普 通 高 中 教 科 书

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

数 学

必 修

第二册

A版

人民教育出版社
·北京·

主　　编：章建跃　李增沪
副 主 编：李　勇　李海东　李龙才
本册主编：薛　彬　张淑梅

编写人员：薛　彬　申　铁　张惠英　丁益祥　章建跃　李龙才　沈　婕
李海东　吴明华　马　波　王芝平　张唯一　张淑梅　刘文慧
赵　昕　程海奎　陈雪梅

责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏

图书在版编目（CIP）数据

普通高中教科书教师教学用书．数学：必修．第二册：A版 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．— 北京：人民教育出版社，2019.11
ISBN 978-7-107-34127-4

Ⅰ．①普… Ⅱ．①人… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．① G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 300910 号

普通高中教科书　教师教学用书　数学　必修　第二册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　址　http://www.pep.com.cn
重　印　××× 出版社
发　行　××× 新华书店
印　刷　××× 印刷厂
版　次　　年　月第　版
印　次　　年　月第　次印刷
开　本　890 毫米 ×1240 毫米　1/16
印　张　22
字　数　533 千字
印　数　　　册
书　号　ISBN 978-7-107-34127-4
定　价　　元
定价批号：××号　审图号：GS（××××）××××号

说　明

《普通高中教科书·数学》（人教A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书；配套教学资源包括同步解析与测评、“数学欣赏”丛书、人教数字教材、教科书配套光盘、教师用书配套光盘等.

《普通高中教科书·数学》（人教A版）是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称《标准（2017年版）》）编写的. 全套书分为必修和选择性必修，其中必修两册（8学分），选择性必修三册（6学分），内容包括《标准（2017年版）》规定的必修课程和选择性必修课程的所有内容，教科书突出函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体. 其中数学建模活动设置在与现实联系更加紧密的函数、概率与统计等主题中；数学探究活动设置在数学知识的交汇点上；数学文化融入在正文内容之中，并以“文献阅读与数学写作”等方式提出具体学习要求.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章头图和章引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，既可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文以研究一个数学对象的基本套路为依据，以“问题引导学习”为指导，根据需要安排“观察”“思考”“探究”“归纳”等栏目，或穿插一些开放性的问题，以激发学生的创新思维、引导学生的数学活动. 内容展开过程中注重“类比”“归纳”“特殊化”“一般化”等逻辑方法的使用，促使学生开展主动学习，在落实“四基”的过程中，培养学生的数学学科核心素养.

3. 正文的边空设有“贴示”和“思考”，“贴示”介绍与正文内容相关的背景知识，“思考”中是一些有助于理解正文的问题.

4. 适当安排了“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识、扩大学生的知识面、运用信息技术学习等提供资源.

5. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构和对本章内容的回顾与思考. “本章知识结构”以框图形式体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想和方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键点上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想和方法的理解.

6. 本书的习题分为练习、习题、复习参考题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习参考题供复习全章时选用. 其中习题、复习参考题按照题目的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三个层次.

这套教师教学用书与《普通高中教科书·数学》（人教A版）相对应，供教师教学时参考

使用.

本套书中，**“中学数学及其教学”**是对中学数学内容及其教学的整体刻画与描述，类似于知识逻辑框图，按照“数、量及其运算”“空间形式”“数形结合”等线索展开，展示它们之间的相互联系；结合“四基”“四能”的教学，分析了培养数学学科核心素养的策略与方法．希望这一内容对广大教师从整体上理解中学数学的内容以及有效地将数学学科核心素养落实于课堂有所帮助.

本套教师用书按相应教科书的顺序，安排了总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、评价建议与测试题五部分内容.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想．包括本章概述、本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、本章编写思考、本章教学建议等内容.

(1) 本章概述说明本章内容的定位以及本章编写的指导思想，包括本章的核心内容、思想方法以及重点培养的数学核心素养.

(2) 本章学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，突出“四基”“四能”目标领域的阐述，把数学学科核心素养的培养目标融入知识、技能、能力等目标中．表述时还关注了目标的可测性，努力体现目标的“导学”“导教”“导测评”的功能.

(3) 本章知识结构框图展示了本章知识的逻辑关系以及发展线索，以利于教师从整体上把握本章知识发生发展的脉络.

(4) 内容安排在从整体上对本章内容的地位作用、处理方法进行介绍的基础上，按照全章内容的编排顺序阐述各节内容要点及其逻辑关系，引导教师体会“数学地认识和解决问题的方法”．在此基础上，概述本章的核心内容及其反映的数学思想和方法，并由此阐述本章内容的重点、难点.

(5) 课时安排根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

(6) 本章编写思考从编写者角度出发，阐释编写本章时重点关注的问题，体现本章内容、思想方法的核心，并利用典型事例，在如何挖掘本章内容蕴含的育人资源，以有效培养学生的数学学科核心素养上作出说明．对变化较大的内容，结合具体内容给出“为什么如此变化”的说明，以帮助教师理解变化的意图.

(7) 本章教学建议从教师教和学生学两方面给出本章的教法和学法建议．关注本章的核心内容和思想方法的教学，对学生学习以及教师如何引导学生学习做出分析，并给出教学建议．结合本章的典型内容，以“四基”“四能”为载体，给出了落实有关核心素养的具体建议．其中特别注意从“一般观念”的层次，即如何构建本章的研究路径，如何引导学生发现和提出本章的核心问题，如何使学生想到研究方法等方面给出教学建议，以使数学基本思想的领悟和基本活动经验的积累得到落实.

2. 教科书分析以教科书的节为单位，按照教科书顺序展开分析，着重说明教科书编写意图，并提出具体的教学建议，以利于教师准确把握相关内容．内容包括本节知识结构框图，重点、难点，教科书编写意图及教学建议三部分.

(1) 本节知识结构框图讲述本节知识点及其发生发展过程和逻辑关系，说明学习本节知识内

容时，涉及的前后相关知识.

（2）重点是指本节中的核心概念及其蕴含的数学思想和方法．难点主要指学生在学习过程中可能遇到的困难和问题，特别是在理解概念（原理）的过程中可能出现的问题.

（3）教科书编写意图及教学建议对“教科书为什么这样写”进行分析．结合教科书中的案例，阐述学习本节内容应具备的知识基础，如何理解内容的本质以及知识中蕴含的数学思想和方法，创设情境所选素材的意图，如何提出有数学含金量的问题，如何引导学生开展数学探究活动，如何突破重点、难点等，以及激发学生学习兴趣、渗透能力培养，进而有效落实数学学科核心素养的培养等.

教科书编写意图及教学建议对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出切实可行的建议．例如，针对某个内容如何设问，学生可能会出现哪些理解上的困难，应当如何化解，可以从哪些方面进行类比、联想、推广，要注意哪些数学思想方法的应用等.

3. 习题解答给出了教科书练习、习题、复习参考题的参考答案．对于其中的综合性问题，给出了完整的解答步骤或解题思路.

4. 教学设计案例选取了一些具有典型性、教学难度大、新增知识等给出教学设计，特别是给出了一些典型的单元教学设计．设计框架包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面.

（1）内容和内容解析．“内容”是对当前教学内容的内涵和外延所作的简要说明．“内容解析”是对教学内容的本质、内容蕴含的数学思想和方法、知识的上下位关系、内容的育人价值（着重在数学学科核心素养的发展）的分析．在此基础上，阐明本节课（单元）的教学重点.

（2）目标和目标解析．“目标”是指通过本节课（单元）教学要达到的目标，指向学生的变化，一般用“了解”“理解”“掌握”以及有关行为动词“经历”“体验”“探究”等表述．“目标解析”是与目标对应的，是从可达成、可操作、可检测等角度对“了解”“理解”“掌握”以及“经历”“体验”“探究”的含义作出解析．目标和目标解析注意过程与结果的融合、隐性目标与显性目标的融合.

（3）教学问题诊断分析是设计者根据教学经验、数学内在的逻辑关系以及思维发展理论，对本内容在教与学中可能遇到的障碍进行预测，并对出现障碍的原因进行分析．即分析学生已具备的认知基础（包括知识、思想方法和思维发展基础），对照教学目标，发现已有基础和目标之间的差异，分析学生学习中可能出现的障碍，在此基础上给出教学难点.

（4）教学支持条件分析是为了有效实现教学目标，根据问题诊断分析，决定应当采取的教学支持条件，以帮助学生更有效地进行数学思考、发现数学规律．这个栏目是根据需要设置的，侧重于信息技术的使用.

（5）教学过程设计以问题串的形式，从数学概念和思想方法的发生发展过程和学生数学思维过程两方面构建教学过程的内在逻辑线索，突出核心概念的思维建构和技能操作过程，突出数学基本思想的领悟过程，突出数学基本活动经验的积累过程．在每一个问题后，基于教学问题诊断分析、学生学习行为分析等给出设计意图；并给出师生活动预设，以及这一环节需要重点关注的问题等．对于单元设计，强调数学的整体性、思维的系统性，思想方法的前后一致性，知识发生

发展过程的逻辑连贯性等.

(6) 目标检测设计是以一定的题目进行检测，以考查课堂教学目标是否达成. 对每一个题目都写明检测目标，以加强检测的针对性、有效性.

5. 评价建议与测试题以“为改进学习而评价”为基本理念，从本章学业要求、评价建议、命题建议等几方面提出本章评价建议，给出示范性的评价测试题供参考，并说明每道测试题的设计意图.

(1) 本章学业要求主要说明学生通过本章学习应达到的基本要求，以《标准（2017 年版）》中阐述的本章内容的学业要求为依据，根据知识的逻辑结构和教科书的内容顺序，按照“了解”“理解”“掌握”等认知水平进行分层表述，并将本章主要的核心素养按主次顺序排列.

(2) 本章评价建议是从本章应把握的评价要素及其基本要求出发，提出本章的评价建议. 按照数学知识技能、思想方法和关键能力三个要素，将它们的基本要求细化为“核心知识评价要求”“思想方法评价要求”和“关键能力评价要求”三个维度，建立基于上述数学学科核心素养的三维评价体系. 其中，思想方法包含“数形结合”“函数与方程”“分类与整合”“化归与转化”“特殊与一般”“统计与概率”等，关键能力包含“逻辑思维能力”“运算求解能力”“直观想象能力”“数据处理能力”“创新应用能力”，这些指标是综合参考《标准（2017 年版）》和现行高考数学《考试大纲》《考试说明》的有关要求而确定的.

(3) 本章命题建议主要从本章学业水平测试的命题原则、命题路径、命题意图等方面，提出本章学业水平测试的基本要求，编制本章学业水平测试的双向多维细目表，并提供一套本章示范性学业水平测试题和参考答案.

本书是必修第二册的教师教学用书，内容包括“平面向量及其应用”“数学探究 用向量法研究三角形的性质”“复数”“立体几何初步”“统计”“概率”六部分. 本书共 69 课时，各部分授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第六章　平面向量及其应用	18 课时
数学探究　用向量法研究三角形的性质	3 课时
第七章　复数	8 课时
第八章　立体几何初步	19 课时
第九章　统计	12 课时
第十章　概率	9 课时

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2019 年 10 月

目　录

中学数学及其教学

老师们好！感谢大家使用我们的教材.

为了帮助大家理解“人教A版”教科书和本套教师用书，我们想就数学教育教学中的一些关键问题，例如，如何理解数学教育中的立德树人？如何理解中学数学？如何通过理解数学、理解学生、理解教学、理解技术，实现教师专业化发展和教学能力提升？如何实施“核心素养导向的数学教学”？如何才能使学生的数学学科核心素养得到良好发展？等等，谈点想法，希望能抛砖引玉.

一、数学教育中的立德树人

通常，人们往往认为“德育”与数学教学“弱相关”，因为数学课堂中的推理、运算等主要数学活动似乎与人的道德、品性等没有直接关联，但事实上这仅是表面现象. 数学教育中的德育是深层次的，有其独特的内涵.

随着我国社会、经济的发展，高中教育的性质和培养目标也在发生变化，正如《普通高中课程方案（2017年版）》指出的：普通高中教育是在义务教育基础上进一步提高国民素质、面向大众的基础教育，其培养目标是进一步提升学生的综合素质，着力发展学生的核心素养，使学生具有理想信念和社会责任感，具有科学文化素养和终身学习能力，具有自主发展能力和沟通合作能力. 这一培养目标事实上就界定了高中各科德育的共同内涵. 当前，发展学生的核心素养就是立德树人的具体化.

数学学科对培育学生的正确价值观、必备品格、关键能力的贡献就是发展学生的数学学科核心素养，这是数学学科立德树人的功能和育人贡献之所在.《普通高中数学课程标准（2017年版）》（简称《标准（2017年版）》）提出，数学教育中的立德树人要体现数学学科特点，其基本内涵是：

学生能在获得“四基”、提高“四能”的过程中，发展数学学科核心素养，逐步学会用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界；提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；发展自主学习能力，提高实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值.

我们认为，理性思维和科学精神是数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等六个数学学科核心素养要素（即六大关键能力）的灵魂，所以发展学生的数学学科核心素养是数学学科立德树人的具体化，而聚焦点应放在理性思维和科学精神的发展上，这是由数学的学科特点所决定的.《标准（2017年版）》指出：“数学是研究数量关系和空间形式的一门科学. 数学源于对现实世界的抽象，基于抽象结构，通过符号运算、形式推理、模型构建等，理解和表达现实世界中

事物的本质、关系和规律.”这一表述阐明了数学与大自然及人类社会的天然联系，数学是表达宇宙空间本质的工具. 同时，数学最本质的特征是逻辑的严密性，其中蕴含着讲规则、重证据、依逻辑、实事求是、严谨求实的科学精神与为人品格. 这样，数学不仅有理解和表达现实事物的本质、关系和规律以及发展学生理性思维的工具属性，也有鲜明的科学精神、为人品格等价值观念属性. 所以，数学教育必然是工具性和价值观的统一体，体现数学教育本来面目的数学课堂教学必然是“德智融合”的，科学精神的培育是自然而然地融入在“四基”“四能”的教学中的. 也就是说，如果课堂教学没有把育德和育智紧密结合起来，那么就没有完整体现数学教育的真谛.

理性思维得到良好发展的具体表现是：能抓住纷繁复杂事物中的关键要素，善于发现事物的本质、关系和规律；善于返璞归真、精中求简、以简驭繁，能在一般观念指导下思考和解决问题；对自己的判断和选择有清晰且自觉的认识，能有理有据、前后一致、逻辑连贯地阐明观点；善于透过现象看本质，识破似是而非的诡辩；形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质，养成以理服人的行为习惯.

总之，符合立德树人要求的数学教育，就是要充分挖掘和利用数学课程内容所蕴含的育人资源，发挥数学在形成人的理性思维、科学精神和促进人的智力发展中的独特作用，用数学的方式开展育人活动，使学生在掌握“四基”、提高“四能”的过程中，学会有逻辑地、创造性地思考，形成数学的思维方式，发展理性思维，养成科学精神，成为善于认识问题、解决问题的人才.

二、理解中学数学

从上所述可见，深化数学课程改革，就是要以立德树人为根本，以数学学科核心素养为目标导向，培养“四基”“四能”为手段，发展理性思维和科学精神为落脚点. 为了建立数学学科核心素养与数学课程及其教学的内在联系，充分发挥数学课程和教学在全面贯彻党的教育方针、落实立德树人根本任务、发展素质教育等方面独特的育人价值，《标准（2017 年版）》给出了数学学科核心素养，明确了学生学习数学课程后应达成的正确价值观、必备品格和关键能力，并围绕数学学科核心素养的落实，精选、重组了教学内容，提出了以核心素养为导向的数学教材编写、数学教学以及考试评价的新要求，强调数学教学要更加关注数学学科思想、数学思维方式等，要努力克服重教书轻育人的倾向. 因此，落实数学学科核心素养的前提是教师理解中学数学内容，关键是理解内容所反映的数学思想方法，以及在研究数学对象中所采用的思维方式.

下面我们以《标准（2017 年版）》必修和选择性必修中的内容为主体，将中学数学教科书中的内容编织成为一个知识图谱，以便大家对它有一个脉络清晰、重点突出的理解. 这里的知识图谱是显示数学知识发展进程与结构关系的一系列图形，可以帮助大家运用系统思维，从整体性、联系性、层次性等角度去分析和把握中学数学内容.

1. 中学数学的研究对象

对于“什么是数学”“数学的研究对象有哪些类型”等问题的回答，可以有不同观点，可以从不同角度给出回答. 《标准（2017 年版）》延续了恩格斯的观点，认为“数学是研究数量关系与空间形式的一门科学”. 这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者融合状态的“数形结合”. 概率与统计当然也可以纳入上述三条主线中，但概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现

象的数学，所以概率与统计应放在一个独立的位置上. 在中学阶段，集合与常用逻辑用语都是刻画事物的语言和工具，因此应该作为学习所有内容的基础.

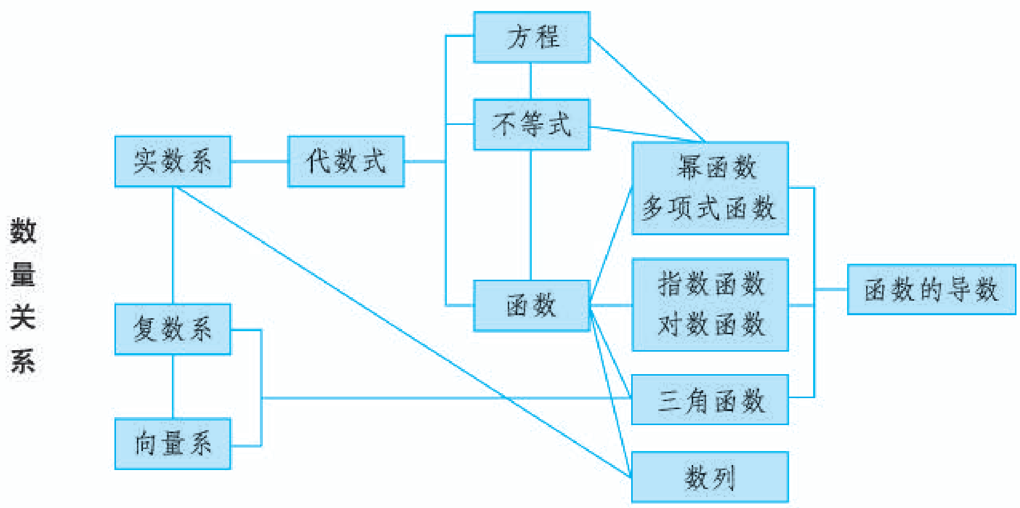
2. 集合与常用逻辑用语

集合 只要研究问题，就有研究对象. 这些研究对象都是数学中的元素. 一方面，把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合. 因而元素、集合是处处存在的. 另一方面，从有关自然数的 Peano 公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义. 在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合. 这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用.

常用逻辑用语 数学的最重要特征是它的严谨性，这种严谨性是由一系列表示关系的逻辑术语把表示概念的名词连接在一起而体现的，由此，从条件到结论，清清楚楚、明明白白，不会产生歧义，而且能被其他人理解. 数学的表达方式是全世界数学家都认同和遵守的，数学语言是世界通用的. 逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具，是数学严谨性与准确性的基本保证，是逻辑思维的基本语言.

3. 数量关系

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 复数由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系. 这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便而完美的运算了. 对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上向量的坐标是一个实数，平面中向量的坐标是实数对 (x, y)，空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作是实数的一种推广. 此外，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})$，而其中的 $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ 被发展成现在的向

量．从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分．当然，在谈论向量时永远记住它的物理、几何背景（位移、力，有向线段等）．

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙．

代数式 用字母代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等．数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算．代数式及其运算可看作是数及其运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围．代数学的根源在于代数运算，而运算律则是整个代数学的基础．在研究代数问题时，我们往往通过运算来归纳地发现、定义和证明．

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程．方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备．由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙．

不等式 把方程中的“$=$”换成实数系所特有的“$>$”（或“$<$”）便得到不等式，因而两者有类似的地方．如解方程要利用等式的性质进行等价变换，解不等式也要利用不等式的性质进行等价变换，而“等式的性质”和“不等式的性质”都有“可传递性”，都是“运算中的不变性、规律性”．由函数观点，方程 $f(x)=0$的解可以看成是函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$的解可看成是函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体．另外，两者关系密切：与函数的零点可看成是函数值不等于 0 处的“边界点”类似，方程 $f(x, y)=0$可设想为不等式 $f(x, y)>0$的“边界”．“$>$”的性质比“$=$”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式．

函数 函数及函数的运算（$+$、$-$、$\times$）．函数源于研究事物运动变化规律的需要．函数刻画了一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分的关系；解三角形可化归为一个三角函数的问题……

幂函数、多项式函数、指数函数与对数函数 这几类函数都有明确的现实背景，形式简单、性质明显而且应用广泛．通过对客观世界中变量关系和规律的抽象，可以得到这些类型的函数．另外，令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y，这是人们知道的第一批函数中的一类，其中最简单、最基本的就是幂函数、多项式函数、指数函数及其反函数（即对数函数）．对于形如 $ab=c$，$a^b=c$ 的代数等式，让其中的一个量随另一个量的变化而变化，可以得到 $y=kx$，$y=\frac{k}{x}$，$y=x^a$，$y=a^x$，$y=\log_a x$ 等基本初等函数．我们发现，没有任何现实背景，从纯粹的代数运算，加上量与量之间的对应思想，也可以抽象出基本初等函数这样重要的数学研究对象．

数列 数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数中……

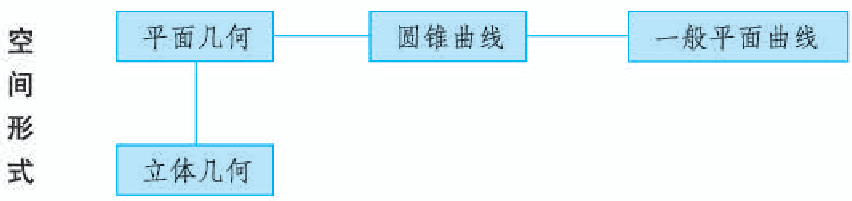
三角函数 描述周期现象的重要数学模型．为了刻画一些简单的周而复始的运动变化现象（如匀速圆周运动），我们以单位圆上点的运动规律为背景引入了任意角的三角函数．正弦函数、余弦函数是一对起源于圆周运动、相辅相成的周期函数，它们的基本性质则是圆的几何性质（主要是对称性）的直接反映．三角函数是数形结合的产物，在探究三角函数的性质和各种各样的三角公式时，借助单位圆的直观是非常重要而有效的方法．三角函数是非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．

函数的导数 虽然函数 $f(x)$ 的导数可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数的描述，因而我们愿把导数概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是极限思想，而导数则是借助于极限的一种运算．

从数及其运算、函数及数形结合等角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

4. 空间形式

“空间形式”所涉及内容可概括为如下结构图：



平面几何 讨论点，直线，直线的位置关系（重点是平行与垂直），三角形、四边形（重点是平行四边形），圆等基本而简单的平面图形的性质，其中尤以三角形为代表．三角形既简单而又能充分反映空间的本质，例如三角形内角和定理所表示的是平面的平行性，而平行性在平面几何中所扮演的角色是使定量几何中的各种公式都大大简化；等腰三角形所具有的轴对称能具体地反映平面的反射对称性，所以它是研究平面几何对称性的基本工具；定量平面几何中的基本定理，三角形面积公式、相似三角形定理和勾股定理是首要的．因此，在几何的学习中，必须重视对三角形的研究．平面几何是进一步用坐标法讨论曲线的基础．平面几何在培养学生的直观想象和逻辑推理等素养上具有不可替代的作用．

立体几何 直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的位置关系，基本立体图形（柱、锥、台、球）的结构特征．特别重要的是空间中的平行和垂直以及两者之间的密切关联，因为它们是整个定量立体几何的基础所在．对于空间图形，只是看看柱面、锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征；凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

圆锥曲线 平面解析几何的主要对象．在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

一般平面曲线 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

一般地，几何的研究对象是图形和图形之间的关系，研究主题是几何对象的性质．定义

某类几何对象的基本方法是，先通过具体事例，分析组成这类对象的基本元素（点、线、面、体）及其形状和位置关系，然后归纳共性，抽象出概念．例如，通过观察具体实物、模型，得出棱柱表面是由平面图形围成的；这些平面图形中，有两个相互平行，其余都是四边形，而且相邻两个四边形的交线相互平行；将这些共性概括到一般去，就抽象出棱柱的概念．所谓几何性质，首先是几何图形组成元素之间的位置关系、大小关系．例如，三角形的性质，就是以三角形的要素（三边、三内角）、相关要素（高、中线、角平分线、外角等）之间的相互关系以及几何量（边长、角度、面积等）为基本问题，从“形状、大小和位置关系”等角度展开研究；“形状”中，“特例”是重点——等腰三角形和直角三角形，凡“特例”都有性质和判定两个基本问题．显然，在这样的一般观念指导下展开研究，对发现几何图形性质、建立几何知识结构大有裨益．

5. 数形结合

用三角函数解三角形 参看 **三角函数**．

把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a,b,C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

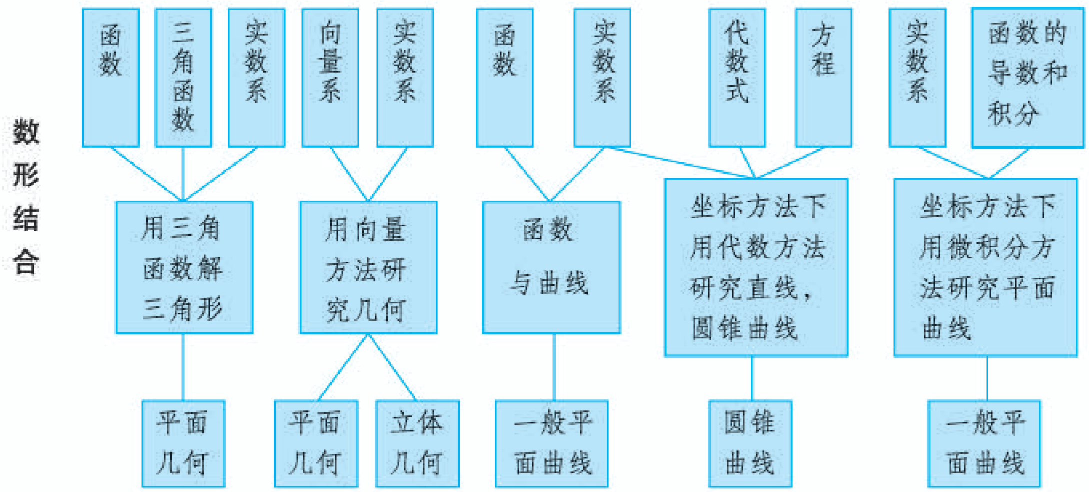
用向量法研究几何 用向量及其运算为工具．向量法的本质，首先是让几何量带上符号．F·克莱因说：“对比把长度、面积、体积考虑为绝对值的普通初等几何学，这样做有极大的好处．初等几何必须依照图形呈现的情况而区分许多情况，而现在用几个简单的一般定理就可以概括．”这几个“一般定理”就是向量的加法与减法、数乘、数量积的运算及运算规则、几何意义（物理意义），以及向量基本定理及坐标表示．用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．需要注意的是，向量法是非常灵活的，利用“基”转化为坐标运算仅仅是其中的一种方法．

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线、圆锥曲线 用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标）、代数式、方程表示出问题中关键的点、距离、直线、圆锥曲线；对这些数、代数式、方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．值得注意的是，解析几何研究的是几何问题，因此“先用几何眼光观察，再用坐标法解决”是基本原则．对圆锥曲线的基本几何特征的认识是有效利用代数法解决问题的基础．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具，用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下页的框图中：



6. 概率与统计

概率 概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础. 概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小. 这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间几何体的体积等），性质也类似. 但是两种度量之间存在如下区别：

（1）作为概率的这种度量的值的范围是[0，1]，几何中的度量却不受这种限制；

（2）概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象是几何图形，随机事件的不确定性使概率的度量难度大大增加.

在中学阶段，借助古典概型引入样本空间概念. 样本空间是样本点的集合，它是概率理论中的最基本而主要的概念，由此可以运用确定性数学的知识和方法研究随机现象. 例如，利用它可以刻画随机事件发生的背景，定义和计算随机事件的概率，研究概率的运算法则和性质等.

统计 统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论. 统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法. 在义务教育阶段主要是学习描述性统计，它不考虑数据的随机性；高中阶段主要学习推断性统计，通过具体问题背景了解基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系以及基于列联表的独立性检验等.

统计学虽然放在数学课程中，但它与数学是有差别的. 首先，数学的研究建立在概念和定义的基础上，用公理化方法来构建数学的理论大厦，而统计学的研究则建立在数据的基础上，是通过数据进行推断的；其次，数学推理要依据逻辑规则，采用演绎推理得出必然正确的结论，而统计推理主要依据历史经验（虽然也要顾及逻辑规则），采用归纳推理进行推断，其结论具有或然性；最后，数学的结论是确定性的，其判断标准是“对与错”，而统计的结论是带有或然性的，所以其判断标准是“好与坏”.

7. 补遗

最后，作为补充，提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了.

（1）数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能指引我们构建研究的路径，使我们产生研究方法的灵感.

（2）函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看 **函数** .

（3）把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象，等.

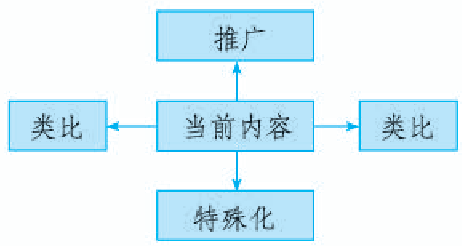
（4）把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看 用三角函数解三角形 . 直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的有序实数对表示出来，一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来，等. 一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了.

（5）“恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等.

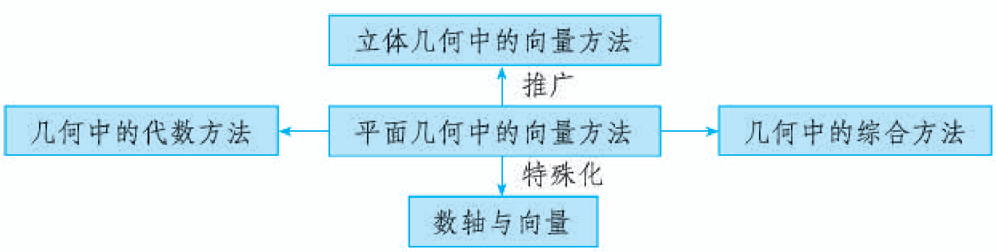
（6）相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

（7）逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性思维和科学精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质，这些就成了我们建立概率理论体系的经验基础，我们借助古典概率模型，在引入样本点和样本空间概念后，经过演绎推理就可以得出概率计算公式、运算性质；在立体几何中，明确了直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行和垂直的定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律；等等.

（8）从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以有力地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

三、核心素养导向的数学教学

下面我们就数学核心素养融入课堂教学的策略和方法，提出一些想法.

1. 数学育人要用数学的方式，要发挥数学的内在力量

在观察现象、认识事物或处理问题时，“数学的方式”是与众不同的. 首先，其目标取向是“追求最大限度的一般性模式特别是一般性算法”，而研究的起点是对面临的具体事物进行数学抽象；其次，数学的思考结构具有系统性、普适性，其“基本套路”大致可以概括为“抽象数学对象—探索数学性质—构建知识体系”；再次，数学的思维方式具有结构性、一致性、连贯性，包括：抽象化、运用符号、建立模型、逻辑分析、推理、计算，不断地改进、推广，更深入地洞察内在的联系，在更大范围内进行概括，建立更为一般的统一理论等，这是一套严谨的、行之有效的科学方法，是在获得数学结论、建立数学知识体系的过程中必须使用的思维方式；最后，数学的表达方式具有统一性，使用一套世界通用的符号形式进行交流. 数学的思考结构、思维方式和符号化表达正是数学的力量所在，逻辑性强，简明而精确，具有四两拨千斤的功效. 数学育人就是要发挥数学的这种力量.

2. 掌握数学知识是发展数学学科核心素养的前提

离开知识的理解和应用，核心素养的发展将成为一句空话. 要让学生真正掌握数学知识，靠掐头去尾烧中段、靠大量解题训练是做不到的，必须让他们经历从数学研究对象的获得，到研究数学对象，再到应用数学知识解决问题的完整过程. 数学对象的获得，既要注重数学与现实之间的联系，也要注重数学内在的前后一致、逻辑连贯性，从“事实”出发，让学生经历归纳、概括事物本质的过程，提升数学抽象、直观想象等素养；对数学对象的研究，要注重让学生经历以“一般观念”（big idea）为引导发现规律、获得猜想，并通过数学的推理、论证证明结论（定理、性质等）的过程，提升逻辑推理、数学运算等素养；应用数学知识解决问题，要注重利用数学概念原理分析问题，体现数学建模的全过程，使学生学会分析数据，从数据中挖掘信息等，提升数学建模、数据分析素养.

以发展学生数学素养为追求，要根据学生的认知规律，螺旋上升地安排教学内容，特别是要让重要的（往往也是难以一次完成的）数学概念、思想方法得到反复理解的机会；要以“事实—概念—性质（关系）—结构（联系）—应用”为明线，以“事实—方法—方法论—数学学科本质观”为暗线，并要强调结合明线布暗线，形成基本数学思想和方法的“渗透—明确—应用”的有序进程，使学生在掌握“四基”、发展“四能”的过程中有效发展核心素养.

要做到“两个过程”的合理性，即从数学知识发生发展过程的合理性、学生认知过程的合理性上加强思考，这是落实数学学科核心素养的关键点. 前一个是数学的学科思想问题，后一个是学生的思维规律、认知特点问题.

3. 推理是数学的“命根子”，运算是数学的“童子功”

与其他学科比较，数学学科的育人途径有什么独特性呢？陈建功先生说：“片段的推理，不但见诸任何学科，也可以从日常有条理的谈话得之. 但是，推理之成为说理的体系者，限于数学一科……忽视数学教育论理性的原则，

无异于数学教育的自杀.”推理和运算是数学的两个车轮子. 因此，数学育人的基本途径是对学生进行系统的（逻辑）思维训练，而训练的基本手段是让学生进行逻辑推理和数学运算，要在推理的严谨性和简洁性、运算的正确性和算法的有效性上有要求. 这样，学生的理性思维会得到逐步发展，科学精神也能得到很好的培养.

4. 教好数学就是落实数学学科核心素养

怎样才是“教好数学”？学生会解各种资料上的题目、考试成绩好就算教好了吗？是，但又不全是，甚至不是最重要的. 从学生的终身发展需要看，从落实数学学科核心素养的要求看，更重要的是：要以“研究一个数学对象的基本套路”为指导，设计出体现数学的整体性、逻辑的连贯性、思想的一致性、方法的普适性、思维的系统性的系列化数学活动，引导学生通过对现实问题的数学抽象获得数学对象，构建研究数学对象的基本路径，发现值得研究的数学问题，探寻解决问题的数学方法，获得有价值的数学结论，建立数学模型解决现实问题. 要使学生掌握抽象数学对象、发现和提出数学问题的方法，要将此作为教学的关键任务，以实现从“知其然”到“知其所以然”再到“何由以知其所以然”的跨越.

一言以蔽之，教好数学就是以数学基础知识、基本技能为载体，使学生在领悟数学基本思想、积累数学基本活动经验的过程中，学会思考与发现，培养数学学科核心素养.

5. 教师的专业水平和育人能力是落实核心素养的关键

理解数学、理解学生、理解教学、理解技术的水平是教师专业水平和育人能力的集中体现，是提高数学教学质量和效益的决定性因素，也是有效提升学生数学核心素养的关键. 当前最主要的问题是有些教师在“理解数学”上不到位导致教学偏差，机械解题训练成为课堂主旋律，而大量题目又不能反映数学内容和思维的本质，使数学学习越来越枯燥、无趣、艰涩，大量学生的感受是“数学不好玩”.

