ);$$

$$(2) 1 + \sin(\alpha - 2\pi) \cdot \sin(\pi + \alpha) - 2\cos^2(-\alpha).$$

4. 求证:

$$(1) \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$(2) \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$(3) \tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$$

B 组

1. 计算:

$$(1) \sin 420^\circ \cdot \cos 750^\circ + \sin(-330^\circ) \cdot \cos(-660^\circ);$$

$$(2) \tan 675^\circ + \tan 765^\circ - \tan(-330^\circ) + \tan(-690^\circ);$$

$$(3) \sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right).$$

2. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, 计算:

$$(1) \sin(5\pi - \alpha);$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right);$$

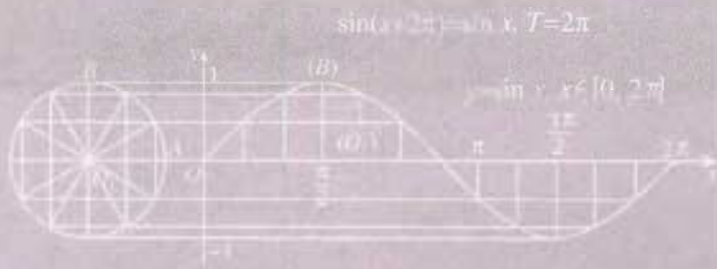
$$(3) \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$(4) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

CHAPTER 1

1.4

三角函数的图象与性质



1.4.1

正弦函数、余弦函数的图象

我们知道，实数集与角的集合之间可以建立一一对应关系，而一个确定的角又对应着唯一确定的正弦（或余弦）值。这样，任意给定一个实数 x ，有唯一确定的值 $\sin x$ （或 $\cos x$ ）与之对应。由这个对应法则所确定的函数 $y = \sin x$ （或 $y = \cos x$ ）叫做正弦函数（或余弦函数），其定义域是 $\mathbf{R}$ 。

遇到一个新的函数，非常自然的是画出它的图象，观察图象的形状，看看有什么特殊点，并借助图象研究它的性质，如：值域、单调性、奇偶性、最大值与最小值等。特别的，从前面的学习中我们已经看到，三角函数值具有“周而复始”的变化规律。下面我们就来研究正弦函数、余弦函数的图象与性质。

首先我们来看一下本章章头图表示的“简谐运动”实验。

将塑料瓶底部扎一个小孔做成一个漏斗，再挂在架子上，就做成了一个简谐振子（图 1.4-1）。在漏斗下方放一块纸板，板的中间画一条直线作为坐标系的横轴。把漏斗灌上细沙并拉离平衡位置，放手使它摆动，同时匀速拉动纸板。这样就可可在纸板上得到一条曲线，它就是简谐运动的图象。物理中把简谐运动的图象叫做“正弦曲线”或“余弦曲线”。它表示了漏斗对平衡位置的位移 s （纵坐标）随时间 t （横坐标）变化的情况。图 1.4-2 就是某个简谐运动的图象。

请同学们动手做一做这个实验。

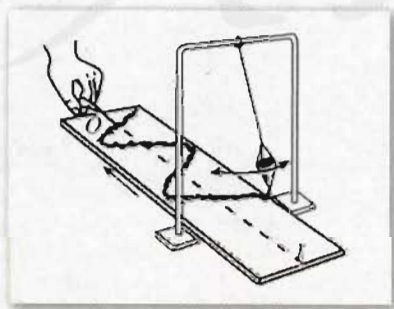


图 1.4-1

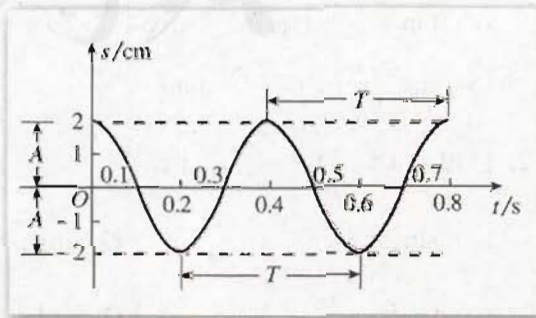


图 1.4-2

有了上述实验，你对正弦函数、余弦函数的图象是否有了一个直观的印象？下面我们利用正弦线画出比较精确的正弦函数图象。

如图 1.4-3, 在直角坐标系的 x 轴上取一点 O_1 , 以 O_1 为圆心, 单位长为半径作圆, 从 $\odot O_1$ 与 x 轴的交点 A 起, 把 $\odot O_1$ 分成 12 等份. 过 $\odot O_1$ 上各分点作 x 轴的垂线, 得到对应于 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ 等角的正弦线. 相应地, 再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段分成 12 等份. 把角 x 的正弦线向右平移, 使它的起点与 x 轴上的点 x 重合, 再把这些正弦线的终点用光滑的曲线连接起来, 就得到函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象.

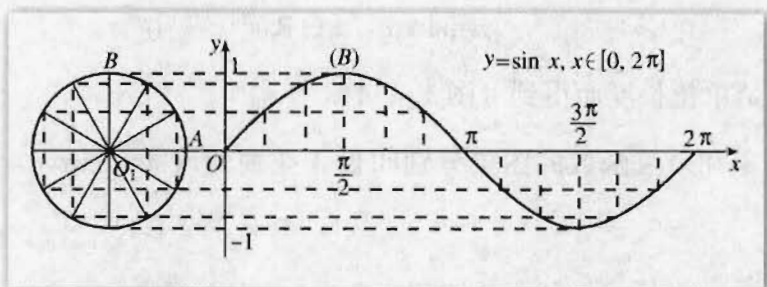


图 1.4-3

因为终边相同的角有相同的三角函数值, 所以函数

$$y = \sin x, x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 0$$

的图象, 与函数

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi)$$

的图象的形状完全一致. 于是我们只要将函数

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi)$$

的图象向左、向右平行移动 (每次 2π 个单位长度), 就可以得到正弦函数

$$y = \sin x, x \in \mathbb{R}$$

的图象 (图 1.4-4).

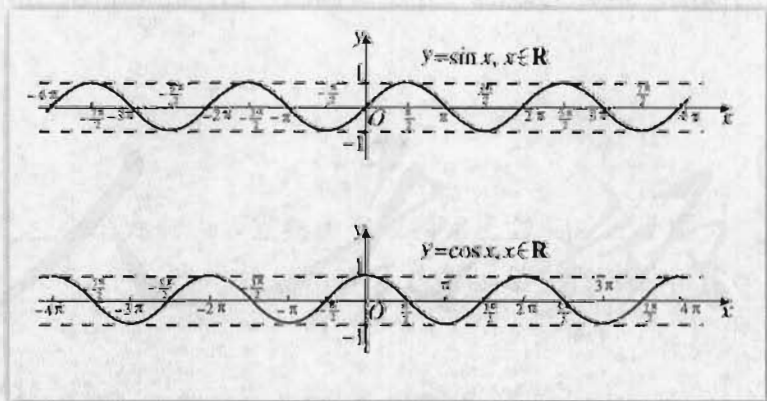


图 1.4-4



你能根据诱导公式, 以正弦函数的图象为基础, 通过适当的图形变换得到余弦函数的图象吗?

由诱导公式六我们有

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

而函数

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right), x \in \mathbf{R}$$

的图象可以通过将正弦函数

$$y = \sin x, x \in \mathbf{R}$$

的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度而得到(图1.4-4).

正弦函数的图象和余弦函数的图象分别叫做正弦曲线(sine curve)和余弦曲线(cosine curve).



在作出正弦函数的图象时,应抓住哪些关键点?

观察图1.4-3,在函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象上,起关键作用的点有以下五个:

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0).$$

事实上,描出这五个点后,函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象形状就基本上确定了.因此,在精确度要求不太高时,我们常常先找出这五个关键点,再用光滑的曲线将它们连接起来,就得到函数的简图.这种近似的“五点(画图)法”是非常实用的.



类似于正弦函数图象的五个关键点,你能找出余弦函数的五个关键点吗?请将它们的坐标填入下表,然后作出 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的简图.

x					
$\cos x$					

例1 画出下列函数的简图:

(1) $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$;

(2) $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$.

解: (1) 按五个关键点列表:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1 + \sin x$	1	2	1	0	1

描点并将它们用光滑的曲线连接起来 (图 1.4-5):

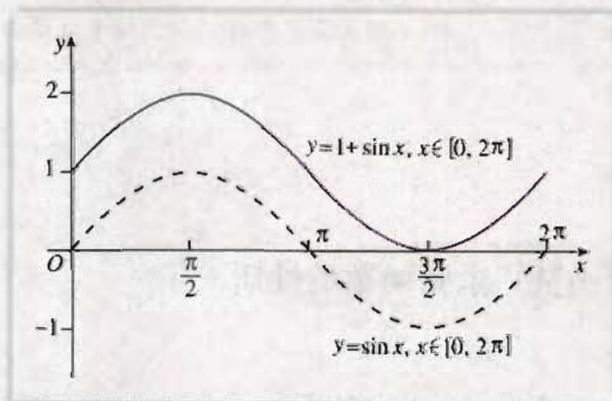


图 1.4-5

(2) 按五个关键点列表:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点并将它们用光滑的曲线连接起来 (图 1.4-6):

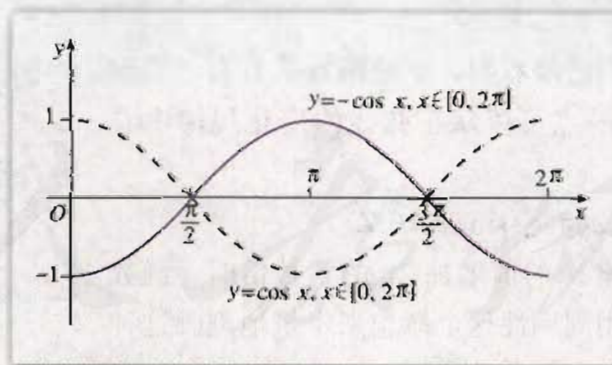


图 1.4-6



你能否从函数图象变换的角度出发, 利用函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象来得到 $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象? 同样的, 能否从函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 图象得到函数 $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象?

练习

1. 用多种方法在同一直角坐标系中, 画出函数

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi],$$

$$y = \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

的图象. 通过观察两条曲线, 说出它们的异同.

2. 想一想函数 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ 和 $y = \cos x$ 的图象, 并在同一直角坐标系中, 画出它们的草图.

1.4.2

正弦函数、余弦函数的性质

探究

根据正弦函数和余弦函数的图象, 你能说出它们具有哪些性质?

下面我们研究正弦函数、余弦函数的主要性质.

(1) 周期性

从前面的学习中我们已经看到, 正弦函数值具有“周而复始”的变化规律, 这一点可以从正弦线的变化规律中看出, 还可以从诱导公式

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x (k \in \mathbb{Z})$$

中得到反映, 即当自变量 x 的值增加 2π 的整数倍时, 函数值重复出现. 数学上, 用周期性这个概念来定量地刻画这种“周而复始”的变化规律.

对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, 都有

$$f(x + T) = f(x),$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数 (periodic function). 非零常数 T 叫做这个函数的周期 (period).

周期函数的周期不止一个. 例如, $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ 以及 $-2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots$ 都是正弦函数的周期. 事实上, 任何一个常数 $2k\pi (k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 0)$ 都是它的周期.

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小正数就叫做

考察三角函数的性质, 就是要研究这类函数具有的共同特点.

$f(x)$ 的最小正周期 (minimal positive period). 例如, 正弦函数的最小正周期是 2π ①.

根据上述定义, 我们有:

正弦函数是周期函数, $2k\pi (k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 0)$ 都是它的周期, 最小正周期是 2π .

类似地, 请同学们自己探索一下余弦函数的周期性, 并将得到的结果填在横线上:

例 2 求下列函数的周期:

(1) $y = 3\cos x, x \in \mathbb{R};$

(2) $y = \sin 2x, x \in \mathbb{R};$

(3) $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbb{R}.$

解: (1) 因为

$$3\cos(x+2\pi) = 3\cos x,$$

所以由周期函数的定义可知, 原函数的周期为 2π .

(2) 因为

$$\sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x,$$

所以由周期函数的定义可知, 原函数的周期为 π .

(3) 因为

$$\begin{aligned} 2\sin\left[\frac{1}{2}(x+4\pi) - \frac{\pi}{6}\right] &= 2\sin\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi\right] \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

所以由周期函数的定义可知, 原函数的周期为 4π .

① 本书证明从略. 同学们可以从图象上观察出这一结论. 今后本书中所涉及到的周期, 如果不加特别说明, 一般都是指函数的最小正周期.



你能从例 2 的解答过程中归纳一下这些函数的周期与解析式中哪些量有关吗?

练习

1. 等式 $\sin(30^\circ+120^\circ)=\sin 30^\circ$ 是否成立? 如果这个等式成立, 能否说 120° 是正弦函数 $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$ 的一个周期? 为什么?
2. 求下列函数的周期:
 - (1) $y=\sin \frac{3}{4}x$, $x\in\mathbf{R}$;
 - (2) $y=\cos 4x$, $x\in\mathbf{R}$;
 - (3) $y=\frac{1}{2}\cos x$, $x\in\mathbf{R}$;
 - (4) $y=\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.
3. 你认为我们应当如何利用函数的周期性来认识周期函数的其他性质?

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期

从前面的例子中可以看出, 函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi), x\in\mathbf{R}$$

及函数

$$y=A\cos(\omega x+\varphi), x\in\mathbf{R}$$

(其中 A, ω, φ 为常数, 且 $A\neq 0, \omega>0$) 的周期仅与自变量的系数有关. 那么, 如何用自变量的系数表示上述函数的周期呢?

事实上, 令 $z=\omega x+\varphi$, 那么 $x\in\mathbf{R}$ 必须并且只需 $z\in\mathbf{R}$, 且函数 $y=A\sin z$, $z\in\mathbf{R}$ 及函数 $y=A\cos z$, $z\in\mathbf{R}$ 的周期都是 2π . 由于

$$z+2\pi=(\omega x+\varphi)+2\pi=\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi,$$

所以自变量 x 只要并且至少要增加到 $x+\frac{2\pi}{\omega}$, 函数值才能重复出现, 即

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

是使等式

$$\begin{aligned} A\sin[\omega(x+T)+\varphi] &= A\sin(\omega x+\varphi), \\ A\cos[\omega(x+T)+\varphi] &= A\cos(\omega x+\varphi) \end{aligned}$$

成立的最小正数. 从而, 函数

$$y = A\sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

及函数

$$y = A\cos(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

根据这个结论, 我们可以由这类函数的解析式直接写出函数的周期.



你认为上述求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ 及函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ 周期的方法是否能推广到求一般周期函数的周期上去? 即命题:

“如果函数 $y = f(x)$ 的周期是 T , 那么函数 $y = f(\omega x)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$ ” 是否成立?

(2) 奇偶性

观察正弦曲线和余弦曲线, 可以看到正弦曲线关于原点 O 对称, 余弦曲线关于 y 轴对称.

由诱导公式 $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ 可知:

正弦函数是奇函数, 余弦函数是偶函数.

(3) 单调性

我们可以先在正弦函数的一个周期的区间上 (如 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$) 讨论它的单调性, 再利用它的周期性, 将单调性扩展到整个定义域.

观察图 1.4-7, 可以看到:

当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 曲线逐渐上升, $\sin x$ 的值由 -1 增大到 1 ; 当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, 曲线逐渐下降, $\sin x$ 的值由 1 减小到 -1 . 这个变化情况如下表所示:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π	$\dots$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

对于周期函数, 如果我们把握了它的一个周期内的情况, 那么整个函数的情况也就被把握了.

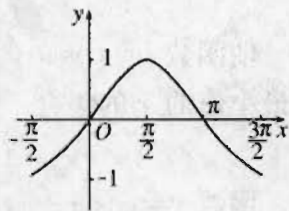


图 1.4-7

这就是说, 正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上是减函数.

由正弦函数的周期性可知:

正弦函数在每一个闭区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 上都是增函数, 其值从 -1 增大到 1 ; 在每一个闭区间 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 上都是减函数, 其值从 1 减小到 -1 .

类似地, 在余弦函数的一个周期上 (如 $[-\pi, \pi]$), 观察曲线, 将看到的函数值的变化情况填入下表:

x	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$\cos x$									

由余弦函数的周期性可知:

余弦函数在每一个闭区间 $[-\pi+2k\pi, 0+2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 上都是增函数, 其值从 -1 增大到 1 ; 在每一个闭区间 $[0+2k\pi, \pi+2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 上都是减函数, 其值从 1 减小到 -1 .

(4) 最大值与最小值

从上述对正弦函数、余弦函数的单调性的讨论中容易得到:

正弦函数当且仅当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时取得最大值 1 , 当且仅当 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时取得最小值 -1 ;

余弦函数当且仅当 $x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时取得最大值 1 ; 当且仅当 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时取得最小值 -1 .

例 3 下列函数有最大值、最小值吗? 如果有, 请写出取最大值、最小值时的自变量 x 的集合, 并说出最大值、最小值分别是什么.

(1) $y = \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$;

(2) $y = -3\sin 2x, x \in \mathbb{R}$.

解: 容易知道, 这两个函数都有最大值、最小值.

(1) 使函数 $y = \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$ 取得最大值的 x 的集合, 就是使函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ 取得最大值的 x 的集合

$$\{x | x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

使函数 $y = \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$ 取得最小值的 x 的集合, 就是使函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ 取得最小值的 x 的集合

$$\{x | x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

函数 $y = \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$ 的最大值是 $1+1=2$; 最小值是 $-1+1=0$.

(2) 令 $z = 2x$, 使函数 $y = -3\sin z, z \in \mathbb{R}$ 取得最大值的 z 的集合是

$$\left\{z \mid z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

由

$$2x = z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

得

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

因此使函数 $y = -3\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$ 取得最大值的 x 的集合是

$$\left\{x \mid x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

同理, 使函数 $y = -3\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$ 取得最小值的 x 的集合是

$$\left\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

函数 $y = -3\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$ 的最大值是 3, 最小值是 -3.

例 4 利用三角函数的单调性, 比较下列各组数的大小:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

(2) $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$ 与 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$.

分析: 利用三角函数的单调性比较两个同名三角函数值的大小, 可以先用诱导公式将已知角化为同一单调区间内的角, 然后再比较大小.

解: (1) 因为

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{10} < -\frac{\pi}{18} < 0,$$

正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上是增函数, 所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

(2) $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right) = \cos \frac{23\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{5},$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

因为 $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{5} < \pi$, 且函数 $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ 是减函数, 所以

$$\cos \frac{\pi}{4} > \cos \frac{3\pi}{5},$$

即

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) > \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right).$$

例 5 求函数 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间.

分析: 我们可以利用正弦函数的单调性来求所给函



你能求 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$ $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间吗?

数的单调区间.

解: 令 $z = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}$. 函数 $y = \sin z$ 的单调递增区间是

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right].$$

由

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

得

$$-\frac{5\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

设

$$A = [-2\pi, 2\pi],$$

$$B = \left\{x \mid -\frac{5\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\},$$

易知 $A \cap B = \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

所以函数 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间是

$$\left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

练习

1. 观察正弦曲线和余弦曲线, 写出满足下列条件的区间:

(1) $\sin x > 0$;

(2) $\sin x < 0$;

(3) $\cos x > 0$;

(4) $\cos x < 0$.

2. 下列各等式能否成立? 为什么?

(1) $2\cos x = 3$;

(2) $\sin^2 x = 0.5$.

3. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量的集合, 并写出最大值、最小值各是多少.

(1) $y = 2\sin x, x \in \mathbf{R}$;

(2) $y = 2 - \cos \frac{x}{3}, x \in \mathbf{R}$.

4. 选择题:

下列关于函数 $y = 4\sin x, x \in [-\pi, \pi]$ 的单调性的叙述, 正确的是 ().

(A) 在 $[-\pi, 0]$ 上是增函数, 在 $[0, \pi]$ 上是减函数

(B) 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, 在 $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 及 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上是减函数

(C) 在 $[0, \pi]$ 上是增函数, 在 $[-\pi, 0]$ 上是减函数

(D) 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 及 $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 上是增函数, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上是减函数

5. 利用三角函数的单调性, 比较下列各组中两个三角函数值的大小:

(1) $\sin 250^\circ$ 与 $\sin 260^\circ$;

(2) $\cos \frac{15}{8}\pi$ 与 $\cos \frac{14}{9}\pi$;

(3) $\cos 515^\circ$ 与 $\cos 530^\circ$;

(4) $\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$.

6. 求函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in[0, \pi]$ 的单调递减区间.



利用单位圆中的三角函数线研究正弦函数、余弦函数的性质

单位圆中的三角函数线直观地表现了三角函数中的自变量与函数值之间的关系, 是研究三角函数性质的好工具. 用三角函数线研究三角函数的性质体现了数形结合的思想方法, 有利于我们从整体上把握有关性质.

如图 1, 在直角坐标系 uOv 中, 角 x 的顶点与原点重合, 始边与 Ou 轴重合, 终边与单位圆交于点 $P(u, v)$. 过 P 作 Ou 轴的垂线, 交 Ou 轴于 M , 分别得正弦线 MP 、余弦线 OM .

当角 x 的终边绕原点从 Ou 轴的正半轴开始, 按照逆时针方向旋转时, 正弦线 MP 按照

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \dots$$

的规律周而复始地变化着; 同时, 余弦线 OM 按照

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \dots$$

的规律周而复始地变化着.

由正弦线、余弦线的上述变化规律, 可得正弦函数、余弦函数的许多性质. 例如:

(1) 周期性: 自变量每增加 2π (角 x 的终边旋转一周), 正弦函数值 (MP)、余弦函数值 (OM) 重复出现;

(2) 奇偶性: 角 x 与角 $-x$ 对应的正弦线关于 Ou 轴对称, 余弦线重合, 因此正弦函数为奇函数, 余弦函数为偶函数;

(3) 单调性:

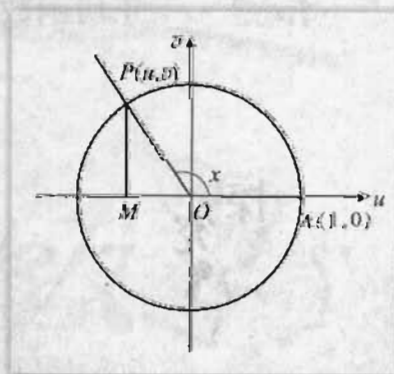


图 1

角 x	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \rightarrow 2k\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\frac{\pi}{2}+2k\pi \rightarrow \pi+2k\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}+2k\pi$
正弦线 MP	$-1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$
$\sin x$	增函数	减函数

角 x	$2k\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi \rightarrow \pi+2k\pi$	$\pi+2k\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}+2k\pi \rightarrow 2\pi+2k\pi$
余弦线 OM	$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
$\cos x$	减函数	增函数

(4) 最大值、最小值:

角 x	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\frac{\pi}{2}+2k\pi$	角 x	$\pi+2k\pi$	$2k\pi$
正弦线 MP	-1	1	余弦线 OM	-1	1
$\sin x$	最小值	最大值	$\cos x$	最小值	最大值

你能借助单位圆中的三角函数线, 讨论一下诱导公式等三角函数的其他性质吗?

1.4.3 正切函数的性质与图象

探究

你能否根据研究正弦函数、余弦函数的图象与性质的经验, 以同样的方法研究正切函数的图象与性质?

有了前面的知识准备, 我们可以从一个新的角度来研究正切函数的性质.

(1) 周期性

由诱导公式

$$\tan(x+\pi) = \tan x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

可知, 正切函数是周期函数, 周期是 π ①.

(2) 奇偶性

由诱导公式

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

可知, 正切函数是奇函数.

(3) 单调性

如图 1.4-8(I)(II), 由正切线的变化规律可以得出, 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数. 又由正切函数的周期性可知, 正切函数在开区间 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$ 内都是增函数.

① 本书证明从略. 同学们可以从图象上观察出这一结论. 也可以利用单位圆中的正切线来讨论正切函数的周期性、奇偶性.

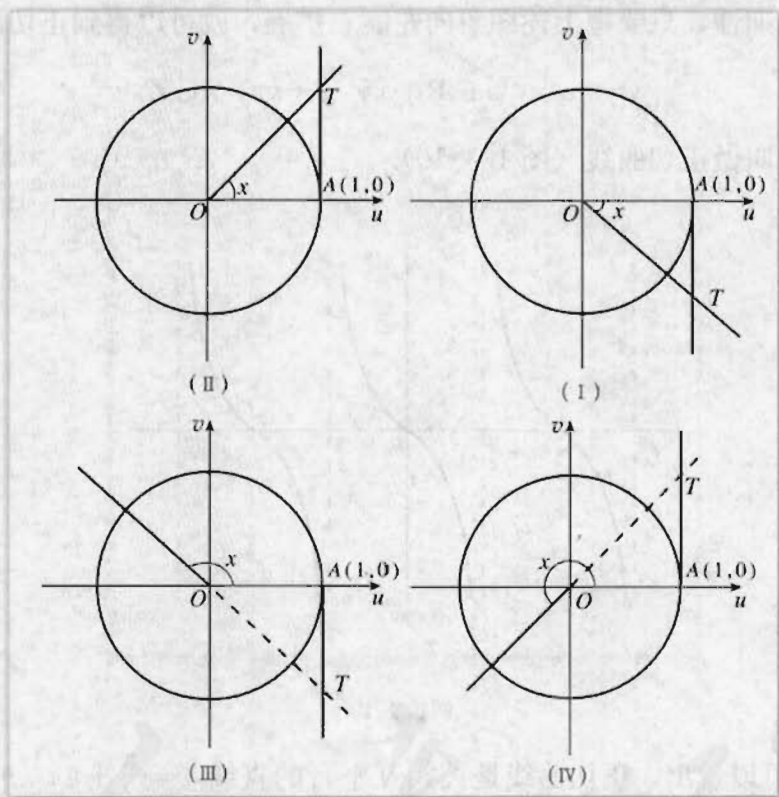


图 1.4-8

(4) 值域

如图 1.4-8(I), 当 x 大于 $-\frac{\pi}{2}$ 且无限接近 $-\frac{\pi}{2}$ 时, 正切线 AT 向 Ov 轴的负方向无限延伸; 如图 1.4-8(II) 当 x 小于 $\frac{\pi}{2}$ 且无限接近 $\frac{\pi}{2}$ 时, 正切线 AT 向 Ov 轴的正方向无限延伸. 因此, $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内可以取任意实数, 但没有最大值、最小值.

因此, 正切函数的值域是实数集 $\mathbf{R}$.

下面, 利用正切线画出函数

$$y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

的图象(图 1.4-9).

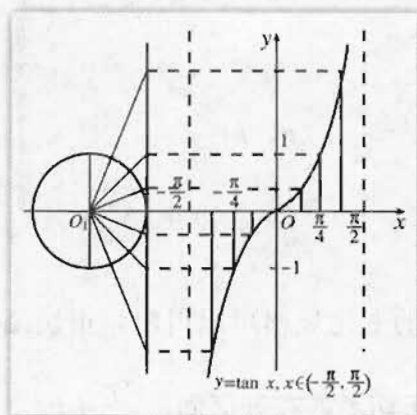


图 1.4-9

根据正切函数的周期性, 只要把上述图象向左、右扩展, 就可以得到正切函数

$$y = \tan x, x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

的图象, 我们把它叫做正切曲线(图 1.4-10).

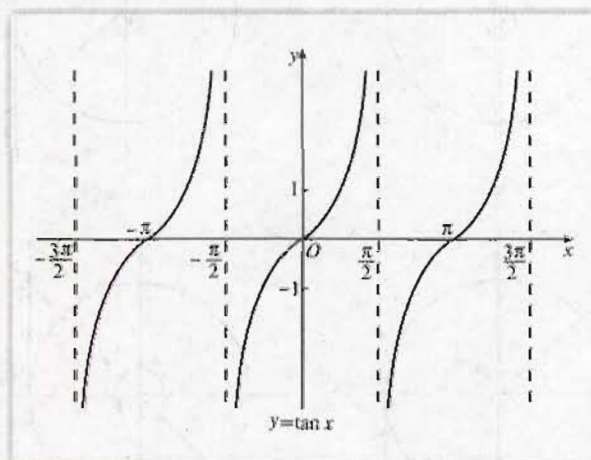


图 1.4-10

从图 1.4-10 可以看出, 正切曲线是被相互平行的直线 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 所隔开的无穷多支曲线组成的.