理解数学，就是要把握数学内容的本质，特别是对内容所蕴含的数学思想和方法要有深入理解. 要对一些具有统摄性的“一般观念”有深入理解并能自觉应用. 例如，数学对象的定义方式（如何定议），几何图形的性质指什么，代数性质指什么，函数性质指什么，概率性质指什么，等等.

理解学生，就是要全面了解学生的思维规律，把握中学生的认知特点. 例如，面对一个数学内容，学生会如何想？学生已经具备的认知基础有哪些（包括日常生活经验、已掌握的相关知识技能和数学思想方法等）？达成教学目标所需具备的认知基础有哪些？“已有的基础”和“需要的基础”之间有怎样的差距，哪些差距可以由学生通过努力自己消除，哪些差距需要在教师帮助下消除？学生喜欢怎样的学习方式？等等.

理解教学，就是要把握教学的基本规律，按教学规律办事. 例如，对于教学活动的设计，关键词是：情境—问题—活动—结果. 其中“情境”是以数学内容的本质和学生的认知过程为依据设置教学情境，包括生活情境、数学情境、科学情境等.“问题”是与情境紧密结合的、从情境中生发的系列化问题，必须满足如下标准：①反映内容的本质，②在学生思维最近发展区内，③有可发展性，使学生能从模仿过渡到自主提问.“活动”是指在情境与问题引导下的系列化数学活动，是学生的独立思考、自主探究、合作交流等. 教学的“结果”，既要理解知识、掌握技能，也要领悟数学基本思想、积累数学思维和解决问题的经验，从而水到渠成地使学生的数学学科核心素养得到提升与发展.

理解技术，就是要懂得如何有效利用技术

帮助学生的学和教师的教. 例如，把抽象内容可视化，静态内容动态化，繁杂但没有数学思维含金量的事情让信息技术帮忙做等. 在人工智能时代，我们要借助技术改变课堂生态，实现大面积的个性化教学，实现优质资源共享.

以上我们从几个方面阐述了数学课堂落实数学学科核心素养的条件、策略和方法，其最核心的观点是数学育人要回归数学的学科本质，不搞花架子，实实在在地把数学教好，实现“用数学的方式育人”. 事实上，所有的科学问题在本质上都是简单而有序的. 人类的智慧表现在用简单的概念阐明科学的基本问题，用相似的方法解决不同的问题，而数学的方法就是这样的基本方法. 中学数学中的研究对象多种多样，但研究的内容、过程和方法是一脉相承的，正所谓“研究对象在变，研究套路不变，思想方法不变”. 因此，每一种数量和数量关系、图形和图形关系的教学，我们都应以“研究一个数学对象的基本套路”为指导设计和展开课堂教学，促使学生通过一个个数学对象的研究，体悟具有普适性的数学思想和方法，逐步掌握解决数学问题的那个“相似的方法”，进而逐步形成“数学的思维方式”. 在这样的过程中，数学学科核心素养就潜移默化、润物无声地得到落实了.

让我们一起努力!

第六章 平面向量及其应用

I 总体设计

向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景. 向量既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通几何与代数的桥梁. 向量是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础，在解决实际问题中发挥着重要作用. 本章的学习可以帮助学生理解平面向量的几何意义和代数意义；掌握平面向量的概念、运算、平面向量基本定理；用向量语言、方法表述和解决现实生活、数学和物理中的问题；提升数学运算、直观想象和逻辑推理素养.

一、本章学习目标

1. 平面向量的概念

（1）通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量的意义和两个向量相等的含义.

（2）理解平面向量的几何表示和基本要素.

2. 平面向量的运算

（1）借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量的加、减运算及运算规则，理解其几何意义.

（2）通过实例分析，掌握平面向量的数乘运算及运算规则，理解其几何意义. 理解两个平面向量共线的含义.

（3）了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

（4）通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的概念及其物理意义，会计算平面向量的数量积.

（5）通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.

（6）会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

3. 平面向量基本定理及坐标表示

（1）理解平面向量基本定理及其意义.

（2）借助平面直角坐标系，掌握平面向量的正交分解及坐标表示.

（3）会用坐标表示平面向量的加、减运算与数乘运算.

（4）能用坐标表示平面向量的数量积，会表示两个平面向量的夹角.

（5）能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件.

4. 平面向量的应用与解三角形

（1）会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题，体会向量在解决数学和实际问题中的作用.

（2）借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理.

（3）能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

二、本章知识结构框图

- 平面向量及其应用
  - 平面向量的概念
    - 平面向量的实际背景与概念
    - 平面向量的几何表示
    - 相等向量与共线向量
  - 平面向量的运算
    - 平面向量的加、减运算
    - 平面向量的数乘运算
    - 平面向量的数量积
  - 平面向量基本定理及坐标表示
    - 平面向量基本定理
    - 平面向量的坐标表示
    - 平面向量运算的坐标表示
  - 平面向量的应用
    - 用向量方法解决平面几何问题
    - 用向量方法解决物理问题
    - 余弦定理、正弦定理

三、内容安排

向量是近代数学中重要和基本的概念之一，具有物理背景和几何背景. 向量是沟通几何与代数的桥梁，在数学和物理学科中具有广泛的应用.

《标准（2017 年版）》将向量内容分两部分安排：必修课程中的“平面向量及其应用”和选择性必修课程中的“空间向量与立体几何”. 平面向量是学习空间向量的基础，空间向量是平面向量的推广. 在本章，教科书介绍了平面向量及其运算、平面向量基本定理及坐标表示等基本知识，通过举例说明用向量解决一些平面几何问题、物理问题的方法，特别是用向量方法证明余弦定理、正弦定理，让学生感受向量方法的力量. 平面向量是体现“形”与“数”融合的重要载体.

平面向量及其运算在其他数学内容中有广泛的应用. 在本章中，体现在平面几何中的应用，介绍了解决平面几何问题的向量方法；体现在平面解析几何中的应用，用向量方法得出了线段中点的坐标；体现在三角函数中的应用，用向量方法证明了两角差的余弦公式、余弦定理、正弦定理. 下一章介绍复数及其运算时也联系了平面向量及其运算. 在选择性必修课程中，类比平面向量及其运算介绍空间向量及其运算，用向量方法解决立体几何问题；用向量方法解决平面解析几何中直线与方程的有关问题.

本章包括四节内容：6.1 平面向量的概念，6.2 平面向量的运算，6.3 平面向量基本定理及坐标表示，6.4 平面向量的应用. 这一结构体系体现了研究一个数学对象及其应用的基本思路和方法.

关于向量的概念，教科书以位移、速度、力等物理量为背景抽象出向量的概念，即引入既有大小又有方向的量. 受用带箭头的线段表示位移启发，教科书用有向线段直观表示向量. 进而给出零向量、单位向量的概念，以及平行向量、相等向量、共线向量的概念. 零向量、单位向量是特殊而重要的向量；平行向量、相等向量、共线向量对具有特殊而重要关系的向量进行刻画，从向量代数的角度看平行向量、共线向量的本质，它们都是线性相关的向量组.

数学中引进一个新的量，自然要考虑它的运算及其运算律的问题. 向量运算可以与我们熟悉的数的运算进行类比，从中得到启发，因此在引进向量概念后接着讨论向量的运算（加、减运算、数乘运算及数量积）是很自然的. 这里，为了便于学生理解，还要借助向量的物理背景，如借助位移的合成、力的合成定义向量的加法. 而向量运算性质的证明则要用到平面几何的一些基本定理与实数的运算性质.

学过向量的运算后可知，位于同一直线上的向量可以由位于这条直线上的一个非零向量表示. 类似地，平面内任一向量是否可以由同一平面内的两个不共线向量表示呢？根据这个想法，以向量的线性运算为基础，得出平面向量基本定理，从而可以引进向量的坐标表示，进而研究向量运算的坐标表示.

学习的重要目的之一在于应用，应用的过程中可以加深理解相关知识，因此教科书安排了“平面向量的应用”. 依次介绍向量在几何中的应用，向量在物理中的应用与余弦定理、正弦定理. 余弦定理、正弦定理的内容安排与原教科书相比变化较大. 一个变化是这个内容不独立成章，而是本章的一部分，目的是体现向量学习的整体性；另一个变化是余弦定理、正弦定理都用向量方法证明. 用向量方法证明余弦定理较为容易，为给学生联想到用向量方法证明正弦定理提供机会，所以本章先介绍余弦定理，后介绍正弦定理. 内容的介绍按照定理的引入、证明、运用定理解决解三角形问题、解决简单的实际问题的顺序展开.

在本章中，向量的概念、向量的加减运算、向量的数乘运算、向量的数量积、平面向量基本

定理、向量运算的坐标表示、余弦定理、正弦定理是重点.

用向量方法解决数学和物理学科中的问题，需要综合运用向量知识、其他数学知识或物理知识，探寻解决问题的途径，这成为本章教学的难点. 对于平面几何中的向量方法，要让学生通过具体例子加以体会，在解决具体问题的基础上总结一般方法，并在一般方法指导下解决其他问题. 对于用向量解决物理问题，要让学生把握将物理问题转化为数学问题，获得数学问题的答案，从而获得物理问题答案的过程.

四、课时安排

本章教学约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1 平面向量的概念	约 1 课时
6.2 平面向量的运算	约 6 课时
6.3 平面向量基本定理及坐标表示	约 4 课时
6.4 平面向量的应用	约 5 课时
小结	约 2 课时

五、本章编写思考

1. 多角度展开向量内容的研究

本章是必修课程与选择性必修课程中几何与代数主题的开篇. 《标准（2017 年版）》指出，在必修课程与选择性必修课程中，突出几何直观与代数运算之间的融合，即通过形与数的结合，感悟数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解. 向量内容的编写应落实上述对几何与代数主题的总体要求. 另外，本章内容与物理联系紧密. 因而可从物理、几何、代数三个角度展开本章内容的研究，形成贯穿全章的三条主线.

首先看物理角度. 教科书注意从丰富的物理背景中引入向量内容. 例如，借助位移、速度、力等现实中的常见现象，让学生认识引进向量的必要性，并得出向量是既有大小又有方向的量，给出向量的概念. 又如，从位移的合成、力的合成引入向量加法的三角形法则与平行四边形法则. 再如，从力的分解引出平面向量基本定理，建立基的概念和向量的坐标表示. 这样做有助于学生形成有关的概念，引出有关的定理. 另外，引导学生应用向量解决物理问题，让学生在解决实际问题的过程中把握本章内容与实际的联系.

其次看几何角度. 在引入向量概念后，即借助有向线段建立向量的直观形象. 在建立向量运算体系时，说明运算的几何意义，运用几何的一些基本定理证明运算的性质，通过几何直观让学生了解向量投影以及投影向量的意义. 另外，引导学生应用向量解决几何问题，特别是用向量方法证明余弦定理、正弦定理，让学生掌握平面几何中的向量方法.

最后看代数角度. 向量属于代数学中向量空间的内容，本章遵循向量空间结构体系理论，并充分考虑高中学生的认知基础和特点，把向量及其运算与数及其运算联系起来，在研究的思想方法上进行类比. 这种类比可以打开学生讨论向量问题的思路，同时还能使向量学习找到合适的思维固着点. 为此教科书在向量概念的引入，向量的线性运算、向量的数量积等内容的展开上，都注意在向量空间结构体系理论这条“暗线”的指导下，把与数及其运算进行类比作为“明线”.

另外，向量的坐标表示用有序数对刻画向量，向量运算的坐标表示实际上实现了向量运算的数量化.

形成向量概念、建立向量运算体系、解决数学和实际问题是向量内容的三大要点. 本章从物理、几何、代数三个角度提供了向量内容的研究途径与方法，体现出向量内容密切联系实际的特点，以及代数与几何的融合.

2. 如何形成向量概念

对力、位移、速度等物理量进行抽象是引入向量概念的一条途径. 物理背景有助于对带方向的量的理解，例如，位移不但有大小，还有方向，大小相同但方向不同的位移，它们的效果是不同的，因而明确大小和方向这两要素才可以确切地表示位移. 从向量的物理背景出发可以进一步定义向量的运算.

由力的图示可以引入有向线段，进而引入向量的几何表示. 借助有向线段的长度和方向可以对向量的大小和方向进行刻画，引出零向量与单位向量等特殊向量，直观表示相等向量与共线向量等特殊关系. 进一步地，探究向量运算的几何意义有利于直观理解向量的运算.

向量的坐标表示进一步加深学生对向量概念的理解. 建立平面直角坐标系后，平面内的任意一个向量都可以用有序数对 (x, y) 表示. 在选择性必修课程中，给定空间一个正交基底，任意一个向量都可以用有序数组 (x, y, z) 表示. 这是向量概念推广的一条途径：一般地，n 维有序数组称为 n 维向量. 引入向量的坐标表示后，向量的运算完全数量化.

向量既是代数研究对象，也是几何研究对象. 作为代数研究对象，向量可以运算，而且正是因为有了运算，向量的威力才得到充分的发挥. 作为几何研究对象，向量可以刻画几何元素（点、线、面），通过向量运算还可以描述几何元素之间的关系（如直线的垂直、平行等），解决长度等几何度量问题.

3. 如何建立向量运算体系

引入向量概念后，建立向量运算体系至关重要，平面向量的运算体系为运用向量运算解决问题奠定了基础. 类比平面向量的运算体系可以在选择性必修课程中建立空间向量的运算体系. 将平面向量、空间向量及其运算一般化可以得到高等数学中的向量空间的概念.

像数的运算体系的建立一样，在向量的运算体系的建立中，在向量空间结构体系理论这条“暗线”的指导下，向量运算体系的建立应重点考虑引入运算和研究运算的性质. 在向量的线性运算与向量的数量积的研究中，物理背景、几何定理、实数运算律发挥了重要作用.

运算的引入可以借助向量的物理背景，如从质点的连续位移与力的合成分别引入向量加法的三角形法则和平面四边形法则，既明确了向量的和的大小，也明确了向量的和的方向. 向量的数量积的定义也以物理中力做功为背景. 运算的引入还可以类比数的运算，如类比数的减法引入向量的减法. 向量数乘运算的定义也受数的乘法运算的启发.

在向量运算性质的研究中，首先是提出运算性质，然后是证明运算性质. 数具有良好的运算性质，可以类比数的运算性质提出向量的运算性质. 如数的加法满足交换律，即两个数相加，交换加数的位置，和不变，因而提出向量的加法是否满足交换律的问题. 还可以从两个向量的特殊关系、特殊向量入手，如考虑两个非零向量平行或垂直时向量的数量积具有怎样的特殊性，提出数量积的运算性质. 证明运算性质则以实数运算性质和平面几何中的一些基本定理为基础，如用

平行四边形的性质证明向量加法的交换律等.

4. 关注投影向量的意义

在引入向量数量积时，教科书首先定义了向量的夹角，由向量夹角的概念给出向量垂直的概念. 投影向量是与向量垂直有关的概念. 如图 6-1 所示，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$. 过点 M 作直线 ON 的垂线，垂足为 M_1，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$，其中 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\overrightarrow{M_1M}\perp\boldsymbol{b}$. 因此有必要对 $\overrightarrow{OM_1}$ 进行研究.

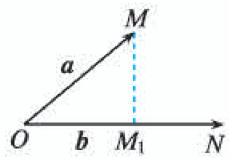


图 6-1

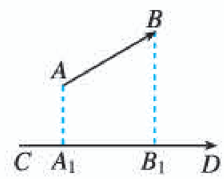


图 6-2

一般地，如图 6-2 所示，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点 A，B 分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 的投影，称 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 在图 6-1 中，由此定义可得，$\overrightarrow{OM_1}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.

在图 6-1 中，$\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，当 θ 为锐角时，容易得到 $\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}$. 而 θ 的取值范围是 0 到 π，所以还要验证 θ 为直角、钝角以及 $\theta=0$，$\theta=\pi$ 时此式仍然成立，进而得到 $\overrightarrow{OM_1}$ 的明确表达式为 $\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}$. 另外，由数量积的定义可以得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$，所以 $\overrightarrow{OM_1}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$，此式揭示了投影向量与向量数量积的联系. 在图 6-1 中，OM_1 是点 O 到直线 MM_1 的距离，而 $|\overrightarrow{OM_1}|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|$，这是选择性必修课程中用向量方法推导点到直线的距离公式的依据.

投影向量与向量数量积有联系，投影向量的性质与向量数量积的运算律有联系. 投影向量具有性质：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量等于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量的和. 教科书在证明向量数量积的分配律时，先证明了上述性质，然后结合投影向量的表达式推出了向量数量积的分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

5. 体现平面向量基本定理的基础性地位

平面向量基本定理进一步加深了对向量的认识. 由向量的运算可以知道，不共线向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 还是一个向量；反过来，任何一个向量都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 吗？研究这个问题就得到了平面向量基本定理. 它表明任何一个平面向量都可以唯一地表示成一个基底的线性组合，这是对平面向量的一个基础性、结构性的认识. 平面向量基本定理也为用向量解决问题奠定了基础. 例如，用向量方法解决几何问题时，一般先选择基底，再用基底表示其他相关向量，进而利用这种表示解决问题.

平面向量基本定理的基础性地位还体现在引进向量的坐标. 由平面向量基本定理可知，选定 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 为基底后，平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一地表示成 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. 即对于每一个平面向量 $\boldsymbol{a}$，都有唯一的有序数对 $(x,\ y)$ 与它对应. 由此引入向量的坐标及向量的坐标表示，用“数对”表示向量有利于更为一般地认识向量.

进一步地，考虑向量运算的坐标表示，即设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，可以将向量的运算归结为向量坐标的运算，从而实现向量运算的完全数量化.

6. 余弦定理、正弦定理的编写思考

余弦定理、正弦定理是三角形中的边、角定量关系. 在初中，学生学过勾股定理、锐角三角函数，那是直角三角形中的边、角定量关系，并会用这些定量关系解直角三角形. 对于一般三角形，学生定性地研究过三角形中的边、角定量关系，知道边、角满足一定条件的两个三角形全等. 在高中，学生进一步学习了任意角的三角函数与三角恒等变换，获得了用向量解决几何问题的方法. 上述内容是引入、证明、运用余弦定理、正弦定理的基础.

在介绍余弦定理时，教科书由两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等，说明给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的，由此引出三角形的其他边、角都可以用这两边及其夹角来表示的问题. 接下来先研究第三边用这两边及其夹角来表示，即让学生探究“在$\triangle ABC$中，三个角A，B，C所对的边分别是a，b，c，怎样用a，b和C表示c?”用向量表示三角形“回路”，进而利用向量的数量积探究出a，b，c和C之间的关系，快速地获得了余弦定理，充分体现了向量方法的优势. 在介绍正弦定理时，教科书先在直角三角形中根据三角函数的定义推出$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，然后用向量方法证明锐角三角形、钝角三角形中$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$也成立，得到正弦定理. 为了体现向量应用，余弦定理、正弦定理都用向量方法证明. 事实上，两个定理还有其他的证明方法，可以让学生探究.

像解直角三角形一样，已知三角形的几个元素可以求出其他元素，即解三角形. 解三角形有四种情形：已知三边；已知两边和它们的夹角；已知一边和两角；已知两边和其中一边的对角. 利用余弦定理的推论可以直接解决第一种情形的问题，教科书结合例题介绍其余三种情形.

如同通过解直角三角形可以解决简单的实际问题一样，用余弦定理、正弦定理也可以解决简单的实际问题.

7. 设置恰时恰点的问题，体现数学知识的形成过程

本章充分利用思考、探究等栏目设置了大量问题，通过这些问题启发学生独立思考，体现数学知识的形成过程，提高学生的数学思维水平. 例如，在引进平面向量加法运算时，通过思考栏目，创设从位移的合成到平面向量加法的问题情境；在讨论平面向量加法的运算律时，提出“数的加法满足交换律、结合律，向量的加法是否也满足交换律和结合律呢?”；在给出向量的减法法则后，设置探究栏目“向量减法的几何意义是什么?”；在讨论向量数乘运算时，先提出“已知非零向量$\boldsymbol{a}$，作出$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$和$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$. 它的长度和方向分别是怎样的?”；在讨论余弦定理时，设置探究栏目“在$\triangle ABC$中，三个角A，B，C所对的边分别是a，b，c，怎样用a，b和C表示c?”. 这样的问题设计有利于学生从物理、几何、代数等角度思考和解答问题，提升他们的数学学科核心素养.

六、本章教学建议

1. 注重与实际的联系

在向量内容的教学中，要利用学生的生活经验、其他学科的相关知识，创设丰富的情境. 例如，在引言中通过位移说明学习向量知识的意义，在 6.1 节再以速度、力为实际背景素材，说明它们都是既有大小又有方向的量，由此引出向量的概念；又如，从位移的合成、力的合成引入向量加法法则；再如，从力的分解引出平面向量基本定理. 通过这些实例使学生了解向量内容的物理背景，理解向量内容.

另外，要引导学生应用向量解决物理问题，应用解三角形解决测量等问题，让学生在解决实际问题的过程中把握本章内容与实际的联系，提高解决实际问题的能力.

2. 注重运用向量的几何表示

要借助几何直观呈现向量内容，将向量的几何表示贯穿向量的概念、运算、应用的全过程，在引入概念、建立运算体系、展示应用各环节利用图形理解和解决数学问题，从而帮助学生理解向量内容，运用向量内容解决问题，提升学生的直观想象素养.

在引出向量概念后，要利用有向线段给出向量的几何表示，为学生建立起理解和运用向量内容的背景支持. 在引入平行向量、相等向量与共线向量的概念时要给出图示，便于学生直观理解这些概念.

在向量运算内容的教学中也要借助图形直观展开内容. 例如，结合位移、力的图示描述位移的合成、力的合成，进而借助向量的几何表示给出向量的加法法则；在定义向量的减法后，指出向量减法的几何意义；通过借助几何直观探究 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 和 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 的长度和方向，引入向量的数乘运算；借助向量的几何表示给出向量的夹角的概念；通过几何直观，让学生了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.

向量具有明确的几何背景，向量的运算具有明显的几何意义，因此涉及长度、夹角的几何问题可以通过向量及其运算得到解决. 在解决问题的过程中，要充分利用向量的几何表示这个直观基础. 在用向量解决物理问题时，也要充分利用位移、速度、力等的图示，探索和形成解题思路.

3. 注意与数及其运算的类比

向量及其运算与数及其运算可以类比，这种类比使学生体会向量研究中的问题与方法，使向量学习有一个好的思维固着点. 这样的类比是教学中提高思想性的有效手段，因此在教学中应当予以充分的关注.

在本章的教学过程中，应引导学生通过与数及其运算的类比，体会研究向量的基本思路. 联系数及其运算有助于学生把握向量及其运算. 例如，在介绍向量加法的运算律时，提示学生数的学习经验：定义了一种运算，就要研究相应的运算律，从而引导学生研究向量加法的运算律，并类比数的加法满足交换律与结合律，让学生探究向量的加法是否也满足交换律与结合律. 在介绍向量的减法时，类比数的减法定义向量的减法. 在学完本章内容后，还要引导学生反思，重新概括研究思路，这样可以使学生体会数学中研究问题的思想方法，提升学生的数学思维水平.

4. 让学生掌握向量运算并加以应用

让学生掌握向量运算，有利于提升学生的数学运算素养，并为运用向量解决问题打下基础.

在教学中，先要借助向量的物理背景与数的运算定义向量的运算，然后在向量运算的定义的基础上研究向量的运算律；在研究运算律的过程中，要引导学生类比数的运算律提出向量的运算律，并运用实数的运算律与几何的一些基本定理加以证明.

由平面向量基本定理引入向量的坐标的概念后，就可以利用向量的坐标进行运算. 教学中要让学生体会向量坐标运算的作用. 例如，向量可以用表示这个向量的有向线段的起点、终点的坐标刻画，从而这个向量的长度可以用表示这个向量的有向线段的起点、终点的坐标刻画，实际上得出了起点、终点两点间的距离公式. 利用向量的坐标运算还可以推出线段的中点坐标公式，以及两角差的余弦公式.

在介绍向量的应用时，要注意展示运用向量解决问题的思路与方法，提升学生的数学运算素养. 例如，在介绍平面几何中的向量方法时，要结合例题总结用向量方法解决平面几何问题的步骤；在介绍向量在物理中的应用时，要结合例题分析用向量方法解决物理问题的思路；在介绍余弦定理和正弦定理时，要指出借助向量的运算探索三角形的边长与角度的关系的思路与方法，并说明如何运用余弦定理和正弦定理解三角形.

让学生掌握平面向量的运算并加以应用，可以加深学生对平面向量的认识，提升他们的运算素养，也为他们在选择性必修课程中掌握空间向量的运算并加以应用起到了示范作用.

5. 让学生经历本章中各项内容的形成发展过程

为让学生从整体上把握本章内容，应让学生经历本章中各项内容的形成发展过程，体会其中蕴含的研究数学对象的思路和方法. 例如，让学生经历余弦定理、正弦定理的引入、证明、应用的过程.

三角形全等的判定方法表明，给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的某些元素，这个三角形就是唯一确定的. 在本章中，可通过探讨三角形的其他元素与给定的某些元素的数量关系引入余弦定理、正弦定理.

在本章中，要利用向量的运算证明余弦定理、正弦定理. 以推导余弦定理为例，要引导学生分析如何借助向量的运算探索三角形边长与角度的关系. 这里讨论的是已知两边及其夹角求第三边的问题. 设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$（教科书图 6.4-8），则向量 $\boldsymbol{c}$ 就可以用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示，从而 $\boldsymbol{c}$ 的长度可以用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度及 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦表示，即第三边可以用已知两边及其夹角的余弦表示，得到余弦定理. 通过上述证明过程让学生体会从形到向量，借助向量运算解决问题，从向量到形的“三步曲”，培养学生利用向量运算解决问题的能力.

在本章中，要让学生类比解直角三角形及其应用，利用余弦定理、正弦定理计算三角形的边长与角度，解决测量等问题，让学生体会这两个定理在解三角形及解决实际问题中的作用.

这样，让学生掌握本章各项内容的来龙去脉，有利于学生理解和掌握相应的内容，从而获得“四基”，增强“四能”，提升数学学科核心素养.

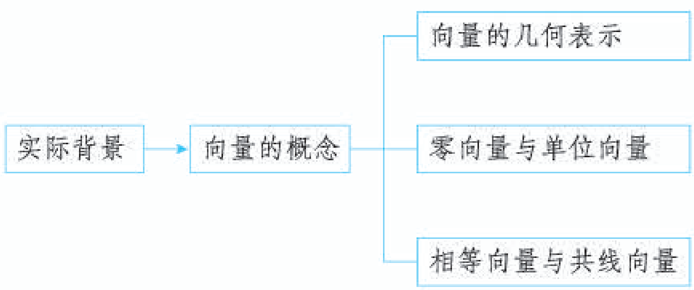
Ⅱ 教科书分析

章引言及章头图

向量具有丰富的物理背景，教科书在章头配置了一幅小船位移的图片，图中还给出了小船位移的图示，标明小船位移的大小和方向．在章引言中，教科书首先结合章头图说明生活中有一种不同于数量的量——向量，其特点是既有大小又有方向，并进一步指出力、速度、加速度也具有上述特点，让学生对向量有初步的体会；接着，教科书指出了向量的地位和作用；最后说明本章的主要内容．章引言的学习，可以帮助学生对平面向量的内容、结构、研究过程与方法等有一个初步的整体认识．

6.1　平面向量的概念

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：向量的概念，向量的几何表示，相等向量和共线向量的概念．

难点：向量的概念和共线向量的概念．

三、教科书编写意图及教学建议

本节主要通过物理中的位移、速度、力等抽象出数学中的向量，并类比实数的几何表示，以及物理学中位移的表示方法，用有向线段表示向量，进而通过向量之间的关系来认识相等向量与共线向量．

6.1.1　向量的实际背景与概念

位移是既有大小又有方向的量，是物理学中的基本量之一，位移表示的两个点之间的相对位置关系也是几何研究的重要内容．物理学中用位移表示物体（质点）的位置变化，几何中常用点表示位置，研究如何由一点的位置确定另一点的位置．位移简明地表示了两个点的位置之间的相

对关系，它是向量的重要的物理模型．力和速度也是既有大小又有方向的量，是常见的物理量，也是向量的重要的物理模型．教科书以小船的位移和速度、重力、浮力作为引入向量的背景，建立学习向量的认知基础，进而类比数量的抽象过程抽象概括出向量的概念．随后，为了使学生更好地理解向量的意义，教科书采用了与数量概念比较的方法，引导学生认识年龄、身高、长度、面积、体积、质量等量都是“只有大小，没有方向”的数量，通过比较让学生体会向量的“大小、方向”这两个基本要素，并在边空中提出问题，让学生举出物理学中向量和数量的其他一些实例，从而更好地理解向量的特征．

6.1.2　向量的几何表示

1. 有向线段

实数与数轴上的点一一对应，数量可用数轴上的点表示．教科书通过类比实数在数轴上的表示，以及物理学用“带有方向的线段”表示位移的方法，给出了向量的几何表示——用有向线段表示向量．有向线段是数学概念，起点、方向、长度是有向线段的三要素．由于向量的基本要素是大小和方向，因而“用有向线段的方向表示向量的方向，用有向线段的长度表示向量的大小”是自然的想法．虽然位移有起始位置，力有作用点，但是舍去了与“起点”有关的物理属性所抽象出的向量只有大小和方向．因此，用有向线段表示向量时，向量的方向与有向线段的指向有关，与起点的具体位置无关．教学中要让学生体会用有向线段表示向量这种几何直观，以利于进一步学习向量．

2. 零向量与单位向量

教科书将“向量的大小”定义为向量的模，进而分别给出了零向量、单位向量的概念．教学中应当注意引导学生将向量的模与数量进行比较，数量有大小而没有方向，其大小有正数、负数和 0 之分，既可进行运算，又可比较大小；向量的模是正数或 0，由于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向不能比较大小，于是 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 有意义，而 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 没有意义．

零向量与单位向量都是特殊的向量．教学中可以类比实数 0 和 1，让学生认识零向量与单位向量．随着后续内容的学习，学生会进一步认识到零向量与单位向量在向量系中的地位和作用．例如，向量的减法运算就要用到零向量，平面向量的坐标表示中以分别与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量作为基底．

3. 向量的两种表示

教科书介绍了向量的两种表示：有向线段表示和黑体字母表示．向量的有向线段表示为用向量处理几何问题打下了基础，用黑体字母表示向量在形式上更简约，这两种表示方法都需要学生熟练掌握．教科书用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，在手写时可用 $\vec{a}$ 表示．在用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量时，要提醒学生注意向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向是有向线段的起点 A 指向终点 B，点 A 要写在点 B 的前面．

4. 例题

例 1 是一个简单的问题．要求用向量表示位移并求两点间的距离．画出有向线段表示位移，目的在于从向量的角度认识位移，以正确理解向量概念及其几何表示；两点间的距离就是相应有向线段的长度，也就是相应向量的模．

6.1.3 相等向量与共线向量

1. 平行向量

从向量的基本要素出发进一步研究向量，如果只关注向量的方向，那么可以得到平行向量这一重要概念，平行向量是指方向相同或相反的非零向量. 教学中要让学生全面认识平行向量，特别是方向相反的非零向量也是平行向量，要讲清楚教科书中图 6.1-5 的几何意义. 规定零向量与任意向量平行，与一般向量空间中有关性质（向量的线性相关性）一致.

2. 相等向量

数学中，引进新的量后，就要界定它们之间的“相等”关系，这是研究新的量的基础. 如何定义“相等向量”呢？平行向量只关注向量的方向，如果既关注向量的方向，又关注向量的大小，那么把“长度相等且方向相同的向量”定义为相等向量是恰当自然的. 相等向量是一类向量的集合，由相等向量的定义可以知道，对于一个向量，只要不改变它的大小和方向，将它平移后还是这个向量，这就是“向量完全由它的模和方向确定”的意义. 因此，用有向线段表示向量时，可以任意选取有向线段的起点，也就是说高中数学中讨论的向量是自由向量，这为用向量处理几何问题带来方便. 教学时可以借助信息技术，通过向量的平移来让学生直观认识相等的向量与表示向量的有向线段的起点无关. 可以让学生思考“同一条有向线段可以表示怎样一类相等的向量”与“同一个非零向量可以用怎样一类有向线段表示”这两个问题，也可以结合例题、习题体现上述问题的应用.

3. 共线向量

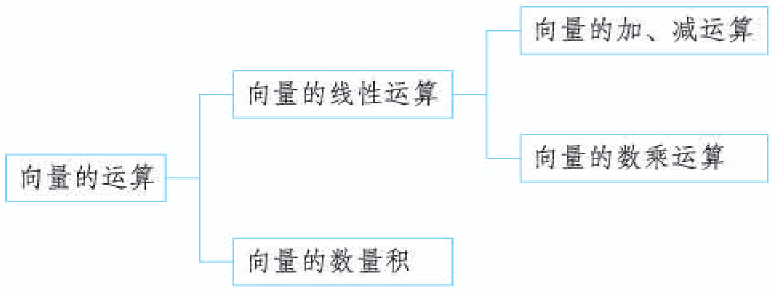
共线向量也是研究向量的基础. 教科书通过对一组平行向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 直观作图的过程给出了“任一组平行向量都可以平移到同一条直线上，因此，平行向量也叫做共线向量”的陈述. 从逻辑线索上看，将平行向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 平移到直线 l 上后，由相等向量的定义，得到的仍然是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，这表明了平行向量与共线向量是等价的，只是名称的用词具有相应的针对性. 教学中，要使学生体会两个共线向量并不一定要在同一条直线上，只要两个向量是平行向量，也就是共线向量，反之也对. 当然，在同一条直线上的一组向量也是平行向量. 要避免向量的“平行”“共线”与平面几何中直线的平行和线段的共线相混淆，让学生认清平行向量与平行线、共线向量与共线线段的区别.

4. 例题

例 2 是结合正六边形的一些几何性质，让学生巩固相等向量和共线向量的概念，正六边形的边长等于其外接圆半径，它既是轴对称图形，又是中心对称图形，具有丰富的几何性质. 教学时应引导学生利用正六边形的性质结合图形进行分析，还可以让学生判断向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{AF}$ 是否相等，意在通过长度相等且方向相反的两个向量不相等，让学生从反面认识相等向量的概念，也为后继引入相反向量的概念进行铺垫.

6.2　平面向量的运算

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：向量加、减运算的运算法则及其几何意义，向量数乘运算的定义及其几何意义，向量数量积的概念与运算律.

难点：对向量加法运算法则与向量减法定义的理解，对向量数量积的概念及运算律的理解，向量数量积的应用.

三、教科书编写意图及教学建议

对于“运算”学生并不陌生，他们已经学习了数的运算、代数式的运算、集合的运算等，针对每一种代数运算无外乎要研究运算的背景、意义、法则、性质、应用等，从而建立相应的运算体系. 平面向量运算内容的编写关注了以下两个方面：一是引导学生从物理、几何、代数三个角度理解向量运算；二是引导学生类比数的运算研究向量的运算.

向量运算的学习过程是培养学生逻辑推理、数学运算和直观想象素养的重要载体. 中学数学中的平面向量运算主要包括向量的线性运算和向量的数量积. 向量的线性运算包括向量的加法、向量的减法、向量的数乘运算. 在向量的加、减运算中，加法运算是基本运算，减法运算是向量加法运算的逆运算，它们有各自的几何意义，并且可以互相统一；向量的数乘运算反映了一类向量——共线向量间的关系.

向量的概念源自物理学，所以向量运算也有相应的物理背景. 本节引言首先从学生最为熟悉的数及其运算谈起，数有了运算才威力无穷. 类似地，引入向量后也要研究其运算. 对于向量的加法运算，教科书通过类比数的加法，以位移的合成为背景引入向量加法的三角形法则，以力的合成为背景引入向量加法的平行四边形法则. 这样做的主要目的是使加法运算的学习建立在物理背景之上，并关注学生对向量的和要从大小、方向两个方面来规定的理解，体会向量运算与数的运算的区别与联系，以帮助学生理解向量加法的本质.

对于向量的减法，类比数的减法，减去一个数等于加上这个数的相反数，教科书先引入了相反向量的概念，然后引入向量的减法：减去一个向量等于加上这个向量的相反向量.

对于向量的数乘，通过类比数的乘法，教科书从相同向量的连加入手引入了向量数乘运算. 向量数乘运算的几何意义明显，通过这一几何意义讨论向量共线的条件，为后继学习平面向量基本定理奠定基础.

以物理中力所做的功为背景，教科书引入了向量的数量积. 向量的数量积运算结果是实数，它不仅满足交换律，而且对加法满足分配律. 向量数量积可以刻画两个向量的夹角和向量的长度（可以看成两点间的距离），而距离和角又是刻画几何元素（点、线、面）之间度量关系的基本量，因此，向量数量积在解决平面几何问题中发挥着独到的作用.

综上可知，与数的运算类比，借助物理背景引入向量的相关运算是学习向量运算的重要方法. 教学中，要引导学生类比数的运算，借助物理背景，给学生发现和提出向量运算的机会，有意识地培养学生的创新能力.

6.2.1　向量的加法运算

1. 向量加法的定义

教科书从位移的合成与力的合成出发，引导学生考虑能否受它们的启发引进向量的加法. 具体地，教科书以学生熟悉的位移的合成为背景，设置了思考栏目. 首先让学生回忆并感知物理中位移的合成，它可以看作是向量加法的物理模型；进而类比数的加法，给出向量加法的三角形法则. 在此基础上，教科书给出向量加法的定义.

教科书进一步挖掘学生的已有认知，以力的合成为背景，设置了思考栏目. 教学中，教师要让学生回忆相关的物理知识，想到力的合成的平行四边形法则，画出力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$（图 6-3），进而诱发学生从向量的角度看力的合成，引出向量加法的平行四边形法则.

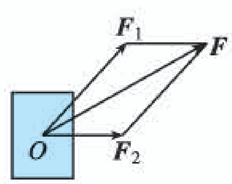


图 6-3

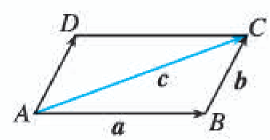


图 6-4

既然向量加法有两个法则，讨论两者是否一致顺理成章. 如图 6-4，由向量加法的三角形法则，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 过点 A 作 BC 的平行线，过点 C 作 AB 的平行线，所作的两条直线相交于点 D，四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 由平行四边形的性质得 $AD=BC$，所以 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 由向量加法的平行四边形法则也可得出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，所以向量加法的三角形法则与平行四边形法则是一致的.

与数零的加法运算的规定类似，对任意向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量 $\boldsymbol{0}$ 相加，教科书中给出了相应的规定：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

2. 例 1 的教学

例 1 是通过具体的例子帮助学生理解向量加法的概念，规范作两个向量的和的方法. 本例分别用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作两个向量的和. 在向量加法的作图中，要让学生体会作法中任取一点 O 的依据——我们研究的向量是自由向量. 教学中，教师还要引导学生体会对于向量的有关作图，常常需要平移向量. 运用向量加法的三角形法则作图时，要“首尾相接，再首尾连”；运用向量加法的平行四边形法则作图时，则要强调两个向量的起点相同.

3. 共线向量的加法

共线向量的加法与实数的加法非常类似，教科书安排学生探究共线向量的加法符合学生的认知基础，既让学生体会向量的加法与数的加法的联系与区别，也加强了学生对共线向量加法的理解.

当两个向量共线时，

(1) 如果其中有一个向量为零向量，不妨设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，这与实数的加法类似；

(2) 如果两个向量均不为零，则它们可以看作在数轴上的两个向量相加，其结果是一个向量，对应于数轴上的一条有向线段，而两个数相加，其结果是一个数，对应于数轴上唯一的一个点.

容易看出，当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为 $\boldsymbol{b}$ 的起点作出 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 就是连接 $\boldsymbol{a}$ 的起点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量（即首尾相接，再首尾相连），此时也符合向量加法的三角形法则.

教科书安排第 9 页“探究”(2) 的目的是帮助学生认识向量的三角不等式. 在数的加法中，有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，且当且仅当 $ab\geqslant0$ 时等号成立. 对于向量的加法来说，探讨不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 是否还成立是十分必要的，这个三角不等式是欧氏空间中距离的一个重要性质.

学生借助例 1 及第 9 页“探究”(1) 的图形直观，不难得到下列结论.

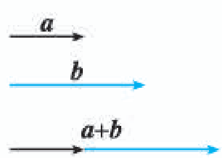
①当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，根据三角形两边的和大于第三边，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

②如图 6-5，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

如图 6-6，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$（或 $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$），其中当向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度大于向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，当向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度大于向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

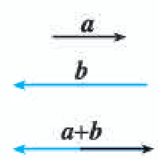
因而当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

由①②得，对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.



$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时

图 6-5



$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时

图 6-6

教学中，可以借助信息技术来探究不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，通过改变 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的位置（共线、不共线和大小不同动态演示 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的关系，从直观上加强对两个向量和的长度，与这两个向量各自长度的和的关系的理解.

在第 9 页“探究”(2) 中，学生还可能发现一些类似的关系式. 例如，当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，不等式 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 成立等. 由于本节课容量较大，有些相关问题课上可以让学生发现和提出来，但不必作过多的讨论，可以作为课后作业完成，或者等学习了向量的减法之后，再一并提出更多相关的问题加以讨论.

4. 向量加法的运算律

定义了一种运算，就要进一步认识它有怎样的运算性质．定义了向量的加法后，一个自然的想法是要研究它有哪些运算规律．类比数的加法运算律，教科书提出探究向量的加法是否有交换律和结合律，这符合学生的认知基础和探究欲望．在教学中，教师要善于引导学生从向量加法的定义与几何意义出发，通过画图验证向量加法的交换律和结合律．本探究要在学生独立思考的基础上，组织学生交流研讨，分享探索运算律验证思路的经验，必要时用信息技术工具作图，以帮助学生明确运算律的验证思路，从而理解运算律．

需要说明的是，对于向量加法的结合律，教科书中给出的方法运用了向量加法的三角形法则，在实际教学过程中也可能有学生运用向量加法的平行四边形法则，图 6-7 中提供了一个验证思路，供教师参考．教师还可以借助信息技术工具改变向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的位置，动态地帮助学生理解向量加法的结合律成立．

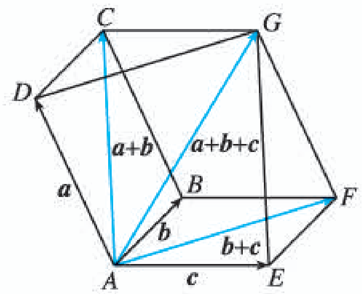


图 6-7

5. 例 2 的教学

例 2 结合一个实际问题反映向量的加法在实际生活中的应用，这样的问题在物理中已有涉及．这里的设计意图是让学生经历将实际问题抽象为向量加法运算的过程，体会要解决的问题是向量的大小及方向（与某一方向的夹角的大小）．教学时，可以让学生阅读理解题意，分析解题思路，将实际问题用向量的图形语言表征，从而与初中学习过的解直角三角形建立联系．需要说明的是，虽然本章中最后一节安排了平面向量的应用，但在本节的教学中也要渗透相关的平面向量运算的简单应用，目的是及时让学生体会研究向量运算的意义，同时，培养学生运用所学知识解决问题的能力．

6.2.2 向量的减法运算

1. 类比数的减法运算定义向量的减法运算

对于向量的减法，可以直接从它是向量加法的逆运算的角度“直观”地进行定义，也就是，如果 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．这样，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 6-8）．事实上，由向量加法的三角形法则易见 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，所以，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

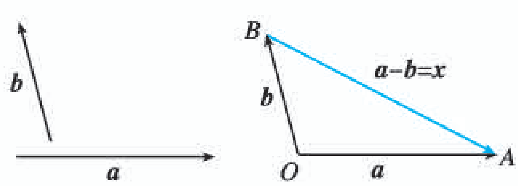


图 6-8

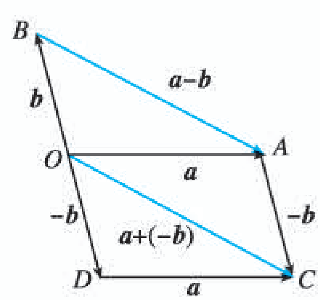


图 6-9

为了便于学生理解，类比数的减法可以看作“减去一个数等于加上这个数的相反数”，教科书先定义了相反向量，然后把 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$．如图 6-9，在这种定义下，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$．而四边形 $OCAB$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$．由此可见，上述两种定义向量减法的方式是等

价的.

通常称含有向量的等式为向量等式，在向量等式的两边都加上或减去一个相同的向量，等号仍成立，移项法则对向量等式也是适用的. 对这些性质教科书未作专门介绍，实际上通过作图很容易验证，教学时，对这些内容可不作专门介绍，需要时能正确运用即可.

2. 向量减法的几何意义

对于向量减法的几何意义，教科书设置了一个探究栏目. 教学时，要引导学生动手操作，交流画图依据. 先结合向量加法的平行四边形法则，作出从同一点出发的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，进而得出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

3. 例 3、例 4 的教学

本小节中安排了两个例题. 例 3 是作出两对向量的差向量. 教学时，要引导学生结合向量减法的几何意义，注意差向量的方向，它指向被减向量的终点. 例 4 是借助向量的加、减运算的几何意义来表示图形中的其他向量，这是用向量解决几何问题的基础. 教学中要注意这方面的训练，特别要掌握本例中所求向量与已知向量的关系.

6.2.3 向量的数乘运算

1. 向量数乘运算的定义

为引入向量的数乘运算，教科书设置了探究栏目，引导学生作出几个相同向量的和，得出和的长度与方向与原向量的长度与方向的关系. 学生容易作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$，也容易类比实数的累加将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 写成 $3\boldsymbol{a}$ 的形式，进而得出 $3\boldsymbol{a}$ 的长度与方向与 $\boldsymbol{a}$ 的长度与方向的关系. 教学时，教师要重点关注学生对于 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 的大小和方向的理解，给学生充足的时间探究这个和的结果如何表示. 教科书把 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 记作 $-3\boldsymbol{a}$，可以类比式的运算 $(-a)+(-a)+(-a)=-3a$ 理解上述规定. 教师引导学生结合图 6-10 说明 $-3\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，$-3\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 3 倍 .

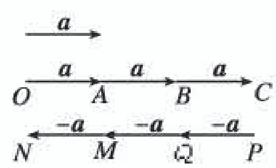


图 6-10

一般地，向量数乘运算的结果 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

当 $\lambda=0$ 时，由 (1) 可知，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|0\boldsymbol{a}|=|0||\boldsymbol{a}|=0$，因而 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

当 $\lambda=-1$ 时，由 (1) 可知，$|(-1)\boldsymbol{a}|=|-1||\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$. 由 (2) 可知，$(-1)\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，因而 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

由向量数乘运算的定义，学生对于零向量和相反向量会有一些新的认识，如零乘任何向量的结果为零向量，-1 乘任何向量得到这个向量的相反向量.

教科书第 14 页思考栏目设置的目的是巩固向量数乘运算的定义. 由向量数乘运算的定义得 $\boldsymbol{b}=3.5\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度是向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 3.5 倍，向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

2. 向量数乘运算的运算律

与学习向量的加法运算一样，定义了向量数乘运算以后，考察它的运算律是一个自然的问题. 教学时，要引导学生类比实数的乘法运算律，让学生先猜想向量数乘有哪些运算律，并写出来. 学生可能写不全，甚至写出错误的结论，教师可以组织学生讨论，引导学生一起进行验证.

为了降低学生学习的难度，教科书没有给出三个运算律的证明. 对于基础较好的学生，可以介绍证明方法，如运用相似三角形的判定与性质证明分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量运算律证明的依据是相等向量的定义，即要证明等式两边的向量长度相等，且方向相同. 为了证明这些运算律在任何情况下都成立，还需对各种可能的情况进行讨论，下面的证明供教师参考.

设 λ，μ 为实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，则

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$； ①

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； ②

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. ③

证明：(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\mu=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，①式显然成立.

当 $\lambda\neq 0$，$\mu\neq 0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由向量数乘运算的定义，得

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$
$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|$.

当 λ，μ 同号时，①式两边向量的方向都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 λ，μ 异号时，①式两边向量的方向都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

因此，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 有相等的长度和相同的方向，所以①式成立.

(2) 当 $\lambda=0$ 或 $\mu=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，②式显然成立.

当 $\lambda\neq 0$，$\mu\neq 0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，可分如下两种情况：

当 λ，μ 同号时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\mu\boldsymbol{a}$ 的方向相同，所以

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$
$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|.$$

即有 $|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|$.

由 λ，μ 同号，知②式两边向量的方向或都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，或都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，即②式两边向量的方向相同. 因此，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 有相等的长度和相同的方向，所以②式成立.

如果 λ，μ 异号，当 $\lambda>\mu$ 时，②式两边向量的方向都与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<\mu$ 时，②式两边向量的方向都与 $\mu\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 因此，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 有相等的长度和相同的方向，所以②式成立.

(3) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，或 $\lambda=0$，$\lambda=1$ 时，③式显然成立.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda\neq 0$，$\lambda\neq 1$ 时，可分如下两种情况：

当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，如图 6-11，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA_1}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\boldsymbol{b}$. 则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

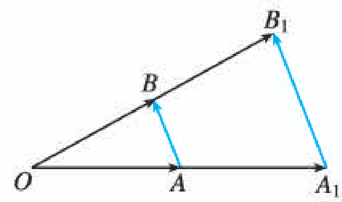


图 6-11

由作法知 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{A_1B_1}$，有 $\angle OAB=\angle OA_1B_1$，$|\overrightarrow{OA_1}|=\lambda|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{A_1B_1}|=\lambda|\overrightarrow{AB}|$，所以 $\dfrac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\lambda$，因此 $\triangle AOB\backsim$

$\triangle A_1OB_1$. 所以 $\frac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\lambda$，$\angle AOB=\angle A_1OB_1$，因此 O，B，B_1 在同一条直线上，$|\overrightarrow{OB_1}|=\lambda|\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\lambda\overrightarrow{OB}$ 的方向也相同. 所以 $\overrightarrow{OB_1}=\lambda\overrightarrow{OB}$，所以 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

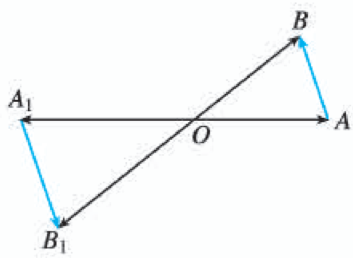


图 6-12

当 $\lambda<0$ 时，由图 6-12 可类似证明 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 所以③式也成立.

3. 向量的加法、减法、数乘运算统称为向量的线性运算. 有了向量的线性运算，平面上的点（相对于一个定点）、线段（直线）就可以用向量表示，这就为向量法解决几何问题奠定了基础. 线性运算的运算律包含了向量加法、向量数乘的运算律，教学时，要让学生体会到这一点.

4. 例 5、例 6 的教学

例 5 要求学生运用向量数乘运算的运算律进行运算，掌握向量的线性运算. 设置例 6 的目的，一方面是巩固向量线性运算知识，另一方面是用向量表示几何元素（点、线段等）. 这是用向量方法证明几何问题的重要步骤，解答该题时要用到平行四边形的性质“平行四边形的两条对角线互相平分”.

5. 向量共线定理

在学生对向量数乘运算已经有所了解的基础上，教科书设置了探究栏目，目的是进一步认识向量数乘运算的结果与原向量之间的位置关系. 教学时，教师要引导学生依据向量的数乘运算展开讨论，发现并提出一些新问题，如对于向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$，如果有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线吗？为什么？反过来，已知向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 能用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示吗？鼓励学生尝试用自己的语言表示共线向量定理，发展学生的思维能力，体会数学的研究思路. 最后师生共同概括出向量共线定理：

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

对于基础较好的学生，教师可以引导学生用反证法证明定理中 λ 的值的唯一性：假设还存在另一个实数 μ，使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$，从而 $(\mu-\lambda)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，由 $\mu-\lambda\neq0$，得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 这与 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾，所以 $\mu=\lambda$.

教学时，要对向量共线定理中有关“充要条件”“存在”“唯一”等文字表述给予解释，以帮助学生理解. 同时，在教学中，教师还要揭示：数学中，人们总是追求用最少的量来表示一类问题. 向量共线定理表明，对任意与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量 $\boldsymbol{b}$，都存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这实际上就是说，任何非零向量 $\boldsymbol{a}$ 构成一维向量空间的一个基. 这种研究方法具有普遍性，也为后继学习平面向量基本定理奠定基础.

6. 例 7、例 8 的教学

例 7 给出利用向量共线判定三点共线的方法，这是证明三点共线常用的方法. 教学中可以先让学生作图，通过观察图形得到 A，B，C 三点共线的猜想，再将平面几何中判断三点共线的方法转化为用向量共线证明三点共线. 教学时，教师要启发学生分析题意，厘清思路，鼓励学生自行完成. 另外，本题提供了一个很好的与信息技术整合的题材，教学中也可以通过信息技术工具作图，进行动态演示，揭示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 变化过程中，A，B，C 三点始终在同一直线上的规律.

例 8 是向量共线的充要条件的一个应用，也体现向量线性运算与方程组的综合应用．解题的关键是依据向量共线的充要条件，先列出向量的关系式 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}=\lambda\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)$，再转化为解方程组求 t．教学时，要引导学生进行解题后的反思，体会其中严密的逻辑推理过程，积累运用向量运算解决问题的经验．

6.2.4　向量的数量积

1．向量数量积的定义

为引入向量的数量积运算，教科书首先启发学生思考：向量除了可以进行加、减运算以外，能否作乘法运算？如果能，运算如何规定？

教科书以物理中力做功为背景引入向量的数量积．一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$（图 6-13），那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角．功 W 是一个数量，由向量 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{s}$ 确定，其中涉及“长度”和“角”．因此，教科书先给出了向量的夹角的概念．教学时，注意让学生讨论两个向量的夹角的取值范围．受功由向量 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{s}$ 确定的启发，引进向量的数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$．

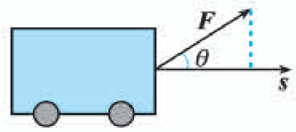


图 6-13

向量的数量积是一种新的向量运算，与向量的加法、减法、数乘运算一样，它也有明显的物理意义、几何意义，用途广泛．但与向量的线性运算不同的是，它的运算结果不是向量而是数量，正是这个不同点沟通了向量运算与数量之间的关系．教学时，教师要强调：两个非零向量的数量积是数量，而不是向量，它的值是两个向量的长度与两个向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定；并且规定，零向量与任一非零向量的数量积为 0．

2．例 9、例 10 的教学

在例 9 中，给出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，就可以由向量数量积的定义求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．在例 10 中，给出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，由向量数量积的定义可以求出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦，进而求出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角．

3．向量的投影

为了理解向量数量积的定义和几何意义，研究向量数量积的运算律，教科书引入了向量投影及投影向量的概念．需要注意的是，向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，不是线段的长度，它是与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的向量．教学时，教师可以让学生说出向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是什么，并通过图形加以直观解释．

教科书第 18 页的探究栏目设置的目的，是想引导学生进一步探讨向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{e}$（与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量），$\boldsymbol{a}$，θ 之间的关系（图 6-14），以加深对投影向量的理解，进而会求一个向量在另一个向量上的投影向量．

教学时，要让学生体会分类讨论、数形结合是研究投影向量等问题的重要数学思想．让学生分向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为锐角、直角、钝角以及 $\theta=0$，$\theta=\pi$ 等情况进行讨论，得出如下关系成立：$\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{e}$．

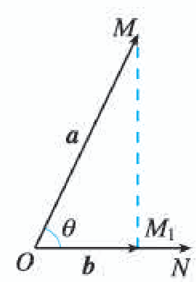


图 6-14

在讨论向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{e}$（与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向

量），$\boldsymbol{a}$，θ 的之间的关系时，可以发现，如果两个向量平行或垂直，向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量具有特殊性，由此需要讨论此时向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 数量积有怎样的特殊性．教学中，教师要让学生尝试发现相关的特殊结论，培养学生数形结合及一般到特殊的思维方法．这是教科书安排第 19 页探究栏目的目的．

4. 向量数量积的性质

向量的数量积的运算结果是实数，可以用它来更加简洁地表述几何中的许多结果．例如，

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$（长度，由此可以导出两点间的距离公式）；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$（直线垂直的条件）．

对于教科书中给出的平面向量数量积的四条性质，教师要强调各自的作用，如 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 是求向量的长度的工具，应用非常广泛．向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与数 a，b 的乘积 ab（或 $a\cdot b$）不同，所以书写时一定要把它们严格区分开，以免影响后面的学习．另外，还应要求学生会证明这些性质，培养他们的推理能力．

向量的数量积是学生没有遇到过的一种新的运算，与数的乘法有联系，但也有很大的区别．教科书第 19 页边空中的问题，是让学生思考向量运算与实数运算的一个不同之处．教学中，要让学生先独立思考，并从数量积的定义中想清楚：当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，不能推出 $\boldsymbol{b}$ 一定是零向量．这是因为任一与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{b}$，都满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

5. 向量数量积运算的运算律

与引进向量的线性运算时的做法一致，引进向量的数量积以后，考察这种运算的运算律是非常自然的．教科书通过“探究”，让学生类比数的乘法运算律探索向量数量积的运算律．教科书就分配律给出了详细证明，向量投影在证明过程中起到了关键作用．教学中，应当先让学生独立完成三个运算律的证明，然后教师做适当点拨和评价．

关于运算律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明，关键是要引导学生得出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量等于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量的和．为了说明这一点，如图 6-15（1）（2），关键在于证明 $\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$，由图容易得出 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{B_1D_1}|$，利用这一等式学生能方便地证明结论．在这个运算律的证明中难点是构造图形，教师在教学中可以先让学生动手画草图，再借助信息技术工具画出不同情形的辅助图形，帮助学生直观认识投影向量间的关系．

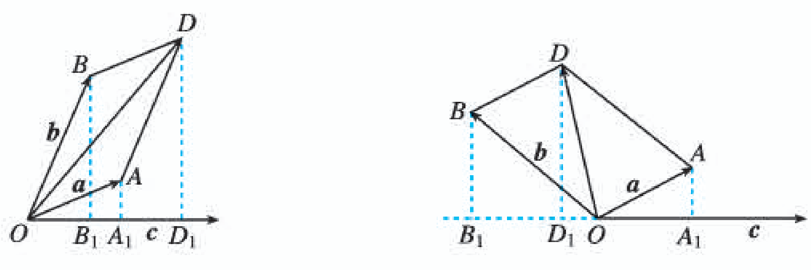


图 6-15

6. 教科书第 21 页的思考栏目

对于向量的数量积运算，学生容易受实数乘法运算性质的“负迁移”的影响，可能出现一些错误，教师要尽可能地引导学生举一些反例，纠正错误．为此，教科书安排了一个思考栏目，教学时要引导学生借助画图、举反例来澄清认识，体会向量运算与实数运算的差异．下面的解释供

参考：

对于实数 a，b，c 有 $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$，但对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立. 这是因为 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 表示一个与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定共线，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立.

学生对向量数量积的认识是逐步加深的，必要时，教师可以提醒学生画图或列表对比实数的乘法与向量的数量积运算的不同之处，或者再举一些反例强化学生的认识. 例如，已知实数 a，b，$c(b\neq0)$，则 $ab=bc\Rightarrow a=c$. 但对向量的数量积，该推理不正确，即由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，不一定能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. 由图 6-16 很容易看出，虽然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$.

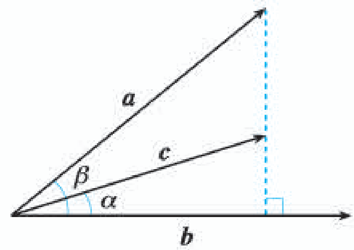


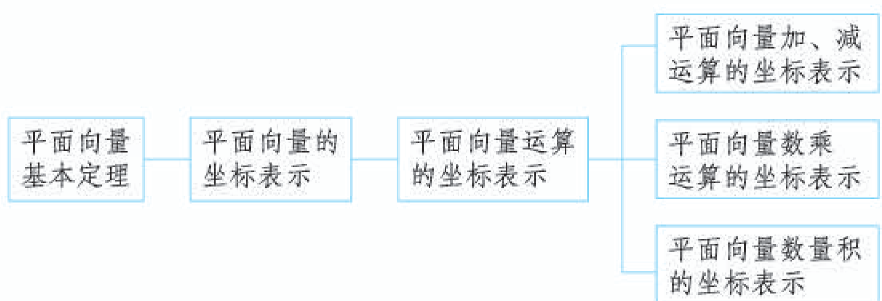
图 6-16

7. 例 11、例 12 和例 13 的教学

为了巩固对向量数量积的定义及其运算律的理解，教科书设置了例 11，例 12 和例 13. 在例 11 中，应用向量数量积的分配律推导出了 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$ 和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$，这些结论与实数中的结论类似. 例 12 是向量数量积及其运算律的综合应用，正确利用向量数量积的运算律是解题的关键. 解答例 13 的关键是用向量的数量积表示向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直，进而利用向量数量积的运算律进行化简，得到一个关于 k 的方程.

6.3　平面向量基本定理及坐标表示

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：平面向量基本定理、平面向量的坐标表示及平面向量运算的坐标表示.

难点：平面向量基本定理唯一性的证明.

三、教科书编写意图及教学建议

教科书首先通过力的分解引出平面向量基本定理，给出平面向量基本定理的证明，运用平面向量基本定理解决简单问题；然后，通过平面向量基本定理引出向量的正交分解，借助平面直角坐标系，给出向量的坐标表示；最后，介绍向量的加减运算、数乘运算、数量积的坐标表示，并

用坐标表示两个向量共线、向量垂直的条件及两个向量的夹角.

平面向量基本定理揭示了平面内任一向量与两个不共线向量的联系，给学生以结构上的认识，同时建立平面向量与有序数对的对应，引出平面向量的坐标表示. 在上述基础上研究平面向量运算的坐标表示，就把向量运算转化为数量运算.

在本节内容的教学过程中，突出平面向量基本定理、平面向量的坐标表示及平面向量运算的坐标表示等重点内容，突破平面向量基本定理唯一性的证明的难点，有助于提升学生数学运算与逻辑推理素养.

6.3.1 平面向量基本定理

本节首先由向量的概念和运算得出平面向量基本定理. 平面向量基本定理是平面向量中的重要内容. 此定理表明平面内的任一向量可以由同一平面内的两个取定的不共线向量表示，而且表示式是唯一的. 因而向量的运算可以归结为两个取定的不共线向量的运算，这为利用向量运算解决问题带来了方便. 由此定理还可引出向量的坐标的概念，进而引出向量运算的坐标表示.

1. 平面向量基本定理

平面向量基本定理告诉我们，同一平面内任一向量都可表示为两个取定的不共线向量的线性组合，这样，如果将平面内向量的起点放在一起，那么由平面向量基本定理可知，平面内的任意一个点都可以通过取定的两个不共线的向量得到表示. 也就是说，平面内的任意一个点可以由平面内的一个点及两个取定的不共线的向量来表示. 这是引进平面向量基本定理的一个原因，下面对其中的思想作一概述.

用向量表示几何元素是容易的，并且很直接. 选一个定点，那么，任何一个点都可以用一个向量来表示. 对于一条直线 l，如果我们的兴趣只在于它的方向，那么用一个与 l 平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 就行了；如果想确定这条直线的位置，则还要在 l 上任选一点. 这样，一个点 A，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 就在原则上确定了直线 l，这是对直线的一种定性刻画. 如果想具体地表示 l 上的每一个点，我们需要实数 k 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘法 $k\boldsymbol{a}$. 这时，l 上的任意一点 X 都可以通过点 A 和某个 $k\boldsymbol{a}$ 来表示（图 6-17）. 希望在“实际”上控制直线 l，可以看作是引入 $k\boldsymbol{a}$ 的一个原因.

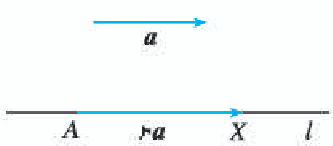


图 6-17

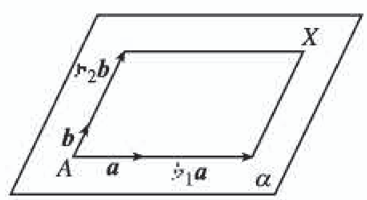


图 6-18

再来看平面. 两条相交直线确定一个平面 α. 一个定点，两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 便“原则”上确定了平面 α，这是对平面的一种定性刻画. 但在讨论几何问题时，常常涉及平面 α 上的某一点 X，为了具体地表示它，我们需要引进向量的加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这时，平面 α 上的点 X 就可以表示为 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$（相对于定点 A），这样点 X 就成为可操作的对象了（图 6-18）. 在解决几何问题时，这种表示能发挥很重要的作用. 虽然向量的加法、数乘运算有非常坚实的物理背景，但当我们舍弃了这种背景而只从纯粹数学的角度来看问题的话，上述考虑可使我们看到引进相应的向量运算的理由，这可以使我们更容易接受并喜爱向量运算.

相应地，一个定点，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 便给出直线 l 的“坐标系”；而一个定点，两个不共线的向

量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，就给出了平面 α 的一个“坐标系”．类似地，空间的一个“坐标系”可以由一个定点，三个不共面的向量来给出．在这样的坐标系中，几何元素及其关系不但可以得到定量刻画，而且可以定量地表示．另外，我们可以根据面临问题的具体条件，根据解决问题的需要（自由地）选择坐标系，而且还可以在同一个平面上选择多个“坐标系”．

2. 平面向量基本定理的引入

教科书在上节介绍了向量的运算，由向量共线的充要条件得出：位于同一直线上的向量可以由位于这条直线上的一个非零向量表示．类比这个结论，本节首先研究平面内任一向量是否可以由同一平面内的两个不共线向量表示．受力的分解的启发，教科书从将一个向量分解为两个向量入手研究上述问题．

3. 平面向量基本定理的证明

（1）存在性

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}$ 是这一平面内任一向量，教科书分三种情况讨论 $\boldsymbol{a}$ 是否可以由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示：$\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线的向量；$\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$ 共线的非零向量；$\boldsymbol{a}$ 是零向量．

教科书第 25 页的探究栏目讨论了 $\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线的向量的情况．首先，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$（教科书图 6.3-2），然后让学生将 $\boldsymbol{a}$ 按 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向分解，发现 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的关系．可以发现，四边形 $OMCN$ 是平行四边形（教科书图 6.3-3），因而 $\boldsymbol{a}$ 按 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向分解为 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$．由于 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线，$\overrightarrow{ON}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，因而存在实数 λ_1，λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$．从而得出与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式．

对于 $\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$ 共线的非零向量情况，如果 $\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线的非零向量，那么 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 可以写成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 也可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式；类似地，如果 $\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线的非零向量，$\boldsymbol{a}$ 也可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式．当 $\boldsymbol{a}$ 是零向量时，把 $\boldsymbol{a}$ 写成 $0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 同样可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式．

综上可得，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，这一平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式．

（2）唯一性

教科书进一步证明上段提到的表示形式是唯一的，其基本思路是：如果 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示成 $\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式，那么可推出 $\lambda_1=\mu_1$，$\lambda_2=\mu_2$．其中的关键是由 $(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$ 推出 $\lambda_1-\mu_1$，$\lambda_2-\mu_2$ 全为 0，这个结论在教科书中是用反证法来证明的．即假设 $\lambda_1-\mu_1$，$\lambda_2-\mu_2$ 不全为 0，则可推出 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共线，这与已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线矛盾．从而假设 $\lambda_1-\mu_1$，$\lambda_2-\mu_2$ 不全为 0 不成立，所以 $\lambda_1-\mu_1$，$\lambda_2-\mu_2$ 全为 0．

（3）平面向量基本定理及基底的概念

在（1）（2）之后就可以说，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，这就得到平面向量基本定理．然后，给出基底的概念，任意两个不共线的向量作为一个整体都可以构成一个基底．在平面内选定一个基底后，这个平面内的任意向量都可以用这个基底中的两个向量表示，因而这个平面内的向量的运算可以归结为这个基底中的两个向量的运算．教学中可以通过后续有关

例题、习题让学生体会基底的作用.

4. 信息技术工具的使用

教科书的旁注指出，利用信息技术工具，可以动态地展示 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 教学中可以按教科书给出的方法用信息技术工具作图，然后改变 $\boldsymbol{a}$ 的方向和长度的大小，引导学生发现 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 总成立. 图 6-19 展示了几种情况.

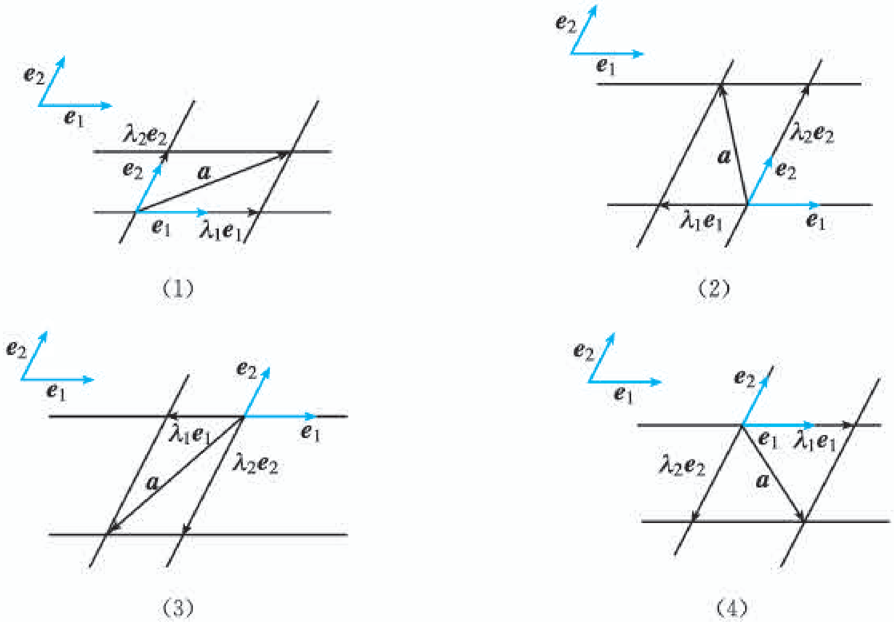


图 6-19

5. 例 1、例 2 的教学

(1) 例 1 中，教科书中的解答思路如下：先用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AP}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$；由于 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，进而用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$；由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，从而用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$. 按照上述思路可以得到 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

例 1 还可以如下解答：由于 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. 由上式可得 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$. 这个解答的思路是：用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}$，从而将 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}$ 满足的关系式写成 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 满足的关系式，进而用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

由于 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ 给出了点 P 在直线 AB 上的充要条件，因此 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ 实际上给出了直线的向量式方程.

观察 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，可以发现 $(1-t)+t=1$. 也就是说，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，当 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，即点 P 在直线 AB 上时，$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$ 的表示式中，$\lambda_1+\lambda_2=1$. 反过来，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$ 的表示式中，$\lambda_1+\lambda_2=1$，那么点 P 在直线 AB 上. 这个结论可以证明如下：由已知得，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda_2)\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，于是 $\overrightarrow{AP}=\lambda_2\overrightarrow{AB}$，所以点 P 在直线 AB 上.

(2) 例 2 中，用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，就是要证明 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. 本题的关键是取 $\{\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA}\}$ 为基底，用 $\overrightarrow{CD}(\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{DA}(\boldsymbol{b})$ 表示 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，从而用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，得到 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$. 再由 $CD=\frac{1}{2}AB$ 证明 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$.