思考?

你能从正切函数的图象出发, 讨论它的性质吗?

例 6 求函数 $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域、周期和单调区间.

解: 函数的自变量 x 应满足

$$\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

即

$$x \neq 2k + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

所以, 函数的定义域是 $\left\{x \mid x \neq 2k + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

由于

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3} + \pi\right) \\ &= \tan\left[\frac{\pi}{2}(x+2) + \frac{\pi}{3}\right] = f(x+2), \end{aligned}$$

因此函数的周期为 2.

由 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 解得

$$-\frac{5}{3} + 2k < x < \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}.$$

因此, 函数的单调递增区间是

$$\left(-\frac{5}{3} + 2k, \frac{1}{3} + 2k\right), k \in \mathbf{Z}.$$

练习

1. 根据图 1.4-9, 写出利用正切线画函数

$$y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

图象的方法.

2. 观察正切曲线, 写出满足下列条件的 x 值的范围:

(1) $\tan x > 0$;

(2) $\tan x = 0$;

(3) $\tan x < 0$.

3. 求函数 $y = \tan 3x$ 的定义域.

4. 求下列函数的周期:

(1) $y = \tan 2x, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$;

(2) $y = 5 \tan \frac{x}{2}, x \neq (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$.

5. (1) 正切函数在整个定义域内是增函数吗? 为什么?

(2) 正切函数会不会在某一区间内是减函数? 为什么?

6. 利用正切函数的单调性比较下列各组中两个正切值的大小:

(1) $\tan 138^\circ$ 与 $\tan 143^\circ$;

(2) $\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$.

习题 1.4

A 组

1. 画出下列函数的简图:

(1) $y=1-\sin x, x \in [0, 2\pi]$;

(2) $y=3\cos x+1, x \in [0, 2\pi]$.

2. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量 x 的集合, 并分别写出最大值、最小值是什么.

(1) $y=1-\frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{3}x, x \in \mathbf{R}$;

(2) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R}$;

(3) $y=-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$;

(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$.

3. 求下列函数的周期:

(1) $y=\sin \frac{2}{3}x, x \in \mathbf{R}$;

(2) $y=\frac{1}{2}\cos 4x, x \in \mathbf{R}$.

4. 利用函数的单调性比较下列各组中两个三角函数值的大小:

(1) $\sin 103^\circ 15'$ 与 $\sin 164^\circ 30'$;

(2) $\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right)$ 与 $\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$;

(3) $\sin 508^\circ$ 与 $\sin 144^\circ$;

(4) $\cos 760^\circ$ 与 $\cos(-770^\circ)$.

5. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=1+\sin x, x \in \mathbf{R}$;

(2) $y=-\cos x, x \in \mathbf{R}$.

6. 求函数 $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$ 的定义域.

7. 求函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right), x \neq \frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 的周期.

8. 利用正切函数的单调性比较下列各组中两个函数值的大小:

(1) $\tan\left(-\frac{1}{5}\pi\right)$ 与 $\tan\left(-\frac{3}{7}\pi\right)$;

(2) $\tan 1519^\circ$ 与 $\tan 1493^\circ$;

(3) $\tan 6\frac{9}{11}\pi$ 与 $\tan\left(-5\frac{3}{11}\pi\right)$;

(4) $\tan \frac{7\pi}{8}$ 与 $\tan \frac{\pi}{6}$.

9. 根据正切函数的图象, 写出使下列不等式成立的 x 的集合:

(1) $1+\tan x \geq 0$;

(2) $\tan x - \sqrt{3} \geq 0$.

10. 设函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是以 2 为最小正周期的周期函数, 且 $x \in [0, 2]$ 时 $f(x) = (x-1)^2$. 求

$f(3), f\left(\frac{7}{2}\right)$ 的值.

11. 容易知道, 正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数. 正弦曲线关于原点对称, 即原点是正弦曲线的对称中心. 除原点外, 正弦曲线还有其他对称中心吗? 如果有, 对称中心的坐标是什么? 另外, 正弦曲线是轴对称图形吗? 如果是, 对称轴的方程是什么?

你能用已经学过的正弦函数性质解释上述现象吗?

对余弦函数和正切函数, 讨论上述同样的问题.

B 组

1. 根据正弦函数、余弦函数的图象, 写出使下列不等式成立的 x 的取值集合:

(1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$;

(2) $\sqrt{2} + 2\cos x \geq 0 \quad (x \in \mathbf{R})$.

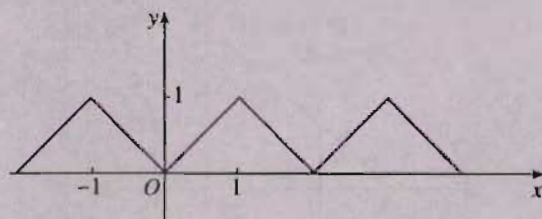
2. 求函数 $y = -\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的单调区间.

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 试回答下列问题:

(1) 求函数的周期;

(2) 画出函数 $y = f(x+1)$ 的图象;

(3) 你能写出函数 $y = f(x)$ 的解析式吗?

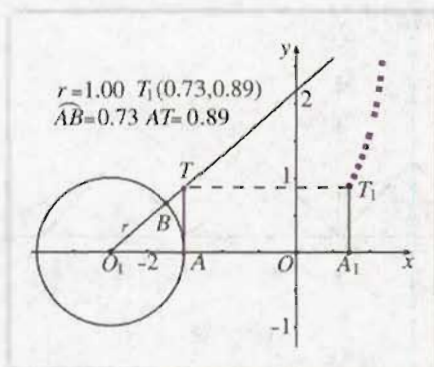


(第3题)

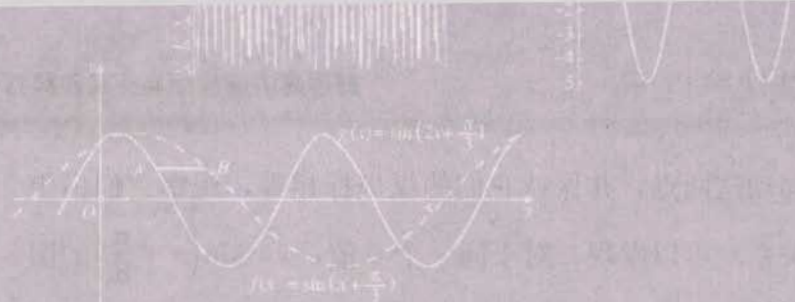


利用正切线画函数 $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象

用计算器或计算机在直角坐标系的 x 轴上任意取一点 O_1 ，以 O_1 为圆心作单位圆，交 x 轴于点 A ，在圆 O_1 上任取一点 B ，作 $\angle AO_1B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，然后过点 A 作圆 O_1 的切线交 O_1B 或 O_1B 的反向延长线于点 T ，并测出 $\widehat{AB}$ 的长，将 AT 沿着 x 轴平移到 A_1T_1 ，并使得平移后点 T_1 的横坐标为 $\widehat{AB}$ 的长，纵坐标为正切线 AT 的长，然后在单位圆上移动点 B ，则与动点 B 对应的动点 T_1 的轨迹就是函数 $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象。



函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象



前面我们接触过形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 A, ω, φ 都是常数) 的函数, 它在实践中有很多用处. 例如, 在物理中, 简谐运动中单摆对平衡位置的位移 y 与时间 x 的关系、交流电的电流 y 与时间 x 的关系等都是形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的函数. 图 1.5-1(1) 是某次实验测得的交流电的电流 y 随时间 x 变化的图象.

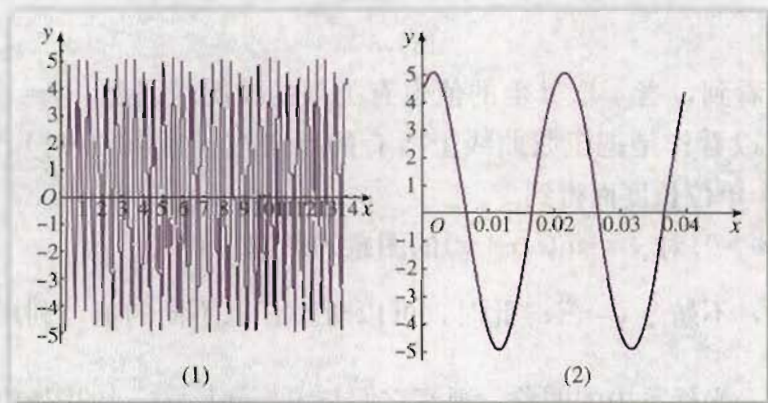


图 1.5-1

将测得的图象放大 (如图 1.5-1(2)), 可以看出它和正弦曲线很相似. 那么函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 与函数 $y = \sin x$ 有什么关系呢?

从解析式来看, 函数 $y = \sin x$ 就是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在 $A=1, \omega=1, \varphi=0$ 时的情况. 现在, 我们就来探索 A, ω, φ 对 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响^①.

(一) 探索 φ 对 $y = \sin(x + \varphi), x \in \mathbb{R}$ 的图象的影响.

可以对 φ 任取不同的值, 利用计算器或计算机作出这些函数在同一坐标系中的图象, 观察它们与 $y = \sin x$ 的图象之间的关系.

这里, 我们不妨来观察 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 和 $y = \sin x$ 的图象之间的关系.

如图 1.5-2, 分别在两条曲线上各恰当地选取一个纵坐标相同的点, 沿两条曲线

^① 可以用“五点法”作图, 有条件的也可以用计算器或计算机作图.

在计算机的帮助下, A, ω, φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变化的影响能直观地得到反映.

同时移动这两点,并保持它们的纵坐标相等,观察它们横坐标的关系.可以发现,对于同一个 y 值, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的点的横坐标总是等于 $y=\sin x$ 的图象上对应点的横坐标减去 $\frac{\pi}{3}$. 这说明, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,可以看作是把正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度而得到①.

① 如果 φ 取 $-\frac{\pi}{3}$, 情况又会怎样呢? 同学们还可以取其他的 φ 值试一试.

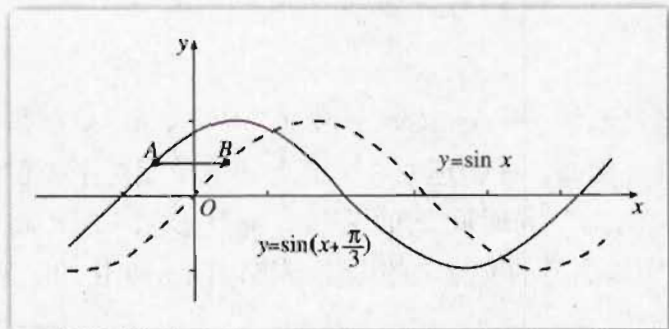


图 1.5-2

通过实验可以看到,当 φ 取其他的值也有类似的情况. 因此, $y=\sin(x+\varphi)$ (其中 $\varphi \neq 0$) 的图象,可以看作是把正弦曲线上所有的点向左(当 $\varphi > 0$ 时)或向右(当 $\varphi < 0$ 时)平行移动 $|\varphi|$ 个单位长度而得到.

(二) 探索 $\omega(\omega > 0)$ 对 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响.

为了研究方便,不妨令 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. 此时,可以对 ω 任取不同的值,利用计算器或计算机作出这些函数在同一坐标系中的图象,观察它们与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

这里,我们不妨来观察 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象和 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

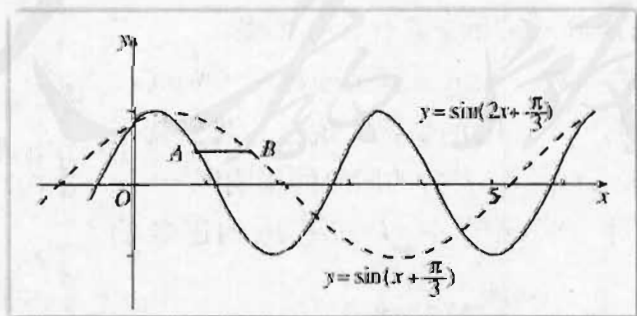


图 1.5-3

如图 1.5-3, 分别在两条曲线上各恰当地选取一个纵坐标相同的点,沿两条曲线同时移动这两点,并保持它们的纵坐标相等,观察它们横坐标的关系. 可以发现,对于同一个 y 值, $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的点的横坐标总是等于 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上对应点的横

坐标的 $\frac{1}{2}$ 倍. 这说明, $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 可以看作是 把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的.

通过实验可以看到, 当 ω 取其他值时也有类似情况. 因此, 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象, 可以看作是 把 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标缩短 (当 $\omega>1$ 时) 或伸长 (当 $0<\omega<1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的^①.

① 如果 ω 取 $\frac{1}{2}$, 情况又会怎样呢? 同学们还可以取其他的 ω 试一试.

(三) 探索 $A(A>0)$ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响.

为了研究方便, 不妨令 $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. 此时, 可以对 A 任取不同的值, 利用计算器或计算机作出这些函数在同一坐标系中的图象, 观察它们与 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

这里, 我们不妨来观察 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象和 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象之间的关系.

如图 1.5-4, 分别在两条曲线上各取一个横坐标相同的点, 沿两条曲线同时移动这两点, 并使它们的横坐标保持相同, 观察它们纵坐标的关系. 可以发现, 对于同一个 x 值, 函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的点的纵坐标等于函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上点的纵坐标的 3 倍. 这说明, $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 可以看作是 把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有的点的纵坐标伸长到原来的 3 倍 (横坐标不变) 而得到的^②.

② 如果取 $A=\frac{1}{3}$, 情况又会怎样呢? 同学们还可以取其他的 A 值试一试.

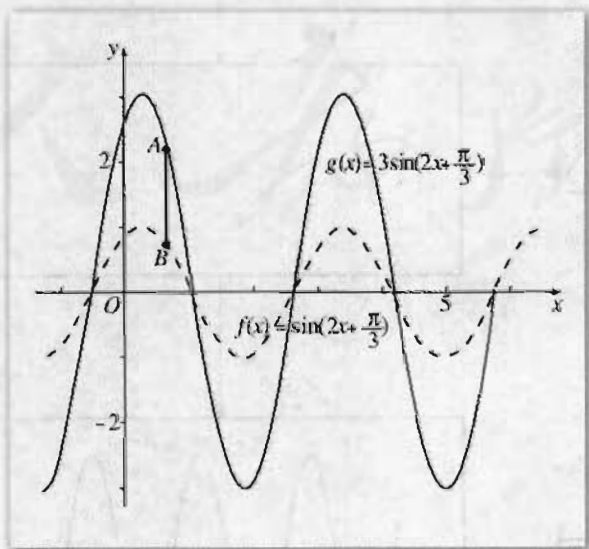
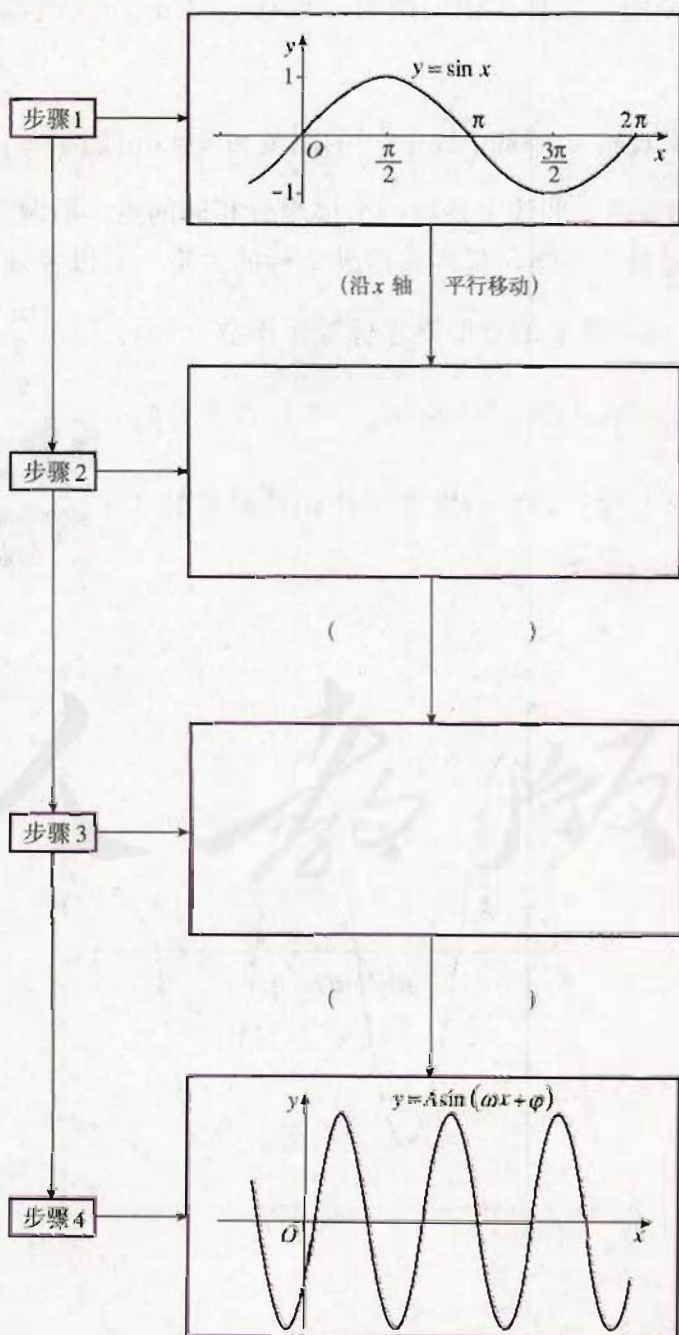


图 1.5-4

通过实验可以看到, A 取其他值时也有类似的情况. 因此, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象, 可以看作是把 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 上所有点的纵坐标伸长 (当 $A > 1$ 时) 或缩短 (当 $0 < A < 1$ 时) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到. 从而, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的值域是 $[-A, A]$, 最大值是 A , 最小值是 $-A$.

现在我们知道了 A, ω, φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象变化的影响情况. 一般地, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0$) 的图象, 可以看作用下面的方法得到: 先画出函数 $y = \sin x$ 的图象; 再把正弦曲线向左 (右) 平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象; 然后使曲线上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍, 得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象; 最后把曲线上各点的纵坐标变为原来的 A 倍, 这时的曲线就是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

这一过程的步骤如下:



这一过程体现了由简单到复杂, 由特殊到一般的化归思想.

例 1 画出函数

$$y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

的简图.

解: 先把正弦曲线上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象;
再把后者所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变), 得到 $y=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象;
再把所得图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变) 而得到函数

$$y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

的图象, 如图 1.5-5.

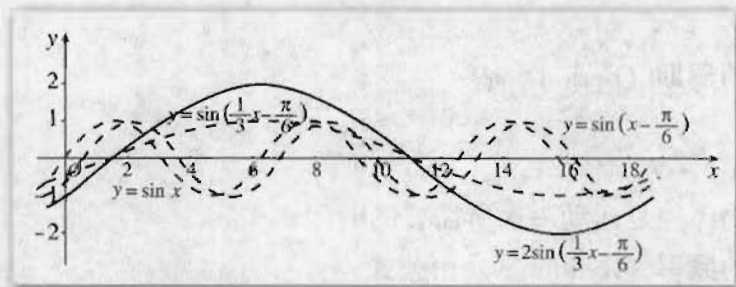


图 1.5-5

下面利用“五点法”画函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期 $\left(T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi\right)$ 内的图象.

令 $X=\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}$, 则 $x=3\left(X+\frac{\pi}{6}\right)$. 列表:

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{2}$	5π	$\frac{13\pi}{2}$
y	0	2	0	-2	0

描点画图 (图 1.5-6):

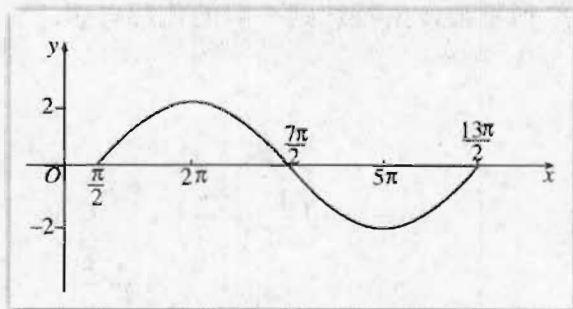


图 1.5-6

现在, 我们再次回到本章开头提到的“简谐运动的图象”. 可以证明, 这个图象所对应的函数解析式有如下形式:

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), \quad x \in [0, +\infty),$$

其中 $A > 0$, $\omega > 0$. 物理中, 描述简谐运动的物理量, 如振幅、周期和频率等都与这个解析式中的常数有关:

A 就是这个简谐运动的振幅 (amplitude of vibration), 它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离;

这个简谐运动的周期 (period) 是

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

这是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间;

这个简谐运动的频率 (frequency) 由公式

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

给出, 它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数;

$\omega x + \varphi$ 称为相位 (phase);

$x=0$ 时的相位 φ 称为初相 (initial phase).

例 2 图 1.5-7 是某简谐运动的图象. 试根据图象回答下列问题:

- (1) 这个简谐运动的振幅、周期与频率各是多少?
- (2) 从 O 点算起, 到曲线上的哪一点, 表示完成了一次往复运动? 如从 A 点算起呢?
- (3) 写出这个简谐运动的函数表达式.

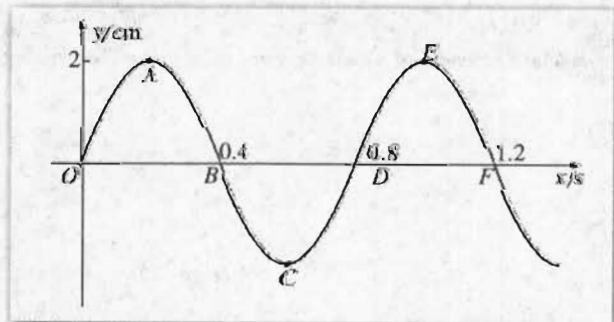


图 1.5-7

解: (1) 从图象上可以看到, 这个简谐运动的振幅为 2 cm; 周期 0.8 s; 频率为 $\frac{5}{4}$ Hz.

(2) 如果从 O 点算起, 到曲线上的 D 点, 表示完成了一次往复运动; 如果从 A 点算起, 则到曲线上的 E 点, 表示完成了一次往复运动.

(3) 设这个简谐运动的函数表达式为

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), x \in [0, +\infty)$$

那么, $A=2$; 由 $\frac{2\pi}{\omega}=0.8$ 得 $\omega=\frac{5\pi}{2}$; 由图象知初相 $\varphi=0$.

于是所求函数表达式是

$$y = 2 \sin \frac{5\pi}{2} x, x \in [0, +\infty).$$

练习

1. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图 (有条件的请用计算器或计算机检验):

(1) $y = \frac{1}{2} \sin x$;

(2) $y = \sin 3x$;

(3) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

(4) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. 选择题: 已知函数 $y = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象为 C.

(1) 为了得到函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 向右平行移动 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

(B) 向左平行移动 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

(C) 向右平行移动 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度

(D) 向左平行移动 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度

(2) 为了得到函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 2 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 横坐标不变

(3) 为了得到函数 $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{3}{4}$ 倍, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{3}{4}$ 倍, 横坐标不变

3. 函数 $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅、周期和频率各是多少? 它的图象与正弦曲线有什么关系?

4. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$, $x\in[0, +\infty)$ 的初相是多少? 它的图象与正弦曲线有什么关系?

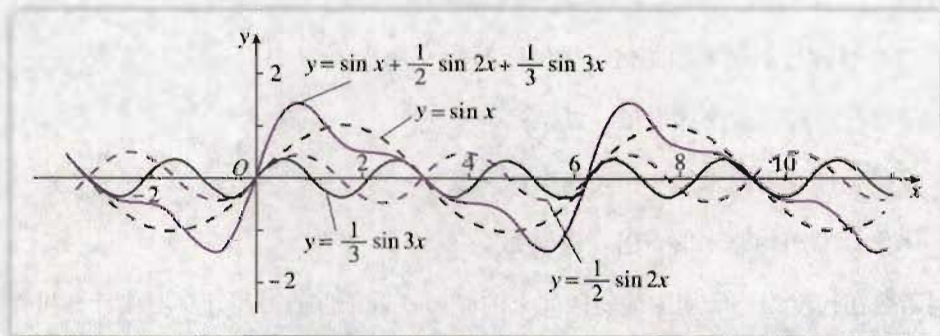


振幅、周期、频率、相位

人体是一个包含各种周期运动的生物体, 医学上把周期为 24 小时的生理运动称为中周期运动, 如血压、血糖浓度的变化; 小于 24 小时的叫短周期运动, 如心跳、脉搏每分钟 50~70 次, 呼吸每分钟 16~24 次; 大于 24 小时叫长周期运动, 如人的情绪、体力、智力等.

声音中也包含着正弦函数, 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波. 每一个音都是由纯音合成的, 纯音的数学模型是函数 $y=A\sin \omega t$. 音调、响度、音长和音色等音的四要素都与正弦函数及其参数有关. 响度与振幅有关, 即与声波的能量有关, 振幅越大, 响度越大; 音长也与振幅有关, 声音消失过程是由于声波在传播过程中受阻尼振动, 系统的机械能随时间逐渐减小, 振动的振幅也逐渐减小; 音调与声波的振动频率是一一对应的, 频率低的声音低沉, 频率高的声音尖利.

平时我们听到的每一个音都不只是一个音在响, 而是许多个音的结合, 称为复合音. 复合音的产生是因为发声体在全段振动, 产生频率为 f 的基音的同时, 其各部分, 如二分之一、三分之一、四分之一也在振动, 产生的频率恰好是全段振动的频率的倍数, 如 $2f$ 、 $3f$ 、 $4f$ 等. 这些音叫谐音, 因为其振幅较小, 我们一般不易听出来. 所以我们听到的声音的函数是 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$.



音色一般由基音和谐音的混合作用所决定. 不同乐器、不同人发出的音调可以相同, 但音色不同, 人们由此分辨出不同的声音.

周期函数产生了美妙的音乐!

习题 1.5

A 组

1. 选择题:

(1) 为了得到函数 $y = \cos\left(x + \frac{1}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点 ().

- (A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- (B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- (C) 向左平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位长度
- (D) 向右平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位长度

(2) 为了得到函数 $y = \cos \frac{x}{5}$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点的 ().

- (A) 横坐标伸长到原来的 5 倍, 纵坐标不变
- (B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{5}$ 倍, 纵坐标不变
- (C) 纵坐标伸长到原来的 5 倍, 横坐标不变
- (D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{5}$ 倍, 横坐标不变

(3) 为了得到函数 $y = \frac{1}{4} \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点的 ().

- (A) 横坐标伸长到原来的 4 倍, 纵坐标不变
 (B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$ 倍, 纵坐标不变
 (C) 纵坐标伸长到原来的 4 倍, 横坐标不变
 (D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$ 倍, 横坐标不变
2. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图 (有条件的可用计算器或计算机作图检验):
- (1) $y=4\sin \frac{1}{2}x, x \in \mathbf{R};$
 (2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x, x \in \mathbf{R};$
 (3) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R};$
 (4) $y=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\pi\right), x \in \mathbf{R}.$
3. 不画图, 直接写出下列函数的振幅、周期与初相, 并说明这些函数的图象可由正弦曲线经过怎样的变化得到 (注意定义域):
- (1) $y=8\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right), x \in [0, +\infty);$
 (2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right), x \in [0, +\infty).$
4. 图 1.5-1 的电流 i (单位: A) 随时间 t (单位: s) 变化的函数关系是

$$i=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right), t \in [0, +\infty).$$

- (1) 求电流 i 变化的周期、频率、振幅及其初相;
 (2) 当 $t=0, \frac{1}{600}, \frac{1}{150}, \frac{7}{600}, \frac{1}{60}$ (单位: s) 时, 求电流 i .
5. 一根长为 l cm 的线, 一端固定, 另一端悬挂一个小球. 小球摆动时, 离开平衡位置的位移 s (单位: cm) 与时间 t (单位: s) 的函数关系是

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right), t \in [0, +\infty).$$

- (1) 求小球摆动的周期;
 (2) 已知 $g \approx 980 \text{ cm/s}^2$, 要使小球摆动的周期是 1 s, 线的长度 l 应当是多少? (精确到 0.1 cm)

B 组

1. 弹簧振子的振动是简谐运动. 下表给出了振子在完成一次全振动的过程中的时间 t 与位移 s 之间的对应数据. 根据这些数据求出这个振子的振动函数解析式.

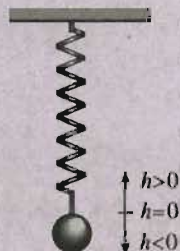
t	0	t_0	$2t_0$	$3t_0$	$4t_0$	$5t_0$	$6t_0$	$7t_0$	$8t_0$	$9t_0$	$10t_0$	$11t_0$	$12t_0$
s	-20.0	-17.8	-10.1	0.1	10.3	17.7	20.0	17.7	10.3	0.1	-10.1	-17.8	-20.0

2. 弹簧挂着的小球作上下运动, 它在 t 秒时相对于平衡位置的高度 h 厘米由下列关系式确定:

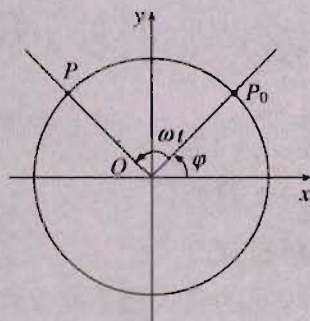
$$h = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

以 t 为横坐标, h 为纵坐标, 作出这个函数在一个周期的闭区间上的图象, 并回答下列问题:

- (1) 小球在开始振动时 (即 $t=0$) 的位置在哪里?
 - (2) 小球的最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少?
 - (3) 经过多少时间小球往复运动一次?
 - (4) 每秒钟小球能往复振动多少次?
3. 如图, 点 P 是半径为 r cm 的砂轮边缘上的一个质点, 它从初始位置 P_0 开始, 按逆时针方向以角速度 ω rad/s 做圆周运动. 求点 P 的纵坐标 y 关于时间 t 的函数关系, 并求点 P 的运动周期和频率.



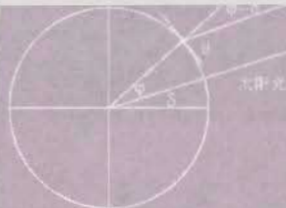
(第2题)



(第3题)

CHAPTER 1

1.6



$$y = \frac{5}{2} \sin \frac{\pi}{6} t + 5$$

时刻	水深(米)	时刻	水深(米)	时刻	水深(米)
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

三角函数模型的简单应用

如果某种变化着的现象具有周期性，那么它就可以借助三角函数来描述。本节我们通过几个具体实例，说明三角函数模型的简单应用。

例 1 如图 1.6-1，某地一天从 6~14 时的温度变化曲线近似满足函数

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) + b.$$

(1) 求这一天 6~14 时的最大温差；

(2) 写出这段曲线的函数解析式。

解：(1) 由图可知，这段时间的最大温差是 20 °C。

(2) 从图中可以看出，从 6~14 时的图象是函数

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) + b \quad (*)$$

的半个周期的图象，所以

$$A = \frac{1}{2}(30 - 10) = 10,$$

$$b = \frac{1}{2}(30 + 10) = 20.$$

因为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 14 - 6$ ，所以 $\omega = \frac{\pi}{8}$ 。

将 $A = 10$ ， $b = 20$ ， $\omega = \frac{\pi}{8}$ ， $x = 6$ ， $y = 10$ 代入 (*) 式，解得 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ 。

综上，所求解析式为

$$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20, x \in [6, 14].$$

一般地，所求出的函数模型只能近似刻画这天某个时段的温度变化情况，因此应当特别注意自变量的变化范围。

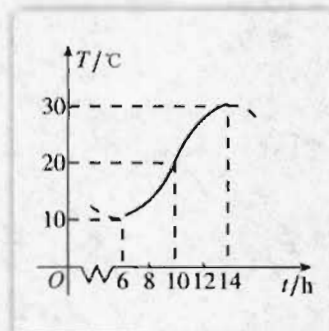


图 1.6-1

例 2 画出函数 $y = |\sin x|$ 的图象并观察其周期。

解：函数图象如图 1.6-2 所示。

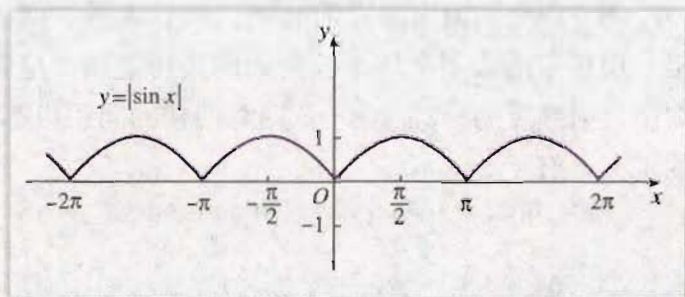


图 1.6-2

从图中可以看出, 函数 $y = |\sin x|$ 是以 π 为周期的波浪形曲线.

我们也可以这样进行验证:

由于

$$|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|,$$

所以, 函数 $y = |\sin x|$ 是以 π 为周期的函数.

利用函数图象的直观性, 通过观察图象而获得对函数性质的认识, 这是研究数学问题的常用方法. 显然, 函数 $y = |\sin x|$ 与正弦函数有紧密的联系, 你能利用这种联系说说它的图象的作法吗?

例 3 如图 1.6-3, 设地球表面某地正午太阳高度角为 θ , δ 为此时太阳直射纬度, φ 为该地的纬度值, 那么这三个量之间的关系是 $\theta = 90^\circ - |\varphi - \delta|$. 当地夏半年 δ 取正值, 冬半年 δ 取负值.

如果在北京地区 (纬度数约为北纬 40°) 的一幢高为 h_0 的楼房北面盖一新楼, 要使新楼一层正午的太阳全年不被前面的楼房遮挡, 两楼的距离不应小于多少?

分析: 根据图 1.6-3, 太阳高度角 θ 、楼高 h_0 与此时楼房在地面的投影长 h 之间有如下关系:

$$h_0 = h \tan \theta.$$

根据地理知识, 在北京地区, 太阳直射北回归线时物体的影子最短, 直射南回归线时物体的影子最长. 因此, 为了使新楼一层正午的太阳全年不被遮挡, 应当考虑太阳直射南回归线时的情况.

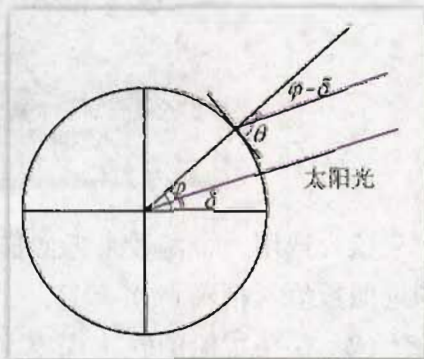


图 1.6-3

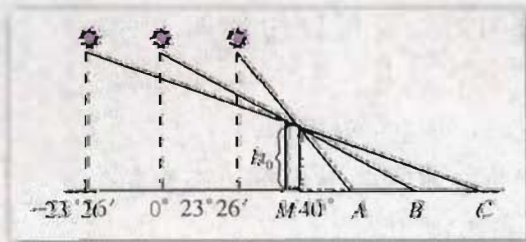


图 1.6-4

解: 如图 1.6-4, A、B、C 分别为太阳直射北回归线、赤道、南回归线时楼顶在地面上的投影点. 要使新楼一层正午的太阳全年不被前面的楼房遮挡, 应取太阳直射南回归线的情况考虑, 此时的太阳直射纬度为 $-23^{\circ}26'$. 依题意两楼的间距应不小于 MC .

根据太阳高度角的定义, 有

$$\angle C = 90^{\circ} - |40^{\circ} - (-23^{\circ}26')| = 26^{\circ}34',$$

所以

$$MC = \frac{h_0}{\tan C} = \frac{h_0}{\tan 26^{\circ}34'} \approx 2.000h_0.$$

即在盖楼时, 为使后楼不被前楼遮挡, 要留出相当于前楼高两倍的间距.

实际问题的背景往往比较复杂, 而且需要综合应用多学科的知识才能解决它. 因此, 在应用数学知识解决实际问题时, 应当注意从复杂的背景中抽取基本的数学关系, 还要调动相关学科知识来帮助理解问题.

例 4 海水受日月的引力, 在一定的时候发生涨落的现象叫潮. 一般地, 早潮叫潮, 晚潮叫汐. 在通常情况下, 船在涨潮时驶进航道, 靠近码头; 卸货后, 在落潮时返回海洋. 下面是某港口在某季节每天的时间与水深关系表:

时刻	水深/米	时刻	水深/米	时刻	水深/米
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

(1) 选用一个函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系, 给出整点时的水深的近似数值 (精确到 0.001).

(2) 一条货船的吃水深度 (船底与水面的距离) 为 4 米, 安全条例规定至少要有 1.5 米的安全间隙 (船底与洋底的距离), 该船何时能进入港口? 在港口能呆多久?

(3) 若某船的吃水深度为 4 米, 安全间隙为 1.5 米, 该船在 2:00 开始卸货, 吃水深度以每小时 0.3 米的速度减少, 那么该船在什么时间必须停止卸货, 将船驶向较深的水域?

分析: 观察问题中所给出的数据, 可以看出, 水深的变化具有周期性. 根据表中的数据作出图象 (这个图象称为散点图), 如图 1.6-5. 从散点图的形状可以判断, 这个港口的水深与时间的关系可以用形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + h$ 的函数来刻画, 其中 x 是时间, y 是水深. 根据数据可以具体确定 A, ω, φ, h 的值.

解: (1) 以时间为横坐标, 水深为纵坐标, 在直角坐标系中画出散点图 (图 1.6-5).

根据图象, 可以考虑用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + h$ 刻画水深与时间之间的对应关系. 从数据和图象可以

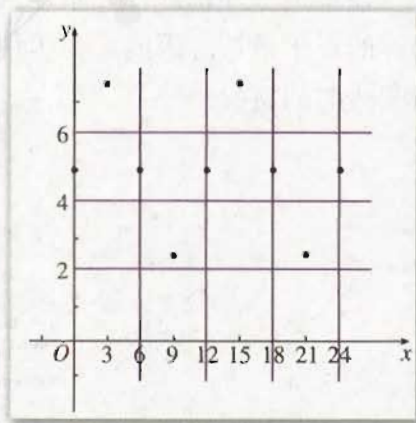


图 1.6-5

得出:

$$A=2.5, h=5, T=12, \varphi=0;$$

$$\text{由 } T=\frac{2\pi}{\omega}=12, \text{ 得 } \omega=\frac{\pi}{6}.$$

所以, 这个港口的水深与时间的关系可用 $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ 近似描述.

由上述关系式易得港口在整点时水深的近似值:

时刻	0:00	1:00	2:00	3:00	4:00	5:00	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00
水深	5.000	6.250	7.165	7.500	7.165	6.250	5.000	3.750	2.835	2.500	2.835	3.750
时刻	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
水深	5.000	6.250	7.165	7.500	7.165	6.250	5.000	3.750	2.835	2.500	2.835	3.750

(2) 货船需要的安全水深为 $4+1.5=5.5$ (米), 所以当 $y\geq 5.5$ 时就可以进港. 令

$$2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5=5.5,$$

$$\sin\frac{\pi}{6}x=0.2.$$

由计算器可得

$$\boxed{\text{MODE}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{2}$$

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin^{-1}} \boxed{0.2} \boxed{=} 0.20135792 \approx 0.2014.$$

① 科学计算器上, 有 $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ 三个键, 在已知一个三角函数值时, 可以利用它们, 求出对应的角.

如图 1.6-6, 在区间 $[0, 12]$ 内, 函数 $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ 的图象与直线 $y=5.5$ 有两个交点 A、B, 因此

$$\frac{\pi}{6}x \approx 0.2014, \text{ 或 } \pi - \frac{\pi}{6}x \approx 0.2014.$$

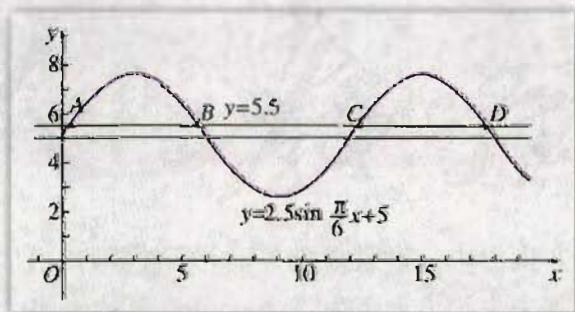


图 1.6-6

解得

$$x_A \approx 0.3846, x_B \approx 5.6154.$$

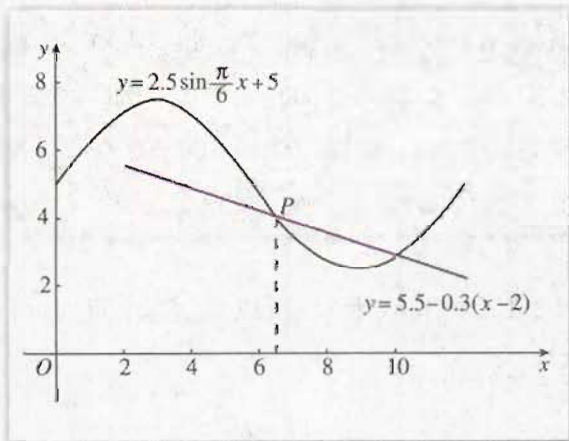
由函数的周期性易得:

$$x_C \approx 12 + 0.3846 = 12.3846,$$

$$x_D \approx 12 + 5.6154 = 17.6154.$$

因此, 货船可以在 0 时 30 分左右进港, 早晨 5 时 30 分左右出港; 或在中午 12 时 30 分左右进港, 下午 17 时 30 分左右出港. 每次可以在港口停留 5 小时左右.

(3) 设在时刻 x 货船的安全水深为 y , 那么 $y = 5.5 - 0.3(x-2)(x \geq 2)$. 在同一坐标系内作出这两个函数的图象, 可以看到在 6~7 时之间两个函数图象有一个交点(图 1.6-7).



你可以借助计算器, 用二分法求出 P 点的坐标的近似值.

图 1.6-7

通过计算也可以得到这个结果. 在 6 时的水深约为 5 米, 此时货船的安全水深约为 4.3 米; 6.5 时的水深约为 4.2 米, 此时货船的安全水深约为 4.1 米; 7 时的水深约为 3.8 米, 而货船的安全水深约为 4 米. 因此为了安全, 货船最好在 6.5 时之前停止卸货, 将船驶向较深的水域.



如图 1.6-7, 设 $P(x_0, y_0)$, 有人认为, 由于 P 点是两个图象的交点, 说明在 x_0 时, 货船的安全水深正好与港口水深相等, 因此在这时停止卸货将船驶向较深水域就可以了. 你认为对吗?

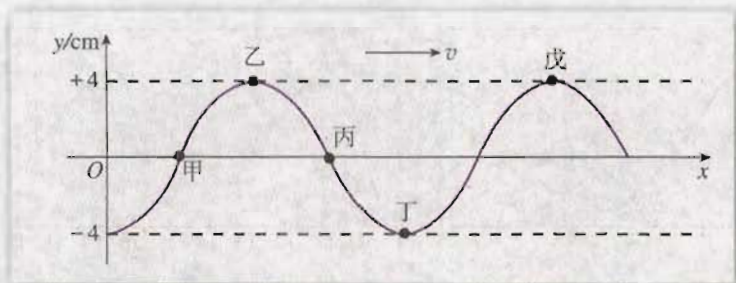
三角函数作为描述现实世界中周期现象的一种数学模型, 可以用来研究很多问题, 在刻画周期变化规律、预测其未来等方面都发挥着十分重要的作用.

具体的, 我们可以利用搜集到的数据, 作出相应的“散点图”, 通过观察散点图并进行函数拟合而获得具体的函数模型, 最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题.

实际问题通常涉及复杂的数据, 因此往往需要使用计算机或计算器.

练习

1. 下图为一向右传播的绳波在某一时刻绳子各点的位置图, 经过 $\frac{1}{2}$ 周期后, 乙点的位置将移至何处?



(第1题)

2. 电视台的不同栏目播出的时间周期是不同的, 有的每天播出, 有的隔天播出, 有的一周播出一一次. 请查阅当地的电视节目预告, 统计不同栏目的播出周期.
3. 自出生之日起, 人的情绪、体力、智力等心理、生理状况就呈周期变化. 根据心理学家的统计, 人体节律分为体力节律、情绪节律和智力节律三种. 这些节律的时间周期分别为 23 天、28 天、33 天. 每个节律周期又分为高潮期、临界日和低潮期三个阶段. 以上三个节律周期的半数临界日, 这就是说 11.5 天、14 天、16.5 天分别为体力节律、情绪节律和智力节律的临界日. 临界日的前半期为高潮期, 后半期为低潮期. 生日前一天是起始位置 (平衡位置), 请根据自己的出生日期, 绘制自己的体力、情绪和智力曲线, 并总结自己在什么时候应当控制情绪, 在什么时候应当鼓励自己; 在什么时候应当加强锻炼, 在什么时候应当保持体力?

习题 1.6

A 组

1. 根据下列条件, 求 $\triangle ABC$ 的内角 A :

(1) $\sin A = \frac{1}{2}$;

(2) $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\tan A = 1$;

(4) $\tan A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 根据下列条件, 求 $(0, 2\pi)$ 内的角 x :

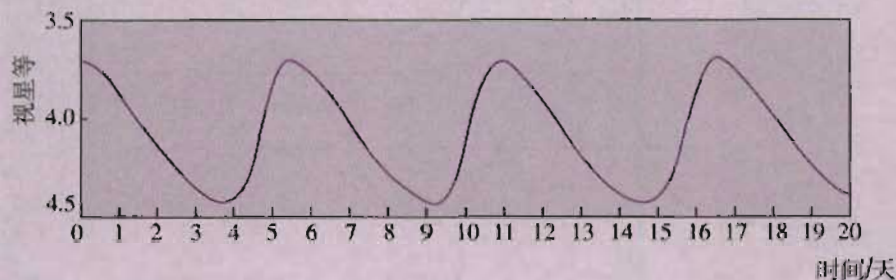
(1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\sin x = -1$;

(3) $\cos x = 0$;

(4) $\tan x = 1$.

3. 天上有些恒星的亮度是会变化的, 其中一种称为造父(型)变星, 本身体积会膨胀收缩造成亮度周期性的变化. 下图为一造父变星的亮度随时间的周期变化图. 此变星的亮度变化的周期为多少天? 最亮时是几等星? 最暗时是几等星?



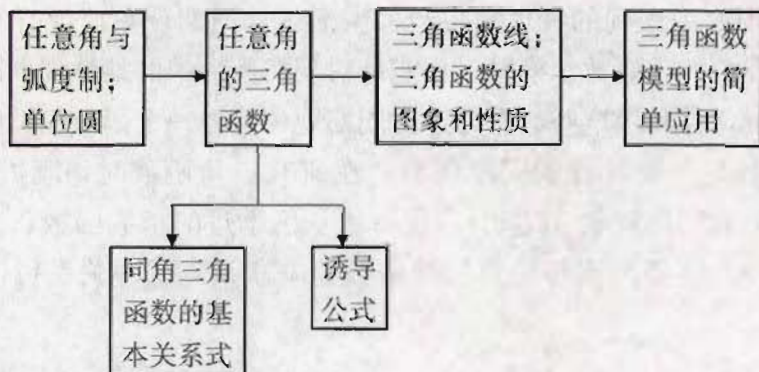
4. 夏天是用电的高峰时期, 特别是在晚上, 为保证居民空调制冷用电, 电力部门不得不对企事业单位拉闸限电, 而到了0时以后, 又出现电力过剩的情况. 因此每天的用电也出现周期性的变化. 为保证居民用电, 电力部门提出了“削峰平谷”的想法, 即提高晚上高峰时期的电价, 同时降低后半夜低峰时期的电价, 鼓励各单位在低峰时用电. 请你调查你们地区每天的用电情况, 制定一项“削峰平谷”的电价方案.

B 组

- 北京天安门广场的国旗每天是在日出时随太阳升起, 在日落时降旗. 请根据年鉴或其他的参考资料, 统计过去一年不同时期的日出和日落时间.
 - 在同一坐标系中, 以日期为横轴, 画出散点图, 并用曲线去拟合这些数据, 同时找到函数模型;
 - 某同学准备在五一长假时去看升旗, 他应当几点到达天安门广场?
- 一个城市所在的经度和纬度与该城市的日出和日落的时间有怎样的关系? 收集其他有关的数据并提供理论证据支持你的结论.

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 锐角三角函数与解直角三角形直接相关，钝角三角函数则与解任意三角形直接相关。任意角的三角函数虽然是锐角、钝角三角函数的推广，但它与解三角形已经没有什么关系了，它是一种最基本的、最有表现力的周期函数。

2. 任意角和弧度制的引入都与生产实际以及数学本身发展的需要紧密相关。从本章的学习中可以看到，弧度制的引入为三角函数的研究提供了许多方便。你能概括一下弧度制的好处吗？

3. 单位圆在三角函数的研究中有非常重要的作用，它是我们认识任意角、弧度制、任意角的三角函数，理解三角函数的性质，推导同角三角函数的关系式和诱导公式，作三角函数的图象等的重要工具。你能借助于单位圆，自己归纳一下三角函数的性质以及有关公式吗？

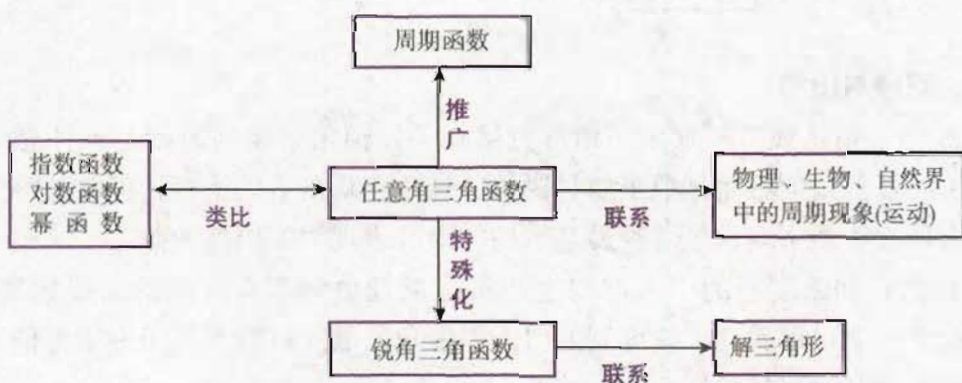
另外，正弦、余弦、正切等三角函数名称，与单位圆中的三角函数线直接相关。你能说出这种联系吗？

4. 将角放在直角坐标系中讨论不但使角的表示有了统一的方法，而且使我们能够借助直角坐标系中的单位圆，建立角的变化与单位圆上点的变化之间的对应关系，从而用单位圆上点的纵坐标、横坐标来表示圆心角的正弦函数、余弦函数。因此，正弦函数、余弦函数的基本性质与圆的几何性质（主要是对称性）之间存在着非常紧密的联系。例如，和单位圆相关的“勾股定理”与同角三角函数的基本关系有内在的一致性；单位圆周长为 2π 与正弦函数、余弦函数的周期为 2π 是一致的；圆的各种对称性与三角函数的奇偶性、诱导公式等也是一致的；等等。因此，三角函数的研究过程能够很好地体现数形结合思想。

5. 计算器或计算机在三角函数的学习中可以发挥重要作用, 它不仅可以帮助我们画出三角函数图象, 还能为我们分析三角函数的性质提供支持. 例如, 在分析 A 、 ω 、 φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响时, 计算器或计算机大有用武之地. 所以在分析和解决三角函数问题时应充分发挥信息技术的特长.

6. 正如章引言中谈到的, 现实生产、生活中, 周期现象广泛存在, 三角函数正是刻画周期现象的重要数学模型. 你能针对现实生活中的某种周期现象, 用适当的方法搜集数据, 并利用这些数据为这种周期现象建立一个函数模型吗?

7. 三角函数是一类特殊的周期函数, 在研究三角函数时, 既可以联系物理、生物、自然界中的周期现象(运动), 也可以从已学过的指数函数、对数函数、幂函数等得到启发, 还要注意与锐角三角函数建立联系. 这种关系可以用以下框图表示.



复习参考题

A 组

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S , 并且把 S 中适合不等式 $-2\pi \leq \beta < 4\pi$ 的元素 β 写出来:

(1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $-\frac{2}{3}\pi$; (3) $\frac{12}{5}\pi$; (4) 0.

2. 在半径为 15 cm 的圆中, 一扇形的弧含有 54° , 求这个扇形的周长与面积 (π 取 3.14, 计算结果保留两个有效数字).

3. 确定下列三角函数值的符号:

(1) $\sin 4$; (2) $\cos 5$;
(3) $\tan 8$; (4) $\tan(-3)$.

4. 已知 $\cos \varphi = \frac{1}{4}$, 求 $\sin \varphi$, $\tan \varphi$.

5. 已知 $\sin x = 2\cos x$, 求角 x 的三个三角函数值.

6. 用 $\cos \alpha$ 表示 $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

7. 求证:

(1) $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$;
(2) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = 1$.

8. 已知 $\tan \alpha = 3$, 计算:

(1) $\frac{4\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 3\sin \alpha}$; (2) $\sin \alpha \cos \alpha$;
(3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

9. 先估计结果的符号, 再进行计算:

(1) $\sin \frac{25}{6}\pi + \cos \frac{25}{3}\pi + \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right)$;
(2) $\sin 2 + \cos 3 + \tan 4$ (可用计算器).

10. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, 计算:

(1) $\cos(2\pi - \alpha)$; (2) $\tan(\alpha - 7\pi)$.

11. 先比较大小, 再用计算器求值:

(1) $\sin 378^\circ 21'$, $\tan 1111^\circ$, $\cos 642.5^\circ$;
(2) $\sin(-879^\circ)$, $\tan\left(-\frac{33\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\frac{13}{10}\pi\right)$;
(3) $\sin 3$, $\cos(\sin 2)$.

12. 设 $\pi < x < 2\pi$, 填表:

x	$\frac{7\pi}{6}$				$\frac{7\pi}{4}$	
$\sin x$				-1		
$\cos x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$			$\sqrt{3}$			

13. 下列各式能否成立, 说明理由:

(1) $\cos^2 x = 1.5$; (2) $\sin^3 x = -\frac{\pi}{4}$.

14. 求下列函数的最大值、最小值, 并且求使函数取得最大、最小值的 x 的集合:

(1) $y = \sqrt{2} + \frac{\sin x}{\pi}$, $x \in \mathbf{R}$; (2) $y = 3 - 2\cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

15. 已知 $0 \leq x \leq 2\pi$, 求适合下列条件的角 x 的集合:

- (1) $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是增函数;
 (2) $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是减函数;
 (3) $y = \sin x$ 是增函数, 而 $y = \cos x$ 是减函数;
 (4) $y = \sin x$ 是减函数, 而 $y = \cos x$ 是增函数.

16. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图:

- (1) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;
 (2) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;
 (3) $y = 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;
 (4) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

17. (1) 用描点法画出函数 $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象.

(2) 如何根据第 (1) 小题并运用正弦函数的性质, 得出函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象?

(3) 如何根据第 (2) 小题并通过平行移动坐标轴, 得出函数 $y = \sin(x + \varphi) + k$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象? (其中 φ, k 都是常数)

18. 不通过画图, 写出下列函数的振幅、周期、初相, 并说明如何由正弦曲线得出它们的图象:

- (1) $y = \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;
 (2) $y = 2 \sin \frac{1}{6} x$, $x \in \mathbf{R}$.

B 组

1. 已知 α 为第四象限角, 确定下列各角的终边所在的位置:

(1) $\frac{\alpha}{2}$; (2) $\frac{\alpha}{3}$; (3) 2α .

2. 一个扇形的弧长与面积的数值都是 5, 求这个扇形中心角的度数.

3. 已知 α 为第二象限角, 化简

$$\cos \alpha \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} + \sin \alpha \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}.$$

4. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 计算:

(1) $\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{5\cos \alpha - \sin \alpha}$; (2) $\frac{1}{2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$.

5. 求证 $\frac{1+\sin \alpha + \cos \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1+\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$.