例 2 还可以如下解答：如图 6-20，设 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$．由 $CD=\frac{1}{2}AB$，得 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$．所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2$．由上式可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$．于是 $\angle C=90°$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形．

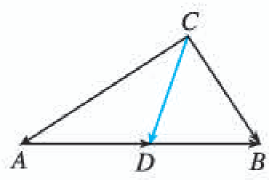


图 6-20

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示

1. 平面向量的正交分解

本小节内容以平面向量基本定理为基础．教科书首先指出，平面上给定两个不共线的向量，则任意向量均可分解为分别与它们共线的两个向量．如果这两个不共线向量互相垂直，就得到向量的正交分解的概念．教科书通过重力 $\boldsymbol{G}$ 沿互相垂直的两个方向分解的例子加以说明．

2. 平面向量的坐标表示

教科书的思考栏目中，让学生类比在平面直角坐标系中，每一个点都可用一对有序实数（即它的坐标）表示，思考直角坐标平面内的一个向量的表示方法．

由点在平面直角坐标系中的表示得到启发，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴方向相同的单位向量，以 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 为基底，由平面向量基本定理可知，对于直角坐标平面内的一个向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 x，y，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，由此给出向量的坐标的概念．

教科书接下来通过教科书图 6.3-9 指出向量的坐标与点的坐标之间的联系．在直角坐标平面中，以原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，那么

（1）设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 $(x,\ y)$ 就是终点 A 的坐标；

（2）反过来，终点 A 的坐标 $(x,\ y)$ 也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标；

（3）因为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，所以终点 A 的坐标 $(x,\ y)$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．

3. 例 3 的教学

例 3 的关键是用基底 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$．教科书给出的方法是按 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 的方向分解，得到 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}$，再用 $\boldsymbol{i}$ 表示 $\overrightarrow{AA_1}$，用 $\boldsymbol{j}$ 表示 $\overrightarrow{AA_2}$，从而用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，得到 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．使用同样的方法，可以用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，得到 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的坐标．

还可以利用向量的坐标与点的坐标之间的联系解决这个问题：作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则点 M 的坐标就是 $\boldsymbol{a}$ 的坐标．用同样的方法，可以得到 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的坐标．

另外，本例还可以利用四个向量之间位置的几何关系：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 关于 y 轴对称，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 关于原点对称，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 关于 x 轴对称，由一个向量的坐标得出其他三个向量的坐标．具体做法是：作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{d}$，则 M 与 N 关于 y 轴对称，M 与 P 关于原点对称，M 与 Q 关于 x 轴对称，求出点 M 的坐标 $(x,\ y)$，则 N，P，Q 的坐标分别是 $(-x,\ y)$，$(-x,\ -y)$，$(x,\ -y)$，从而得出 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的坐标．

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

1. 本小节研究平面向量加、减运算的坐标表示．在教科书思考栏目中，已知两个向量的坐标，让学生探求这两个向量的和、差的坐标．解决这个问题的思考过程如下：

已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，就可以用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}.$$

于是，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}).$$

根据向量加法的交换律、结合律，得

$$(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j}.$$

根据 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，得

$$x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i},$$
$$y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j}=(y_1+y_2)\boldsymbol{j}.$$

于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}$，从而得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标．同理可得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标．

2. 例 4 是已知两个向量的坐标，求这两个向量的和、差的坐标．运用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ 即可解决这个问题．

3. 在教科书第 29 页的探究栏目中，让学生探究向量的坐标与表示这个向量的有向线段的起点、终点的坐标的关系．解决这个问题的关键是作向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，将点的坐标与向量的坐标统一起来，并用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$．得到 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 后，进一步运用向量减法的坐标表示．

4. 例 5 是已知平行四边形的三个顶点的坐标，求第四个顶点的坐标．教科书给出了两种解法．

解法 1 利用“两个向量相等，则它们的坐标相等”，解题过程中运用了方程思想；解法 2 求 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标，从而求得顶点 D 的坐标：先由向量加法的平行四边形法则求得 $\overrightarrow{BD}$，再由 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}$ 求得顶点 D 的坐标．解题过程中，关键是充分利用图形中各线段的位置关系．

由向量加法的平行四边形法则求得 $\overrightarrow{BD}=(3,\ -1)$ 后，也可设顶点 D 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{BD}=(x-(-1),\ y-3)$，然后由 $(x-(-1),\ y-3)=(3,\ -1)$，也可以求得顶点 D 的坐标．

平行四边形的性质很多，利用不同的性质可以得到本题的不同解法，如利用平行四边形对角线互相平分就可以得到如下另一种解法：

连接 AC，BD，设 AC，BD 相交于点 P，则点 P 既是 AC 的中点，又是 BD 的中点．由点 P 是 AC 的中点，得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$．同理 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$，所以 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$，即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$．于是 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2,\ 1)+(3,\ 4)-(-1,\ 3)=(1,\ 5)-(-1,\ 3)=(2,\ 2)$，所以顶点 D 的坐标为 $(2,\ 2)$．

6.3.4　平面向量数乘运算的坐标表示

1. 本小节研究平面向量数乘运算的坐标表示．在教科书思考栏目中，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，让学生探求 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标．解决这个问题的思考过程如下：

已知 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，就可以用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$．

于是，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$．

根据 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，得 $\lambda(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=\lambda(x\boldsymbol{i})+\lambda(y\boldsymbol{j})$．

根据 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，得 $\lambda(x\boldsymbol{i})=\lambda x\boldsymbol{i}$，$\lambda(y\boldsymbol{j})=\lambda y\boldsymbol{j}$.

于是 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}$，从而得到 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标.

2. 例 6 是已知两个向量的坐标，求这两个向量的线性组合的坐标. 运用 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\ \lambda y)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ 即可解决这个问题.

3. 在探究栏目中，让学生探究如何用坐标表示两个向量共线的条件. 学生已经知道向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$）共线的充要条件是存在 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 可以得到 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标满足的关系式.

4. 在例 7 中，由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 可得 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标满足的关系式，从而求得 y 的值.

5. 例 8 是已知三点的坐标，判断这三点的位置关系. 证明 A，B，C 三点共线，关键是将其转化为证明 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线. 由点 A，B，C 的坐标可以求出 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的坐标分别为（2，4），（3，6），由 $2\times6-4\times3=0$，得 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线.

6. 例 9 第（1）小题是已知线段 P_1P_2 的端点的坐标，求 P_1P_2 的中点 P 的坐标. 由点 P_1，P_2 的坐标分别是 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，得 $\overrightarrow{OP_1}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OP_2}=(x_2,\ y_2)$，用 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$，求得 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标，从而求得点 P 的坐标. 本小题实际上给出了线段的中点坐标公式.

例 9 第（2）小题是已知线段 P_1P_2 的端点的坐标，求 P_1P_2 的三等分点 P 的坐标，解题的关键也是用 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$. 本小题要让学生注意线段的三等分点有两个.

在例 9 的基础上，学生通过例 9 后的探究栏目求出直线 P_1P_2 上满足 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 的点的坐标，在本题中，$\lambda\neq-1$. 这是因为假设 $\lambda=-1$，则 $\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$，$\overrightarrow{P_1P}+\overrightarrow{PP_2}=\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{0}$，这与点 P_1，P_2 是线段 P_1P_2 的端点矛盾. 解题的思路可以如例 9 那样用 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$，求得 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标，从而求得点 P 的坐标. 也可以设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，将 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 用坐标表示为

$$(x-x_1,\ y-y_1)=\lambda(x_2-x,\ y_2-y).$$

由此可得

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$
$$y-y_1=\lambda(y_2-y).$$

于是 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

所以点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

6.3.5　平面向量数量积的坐标表示

1. 本小节研究平面向量数量积的坐标表示. 在教科书第 34 页的探究栏目中，已知两个向量的坐标，让学生探求这两个向量的数量积与这两个向量的坐标的关系. 解决这个问题的关键，一是用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$；二是运用向量数量积的运算律计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})$；三是注意单位向量之间的数量积 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$.

进一步，已知 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，由 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x^2+y^2$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

进而推出 $|\boldsymbol{a}|$ 与表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标的关系式：表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，那么 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，这

就是平面内两点间的距离公式.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

2. 例 10 是已知三点的坐标，判断以这三点为顶点的三角形的形状. 在本题中，由点 A，B，C 的坐标得 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的坐标，进而算得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，从而 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

3. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，由向量数量积的定义，得 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 都可以用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示，所以可以用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示 $\cos\theta$. 例 11 是已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，直接运用相关结论即可.

4. 例 12 是用向量方法证明两角差的余弦公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，可以引导学生按照下面的思路思考：

（1）思考的出发点是用 α，β 的正弦、余弦表示 $\alpha-\beta$ 的余弦. 为此，联系正弦、余弦的定义，在平面直角坐标系 Oxy 内作单位圆 O，以 x 轴的非负半轴为始边作角 α，β，它们的终边与单位圆 O 的交点分别为 A，B，用 α，β 的正弦、余弦表示点 A，B 的坐标，进而用 α，β 的正弦、余弦表示向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标.

（2）用由（1）得到的向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标表示向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的夹角 θ 的余弦. 由向量数量积的坐标表示得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，由向量数量积的定义得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\theta$，所以 $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

（3）探讨 $\alpha-\beta$ 与 θ 的关系，进而用 $\cos\theta$ 表示 $\cos(\alpha-\beta)$，从而用 α，β 的正弦、余弦表示 $\alpha-\beta$ 的余弦. 由教科书图 6.3-20 得 $\alpha-\beta$ 与 θ 的关系式 $\alpha-\beta=2k\pi\pm\theta$，由此可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

6.4　平面向量的应用

一、本节知识结构框图

- 向量的应用
  - 平面几何中的向量方法
  - 余弦定理、正弦定理 — 余弦定理、正弦定理应用举例
  - 向量在物理中的应用举例

二、重点、难点

重点：用向量方法解决简单几何问题、实际问题的方法与步骤，用向量方法证明余弦定理和正弦定理，余弦定理和正弦定理的应用.

难点：如何把几何问题、实际问题转化为向量问题，余弦定理和正弦定理的证明.

三、教科书编写意图及教学建议

向量具有明确的几何背景和丰富的物理背景，其几何背景是有向线段，物理背景是力、速度、加速度等. 由此自然想到可以利用向量解决一些简单的平面几何问题和物理问题. 例如，利用向量可以解决平面内两条直线平行或垂直关系的判断，利用向量可以计算力对物体的做功等问题. 正因为如此，教科书专门安排 2 课时，介绍用向量方法解决一些简单的平面几何问题和物理问题，以此提升直观想象、数学建模、逻辑推理和数学运算素养.

三角形是平面几何中最常见、最重要的图形之一，对三角形的边赋予方向，这些边就成了向量. 三角形的边角关系是三角形中最重要的关系之一，而余弦定理和正弦定理是刻画三角形边角关系最为重要的两个定理，它们为解三角形提供了基本而重要的工具. 为了更好地体现向量的价值，教科书把余弦定理和正弦定理放在本节中介绍，并且借助向量的运算，探索三角形边长与角度之间的关系，突出了向量在解三角形中的应用.

6.4.1　平面几何中的向量方法

1. 研究平面几何常用的方法是综合法. 综合法是欧几里得几何学最早用来研究几何的方法，它依据基本的逻辑原理（矛盾律、排中律等），从公理、定理、性质等出发，通过演绎推理解决几何问题. 应当说，综合法所给出的几何论证严谨且优雅，但不同的问题通常缺乏统一的解法步骤，没有一般规律可循，具有较大的思维难度. 因此，自然需要寻求新的研究几何的工具，以便更好地把握一些几何图形的性质和规律，进而推进几何研究的发展.

2. 用向量方法处理平面几何问题的基本思路是：先把几何图形中的元素用向量来表示，再借助于向量的运算研究图形中几何元素之间的关系，然后把向量运算的结果翻译成平面几何的形式.

用向量法研究平面几何问题的过程可以简单地表述为

几何图形到向量 → 恰当的向量运算 → 向量到几何关系

这就是教科书中给出的用向量方法解决几何问题的“三步曲”：

（1）建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

（2）通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；

（3）把运算结果“翻译”成几何关系.

3. 例 1，例 2 的教学

例 1 是三角形中位线定理的证明. 三角形中位线定理是平面几何中的重要定理之一，在平面几何的学习中，学生曾经用不同的方法进行过证明，但常常因为需要添加辅助线而使证明显得较

为困难．例 1 要求用向量方法证明这一定理，其价值在于：一方面使学生懂得，由于向量能够运算，因而它可以把原本较为复杂的思辨过程转化为较为简单的运算过程，降低了思考问题的难度，进而使学生感受向量在解决某些平面几何问题中的优势；另一方面让学生明白，证明两条线段平行，可以利用两个向量平行的充要条件来证明．此外，由于运算必须遵循一定的规则，因而例 1 的证明可以按一定的运算程序进行操作，进而使学生明确用向量方法解决几何问题的“三步曲”．教学中可以结合例 1 让学生自行总结用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”．

平行四边形是平面几何中学生熟悉的又一种基本图形，它有许多重要的性质．例 2 利用向量方法探究了平行四边形的两条对角线与两条邻边之间的关系：平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边平方和的两倍．这一结论回答了教科书边空中提出的问题，教学中可以让学生自行总结．

例 2 是涉及两个向量的和或差的模的问题，这类问题大多只需对向量的和或差的模平方，便能够快速获解．在解决问题的过程中，教师应引导学生有意识地使用教科书中给出的用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”．

6.4.2　向量在物理中的应用举例

1. 向量在物理中的应用，实际上是先把物理问题转化为向量问题，然后利用向量运算解决转化而得的向量问题，最后再用所得的结果解释物理现象．教学中要引导学生注意两个方面，一是通过实例，体会如何把物理问题转化成数学问题，即如何将物理量之间的关系转化成数学模型；二是如何利用数学模型的解来解释问题中所反映的物理现象，以此培养学生数学建模素养，提高从向量角度分析和解决实际问题的能力．

2. 例 3、例 4 的教学

例 3 是人们在日常生活中经常遇到的问题，学生也有两人共提一个旅行包以及在单杠上做引体向上运动的经验．要从数学角度作出相应的解释，首先要把实际问题抽象为数学模型，教科书中的“分析”正是为完成建立数学模型服务的．建立模型后，不难发现，这是一个简单的向量问题．

对于例 3，还可以借助信息技术工具，观察 $|\boldsymbol{F}|$，$|\boldsymbol{G}|$，θ 在变化过程中相互之间的影响．教科书第 40 页“探究”中的两个问题是例 3 的延续，教学中可以由学生自行完成，也可以用信息技术工具来验证．

解决例 4 的关键在于对“航程最短”的解释．“分析”中指出船必须垂直于河岸行驶，这时，船的速度与水流速度的合速度必须垂直于河岸．分析清楚这种关系后，本例就迎刃而解了．

6.4.3　余弦定理、正弦定理

教科书引言部分指出：对于一般三角形，我们已经定性地研究过三角形的边、角关系，得到了 SSS，SAS，ASA，AAS 等判定三角形全等的方法．这些判定方法表明，给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的某些元素，这个三角形就是唯一确定的．那么三角形的其他元素与给定的某些元素有怎样的数量关系？这一引言，除了唤醒学生对“两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等”等这样的定性结论的记忆以外，最为关键的是教师应启发学生思考：三角形的边、角之间有怎样的定量关系？以此引导学生由定性研究上升到定量研究．

1. 余弦定理

（1）关于余弦定理的探究

教科书中明确指出：两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等. 由此说明，给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的. 这里，一个自然的问题是：怎样根据三角形已知的两边及其夹角来确定第三边，进而确定其余的角.

在解决上述问题之前，教科书首先安排了一个探究问题（教科书第 42 页）：怎样用已知三角形的两边及其夹角来表示第三边？对此，教科书利用向量的数量积进行了探究，快速地获得了余弦定理，充分体现了向量的优势. 事实上，当我们把三角形的两边用向量表示后，问题转化成了关于两个向量及其夹角的问题. 于是，自然想到利用向量的数量积进行探究.

（2）余弦定理中边的可轮换性

余弦定理中的边 a，b，c 轮换的方式如图 6-21 所示.

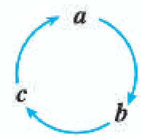


图 6-21

按上述方式对边进行轮换，并注意到夹角，就可以从余弦定理的一个式子得到其余的两个式子.

正因为余弦定理中的边具有可轮换的特点，所以余弦定理可以用概括的文字语言统一叙述，即教科书中给出的文字叙述. 教学中可以引导学生自行用文字语言叙述余弦定理，以此培养学生的数学表达能力.

（3）余弦定理的其他证明方法

教科书第 43 页边空中的问题，让学生思考证明余弦定理的其他方法. 这里我们给出坐标法和几何法，供教学时参考.

① 证明余弦定理的坐标法

如图 6-22，以$\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点，边 AB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系. 设 BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，则点 B 的坐标为（c，0），并且不论$\angle A$ 是锐角、钝角还是直角，由三角函数的定义知，点 C 的坐标始终为（$b\cos A$，$b\sin A$）.

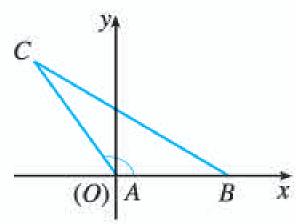


图 6-22

由两点间的距离公式，得 $BC^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A-0)^2$，即 $a^2=b^2\cos^2 A-2b\cos A+c^2+b^2\sin^2 A$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理，若以顶点 B 为原点，边 BC 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，或以顶点 C 为原点，边 CA 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，不难得到

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

②证明余弦定理的几何法

如图 6-23，当三角形是锐角三角形时，

过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D，则

$$\begin{aligned}BC^2&=CD^2+BD^2=(AC-AD)^2+BD^2\\&=AC^2-2AC\cdot AD+AD^2+BD^2\\&=AC^2+AB^2-2AC\cdot AD.\end{aligned}$$

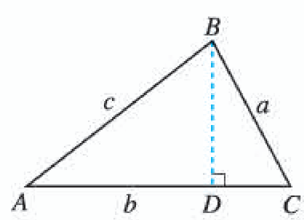


图 6-23

因为 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$AD=AB\cos A=c\cos A$，

所以 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

如图 6-24，当三角形是钝角三角形时，不妨设 A 为钝角. 过点 B 作 AC 的垂线，与 CA 的延长线相交于点 D，则

$$BC^2=CD^2+BD^2=(AC+AD)^2+BD^2$$
$$=AC^2+2AC\cdot AD+AD^2+BD^2$$
$$=AC^2+AB^2+2AC\cdot AD.$$

因为 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$AD=AB\cos(180^\circ-A)=-c\cos A$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

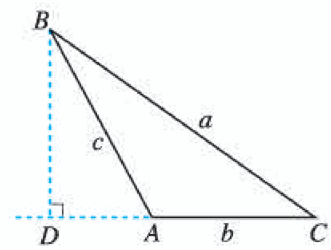


图 6-24

当三角形是直角三角形时，不妨设 A 为直角，此时也有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

类似地，可以得到余弦定理的另外两个等式.

(4) 余弦定理和勾股定理之间的关系

在△ABC 中，若 $C=90^\circ$，则 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2$，余弦定理即变成了勾股定理. 由此可知，余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例.

(5) 余弦定理的推论

余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系，并且每一个等式中都含有四个不同的量，它们分别是三角形的三条边和一个角. 不难看出，已知其中的三个量，就可以求出第四个量. 用三角形的三条边表示角的余弦，即可获得余弦定理的推论，有时也说成是余弦定理的第二种形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

已知三角形的三条边求角时，利用余弦定理的推论较为方便.

(6) 余弦定理及其推论的应用

利用余弦定理及其推论，可以解决如下两类解三角形的问题：

①已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角；

②已知三边，求三个角.

教科书将解三角形的内容作为“余弦定理”“正弦定理”的应用，例 5 是已知三角形的两边和它们的夹角，解三角形的问题，直接利用余弦定理即可求出第三边. 于是问题即转化成了已知三边解三角形的问题，只需利用余弦定理的推论，并结合三角形内角和定理即可获解. 注意本例中对所求的边和角都有明确的精确度要求，教科书中是利用计算器求出其结果的.

例 6 实际上也是已知三角形的两边和它们的夹角解三角形的问题，与例 5 不同的是两边 a，b 的夹角∠C 是通过 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 间接给出的，并且只需求出∠B 即可，而无需求出所有未知的边和角. 求解时只需先根据 $\sin C$ 的值确定 $\cos C$，便可以利用余弦定理及其推论求出∠B 的值了.

需要指出的是，在本节中，复杂的计算是借助于计算器进行的. 使用计算器计算时，我们约定，当计算器所示的三角函数值是准确数时用等号，当计算器所示的三角函数值需取其近似值时，相应的运算结果用约等号.

2. 正弦定理

(1) 关于正弦定理的探究

教科书首先从三角形中等边对等角引出"在$\triangle ABC$中，设A的对边为a，B的对边为b，求A，B，a，b之间的定量关系"的问题. 注意到初中利用锐角三角函数已经解决了直角三角形中的情形，即

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，我们有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

一个自然的问题是，对于锐角三角形和钝角三角形，上述关系式是否仍然成立?

由于涉及三角形的边、角关系，并注意到探究余弦定理时利用的是向量方法，因而教科书仍然采用向量方法来研究上述关系，以此体现向量的工具作用. 探究过程中，关键在于阐明"过点A作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量$\boldsymbol{j}$"的思维过程. 教科书中的"思考"及其相应说明，正是为揭示这一思维过程而设计的，教学中应当引起注意.

(2) 正弦定理的其他形式

获得了正弦定理后，可以介绍它的另外三种形式.

①拆分式

正弦定理虽然是一个连等式，但它可以拆分成如下三个等式：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}.$$

在实际应用中，常用的是拆分式. 事实上，拆分式中的每一个等式都揭示了三角形两个角与它们对边之间的关系，如果已知其中任意的三个量，便可以求出其余的一个量.

正弦定理（主要是拆分式）可以用来解决两类解三角形的问题：

(i) 已知两角和任一边，求其余的两边和一角；

(ii) 已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而求其余的边和角.

②连比式

正弦定理可以写成如下连比的形式：

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

根据正弦定理的连比式，可以间接地把问题看成已知三角形三条边的问题，为利用余弦定理解决问题创造了条件.

③分体式

设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k(k\neq 0)$，

则 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$；

或 $\sin A=\dfrac{a}{k}$，$\sin B=\dfrac{b}{k}$，$\sin C=\dfrac{c}{k}$.

分体式在"化边为角，化角为边"的过程中经常使用，这里的k实际上是三角形外接圆的直径.

(3) 正弦定理的其他证明方法

对于余弦定理，我们给出了余弦定理的坐标法证明和几何法证明. 下面，我们利用锐角三角函数和三角形面积公式证明正弦定理.

①利用锐角三角函数证明

教科书处理这一部分内容时，一开始直接利用锐角三角函数推出了正弦定理在直角三角形中成立. 既然如此，对于锐角三角形和钝角三角形，只需作高，便可得到直角三角形了，然后再用锐角三角函数即可获得证明.

如图 6-25，当△ABC 是锐角三角形时，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D，根据锐角三角函数的定义，得 $BD=c\sin A$，$BD=a\sin C$.

所以 $a\sin C=c\sin A$，

即 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

同理可得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

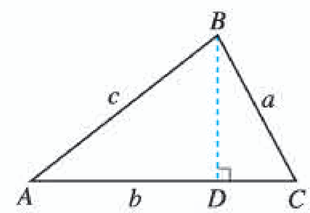


图 6-25

当△ABC 是钝角三角形时，不妨设 A 为钝角，如图 6-26 所示.

过点 B 作 AC 的垂线，与 CA 的延长线相交于点 D，则 $BD=c\sin(180^\circ-A)=c\sin A$，$BD=a\sin C$.

于是可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

同理可得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

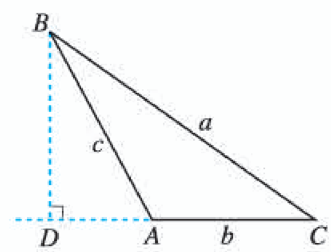


图 6-26

利用锐角三角函数证明正弦定理比教科书中介绍的向量法要简单. 教科书之所以选用向量法，旨在体现向量在三角中的应用，这也是《标准（2017 年版）》的要求. 从这个意义上来说，教学时应首选向量法. 至于利用锐角三角函数探究正弦定理，正如教科书中所说的，请学生自行尝试即可.

②利用三角形面积证明

如图 6-27，以△ABC 的顶点 A 为原点，边 AC 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.

设 BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，则不论 A 是锐角、钝角还是直角，由三角函数的定义知，点 B 的坐标始终为 $(c\cos A, c\sin A)$. 过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，则 $BE=c\sin A$.

于是可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\times BE=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

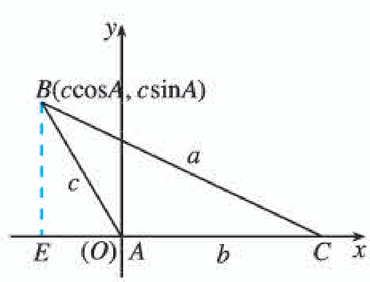


图 6-27

同理可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ca\sin B$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

由此即得任意三角形的面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

将等式 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$ 中的每一部分同除以 $\frac{1}{2}abc$，得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$. 由反比定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

这里，推导"用两边及其夹角"来表示的三角形面积公式，其目的是证明正弦定理. 由于《标准（2017 年版）》中对上述三角形面积公式没有提出要求，因此教科书中未作介绍，但考虑到这个面积公式经常用到，因此，在习题 6.4 第 10 题中要求学生自行探究. 教学中是否介绍这一公式，可以根据学生的情况酌情处理.

（4）例 7、例 8 的教学

例 7 是已知三角形的两个角和任意一边解三角形的问题，可以直接利用正弦定理来求解. 但在求解中涉及 $\sin 15^\circ$ 的计算，这是非特殊角的三角函数求值问题. 可以把它改写为 $\sin(45^\circ-30^\circ)$，也可以改写为 $\sin(60^\circ-45^\circ)$，还可以改写为 $\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$，教科书中选用 $\sin(45^\circ-30^\circ)$. 教学中可以让学生自己思考解决方案并进行计算.

例 8 是已知两边和其中一边的对角解三角形的问题，可以利用正弦定理来求解. 对于本例题，当求得 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 后，应注意引导学生分析得出在 0°～180° 内，与 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应的角有两个，一个锐角，一个钝角，即 $C=45^\circ$，或 $C=135^\circ$. 是否两个角都符合要求？这需要引导学生分析.

事实上，根据"三角形大边对大角"的结论，因为 $c>b$，所以 $C>B$. 而 $B=30^\circ$，所以 $C=45^\circ$，或 $C=135^\circ$ 都符合要求，即此题有两个解. 本例教科书的边空中"为什么角 C 有两个值？"的问题设计，正是为了引发学生作上述这样的思考.

3. 余弦定理、正弦定理应用举例

余弦定理和正弦定理的应用，主要指解三角形在实际问题中的应用. 通过对实际问题的分析，建立相应的数学模型，把实际问题数学化，即把实际问题转化为数学问题，以此培养学生的数学建模素养，提高学生分析和解决实际问题的能力.

（1）例 9 的教学

例 9 是关于河的对岸不可到达的两点间的距离的测量问题. 此问题的特点之一是要求自己设计测量方案，并给出计算这两点间的距离的方法. 注意到河对岸的两点是不可到达的，因此，只能在这两点的对岸进行测量. 教科书中的分析，阐明了测量方案设计的形成过程. 开始学生可能考虑在河的另一侧取一个基点进行测量，但无法获得结果，因此考虑修正测量方案，选取两个基点，便可以解决问题了. 教学中要让学生体会测量方案的形成过程.

事实上，在河的这一侧选取两个基点，先测出它们之间的距离，再测出这两个基点相对于被侧两点的张角，利用正弦定理可将问题转化为，"在三角形中，已知两边和它们的夹角，求第三边"的问题，进而可以利用余弦定理求解.

此问题的另一个特点是，运算过程所涉及的几乎全是含有字母的式子的运算. 因此，本题的

处理对于运算求解能力有较高的要求，应当注意训练，以提升学生的数学运算素养.

对于本例，教科书中是在$\triangle ABC$中，利用余弦定理计算出A，B两点间的距离的．事实上，在教科书给出的测量方案下，还可以在$\triangle ABD$中，利用余弦定理计算出A，B两点间的距离

$$AB=\sqrt{AD^2+BD^2-2AD\times BD\cos\delta},$$

其中AD和BD可以分别在$\triangle ADC$和$\triangle BDC$中，利用正弦定理求出

$$AD=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)},\ BD=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

这也是教科书在例9的最后提出的思考问题的目的.

(2) 例10的教学

例10是底部不能到达的建筑物高度的测量问题，归根结底仍然可以看作平面上解三角形的问题．由于建筑物底部不能到达，因此求解中一要注意测量方案设计的可操作性，二要注意求解建筑物的高度时不要忘了测角仪的高度.

此题中涉及了仰角的概念，分析问题时应对仰角的定义作适当阐述．一般地，当视线在水平线上方时，视线与水平线所夹的锐角或直角称为仰角.

关于测量底部不能到达的建筑物高度的问题，有时还会涉及俯角的概念．一般地，当视线在水平线下方时，视线与水平线所夹的锐角或直角称为俯角．对于俯角的概念，教学中可以适当补充.

(3) 例11的教学

例11是航行问题中的航程以及角度的测量和计算问题．由于题目中没有给出图形，因此，正确理解题意，画出示意图，是解决问题的重要环节，而读懂题目中“正东方向”“南偏西30°”“目标方向线”等术语，是画出示意图的前提.

分析问题时，除了引导学生进一步理解“北偏东××度”等刻画角的术语以外，应当使学生明了，此题仍是同一平面上的解三角形问题，既要求出边长，又要求出角度．根据题意，问题首先表现为“已知两边和它们的夹角，求第三边”的问题，自然想到利用余弦定理，然后利用正弦定理求角.

处理此题时，应注意引导学生认真领悟相关术语，根据问题中的文字语言，自行画出图形，然后利用余弦定理和正弦定理计算．无疑，这样处理，对于培养学生文字语言、图形语言和符号语言相互转译的能力以及数学建模素养，都是十分有益的.

Ⅲ 习题解答

6.1 平面向量的概念

练习（第4页）

1. 悬挂物受到的拉力、摩擦力、加速度都是向量，压强、频率都是数量.

2. 画一条方向向下且长为 1.8 cm 的有向线段，画一条方向向左且长为 2.8 cm 的有向线段. 图略.

3. $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{CD}|=2.5$，$|\overrightarrow{EF}|=3$，$|\overrightarrow{GH}|=2\sqrt{2}$.

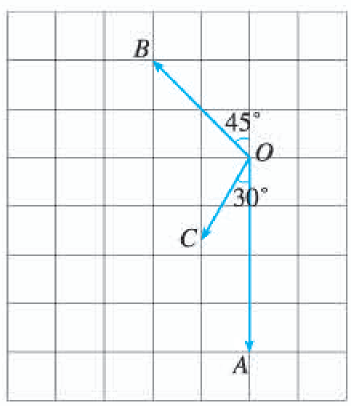
4. （1）当 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 是相等向量时，终点 M 与 N 重合.

（2）当 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 方向相同时，$|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{OM}|-|\overrightarrow{ON}|=\frac{1}{2}$，且 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 方向相反；

当 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 方向相反时，$|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{OM}|+|\overrightarrow{ON}|=\frac{3}{2}$，且 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 方向相同.

习题 6.1

1.



（第 1 题）

2. 与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{QP}$，$\overrightarrow{SR}$；与 $\boldsymbol{b}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{DO}$；与 $\boldsymbol{c}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{RQ}$，$\overrightarrow{ST}$.

3. （1）×. 单位向量的长度都是 1，但方向可能不同.

（2）√. 方向为南偏西 60°的向量与北偏东 60°的向量方向相反，它们是共线向量.

（3）×. x 轴和 y 轴都只有方向而没有大小，因此它们不是向量.

（4）×. 当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向可能相反.

（5）√. 假设 M 与 N 两点重合，则有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$，与条件不符.

（6）√. 海拔不是向量，它只有大小，没有方向.

4. 相等的向量共有 24 对.

长度为 1 的向量有 18 对，其中与 $\overrightarrow{AM}$ 同向的有 6 对，与 $\overrightarrow{AM}$ 反向的也有 6 对，与 $\overrightarrow{AD}$ 同向

的有 3 对，与 $\overrightarrow{AD}$ 反向的也有 3 对；长度为$\sqrt{2}$的向量有 4 对；长度为 2 的向量有 2 对.

6.2 平面向量的运算

练习（第 10 页）

1. 略.

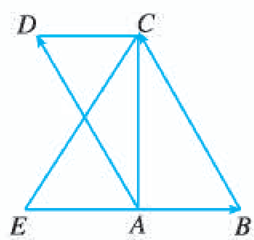
2. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反，且$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反，且$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

3. (1) $\boldsymbol{c}$；　(2) $\boldsymbol{f}$；　(3) $\boldsymbol{f}$；　(4) $\boldsymbol{g}$.

4. (1) ×；　(2) √；　(3) ×.

5. 如图，$\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度，$\overrightarrow{AD}$ 表示小船的速度. 由已知得 $|\overrightarrow{AB}|=7.5$ km/h，$|\overrightarrow{AD}|=15$ km/h，$\angle BAD=120°$. 以 AB，AD 为邻边作▱$ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}$ 表示小船实际航行的速度，$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=15$ km/h，$\angle ABC=60°$. 延长 BA 到点 E，使 $AE=AB$，连接 CE，则 $BE=BC$. 又 $\angle ABC=60°$，所以$\triangle BCE$ 是等边三角形. 在$\triangle BCE$ 中，AC 是$\triangle BCE$ 的中线，所以 $AC\perp BE$，从而$\angle BAC=90°$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=BC\sin 60°=15\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (km/h). 所以小船实际航行的速度的大小是$\frac{15\sqrt{3}}{2}$ km/h，方向与河岸垂直.



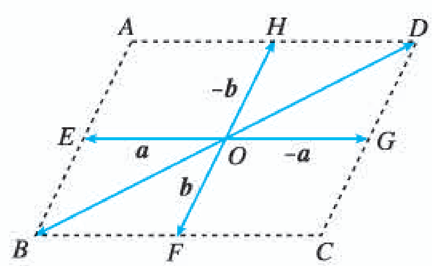
（第 5 题）

练习（第 12 页）

1. 略.

2. $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BA}$.

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，依次取 AB，BC，CD，DA 的中点 E，F，G，H，连接 EG，FH，则 EG，FH 将▱$ABCD$ 分割成四个全等的平行四边形. 设 EG，FH 相交于点 O，$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OG}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OH}=-\boldsymbol{b}$. 在▱$OEBF$ 中，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{OD}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 在▱$HOGD$ 中，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{b})$，因此，有$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



（第 3 题）

练习（第 15 页）

1. 图略.（提示：作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}$，延长 AB 到点 C，使 $BC=4AB$，则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}$；反向延长 AB 到点 D，使 $AD=4AB$，则 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}$.）

2. $\frac{5}{7}$，$-\frac{2}{7}$.

3. (1) $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$；　(2) $\boldsymbol{b}=-\frac{7}{4}\boldsymbol{a}$；　(3) $\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$；　(4) $\boldsymbol{b}=\frac{8}{9}\boldsymbol{a}$.

练习（第 16 页）

1. (1) 共线；　(2) 共线.

2. (1) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;　(2) $-\frac{11}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$;　(3) $2y\boldsymbol{a}$.

3. 由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，易证 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$；否则，向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共线. 由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量可知，存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，$(2-\lambda)\boldsymbol{e}_1=(-2\lambda-k)\boldsymbol{e}_2$.