6. 已知 $x \cos \theta = a$, $\frac{y}{\tan \theta} = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), 求证

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7. 已知 $\tan \theta + \sin \theta = a$, $\tan \theta - \sin \theta = b$, 求证 $(a^2 - b^2)^2 = 16ab$.

8. (1) 函数 $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 在什么区间上是减函数?

(2) 函数 $y = \sin\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 在什么区间上是增函数?

9. (1) 我们知道, 以原点为圆心, r 为半径的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$. 那么

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

表示什么曲线? (其中 r 是正常数, θ 在 $[0, 2\pi)$ 内变化)

(2) 在直角坐标系中,

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta, \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

表示什么曲线? (其中 a 、 b 、 r 是常数, 且 r 为正数, θ 在 $[0, 2\pi)$ 内变化)

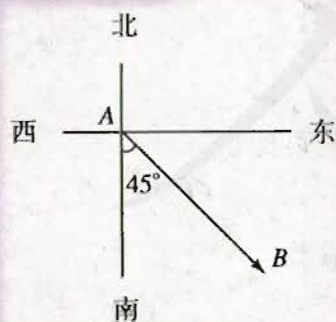
2



北京

娘子关 槐树铺
NIANGZIGUAN HUAI SHUPU
出口 → 2 km

广州



如果没有运算，向量只
是一个“路标”，因为有了运
算，向量的力量无限。

第二章

平面向量

2.1 平面向量的实际背景及基本概念

2.2 平面向量的线性运算

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示

2.4 平面向量的数量积

2.5 平面向量应用举例

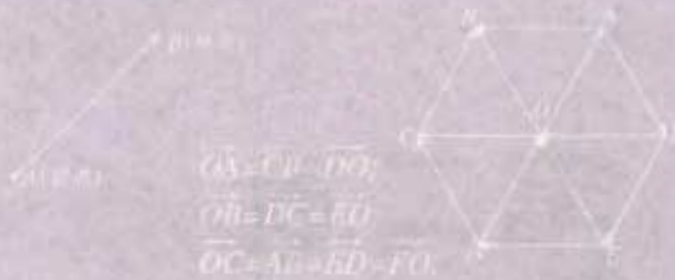
位置是几何学研究的重要内容之一，几何中常用点表示位置，研究如何由一点的位置确定另外一点的位置。

如左图，如何由A点确定B点的位置？

一种常用的方法是，以A点为参照点，用B点与A点之间的方位和距离确定B点的位置。如，B点在A点南偏东 45° ，30千米处。这样，在A点与B点之间，我们可以用有向线段AB表示B点相对于A点的位置，有向线段AB就是A点与B点之间的位移，位移简明地表示了位置之间的相对关系。像位移这种既有大小又有方向的量，加以抽象，就是我们本章将要研究的向量。

向量是近代数学中重要和基本的概念之一，有深刻的几何背景，是解决几何问题的有力工具。向量概念引入后，全等和平行（平移）、相似、垂直、勾股定理就可转化为向量的加（减）法、数乘向量、数量积运算（运算律），从而把图形的基本性质转化为向量的运算体系。

向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，有着极其丰富的实际背景，在数学和物理学科中具有广泛的应用。



2.1.1 向量的物理背景与概念

从本章引言中, 我们知道, 位移是既有大小, 又有方向的量. 你还能举出一些这样的量吗?

力既有大小, 又有方向. 例如, 物体受到的重力是竖直向下的 (图 2.1-1), 物体的质量越大, 它受到的重力越大; 物体在液体中受到的浮力是竖直向上的 (图 2.1-2), 物体浸在液体中的体积越大, 它受到的浮力越大; 被拉长的弹簧的弹力是向左的 (图 2.1-3), 被压缩的弹簧的弹力是向右的 (图 2.1-4), 并且在弹性限度内, 弹簧拉长或压缩的长度越大, 弹力越大.

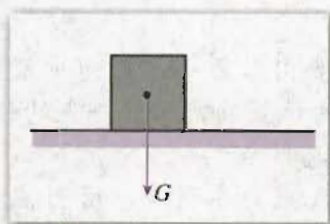


图 2.1-1

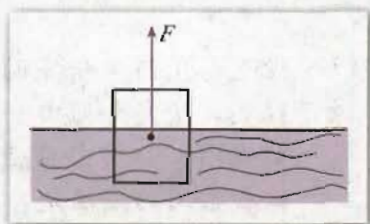


图 2.1-2



你还能举出物理学中力的一些实例吗?

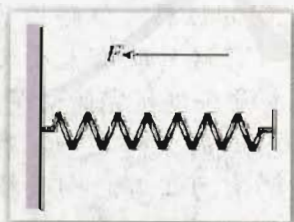


图 2.1-3

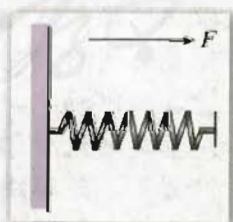


图 2.1-4

回顾学习数的概念, 我们可以从一枝笔、一棵树、一本书……中抽象出只有大小的数量“1”. 类似地, 我们可以对力、位移……这些既有大小又有方向的量进行抽象, 形成一种新的量.

数学中,我们把这种既有大小,又有方向的量叫做**向量**①(vector),而把那些只有大小,没有方向的量(如年龄、身高、长度、面积、体积、质量等),称为**数量**②.

① 物理学中常称为**矢量**;

② 物理学中常称为**标量**.

2.1.2 向量的几何表示

由于实数与数轴上的点一一对应,所以数量常常用数轴上的一个点表示,而且不同的点表示不同的数量.对于向量,我们常用带箭头的线段来表示,线段按一定比例(标度)画出,它的长短表示向量的大小,箭头的指向表示向量的方向.

我们知道,带有方向的线段叫做**有向线段**.如图 2.1-5,我们在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$,起点写在终点的前面.

已知 $\overrightarrow{AB}$, 线段 AB 的长度也叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度,记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 有向线段包含三个要素:**起点、方向、长度**.知道了有向线段的起点、方向和长度,它的终点就唯一确定.

向量可以用有向线段表示.向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小,也就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(或称**模**),记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 长度为 0 的向量叫做**零向量**(zero vector),记作 $\mathbf{0}$. 长度等于 1 个单位的向量,叫做**单位向量**(unit vector).

向量也可用字母 $\mathbf{a}$ ③, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... 表示,或用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示,例如, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

③ 印刷用**黑体** $\mathbf{a}$, 书写用 $\vec{a}$.

例 1 如图 2.1-6, 试根据图中的比例尺以及三地的位置, 在图中分别用向量表示 A 地至 B 、 C 两地的位移, 并求出 A 地至 B 、 C 两地的实际距离(精确到 1 km).

解:

$\overrightarrow{AB}$ 表示 A 地至 B 地的位移, 且 $|\overrightarrow{AB}| \approx$ _____;

$\overrightarrow{AC}$ 表示 A 地至 C 地的位移, 且 $|\overrightarrow{AC}| \approx$ _____.



时间、路程、功是向量吗? 速度、加速度是向量吗?

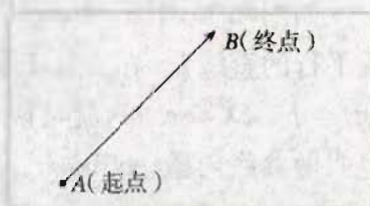


图 2.1-5

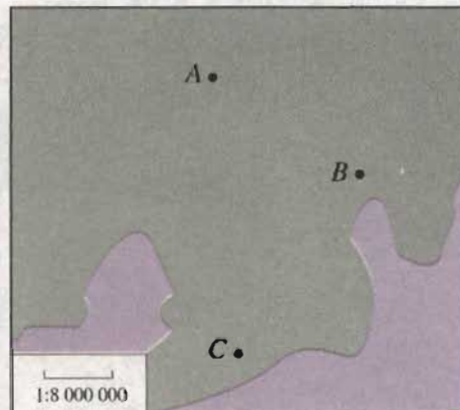


图 2.1-6

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量(parallel vectors), 图 2.1-7 就是用有向线段表示的两个平行向量 a 、 b . 向量 a 、 b 平行, 通常记作 $a \parallel b$.

我们规定: 零向量与任一向量平行, 即对于任意向量 a , 都有 $0 \parallel a$.

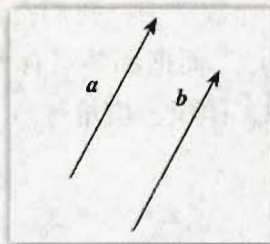


图 2.1-7

2.1.3 相等向量与共线向量

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量(equal vector). 如图 2.1-8, 用有向线段表示的向量 a 与 b 相等, 记作 $a=b$. 任意两个相等的非零向量, 都可用同一条有向线段来表示, 并且与有向线段的起点无关. 在平面上, 两个长度相等且指向一致的有向线段表示同一个向量, 因为向量完全由它的方向和模确定.

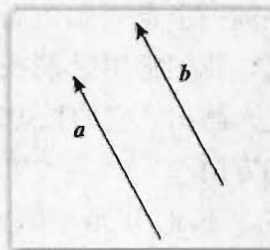


图 2.1-8

如图 2.1-9, a , b , c 是一组平行向量, 任作一条与 a 所在直线平行的直线 l , 在 l 上任取一点 O , 则可在 l 上分别作出 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OC}=c$. 这就是说, 任一组平行向量都可以移动到同一直线上, 因此, 平行向量也叫做共线向量(collinear vectors).

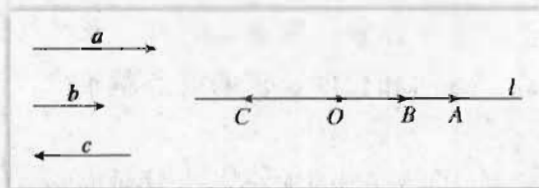


图 2.1-9

例 2 如图 2.1-10, 设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 分别写出图中与 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.

解: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DO}$;
 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO}$;
 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO}$.

向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{FE}$ 相等吗? 向量 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{AF}$ 相等吗?

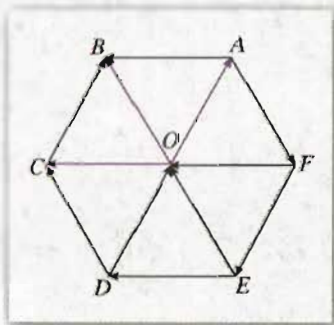
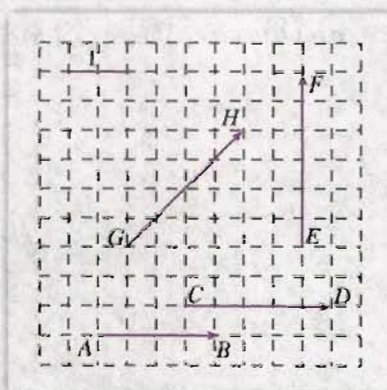


图 2.1-10

练习

1. 画有向线段, 分别表示一个竖直向上, 大小为 18 N 的力和一个水平向左、大小为 28 N 的力 (1 cm 长表示 10 N).
2. 非零向量 $\vec{AB}$ 的长度怎样表示? 非零向量 $\vec{BA}$ 的长度怎样表示? 这两个向量的长度相等吗? 这两个向量相等吗?
3. 指出图中各向量的长度.
4. (1) 用有向线段表示两个相等的向量, 如果有相同的起点, 那么它们的终点是否相同?
(2) 用有向线段表示两个方向相同但长度不同的向量, 如果有相同的起点, 那么它们的终点是否相同?



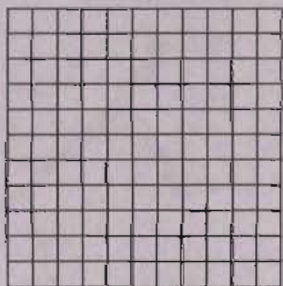
(第3题)

习题 2.1

A 组

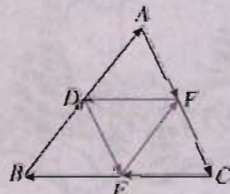
1. 在如图所示的坐标纸中, 用直尺和圆规画出下列向量:

- (1) $|\vec{OA}| = 4$, 点 A 在点 O 正南方向;
- (2) $|\vec{OB}| = 2\sqrt{2}$, 点 B 在点 O 北偏西 45° 方向;
- (3) $|\vec{OC}| = 2$, 点 C 在点 O 南偏西 30° 方向.



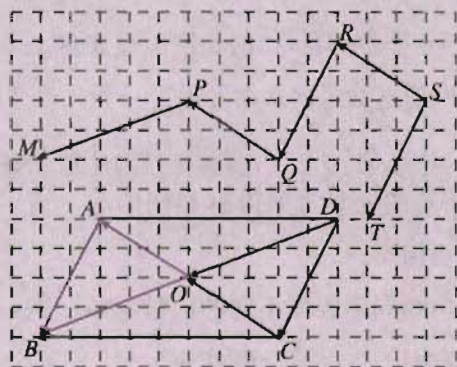
(第1题)

2. 一人从点 A 出发, 向东走 500 米到达点 B, 接着向北偏东 60° 走 300 米到达点 C, 然后再向北偏东 45° 走 100 米到达点 D. 试选择适当的比例尺, 用向量表示这个人的位移.
3. 如图, D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点, 写出图中与 $\vec{DE}$ 、 $\vec{EF}$ 、 $\vec{FD}$ 相等的向量.



(第3题)

4. 如图, 在方格纸上的 $\square ABCD$ 和折线 $MPQRST$ 中, 点 O 是 $\square ABCD$ 的对角线的交点, 且 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 分别写出图中与 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 相等的向量.



(第4题)

5. 已知边长为 3 的等边三角形 ABC , 求 BC 边上的中线向量 $\overrightarrow{AD}$ 的模 $|\overrightarrow{AD}|$.
6. 判断下列结论是否正确 (正确的在括号内打“√”, 错误的打“×”), 并说明理由.
- (1) 若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 都是单位向量, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. ()
 - (2) 物理学中的作用力与反作用力是一对共线向量. ()
 - (3) 方向为南偏西 60° 的向量与北偏东 60° 的向量是共线向量. ()
 - (4) 直角坐标平面上的 x 轴、 y 轴都是向量. ()

B 组

1. 有人说, 由于海平面以上的高度 (海拔) 用正数表示, 海平面以下的高度用负数表示, 所以海拔也是向量. 你同意他的看法吗? 温度、角度是向量吗? 为什么?
2. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2BC$, M 、 N 分别为 AB 和 CD 的中点, 在以 A 、 B 、 C 、 D 、 M 、 N 为起点和终点的所有向量中, 相等的非零向量共有多少对?



向量及向量符号的由来

向量最初应用于物理学, 被称为矢量. 很多物理量, 如力、速度、位移、电场强度、磁感应强度等都是向量. 大约公元前 350 年, 古希腊著名学者亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384—前 322) 就知道了力可以表示成向量, “向量”一词来自力学、解析几何中的有

向线段. 最先使用有向线段表示向量的是英国大科学家牛顿 (Newton, 1642—1727).

向量是一种带几何性质的量, 除零向量外, 总可以画出箭头表示方向, 线段长表示大小的有向线段来表示它. 1806 年, 瑞士人阿尔冈 (R. Argand, 1768—1822) 以 $\overrightarrow{AB}$ 表示一个有向线段或向量. 1827 年, 莫比乌斯 (Möbius, 1790—1868) 以 $\overrightarrow{AB}$ 表示起点为 A , 终点为 B 的向量, 这种用法被数学家广泛接受. 另外, 哈密尔顿 (W. R. Hamilton, 1805—1865)、吉布斯 (J. W. Gibbs, 1839—1903) 等人则以小写希腊字母表示向量. 1912 年, 兰格文用 $\vec{a}$ 表示向量, 以后, 字母上加箭头表示向量的方法逐渐流行, 尤其在手写稿中. 为了方便印刷, 用粗黑体小写字母 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 等表示向量, 这两种符号一直沿用至今.

向量进入数学并得到发展, 是从复数的几何表示开始的. 1797 年, 丹麦数学家威塞尔 (C. Wessel, 1745—1818) 利用坐标平面上的点 (a, b) 表示复数 $a+bi$, 并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算. 把坐标平面上的点用向量表示出来, 并把向量的几何表示用于研究几何与三角问题. 人们逐步接受了复数, 也学会了利用复数表示、研究平面中的向量.

你能体会用符号表示向量的优越性吗?

CHAPTER 2

2.2

平面向量的线性运算

数能进行运算，因为有了运算而使数的威力无穷。与数的运算类比，向量是否也能进行运算呢？人们从向量的物理背景和数的运算中得到启发，引进了向量的运算。

下面我们学习向量的线性运算。

2.2.1 向量加法运算及其几何意义

如图 2.2-1，某对象从 A 点经 B 点到 C 点，两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 的结果，与 A 点直接到 C 点的位移 $\overrightarrow{AC}$ 结果相同。

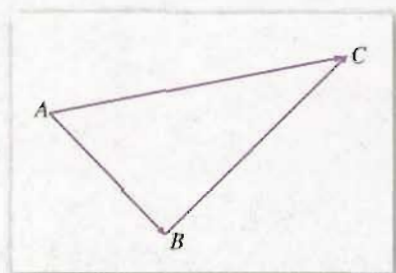


图 2.2-1

探究

图 2.2-2 表示橡皮条在两个力的作用下，沿着 GC 的方向伸长了 EO ；图 2.2-3 表示撤去 F_1 和 F_2 ，用一个力 F 作用在橡皮条上，使橡皮条沿着相同的方向伸长相同的长度。

改变力 F_1 与 F_2 的大小和方向，重复以上的实验，你能发现 F 与 F_1 、 F_2 之间的关系吗？

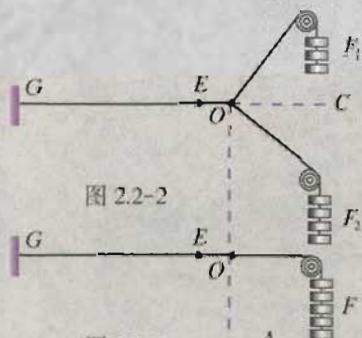


图 2.2-2

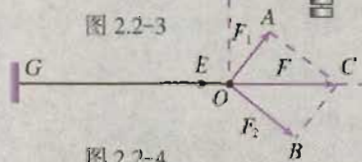


图 2.2-3

图 2.2-4

力 F 对橡皮条产生的效果, 与力 F_1 与 F_2 共同作用产生的效果相同, 物理学中把力 F 叫做 F_1 与 F_2 的合力.

合力 F 与力 F_1 、 F_2 有怎样的关系呢? 由图 2.2-4 发现, 力 F 在以 F_1 、 F_2 为邻边的平行四边形的对角线上, 并且大小等于平行四边形对角线的长.

数的加法启发我们, 从运算的角度看, F 可以认为是 F_1 与 F_2 的和, 即位移、力的合成可看作向量的加法.

如图 2.2-5, 已知非零向量 a 、 b , 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 a 与 b 的和, 记作 $a+b$, 即

$$a+b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

求两个向量和的运算, 叫做向量的加法. 这种求向量和的方法, 称为向量加法的三角形法则.

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型.

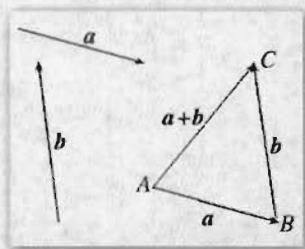


图 2.2-5

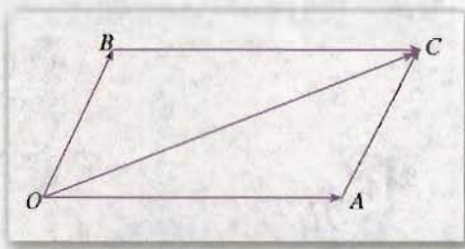


图 2.2-6

如图 2.2-6, 以同一点 O 为起点的两个已知向量 a 、 b 为邻边作 $\square OACB$, 则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 a 与 b 的和. 我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

力的合成可以看作向量加法平行四边形法则的物理模型.

对于零向量与任一向量 a , 我们规定

$$a+0=0+a=a.$$

例 1 如图 2.2-7, 已知向量 a 、 b , 求作向量 $a+b$.

作法 1: 在平面内任取一点 O (图 2.2-8), 作 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{AB}=b$. 则 $\overrightarrow{OB}=a+b$.

作法 2: 在平面内任取一点 O (图 2.2-9), 作 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$. 以 OA 、 OB 为邻边作 $\square OACB$, 连接 OC , 则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=a+b$.

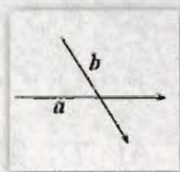


图 2.2-7

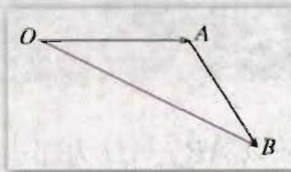


图 2.2-8

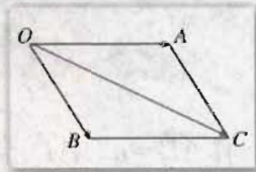


图 2.2-9



如图 2.2-10, 当在数轴上表示两个共线向量时, 它们的加法与数的加法有什么关系?

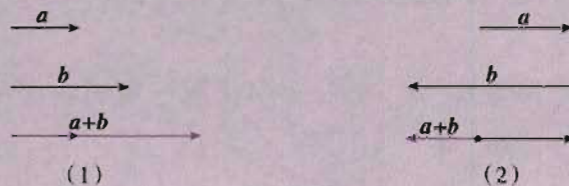


图 2.2-10

由例 1 可知, 当 a, b 不共线时, $|a+b| < |a| + |b|$.

一般地, 我们有

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$



a, b 处于什么位置时,

(1) $|a+b| = |a| + |b|$;

(2) $|a+b| = |a| - |b|$ (或 $|b| - |a|$).

我们知道, 数的运算和运算律紧密联系, 运算律可以有效地简化运算. 类似的, 向量的加法是否也有运算律呢?



数的加法满足交换律与结合律, 即对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

任意向量 a, b 的加法是否也满足交换律和结合律? 请画图进行探索.

如图 2.2-11, 作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, 以 AB, AD 为邻边作 $\square ABCD$, 则 $\overrightarrow{BC}=\underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{\hspace{2cm}}$.

因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=a+b$,

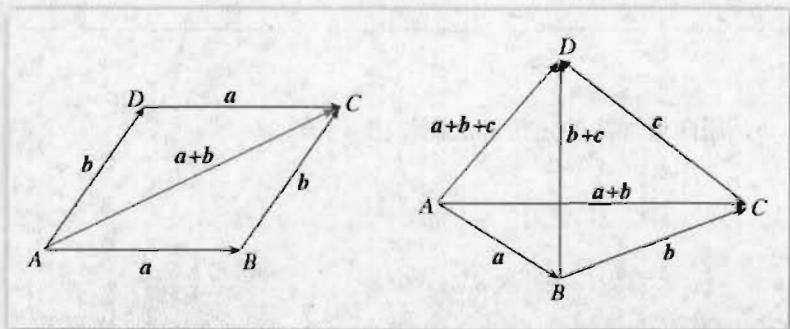


图 2.2-11

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = b + a,$$

所以 $a + b = b + a$.

由图 2.2-11, 你能否验证

$$(a + b) + c = a + (b + c)?$$

综上所述, 向量的加法满足交换律和结合律.

例 2 长江两岸之间没有大桥的地方, 常常通过轮渡进行运输. 如图 2.2-12 所示, 一艘船从长江南岸 A 点出发, 以 5 km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶, 同时江水的速度为向东 2 km/h.

(1) 试用向量表示江水速度、船速以及船实际航行的速度;

(2) 求船实际航行的速度的大小 (保留两个有效数字) 与方向 (用与江水速度间的夹角表示, 精确到度).

解: (1) 如图 2.2-13 所示, $\overrightarrow{AD}$ 表示船速, $\overrightarrow{AB}$ 表示水速, 以 AD、AB 为邻边作 $\square ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 表示船实际航行的速度.

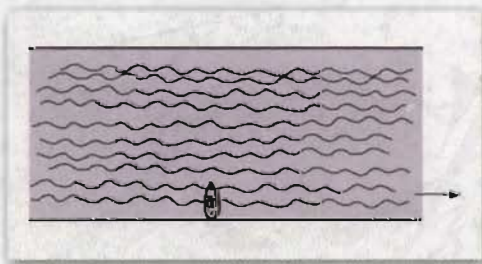


图 2.2-12

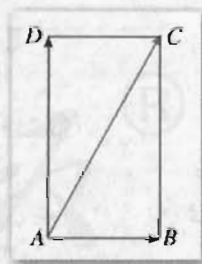


图 2.2-13

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 5$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5.4. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \tan \angle CAB = \frac{5}{2},$$

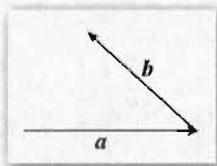
由计算器得 $\angle CAB \approx 68^\circ$.

答: 船实际航行速度的大小约为 5.4 km/h, 方向与水的流速间的夹角约为 68° .

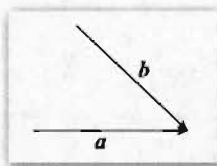
练习

1. 如图, 已知 a 、 b , 用向量加法的三角形法则作出 $a+b$.

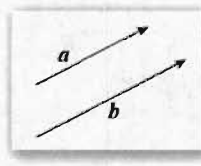
(1)



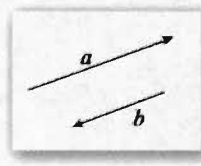
(2)



(3)



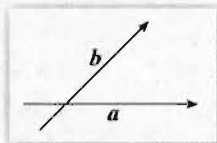
(4)



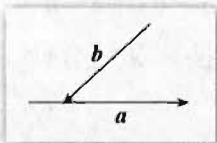
(第1题)

2. 如图, 已知 a 、 b , 用向量加法的平行四边形法则作出 $a+b$.

(1)



(2)

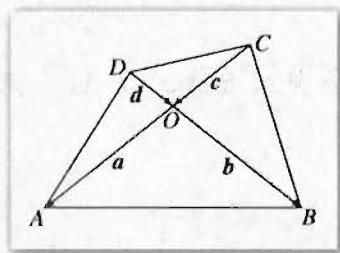


(第2题)

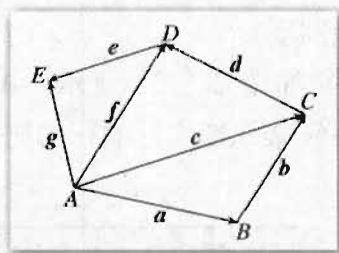
3. 根据图示填空:

(1) $a+d=$ _____;

(2) $c+b=$ _____.



(第3题)



(第4题)

4. 根据图示填空:

(1) $a+b=$ _____;

(2) $c+d=$ _____;

(3) $a+b+d=$ _____;

(4) $c+d+e=$ _____.

2.2.2 向量减法运算及其几何意义

探究

向量是否有减法？如何理解向量的减法？

我们知道，减去一个数等于加上这个数的相反数，向量的减法是否也有类似的法则？

与数 x 的相反数是 $-x$ 类似，我们规定，与 a 长度相等，方向相反的向量，叫做 a 的相反向量，记作 $-a$ 。由于方向反转两次仍回到原来的方向，因此 a 和 $-a$ 互为相反向量，于是

$$-(-a)=a.$$

我们规定，零向量的相反向量仍是零向量。

任一向量与其相反向量的和是零向量，即

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

所以，如果 a 、 b 是互为相反的向量，那么

$$a=-b, b=-a, a+b=0.$$

我们定义

$$a-b=a+(-b),$$

即减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量。

如图 2.2-14，设向量 $\overrightarrow{AB}=b$ ， $\overrightarrow{AC}=a$ ，则 $\overrightarrow{AD}=-b$ ，由向量减法的定义知，

$$\overrightarrow{AE}=a+(-b)=a-b.$$

又

$$b+\overrightarrow{BC}=a,$$

所以

$$\overrightarrow{BC}=a-b.$$

由此，我们得到 $a-b$ 的作图方法。

如图 2.2-15，已知 a 、 b ，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA}=a$ 。

$\overrightarrow{OB}=b$ ，则 $\overrightarrow{BA}=a-b$ 。即 $a-b$ 可以表示为从向量 b 的终点指向向量 a 的终点的向量，这是向量减法的几何意义。

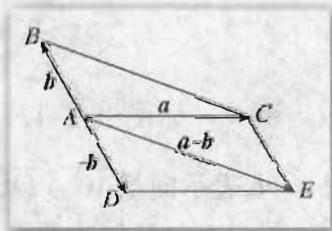


图 2.2-14

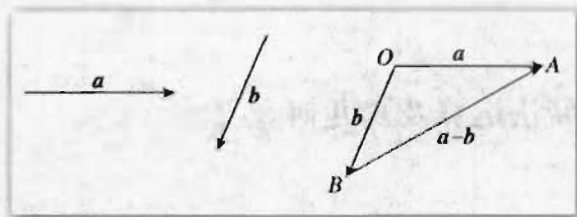


图 2.2-15



(1) 在图 2.2-15 中, 如果从 a 的终点到 b 的终点作向量, 那么所得向量是什么?