由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，必有 $2-\lambda=-2\lambda-k=0$. 否则，不妨设 $2-\lambda\neq 0$，则 $\boldsymbol{e}_1=\frac{-2\lambda-k}{2-\lambda}\boldsymbol{e}_2$，由两个向量共线的充要条件，知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共线，与已知矛盾.

由 $\begin{cases}2-\lambda=0,\\-2\lambda-k=0,\end{cases}$ 解得 $k=-4$. 因此，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，$k=-4$.

练习（第 20 页）

1. $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos 60^\circ=8\times 6\times\frac{1}{2}=24$.

2. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时，$\triangle ABC$ 为钝角三角形；当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

3. 投影向量分别为 $3\sqrt{2}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{0}$，$-3\sqrt{2}\boldsymbol{e}$.

练习（第 22 页）

1. (1) $\sqrt{3}\boldsymbol{c}$；　(2) $3\sqrt{2}\boldsymbol{a}$.

2. 根据题意，因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$. 又 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=2$，$-2\boldsymbol{b}^2=-2|\boldsymbol{b}|^2=-2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

3. 原式左边 $=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ 右边.

习题 6.2

1. (1) 向东走 20 km；　(2) 向东走 5 km；　(3) 向东北走 $10\sqrt{2}$ km；
   (4) 向西南走 $5\sqrt{2}$ km；(5) 向西北走 $10\sqrt{2}$ km；(6) 向东南走 $10\sqrt{2}$ km.

2. 飞机飞行的路程为 700 km；两次位移的合成是向北偏西约 53° 方向飞行 500 km.

3. 船实际航行的速度的大小是 $4\sqrt{17}$ km/h，船航行的方向与河岸的夹角约为 76°.

4. (1) $\boldsymbol{0}$；(2) $\overrightarrow{AB}$；(3) $\overrightarrow{BA}$；(4) $\boldsymbol{0}$；(5) $\boldsymbol{0}$；(6) $\overrightarrow{CB}$；(7) $\boldsymbol{0}$.

5. 略.

6. (1) 作图略；(2) 不一定能构成三角形.

7. (1) 略；(2) 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

8. (1) $-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；(2) $10\boldsymbol{a}-22\boldsymbol{b}+10\boldsymbol{c}$；(3) $3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；(4) $2(x-y)\boldsymbol{b}$.

9. 因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$，而 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

10. (1) 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=13+12\cos\theta$，当 $\theta=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有最大值 5，当 $\theta=\pi$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有最小值 1.
(2) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

11. (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6\sqrt{3}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=25-12\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$.

(2) 由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=23$，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{23}$. 由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=35$，得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{35}$.

12. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

(1) 当 $\lambda=0$ 时，等式显然成立；

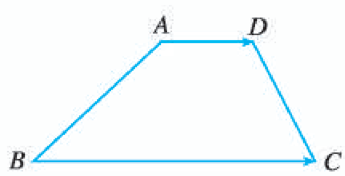
(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 θ，所以 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，因此 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角都为 $180^\circ-\theta$，则 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

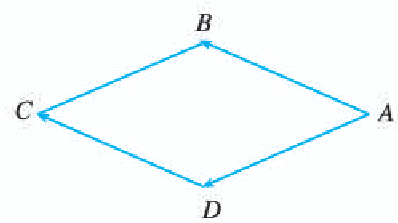
综上所述，等式成立.

13. (1) 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，证略；

(2) 如图 (1)，因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，所以 $AD/\!/BC$ 且 $AD\neq BC$. 因此四边形 $ABCD$ 为梯形.



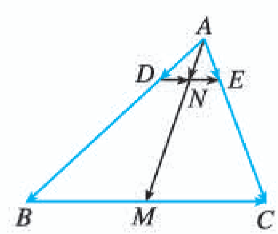
（第 13 题 (1)）



（第 13 题 (2)）

(3) 如图 (2)，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以 $AB/\!/DC$，且 $AB=DC$. 因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，所以四边形 $ABCD$ 为菱形.

14. 如图，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{DB}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.



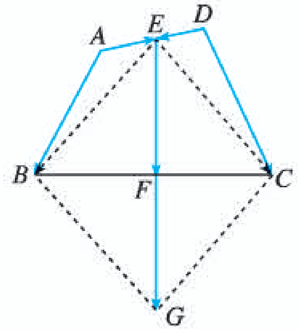
（第 14 题）

15. 证法 1：在四边形 $EABF$ 中，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$，在四边形 $EDCF$ 中，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$.

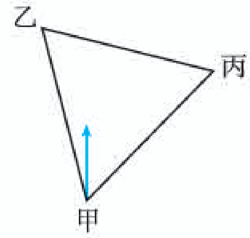
注意到 $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF}$，所以

$2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

证法 2：如图，延长 EF 到点 G，使 $EF=FG$，连接 EB，BG，GC，CE，则四边形 $BECG$ 为平行四边形. 在 $\triangle ABE$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$，在 $\triangle DCE$ 中，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}$，而 $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{DE}$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$.

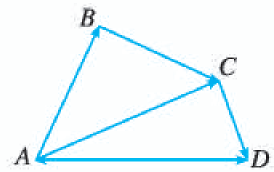


（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，丙地在甲地的北偏东 45° 方向，距甲地 1 400 km.



（第 17 题）

17. (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$；

(2) 如图，连接 AC，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$；

(3) $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$
$=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$
$=\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$
$=\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$
$=\mathbf{0}$.

18. 由 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=61$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$. $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=120^\circ$.

19. $\theta\approx 55^\circ$.

20. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

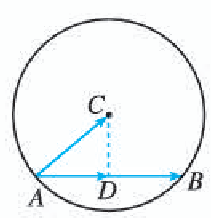
21. A.（提示：设 D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$，故 $\triangle ABC$ 外接圆圆心 O 为 BC 的中点，所以 $\angle BAC=90^\circ$. 又 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$，所以 $\angle ABC=60^\circ$，因此向量 $\overrightarrow{BA}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.）

22. 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，得 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

23. (1) 图略.

(2) 由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，得 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以 $AB \underline{\parallel} CD$. 因此，四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

24. 如图，设 D 为弦 AB 的中点，连接 CD，则 $CD\perp AB$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，因此只需知道弦 AB 的长，就可以求出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.



（第 24 题）

注：或者由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$，而 $\cos\angle BAC=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$，

得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

练习（第 27 页）

1. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2. (1) $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{FB}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2) 由 (1) 得 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$，所以 $DE /\!/ BF$ 且 $DE=BF$.

3. (1) $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{8}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

如果$\angle A=60^\circ$，$AB=2AC$，那么 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{8}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{8}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=0$.

所以 $CD\perp EF$.

练习（第 30 页）

1. (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\ 6)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-7,\ 2)$；
   (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\ 11)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(7,\ -5)$；
   (3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,\ 0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,\ 6)$；
   (4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\ 4)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,\ -4)$.
2. (1) $\overrightarrow{AB}=(3,\ 4)$，$\overrightarrow{BA}=(-3,\ -4)$；
   (2) $\overrightarrow{AB}=(9,\ -1)$，$\overrightarrow{BA}=(-9,\ 1)$；
   (3) $\overrightarrow{AB}=(0,\ 2)$，$\overrightarrow{BA}=(0,\ -2)$；
   (4) $\overrightarrow{AB}=(5,\ 0)$，$\overrightarrow{BA}=(-5,\ 0)$.
3. $\overrightarrow{AB}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\ -1)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 所以 $AB /\!/ CD$.

练习（第 33 页）

1. $-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(-6,\ -8)$，$4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(12,\ 5)$.
2. 由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，得 $2\times(-6)-3x=0$，解得 $x=-4$.
3. $\overrightarrow{AB}=(4,\ 5)$，$\overrightarrow{CD}=(-6,\ -7.5)$，$4\times(-7.5)-5\times(-6)=0$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线.
4. (1) $(3,\ 2)$；(2) $(1,\ 4)$；(3) $(4,\ -5)$.
5. $\left(\frac{10}{3},\ 1\right)$ 或 $\left(\frac{14}{3},\ -1\right)$.

练习（第 36 页）

1. $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{29}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-7$.
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-7$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=49$.
3. $\theta\approx 88^\circ$.

习题 6.3

1. $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}a-b$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b$.

2. $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,\ 0)$.

3. (1) $(-2,\ 1)$；(2) $(0,\ 8)$；(3) $(1,\ 2)$.

4. 解法 1：设 $O(0,\ 0)$，则 $\overrightarrow{OA}=(-1,\ -2)$，$\overrightarrow{BC}=(5-3,\ 6-(-1))=(2,\ 7)$，而 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=(1,\ 5)$. 所以点 D 的坐标为 $(1,\ 5)$.

解法 2：设 $D(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(x-(-1),\ y-(-2))=(x+1,\ y+2)$，$\overrightarrow{BC}=(5-3,\ 6-(-1))=(2,\ 7)$.

由 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，得 $\begin{cases}x+1=2,\\ y+2=7,\end{cases}$ 解得点 D 的坐标为 $(1,\ 5)$.

5. 设 $O(0,\ 0)$，则 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}=(2,\ 4)$，所以点 A' 的坐标为 $(2,\ 4)$. 因为 $\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}=(-3,\ 9)$，所以点 B' 的坐标为 $(-3,\ 9)$. 因此，向量 $\overrightarrow{A'B'}=(-5,\ 5)$.

6. 设 $O(0,\ 0)$，则 $\overrightarrow{OA}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4)$. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2)$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}=(-4,\ 8)$，$\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,\ -2)$. 又 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(0,\ 3)$，所以点 C 的坐标为 $(0,\ 3)$. 因为 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-3,\ 9)$，所以点 D 的坐标为 $(-3,\ 9)$. 因为 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=(2,\ -1)$，所以点 E 的坐标为 $(2,\ -1)$.

7. (1) 因为 $\overrightarrow{AB}=(-3-1,\ -4-2)=(-4,\ -6)$，$\overrightarrow{AC}=(2-1,\ 3.5-2)=(1,\ 1.5)$，又 $-4\times1.5-(-6)\times1=0$，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$. 又直线 AB，直线 AC 有公共点 A，所以 A，B，C 三点共线.

(2) 因为 $\overrightarrow{PQ}=(0.5-(-1),\ 0-2)=(1.5,\ -2)$，$\overrightarrow{PR}=(5-(-1),\ -6-2)=(6,\ -8)$，又 $1.5\times(-8)-(-2)\times6=0$，所以 $\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{PR}$. 又直线 PQ、直线 PR 有公共点 P，所以 P，Q，R 三点共线.

(3) 因为 $\overrightarrow{EF}=(1-9,\ -3-1)=(-8,\ -4)$，$\overrightarrow{EG}=(8-9,\ 0.5-1)=(-1,\ -0.5)$，又 $-8\times(-0.5)-(-4)\times(-1)=0$，所以 $\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{EG}$. 又直线 EF，EG 有公共点 E，所以 E，F，G 三点共线.

8. (1) 因为 $\overrightarrow{BA}=(-1-5,\ -4-2)=(-6,\ -6)$，$\overrightarrow{BC}=(3-5,\ 4-2)=(-2,\ 2)$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\times(-2)+(-6)\times2=0$. 所以 $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$. 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle B$ 为直角.

(2) 因为 $\overrightarrow{AB}=(19-(-2),\ 4-(-3))=(21,\ 7)$，$\overrightarrow{AC}=(-1-(-2),\ -6-(-3))=(1,\ -3)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21\times1+7\times(-3)=0$. 所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle A$ 为直角.

(3) 因为 $\overrightarrow{BA}=(2-5,\ 5-2)=(-3,\ 3)$，$\overrightarrow{BC}=(10-5,\ 7-2)=(5,\ 5)$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3\times5+3\times5=0$. 所以 $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$. 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle B$ 为直角.

9. 设 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，由题意有

$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\x=\dfrac{y}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{6\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\\y=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

于是 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

10. 设与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}=(x,\ y)$，则

$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\4x+2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{e}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，或 $\boldsymbol{e}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

11. (1) 由已知，得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$. 所以 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EG}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\dfrac{1}{9}\boldsymbol{b}^2-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}^2$.

如果 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}|\boldsymbol{a}|$，那么 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=0$. 即 $EF\perp EG$，所以 EF 与 EG 互相垂直.

12. $\overrightarrow{OA}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 5-2)=(3,\ 3)$.

当 $t=1$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=(4,\ 5)$，所以点 P 的坐标为 $(4,\ 5)$；

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)+(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2})=(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2})$，所以点 P 的坐标为 $(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2})$；

当 $t=-2$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)-(6,\ 6)=(-5,\ -4)$，所以点 P 的坐标为 $(-5,\ -4)$；

当 $t=2$ 时，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)+(6,\ 6)=(7,\ 8)$，所以点 P 的坐标为 $(7,\ 8)$.

13. 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$. 由点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$，得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-3)$，$\overrightarrow{BP}=(x-4,\ y+3)$，所以 $(x-2,\ y-3)=\dfrac{3}{2}(x-4,\ y+3)$.

所以 $\begin{cases}2x-4=3x-12,\\2y-6=3y+9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\y=-15.\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(8,\ -15)$.

14. 因为 $\overrightarrow{AB}=(5-1,\ -2-0)=(4,\ -2)$，$\overrightarrow{BC}=(8-5,\ 4-(-2))=(3,\ 6)$，$\overrightarrow{DC}=(8-4,\ 4-6)=(4,\ -2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times3+(-2)\times6=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. 因此 $\angle B$ 为直角. 因此四边形 $ABCD$ 是矩形.

15. (1) $|\overrightarrow{OP}|=19$.

(2) 由平面向量基本定理知，对于任意向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中 x，y 都是唯一确定的，所以本题中向量坐标的规定合理.

16. 构造向量 $\boldsymbol{u}=(a, b)$，$\boldsymbol{v}=(c, d)$.

因为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$（其中 θ 为向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的夹角），所以 $ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\theta$. 因此 $(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\cos^2\theta\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

6.4 平面向量的应用

练习（第 39 页）

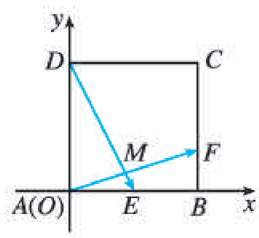
1. 在△ABC 中，设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，且 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$.

把上述两式两边分别平方，得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}^2$，$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$.

由于 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(180^\circ-C)=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos(180^\circ-B)$. 所以 $180^\circ-\angle B=180^\circ-\angle C$. 因此 $\angle B=\angle C$.

2. 如图，以 A 为原点，AB 所在的直线为 x 轴，AD 所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0, 0)$，$D(0, a)$，$E\left(\frac{a}{2}, 0\right)$，$F\left(a, \frac{a}{3}\right)$.



（第 2 题）

于是，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{a}{2}, -a\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(a, \frac{a}{3}\right)$，并且 $\angle EMF$ 的大小等于 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AF}$ 的夹角.

因为 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{6}$，$|\overrightarrow{DE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$，$|\overrightarrow{AF}|=\frac{\sqrt{10}}{3}a^2$，

所以 $\cos\angle EMF=\cos\theta=\dfrac{\frac{a^2}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a^2\times\frac{\sqrt{10}}{3}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

3. 因为 $AB=mAM$，$AC=nAN$，所以 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$.

注意到点 O 是 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AO}$，即 $\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$.

所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})+\frac{n}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON})$，整理得 $\left(1-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{OM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{ON}$. 又 M，O，N 三点共线，所以 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OM}$. 则有 $\left(1-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)\overrightarrow{AO}=\left(\frac{m}{2}+\frac{n\lambda}{2}\right)\overrightarrow{OM}$.

因为 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 不共线，所以 $1-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}=\frac{m}{2}+\frac{n\lambda}{2}=0$. 因此 $m+n=2$.

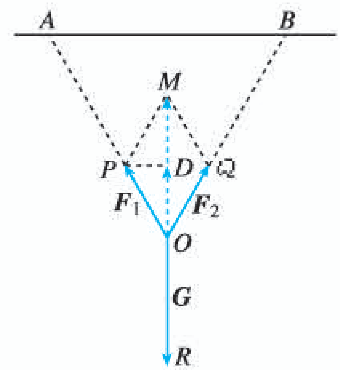
练习（第 41 页）

1. 因为 $\boldsymbol{F}=(4, -5)$，$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=(-13, -15)$，所以 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=23$ (J).

2. 如图，把 A，B 两点处的重物对点 O 的作用力看作两个拉力，分别设为 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，用 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 表示，又设点 O 受到的重力为 $\boldsymbol{G}$，用 $\overrightarrow{OR}$ 表示，则 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=4$ N，$|\boldsymbol{G}|=4\sqrt{3}$ N. 由于

整个系统处于平衡状态，所以 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{G}$.

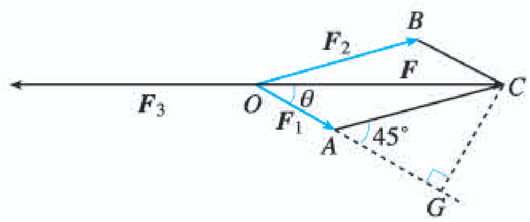
以 OP，OQ 为邻边作平行四边形 $OPMQ$，由 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$ 知，四边形 $OPMQ$ 为菱形. 过点 P 作 $PD\perp OM$，垂足为 D，则 $\overrightarrow{OM}=-\boldsymbol{G}$，$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{G}$.



（第 2 题）

设 $\angle AOB=2\theta$，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\boldsymbol{F}_1|}=\frac{\left|-\frac{1}{2}\boldsymbol{G}\right|}{|\boldsymbol{F}_1|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\theta=30^\circ$，因此 $\angle AOB=60^\circ$.

3. 如图，设 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力为 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 θ，用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}$. 过点 C 作 OA 的垂线，与 OA 的延长线相交于点 G.



（第 3 题）

在 Rt△ACG 中，$\angle CAG=\angle AOB=45^\circ$，$AC=|\boldsymbol{F}_2|$. 所以 $AG=CG=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ N.

在 Rt△ACG 中，$OG=|\boldsymbol{F}_1|+AG=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ N. 所以 $\tan\theta=\frac{CG}{OG}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 从而得 $\theta=30^\circ$. 所以 $|\boldsymbol{F}|=2CG=(\sqrt{3}+1)$ N. 于是 $|\boldsymbol{F}_3|=(\sqrt{3}+1)$ N，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 150°.

练习（第 44 页）

1. (1) $B\approx55.8^\circ$，$C\approx81.9^\circ$，$a\approx10.5$ cm；

(2) $c=\sqrt{19}$.

2. 根据余弦定理的推论，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2+(\sqrt{3}+1)^2-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{，所以 }A=45^\circ.$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+4-2}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{，所以 }B=30^\circ.$$

因此 $C=105^\circ$.

3. 因为 $\sin A=\frac{\sqrt{231}}{20}$，且 A 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{13}{20}$. 由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16$，所以 $a=4$. 所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{37}{40}$.

利用计算器可得 $C\approx22^\circ$.

练习（第 48 页）

1. (1) $a\approx18$ cm，$b\approx15$ cm，$C=75^\circ$；

(2) $A\approx65^\circ$，$C\approx85^\circ$，$c\approx22$ cm；$A\approx115^\circ$，$C\approx35^\circ$，$c\approx13$ cm.

2. (1) 由正弦定理，得 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $c<a$，所以 $C=30^\circ$，于是 $B=30^\circ$. 所以 $b=c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $B=180^\circ-A-C=60^\circ$. 由正弦定理，得 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{2\sin(45^\circ+30^\circ)}{\sin 60^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$.

3. 因为 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，于是 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{3}{5}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{6}{5}$.

又 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，于是 $\sin C=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 因此 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{5}$.

练习（第 51 页）

1. 在 $\triangle ABS$ 中，$AB=32.2\times 0.5=16.1$ n mile，$\angle ABS=115^\circ$，根据正弦定理，得 $\dfrac{AS}{\sin\angle ABS}=\dfrac{AB}{\sin(65^\circ-20^\circ)}$，所以 $AS=\dfrac{AB\times\sin\angle ABS}{\sin(65^\circ-20^\circ)}=16.1\cdot\sin 115^\circ\cdot\sqrt{2}$.

因此，S 到直线 AB 的距离 $d=AS\cdot\sin 20^\circ=16.1\cdot\sin 115^\circ\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 20^\circ\approx 7.06$ (n mile). 所以这艘船可以继续沿正北方向航行.

2. 在 $\triangle ABP$ 中，$\angle ABP=180^\circ-\gamma+\beta$，$\angle BPA=180^\circ-(\alpha-\beta)-\angle ABP=\gamma-\alpha$. 在 $\triangle ABP$ 中，根据正弦定理，得 $\dfrac{AP}{\sin\angle ABP}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}$，所以 $AP=\dfrac{a\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

所以，山高 $h=AP\sin\alpha=\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=180^\circ-75^\circ+32^\circ=137^\circ$. 根据余弦定理，得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC}\approx 113.15$.

根据正弦定理，得 $\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，于是 $\sin\angle CAB\approx 0.3255$. 所以 $\angle CAB\approx 19.0^\circ$，$75^\circ-\angle CAB\approx 56.0^\circ$. 所以，此船应该沿北偏东约 56.0° 的方向航行，需要航行大约 113.15 n mile.

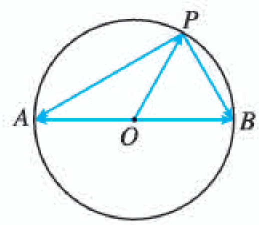
习题 6.4

1. D.（提示：已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即角 A 的平分线垂直于 BC，所以 $AB=AC$. 又 $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$. 因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形.）

2. 由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，知 O 为$\triangle ABC$ 的外心．由 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$，知 N 为$\triangle ABC$ 的重心．因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，所以（$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$）$\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，故$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{PB}$.

同理，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PA}$．所以 P 为$\triangle ABC$ 的垂心，因此选 C.

3. 如图，点 P 是$\odot O$ 上一点，连接 OP．设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}$，且$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=0$，因此$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，即$\angle APB=90°$.



（第 3 题）

4. (1) $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_B-\boldsymbol{s}_A=(-2,\ 7)$；

(2) $\boldsymbol{s}$ 在$\boldsymbol{s}_A$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{s}|\dfrac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{s}_A|}\dfrac{\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|}=\left(\dfrac{52}{25},\ \dfrac{39}{25}\right)$.

5. (1) 实际前进速度大小为$\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8$ (km/h)，沿与水流方向成 60°的方向前进.

(2) 实际前进的速度的大小为$\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}=4\sqrt{2}$ (km/h)．设此人游泳的方向和与水流垂直的方向的夹角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta\approx35°$，所以此人游泳的方向与水流方向的夹角约为 125°时，才能沿与水流垂直的方向前进.

6. (1) $A\approx49°$，$B\approx24°$，$c\approx62$ cm；

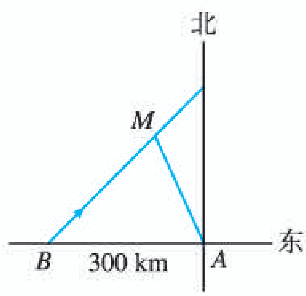
(2) $A\approx36°$，$B\approx40°$，$C\approx104°$.

7. (1) $a\approx38$ cm，$b\approx39$ cm，$B=80°$.

(2) $A\approx114°$，$B\approx43°$，$a\approx35$ cm；$A\approx20°$，$B\approx137°$，$a\approx13$ cm.

8. 在$\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=\pi-\alpha-\beta$．由正弦定理，得$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$．所以 $BC=\dfrac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$．因此，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=BC\tan\angle ACB=\dfrac{s\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

9. 如图，设台风中心最初在点 B，经 x h 由点 B 移动到点 M，则 $BA=300$ km，$\angle ABM=45°$，$BM=40x$ km．显然，当 $AM\perp BM$ 时，AM 最小．此时，$AM=BA\sin45°=150\sqrt{2}$ km<250 km．所以，气象台 A 所在地会受到台风的影响.



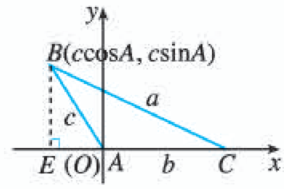
（第 9 题）

在$\triangle AMB$ 中，由余弦定理，得 $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos\angle ABM=1\ 600x^2-12\ 000\sqrt{2}x+90\ 000$．所以，当气象台 A 所在地受到台风影响时，$AM\leqslant250$ km，所以 $1\ 600x^2-12\ 000\sqrt{2}x+90\ 000\leqslant250^2$．化简，得 $16x^2-120\sqrt{2}x+275\leqslant0$，解得$\dfrac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}$．取近似值，得 $1.996\leqslant x\leqslant8.610$．因为 (8.610−1.996) h=6.614 h≈6 h 37 min，又 1.996 h≈2 h，所以大约经过 2 h，气象台 A 所在地将受到台风影响，持续时间约 6 h 37 min.

10. 如图，以$\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点，边 AC 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.

设 BC，CA，AB 的长分别为 a，b，c，则不论 A 是锐角、钝角还是直角，由三角函数的定

义知，点 B 的坐标始终为 $(c\cos A,\ c\sin A)$. 过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，则 $BE=c\sin A$. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times BE=\frac{1}{2}bc\sin A$. 同理可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ca\sin B$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$. 由此得任意三角形的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.



（第 10 题）

11. 设 $P(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$. $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$.

将 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 到 $\overrightarrow{AP}$，相当于沿逆时针方向旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 到 $\overrightarrow{AP}$，于是

$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi+2\sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi,\ \sqrt{2}\sin\frac{7}{4}\pi-2\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi)=(-1,\ -3)$.

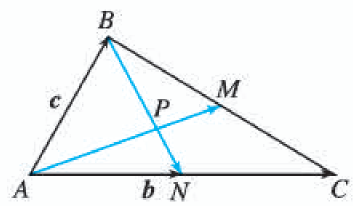
所以 $\begin{cases}x-1=-1,\\ y-2=-3,\end{cases}$ 解得 $x=0$，$y=-1$. 因此点 P 的坐标是 $(0,\ -1)$.

12. 如图，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 60°.

又设 M，N 分别是 BC，AC 的中点，

则 AM，BN 分别是△ABC 中 BC，AC 边上中线，并且

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$.



（第 12 题）

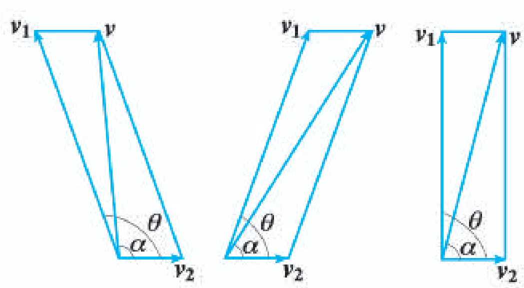
于是 $|\overrightarrow{AM}|^2=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right]^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{39}{4}$，所以 $|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$.

同理，$|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

又 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=3$，所以 $\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}|\,|\overrightarrow{BN}|}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

13. 设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ，合速度为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 α，行驶距离为 s km，时间为 t h，则 $\sin\alpha=\frac{|\boldsymbol{v}_1|\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{10\sin\theta}{|\boldsymbol{v}|}$，于是 $s=\frac{d}{\sin\alpha}=\frac{0.5}{\sin\alpha}=\frac{|\boldsymbol{v}|}{20\sin\theta}$ (km). 因此 $t=\frac{s}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{20\sin\theta}$ (h).

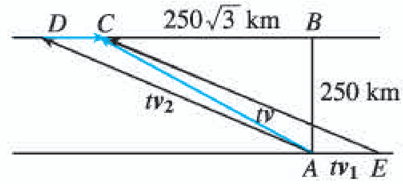
所以当 $\theta=90^\circ$，即船垂直于对岸行驶时，所用时间最短.



（第 13 题）

14. 设水流的速度，小货船的航行速度为 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，它们的合速度为 $\boldsymbol{v}$，航行时间为 t h. 如图，

$\overrightarrow{AE}=t\boldsymbol{v}_1$，$\overrightarrow{AD}=t\boldsymbol{v}_2$，$\overrightarrow{AC}=t\boldsymbol{v}$，此时小货船航程最短. 在 Rt△$ABC$ 中，$\tan\angle CAB=\dfrac{250\sqrt{3}}{250}=\sqrt{3}$，所以 $\angle CAB=60^\circ$，即合速度的方向是北偏西 60°.



(第 14 题)

由 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1$，得 $|\boldsymbol{v}_2|^2=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1|^2=\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{v}_1^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1$.

注意到 $\angle CAE=60^\circ+90^\circ=150^\circ$，即 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 150°，所以 $|\boldsymbol{v}_2|^2=36+12-2\times6\times2\sqrt{3}\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=84$，因此 $|\boldsymbol{v}_2|=2\sqrt{21}$ (km/h).

即小货船的航行速度的大小为 $2\sqrt{21}$ km/h.

15. 由余弦定理的推论，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $m_a^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+c^2-2\times\dfrac{a}{2}\times c\times\cos B=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+c^2-a\times c\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2[2(b^2+c^2)-a^2]$，故 $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

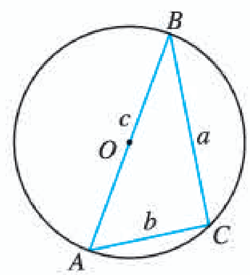
同理，$m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$，$m_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

16. 由余弦定理的推论，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$.

所以，左边 $=c(a\cos B-b\cos A)=c\left(a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=a^2-b^2=$ 右边.

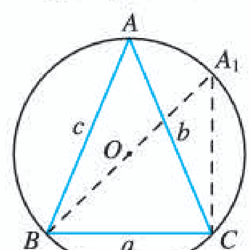
17. 如图 (1)，设△ABC 的外接圆的半径是 R.

当△ABC 是直角三角形，$\angle C=90^\circ$时，△ABC 的外接圆的圆心 O 在 Rt△ABC 的斜边 AB 上. 在 Rt△ABC 中，$\dfrac{BC}{AB}=\sin A$，$\dfrac{AC}{AB}=\sin B$，即 $\dfrac{a}{2R}=\sin A$，$\dfrac{b}{2R}=\sin B$，所以 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$. 又 $c=2R=2R\cdot\sin 90^\circ=2R\sin C$，所以 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.



(第 17 题 (1))

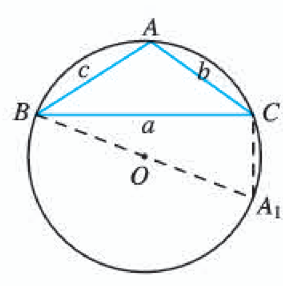
如图 (2)，当△ABC 是锐角三角形时，它的外接圆的圆心 O 在三角形内，作过点 O，B 的直径 A_1B，连接 A_1C，则△A_1BC 是直角三角形，$\angle A_1CB=90^\circ$，$\angle BAC=\angle BA_1C$. 在 Rt△A_1BC 中，$\dfrac{BC}{A_1B}=\sin\angle BA_1C$，即 $\dfrac{a}{2R}=\sin\angle BA_1C=\sin A$，所以 $a=2R\sin A$. 同理，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.



(第 17 题 (2))

如图 (3)，当△ABC 是钝角三角形时，不妨设 $\angle A$ 为钝角，它的外接圆的圆心 O 在△ABC 外. 作过点 O，B 的直径 A_1B，连接 A_1C. 则△A_1CB 是直角三角形，$\angle A_1CB=90^\circ$，$\angle BA_1C=180^\circ-\angle BAC$. 在 Rt△$A_1BC$ 中，$BC=2R\sin\angle BA_1C$，即 $a=2R\sin(180^\circ-\angle BAC)$，即 $a=2R\sin A$. 类似可证，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

综上，对任意三角形△ABC，如果它的外接圆半径等于 R，那么 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.



(第 17 题 (3))

18. 由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. 所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$. 代入三角形面积公式，得 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$.

19. 分析：由于R，T是对角线AC上的两点，要判断AR，RT，TC之间的关系，只需分别判断AR，RT，TC与AC的关系即可.

设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{r}$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

由$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AC}$共线，得$\boldsymbol{r}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$n\in\mathbf{R}$. 又$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，由$\overrightarrow{ER}$与$\overrightarrow{EB}$共线，得$\overrightarrow{ER}=m\overrightarrow{EB}=m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$，$m\in\mathbf{R}$.

因为$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER}$，所以$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$. 因此$n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$，即$(n-m)\boldsymbol{a}+\left(n+\frac{m-1}{2}\right)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

由于向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，要使上式为$\mathbf{0}$，必须$\begin{cases}n-m=0,\\ n+\frac{m-1}{2}=0,\end{cases}$解得$n=m=\frac{1}{3}$. 所以$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

同理$\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 于是$\overrightarrow{RT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 所以$AR=RT=TC$.

20. (1) 由余弦定理的推论，得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. 由同角三角函数之间的关系，得$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$，代入$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，得$S=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

由$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，得$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$，$\frac{1}{2}(c+a-b)=p-b$，$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$，所以$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(2) 三角形的面积S与三角形内切圆半径r之间有关系式$S=\frac{1}{2}\times 2p\times r=pr$. 所以$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

(3) 根据三角形面积公式$S=\frac{1}{2}\times a\times h_a$，所以$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

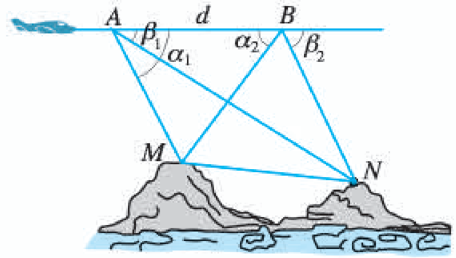
同理，$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

21. 解法1：如图，测量下列数据：由点A观测点M，N的俯角为α_1，β_1，由点B观测M，N的俯角为α_2，β_2，A，B的距离为d.

第一步，在$\triangle ABM$中，计算AM，由正弦定理，得$AM=\dfrac{d\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步，在$\triangle ABN$中，计算AN，由正弦定理，得$AN=\dfrac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步，在$\triangle AMN$中，计算MN，由余弦定理，得$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos(\alpha_1-\beta_1)}$.



（第 21 题）

解法 2：如图，测量下列数据：由点A观测点M，N的俯角为α_1，β_1，由点B观测点M，N的俯角为α_2，β_2，A，B的距离为d.

第一步，在$\triangle ABM$中，计算BM，由正弦定理，得$BM=\dfrac{d\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步，在$\triangle ABN$中，计算BN，由正弦定理，得$BN=\dfrac{d\sin\beta_1}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步，在$\triangle BMN$中，计算MN，由余弦定理，得$MN=\sqrt{BM^2+BN^2+2BM\cdot BN\cos(\beta_2+\alpha_2)}$.

22. (1) 根据正弦定理，条件式即为$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，也即

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

所以$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$.

整理，得$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即$\sin(A-30^\circ)=\dfrac{1}{2}$. 所以$A-30^\circ=30^\circ$，即$A=60^\circ$.

(2) 由$A=60^\circ$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，得$bc=4$.

由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$，所以$b+c=4$. 又$bc=4$，所以$b=c=2$.

23. 略.

复习参考题 6

1. (1) √；　(2) √；　(3) ×；

   (4) ×（提示：实数 0 与任意向量的数乘结果是零向量，而不是实数 0）.

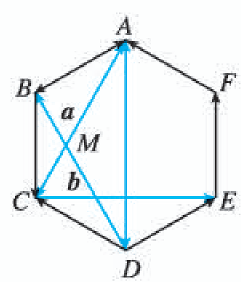
2. (1) D；　(2) B；　(3) D；　(4) C；

   (5) D（$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$）；

   (6) B（提示：两个不共线的向量能构成基底）.

3. 如图，设AC与BD相交于点M.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EF}=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



（第 3 题）

4. (1) $\overrightarrow{AB}=(8,\ -8)$，$|\overrightarrow{AB}|=8\sqrt{2}$；

(2) $\overrightarrow{OC}=(2,\ -16)$，$\overrightarrow{OD}=(-8,\ 8)$；

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=33$.

5. $D\ (-2,\ 0)$.

6. $\lambda=-1$，$\mu=0$.

7. $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=0$，$\cos C=\dfrac{4}{5}$.

8. $\lambda=-1$.

9. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$.

10. $\cos\theta=\dfrac{5}{8}$，$\cos\beta=\dfrac{19}{20}$.

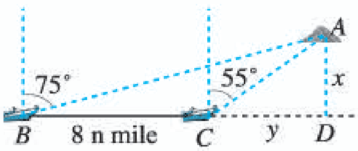
11. (1) $B\approx21°9'$，$C\approx38°51'$，$c\approx8.69$ cm.

(2) $B\approx41°49'$，$C\approx108°11'$，$c\approx11.40$ cm；$B\approx138°11'$，$C\approx11°49'$，$c\approx2.46$ cm.

(3) $c\approx28.02$ cm，$A\approx11°2'$，$B\approx38°58'$.

(4) $A\approx28°57'$，$B\approx46°34'$，$C\approx104°29'$.

12. 如图，从小岛 A 向海轮的航线作垂线段 AD. 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°-75°=15°$，$\angle ACB=90°+55°=145°$，$\angle BAC=180°-15°-145°=20°$.



（第 12 题）

由正弦定理，得 $AC=\dfrac{8\sin 15°}{\sin 20°}$. 又$\angle ACD=90°-55°=35°$，

所以 $AD=AC\sin 35°=\dfrac{8\sin 15°\sin 35°}{\sin 20°}\approx3.47$ (n mile).

因此，这艘海轮不改变航向继续前进，没有触礁的危险.

13. (1) A（提示：由已知得 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$）；

(2) D；(3) B；(4) C；(5) D；(6) C（提示：平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两的夹角相等，夹角可以是 0 或$\dfrac{2\pi}{3}$）.

14. (1) ①$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

②$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$.

因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

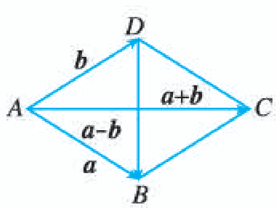
综合①②，得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，其几何意义是矩形的两条对角线相等.

(2) ①由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$.

所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

②由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$.

所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.



（第 14 题）

综合①②，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}| \Leftrightarrow \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{d}$.

几何意义是菱形的对角线互相垂直（如图所示）.

15. 如图，设 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$.

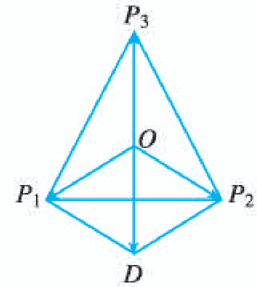
由 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$，得 $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OP_3}$.

于是 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP_3}|$.

而 $|\overrightarrow{P_1D}|=|\overrightarrow{OP_2}|$，所以 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{P_1D}|$. 于是 $\angle OP_1P_2=30°$.

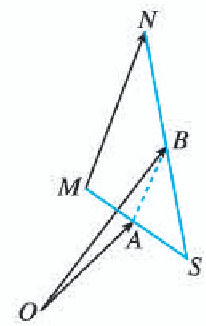
同理可得 $\angle OP_1P_3=30°$，所以 $\angle P_2P_1P_3=60°$.

同理可得 $\angle P_1P_3P_2=60°$，$\angle P_3P_2P_1=60°$. 所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 是等边三角形.



（第 15 题）

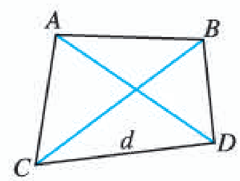
16. 如图，连接 AB. 由对称性，可知 AB 是 $\triangle SMN$ 的中位线，$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.



（第 16 题）

17. 设向东 1 km 的位移为向量 $\boldsymbol{m}$，向北 1 km 的位移为向量 $\boldsymbol{n}$，于是，$\overrightarrow{AB}=9\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{m}-3\sqrt{3}\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{CD}=8\boldsymbol{m}+8\sqrt{3}\boldsymbol{n}$. 所以，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=20\boldsymbol{m}+5\sqrt{3}\boldsymbol{n}$. 可得 $|\overrightarrow{AD}|=5\sqrt{19}$，$\tan\angle BAD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$\angle BAD \approx 23°$. 因此，这个人由 A 地到 D 地的位移的大小为 $5\sqrt{19}$ km，方向为北偏东约 67°.

18. 如图，C，D 是两个观察点，$CD=d$，当航行时间为 t_1 时，航船在 A 处，从 A 到 B 的航向航行，此时可测出 $\angle ACD$ 和 $\angle CDA$. 当航行时间为 t_2 时，航船已航行到 B 处，此时可测出 $\angle CDB$ 和 $\angle BCD$.

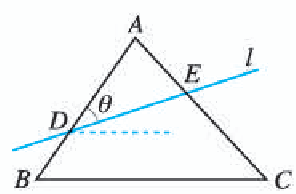


（第 18 题）

根据正弦定理，在 $\triangle ACD$ 中，可以计算 AC 的长；在 $\triangle BCD$ 中，可以计算 BC 的长. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD$，$AC$ 和 BC 已经算出，根据余弦定理，可以计算 AB 的长，即航船在此时间段内航行的距离，再求 $\angle CAB$，这样就可以计算航船的航向和速度.

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$.

设单位向量 $\boldsymbol{m}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{DE}|}\overrightarrow{DE}$. 于是 $\boldsymbol{m}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=0$，即 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. 过点 D 作 BC 的平行线，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|\cos(B-\theta)=a\cos(B-\theta)$. 而 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-\theta)=-c\cos\theta$，$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CA}|\cos(A+\theta)=b\cos(A+\theta)$，故 $-c\cos\theta+a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)=0$. 所以 $a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)=c\cos\theta$.



（第 19 题）

当 θ 为零角、直角、钝角时，$a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)=c\cos\theta$ 仍然成立.

Ⅳ 教学设计案例

6.2 平面向量的运算（第 1～4 课时，单元教学设计）

一、内容和内容解析

1. 内容

平面向量的加法运算、减法运算、数乘运算，以及它们的运算规则、几何意义和运算律.

本单元建议用 4 课时．第一课时：向量的加法；第二课时：向量的减法；第三课时：向量的数乘运算；第四课时：共线向量与向量数乘运算的关系.

2. 内容解析

本单元是在学生已经学习了平面向量概念的基础上，对平面向量这个新获得的数学研究对象，从运算的角度进一步展开研究．实数因为有了运算，威力无穷．类比实数的运算，借助向量的物理背景，可以定义向量的运算.

定义了平面向量的加法、减法和数乘运算（即向量的线性运算），不仅扩充了运算对象，使学生认识到运算的形式在不断发展，而且为向量的应用奠定了基础，运用向量运算可以把平面图形的性质转化为向量的运算体系．如向量的加法用几何语言来讲就是“三角形法则”或“平行四边形法则”，向量数乘是一类共线向量的几何特征的代数表示．共线向量定理也为本章的另一个核心内容——平面向量基本定理奠定了基础.

向量运算体系的建立也会让学生进一步体会数学内部，如代数、几何、三角函数等知识之间的内在联系．从向量运算的角度来看，向量具有较好的代数结构：向量及其加法运算、数乘运算构成向量空间．平面向量的运算对后续选择性必修课程中空间向量的学习具有启发性，学生可以类比地学习有关内容．本章也为学生进入大学学习线性代数奠定了基础.

本单元研究平面向量的运算时，借助物理中的有关模型或借助与数的运算的类比．如借助位移的合成引出向量加法的三角形法则；借助与数的运算的类比，定义向量的减法．因而本单元的内容蕴含了数形结合、类比、归纳、抽象等数学思想方法，是培养学生数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学学科核心素养的极好载体.

基于以上分析，可以确定本单元的教学重点：向量的加、减运算与数乘运算的规则及其几何意义，向量线性运算的运算律.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量加、减运算及运算规则，并理解其几何意义.

（2）借助实例，掌握平面向量数乘运算及运算规则，理解其几何意义．理解两个平面向量共线的含义.

（3）理解平面向量的线性运算的运算律和运算性质.

2. 目标解析

达成上述目标的标志是：

（1）学生能从物理中位移的合成、力的合成的具体实例中，抽象出向量的加法法则，能类比数的减法定义向量的减法，能画图表示两个向量加法、减法的结果. 能依据向量加法的定义，并借助其几何意义探讨向量加法的运算规则.

（2）学生能通过具体的一类共线向量的加法，类比数的乘法引出向量数乘运算的定义，借助有向线段表示向量数乘的几何意义. 学生能够理解：数乘向量的结果是与原向量共线的向量，反之，与一个非零向量共线的向量可以写成是一个实数与这个非零向量的积，并且这个实数是唯一的.

（3）学生能像理解实数的运算律一样，通过具体实例理解向量线性运算的运算律，理解向量线性运算的一些运算性质，体会其几何意义.

三、教学问题诊断分析

学生已经学习了数、式、集合、函数等运算，也初步体会到运算是代数研究的重要内容，积累了一些认识某个运算体系和借助运算解决问题的经验. 另外，学生已经具备了一定的观察问题、分析问题的学习习惯，以及能从简单的物理背景及生活背景中抽象出数学概念的能力，这些都是学生学习本单元的基础.

向量与学生在物理中学习的矢量非常类似，物理中有许多有关矢量的合成、分解、力做的功等实例，可以作为向量有关运算的模型，但这个从物理背景引出向量运算的过程对学生来说仍然存在困难. 特别是向量既有大小，也有方向，在向量的线性运算中，对于方向如何参与运算，学生没有直接的经验. 另外，在探究向量的运算性质时，与实数的运算性质进行了类比. 类比数的运算，学生能够想到向量的线性运算可能会有一些类似的运算性质. 虽然名称相同，但运算的原理、方法、规律都有较大的区别，学生很容易带着实数运算的思维定势来理解平面向量运算，导致学生对向量的运算偏于形式化记忆，对于平面向量的线性运算的概念、算理的理解不深刻. 再有，向量的加法的定义是用作图语言来刻画的，对直接通过作图定义向量运算这种处理方法，学生是第一次接触，在理解上会有一定的困难.

向量的每一种运算都具有二重性，既表现为过程操作，又表现为一种对象、结构. 这对学生整体理解每一种向量的运算也带来一定的困难. 平面向量的加法具有丰富的物理背景，平面向量的线性运算蕴含着特定的几何意义，学生们原有的物理学习、几何学习的差异性也会直接影响他们对向量线性运算的学习.

基于上述分析，可以得到本单元的教学难点：（1）向量加法概念的形成过程，对向量加法法则和减法定义的理解，特别是对向量减法定义的理解；（2）对共线向量与向量数乘运算的关系的理解；（3）将实际问题转化为向量问题.

教学中，应借助位移的合成、力的合成这些物理模型定义平面向量的加法；与数的运算类比，讨论平面向量的减法和向量数乘运算；并使学生体会向量运算具有丰富的物理背景和几何意义，这些是突破向量运算难点的支撑条件.

四、教学支持条件分析

为了加强学生对向量加法、减法、向量数乘运算的直观感受，可以利用信息技术工具，改变 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小或方向，作出它们的和或差；利用信息技术工具改变实数 λ 的值，作图表示 $\lambda\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$

$\neq \mathbf{0}$)，帮助学生理解共线向量的含义.

五、教学过程设计

平面向量线性运算的学习，应在帮助学生完整地认识运算研究的脉络、落实数学运算素养的高观点下进行教学，按“情境—明确运算对象—定义运算法则—讨论运算性质—运算的简单应用”的过程展开.

第一课时

引言：我们知道，实数有了运算，威力无穷. 向量是否能像数一样进行运算呢？人们从向量的物理背景和数的运算中得到启发，引进了向量的运算. 本节我们就来研究平面向量的运算，探索其运算性质，体会向量运算的作用. 下面首先学习向量的加法.

设计意图：用具有较大的开放性和统摄性的问题开场，有利于帮助学生站在数学知识的整体高度认识问题、思考问题，并知道探究向量的运算从哪里开始，要到哪里去.

（一）创设问题情境，明确研究对象

问题 1：物理中的位移、力都是向量，它们可以合成，这给我们以向量加法运算的启示：从位移的合成、力的合成中引入向量的加法运算. 我们先来看一个与位移有关的问题：

如图 1，某质点 M 从点 A 经过点 B 到点 C，质点 M 的位移如何表示？

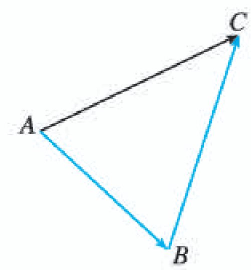


图 1

师生活动：学生回忆位移的合成的有关知识，通过观察、操作、思考，发现质点 M 的两次位移 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 的结果与它从点 A 直接到点 C 的位移 $\overrightarrow{AC}$ 的结果相同，体会位移的合成是把两个向量（矢量）“合”在一起了. 教师借机启发：这容易让我们想到向量可以像这样作加法运算. 这就点明了本节课首先研究向量的加法运算.

设计意图：启发学生由位移的合成引入向量的加法.

（二）借助物理背景，定义向量的加法

问题 2：由位移的合成，你认为可以如何进行两个向量的加法运算？

师生活动：学生借助位移的合成引入向量与向量之间的一种运算——向量的加法运算. 教师要关注全体学生对这个问题的理解，鼓励学生独立思考，进行交流. 最后，教师给出向量加法的定义及向量加法的三角形法则. 对于向量加法的三角形法则，教师要关注学生对它的意义的理解，强调向量的和的大小和方向.

设计意图：由位移的合成引入向量加法的定义及其三角形法则.

（三）多角度思考，优化认知

问题 3：对于矢量的合成，物理学中还有其他方法吗？请看下面的问题：

如图 2，在光滑的平面上，一个物体同时受到两个外力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用，你能作出这个物体所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 吗？由此你能给出向量加法的另一个法则吗？

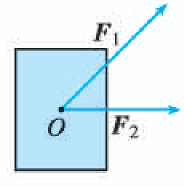


图 2

师生活动：学生独立思考、动手操作后，小组交流，最后师生由力的合成引入向量加法的平行四边形法则.

设计意图：继续挖掘学生头脑中的原有认知——物理中力的合成的实例，不

仅帮助学生加深理解向量加法的定义，而且可以借助力的合成的平行四边形法则，引入向量加法的平行四边形法则.

（四）辨析两种加法法则的一致性

问题 4：向量加法的平行四边形法则与三角形法则一致吗？为什么？

师生活动：学生画图探索，学生代表展示并发表见解，师生共同归纳结论：向量加法的三角形法则和平行四边形法则本质上是一致的，解决具体的向量加法问题时，可以有选择地使用.

设计意图：通过该问题的探讨，进一步帮助学生理解向量加法的定义和两个加法法则，明确两个法则在本质上的一致性.

（五）明确向量加法的作图方法，理解其几何意义

例 1　如图 3，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

师生活动：学生首先独立尝试解决问题，再进行小组交流. 教师让学生代表展示向量加法的两个法则的作法. 必要时，师生一起通过信息技术工具，改变向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小和方向，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 教师要强调向量的和的方向，帮助学生明确向量加法的几何意义.

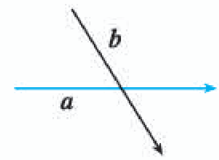


图 3

追问：在向量加法的作图中，你认为用三角形法则作图应注意什么？用平行四边形法则作图呢？

师生活动：学生思考回答，教师概括：在向量加法作图时，向量起点可以在平面上任意选取，用向量的三角形法则作图时，两个向量首尾相连；而用平行四边形法则作图时应强调向量的起点放在一起；当两个向量共线时，采用三角形法则作两个向量的和.

设计意图：与数的加法相比，向量的加法复杂了许多. 为此，设置本例题明确如何作出两个向量的和，进一步帮助学生理解向量加法定义、几何意义，强化学生的作图意识，帮助学生掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则.

（六）联系对比，巩固新知

问题 5：如图 4，(1) 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，它们的加法与数的加法有什么关系？你能作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 吗？

(2) 结合例 1 探索 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 之间的关系.

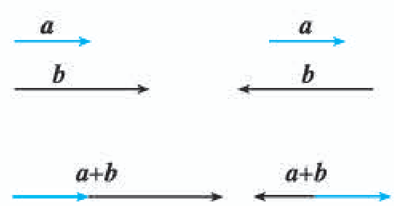


图 4

师生活动：(1) 学生自主探究，可以类比数的加法，也可以看成是三角形法则的特例，当两个向量共线时也符合“首尾相接，首尾连”的三角形法则. 必要时可以借助信息技术工具演示作图的过程，使学生有更直观的认识.

(2) 学生思考、动手操作. 由例 1，借助三角形的性质（任意两边的和大于第三边）容易得到，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立. 进一步发现，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 从而有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时，等号成立.

设计意图：(1) 借助特例，研究向量加法与实数加法的联系与区别，帮助学生认识共线向量的加法也适合向量加法的三角形法则，这样，更容易与数的加法进行类比，加强数形结合意识的

培养.（2）让学生借助数形结合发现向量的和的长度与原向量长度和的关系：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时等号成立.

问题 6：请你用文字语言、符号语言、图形语言分别描述如何求两个向量的和.

师生活动：学生思考、交流. 教师组织多个学生用三种数学语言表述如何求向量的加法，教师关注学生对向量加法的理解，帮助学生完整准确地理解向量的加法法则.

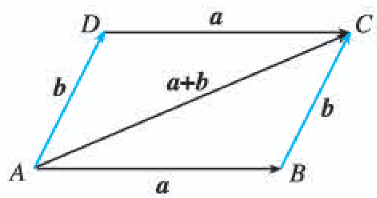
设计意图：促进学生多角度理解向量加法定义，教会学生理解一个数学概念的一般方法.

（七）从定义出发，研究向量加法的运算律

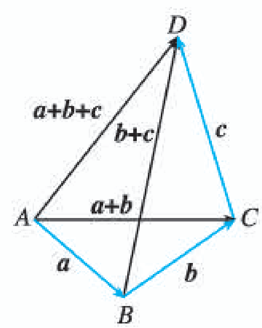
问题 7：从代数运算的角度理解，向量的加法是一种新的运算，定义了一种新的运算，自然要研究其运算律的问题. 类比数的加法的运算律，你认为向量的加法是否也有运算律？先猜测有哪些运算律，并说明理由.

师生活动：学生自主探究，猜想并互相交流. 师生借助图 5（1）（2），分别证明向量加法的交换律和结合律.

对于向量加法的结合律的证明，学生可能存在一定困难，需要教师引导学生通过作图证明，并理解作图方法的多样性. 此处可以借助信息技术工具，演示作图的两个路径（实际上是质点运动选择的路径不同，异曲同工而已）.



（1）



（2）

图 5

设计意图：使学生明确研究向量加法运算律的途径，并寻找结论成立的依据，获得研究运算律的经验，提升逻辑推理素养.

（八）向量加法的简单应用

例 2　长江两岸之间没有大桥的地方，常常通过轮渡进行运输. 如图 6，一艘船从长江南岸 A 地出发，垂直于对岸航行，航行的速度的大小为 15 km/h，同时江水的速度为向东 6 km/h.

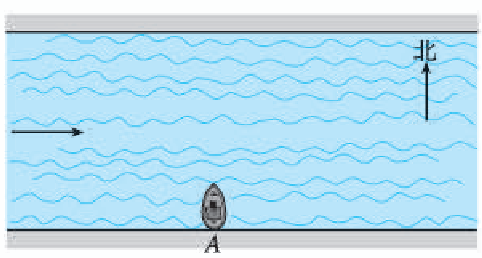


图 6

（1）用向量表示江水速度、船速以及船实际航行的速度；

（2）求船实际航行的速度的大小（保留小数点后一位）与方向（用与江水速度间的夹角表

示，精确到 1°).

师生活动：学生作出几何图形，将问题转化为向量加法问题，并依据向量加法定义及平面几何知识求解，给出解答过程和结果. 由于这是首个实际问题转化为向量问题，对有困难的学生，教师可以引导学生阅读题意，思考问题中有哪些数据，能否画出图形，与所学的哪些向量知识有联系，等等，并适当规范学生的书写.

设计意图：体现向量加法在实际生活中的应用，要求学生能够把它转化为向量的加法运算，体会其中应解决的问题是确定向量的大小及方向，发展学生解决实际问题的能力.

（九）课堂练习

教科书第 10 页练习第 1~5 题.

（十）目标检测设计

1. 下列结论一定正确的是（　　）.

(A) 在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$

(B) 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小为 2，向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小为 3，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的大小为 5

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$

(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

设计意图：考查学生对平面向量加法法则、几何意义的掌握.

2. 某人在静水中游泳，速度的大小为 $3\sqrt{3}$ km/h，水流的速度的大小为 9 km/h. 他沿着垂直于对岸的方向前进，那么他实际前进的方向与河岸的夹角为________度.

设计意图：考查学生将实际问题抽象为向量加法的能力.

3. 一汽船向正西方向航行 5 km，又向正南方向航行 12 km，求汽船两次位移的合位移的大小和方向（精确到 1°).

设计意图：考查学生将实际问题抽象为向量问题，并运用向量加法解决简单的实际问题的能力.

第二课时

引言：我们知道，数的运算中，减法是加法的逆运算，其运算法则是“减去一个数等于加上这个数的相反数”. 我们能否类似地定义向量的减法呢？

（一）创设问题，引入向量减法

问题 1：(1) 类比实数 x 的相反数是 $-x$，对于向量 $\boldsymbol{a}$，你能定义“相反向量” $-\boldsymbol{a}$ 吗？它有哪些性质？

(2) 你认为向量的减法该怎样定义？

师生活动：教师引导学生类比相反数定义相反向量，并得出相反向量的性质；进而引导学生联想、类比数的减法的定义，积极思考、尝试定义向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

设计意图：(1) 类比实数 x 的相反数是 $-x$，定义相反向量，为帮助学生探讨向量的减法法则进行准备. (2) 引导学生类比数的减法定义向量的减法.

（二）动手实践，理解向量减法的几何意义

问题 2：已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何意义是什么？

师生活动：学生自己画图、探索、小组交流，教师组织学生代表展示，讲解．如图 7，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{b}$，连接 AB，由向量减法的定义，知

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}.$$

在四边形 $OCAB$ 中，$OB \perp\!\!\!\!= CA$，所以 $OCAB$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

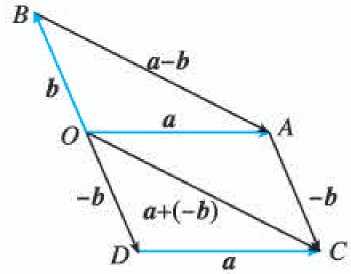


图 7

最后师生共同概括向量减法的作图步骤：

如图 8，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．也就是，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量．

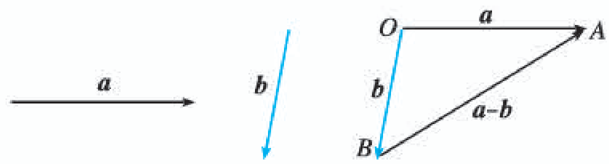


图 8

在此过程中教师需要强调向量减法的结果的方向，明确向量减法的几何意义．

追问：(1) 在图 8 中，如果从 $\boldsymbol{a}$ 的终点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点作向量，那么所得向量是什么？

(2) 如果改变图 8 中向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，使 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，怎样作出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 呢？

师生活动：(1) 学生根据向量减法的几何意义，自己画图；(2) 学生自己画图、探索，小组交流，教师组织学生代表展示、讲解．

设计意图：让学生明确向量减法的几何意义．

（三）巩固向量的减法

例 1　如图 9，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$．

师生活动：学生尝试画图，教师引导学生明确如何作出两个向量的差．

设计意图：理解向量减法的几何意义，掌握作两个向量的差的基本方法．

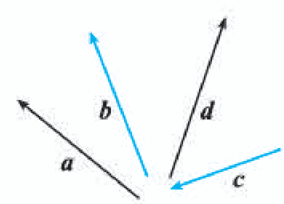


图 9

例 2　如图 10，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，你能用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$ 吗？

师生活动：学生探求向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的关系，进而用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$．教师关注学生能否借助向量的加、减运算，用已知向量表示其他向量．

设计意图：让学生借助向量的加、减运算，用已知向量表示其他向量．

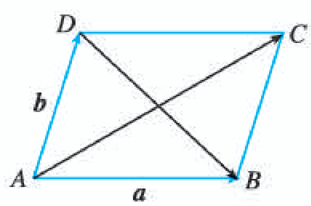


图 10

（四）课堂练习

教科书第 12～13 页练习第 1，2，3 题．

（五）目标检测设计

1．下列结论一定正确的是（　　）．

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

(B) $-(-\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$

(C) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

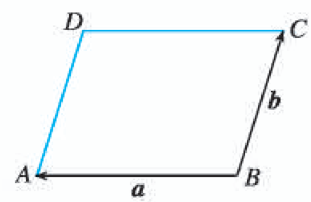
(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

设计意图：考查学生对相反向量、向量减法的掌握.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$.

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________；

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________.



（第 2 题）

设计意图：考查学生对向量加、减法运算的掌握.

3. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$；

(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$.

设计意图：考查学生对向量加、减混合运算的掌握.

第三课时

引言：我们知道数是可以做乘法的，平面向量既有大小、又有方向，平面向量可以做乘法吗？它和实数可以做乘法吗？

（一）创设问题，引入新知

问题 1：已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 和 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$，它们的长度和方向是怎样的？

师生活动：教师组织学生画图并尝试计算，从形与数两个角度表达自己的计算结果. 教师还可以组织学生举一些类似的例子，并探究结论. 如可以借助信息技术工具作出 $4\boldsymbol{a}$ 等向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 进行比较，发现它们之间的关系. 让学生初步体会对 λ 的不同值，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之间的关系，体会这种向量运算所蕴含的数与形的含义. 最后教师引导学生类比数的乘法，给出向量数乘运算的定义.

设计意图：类比数的加法运算，用向量加法运算法则，计算 3 个向量 $\boldsymbol{a}$（或 $-\boldsymbol{a}$）的和，用简约的方式表示计算的结果，进而给出向量数乘运算的定义，发展学生的运算素养.

（二）巩固向量数乘运算的概念

问题 2：如果把非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度伸长到原来的 3.5 倍，方向不变得到向量 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 该如何表示？向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之间的关系怎样？

师生活动：教师组织学生自己画图，分析、表达结果：$\boldsymbol{b}=3.5\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$\boldsymbol{b}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 3.5 倍.

设计意图：通过用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示结果，探讨结果的长度与方向，通过具体例子巩固向量数乘运算的定义.

（三）探究向量数乘运算的运算律

问题 3：我们知道实数的乘法有运算律，那么，向量数乘运算有哪些运算律呢？请你试着写出来并加以验证.

师生活动：学生类比数的运算律提出向量数乘运算的运算律. 再借助向量数乘运算的定义，

自主验证向量数乘运算的三个运算律．对于有困难的学生可以小组间交流，教师指导．

另外，在教师引导下，将向量的加法、减法和数乘向量统称为向量的线性运算，即定义线性运算．要向学生说明，有了向量的线性运算，平面中的点、线段（直线）就可以得到向量表示，这就为向量法解决几何问题奠定了基础．关于向量的线性运算的运算性质，也要让学生加以了解．

设计意图：学生类比数的运算律自行猜想出向量数乘运算的运算律，并借助向量数乘运算的定义及其几何意义加以验证．帮助学生积累从运算的定义出发，发现数学运算的一些性质的学习经验．

（四）巩固新知

例 1 计算：

（1）$(-3)\times 4\boldsymbol{a}$；（2）$3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$；（3）$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

师生活动：教师引导学生步步有据地进行运算，给出运算过程和结果．必要时教师可以提醒学生，虽然向量的数乘运算及运算律与数的运算及运算律非常类似，但也要注意区别，运算的结果是向量而不是数量．

设计意图：帮助学生巩固向量数乘运算的定义及运用向量数乘的运算律进行计算，理解其中的算理，发展学生的数学运算素养．

例 2 如图 11，$\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$．

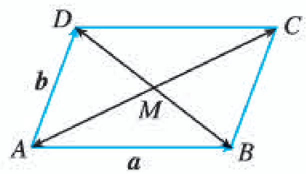


图 11

师生活动：（1）让学生自主尝试本问题的解决，体会化归的思想方法；（2）教师适时渗透“给定平面内任意两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，能否用它们表示该平面内的其他向量”的问题，培养问题意识，为平面向量基本定理的教学埋下伏笔．

设计意图：巩固向量加法、减法及向量数乘运算的定义，会用两个向量表示其他向量，渗透用向量研究几何问题的意识，为后继学习平面向量基本定理奠定基础．

（五）课堂练习

教科书第 15 页练习第 1，2，3 题．

（六）目标检测设计

1. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，计算下列各式：

（1）$-\dfrac{1}{2}\times 6\boldsymbol{a}$；（2）$3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b})$．

设计意图：考查学生对向量数乘运算的掌握．

2. 把下列各小题中的向量 $\boldsymbol{b}$ 表示为实数与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积：

（1）$\boldsymbol{a}=\dfrac{2}{5}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{9}{5}\boldsymbol{e}$；（2）$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}$．

设计意图：考查学生对向量数乘运算的掌握．

第四课时

（一）创设情境，探讨共线向量定理

问题 1：向量数乘运算具有明显的几何意义，根据向量数乘运算，你能发现向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda$ 是实数）之间的位置关系吗？具体地，对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及实数 λ，

（1）如果 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq 0$），向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线？

（2）如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立吗？

师生活动：在学生独立思考的基础上，小组交流，从正反两个方面讨论共线向量的数乘运算表达．教师要渗透：（1）引导学生概括共线向量定理，并关注学生对定理中有关充要条件以及对 λ 的唯一性的理解；（2）可以借助信息技术工具加以演示，让学生直观感知共线向量定理．最后师生共同概括出共线向量定理：

向量 $\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是：存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$．

设计意图：让学生通过探讨共线向量与向量数乘运算的关系，并得出共线向量定理．

（二）综合运用知识

例 1　如图 12，已知任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，试作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$．猜想 A，B，C 三点之间的位置关系，并证明你的猜想．

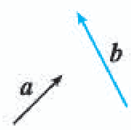


图 12

师生活动：学生自主尝试，作图、观察，得到猜想：A，B，C 三点共线．教师可以运用信息技术工具辅助，让学生充分直观感知猜想的合理性．然后，教师引导学生转换命题，体会判断三点之间的位置关系，主要是看这三点是否共线．由于两点确定一条直线，如果能够判断第三点在这条直线上，那么就可以判断这三点共线．本题中，应用向量知识判断 A，B，C 三点是否共线，可以通过判断向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 是否共线，即考虑是否存在 λ，使 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 成立．最后，师生共同给出证明．

设计意图：通过学生操作、观察，掌握利用向量共线判断三点共线的方法．提高学生综合运用向量知识解决问题的能力．发展直观想象和逻辑推理素养．

例 2　已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，向量 $\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 t 的值．

师生活动：教师引导学生阅读题目，明晰题目的条件和要求的结论．学生先自主探究，然后交流解题思路，在学生充分讨论的基础上，教师适时介入，并概要地说明解决问题的关键：判断两个向量共线，首先要考虑其中一个向量不为零向量，可以采取反证法说明向量 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$ 不为零向量（否则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线），就可以运用共线向量定理建立两个向量之间的关系，进而把这个关系转化成方程或方程组，使问题获得解决．教学中应引导学生体会：（1）数学解题的过程本来就是依据数学的概念、法则、定理、公式等进行命题转化的过程；（2）方程（组）思想是求解未知量的极好武器．

设计意图：让学生熟练运用共线向量定理，体会知识间的联系．

（三）课堂练习

教科书第 16 页练习第 1，2，3 题．

（四）单元小结

教师引导学生复习本单元的学习内容，并回答下列问题：

(1) 概述本单元中平面向量的加法、减法、数乘运算（向量的线性运算）是如何定义的.

(2) 结合实例分别说明向量加法、减法和数乘运算的几何意义，共线向量与向量数乘运算的关系.

(3) 说明为什么要研究平面向量加法、向量数乘运算的运算律，这些运算律的几何意义是什么？

(4) 概述平面向量线性运算的简单应用.

师生活动：提出问题后，先让学生思考并作适当交流，师生辨析完善. 在这个过程中，教师不仅要关注学生对基本知识的表达，更要关注学生是否善于借助举例表达对相关知识的理解，是否能察觉知识发生发展的过程中重要的数学思想方法，是否善于概括总结自己的学习收获，发展学生的数学素养.

设计意图：(1) 让学生回顾借助物理背景，类比数的运算，定义向量加法、减法和向量数乘运算的过程.

(2) 让学生体会向量集几何、代数于一身的两重性，给研究数学问题带来极大的方便，如向量数乘运算直接刻画了一类平行向量的关系.

(3) 让学生体会运算律为进行向量的综合运算，进而解决一些相关的问题带来很大方便.

(4) 明确向量线性运算的背景、法则、几何意义、运算律的基础上，让学生梳理向量线性运算在解决简单的几何问题、物理问题等方面的运用，初步体会向量运算的作用.

(五)布置作业

教科书习题 6.2 第 1～9，14 题.

（六）目标检测设计

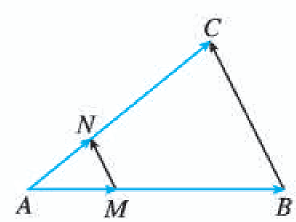
1. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，若 $2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1-t\boldsymbol{e}_2$ 共线，求实数 t 的值.

设计意图：考查学生将向量共线问题转化为方程组问题求解的能力.

2. 已知 $\overrightarrow{AB}=6\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线.

设计意图：考查学生运用向量数乘运算和共线向量定理进行推理的能力.

3. 如图，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$，且 $\overrightarrow{MN}=\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$ 成立，则 $\lambda=($　　$)$.



（第 3 题）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $-\frac{1}{3}$

设计意图：考查学生运用向量线性运算求解的能力.

6.3.1　平面向量基本定理（1 课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

平面向量基本定理.

2. 内容解析

本节内容是继平面向量的概念、运算之后的又一重点内容，它是共线向量定理的推广，是平面向量正交分解的基础，是将向量运算转化为代数（坐标）运算的基础，具有承前启后的作用.

平面向量基本定理揭示了平面向量之间的基本关系，是利用向量解决问题的基本手段，有着广泛的应用. 由平面向量基本定理，可以进一步实现向量的坐标表示，即实现向量的代数表示，从而实现向量运算完全代数化，进而体现向量的工具作用.

平面向量基本定理中蕴含着丰富的数学思想，如转化思想、数形结合思想等. 本节课的学习过程，能很好地体现数学地思考问题的方法：以简驭繁，实现将无限多个平面向量有序表达的目的，有助于培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养.

基于以上分析，可以确定本节课的教学重点：平面向量基本定理，定理的发现和证明过程.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）理解平面向量基本定理及其意义；

（2）会运用平面向量基本定理解决简单平面几何问题.

2. 目标解析

达成上述目标的标志是：

（1）经历平面向量基本定理的探索过程，体会由力的分解到向量的分解的过程，感悟数学抽象、逻辑推理等数学思想的作用；通过证明平面向量基本定理理解定理，体会定理的重要性及其意义，增强对数学思维方法的理解.

（2）通过选择基底表示平面内的一些向量，解决一些平面几何问题，体会向量法在解决平面几何问题中的作用和基本步骤.

三、教学问题诊断分析

虽然本节课之前学生已经学习了平面向量的概念、平面向量的线性运算、数量积，但学生对向量之间关系的认识还只是停留在“一维”层面，包括“相等向量”“相反向量”“共线向量”等，而平面向量基本定理揭示的是“二维”层面的平面向量之间的关系，要实现这种认识层级的跃迁，对学生有一定难度. 另外，如果说由力的分解的物理模型想到向量的分解是第一次抽象，那么，由向量的分解想到任意一个向量都可以用一对不共线的向量，经过线性运算加以表示是第二次抽象，也是认识上的一种飞跃，这都会给学生造成认知上的困难. 再有，平面向量基本定理中的“不共线”“任一”“有且只有”等数学专用语对一些学生会构成理解障碍. 由此可以确定本节课的教学难点是平面向量基本定理的发现过程及对定理的证明.