(2) 改变图 2.2-15 中向量 a 、 b 的方向, 使 $a \parallel b$, 怎样作出 $a-b$ 呢?

例 3 如图 2.2-16(1), 已知向量 a 、 b 、 c 、 d , 求作向量 $a-b$, $c-d$.

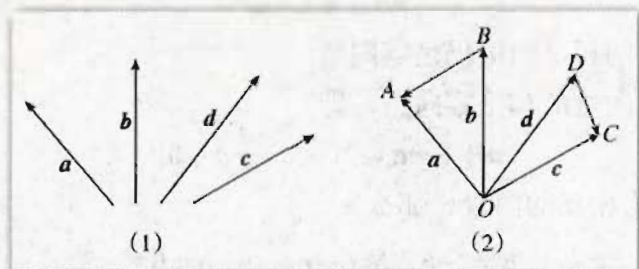


图 2.2-16

作法: 如图 2.2-16(2), 在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OC}=c$, $\overrightarrow{OD}=d$. 则

$$\overrightarrow{BA}=a-b,$$

$$\overrightarrow{DC}=c-d,$$

例 4 如图 2.2-17, $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, 你能用 a , b 表示向量 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ 吗?

解: 由向量加法的平行四边形法则, 我们知道

$$\overrightarrow{AC}=a+b;$$

同样, 由向量的减法, 知

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=a-b.$$

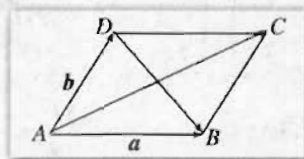


图 2.2-17

练习

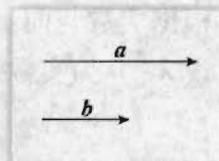
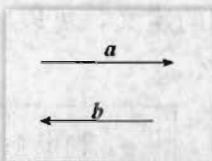
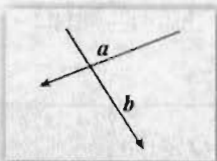
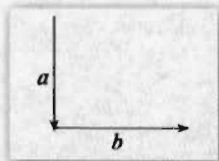
1. 如图, 已知 a, b , 求作 $a-b$.

(1)

(2)

(3)

(4)



(第1题)

2. 填空:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 作图验证: $-(a+b) = -a-b$.

2.2.3

向量数乘运算及其几何意义



已知非零向量 a , 作出 $a+a+a$ 和 $(-a)+(-a)+(-a)$. 你能说明它们的几何意义吗?

由图 2.2-18 可知, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = a + a + a$. 类似数的乘法, 我们把 $a+a+a$ 记作 $3a$, 即 $\overrightarrow{OC} = 3a$. 显然 $3a$ 的方向与 a 的方向相同, $3a$ 的长度是 a 的长度的 3 倍, 即 $|3a| = 3|a|$.

同样, 由图 2.2-18 可知, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = (-a) + (-a) + (-a)$, 即 $(-a) + (-a) + (-a) = 3(-a)$. 显然 $3(-a)$ 的方向与 a 的方向相反, $3(-a)$ 的长度是 a 的长度的 3 倍, 这样, $3(-a) = -3a$.

一般地, 我们规定实数 λ 与向量 a 的积是一个向量, 这种运算叫做向量的数乘 (multi-

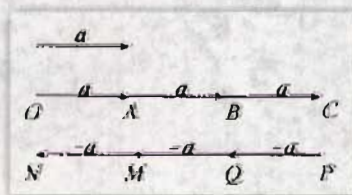


图 2.2-18

plication of vector by scalar), 记作 λa , 它的长度与方向规定如下:

$$(1) |\lambda a| = |\lambda| |a|;$$

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 的方向与 a 的方向相反.

由(1)可知, $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

根据实数与向量的积的定义, 可以验证下面的运算律.

设 λ, μ 为实数, 那么

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

特别地, 我们有

$$(-\lambda)a = -(\lambda a) = \lambda(-a),$$

$$\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b.$$



你能解释上述运算律的几何意义吗?

例5 计算:

$$(1) (-3) \times 4a;$$

$$(2) 3(a+b) - 2(a-b) - a;$$

$$(3) (2a+3b-c) - (3a-2b+c).$$

解: (1) 原式 $= (-3 \times 4)a = -12a$;

$$(2) \text{原式} = 3a + 3b - 2a + 2b - a = 5b;$$

$$(3) \text{原式} = 2a + 3b - c - 3a + 2b - c \\ = -a + 5b - 2c.$$



引入向量数乘运算后, 你能发现数乘向量与原向量之间的位置关系吗?

对于向量 $a (a \neq 0)$ 、 b , 如果有一个实数 λ , 使 $b = \lambda a$, 那么由向量数乘的定义知, a 与 b 共线.

反过来, 已知向量 a 与 b 共线, $a \neq 0$, 且向量 b 的长度是向量 a 的长度的 μ 倍, 即 $|b| = \mu |a|$, 那么当 a 与 b 同方向时, 有 $b = \mu a$; 当 a 与 b 反方向时, 有 $b = -\mu a$.

综上, 我们有如下定理: 向量 $a(a \neq 0)$ 与 b 共线, 当且仅当有唯一一个实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

例 6 如图 2.2-19, 已知任意两个非零向量 a, b , 试作 $\overrightarrow{OA} = a + b$, $\overrightarrow{OB} = a + 2b$, $\overrightarrow{OC} = a + 3b$. 你能判断 A、B、C 三点之间的位置关系吗? 为什么?

分析: 判断三点之间的位置关系, 主要是看这三点是否共线. 由于两点确定一条直线, 如果能够判断第三点在这条直线上, 那么就可以判断这三点共线. 本题中, 应用向量知识判断 A、B、C 三点是否共线, 可以通过判断向量 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 是否共线, 即是否存在 λ , 使 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ 成立.

解: 分别作向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$, 过点 A、C 作直线 AC (如图 2.2-20). 观察发现, 不论向量 a, b 怎样变化, 点 B 始终在直线 AC 上, 猜想 A、B、C 三点共线.

$$\begin{aligned} \text{事实上, 因为 } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= a + 2b - (a + b) \\ &= b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= a + 3b - (a + b) \\ &= 2b, \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AB}.$$

所以, A、B、C 三点共线.

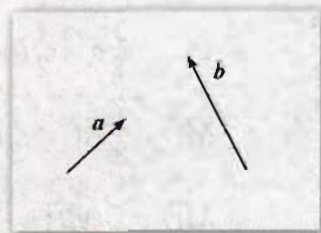


图 2.2-19

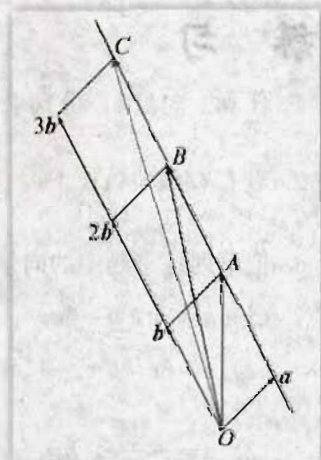


图 2.2-20

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算. 对于任意向量 a, b , 以及任意实数 λ, μ_1, μ_2 , 恒有

$$\lambda(\mu_1 a \pm \mu_2 b) = \lambda \mu_1 a \pm \lambda \mu_2 b. \text{ ①}$$



① 你能解释它的几何意义吗?

例 7 如图 2.2-21, $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 M, 且 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 你能用 a, b 表示 $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、 $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ 吗?

解: 在 $\square ABCD$ 中,

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = a + b, \\ \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = a - b. \end{aligned}$$

又 $\because$ 平行四边形的两条对角线互相平分,

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{MA} &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2}(a + b) \end{aligned}$$

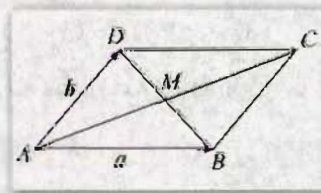


图 2.2-21

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

练习

1. 任画一向量 $\mathbf{e}$, 分别求作向量 $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = -4\mathbf{e}$.

2. 点 C 在线段 AB 上, 且 $\frac{AC}{CB} = \frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

3. 把下列各小题中的向量 $\mathbf{b}$ 表示为实数与向量 $\mathbf{a}$ 的积:

(1) $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{e}$;

(2) $\mathbf{a} = 8\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = -14\mathbf{e}$;

(3) $\mathbf{a} = -\frac{2}{3}\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{e}$;

(4) $\mathbf{a} = -\frac{3}{4}\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = -\frac{2}{3}\mathbf{e}$.

4. 判断下列各小题中的向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是否共线:

(1) $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}$;

(2) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

5. 化简:

(1) $5(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + 4(2\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$;

(2) $\frac{1}{3}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - \frac{1}{4}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

(3) $(x+y)\mathbf{a} - (x-y)\mathbf{a}$.

6. 已知向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ (O 、 A 、 B 三点不共线), 求作下列向量:

(1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

(2) $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$;

(3) $\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$.

习题 2.2

A 组

1. 设 a 表示“向东走 10 km”， b 表示“向西走 5 km”， c 表示“向北走 10 km”， d 表示“向南走 5 km”。试说明下列向量的意义。

- (1) $a+a$; (2) $a+b$;
 (3) $a+c$; (4) $b+d$;
 (5) $b+c+b$; (6) $d+a+d$.

2. 一架飞机向北飞行 300 km，然后改变方向向西飞行 400 km. 求飞机飞行的路程及两次位移的合成。

3. 一艘船以 8 km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶，同时河水的流速为 2 km/h. 求船实际航行的速度的大小与方向（精确到 1° ）。

4. 化简：

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$;
 (2) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$;
 (3) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$;
 (4) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$;
 (5) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD}$;
 (6) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$;
 (7) $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$.

5. 作图验证：

- (1) $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) = a$;
 (2) $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$.

6. 已知向量 a 、 b ，求作向量 c ，使 $a+b+c=0$. 表示 a 、 b 、 c 的有向线段能构成三角形吗？

7. 作图验证： $b-a=-(a-b)$.

8. 已知 a 、 b 为两个非零向量，

- (1) 求作向量 $a+b$ 及 $a-b$;
 (2) 向量 a 、 b 成什么位置关系时， $|a+b| = |a-b|$ （不要求证明）。

9. 化简：

- (1) $5(2a-2b) + 4(2b-3a)$;
 (2) $6(a-3b+c) - 4(-a+b-c)$;
 (3) $\frac{1}{2}[(3a-2b) + 5a - \frac{1}{3}(6a-9b)]$;
 (4) $(x-y)(a+b) - (x-y)(a-b)$.

10. 已知 $a=e_1+2e_2$ ， $b=3e_1-2e_2$ ，求 $a+b$ ， $a-b$ 与 $3a-2b$.

11. 已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于 O , 且 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, 用向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$.
12. $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $DE\parallel BC$, 且与边 AC 相交于点 E , $\triangle ABC$ 的中线 AM 与 DE 相交于点 N . 设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$, 用 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{AN}$.
13. 已知四边形 $ABCD$, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点, 求证: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

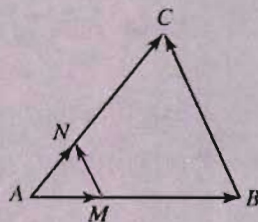
B 组

1. 飞机从甲地以北偏西 15° 的方向飞行 $1\,400\text{ km}$ 到达乙地, 再从乙地以南偏东 75° 的方向飞行 $1\,400\text{ km}$ 到达丙地, 试画出飞机飞行的位移示意图, 并说明丙地在甲地的什么方向? 丙地距甲地多远?

2. 已知 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 是非零向量, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ 与 $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ 一定相等吗? 为什么?

3. 如图, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

求证: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



(第3题)

4. 根据下列各个小题中的条件, 分别判断四边形 $ABCD$ 的形状, 并给出证明:

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;

(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

5. 已知 O 为四边形 $ABCD$ 所在平面内的一点, 且向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OD}$ 满足等式 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

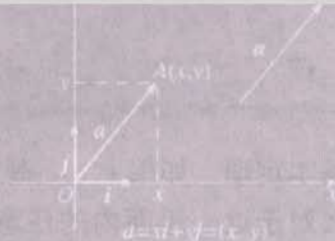
(1) 作图并观察四边形 $ABCD$ 的形状;

(2) 四边形 $ABCD$ 有什么特性? 试证明你的猜想.

CHAPTER 2

2.3

平面向量的基本定理及坐标表示



2.3.1 平面向量基本定理



给定平面内任意两个向量 e_1 、 e_2 ，请你作出向量 $3e_1 + 2e_2$ 、 $e_1 - 2e_2$ 。平面内的任一向量是否都可以用形如 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的向量表示呢？

如图 2.3-1，设 e_1 、 e_2 是同一平面内两个不共线的向量， a 是这一平面内的任一向量，我们通过作图研究 a 与 e_1 、 e_2 之间的关系。

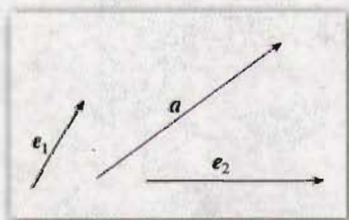


图 2.3-1

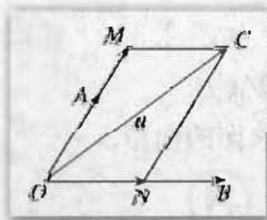


图 2.3-2

如图 2.3-2，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = e_1$ ， $\overrightarrow{OB} = e_2$ ， $\overrightarrow{OC} = a$ 。过点 C 作平行于直线 OB 的直线，与直线 OA 交于点 M ；过点 C 作平行于直线 OA 的直线，与直线 OB 交于点 N 。由向量的线性运算性质可知，存在实数 λ_1 、 λ_2 ，使得 $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 e_1$ ， $\overrightarrow{ON} = \lambda_2 e_2$ 。由于 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ ，所以 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 。也就是说，任一向量 a 都可以表示成 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式。

由上述过程，可以发现，平面内任一向量都可以由这个平面内两个不共线的向量 e_1 、 e_2 表示出来。当 e_1 、 e_2 确定后，任意一个向量都可以由这两个向量量化，这为我们研究问题带来极大的方便。

平面向量基本定理 如果 e_1 、 e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 a , 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

我们把不共线的向量 e_1 、 e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底(base)①.

不共线向量有不同方向, 它们的位置关系可用夹角来表示. 关于向量的夹角, 我们规定:

已知两个非零向量 a 和 b . 如图 2.3-3, 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫做向量 a 与 b 的夹角.

显然, 当 $\theta = 0^\circ$ 时, a 与 b 同向; 当 $\theta = 180^\circ$ 时, a 与 b 反向.

如果 a 与 b 的夹角是 90° , 我们说 a 与 b 垂直, 记作 $a \perp b$.

① 同一平面可以有不同的基底, 就像平面上可选取不同的坐标系一样.

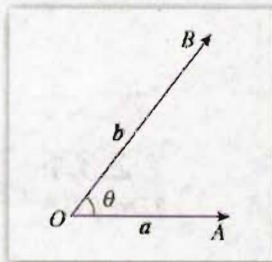


图 2.3-3

例 1 已知向量 e_1 、 e_2 (图 2.3-4), 求作向量 $-2.5e_1 + 3e_2$.

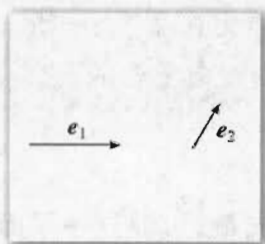


图 2.3-4

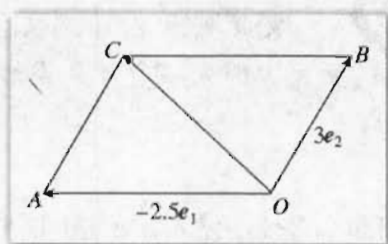


图 2.3-5

作法: 1. 如图 2.3-5, 任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = -2.5e_1$, $\overrightarrow{OB} = 3e_2$.

2. 作 $\square OACB$.

$\overrightarrow{OC}$ 就是求作的向量.



还有其他作法吗?

2.3.2

平面向量的正交分解及坐标表示

如图 2.3-6, 光滑斜面上一个木块受到重力 G 的作用, 产生两个效果, 一是木块受平行于斜面的力 F_1 的作用, 沿斜面下滑; 一是木块产生垂直于斜面的压力 F_2 . 也就是说,

重力 G 的效果等价于 F_1 和 F_2 的合力的效果, 即 $G = F_1 + F_2$.
 $G = F_1 + F_2$ 叫做把重力 G 分解.

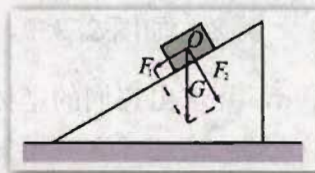


图 2.3-6

类似地, 由平面向量的基本定理, 对平面上的任意向量 a , 均可以分解为不共线的两个向量 $\lambda_1 a_1$ 和 $\lambda_2 a_2$, 使 $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$.

在不共线的两个向量中, 垂直是一种重要的情形. 把一个向量分解为两个互相垂直的向量, 叫做把向量正交分解. 如图 2.3-6, 重力 G 沿互相垂直的两个方向分解就是正交分解. 正交分解是向量分解中常见的一种情形.

在平面上, 如果选取互相垂直的向量作为基底时, 会为我们研究问题带来方便.



我们知道, 在平面直角坐标系中, 每一个点都可用一对有序实数 (即它的坐标) 表示. 对直角坐标平面内的每一个向量, 如何表示呢?

如图 2.3-7, 在平面直角坐标系中, 分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i 、 j 作为基底. 对于平面内的一个向量 a , 由平面向量基本定理可知, 有且只有一对实数 x 、 y , 使得

$$a = xi + yj. \quad ①$$

这样, 平面内的任一向量 a 都可由 x 、 y 唯一确定, 我们把有序数对 (x, y) 叫做向量 a 的坐标, 记作

$$a = (x, y), \quad ②$$

其中 x 叫做 a 在 x 轴上的坐标, y 叫做 a 在 y 轴上的坐标, ②式叫做向量的坐标表示.

显然, $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$, $0 = (0, 0)$.

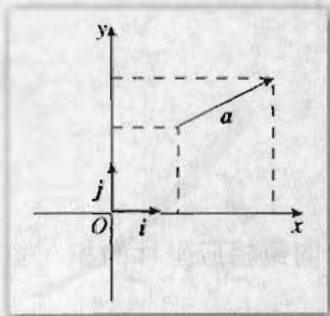


图 2.3-7

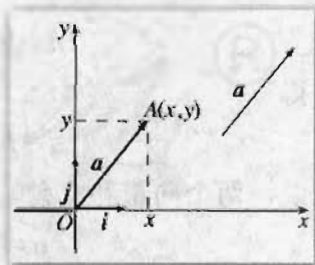


图 2.3-8

如图 2.3-8, 在直角坐标平面中, 以原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA} = a$, 则点 A 的位置由向量 a 唯一确定.

设 $\overrightarrow{OA} = xi + yj$, 则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 (x, y) 就是终点 A 的坐标; 反过来, 终点 A 的坐标 (x, y) 也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标. 因此, 在平面直角坐标系内, 每一个平面向量都可以用一有序实数对唯一表示.

例 2 如图 2.3-9, 分别用基底 i 、 j 表示向量 a 、 b 、 c 、 d , 并求出它们的坐标.

解: 由图 2.3-9 可知, $a = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2} = 2i + 3j$,

$\therefore a = (2, 3)$.

同理,

$$b = -2i + 3j = (-2, 3);$$

$$c = -2i - 3j = (-2, -3);$$

$$d = 2i - 3j = (2, -3).$$

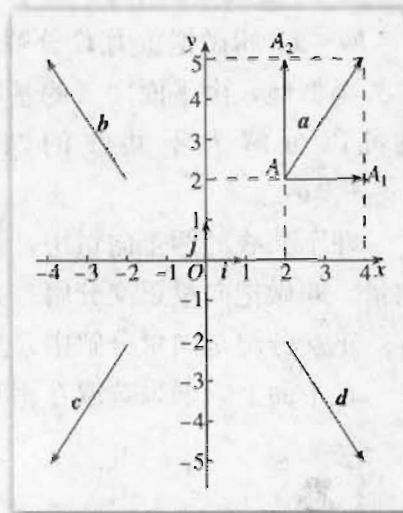


图 2.3-9

2.3.3 平面向量的坐标运算



已知 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 你能得出 $a + b$, $a - b$, λa 的坐标吗?

$$a + b = (x_1 i + y_1 j) + (x_2 i + y_2 j),$$

由向量线性运算的结合律和分配律, 可得

$$\begin{aligned} & (x_1 i + y_1 j) + (x_2 i + y_2 j) \\ &= (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j, \end{aligned}$$

即

$$a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

同理可得

$$a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

这就是说, 两个向量和 (差) 的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和 (差).

$$\lambda a = \lambda(x_1 i + y_1 j) = \lambda x_1 i + \lambda y_1 j,$$

即

$$\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

这就是说, 实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

例 3 如图 2.3-10, 已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

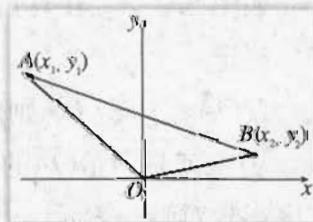


图 2.3-10

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
 &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\
 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1).
 \end{aligned}$$

因此, 一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标.



你能在图 2.3-10 中标出坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 的 P 点吗?

标出点 P 后, 我们发现, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与以原点为始点、点 P 为终点的向量的坐标是相同的, 这样就建立了向量的坐标与点的坐标之间的联系.

例 4 已知 $a = (2, 1)$, $b = (-3, 4)$, 求 $a + b$, $a - b$, $3a + 4b$ 的坐标.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } a + b &= (2, 1) + (-3, 4) = (-1, 5); \\
 a - b &= (2, 1) - (-3, 4) = (5, -3); \\
 3a + 4b &= 3(2, 1) + 4(-3, 4) \\
 &= (6, 3) + (-12, 16) \\
 &= (-6, 19).
 \end{aligned}$$

例 5 如图 2.3-11, 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(-2, 1)$ 、 $(-1, 3)$ 、 $(3, 4)$, 试求顶点 D 的坐标.

解法 1: 如图 2.3-11, 设顶点 D 的坐标为 (x, y) .

$$\because \overrightarrow{AB} = (-1 - (-2), 3 - 1) = (1, 2),$$

$$\overrightarrow{DC} = (3 - x, 4 - y),$$

由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 得

$$(1, 2) = (3 - x, 4 - y).$$

$$\therefore \begin{cases} 1 = 3 - x, \\ 2 = 4 - y. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(2, 2)$.

解法 2: 如图 2.3-12, 由向量加法的平行四边形法则可知

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$= (-2 - (-1), 1 - 3) + (3 - (-1), 4 - 3)$$

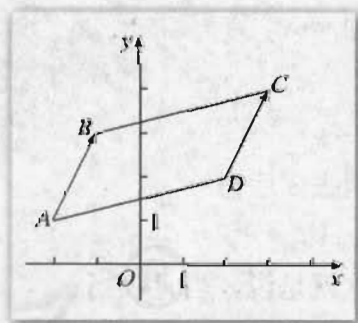


图 2.3-11

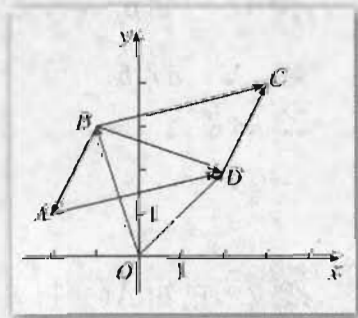


图 2.3-12

$= (3, -1),$
 而 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$
 $= (-1, 3) + (3, -1)$
 $= (2, 2).$
 $\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(2, 2).$



你能比较一下两种解法在思想方法上的异同点吗?

2.3.4 平面向量共线的坐标表示



如何用坐标表示两个共线向量?

设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 其中 $b \neq 0$. 我们知道, a, b 共线, 当且仅当存在实数 λ , 使

$$a = \lambda b.$$

如果用坐标表示, 可写为

$$(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2),$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2, \\ y_1 = \lambda y_2. \end{cases}$$

消去 λ 后得

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

这就是说, 当且仅当

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

时, 向量 $a, b (b \neq 0)$ 共线.

例 6 已知 $a = (4, 2)$, $b = (6, y)$, 且 $a \parallel b$, 求 y .

解: $\because a \parallel b,$
 $\therefore 4y - 2 \times 6 = 0.$
 $\therefore y = 3.$

例 7 已知 $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$, 试判断 A, B, C 三点之间的位置关系.

解: 在平面直角坐标系中作出 A, B, C 三点 (图 2.3-13), 观察图形, 我们猜想 A, B, C 三点共线. 下面给出证明.

$$\because \overrightarrow{AB} = (1 - (-1), 3 - (-1)) = (2, 4),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - (-1), 5 - (-1)) = (3, 6),$$

$$\text{又 } 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}.$$

$\because$ 直线 AB 、直线 AC 有公共点 A ,

$\therefore A, B, C$ 三点共线.

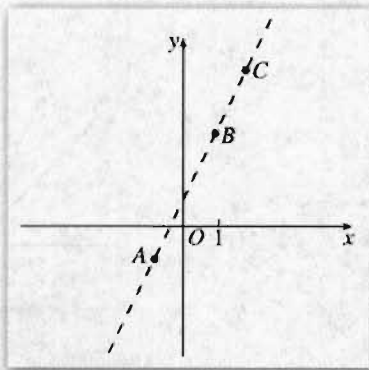


图 2.3-13

例 8 设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点, P_1, P_2 的坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

(1) 当点 P 是线段 P_1P_2 的中点时, 求点 P 的坐标;

(2) 当点 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 求点 P 的坐标.

解: (1) 如图 2.3-14, 由向量的线性运算可知

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

所以, 点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

(2) 如图 2.3-15, 当点 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 有两种情况, 即 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ 或 $\overrightarrow{P_1P} = 2\overrightarrow{PP_2}$.

如果 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ (图 2.3-15(1)), 那么

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2} \\ &= \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3} \right), \end{aligned}$$

即点 P 的坐标是 $\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3} \right)$.

同理, 如果 $\overrightarrow{P_1P} = 2\overrightarrow{PP_2}$ (图 2.3-15(2)), 那么点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3} \right)$.

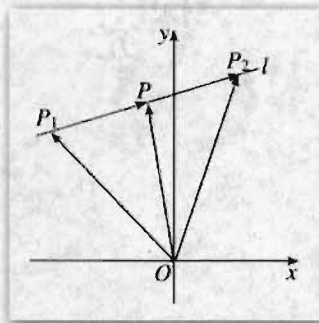


图 2.3-14

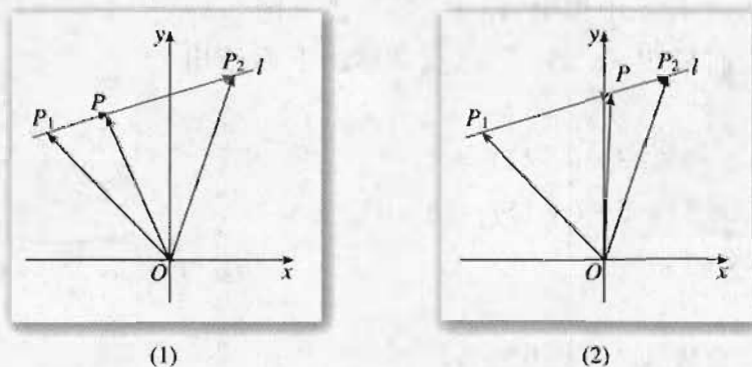


图 2.3-15



如图 2.3-16, 当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 时, 点 P 的坐标是什么?

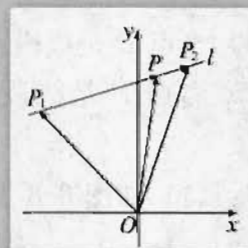


图 2.3-16

练习

1. 已知向量 a 、 b 的坐标, 求 $a+b$ 、 $a-b$ 的坐标:

(1) $a=(-2, 4)$, $b=(5, 2)$;

(2) $a=(4, 3)$, $b=(-3, 8)$;

(3) $a=(2, 3)$, $b=(-2, -3)$;

(4) $a=(3, 0)$, $b=(0, 4)$.

2. 已知 $a=(3, 2)$, $b=(0, -1)$, 求 $-2a+4b$, $4a+3b$ 的坐标.

3. 已知 A 、 B 两点的坐标, 求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ 的坐标:

(1) $A(3, 5)$, $B(6, 9)$;

(2) $A(-3, 4)$, $B(6, 3)$;

(3) $A(0, 3)$, $B(0, 5)$;

(4) $A(3, 0)$, $B(8, 0)$.

4. 已知点 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$, 试判断 AB 与 CD 的位置关系, 并给出证明.

5. 求线段 AB 的中点坐标:

(1) $A(2, 1), B(4, 3)$;

(2) $A(-1, 2), B(3, 6)$;

(3) $A(5, -4), B(3, -6)$.

6. 已知点 $O(0, 0)$, 向量 $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (6, -3)$, 点 P 是线段 AB 的三等分点, 求点 P 的坐标.

7. 已知 $A(2, 3), B(4, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{PB}|$, 求点 P 的坐标.

习题 2.3

A 组

1. 已知表示向量 a 的有向线段始点 A 的坐标, 求它的终点 B 的坐标:

(1) $a = (-2, 1), A(0, 0)$;

(2) $a = (1, 3), A(-1, 5)$;

(3) $a = (-2, -5), A(3, 7)$.

2. 已知作用在坐标原点的三个力分别为 $F_1 = (3, 4)$, $F_2 = (2, -5)$, $F_3 = (3, 1)$, 求作用在原点的合力 $F_1 + F_2 + F_3$ 的坐标.

3. 已知 $\square ABCD$ 的顶点 $A(-1, -2), B(3, -1), C(5, 6)$, 求顶点 D 的坐标.

4. 已知点 $A(1, 1), B(-1, 5)$ 及 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = 2 \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 求点 C, D, E 的坐标.

5. x 为何值时, $a = (2, 3)$ 与 $b = (x, -6)$ 共线?

6. 已知 $A(-2, -3), B(2, 1), C(1, 4), D(-7, -4)$, 试问 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是否共线?

7. 已知点 $O(0, 0), A(1, 2), B(-1, 3)$, 且 $\overrightarrow{OA'} = 2 \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 3 \overrightarrow{OB}$, 求点 A', B' 及向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的坐标.

B 组

1. 已知点 $O(0, 0), A(1, 2), B(4, 5)$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{AB}$. 当 $t = 1, \frac{1}{2}, -2, 2$ 时, 分别求点 P 的坐标.

2. 判断下列各点的位置关系, 并给出证明:

(1) $A(1, 2), B(-3, -4), C(2, 3.5)$;

(2) $P(-1, 2), Q(0.5, 0), R(5, -6)$;

(3) $E(9, 1)$, $F(1, -3)$, $G(8, 0.5)$.

3. 设 e_1, e_2 是平面内一组基底, 证明: 当

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$$

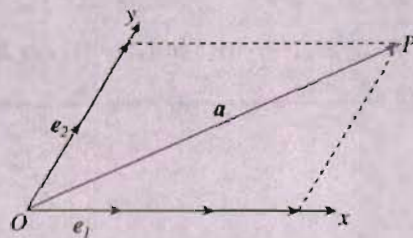
时, 恒有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

4. 如图, 设 Ox, Oy 是平面内相交成 60° 角的两条数轴, e_1, e_2 分别是与 x 轴、 y 轴正方向同向的单位向量, 若向量 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$, 则把有序数对 (x, y) 叫做向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系 xOy 中的坐标. 假设 $\overrightarrow{OP} = 3e_1 + 2e_2$,

(1) 计算 $|\overrightarrow{OP}|$ 的大小;

(2) 由平面向量基本定理, 本题中向量坐标的规定是否合理?



(第4题)

CHAPTER 2

2.4

平面向量的数量积

2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义

我们知道，如果一个物体在力 F 的作用下产生位移 s (图 2.4-1)，那么力 F 所做的功

$$W = |F| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 是 F 与 s 的夹角.

功是一个标量，它由力和位移两个向量来确定，这给我们一种启示，能否把“功”看成是这两个向量的一种运算的结果呢？

为此，我们引入向量“数量积”的概念.

已知两个非零向量 a 与 b ，我们把数量 $|a| |b| \cos \theta$ 叫做 a 与 b 的数量积(inner product) (或内积)，记作 $a \cdot b$ ，即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta,$$

其中 θ 是 a 与 b 的夹角， $|a| \cos \theta$ ($|b| \cos \theta$) 叫做向量 a 在 b 方向上 (b 在 a 方向上) 的投影(projection). 如图 2.4-2, $OB_1 = |b| \cos \theta$. 我们规定，零向量与任一向量的数量积为 0.

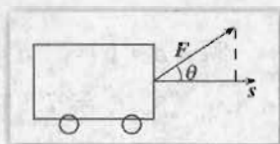


图 2.4-1

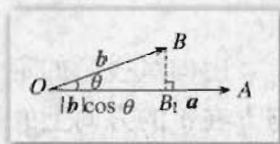


图 2.4-2



向量的数量积是一个数量，那么它什么时候为正？什么时候为负？

对比向量的线性运算，我们发现，向量线性运算的结果是一个向量，而两个向量的数量积是一个数量，而且这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关.

探究

由向量数量积的定义,你能否得到下面的结论?

设 a 和 b 都是非零向量,则

$$(1) a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0.$$

$$(2) \text{ 当 } a \text{ 与 } b \text{ 同向时, } a \cdot b = |a| |b|; \text{ 当 } a \text{ 与 } b \text{ 反向时,} \\ a \cdot b = -|a| |b|. \text{ 特别地, } a \cdot a^0 = |a|^2 \text{ 或 } |a| \\ = \sqrt{a \cdot a}.$$

$$(3) |a \cdot b| \leq |a| |b|.$$

① $a \cdot a$ 常常
记作 a^2 .

例 1 已知 $|a| = 5$, $|b| = 4$, a 与 b 的夹角 $\theta = 120^\circ$, 求 $a \cdot b$.

$$\begin{aligned} \text{解: } a \cdot b &= |a| |b| \cos \theta \\ &= 5 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -10. \end{aligned}$$

由向量投影的定义,我们可以得到 $a \cdot b$ 的几何意义:数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \theta$ 的乘积.

探究

运算律和运算紧密相连,引进向量数量积后,自然要看一看它满足怎样的运算律.你能推导向量数量积的下列运算律吗?

已知向量 a 、 b 、 c 和实数 λ , 则:

$$(1) a \cdot b = b \cdot a;$$

$$(2) (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b);$$

$$(3) (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

下面我们证明运算律(3).

证明: 如图 2.4-3, 任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$, $\overrightarrow{OC} = c$. 因为 $a+b$ (即 $\overrightarrow{OB}$) 在 c 方向上的投影等于 a 、 b 在 c 方向上的投影的和, 即

$$|a+b| \cos \theta = |a| \cos \theta_1 + |b| \cos \theta_2,$$

$$\therefore |c| |a+b| \cos \theta = |c| |a| \cos \theta_1 + |c| |b| \cos \theta_2.$$

$$\therefore c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

$$\therefore (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

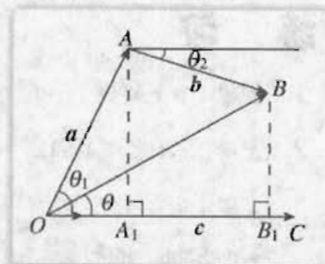


图 2.4-3

例 2 我们知道, 对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 恒有

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

对任意向量 a, b , 是否也有下面类似的结论?

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2;$$

$$(2) (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

解: (1) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= a^2 + 2a \cdot b + b^2;$$

$$(2) (a+b) \cdot (a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

$$= a^2 - b^2.$$

因此, 结论是成立的.

例 3 已知 $|a|=6, |b|=4$, a 与 b 的夹角为 60° , 求 $(a+2b) \cdot (a-3b)$.

解: $(a+2b) \cdot (a-3b)$

$$= a \cdot a - a \cdot b - 6b \cdot b$$

$$= |a|^2 - a \cdot b - 6|b|^2$$

$$= |a|^2 - |a||b|\cos \theta - 6|b|^2$$

$$= 6^2 - 6 \times 4 \times \cos 60^\circ - 6 \times 4^2$$

$$= -72.$$

例 4 已知 $|a|=3, |b|=4$, 且 a 与 b 不共线. k 为何值时, 向量 $a+kb$ 与 $a-kb$ 互相垂直?

解: $a+kb$ 与 $a-kb$ 互相垂直的条件是

$$(a+kb) \cdot (a-kb) = 0,$$

即

$$a^2 - k^2 b^2 = 0.$$

$$\therefore a^2 = 3^2 = 9, \quad b^2 = 4^2 = 16,$$

$$\therefore 9 - 16k^2 = 0.$$

$$\therefore k = \pm \frac{3}{4}.$$

也就是说, 当 $k = \pm \frac{3}{4}$ 时, $a+kb$ 与 $a-kb$ 互相垂直.

练习

1. 已知 $|p|=8$, $|q|=6$, p 和 q 的夹角是 60° , 求 $p \cdot q$.
2. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AC}=b$, 当 $a \cdot b < 0$ 或 $a \cdot b = 0$ 时, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.
3. 已知 $|a|=6$, e 为单位向量, 当 a, e 之间的夹角 θ 分别等于 $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 时, 画图表示 a 在 e 方向上的投影, 并求其值.

2.4.2

平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

探究

已知两个非零向量 $a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, 怎样用 a 与 b 的坐标表示 $a \cdot b$ 呢?

$$\because a=x_1i+y_1j, b=x_2i+y_2j,$$

$$\therefore a \cdot b = (x_1i+y_1j) \cdot (x_2i+y_2j)$$

$$=x_1x_2i^2+x_1y_2i \cdot j+x_2y_1i \cdot j+y_1y_2j^2.$$

$$\text{又} \because i \cdot i=1, j \cdot j=1,$$

$$i \cdot j=j \cdot i=0,$$

$$\therefore a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2.$$

这就是说, 两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

由此可得:

$$(1) \text{ 若 } a=(x, y), \text{ 则 } |a|^2=x^2+y^2, \text{ 或 } |a|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

如果表示向量 a 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 那么

$$a=(x_2-x_1, y_2-y_1),$$

$$|a|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$$(2) \text{ 设 } a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), \text{ 则}$$

$$a \perp b \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

例 5 已知 $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-2, 5)$, 试判断

$\triangle ABC$ 的形状, 并给出证明.

解: 如图 2.4-4, 在平面直角坐标系中标出 $A(1, 2)$.

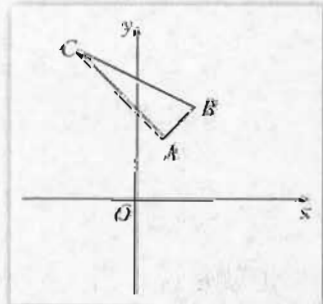


图 2.4-4

$B(2, 3)$, $C(-2, 5)$ 三点, 我们发现 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 下面给出证明.

$$\begin{aligned}\because \vec{AB} &= (2-1, 3-2) = (1, 1), \\ \vec{AC} &= (-2-1, 5-2) = (-3, 3), \\ \therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 1 \times (-3) + 1 \times 3 = 0, \\ \therefore \vec{AB} &\perp \vec{AC}, \\ \therefore \triangle ABC &\text{ 是直角三角形.}\end{aligned}$$

向量的数量积是否为零, 是判断相应的两条线段或直线是否垂直的重要方法之一.

设 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 都是非零向量, $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 根据向量数量积的定义及坐标表示可得:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

例 6 设 $\mathbf{a} = (5, -7)$, $\mathbf{b} = (-6, -4)$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 θ (精确到 1°).

$$\begin{aligned}\text{解: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 5 \times (-6) + (-7) \times (-4) \\ &= -30 + 28 \\ &= -2.\end{aligned}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{52},$$

由计算器得

$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{74} \times \sqrt{52}} \approx -0.03.$$

利用计算器中的 $\cos^{-1}$ 键得

$$\theta \approx 1.6 \text{ rad} \approx 92^\circ.$$

练习

1. 已知 $\mathbf{a} = (-3, 4)$, $\mathbf{b} = (5, 2)$, 求 $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. 已知 $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 4)$, $\mathbf{c} = (-1, -2)$. 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.
3. 已知 $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (5, -7)$, 利用计算器, 求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 θ (精确到 1°).

习题 2.4

A 组

1. 已知 $|a|=3$, $|b|=4$, 且 a 与 b 的夹角 $\theta=150^\circ$, 求 $a \cdot b$, $(a+b)^2$, $|a+b|$.
2. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=5$, $b=8$, $C=60^\circ$, 求 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.
3. 已知 $|a|=2$, $|b|=5$, $a \cdot b=-3$, 求 $|a+b|$, $|a-b|$.
4. 求证:

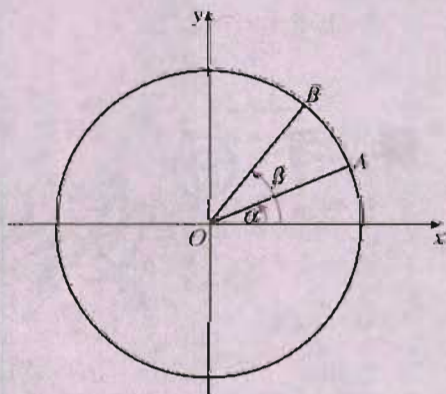
$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b).$$
5. 先作图, 观察以 A 、 B 、 C 为顶点的三角形的形状, 然后给出证明:
 - (1) $A(-1, -4)$, $B(5, 2)$, $C(3, 4)$;
 - (2) $A(-2, -3)$, $B(19, 4)$, $C(-1, -5)$;
 - (3) $A(2, 5)$, $B(5, 2)$, $C(10, 7)$.
6. 设 $|a|=12$, $|b|=9$, $a \cdot b=-54\sqrt{2}$, 求 a 与 b 的夹角 θ .
7. 已知 $|a|=4$, $|b|=3$, $(2a-3b) \cdot (2a+b)=61$, 求 a 与 b 的夹角 θ .
8. 已知 $|a|=8$, $|b|=10$, $|a+b|=16$, 求 a 与 b 的夹角 θ (精确到 1°). (可用计算器)
9. 求证: $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $C(8, 4)$, $D(4, 6)$ 为顶点的四边形是一个矩形.
10. 已知 $|a|=3$, $b=(1, 2)$, 且 $a \parallel b$, 求 a 的坐标.
11. 已知 $a=(4, 2)$, 求与 a 垂直的单位向量的坐标.

B 组

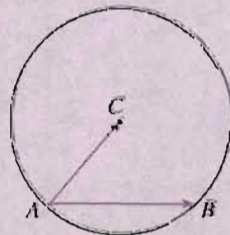
1. 已知 a 是非零向量, 且 $b \neq c$, 求证:

$$a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow a \perp (b-c).$$
2. 如图, 在平面直角坐标系中, 以原点为圆心, 单位长度为半径的圆上有两点 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(\cos \beta, \sin \beta)$, 试用 A 、 B 两点的坐标表示 $\angle AOB$ 的余弦值.
3. 证明: 对于任意的 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 恒有不等式

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$
4. 如图, 在圆 C 中, 是不是只需知道圆 C 的半径或弦 AB 的长度, 就可以求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值?
5. 平面向量的数量积 $a \cdot b$ 是一个非常重要的概念, 利用它可以容易地证明平面几何的许多命题, 例如勾股定理, 菱形的对角线相互垂直、长方形对角线相等、正方形的对角线垂直平分等. 请你给出具体证明.
 你能利用向量运算推导关于三角形、四边形、圆等平面图形的一些其他性质吗?



(第2题)



(第4题)

CHAPTER 2

2.5

平面向量应用举例

2.5.1 平面几何中的向量方法

由于向量的线性运算和数量积运算具有鲜明的几何背景,平面几何图形的许多性质,如平移、全等、相似、长度、夹角等都可以由向量的线性运算及数量积表示出来,因此,可用向量方法解决平面几何中的一些问题.下面通过几个具体实例,说明向量方法在平面几何中的运用.

因为有了运算,向量的力量无限.如果不能进行运算,向量只是示意方向的路标.

例 1 平行四边形是表示向量加法与减法的几何模型.

如图 2.5-1, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, 你能发现平行四边形对角线的长度与两条邻边长度之间的关系吗?

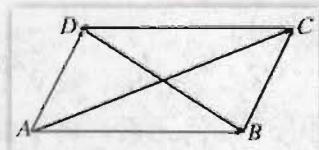


图 2.5-1

分析: 不妨设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\mathbf{a}|^2, \quad |\overrightarrow{AD}|^2 = |\mathbf{b}|^2.$$

涉及长度问题常常考虑向量的数量积,为此,我们计算 $|\overrightarrow{AC}|^2$ 与 $|\overrightarrow{DB}|^2$.

解: $|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \quad (1)$$

同理

$$|\overrightarrow{DB}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \quad (2)$$

观察(1)(2)两式的特点,我们发现, (1)+(2)得

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{DB}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2) = 2(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2).$$

即平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边平方和的两倍.



如果不用向量的方法，你能证明上述关系吗？

平面几何经常涉及距离（线段长度）、夹角问题，而平面向量的运算，特别是数量积主要涉及向量的模以及向量之间的夹角，因此我们可以用向量方法解决部分几何问题。解决几何问题时，先用向量表示相应的点、线段、夹角等几何元素；然后通过向量的运算，特别是数量积来研究点、线段等元素之间的关系；最后再把运算结果“翻译”成几何关系，得到几何问题的结论。这就是用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”：

(1) 建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

(2) 通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；

(3) 把运算结果“翻译”成几何关系。

例 2 如图 2.5-2， $\square ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是 AD 、 DC 边的中点， BE 、 BF 分别与 AC 交于 R 、 T 两点，你能发现 AR 、 RT 、 TC 之间的关系吗？

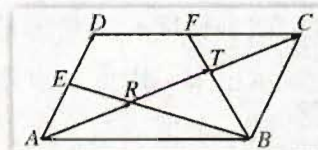


图 2.5-2

分析：由于 R 、 T 是对角线 AC 上的两点，要判断 AR 、 RT 、 TC 之间的关系，只需分别判断 AR 、 RT 、 TC 与 AC 的关系即可。

解：第一步，建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题：

设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{AR} = \mathbf{r}$ ，则 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。

第二步，通过向量运算，研究几何元素之间的关系：

由于 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，所以，我们设

$$\mathbf{r} = n(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad n \in \mathbf{R},$$

又因为

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

$\overrightarrow{ER}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 共线，所以我们设

$$\overrightarrow{ER} = m\overrightarrow{EB} = m\left(\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right).$$

因为

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER},$$

所以

可以利用信息技术工具，作出上述图形，测量 AR 、 RT 、 TC 的长度，我们发现 $AR = RT = TC$ 。拖动平行四边形的顶点，动态观察，发现 $AR = RT = TC$ 这个规律不变，因此，我们猜想 $AR = RT = TC$ 。

$$r = \frac{1}{2}b + m\left(a - \frac{1}{2}b\right).$$

因此

$$n(a+b) = \frac{1}{2}b + m\left(a - \frac{1}{2}b\right),$$

即

$$(n-m)a + \left(n + \frac{m-1}{2}\right)b = 0.$$

由于向量 a, b 不共线, 要使上式为 0 , 必须

$$\begin{cases} n-m=0, \\ n+\frac{m-1}{2}=0. \end{cases}$$

解得

$$n=m=\frac{1}{3}.$$

所以

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

同理

$$\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\overrightarrow{RT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

第三步, 把运算结果“翻译”成几何关系:

$$AR=RT=TC.$$

2.5.2 向量在物理中的应用举例

例 3 在日常生活中, 你是否有这样的经验: 两个人共提一个旅行包, 夹角越大越费力; 在单杠上做引体向上运动, 两臂的夹角越小越省力. 你能从数学的角度解释这种现象吗?

分析: 上面的问题可以抽象为如图 2.5-3 所示的数学模型. 只要分析清楚 F, G, θ 三者之间的关系 (其中 F 为 F_1, F_2 的合力), 就得到了问题的数学解释.

解: 不妨设 $|F_1| = |F_2|$, 由向量的平行四边形法则, 力的平衡以及直角三角形的知

识, 可以知道

$$|F_1| = \frac{|G|}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

通过上面的式子, 我们发现: 当 θ 由 $0^\circ \sim 180^\circ$ 逐渐变大时, $\frac{\theta}{2}$ 由 $0^\circ \sim 90^\circ$ 逐渐变大, $\cos\frac{\theta}{2}$ 的值由大逐渐变小, 因此 $|F_1|$ 由小逐渐变大, 即 F_1, F_2 之间的夹角越大越费力, 夹角越小越省力.

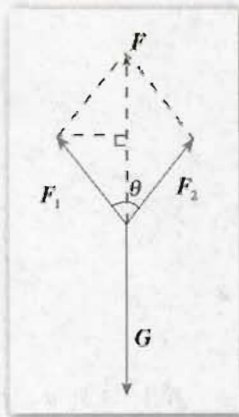


图 2.5-3

探究

- (1) θ 为何值时, $|F_1|$ 最小, 最小值是多少?
- (2) $|F_1|$ 能等于 $|G|$ 吗? 为什么?

例 4 如图 2.5-4, 一条河的两岸平行, 河的宽度 $d=500$ m, 一艘船从 A 处出发到河对岸. 已知船的速度 $|v_1|=10$ km/h, 水流速度 $|v_2|=2$ km/h, 问行驶航程最短时, 所用时间是多少 (精确到 0.1 min)?

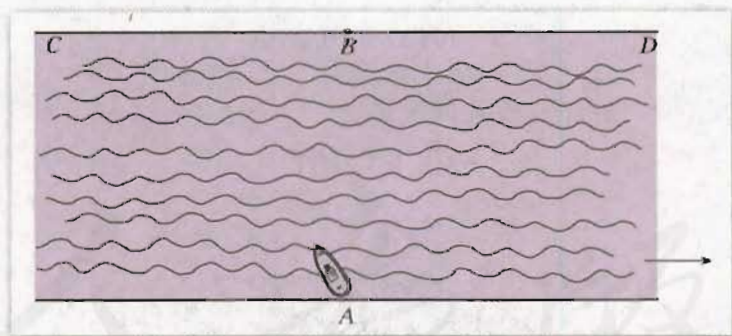


图 2.5-4

分析: 如果水是静止的, 则船只要取垂直于河岸的方向行驶, 就能使行驶航程最短, 所用时间最短. 考虑到水的流速, 要使船行驶最短航程, 那么船的速度与水流速度的合速度 v 必须垂直于对岸, 如图 2.5-5.

解: $|v| = \sqrt{|v_1|^2 - |v_2|^2} = \sqrt{96} \text{ (km/h)},$

所以 $t = \frac{d}{|v|} = \frac{0.5}{\sqrt{96}} \times 60 \approx 3.1 \text{ (min)}.$

答: 行驶航程最短时, 所用时间是 3.1 min.

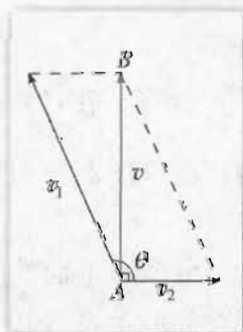


图 2.5-5

习题 2.5

A 组

1. 已知点 $A(1, 0)$, 直线 $l: y=2x-6$, 点 R 是直线 l 上的一点, 若 $\overrightarrow{RA}=2\overrightarrow{AP}$, 求点 P 的轨迹方程.
2. $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, BF 与 CD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.
 - (1) 证明 A, O, E 三点在同一直线上, 且 $\frac{AO}{OE}=\frac{BO}{OF}=\frac{CO}{OD}=2$;
 - (2) 用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$.
3. 两个粒子 A, B 从同一源发射出来, 在某一时刻, 它们的位移分别为 $s_A=(4, 3)$, $s_B=(2, 10)$.
 - (1) 写出此时粒子 B 相对粒子 A 的位移 s ;
 - (2) 计算 s 在 s_A 方向上的投影.
4. 平面上三个力 F_1, F_2, F_3 作用于一点且处于平衡状态, $|F_1|=1\text{ N}$, $|F_2|=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\text{ N}$, F_1 与 F_2 的夹角为 45° , 求: (1) F_3 的大小; (2) F_3 与 F_1 夹角的大小.

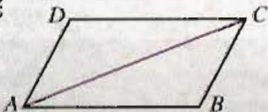
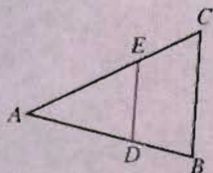
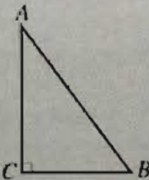
B 组

1. 以初速度 v_0 , 抛射角 θ 投掷铅球, 求铅球上升的最大高度和最大投掷距离.
2. 一条河的两岸平行, 河的宽度 $d=500\text{ m}$. 一艘船从 A 处出发到河对岸. 已知船的静水速度 $|\boldsymbol{v}_1|=10\text{ km/h}$, 水流速度 $|\boldsymbol{v}_2|=2\text{ km/h}$. 要使船行驶的时间最短, 那么船行驶的距离与合速度的比值必须最小. 此时我们分三种情况讨论:
 - (1) 当船逆流行驶, 与水流成钝角时;
 - (2) 当船顺流行驶, 与水流成锐角时;
 - (3) 当船垂直于对岸行驶, 与水流成直角时.
 请同学们计算上面三种情况, 是否当船垂直于对岸行驶时, 与水流成直角时, 所用时间最短.
3. 已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB}=(x, y)$, 把 $\overrightarrow{AB}$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, 叫做把点 B 绕点 A 逆时针方向旋转 θ 角得到点 P .
 - (1) 已知平面内点 $A(1, 2)$, 点 $B(1+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$. 把点 B 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到点 P , 求点 P 的坐标;
 - (2) 设平面内曲线 C 上的每一点绕坐标原点沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到的点的轨迹是曲线 $x^2-y^2=3$, 求原来曲线 C 的方程.