平面向量基本定理的发现过程的教学，对学生数学抽象、逻辑推理等数学学科核心素养的培养至关重要. 为克服以上教学难点，教学中不要简单地告诉定理，再加以证明. 而应注意引导学生积极参与定理形成的探索过程，通过多举实例，如从力的分解等学生熟悉的背景，带领学生去归纳、发现定理；利用信息技术工具等具体形象的教学手段进行直观阐释、辨析，帮助学生理解定理. 引导学生从事观察、思考、归纳、类比、交流等数学活动，经历从具体到抽象，从特殊到一般的思维过程，并从中反思定理获得过程中数学思考的方式与方法.

四、教学支持条件分析

在平面向量基本定理的发现过程中，可以利用信息技术工具展示几组力的分解的例子，在此

基础上，固定基底，改变要表示的向量，看向量表示的变化与表示的唯一性，帮助学生理解定理.

五、教学过程设计

（一）创设情境，明确问题

引言：向量数乘运算刻画了共线向量间的关系，也反映了数与形的结合. 共线向量定理给我们研究向量共线带来了极大的方便. 那么，共线向量定理能不能推广到平面上呢？也就是说，平面内任一向量是否可以由同一平面内的两个不共线向量表示呢？

在物理中，我们知道，已知两个力可以求出它们的合力；反过来，一个力可以分解为两个力，这种分解通常不是唯一的. 事实上，这种力的分解，就反映具体的平面向量间的关系. 本节课，我们就从力的分解的例子出发，研究和刻画平面向量之间的关系.

问题 1：如图 1，我们可以通过作平行四边形，将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为多组大小、方向不同的分力. 受力的分解的启发，我们能否通过作平行四边形，将向量 $\boldsymbol{a}$ 分解为两个向量，使向量 $\boldsymbol{a}$ 是这两个向量的和呢？

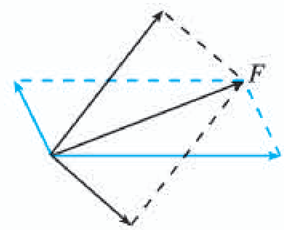


图 1

师生活动：学生回忆、观察，教师启发学生以力的分解为背景引出向量的分解.

设计意图：从学生熟悉的物理背景引入向量的分解，激发学生学习的主动性.

（二）动手操作，探究新知

问题 2：如图 2，设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}$ 是这一平面内与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线的向量. 在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$.

（1）将 $\boldsymbol{a}$ 按 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向分解，你有什么发现？

（2）如果向量 $\boldsymbol{a}$ 是这一平面内与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 中的某一个向量共线的非零向量，你能用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 吗？$\boldsymbol{a}$ 是零向量呢？

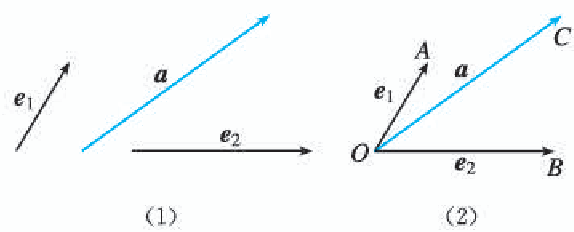


图 2

师生活动：学生观察、思考、操作、尝试、探究，教师巡视、指导. 请学生代表展示交流：

（1）因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 都不共线，过点 C 分别作与 OA，OB 平行的直线，结合向量的加法与数乘运算可知，存在实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

（2）若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线，存在 λ_1，λ_2，且 $\lambda_2=0$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$；

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，存在 λ_1，λ_2，且 $\lambda_1=0$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$；

特别地，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，存在 $\lambda_1=\lambda_2=0$，使 $\boldsymbol{0}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

综上所述，当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线时，平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都能用向量 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 表示.

教学时，教师可以借助信息技术工具演示上述讨论的过程，让学生有直观的认识. 另外，引导学生讨论：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共线时，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 也共线，则可以用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\boldsymbol{a}$（符合共线向量定理）；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则不能用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 $\boldsymbol{a}$. 教师要关注学生思维的缜密性，在学

生充分交流的基础上，完善学生的思维，明确给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以用形如 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的向量来表示.

设计意图：让学生思考、操作、交流，探究平面上向量的关系.

追问（1）：给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以用形如 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的向量来表示，这种表示形式是唯一的吗？

师生活动：学生思考、交流. 如果学生有困难，教师可引导：假设这种表示形式不唯一，即 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示成 $\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式，那么 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$. 由向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，设法证明 $\lambda_1=\mu_1$，$\lambda_2=\mu_2$. 在教师引导下，让学生尝试证明. 最后师生归纳总结得出平面向量基本定理.

追问（2）：由物理中力的分解引出向量的分解，类比共线向量基本定理，得到了平面向量基本定理. 请你思考一下，为什么把这个定理冠以“基本”二字？谈谈你的体会.

师生活动：学生独立思考，相互交流，教师引导：一般地，越是基本的东西，统领性越强，运用越广泛，大家可以从定理中“任意性”和“唯一性”等角度思考定理的“基本”性特点. 最后师生共同认识平面向量基本定理的本质：在平面内，一旦基底确定，则每个向量的分解都是唯一的. 从表面上看，定理的本质就是向量的分解. 换个角度来看，一个确定的基底能构造出平面内的所有向量以至于整个平面，这才是定理的本质. 这样，所有的向量都可以由同一个基底联系在一起，使得问题的研究更加简便. 而前面所学向量的线性运算均蕴含其中，所以平面向量基本定理是向量走向代数化的基本出发点，这也是称其为基本定理的原因所在.

设计意图：通过设置几个逐步递进的问题串，使研究的问题越来越明确，让学生经历发现平面向量基本定理、证明定理的全过程，并使学生从中感悟联想、类比、抽象、概括等重要的数学学习方式，体会数学抽象、逻辑推理对数学知识产生发展的重要作用. 揭示平面向量基本定理的本质及“基本”二字的含义.

（三）巩固新知

例 1 如图 3，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t\in\mathbf{R}$），用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

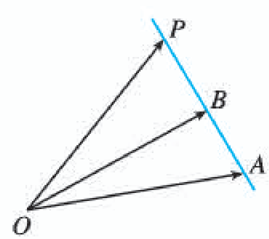


图 3

师生活动：学生尝试独立完成，教师进行个别指导，学生都完成后进行反馈交流，教师给出规范的解答. 指导学生将 $\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\}$ 看成基底，根据向量的有关运算将相关向量用基底表示，这是解决本题的关键环节.

追问：观察 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，你有什么发现？

师生活动：教师引导学生结合图形直观，结合结论的代数特征，得到进一步的结论：实际上，这也是证明三点共线的一种方法，即如果 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则 P，A，B 三点共线的充要条件为 $m+n=1$.（不对全体学生要求会证明）

设计意图：本题是教科书中的例题，通过例题教学，巩固平面向量基本定理.

例 2 如图 4，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$CD=\dfrac{1}{2}AB$，用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

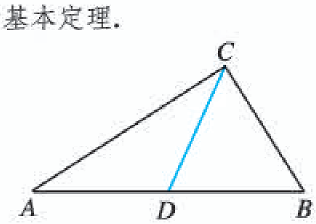


图 4

师生活动：学生独立思考，探寻解决问题的思路. 对有困难的学生，教师可以将问题进行分解：（1）要证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，从

图中观察，易发现应证明 $AC\perp BC$；(2) 用向量表征，即证 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$；(3) 依据平面向量基本定理可知，任一向量都可以由同一个基底表示，由于 $CD=\frac{1}{2}AB$，因而本题中可取 $\{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}\}$ 为基底，用它表示 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$（如图 5 所示）. 再证明 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，从而证得 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

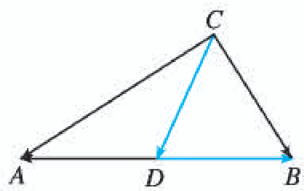


图 5

学生写出证明过程，师生共同完善、规范书写.

设计意图：通过本例题，引导学生借助向量表征相关的几何元素，从而转化成向量运算解决问题，初步让学生体会用向量方法解决几何问题的基本思路.

（四）课堂练习

教科书第 27 页练习第 1，2，3 题.

（五）回顾总结

教师引导学生回顾本节课的学习内容，并回答下列问题：

(1) 回顾并叙述得出平面向量基本定理的研究思路和大致过程，并说说研究方法. 反思在这个过程中自己的贡献和收获是什么，还有哪些困惑.

(2) 叙述并证明平面向量基本定理.

(3) 说说平面向量基本定理与共线向量基本定理有怎样的关系.

(4) 说说平面向量基本定理的作用.

师生活动：给学生充分的回顾、思考、整理、归纳、总结的时间. 由学生代表交流表达自己的想法，展示自己的答案. 教师要仔细倾听学生的想法，关注学生对平面向量基本定理的研究过程的表述，关注学生的表达是否有条理，并适当概括和优化学生的回答，达到突出重点的目的.

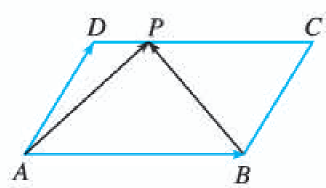
设计意图：以提纲的形式帮助学生梳理本节课最重要的基本知识——平面向量基本定理，感悟数形结合、数学抽象、逻辑推理等基本数学思想在研究问题中的作用，积累数学思考的经验，提高发现、提出、分析、解决数学问题的能力，同时也帮助学生养成反思总结的良好学习习惯.

（六）布置作业

教科书习题 6.3 第 1，11 题.

六、目标检测设计

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$CP=3PD$，用向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$.



（第 1 题）

设计意图：考查学生运用平面向量的线性运算解决问题的能力.

2. 已知 $\triangle ABC$，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 $DE=3EF$. 用 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$.

设计意图：考查学生运用平面向量线性运算及平面向量基本定理解决问题的能力.

3. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E，F 分别为 BC，CD 的中点.

(1) 求 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}$；

(2) 探索 AE 与 BF 有怎样的位置关系，并用向量法证明你的结论.

设计意图：考查学生综合运用平面向量运算和平面向量基本定理解决问题的能力.

V 评价建议与测试题

一、本章学业要求

能够从多种角度理解平面向量的概念和运算法则；

能够掌握平面向量基本定理；

能够运用向量运算、解决简单的几何和物理问题，知道数学运算与逻辑推理的关系；

能够掌握余弦定理、正弦定理，能够运用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

能够在本章的学习中，重点提升数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模素养.

二、本章评价建议

为落实本章的学业要求，以下从三个维度，即核心知识评价要求、思想方法评价要求和关键能力评价要求，提出具体的评价建议.

1. 核心知识评价要求

依据本章的学习目标和学业要求，可列出本章的20个核心知识，分为了解、理解、掌握三个认知层次，且高一级的层次要求包含低一级的层次要求．具体评价要求详见表1.

表1

主题	知识单元		核心知识	评价要求			个数
				了解	理解	掌握	
平面向量	平面向量及其应用	向量概念	平面向量的实际背景	√			3
			平面向量的意义和两个向量相等的含义		√		
			平面向量的几何表示和基本要素		√		
		向量运算	平面向量加、减运算及运算规则			√	9
			平面向量加、减运算的几何意义		√		
			平面向量数乘运算及运算规则			√	
			平面向量数乘运算的几何意义		√		
			两个平面向量共线的含义		√		
			平面向量的线性运算性质及几何意义	√			
			平面向量的数量积		√		
			平面向量投影的概念以及投影向量的意义	√			
			两个平面向量的垂直关系		√		
		向量基本定理及坐标运算	平面向量基本定理及其意义		√		5
			平面向量正交分解及坐标表示			√	
			平面向量线性运算与数量积的坐标表示		√		
			平面向量的夹角		√		
			平面向量共线、垂直的条件		√		
		向量应用与解三角形	平面向量的简单应用		√		3
			余弦定理、正弦定理			√	
			余弦定理、正弦定理的简单应用		√		
总计				3	13	4	20

对基础知识、基本技能的评价，本章应特别关注学生是否清楚向量与每一个新的向量运算对象的获得过程，以及研究这些数学对象的主要脉络. 如学生是否理解向量是由物理中的位移、力、速度抽象而来，理解向量的几何意义，真正体会向量集代数与几何于一身；能否类比数的运算，结合相关的物理模型引入向量的加法运算和数量积运算；能否根据平面向量基本定理，真正掌握平面向量的正交分解及坐标表示，由此体会向量运算的代数化（坐标化）过程；能否用坐标表示向量的线性运算和数量积运算，并能抓住一些特殊向量的线性运算和数量积运算，发现其几何特征（平行、垂直、距离、夹角等），体会其几何意义，进而能运用它们解决简单的平面几何、物理等问题；能否借助向量运算发现并证明余弦定理、正弦定理，并用它们解决与三角形有关的问题或简单的实际问题，进而体会平面向量与代数、平面几何、物理和三角函数等知识之间的联系.

为此，我们对本章 20 个核心知识的评价要求，分别按照了解、理解和掌握三个层次的具体含义进行细化解析，使其对教学具有有效的评价和指导作用.

（1）**了解平面向量的实际背景**：知道向量的概念产生具有丰富的物理背景，能根据物理中的力、速度、位移等抽象出向量的概念；了解向量是一种数学模型，知道它既有大小，又有方向；感悟实数与向量之间的共性与差异.

（2）**理解平面向量的意义和两个向量相等的含义**：能类比力、速度、位移等物理中的矢量说明平面向量的意义，能从几何、代数的角度描述平面向量的概念，并能用有向线段表示平面向量；能类比实数解释平面向量的长度、零向量和单位向量的含义；能解释两个平面向量共线的含义，会判断两个平面向量是否共线；能描述两个平面向量相等的含义，会判断两个平面向量是否相等.

（3）**理解平面向量的几何表示和基本要素**：能类比实数可以用数轴上的点表示，用有向线段表示平面向量，体会这种表示的直观性；能解释平面向量的起点、方向和长度.

（4）**掌握平面向量加、减运算及运算规则**：能由物理中位移合成的三角形模型引入向量加法概念，能用力的合成的平行四边形模型表示两个向量的和，能用平面向量加法的三角形法则和平行四边形法则熟练进行向量加法运算，能说明向量加法的三角形法则和平行四边形法则的一致性；能类比数的减法引入向量减法法则，能用向量减法法则进行运算；体会向量加、减法运算与数的加、减法运算的异同.

（5）**理解平面向量加、减运算的几何意义**：能用向量加法的三角形法则、平行四边形法则画图表示两个向量的和，能结合图形解释两个向量的差，体会向量加、减法的几何意义.

（6）**掌握平面向量数乘运算及运算规则**：能由共线向量的加法引入平面向量的数乘运算；能熟练进行平面向量的数乘运算；能从几何、代数角度描述平面向量的数乘运算，感悟实数运算与向量数乘运算之间的共性与差异.

（7）**理解平面向量数乘运算的几何意义**：能解释平面向量数乘运算的结果与向量之间的共线关系.

（8）**理解两个平面向量共线的含义**：能说明平面向量共线定理，并能解释其几何意义，会用平面向量数乘运算判断两个向量是否共线.

（9）**了解平面向量的线性运算性质及其几何意义**：能从代数与几何等角度认识平面向量的线

性运算，会画图解释它们的运算性质和几何意义.

（10）**理解平面向量的数量积**：能通过物理中的功等实例，引入平面向量数量积的概念，能解释平面向量数量积的物理意义，知道它的运算结果是数量；会计算平面向量的数量积，能描述平面向量的数量积、长度、夹角之间的关系；能用平面向量的数量积求向量的夹角和长度；能借助向量投影说明向量数量积的运算性质，能区分平面向量数量积与实数的积的不同含义.

（11）**了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义**：能结合具体例子画图解释一个平面向量在另一个平面向量上的投影向量，知道两个平面向量的夹角的大小对投影向量的影响；知道平面向量投影与平面向量的数量积之间的关系，体会平面向量投影是构建高维空间与低维空间之间联系的桥梁.

（12）**理解两个平面向量的垂直关系**：能借助向量数量积，判断两个非零向量是否具有垂直关系.

（13）**理解平面向量基本定理及其意义**：能借助力的分解等实例，探索平面向量基本定理，能解释定理的条件与结论的关系、定理的存在性和唯一性以及基底的不唯一性；能用两个不共线向量表示一个向量，或将一个向量分解为两个向量；能应用平面向量基本定理解决一些简单问题.

（14）**掌握平面向量的正交分解及坐标表示**：能分析平面向量的正交分解与平面向量基本定理的内在联系，能熟练地选择正交基底，通过建立直角坐标系，将向量进行坐标表示.

（15）**理解平面向量线性运算与数量积的坐标表示**：能在平面向量坐标表示的基础上，得出坐标表示的平面向量的加、减运算与数乘运算；会进行坐标表示下的平面向量的加、减运算与数乘运算；能用坐标表示平面向量的数量积，会进行坐标表示下的平面向量数量积的运算.

（16）**理解平面向量的夹角**：能描述两个平面向量的夹角的含义，能用平面向量的数量积表示两个平面向量的夹角公式，会求两个平面向量的夹角.

（17）**理解平面向量共线、垂直的条件**：能用坐标表示的平面向量的数乘运算解释向量共线的条件，并会用其判断两个向量是否共线；能用坐标表示的平面向量的数量积解释向量垂直的条件，并会用其判断两个向量是否垂直；体会数与形的完美结合.

（18）**理解平面向量的简单应用**：会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题，体会向量在解决数学与实际问题中的作用.

（19）**掌握余弦定理、正弦定理**：能借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，能用向量方法发现和证明余弦定理、正弦定理，知道余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例；会用余弦定理求解已知两边及其夹角和已知三边的解三角形问题；知道正弦定理的多种证明方法，会用正弦定理求解已知两边和其中一条边的对角、已知两角和夹边等解三角形问题.

（20）**理解余弦定理、正弦定理的简单应用**：会根据余弦定理、正弦定理判定三角形的形状；会从给定的现实情境中抽象出三角形，并运用余弦定理、正弦定理解决一些与测量和几何计算等有关的简单实际问题.

2. 思想方法评价要求

本章的数学思想方法主要包括类比思想、数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想

等 4 种，具体评价要求详见表 2.

表 2

思想方法	评价要求
类比	能类比物理中的矢量，发现数学中的向量，能类比数的运算提出向量可能的运算，体会类比思想在归纳发现新的数学研究对象中的作用.
数形结合	能在向量运算中，体会各种向量运算的几何意义，并运用其几何意义解决有关的问题. 如利用平面向量基本定理或正交分解，将简单的平面几何问题、物理问题向量化、坐标化，进而通过向量运算发现或证明几何命题、求解物理问题，体会向量集代数与几何于一身的特点. 能解决解三角形问题.
化归与转化	能在向量有关知识的学习中，体会转化与化归的思想. 如共线向量定理、平面向量基本定理都是通过将研究的向量用基底表示，从而将问题简化. 在运用平面向量解决简单的平面几何问题、一些物理问题时，体会这些问题与向量问题的相互转化，并能在一些具体情境中，通过向量运算、几何意义和运算性质等将陌生问题转化为熟悉的向量问题加以解决. 能解决解三角形问题.
分类与整合	能在一般向量的运算过程或问题讨论中，既考虑向量的大小又考虑向量的方向，能从代数与几何两个角度考虑向量的有关问题. 能在具体问题中对特殊向量进行讨论，如共线向量、零向量等特殊向量的有关问题，注意分类讨论向量的投影向量与向量夹角的关系. 会对三角形分类以证明正弦定理，在不同的情境下会选择运用哪一个定理（正弦定理、余弦定理）解三角形等.

（1）要特别关注学生能否运用类比的思想方法. 如能类比物理中的力、速度、位移理解平面向量的概念；能类比实数的表示及运算规则，提出向量的有关运算与运算规则等.

（2）要特别关注学生能否运用数形结合的思想方法. 如学生能否运用向量集代数与几何于一身的特点，不仅会向量的线性运算、数量积，还能自觉主动地发现这些运算的几何意义；不仅了解向量投影的概念，而且能借助投影的直观性，推导向量数量积的运算律；不仅会用坐标表示向量的线性运算、数量积，还能发现用坐标表示的向量运算结果的几何意义. 体会这一过程中数与形的有机结合，从而解决相关的平面几何、物理、解三角形等问题.

（3）要特别关注转化与化归的思想的渗透. 如学生能否选择合适的基底表示其他向量，或将向量坐标化；能否体会向量运用的“三步曲”中，不同数学对象的相互转化关系；能否体会向量问题与物理问题的相互转化等问题.

3. 关键能力评价要求

本章的关键能力主要包括抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、直观想象能力和数学建模能力等 5 个，具体评价要求详见表 3.

表 3

关键能力	评价要求
抽象概括	能借助具体到抽象，特殊与一般的思维方式发现和提出向量的有关问题，如向量运算、平面向量基本定理等知识的学习，都是培养学生较强的抽象概括能力的重要载体．在平面几何、物理等情境中，能够借助抽象概括建立向量模型，解决问题.
推理论证	在推导向量的运算性质，发现和证明平面向量基本定理、正弦定理、余弦定理等的推理过程中发展学生的推理论证能力．在理解向量的加、减法，向量的数乘运算，向量数量积含义的基础上，把握这些向量运算之间的关系以及它们与实数运算的区别与联系；能综合应用向量的有关知识求解距离、向量的夹角，以及判断向量的位置关系.
运算求解	能够在熟悉或关联的情境中，发现向量的有关运算对象，并依据相关的运算法则正确地进行运算，能够结合平面向量的特征解释运算结果，进一步发展数学运算能力，有效借助向量的有关运算求解简单的平面几何问题和一些物理问题等．能解决解三角形问题.
直观想象	能借助向量运算及其几何意义，发现运算规律，借助几何直观认识向量的夹角、投影向量、平面上两点间的距离，把握两个向量平行或垂直关系．例如，借助“向量三角形”发现和提出一些数学问题，进一步提升运用直观想象思考问题的意识.
数学建模	能阅读、理解问题情境，合理选择向量运算，通过对已知材料的分析、整理，能清晰、准确地表达向量运算建模的过程和结果，并能解决一些简单的平面几何、物理、解三角形等实际问题.

（1）要特别关注学生能否形成由具体到抽象的思维品质．如学生能否根据物理中的位移、速度等抽象出向量的概念，能否领悟由物理中的位移的合成、力的合成、力所做的功分别引入相关的向量运算的过程，领悟由特殊到一般、由具体到抽象的向量的运算、运算性质和平面向量基本定理等重要知识的形成过程和认知规律．对于向量的加法、减法等向量运算法则的形成，对于其运算律的发现和证明，要让学生充分经历自主观察、操作、类比、推理、归纳、证明的全过程，鼓励学生发现和提出数学问题，不应单纯评价对运算法则与运算性质的记忆，而应注重对数学本质的理解和思想方法的把握，结合具体问题进行评价，避免片面强调机械模仿、死记硬背和过高技巧.

（2）要特别关注学生能否提升数学运算的核心素养．如能否理解向量线性运算、数量积，能否推导运算性质；能否在具体问题中，认识向量运算的背景、借助物理情境发现运算法则，设计运算程序，解决与向量有关的数学或物理问题，体会向量运算与实数运算的异同；能否在综合情境中，借助向量表示和运算解决有关的问题，积累发现和提出某种数学对象的运算法则，探索其不同的数学内涵和运算规律；能否整体把握各种向量概念和运算提出的背景、定义、几何意义和运算规律，以及体会这些知识产生运用过程中渗透的数学思想方法，为学生进一步学习复数及其运算等内容打好基础.

三、本章命题建议

本章学业水平测试的命题，要遵循学业要求的达成目标，以落实核心素养为纲，以核心知识为基础，以问题情境为依托，渗透数学思想方法，从关键能力立意.

1. 本章学业水平测试的命题意图

（1）重视对核心知识的评价．以平面向量的核心知识为素材，充分评价学生对平面向量有关概念、运算和性质的了解、理解和掌握程度．注重评价各种平面向量运算的几何意义，反映向量集几何与代数于一身的特征．注重评价知识间的内在联系，如向量运算与实数运算的区别与联系，评价学生运算素养的发展状况．

（2）重视对思想方法的评价．以平面向量的基本问题为载体，突出评价学生利用向量方法研究有关问题的思维方式，注重结合具体问题情境融入类比、数形结合、化归与转化、分类与整合等数学思想方法的评价，强调通性通法，淡化特殊技巧．

（3）重视对关键能力的评价．以平面向量的简单应用为特征，借助问题情境，重点评价学生综合运用向量知识和运算方法解决实际问题的能力．注重将平面向量的核心知识、思想方法和实际应用有机地结合，重在关注学生的思维品质，评价学生的理性思维能力．

2. 本章学业水平测试题的双向多维细目表

依据上述命题意图，我们设计了本章学业水平测试题的双向多维细目表（详见表 4[①]），编制了一套示范性学业水平测试题，并给出了参考答案，以供教学时选用．

表 4

题型	题号	问题情境	核心知识	评价要求	思想方法	关键能力
选择题	1	数学（A）	相等向量的概念	理解	数形结合	推理论证
	2	数学（C）	平面向量数量积	理解	类比	推理论证
	3	数学（B）	平面向量的共线与垂直	理解	数形结合	推理论证
	4	数学（A）	平面向量线性运算的坐标表示	理解	化归与转化	运算求解
	5	数学（B）	余弦定理的简单应用	理解	化归与转化	运算求解
	6	数学（A）	平面向量共线的含义	理解	分类与整合	运算求解
	7	数学（A）	平面向量基本定理	理解	化归与转化	运算求解
	8	数学（C）	正弦定理的简单应用	理解	分类与整合	推理论证
填空题	9	数学（A）	单位向量的概念	理解	数形结合	运算求解
	10	数学（B）	平面向量的坐标运算	掌握	数形结合	运算求解
	11	数学（C）	余弦定理、正弦定理的简单应用	理解	数形结合	运算求解
	12	数学（B）	余弦定理的简单应用	理解	数形结合	推理论证
解答题	13	数学（B）	平面向量的数量积	理解	数形结合	运算求解
	14	数学（B）	平面向量的简单应用	理解	化归与转化	推理论证
	15	数学（B）	投影向量的概念	了解	数形结合	运算求解
	16	数学（C）	余弦定理、正弦定理的简单应用	理解	数形结合	运算求解
	17	现实（C）	余弦定理、正弦定理的简单应用	理解	数形结合	数学建模
	18	科学（B）	平面向量的简单应用	理解	数形结合	数学建模

① 表中问题情境分为现实情境、数学情境和科学情境，分别简称为现实、数学和科学．其中若出现以数学文化为情境的问题，则简称为文化．问题分为简单问题（A）、较复杂问题（B）和复杂问题（C）三个层次．后续章的表述与此相同．

本章学业水平测试题

（时间：90 分，满分：100 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 是 A，B，C，D 四点构成平行四边形的（　　）．

（A）充要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分不必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2．下面给出的关系式中，正确的个数是（　　）．

①$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；⑤$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3．对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，下列命题中正确的是（　　）．

（A）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

（B）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $-|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$（$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量）

（C）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

（D）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

4．已知 $\boldsymbol{a}=(5,\ -2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\ -3)$，$\boldsymbol{c}=(x,\ y)$ 若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{c}=$（　　）．

（A）$\left(1,\ \frac{8}{3}\right)$　　（B）$\left(\frac{13}{3},\ \frac{8}{3}\right)$　　（C）$\left(\frac{13}{3},\ \frac{4}{3}\right)$　　（D）$\left(-\frac{13}{3},\ -\frac{8}{3}\right)$

5．若 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$B=60°$，$b^2=ac$，则 $\triangle ABC$ 一定是（　　）．

（A）底边和腰不相等的等腰三角形　　（B）钝角三角形

（C）直角三角形　　（D）等边三角形

6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}$ 的方向相反，则实数 λ 的值为（　　）．

（A）1　　（B）$-\frac{1}{2}$　　（C）1 或 $-\frac{1}{2}$　　（D）-1 或 $-\frac{1}{2}$

7．在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点．若 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）．

（A）1　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$-\frac{3}{4}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

8．若 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a=80$，$b=100$，$A=30°$，则 B 的解的个数是（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）不确定

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请将答案填在对应题号的位置上．）

9．若向量 $\boldsymbol{a}=(6,\ -8)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量是________．

10．已知向量 $|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是________．

11．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b=50\sqrt{3}$，$c=150$，$B=30°$，

则边长 $a=$________.

12. $\triangle ABC$ 是钝角三角形，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a=1$，$b=2$，则最大边 c 的取值范围是________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

13.（10 分）

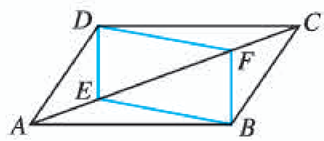
已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1)$.

（1）求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

（2）求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的余弦值.

14.（10 分）

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 是对角线 AC 上的两点，且 $AE=CF$，用向量方法证明：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.



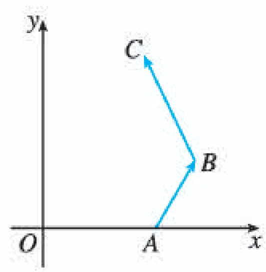
（第 14 题）

15.（9 分）

如图，已知 O 为平面直角坐标系的原点，$\angle OAB=\angle ABC=120°$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AB}|=2a$.

（1）求两点 B 与 C 的坐标；

（2）求向量 $\overrightarrow{BC}$ 在向量 $\overrightarrow{OA}$ 上的投影向量.



（第 15 题）

16.（9 分）

已知$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，向量 $\boldsymbol{m}=(a,\ \sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\ \sin B)$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

（1）求角 A；

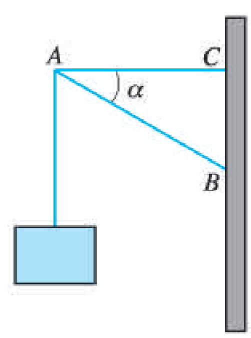
（2）若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，求$\triangle ABC$ 的面积.

17.（9 分）

位于灯塔 A 处正西方向相距 15 n mile 的 B 处有一艘甲船，需要海上加油．位于灯塔 A 处北偏东 45°有一与灯塔 A 相距 $5\sqrt{2}$ n mile 的乙船（在 C 处）．求乙船前往支援 B 处的甲船航行的距离和方向（角度精确到 1°）.

18.（9 分）

自重不计的轻杆 AC 和 AB 组成如图所示的支架，其中 AC 恰位于水平位置，$\angle\alpha=30°$．在支架 A 处挂重 50 N 的物体，求悬挂重物使杆 AC 及杆 AB 受到的力的大小和方向.



（第 18 题）

参考答案

1. B．本题主要评价学生对相等向量的概念的理解程度.

2. D．本题主要评价学生对平面向量数量积的概念与运算律的理解和掌握程度.

3. C．本题主要评价学生对平面向量的共线与垂直关系的理解程度.

4. D．本题主要评价学生对向量线性运算的坐标表示的掌握程度.

5. D．本题主要评价学生应用余弦定理判断三角形形状的解题能力.

6. B. 本题主要评价学生对向量共线的概念的理解程度.

7. D. 本题主要评价学生对平面向量基本定理的理解程度.

8. C. 本题主要评价学生应用正弦定理解三角形的能力.

9. $\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$. 本题主要评价学生对单位向量的概念的理解程度.

10. $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5},\ \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\ -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$. 本题主要评价学生对用坐标表示平面向量的垂直关系的理解程度.

11. $a=100\sqrt{3}$或$50\sqrt{3}$. 本题主要评价学生应用余弦定理和正弦定理解三角形的能力.

12. $\sqrt{5}<c<3$. 本题主要评价学生应用余弦定理解三角形的能力，以及利用数形结合的思想方法进行推理论证的能力.

13. (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$；(2) $\cos\theta=\frac{10\sqrt{221}}{221}$. 本题主要评价学生对平面向量的坐标表示、向量数量积等基础知识的掌握程度，以及利用数形结合的思想方法进行运算求解的能力.

14. 由已知可设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CF}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$，即$DE$与$FB$平行且相等，所以四边形$DEBF$是平行四边形.

本题主要评价学生对运用向量方法解决平面几何问题的能力，以及利用数形结合的思想方法进行推理论证的能力.

15. (1) $B\left(\frac{5a}{2},\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$C\left(\frac{3a}{2},\ \frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)$.

(2) 由 (1) 知$\overrightarrow{BC}=(-a,\ \sqrt{3}a)$. 设向量$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{OA}$的夹角为$\alpha$，$\boldsymbol{e}$是与$\overrightarrow{OA}$方向相同的单位向量，则$|\overrightarrow{BC}|\cos\alpha\boldsymbol{e}=|\overrightarrow{BC}|\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{OA}|}\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}\boldsymbol{e}=-a\boldsymbol{e}=-a\frac{\overrightarrow{OA}}{2a}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. 即向量$\overrightarrow{BC}$在向量$\overrightarrow{OA}$上的投影向量是$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

本题主要评价学生对点的坐标与平面向量坐标间的关系，坐标表示的平面向量数量积，平面向量投影的概念的理解程度，以及借助图形直观综合运用平面向量知识的求解能力.

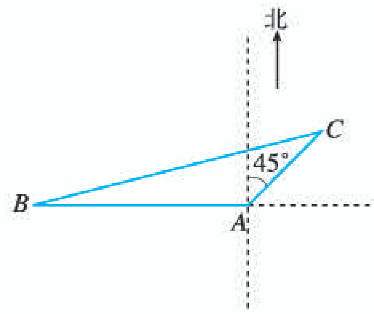
16. (1) $\boldsymbol{m}=(a,\ \sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\ \sin B)$，因为$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以$a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$. 由正弦定理，得$\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$. 又$\sin B\neq0$，从而$\tan A=\sqrt{3}$. 因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，而$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，得$7=4+c^2-2c$，即$c^2-2c-3=0$. 因为$c>0$，所以$c=3$，故$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

本题主要评价学生对正弦定理、余弦定理、已知三角函数值求角等知识与方法的掌握程度，以及利用化归与转化的思想方法进行运算求解的能力.

17. 根据题意，画出示意图如图. 由余弦定理，得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos135^\circ=425$. 于是$BC=5\sqrt{17}$ (n mile).

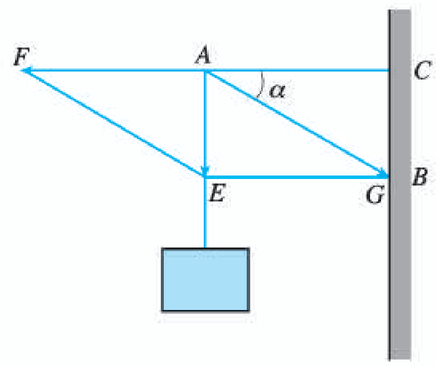
由正弦定理，得 $\dfrac{15}{\sin C}=\dfrac{5\sqrt{17}}{\sin 135^\circ}$，所以 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$. 因为 $0<\angle C<90^\circ$，所以 $\angle C\approx 31^\circ$. 故乙船航行的距离为 $5\sqrt{17}$ n mile，方向约为南偏西 76°.



（第 17 题）

本题主要评价学生在相关的情境中构建三角形，运用余弦定理和正弦定理解决简单实际问题的能力，以及利用数形结合的思想方法进行数学建模的能力.

18. 如图，将重物施加于点 A 的拉力向平行于 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 的两个方向分解. 将重力 $\overrightarrow{AE}$ 分解得平行四边形 $AFEG$（点 G 在 BC 上，点 F 在 AC 上），则 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AG}$ 即为重物使杆 AC 及 AB 所受到的力.