向量的运算（运算律）与图形性质

向量的运算（运算律）与几何图形的性质有紧密联系，向量的运算（运算律）可以用图形简明地表示，而图形的一些性质又可以反映到向量的运算（运算律）上来，比如平行四边形是表示向量加法和减法的几何模型，向量加法及其交换律 $a+b=b+a$ 可以表示平行四边形中的对边平行以及三角形全等，这说明，以向量为工具，可以把几何图形、几何变换、向量运算及运算律统一起来，请你思考一下，下表是否反映了这种情况？

几何图形	几何变换	向量运算	向量运算律
平行四边形 	平移	加法	交换律: $a+b=b+a$ 结合律: $a+(b+c)=(a+b)+c$
相似三角形 	相似	数乘向量	分配律: $k(a+b)=ka+kb$
直角三角形 	垂直	数量积	交换律: $a \cdot b=b \cdot a$ 分配律: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

向量作为工具研究几何问题，开创了研究几何问题的新方法，由于欧氏几何只依据基本的逻辑原理（同一律、矛盾律、排中律等），不使用其他工具，从基本事实（公理）出发，通过演绎推理，建立几何关系，因此，它给出的几何论证严谨且优雅，能够给人以极大的美感和享受，但没有一般规律可循，存在较大的思考难度，往往对人的智力形成极大的挑战（也许，欧氏几何的魅力也正在于此），寻求几何研究的工具，以更好地把握图形的性质和规律，推进几何研究的发展，就成为数学家们的一个理想。

建立向量运算（运算律）与几何图形之间的关系后，对图形的研究推进到了有效能算的水平，从而实现了综合几何到向量几何的转折，向量运算（运算律）把向量与几何、代数有机地联系在一起。

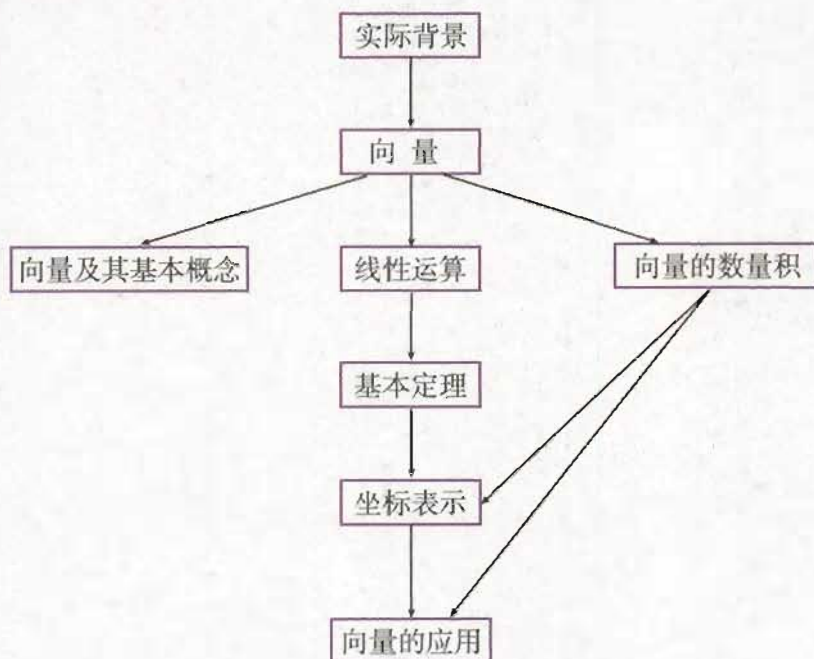
用向量方法解决几何问题的基本过程是：首先把一个几何量代数化，即把位移这个基本的几何量加以抽象而得到向量的概念；然后运用欧氏空间特有的平移、全等、相似与勾股定理等基本性质引进向量的加（减）法、数乘向量与数量积这三种向量运算，并把欧氏几何的直观性与向量的运算（运算律）有机地结合起来，使得直观的几何关系代数化，抽

象的运算及运算律直观化,这样就使数与形有机地结合起来.运算和运算律是向量的灵魂,是连接数与形的纽带,它建立了运算(运算律)与几何图形之间的对应关系,使我们能够通过运算来研究几何.



小 结

一、本章知识结构框架



二、回顾与思考

1. 数学中研究的向量，只有大小与方向，与物理中研究的向量不完全一样。比较数学与物理中的向量概念，你能说说它们的异同吗？

2. 从力的合成与位移的合成得到启发，类比数量的运算，我们引进了向量的加法；定义了相反向量后，我们从加法的角度引入了减法，把减法定义为加上一个向量的相反向量；然后又从向量加法的运算角度，引入向量的数乘运算，这些运算称为向量的线性运算。运算进入向量后，使向量成为具有良好运算性质的一个系统。你能说说向量线性运算与数量的加法、减法、乘法运算之间的联系与区别吗？

3. 运算律是运算的灵魂。你能通过实例，说明向量线性运算和数量积运算具备哪些运算律吗？这些运算律的几何意义是什么？

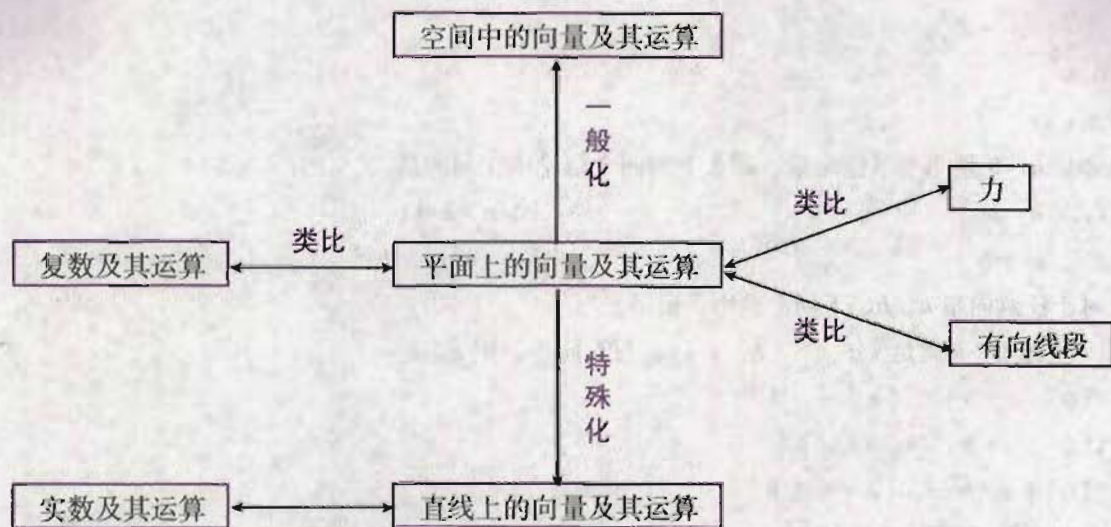
4. 向量的加法按照平行四边形法则或三角形法则进行，两种法则是一致的。平行四边形（三角形）是表示向量加法与减法的几何模型，借助它们可以方便地研究向量的线性运算。请同学们回顾三角形和平行四边形的几何性质，并探索一下这些性质与向量及其运算的关系。

5. 平面向量基本定理是向量坐标表示的理论基础。直角坐标系中与 x 轴、 y 轴方向相同的单位向量是它的一组正交基底，平面内任何一个向量都可以由一对有序实数 (x, y)

表示. 这样建立了向量的坐标表示与点的坐标表示的对应关系, 把向量(以原点为始点的有向线段)与点对应起来.

6. 向量数量积不同于向量的线性运算, 因为它的运算结果是数量, 不是向量. 向量数量积与距离、夹角等紧密相联, 用它可以解决一些涉及距离、夹角的几何问题. 你可以通过实例, 说明用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”吗?

7. 平面向量及其运算与空间向量及其运算紧密联系, 与数及其运算也直接相关, 在其他学科(特别是物理)中也有广泛应用. 这种联系我们可以用下面的框图表示.



A 组

1. 判断下列命题是否正确:

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$; ()
- (2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; ()
- (3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$; ()
- (4) $0 \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$. ()

2. 选择题:

- (1) 如果 a, b 是两个单位向量, 那么下列四个结论中正确的是 ().
 - (A) $a = b$ (B) $a \cdot b = 1$
 - (C) $a^2 \neq b^2$ (D) $|a|^2 = |b|^2$
- (2) 对于任意向量 a, b , 下列命题中正确的是 ().
 - (A) 若 a, b 满足 $|a| > |b|$, 且 a 与 b 同向, 则 $a > b$
 - (B) $|a + b| \leq |a| + |b|$
 - (C) $|a \cdot b| \geq |a| |b|$
 - (D) $|a - b| \leq |a| - |b|$
- (3) 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 则 ().
 - (A) $ABCD$ 是矩形 (B) $ABCD$ 是菱形
 - (C) $ABCD$ 是正方形 (D) $ABCD$ 是平行四边形
- (4) 设 a 是非零向量, λ 是非零实数, 下列结论中正确的是 ().
 - (A) a 与 $-\lambda a$ 的方向相反 (B) $|-\lambda a| \geq |a|$
 - (C) a 与 $\lambda^2 a$ 的方向相同 (D) $|-\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$
- (5) 设 M 是 $\square ABCD$ 的对角线的交点, O 为任意一点, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 等于 ().
 - (A) $\overrightarrow{OM}$ (B) $2\overrightarrow{OM}$ (C) $3\overrightarrow{OM}$ (D) $4\overrightarrow{OM}$
- (6) 下列各组向量中, 可以作为基底的是 ().
 - (A) $e_1 = (0, 0), e_2 = (1, -2)$ (B) $e_1 = (-1, 2), e_2 = (5, 7)$
 - (C) $e_1 = (3, 5), e_2 = (6, 10)$ (D) $e_1 = (2, -3), e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

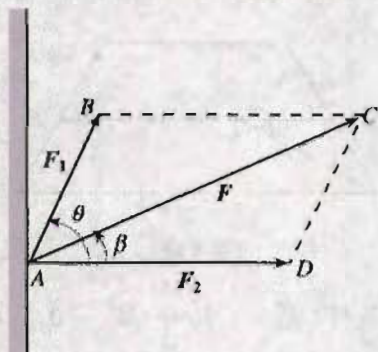
3. 已知 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AC} = a, \overrightarrow{BD} = b$, 分别用 a, b 表示 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

4. 已知六边形 $ABCDEF$ 为正六边形, 且 $\overrightarrow{AC} = a, \overrightarrow{BD} = b$, 分别用 a, b 表示 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}$.

5. 已知平面直角坐标系中, 点 O 为原点, $A(-3, -4), B(5, -12)$.

- (1) 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标及 $|\overrightarrow{AB}|$;
- (2) 若 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, 求 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标;
- (3) 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

6. 已知点 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$, 试判断向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的位置关系, 并给出证明.
7. 已知点 $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$, 求点 $D(x, y)$, 使 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
8. n 为何值时, 向量 $\mathbf{a} = (n, 1)$ 与 $\mathbf{b} = (4, n)$ 共线且方向相同?
9. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 0)$, 求 λ 和 μ , 使 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.
10. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$, 求 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 的值.
11. 已知单位向量 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 的夹角为 60° , 求证: $(2\mathbf{n} - \mathbf{m}) \perp \mathbf{m}$, 并解释其几何意义.
12. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, λ 为何值时, $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直?
13. 已知 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 30° , 求 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.
14. 如图所示, 支座 A 受 F_1 、 F_2 两个力的作用, 已知 $|F_1| = 40 \text{ N}$, 与水平线成 θ 角; $|F_2| = 70 \text{ N}$, 沿水平方向; 两个力的合力 $|\mathbf{F}| = 100 \text{ N}$, 求角 θ 以及合力 $\mathbf{F}$ 与水平线的夹角 β .



(第 14 题)

B 组

1. 选择题:

- (1) 已知 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 ().
 (A) A, B, D 三点共线 (B) A, B, C 三点共线
 (C) B, C, D 三点共线 (D) A, C, D 三点共线
- (2) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 等于 ().
 (A) 0 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$
- (3) 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则 ().
 (A) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ (B) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$
 (C) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$ (D) $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$
- (4) 已知 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 的中点, 且 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 则
 ① $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$; ② $\overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$; ③ $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$; ④ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$
 中正确的等式的个数为 ().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- (5) 若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量, 则 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$; $\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ 的夹角为 ().
 (A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°

(6) 若向量 a, b, c 两两所成的角相等, 且 $|a|=1, |b|=1, |c|=3$, 则 $|a+b+c|$ 等于().

- (A) 2 (B) 5 (C) 2 或 5 (D) $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$

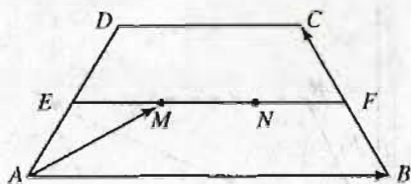
(7) 等边三角形 ABC 的边长为 1, $\overrightarrow{BC}=a, \overrightarrow{CA}=b, \overrightarrow{AB}=c$, 那么 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ 等于().

- (A) 3 (B) -3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

2. 已知向量 a, b 为非零向量, 求证: $a \perp b \Leftrightarrow |a+b|=|a-b|$, 并解释其几何意义.

3. 已知向量 a, b, c, d 为非零向量, 且 $a+b=c, a-b=d$, 求证: $|a|=|b| \Leftrightarrow c \perp d$, 并解释其几何意义.

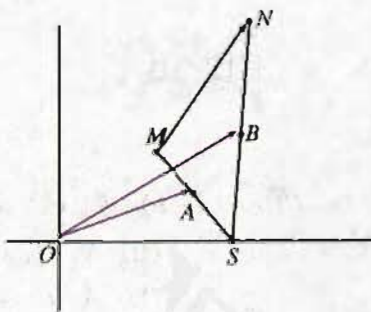
4. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, E, F 分别是腰 AD, BC 的中点, M, N 是线段 EF 上的两个点, 且 $EM=MN=NF$, 下底是上底的 2 倍, 若 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{BC}=b$, 求 $\overrightarrow{AM}$.



(第4题)

5. 已知向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 满足条件 $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \mathbf{0}$, $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$, 求证 $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形.

6. 如图, 已知 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b$, 任意点 M 关于点 A 的对称点为 S , 点 S 关于点 B 的对称点为 N , 用 a, b 表示向量 $\overrightarrow{MN}$.



(第6题)

7. 某人在静水中游泳, 速度为 $4\sqrt{3}$ 千米/时. 他在水流速度为 4 千米/时的河中游泳.

(1) 如果他垂直游向河对岸, 那么他实际沿什么方向前进? 实际前进的速度为多少?

(2) 他必须朝哪个方向游, 才能沿与水流垂直的方向前进? 实际前进的速度为多少?

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 那么点 O 在 $\triangle ABC$ 的什么位置?

9. 平面直角坐标系内的向量都可以用一有序实数对唯一表示, 这使我们想到可以用向量作为解析几何的研究工具. 如图, 设直线 l 的倾斜角为 α ($\alpha \neq 90^\circ$), 在 l 上任取两个不同的点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 不妨设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向是向上的, 那么向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

过原点作向量 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_1P_2}$, 则点 P 的坐标是 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 而且直线 OP 的倾斜角也是 α . 根据正切函数的定义得

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

这就是《数学 2》中已经得到的斜率公式. 上述推导过程比《数学 2》中的推导简捷. 你能用向量作为工具讨论一下直线的有关问题吗? 例如:

(1) 过点 $P_0(x_0, y_0)$, 平行于向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 的直线方程;

(2) 向量 (A, B) 与直线 $Ax + By + C = 0$ 的关系;

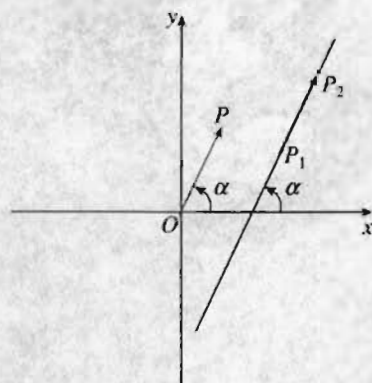
(3) 设直线 l_1 和 l_2 的方程分别是

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

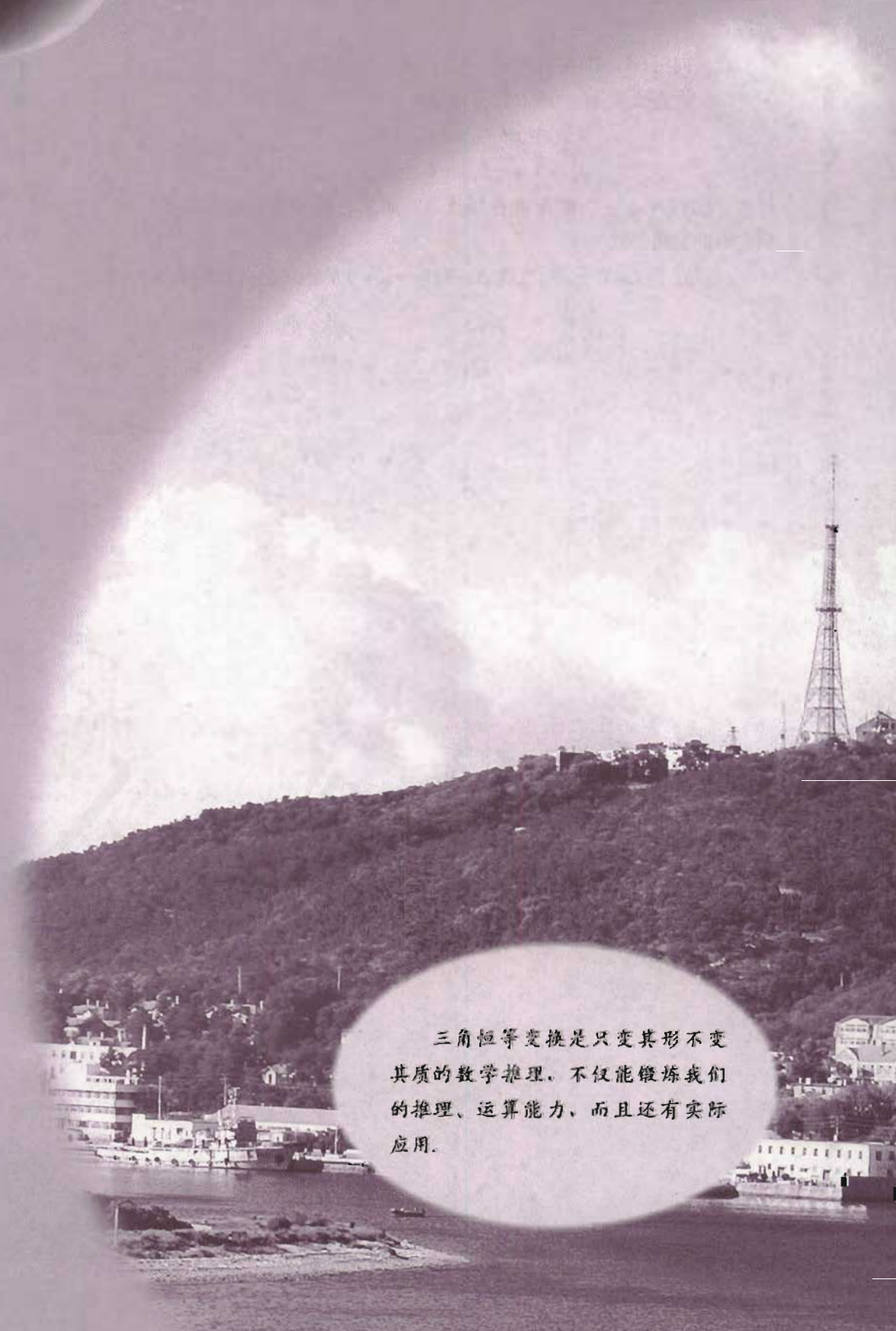
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

那么, $l_1 // l_2$, $l_1 \perp l_2$ 的条件各是什么? 如果它们相交, 如何得到它们的夹角公式?

(4) 点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式如何推导?



(第 9 题)



三角恒等变换是只变其形不变其质的数学推理。不仅能锻炼我们的推理、运算能力，而且还有实际应用。

第三章

三角恒等变换

3.1

两角和与差的正弦、余弦和正切公式

3.2

简单的三角恒等变换



变换是数学的重要工具，在初中，我们已经学过代数的变换，在数学4的第一章也学习过同角三角函数式的变换，在此基础上，本章将学习包含两个角的三角函数式的变换。三角变换是只变其形不变其质的，它可以揭示某些外形不同但实质相同的三角函数式之间的内在联系，帮助我们简化三角函数式，从而使研究更加方便、有效。

三角变换包括变换的对象，变换的目标，以及变换的依据和方法等要素。两角和与差的正弦、余弦和正切公式就是三角变换的基本依据。通过对这些公式的探求，以及利用这些公式进行三角变换，我们将在怎样预测变换目标，怎样选择变换公式，怎样设计变换途径等方面作出思考，这些都将帮助我们进一步提高推理能力和运算能力。

3.1

两角和与差的正弦、余弦和正切公式

在章头图中，给出了这样一个问题：

某城市的电视发射塔建在市郊的一座小山上，如图 3.1-1 所示，小山高 BC 约为 30 米，在地平面上有一点 A ，测得 A ， C 两点间距离约为 67 米，从点 A 观测电视发射塔的视角 ($\angle CAD$) 约为 45° ，求这座电视发射塔的高度。

设电视发射塔高 $CD=x$ 米， $\angle CAB=\alpha$ ，则 $\sin \alpha = \frac{30}{67}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{x+30}{30} \tan \alpha,$$

于是

$$x = \frac{30 \tan(45^\circ + \alpha)}{\tan \alpha} - 30.$$

如果能由 $\sin \alpha = \frac{30}{67}$ 求得 $\tan(45^\circ + \alpha)$ 的值，那么就能得出电视发射塔的高度了。

能不能由 $\sin \alpha = \frac{30}{67}$ 求得 $\tan(45^\circ + \alpha)$ 的值呢？或者说

能不能用 $\sin \alpha$ 把 $\tan(45^\circ + \alpha)$ 表示出来呢？

更一般地说，当 α, β 是任意角时，能不能用 α, β 的三角函数值把 $\alpha + \beta$ 或 $\alpha - \beta$ 的三角函数值表示出来呢？

下面我们来研究如何用角 α, β 的正弦、余弦值来表示 $\cos(\alpha - \beta)$ 的问题。如果没有特别说明， α, β 都表示任意角。

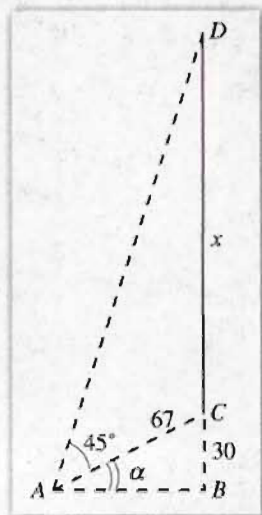


图 3.1-1

有兴趣的同学也可以研究用角 α, β 的正弦、余弦值来表示 $\sin(\alpha + \beta)$ 或 $\cos(\alpha + \beta)$ 的问题。

3.1.1 两角差的余弦公式

探究

如何用角 α, β 的正弦、余弦值来表示 $\cos(\alpha - \beta)$ 呢？

探究的过程可以分两个步骤, 第一步探求表示结果, 第二步对结果的正确性加以证明. 你探究得到的结果是什么呢? 你认为会是 $\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha-\cos \beta$ 吗?

不妨以特例作验证. 例如, 当 $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$ 时, 动手算一算 $\cos 60^\circ-\cos 30^\circ$ 的值, 再与 $\cos 30^\circ$ 的值作比较.

容易发现 $\cos(60^\circ-30^\circ) \neq \cos 60^\circ-\cos 30^\circ$, 因此, 对角 α, β , $\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha-\cos \beta$ 一般不成立.

显然, 要得到正确的结果, 需要联系已学过的其他知识.



你认为要获得相应的表达式需要哪些已学过的知识?

由于这里涉及的是三角函数的问题, 是 $\alpha-\beta$ 这个角的余弦问题, 所以可以考虑联系单位圆上的三角函数线或向量的知识.

我们先对简单的情况进行讨论. 如图 3.1-2, 设角 α, β 为锐角, 且 $\beta < \alpha$. 角 α 的终边与单位圆的交点为 P_1 , $\angle POP_1 = \beta$, 则 $\angle xOP = \alpha - \beta$.

过点 P 作 PM 垂直于 x 轴, 垂足为 M , 那么 OM 就是角 $\alpha-\beta$ 的余弦线. 这里就是要用角 α, β 的正弦线、余弦线来表示 OM .

过点 P 作 PA 垂直于 OP_1 , 垂足为 A . 过点 A 作 AB 垂直于 x 轴, 垂足为 B . 过点 P 作 PC 垂直于 AB , 垂足为 C . 那么 OA 表示 $\cos \beta$, AP 表示 $\sin \beta$, 并且 $\angle PAC = \angle P_1Ox = \alpha$. 于是

$$\begin{aligned} OM &= OB + BM \\ &= OB + CP \\ &= OA \cos \alpha + AP \sin \alpha \\ &= \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

值得注意的是, 以上结果是在 $\alpha, \beta, \alpha-\beta$ 都是锐角, 且 $\alpha > \beta$ 的情况下得到的. 要说明此结果是否在角 α, β 为任意角时也成立, 还要做不少推广的工作, 并且这项推广工作的过程也是比较繁难的. 同学们可以自己动手试一试.

下面再运用向量的知识进行探究.

如图 3.1-3, 在平面直角坐标系 xOy 内作单位圆 O , 以 Ox 为始边作角 α, β , 它们的终边与单位圆 O 的交点分别为 A, B . 则

$$\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \overrightarrow{OB} = (\cos \beta, \sin \beta).$$

由向量数量积的坐标表示, 有

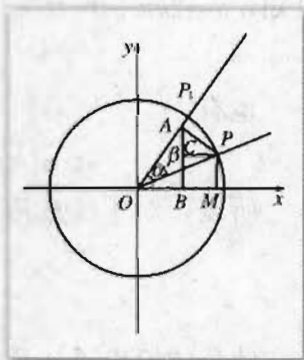


图 3.1-2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

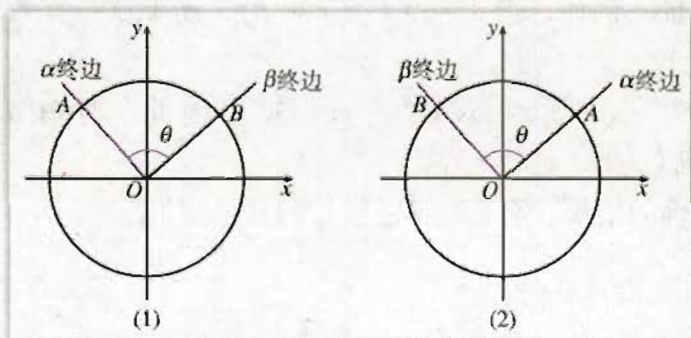


图 3.1-3

设 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 θ , 则

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \theta = \cos \theta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

另一方面, 由图 3.1-3 (1) 可知, $\alpha = 2k\pi + \beta + \theta$; 由图 3.1-3 (2) 可知, $\alpha = 2k\pi + \beta - \theta$. 于是 $\alpha - \beta = 2k\pi \pm \theta$, $k \in \mathbb{Z}$. 所以

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta.$$

也有

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

所以, 对于任意角 α, β 有

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

($C_{\alpha-\beta}$)

此公式给出了任意角 α, β 的正弦、余弦值与其差角 $\alpha - \beta$ 的余弦值之间的关系, 称为差角的余弦公式, 简记作 $C_{\alpha-\beta}$.

有了公式 $C_{\alpha-\beta}$ 以后, 我们只要知道 $\cos \alpha, \cos \beta, \sin \alpha, \sin \beta$ 的值, 就可以求得 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值了.

例 1 利用差角余弦公式求 $\cos 15^\circ$ 的值.

解法 1:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

解法 2:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

运用向量工具进行探索, 过程多么简洁啊!



完成本题后，你会求 $\sin 75^\circ$ 的值吗？

例 2 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, β 是第三象限角，求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

解：由 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 得

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$

又由 $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, β 是第三象限角，得

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

所以

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) \\ &= -\frac{33}{65}. \end{aligned}$$

联系公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 和本题的条件，要计算 $\cos(\alpha - \beta)$ ，应作哪些准备？

思维的有序性和表述的条理性是三角变换的基本要求.

练习

1. 利用公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 证明：

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$

(2) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha.$

2. 已知 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 的值.

3. 已知 $\sin \theta = \frac{15}{17}$, θ 是第二象限角，求 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

4. 已知 $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\cos \beta = \frac{3}{4}$, $\beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 求 $\cos(\beta - \alpha)$ 的值.

3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式



由公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 出发, 你能推导出两角和与差的三角函数的其他公式吗?

下面以公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 为基础来推导其他公式.

例如, 比较 $\cos(\alpha-\beta)$ 与 $\cos(\alpha+\beta)$, 并注意到 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 之间的联系: $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$, 则由公式 $C_{(\alpha-\beta)}$, 有

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos[\alpha-(-\beta)] \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

于是, 我们得到了两角和的余弦公式, 简记作 $C_{(\alpha+\beta)}$.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$(C_{(\alpha+\beta)})$

这里用到的是加法和减法的联系, 也可用换元的观点来考虑: 由于公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 对于任意 α, β 都成立, 那么把其中的 $+\beta$ 换成 $-\beta$ 后, 也一定成立. 由此也可推得公式 $C_{(\alpha+\beta)}$.

探究

上面我们得到了两角和与差的余弦公式. 我们知道, 用诱导公式五 (或六) 可以实现正弦、余弦的互化. 你能根据 $C_{(\alpha+\beta)}$ 、 $C_{(\alpha-\beta)}$ 及诱导公式五 (或六), 推导出用任意角 α, β 的正弦、余弦值表示 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ 的公式吗?

把结果填入下面框中:

$$\sin(\alpha+\beta) =$$

$(S_{(\alpha+\beta)})$

$$\sin(\alpha-\beta) =$$

$(S_{(\alpha-\beta)})$



你能根据正切函数与正弦、余弦函数的关系,从 $C_{(\alpha \pm \beta)}$ 、 $S_{(\alpha \pm \beta)}$ 出发,推导出用任意角 α , β 的正切表示 $\tan(\alpha + \beta)$ 、 $\tan(\alpha - \beta)$ 的公式吗?

把探究的结果填入下面框中.

$$\tan(\alpha + \beta) =$$

($T_{(\alpha + \beta)}$)

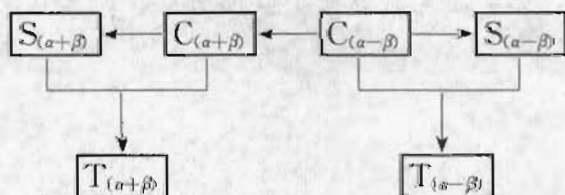
$$\tan(\alpha - \beta) =$$

($T_{(\alpha - \beta)}$)

公式 $S_{(\alpha + \beta)}$, $C_{(\alpha + \beta)}$, $T_{(\alpha + \beta)}$ 给出了任意角 α , β 的三角函数值与其和角 $\alpha + \beta$ 的三角函数值之间的关系. 为方便起见,我们把这三个公式都叫做和角公式.

类似地, $S_{(\alpha - \beta)}$, $C_{(\alpha - \beta)}$, $T_{(\alpha - \beta)}$ 都叫做差角公式.

从以上推导过程可以看到,这 6 个和与差的三角函数公式之间具有紧密的逻辑联系,这种联系可用框图形式表示如下:



你能写出这 6 个公式的其他逻辑联系框图吗?

例 3 已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, α 是第四象限角,求 $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$, $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$, $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值.

解: 由 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, α 是第四象限角,得

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$

于是有

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\
 &= \frac{7\sqrt{2}}{10};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} \\
 &= \frac{-\frac{3}{4} - 1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = -7.
 \end{aligned}$$



由以上解答可以看到, 在本题条件下有 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. 那么对于任意角 α , 此等式成立吗? 若成立, 你会用几种方法予以证明?

例 4 利用和(差)角公式计算下列各式的值:

(1) $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ$;

(2) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ$;

(3) $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.

分析: 和角与差角公式把 $\alpha \pm \beta$ 的三角函数式转化成了 α, β 的三角函数式. 如果反过来, 从右到左使用公式, 我们就可以将上述三角函数式化简.

解: (1) 由公式 $S_{(\alpha-\beta)}$, 得

$$\begin{aligned}
 &\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ \\
 &= \sin(72^\circ - 42^\circ) \\
 &= \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

(2) 由公式 $C_{(\alpha+\beta)}$, 得

$$\begin{aligned}
 &\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ \\
 &= \cos(20^\circ + 70^\circ)
 \end{aligned}$$

$$= \cos 90^\circ$$

$$= 0;$$

(3) 由公式 $T_{(\alpha+\beta)}$ 及 $\tan 45^\circ = 1$, 得

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan(45^\circ + 15^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

有了两角和与差的三角函数公式, 我们就可以解决本章开头提出的问题了.

由 $\sin \alpha = \frac{30}{67}$, 得 $\cos \alpha \approx \frac{60}{67}$, 所以 $\tan \alpha \approx \frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\tan(45^\circ + \alpha) &= \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \\ &\approx \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.\end{aligned}$$

$$\text{于是 } x \approx \frac{30 \times 3}{\frac{1}{2}} - 30 = 150.$$

因此这座电视发射塔的高度大约为 150 米.

练习

1. 利用和(差)角公式, 求下列各式的值:

(1) $\sin 15^\circ$; (2) $\cos 75^\circ$;

(3) $\sin 75^\circ$; (4) $\tan 15^\circ$.

2. 已知 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ 的值.

3. 已知 $\sin \theta = -\frac{12}{13}$, θ 是第三象限角, 求 $\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)$ 的值.

4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值.

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ$;

(2) $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$;

(3) $\frac{\tan 12^\circ + \tan 33^\circ}{1 - \tan 12^\circ \tan 33^\circ}$;

(4) $\cos 74^\circ \sin 14^\circ - \sin 74^\circ \cos 14^\circ$;

(5) $\sin 34^\circ \sin 26^\circ - \cos 34^\circ \cos 26^\circ$;

(6) $\sin 20^\circ \cos 110^\circ + \cos 160^\circ \sin 70^\circ$.

6. 化简:

(1) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$;

(2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x$;

(3) $\sqrt{2}(\sin x - \cos x)$;

(4) $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{6} \sin x$.

7. 已知 $\sin(\alpha - \beta) \cos \alpha - \cos(\beta - \alpha) \sin \alpha = \frac{3}{5}$, β 是第三象限角, 求 $\sin(\beta + \frac{5\pi}{4})$ 的值.

3.1.3

二倍角的正弦、余弦、正切公式

以公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 为基础, 我们已经得到六个和(差)角公式, 下面将以和(差)角公式为基础来推导倍角公式.



你能利用 $S_{(\alpha \pm \beta)}$ 、 $C_{(\alpha \pm \beta)}$ 、 $T_{(\alpha \pm \beta)}$ 推导出 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ 的公式吗?

把推导出的结果填入下列方框中:

$\sin 2\alpha =$

 $(S_{2\alpha})$

$\cos 2\alpha =$

 $(C_{2\alpha})$

$\tan 2\alpha =$

 $(T_{2\alpha})$

在以上得到的二倍角的余弦公式 ($C_{2\alpha}$) 中, 如果要求表示式仅含 α 的正弦 (余弦), 那么又可得到:

$$\cos 2\alpha =$$

$$\cos 2\alpha =$$

以上这些公式都叫做倍角公式①. 倍角公式给出了 α 的三角函数与 2α 的三角函数之间的关系.

① 这里的“倍角”专指“二倍角”, 遇到“三倍角”等名词时, “三”字等不可省去.

例 5 已知 $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求 $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\tan 4\alpha$ 的值.

分析: 已知条件给出了 2α 的正弦值. 由于 4α 是 2α 的二倍角, 因此可以考虑用倍角公式.

解: 由 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 得

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi,$$

$$\text{又 } \sin 2\alpha = \frac{5}{13},$$

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha &= \sin[2 \times (2\alpha)] \\ &= 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= 2 \times \frac{5}{13} \times \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= \cos[2 \times (2\alpha)] \\ &= 1 - 2\sin^2 2\alpha \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 4\alpha &= \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} \\ &= \left(-\frac{120}{169}\right) \times \frac{169}{119} = -\frac{120}{119}.\end{aligned}$$

“倍”是描述两个数量之间关系的, 2α 是 α 的二倍, 4α 是 2α 的二倍, $\frac{\alpha}{2}$ 是 $\frac{\alpha}{4}$ 的二倍, 这里蕴含着换元思想.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan B = 2$, 求 $\tan(2A + 2B)$ 的值.

解法 1: 在 $\triangle ABC$ 中,

由 $\cos A = \frac{4}{5}$, $0 < A < \pi$, 得



$2A + 2B$ 与 A, B 之间能构成怎样的关系?

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

所以 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4},$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}.$$

又 $\tan B = 2,$

所以 $\tan 2B = \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$

于是 $\tan(2A + 2B) = \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{24}{7} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{24}{7} \times \left(-\frac{4}{3}\right)} \\ &= \frac{44}{117}. \end{aligned}$$

解法 2: 在 $\triangle ABC$ 中,

由 $\cos A = \frac{4}{5}, 0 < A < \pi,$ 得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

所以 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$

又 $\tan B = 2,$

所以 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{3}{4} + 2}{1 - \frac{3}{4} \times 2} \\ &= -\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

于是 $\tan(2A + 2B) = \tan[2(A + B)]$

$$= \frac{2 \tan(A + B)}{1 - \tan^2(A + B)}$$

$$= \frac{2 \times \left(-\frac{11}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{11}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{44}{117}.$$

练习

1. 已知 $\cos \frac{\alpha}{8} = -\frac{4}{5}$, $8\pi < \alpha < 12\pi$, 求 $\sin \frac{\alpha}{4}$, $\cos \frac{\alpha}{4}$, $\tan \frac{\alpha}{4}$ 的值.

2. 已知 $\sin(\alpha - \pi) = \frac{3}{5}$, 求 $\cos 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\tan \alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan 2\alpha = \frac{1}{3}$, 求 $\tan \alpha$ 的值.

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

(2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;

(3) $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$;

(4) $2\cos^2 22.5^\circ - 1$.



利用信息技术制作三角函数表

在《数学1》的阅读与思考“对数的发明”中曾经谈到，纳皮尔利用对数制作了 $0^\circ \sim 90^\circ$ 每隔 $1'$ 的八位三角函数表。应该说，纳皮尔仅仅凭借手工运算得到这个三角函数表的工作量是非常大的，这也显示出他超人的毅力和为科学献身的精神。今天，我们可以利用已经学会的三角函数知识以及算法知识，借助计算机，容易地制作出非常精确的三角函数表。下面我们借助计算机来作一个 $0^\circ \sim 90^\circ$ 每隔 $1'$ 的八位三角函数表。

用科学计算器可得：

$$\sin 1' = 2.908\,882\,046 \times 10^{-4} \approx 0.000\,290\,888.$$

以此作为初始值，利用

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'};$$

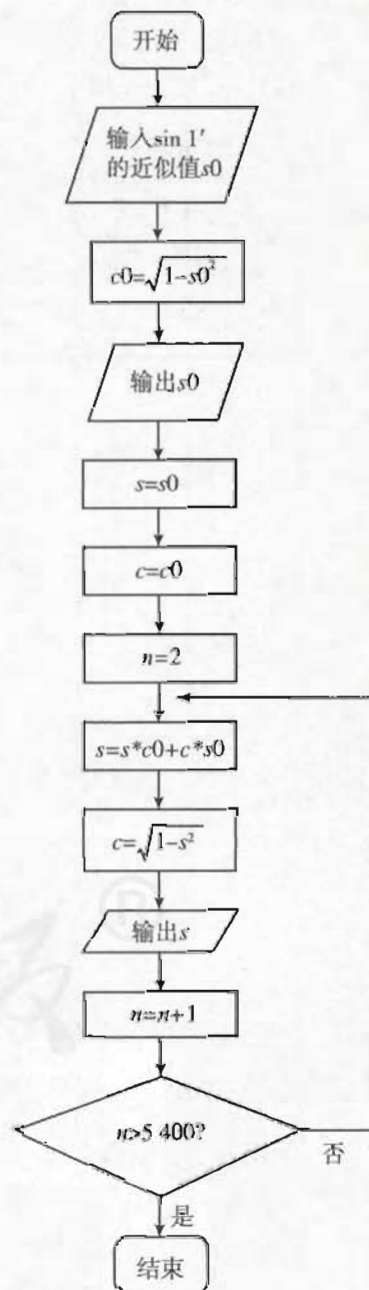
$$\alpha_0 = 1', \alpha_n = \alpha_{n-1} + 1', n \geq 1;$$

$$\sin \alpha_n = \sin 1' \cos \alpha_{n-1} + \cos 1' \sin \alpha_{n-1},$$

$$\cos \alpha_n = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n},$$

就可以写出一个算法（如右图所示），然后通过计算机而得到一个正弦函数的三角函数表。

请同学们根据上述思路，自己编写程序，得出一个三角函数表。



习题 3.1

A 组

1. 利用公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 、 $S_{(\alpha-\beta)}$ 证明:

$$(1) \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin \alpha; \quad (2) \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha;$$

$$(3) \cos(\pi-\alpha)=-\cos \alpha; \quad (4) \sin(\pi-\alpha)=\sin \alpha.$$

2. 已知 $\cos \alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\pi$, 求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

3. 已知 $\sin \alpha=\frac{2}{3}$, $\cos \beta=-\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta\in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

4. 已知 α, β 都是锐角, $\cos \alpha=\frac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$, 求 $\cos \beta$ 的值. (提示: $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.)

5. 已知 $\sin(30^\circ+\alpha)=\frac{3}{5}$, $60^\circ<\alpha<150^\circ$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

6. 利用和(差)角公式求下列各三角函数的值:

$$(1) \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right); \quad (2) \cos\left(-\frac{61\pi}{12}\right); \quad (3) \tan \frac{35\pi}{12}.$$

7. 已知 $\sin \alpha=\frac{2}{3}$, $\cos \beta=-\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, β 是第三象限角, 求 $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos B=\frac{3}{5}$, 求 $\cos C$ 的值.

9. 已知 $\sin \theta=\frac{3}{5}$, $\theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\tan \varphi=\frac{1}{2}$, 求 $\tan(\theta+\varphi)$, $\tan(\theta-\varphi)$ 的值.

10. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $2x^2+3x-7=0$ 的两个实数根, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

11. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$, $\tan(\alpha-\beta)=5$, 求 $\tan 2\alpha$, $\tan 2\beta$ 的值.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp BC$, 垂足为 D , AD 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且 $BD:DC:AD=2:3:6$, 求 $\angle BAC$ 的度数.

13. 化简:

$$(1) 3\sqrt{15}\sin x+3\sqrt{5}\cos x;$$

$$(2) \frac{3}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x;$$

$$(3) \sqrt{3}\sin \frac{x}{2}+\cos \frac{x}{2};$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right);$$

$$(5) \sin 347^\circ\cos 148^\circ+\sin 77^\circ\cos 58^\circ;$$

$$(6) \sin 164^\circ\sin 224^\circ+\sin 254^\circ\sin 314^\circ;$$

$$(7) \sin(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\beta)-\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\gamma);$$

$$(8) \sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\beta);$$

$$(9) \frac{\tan \frac{5\pi}{4}+\tan \frac{5\pi}{12}}{1-\tan \frac{5\pi}{12}};$$

$$(10) \frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin \alpha\cos \beta}{2\sin \alpha\sin \beta+\cos(\alpha+\beta)}.$$

14. 已知 $\sin \alpha = 0.80$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 的值 (保留两个有效数字).
15. 已知 $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $180^\circ < \varphi < 270^\circ$, 求 $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\tan 2\varphi$ 的值.
16. 已知等腰三角形一个底角的正弦值为 $\frac{5}{13}$, 求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切值.
17. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\tan(\alpha + 2\beta)$ 的值.
18. 已知 $\cos(\alpha + \beta)\cos \beta + \sin(\alpha + \beta)\sin \beta = \frac{1}{3}$, 且 $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 求 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值.
19. 化简:
- (1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$;
 - (2) $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$;
 - (3) $\sin x \cos x \cos 2x$;
 - (4) $\frac{1}{1 - \tan \theta} - \frac{1}{1 + \tan \theta}$

B 组

1. 证明:

$$(1) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha;$$

$$(2) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A$, $\tan B$ 是 x 的方程 $x^2 + p(x+1) + 1 = 0$ 的两个实根, 求 $\angle C$.

3. 观察以下各等式:

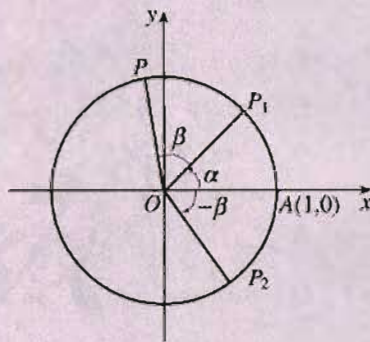
$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点, 写出能反映一般规律的等式, 并对等式的正确性作出证明.

4. 如图, 考虑点 $A(1, 0)$, $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$, $P(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$. 你能从这个图出发, 推导出公式 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 吗?



(第4题)

CHAPTER 3

3.2

简单的三角恒等变换



学习了和（差）角公式，倍角公式以后，我们就有了进行三角变换的新工具，从而使三角变换的内容、思路和方法更加丰富，这为提高我们的推理、运算能力提供了新的平台。

例 1 试以 $\cos \alpha$ 表示 $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$.

解: α 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的二倍角. 在倍角公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ 中, 以 α 代替 2α , 以 $\frac{\alpha}{2}$ 代替 α , 即得

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

所以

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad ①$$

在倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ 中, 以 α 代替 2α , 以 $\frac{\alpha}{2}$ 代替 α , 即得

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1,$$

所以

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad ②$$

将①②两个等式的左右两边分别相除, 即得

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$



α 与 $\frac{\alpha}{2}$ 有什么关系?

例 1 的结果还可以表示为:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

并称之为半角公式 (不要求记忆), 符号由 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限决定.



代数式变换与三角变换有什么不同呢?

代数式变换往往着眼于式子结构形式的变换. 对于三角变换, 由于不同的三角函数式不仅会有结构形式方面的差异, 而且还会有所包含的角, 以及这些角的三角函数种类方面的差异, 因此三角恒等变换常常首先寻找式子所包含的各个角之间的联系, 并以此为依据选择可以联系它们的适当公式, 这是三角式恒等变换的重要特点.

例 2 求证:

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$(2) \sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

证明: (1) 因为

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

将以上两式的左右两边分别相加, 得

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

即

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

(2) 由 (1) 可得

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad ①$$

设 $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \varphi$,

那么

$$\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}, \quad \beta = \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

把 α, β 的值代入①, 即得

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

思考?

在例 2 证明过程中, 如果不用(1)的结果, 如何证明(2)?

这两个式子的左右两边在结构形式上有什么不同?

如果记

$$\sin \alpha \cos \beta = x,$$

$$\cos \alpha \sin \beta = y,$$

则有

$$x + y = \sin(\alpha + \beta),$$

$$x - y = \sin(\alpha - \beta).$$

只要解上述方程组, 就可以求出 x , 即求出 $\sin \alpha \cos \beta$.

在例 2 证明过程中, 用到了换元思想, 如把 $\alpha + \beta$ 看作 θ , $\alpha - \beta$ 看作 φ , 从而把包含 α, β 的三角函数式变换成 θ, φ 的三角函数式. 另外, 把 $\sin \alpha \cos \beta$ 看作 x , $\cos \alpha \sin \beta$ 看作 y , 把等式看作 x, y 的方程, 通过解方程求得 x , 就是方程思想的体现.

例 3 求函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的周期, 最大值和最小值.

分析: 利用三角恒等变换, 先把函数式化简, 再求相应的值.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } y &= \sin x + \sqrt{3} \cos x \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \\
 &= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right),
 \end{aligned}$$

所以, 所求的周期为 2π , 最大值为 2, 最小值为 -2.

例 4 如图 3.2-1, 已知 OPQ 是半径为 1, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形, C 是扇形弧上的动点, $ABCD$ 是扇形的内接矩形. 记 $\angle COP = \alpha$, 求当角 α 取何值时, 矩形 $ABCD$ 的面积最大? 并求出这个最大面积.

分析: 要求当角 α 取何值时, 矩形 $ABCD$ 的面积 S 最大, 可分二步进行:

- (1) 找出 S 与 α 之间的函数关系;
- (2) 由得出的函数关系, 求 S 的最大值.

解: 在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中,

$$OB = \cos \alpha, \quad BC = \sin \alpha.$$

在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中,

$$\frac{DA}{OA} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

所以

$$OA = \frac{\sqrt{3}}{3} DA = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha,$$

所以

$$AB = OB - OA = \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha.$$

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S , 则

$$\begin{aligned}
 S &= AB \cdot BC \\
 &= \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \right) \sin \alpha \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} (1 - \cos 2\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) - \frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

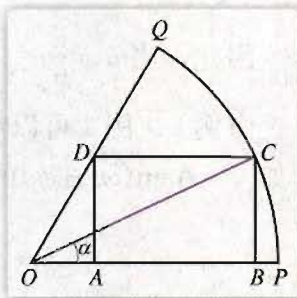


图 3.2-1

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, 得 $\frac{\pi}{6} < 2\alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$. 所以当

$$2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时,

$$S_{\text{最大}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

因此, 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, 矩形 ABCD 的面积最大, 最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

由例 3、例 4 可以看到, 通过三角变换, 我们把形如 $y = a \sin x + b \cos x$ 的函数转化为形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的函数, 从而使问题得到简化. 这个过程中蕴涵了化归思想.

练习

1. 求证 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$

2. 求证:

(1) $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)];$

(2) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$

(3) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$

3. 求证:

(1) $\sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2};$

(2) $\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2};$

(3) $\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}.$

4. 求下列函数的最小正周期, 递增区间及最大值:

(1) $y = \sin 2x \cos 2x;$

(2) $y = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 1;$

(3) $y = \sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x.$

习题 3.2

A 组

1. 求证:

(1) $(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 = 1 - \sin 4\alpha;$

(2) $\tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = -\frac{2}{\tan \theta};$

(3) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\tan x;$

(4) $\frac{1 + \sin 2\varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \cos \varphi + \sin \varphi;$

(5) $\frac{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha};$

(6) $1 + \cos 2\theta + 2\sin^2 \theta = 2;$

(7) $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan^2 \theta;$

(8) $\frac{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan \theta.$

2. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$:

(1) 求证: $\sin \alpha \cos \beta = 5 \cos \alpha \sin \beta;$

(2) 求证: $\tan \alpha = 5 \tan \beta.$

3. 已知 $\frac{1 - \tan \theta}{2 + \tan \theta} = 1$, 求证 $\tan 2\theta = -4 \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$ 4. 已知 $x + y = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, $x - y = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$, 求证: $x^2 + y^2 = 1.$ 5. 求函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期和递减区间.

B 组

1. 求证:

(1) $3 + \cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha = 8 \sin^4 \alpha;$

(2) $\frac{\tan \alpha \tan 2\alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} + \sqrt{3}(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 2 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right).$

2. 若 $\sin 76^\circ = m$, 试用含 m 的式子表示 $\cos 7^\circ$.3. 是否存在锐角 α, β , 使 $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$, $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$ 同时成立? 若存在, 求出 α, β 的度数; 若不存在, 请说明理由.

4. 你能利用右图, 给出下列两个等式的一个证明吗?

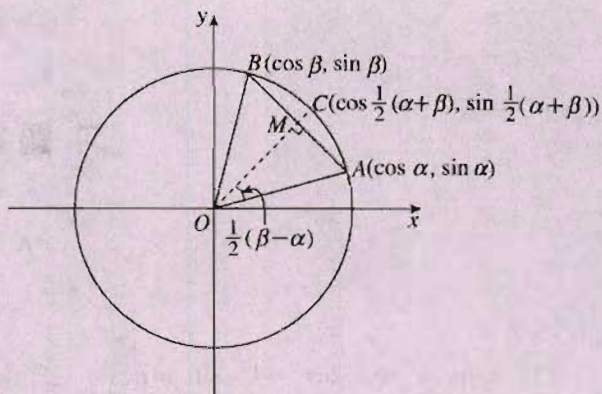
$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

5. 设 $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, $x \in \{n \mid n = 2k, k \in \mathbf{N}_+\}$. 利用三角变换, 估计 $f(\alpha)$ 在 $x = 2, 4, 6$ 时的取值情况, 进而对 x 取一般值时 $f(\alpha)$ 的取值范围作出一个猜想.

6. (1) 求函数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ 的最大值与最小值.

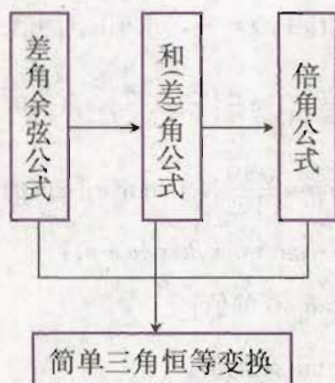
(2) 你能用 a, b 表示函数 $y = a\sin x + b\cos x$ 的最大值和最小值吗?



(第4题)

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 两角差的余弦公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 是本章十一个公式的基础. 通过对这个公式证明过程的思考, 你体会到向量方法的作用了吗? 体会到选择这个公式作为基础的原因了吗?
2. 逻辑推理十分讲究逻辑关系. 本章的十一个公式之间存在怎样的逻辑联系? 推导这些公式的过程中你用到了哪些基本的数学思想方法?
3. 三角函数式是三角变换的对象, 你是从哪几个基本方面认识三角函数式的特点的? 三角式的变换与代数式的变换有什么相同点? 有什么不同点? 对三角函数式特点的分析对你提高三角恒等变换的能力有什么帮助?

A 组

- 已知 α, β 都是锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$ 的值.
- 已知 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\sin(\frac{5\pi}{4} + \beta) = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值.
- 已知 α, β 都是锐角, $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\tan(\alpha + 2\beta)$ 的值.
- 证明: $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha \tan \beta \tan(\alpha + \beta)$;
 - 求 $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$ 的值;
 - 若 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, 求 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta)$ 的值;
 - 求 $\frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 120^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}$ 的值.
- 化简:
 - $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$;
 - $\sin 40^\circ(\tan 10^\circ - \sqrt{3})$;
 - $\tan 70^\circ \cos 10^\circ(\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1)$;
 - $\sin 50^\circ(1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ)$.
- 已知 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 求 $(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2})^2$ 的值;
 - 已知 $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$, 求 $\sin \alpha$ 的值;
 - 已知 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$, 求 $\sin 2\theta$ 的值;
 - 已知 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, 求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 的值.
- 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值.
- 证明:
 - $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4 \alpha$;
 - $\frac{1 + \sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \tan \alpha + \frac{1}{2}$;
 - $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$;
 - $\frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \tan^4 A$.

9. 已知函数 $y = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x$.

(1) 求它的递减区间;

(2) 求它的最大值和最小值.

10. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值以及取得最小值时 x 的集合.

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin x(\sin x + \cos x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(2) 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象.

12. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos x + a$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求使 $f(x) \geq 0$ 成立的 x 的取值集合.

13. 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, A 是 l_1, l_2 之间的一定点, 并且 A 点到 l_1, l_2 的距离分别为 h_1, h_2 . B 是直线 l_2 上一动点, 作 $AC \perp AB$, 且使 AC 与直线 l_1 交于点 C , 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

B 组

1. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, 求 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4})$ 值.

2. 已知 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

3. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

4. 已知 $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{3}{5}$, $\frac{17\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{4}$, 求 $\frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值.

5. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = 2\sin \alpha$, $\sin \theta \cdot \cos \theta = \sin^2 \beta$, 求证: $4\cos^2 2\alpha = \cos^2 2\beta$.

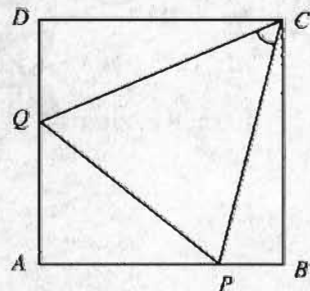
6. 若函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + m$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 6, 求常数 m 的值及此函数当 $x \in \mathbb{R}$ 时的最小值, 并求相应的 x 的取值集合.

7. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, P, Q 分别为边 AB, DA 上的点. 当 $\triangle APQ$ 的周长为 2 时, 求 $\angle PCQ$ 的大小.

8. 已知 $\sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{5}$, $\beta \in (0, \pi)$.

(1) 求 $\tan \beta$ 的值;

(2) 你能根据所给的条件, 自己构造出一些求值问题吗?



(第 7 题)

后 记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

我们聘请北京师范大学刘绍学教授为主编，与高中数学课程标准研制组的部分成员、大学数学教师、数学教育理论工作者、中学数学教研员和数学教师共同组成编写委员会，根据教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》，编写了这套数学实验教科书。这里特别要感谢北京师范大学数学科学学院领导对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持，同时还要感谢所有对本套教科书提出修改意见，提供过帮助与支持的专家、学者和教师，以及社会各界朋友。

本册教科书是编委会全体成员集体智慧的成果。除已列出的主要编写者外，参加本册教科书讨论的还有：刘意竹、俞求是、王嵘、马波、张鹤、王申怀、陶维林、郭慧清、白涛、谷丹、鲁彬、王敬庚、徐勇、吕伟泉等。

我们还要感谢使用本套教材的实验区的师生们。希望你们在使用本套教材的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意。让我们携起手来，共同完成教材建设工作。我们的联系方式如下：

电话：(010) 58758320 58758333

E-mail: zhangjy@pep.com.cn liucm@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心