（第 18 题）

在 Rt△AEG 中，$|\overrightarrow{AE}|=50$，$\angle EAG=90^\circ-\angle\alpha=60^\circ$，所以 $|\overrightarrow{GE}|=|\overrightarrow{AE}|\tan 60^\circ=50\sqrt{3}$ (N)，$|\overrightarrow{AG}|=2|\overrightarrow{AE}|=100$ (N). 因为 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{GE}|$，所以 $|\overrightarrow{AF}|=50\sqrt{3}$ (N).

因此，重物作用于杆 AC 的力的大小为 $50\sqrt{3}$ N，方向与 $\overrightarrow{AC}$ 的方向相反，重物作用于杆 AB 的力的大小为 100 N，方向与 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相同.

本题主要评价学生利用向量知识解决简单的物理问题的能力，以及利用数形结合的思想方法进行数学建模和数学运算的能力.

数学探究 用向量法研究三角形的性质

高中数学课程内容突出四条主线，“数学建模活动与数学探究活动”是其中之一．根据《标准（2017 年版）》的要求，我们在必修课程中设计了数学建模活动“建立函数模型解决实际问题”和数学探究活动“用向量法研究三角形的性质”，在选择性必修课程中安排了数学探究活动“杨辉三角的性质与应用”和数学建模活动“建立统计模型进行预测”．

一、“数学探究活动”的定位和教学要求

（一）定位

《标准（2017 年版）》对数学探究活动的定位是：围绕某个具体的数学问题，开展自主探究、合作研究并最终解决问题的过程．具体表现为：发现和提出有意义的数学问题，猜测合理的数学结论，提出解决问题的思路和方案，通过自主探索、合作研究论证数学结论．数学探究活动是运用数学知识解决数学问题的一类综合实践活动，是高中阶段数学课程的重要内容．

（二）教学要求

从上述定位可以看到，数学探究活动的教学应注意把握如下几点要求．

1. 活动内容

探究一个具体的、具有一定综合性、复杂性的数学问题．这与数学建模活动的活动内容（解决一个现实问题）是不一样的．

2. 活动性质

运用数学知识发现提出数学问题并解决问题．要注意的是，这里的活动不同于常规的解答一个习题，是具有一定的数学研究味道的创新性综合实践活动．

3. 活动形式

以课题研究的形式展开，包含四个环节：选题、开题、做题、结题．

4. 教学过程

与课题研究四个环节相适应的教学过程是：

（1）确定课题

可以由教师根据学生的具体情况布置给学生研究的课题，也可以让学生自己确定选题并报教师同意后开展探究．

（2）撰写开题报告

学生撰写开题报告，教师组织开展“开题”交流活动．开题报告应包括选题的意义、文献综

述、解决问题思路、研究计划、预期结果等.

在学生撰写开题报告时，教师要采取适当方式进行指导.

(3) 解决数学问题

适当利用“综合实践活动”的课时，并鼓励学生利用课余时间开展数学探究活动，包括明确数学问题、求解数学问题、得到结论、反思完善等过程.

在学生开展探究活动时，教师要注意了解学生活动进展情况，并在发现值得研究的数学问题、构建探究的思路、形成解题的方法等方面加强指导．可以提示学生调用不同的数学知识解决问题，通过对问题的拓展、推广等发现更多的数学问题、获得更多的数学结论等.

(4) 撰写研究报告

在学生自主探究的基础上，指导学生撰写研究报告．研究报告的形式应根据选题的内容，采用专题作业、研究报告或小论文等多种形式.

在学生撰写研究报告时，教师应给予具体帮助，特别应提醒学生注意规范化地呈现研究报告，并加强研究成果表达的逻辑性.

(5) 研究报告的交流与评价

在完成上述步骤后，由教师组织学生开展结题答辩，并给出评价.

对于研究报告或小论文的评价，教师应组织评价小组，可以邀请校外专家、社会人士、家长等参与评价，也可以组织学生互评．教师要引导学生遵循学术规范，坚守诚信底线，并纳入评价内容．研究报告或小论文及其评价应当作为文件存入学生个人学习档案.

二、“用向量法研究三角形的性质”的设计思路和教学建议

（一）教学目标

通过用向量法证明平面几何中已学的三角形的性质，发现和证明三角形的其他性质，体验数学探究的过程和方法，体验向量法在探索和证明几何图形性质中的作用，在得到一些三角形的性质并撰写和交流小论文（研究报告）的活动中，培养运用数学抽象、直观想象等思维方式发现和提出有意义的数学问题的能力；通过逻辑推理发现和提出命题，探索和表述论证过程，培养有逻辑地表达和交流的能力；积累数学活动经验，提升数学抽象、逻辑推理、数学运算和直观想象等素养.

（二）课时安排

3 课时.

（三）编写思考和教学建议

1. 关于选题

三角形是几何中最简单的封闭图形，但它是最重要的基本几何图形之一．三角形的性质非常丰富，是联系各种几何图形的纽带，也是学习几何知识、培养逻辑推理能力、发展理性思维的最佳载体之一．在平面几何中，学生已研究过三角形，知道了三角形的一些基本性质，但他们所掌握的三角形知识比较有限，对三角形的认识还不够深入，例如他们对三角形的外心、中线、重心、角平分线、内心、高、垂心等只有初步认识．因此，以三角形为研究对象，用向量法对它的性质进行再研究，可以使学生在已有认识的基础上，更系统地掌握三角形的性质，积累“研究—

个几何对象”的活动经验，进一步了解研究一个几何图形的内容、路径、方法等，加深理解向量法在研究几何问题中的作用. 在对三角形性质的研究中，使学生对“数学探究活动”形成较为完整的体验，使发展学生的自主学习能力，提高发现和提出问题的能力，树立善于思考、严谨求实的科学精神，提升创新意识等落在实处.

当然，教师可以根据具体情况，让学生选择不同的几何图形展开研究.

2. 关于探究内容的安排

教科书安排的探究内容（事实上也给出了探究的顺序）有 3 项：

(1) 回顾初中研究三角形的过程，从研究的思路、内容、方法等角度进行梳理，并列出已经得到的结论；

(2) 用向量方法对已证的结论进行证明，总结用向量方法处理几何问题的基本程序，并与平面几何中的推理论证过程进行比较，阐述各自的特点；

(3) 用向量方法证明以往未加证明或学生自己新发现的结论.

其中，第 (1) 项是让学生梳理已学的内容，而且要求有结构、有系统地进行梳理，从研究一个几何图形的“基本套路”的角度进行梳理. 主要结果如下：

①研究思路

确定研究对象（给定义）——发现性质——证明性质——研究特例（性质、判定）；

从“定性性质”，到“定量性质”.

②研究内容

三角形的组成要素（边、角）、相关要素（外角、高、中线、角平分线等）之间的数量关系、位置关系，例如角与角的关系（内角和等于 180°，外角等于与它不相邻的两个内角的和等）、边与边的关系（两边的和大于第三边）、边与角的关系（等角对等边），等等.

③研究方法

通过对若干具体三角形的度量、观察、实验，从中发现共性，得出猜想，再通过逻辑推理证明得到有关性质.

在研究一般三角形的基础上，通过“要素特殊化”得到新的研究对象，即“边的大小关系特殊化”得到等腰三角形、“角的特殊化”得到直角三角形，再研究它们的边、角关系，得到相应的性质；利用性质和判定的互逆关系，通过把性质中的条件和结论互换，发现判定定理.

④研究结论

一般三角形的性质（包括定性和定量两方面）；

等腰三角形的性质与判定；

直角三角形的性质与判定.

第 (2) 项是用向量法对已用综合法证过的结论进行证明. 实际上，向量法在证明有些性质时很有用，但也有不好用的，需要让学生在具体证明过程中体验. 例如，一般而言，证明与平行或垂直有关的定性性质时，用向量法比较方便；而在证明一些长度比例式时，用综合法反而更方便. 例如，正弦定理（比例式）的证明，用面积法是最方便的，可以认为正弦定理是三角形面积公式的推论，而用向量法是不方便的.

第 (3) 项，教科书先给出了“探究三角形重心的性质”的示范：

发现和提出问题

先通过“‘重心’是几何学和物理学的共同对象，应该是很重要的……它到底有哪些神秘的性质呢?”引发问题，再以“从严谨性的角度看，两条中线相交于一点是肯定的，但第三条直线是否经过这个交点是需要证明的”提出问题.

用向量法探索、论证

用“三步曲”，通过向量运算、逻辑推理，得到“三角形的三条中线交于一点”的证明.

反思探究过程、发现新命题

通过对探究过程的反思，发现“三角形的重心是中线的三等分点”，这是初中教科书中没有涉及的一个重要性质.

最后，教科书对探究方向给出了一定提示：“如果把眼光聚焦在三角形的边、外心、中线、重心、角平分线、内心、高线、垂心等，你还可以发现更多的性质”.

3. 对探究活动的要求

教科书对探究活动给出了具体要求. 鉴于本数学探究课题的特点，教科书建议“以独立探究和小组合作相结合的方式”开展活动. 小组合作主要在探究方案的确定、研究思路的相互启发上，而对三角形性质的具体探究过程要让学生独立完成. 在此基础上，所有学生都要以“专题作业”的方式，参照教科书给出的“研究报告的参考形式”写出研究报告，然后进行组内交流和全班交流. 通过独立探究，学生对数学探究的体验才会深刻，形成的研究结果也会更加丰富一些.

另外，在研究成果的评价中，给出同一性质的多种证明方法，并对不同证明方法做出评析，也可以认为是一种创新.

4. 用向量表示的一些三角形性质

(1) 如果用向量来表达三角形，那么它的三条“有向边”可以分别表示为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因而 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 表示三角形三边的长. 这样，在初中已学的三角形性质就可以通过向量及其运算律来表示. 例如：

①相似三角形对应边成比例的向量表示实质上就是 $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；

②余弦定理的向量表示就是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2)$；

等等.

(2) 三角形的有些性质，用向量表示会更方便. 例如：

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分别是 BC，CA，AB 的中点，O 是重心，则

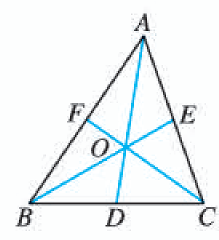


图 1

①$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$；

②$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$；

③对于任意一点 P，都有 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PO}$；

④对于任意一点 P，都有 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}$；

⑤$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=0$；

等等.

5. 可供学生研究的内容举例

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，A'，B'，C'分别是 BC，CA，AB 边的中点，我们将 $\triangle A'B'C'$ 称为

△ABC 的“中位三角形”. 图 2 中画出了△ABC 两条交于点 G 的中线、两条交于点 H 的高，以及△$A'B'C'$两条交于点 O 的高.

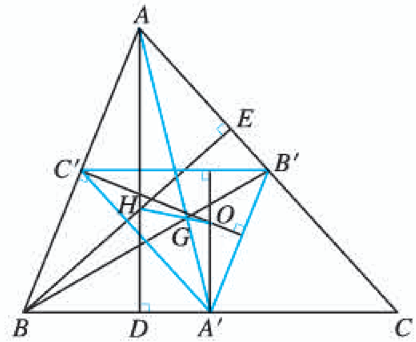


图 2

图 2 中蕴含着非常丰富的三角形性质，从线共点、点共线、边的关系、角的关系、长度、面积等不同角度入手，用初中学过的平面几何知识就可以发现和证明这些性质. 同时，也可以让学生用向量法来发现和证明这些性质.

第七章 复数

I 总体设计

复数是一类重要的运算对象，有广泛的应用．本章通过方程求解，帮助学生理解引入复数的必要性，了解复数系的扩充过程；掌握复数的表示、运算及其几何意义，体会数系扩充过程中理性思维的作用．本章特别注重复数表示和运算的几何意义，强调形与数的融合．学生通过本章学习，可以提升数学运算、直观想象和逻辑推理等素养．

一、本章学习目标

1. 复数的概念

（1）通过方程的解，认识复数．

（2）理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义．

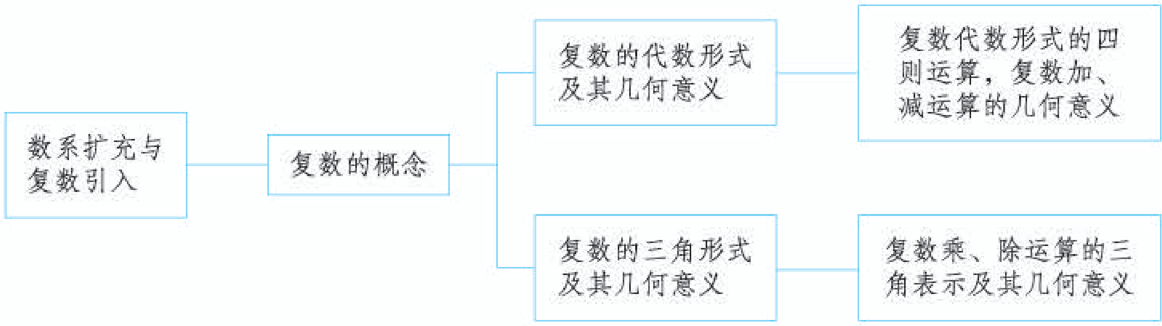
2. 复数的运算

掌握复数代数表示式的四则运算，了解复数加、减运算的几何意义．

3*. 复数的三角表示

通过复数的几何意义，了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义．

二、本章知识结构框图



三、内容安排

复数的引入是数系的又一次扩充，也是中学阶段数系的最后一次扩充，在保持实数系的运算律的前提下，没有比复数系更大的数系了. 本章充分考虑学生已有的数系扩充经验，类比从有理数系扩充到实数系的过程，强调扩充后的数系与实数系中的运算协调一致，且保持运算律不变；类比实数的表示和运算，研究复数的表示和运算，强调复数的表示和运算的几何意义.

“7.1　复数的概念”从解方程的角度引发数系扩充的必要性，并引入虚数单位 i；进而类比由有理数集扩充到实数集的过程，从可以像实数一样进行加法、乘法运算并保持运算律的角度，将实数集扩充成复数集. 复数本质上是一对有序实数，因此复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有的点组成的集合是一一对应的，与复平面内以原点为起点的向量组成的集合也是一一对应的，这就是复数的两种几何意义. 本节内容是整章的基础知识，具有奠基性作用，侧重提升学生的逻辑推理、直观想象素养.

“7.2　复数的四则运算”讨论复数集中的四则运算问题，即研究复数的加、减、乘、除运算，其中加法、乘法运算是核心，减法、除法运算分别是它们的逆运算. 除此之外，还讨论了复数加法、减法运算的几何意义. 本节侧重提升学生的数学运算、直观想象素养.

“7.3*　复数的三角表示”从复数的向量表示出发，结合三角函数知识，得到复数的另一种重要表示形式——三角表示，进而研究复数乘、除运算的三角表示及其几何意义. 复数乘、除运算的三角表示形式简洁，在很多情况下可以简化复数的乘、除运算；其几何意义就是平面向量的旋转、伸缩，因此利用它们可以方便地解决很多平面向量和平面几何问题. 本节侧重提升学生的直观想象、逻辑推理和数学运算素养.

数系通常包括两个要素，一是组成数系的数，二是数系中的运算及运算律；另外，数系的扩充过程也很关键. 因此，本章的重点是：数系的扩充过程，复数的代数形式及其几何意义，复数的加、减、乘、除四则运算，复数加、减运算的几何意义. 需要特别指出的是，复数的三角表示将复数、平面向量和三角函数三者紧密相连，这种形式在复数体系中乃至整个数学中具有极为重要的地位，但鉴于《标准（2017 年版）》将其定位为选学内容，不作为考试要求，因此不将它作为本章的教学重点. 但我们建议一旦选学复数的三角表示，也应将复数的三角表示式，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义列为本章的教学重点.

由于学生既不太了解数系扩充的“规则”，也不适应复数代数形式是两项的和，因而复数的引入是本章的一个难点. 借助已学的数系扩充的经验，特别是从有理数系扩充到实数系的经验，梳理其扩充过程中体现的“规则”，在这些“规则”的引导下进行从实数系到复数系的扩充是突破这个难点的关键. 复数的三角表示式与复数的向量表示、三角函数有很强的关联性，其形式也比较复杂，因此复数的三角表示也是本章的一个难点. 充分注意复数本质上是一对有序实数，进而从复数的向量表示出发，并突出复数与向量、三角函数以及几何之间的联系，是突破这个难点的关键.

四、课时安排

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1　复数的概念	约 2 课时
7.2　复数的四则运算	约 2 课时
7.3*　复数的三角表示	约 2 课时
小结	约 2 课时

五、本章编写思考

1. 注意在“规则”的引导下扩充数系

扩充数系不能盲目进行，必须有一定之规．在义务教育阶段，学生经历了将数系从自然数系逐步扩充到实数系的系列过程，但当时考虑到学生在义务教育阶段的认知基础和认知能力，并未强调数系扩充中的一些“规则”，因而他们对数系扩充“规则”的认识比较肤浅，甚至不甚了解．因此，本章特别注意引导学生梳理已学的从自然数系逐步扩充到实数系的过程与方法，尤其是注重梳理从有理数系扩充到实数系时体现的“规则”，即：数集扩充后，在实数集中规定的加法运算、乘法运算，与原来在有理数集中规定的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律；进而类比从有理数系扩充到实数系的过程和方法，从使得方程 $x^2+1=0$ 有解的想法出发，利用这些“规则”，对实数系进行进一步扩充，引入复数及其四则运算，将实数系扩充到复数系．通过这个过程体现数系扩充过程中理性思维的作用，提升学生的逻辑推理素养．

2. 结合解方程，初步体现复数的来龙去脉

复数的引入与解方程密切相关，复数本身也应用于解方程中，所以教科书努力较为完整地体现这两个方面．

首先，教科书以解方程为切入点，重点讨论实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$\Delta=b^2-4ac<0$），并将其化归为方程 $x^2+1=0$，进而扩大实数集、引入复数，使得方程有解，体现数系扩充的必要性．

进而，在研究复数的四则运算、完成复数系扩充后，限于已有的复数基础，教科书采用“混而不错”的方式，默认一元二次方程 $x^2+2=0$ 及其一般形式 $x^2+a=0$（$a>0$）的根不能超过两个这个直观事实，从特殊到一般，在复数范围内“解”实系数一元二次方程，给出求根公式：

当 $\Delta\geqslant 0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

当 $\Delta<0$ 时，$x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}\mathrm{i}$.

从而“彻底地”解决了实系数一元二次方程的求解问题．

进一步地，教科书通过一个阅读材料，介绍一般的复系数一元多项式方程的解，给出代数基本定理，这实际上就是点出复数系是代数闭域，从解方程的角度进一步凸显出复数系的重要价值．

总之，教科书通过“完整地”介绍解方程的过程，让学生从一个侧面对复数的来龙去脉有个初步了解，有助于他们加深对引入复数的必要性和重要性的理解，也提升了他们学习复数的兴趣．

3. 突出复数的表示和运算的几何意义，体现形与数的融合

突出复数的表示和运算的几何意义，即从几何的角度认识、理解复数及其运算，是贯穿本章的一条主线.

在引入复数的代数形式时，教科书从复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）本质上是一对有序实数对（a，b）出发，基于有序实数对可以看成是平面直角坐标系中点的坐标，得到复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有的点组成的集合是一一对应的；基于有序实数对也可以看成是平面直角坐标系中向量的坐标，得到复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内以原点为起点的向量组成的集合也是一一对应的. 在引入复数的三角形式时，教科书从复数的向量表示出发，特别注意形与数的融合. 具体地，重点引导学生思考如下问题：

如图 7-1，复数 $z=a+bi$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}=(a, b)$ 一一对应，复数 z 由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标（a，b）唯一确定. 我们知道向量也可以由它的大小和方向唯一确定，那么能否借助向量的大小和方向这两个要素来表示复数呢？如何表示？

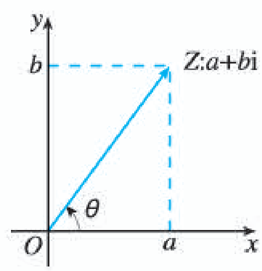


图 7-1

进而从几何的角度得出“向量的大小可以用模来刻画”“借助以 x 轴的非负半轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角 θ 来刻画 $\overrightarrow{OZ}$ 的方向”，再利用三角函数知识，用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模和角 θ 来表示复数 z，得到复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

从复数的运算看，复数代数形式的加、减运算的几何意义，就是相应平面向量的加、减运算；复数乘、除运算的三角形式的几何意义，就是平面向量的旋转、伸缩，具体地：由

$$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

引导学生得到，两个复数 z_1，z_2 相乘时，可以像图 7-2 那样，先分别画出与 z_1，z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，然后把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2（如果 $\theta_2<0$，就要把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是积 z_1z_2.

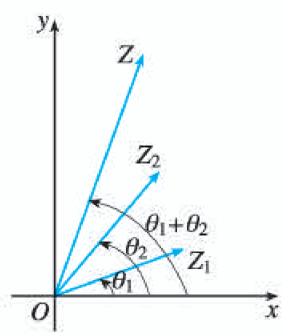


图 7-2

复数的代数表示、三角表示及其运算都具有明显的几何意义，注重在本章的所有关键点上强化数形结合，有助于学生深刻地认识、理解复数的表示与运算，提升他们的直观想象素养.

4. 加强复数与相关知识的联系

“联系性”是本章的一条思想方法主线，本章把加强复数与实数、多项式、平面向量、三角函数之间的联系贯穿始终.

本章注意复数与实数的联系，复数及其代数形式的加法、减法、乘法运算与多项式及其加法、减法、乘法运算的联系，注意复数及其代数形式的加、减运算与平面向量及其加、减运算的联系，并特别强调复数的三角形式及其乘、除运算与平面向量、三角函数的联系. 例如，教科书在给出复数的加法法则后，指出其与多项式加法、向量加法的联系：

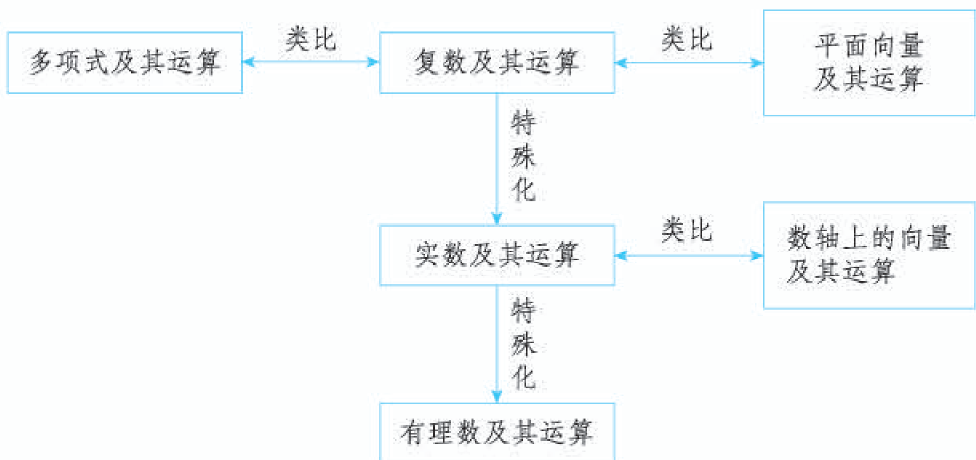
“两个复数相加，类似于两个多项式相加”

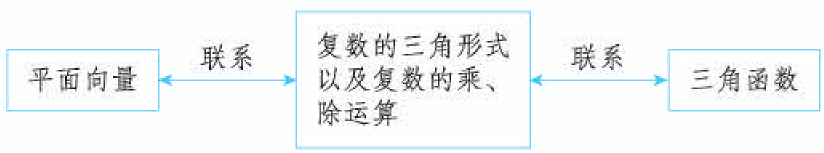
“复数的加法可以按照向量的加法来进行”.

在给出复数的乘法法则后，指出其与多项式乘法的联系：

“可以看出，两个复数相乘，类似于两个多项式相乘，只要在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并即可”.

本章中，复数与相关领域知识之间的联系可以用以下框图直观表示：





六、本章教学建议

1. 适当介绍历史史实，让学生感受理性精神

在数学史上，发现复数问题始于古希腊丢番图时代人们求解一元二次方程，但人们一直不承认复数，到 1545 年，意大利数学家卡尔丹在他出版的《重要的艺术》中，求解某些一元三次方程时再也无法回避虚数问题，这才迫使人们认真对待复数，直到 18 世纪末韦塞尔给出复数的几何表示，人们才开始逐渐接受复数. 教学中可以参考这些数学史实，并根据学生的认知基础，采用适当的方式，介绍实系数一元三次方程的求根公式，以及用求根公式和因式分解两种方法，求解一些特殊的实系数一元三次方程，以引起学生的认知冲突，引入复数. 例如，求解 $x^3=15x+4$，可以利用一元三次方程的求根公式得到它的三个根 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$；也可以利用因式分解法，将原方程化为 $(x-4)(x^2+4x+1)=0$，从而得到方程的三个根 $x_1=4$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=-2-\sqrt{3}$，于是 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$，从而 $\sqrt{-121}$ 应该是有意义的. 但是，在初中阶段学生已经知道负数不能开平方，这样就引起了学生的认知冲突，为“自然地”引入复数作好了铺垫.

通过这样的教学过程，让学生了解历史上引入复数的漫长而曲折的过程，感受这个过程中数学家的丰富、深邃的想象力和创造力，以及不屈不挠、精益求精的精神，进而更加深刻地体会引

入复数的必要性以及数学中理性精神的光辉.

2. 加强运算训练，提升学生的数学运算素养

“运算”是贯穿本章的一条主线. 复数属于代数领域，与中学阶段的其他代数内容一样，它肩负着培养学生的运算能力的重任. 本章中的运算主要包括复数代数表示式的四则运算、复数三角形式与代数形式的互化以及复数三角形式的乘除运算等，教学时应加强这些运算的训练，不断提升学生的数学运算素养.

3. 数系扩充时应注意适度体现“规则”

在将实数系扩充到复数系的过程中，教师应了解扩充数系的“规则”既具有一般性，同时又有一定的局限性.

一方面，在从自然数系逐步扩充到复数系的过程中，每次扩充数系时，新数系中的加法、乘法运算与原数系中的相应运算相容，并保持运算律，它们是这些扩充数系过程中的共性规律——扩充数系的“规则”.

另一方面，上述扩充数系的“规则”有着一定的局限性. 一是，新数系中的加法、乘法运算各自都具有不同于原数系中相应运算的一些特征，并且每次扩充时的特征也不尽相同. 例如，把整数系扩充到有理数系时，有理数系中两个分数（将整数看成是分母为 1 的分数）的加法运算是：同分母分数相加，分母不变，把分子相加；异分母分数相加，先通分，化为同分母的分数，再相加；而整数系中两个整数相加就是“累积计数”. 可见，有理数系和整数系中的加法运算特征不尽相同. 而把有理数系扩充到实数系时，实数系中两个不全是有理数的加法运算就是“合并同类项”，也就是说，实数系和有理数系中的加法运算特征也不尽相同. 并且，上述两次数系扩充中加法“新增的”的特征也不相同. 二是，按照从自然数系逐步扩充到复数系的“规则”，就无法继续扩充复数系了，要继续扩充复数系，必须对“规则”进行适当限制. 例如，将复数系扩充为四元数域①时，就要放弃实数系中乘法运算的交换律. 因此，扩充数系的“规则”具有一定的局限性.

教学中，既要考虑数系扩充“规则”在中学阶段的普适性，充分重视在“规则”的引导下将实数系扩充到复数系；同时又要注意其局限性，把握好体现“规则”的度，切不可盲目地一般化，应避免将中学阶段扩充数系的“规则”拔高为“公理”.

4. 把握好复数的三角表示的教学要求

《标准（2017 年版）》将复数的三角表示定位为选学内容，但同时和必修课程中的其他内容一样也为其设置了足够的课时. 再考虑到复数的三角表示架起了复数、向量和三角函数联系的桥梁，既可以简化某些复数的乘、除运算，又可以方便地解决很多平面向量、平面几何及三角公式的推导问题. 因此从重要性和教学的可行性出发，建议按必修内容对待复数的三角表示，力争所有学生都必选. 教学中应在加强复数与代数、向量、三角和几何的联系性上发力，使得学生通过复数的三角表示的学习，在直观想象、逻辑推理和数学运算素养方面得到真正提升.

---

① 可查阅高等学校抽象代数方面的书籍.

Ⅱ 教科书分析

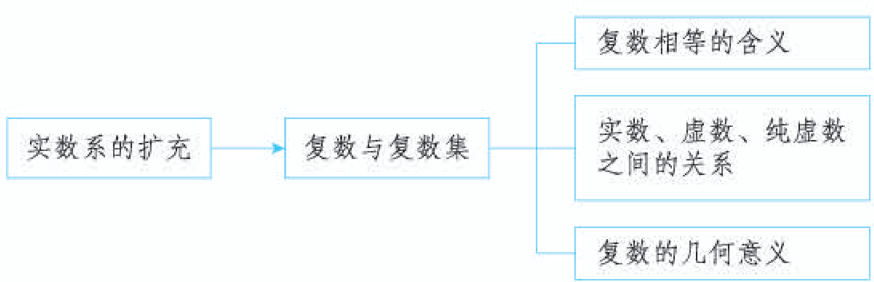
章引言及章头图

复数的引入与解实系数一元二次、一元三次方程密切相关．章引言从解一元二次方程说起——对实系数一元二次方程，如果 $\Delta=b^2-4ac<0$，那么它没有实数根．这个问题的本质是，在实数范围内，负数不能开平方．实际上，早在古希腊时代，数学家在研究解方程问题时就遇到了这个问题，但一直在回避．直到 1545 年，数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式，用求根公式和因式分解两种方法分别求解一些特殊的一元三次方程时，例如求解 $x^3=15x+4$ 时，得到了无法理解的结果，于是再也无法回避这个问题了，这才迫使人们认真对待复数．学生在初中阶段没有研究过如何解一元三次方程，并且初中阶段只要求学生用提取公因式法、公式法两种方法对一些简单的多项式进行因式分解，限于这样的基础，教科书没有按历史的线索进行引入．这样的处理方式，对于学生深入体会引入复数的必要性和培养理性精神是一种损失．教学中可以根据学生的实际认知基础和能力，适当参考数学史实，对教科书中引入复数的方式进行微调，以更好地引发学生体会引入复数的必要性，部分弥补上述损失．

章头图中火箭升空显示了人类进入太空，实现了对宇宙认识的飞跃，用以比喻学习复数是对数系认识的一次飞跃．

7.1　复数的概念

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：复数的概念、代数形式和几何意义．

难点：复数的扩充过程和向量表示．

三、教科书编写意图及教学建议

本节主要介绍复数的扩充过程，复数的相关概念，复数的代数形式及其几何意义．由于学生不熟悉数系扩充的“规则”，同时复数的向量表示具有一定综合性，因而复数的扩充过程、复数的向量表示是本节的教学难点．通过本节的学习，侧重提升学生的逻辑推理、直观想象素养．

本节节引言与章引言一脉相承，从“实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，它在实数集范围内没有实数根”出发，引出数系扩充问题：能否类比从有理数集扩充到实数集的过程，通过引入“新”数，将实数集进行扩充，使得方程在扩充后的数集中有解．这里主要为实数集进一步扩充的必要性以及扩充的基本思路作了铺垫．

7.1.1　数系的扩充与复数的概念

1. 数系的扩充

首先，应准确把握教科书中“从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2+a=0(a>0)$ 有没有解，进而可以归结为方程 $x^2+1=0$ 有没有解”的含义．实际上，若 $a>0$，则 $-a<0$，根据平方根的定义，求负数 $-a$ 的平方根即为：是否存在数 x，使得 $x^2=-a$．因此，负实数 $-a$ 能不能开平方，等价于方程 $x^2+a=0$（其中 $a>0$）有没有解．若令 $y=\frac{x}{\sqrt{a}}$，则方程 $x^2+a=0$ 转化为 $y^2+1=0$，因此可归结为方程 $x^2+1=0$ 有没有解．

其次，对实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$\Delta=b^2-4ac<0$）进行同解变形得 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，进而可以将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$\Delta=b^2-4ac<0$）有没有解，化归为方程 $x^2+1=0$ 有没有解．

在教学中，应引导学生梳理从自然数系逐步扩充到实数系的过程与方法，尤其是梳理从有理数系扩充到实数系的过程与方法，进而得到数系扩充中体现出的共性——“规则”：扩充后的数系中规定的加法运算、乘法运算，与原数系中的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律．进而在“规则”的引导下，考虑为使方程 $x^2+1=0$ 有解，对实数系进行进一步扩充的问题．在将实数系扩充到复数系的过程中，“希望在扩大的数集中，新的加法、乘法运算保持运算律”发挥着关键性作用，教学中应予以充分重视．

需要指出的是，在引出复数集的教学中，应认清此处的主要目标是得出复数集包含的所有数，以准确把握教学要求．即：主要进行的是 i 和实数之间的加法、乘法运算，并且大多是形式上的运算．例如，把实数 a 与新引入的数 i 相加，结果记作 $a+\mathrm{i}$；把实数 b 与 i 相乘，结果记作 $b\mathrm{i}$；把实数 a 与实数 b 和 i 相乘的结果相加，结果记作 $a+b\mathrm{i}$；等．这里还需要注意，$a+\mathrm{i}$ 可以看作是 $a+1\mathrm{i}$，$b\mathrm{i}$ 可以看作是 $0+b\mathrm{i}$，a 可以看作是 $a+0\mathrm{i}$，i 可以看作是 $0+1\mathrm{i}$．对于形如 $a+b\mathrm{i}$（$b\neq0$）之间的加法和乘法运算，此处不宜深究，待后续讨论复数的运算时，再研究这些运算的封闭性以及运算律．

2. 复数的概念

引入复数后，对形如 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的数，规定了虚数单位、实部、虚部等名称，其中应特别注意称 b 为虚部而不是虚部系数．

引入新对象后，为了保证对象的确定性，就要明确两个元素相等（或相同）的含义（定义）．

教科书采用直接规定的方式给出两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）相等的充要条件，实际上也可以看成是两个复数相等的定义. 由此可以得到一个重要特例，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，

$$a+bi=0 \text{ 当且仅当 } a=0 \text{ 且 } b=0.$$

教学中还应使学生明确，这里不仅给出了判断两个复数是否相等的依据，也给出了求某些复数值的依据. 即利用复数相等的含义，可以得到关于实数 a，b 的方程（组），通过解方程（组）得到 a，b 的值.

由两个复数相等的定义，可以把复数看成一个有序实数对，从而为复数的几何意义奠定基础.

3. 复数的大小关系

需要指出的是，一般说来，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小. 确切地说：若两个复数都是实数，则可以比较大小；否则，不能比较大小.

教师要认清上述结论，一定要区分“序关系”和“大小关系”这两个概念，我们所说的数的大小关系是一种序，但数系中序关系通常不一定能成为大小关系，实际上数系中规定的序关系①“$<$”（或“$>$”）除了满足一般序关系的传递性，即

对数系中的任意两个数 a，b，如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$，

还要再满足如下三个条件：

(1) 对数系中的任意两个数 a，b，$a<b$，$a=b$，$b<a$ 有且只有其中之一成立，

(2) 对数系中的任意三个数 a，b，c，如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$，

(3) 对数系中的任意三个数 a，b，c，$0<c$，如果 $a<b$，那么 $ac<bc$，

序关系“$<$”才能成为大小关系.

从抽象代数的角度看就是，对环（或域）而言，偏序集乃至全序集②不一定是有序环（或有序域）. 例如，整数系、有理数系、实数系对我们熟知的序关系“$<$”是有序环（或有序域）③；但在复数系中，尽管我们可以定义出不少“很合理的”序，但每种序都不能成为大小关系，即复数系不是有序域. 例如，我们可以在复数系中定义字典序，即

$$a+bi<c+di\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}) \Leftrightarrow a<c, \text{或 } a=c \text{ 且 } b<d.$$

这个序有很好的性质，它使得复数集成为全序集，而且与实数系中大小关系相容，似乎非常像大小关系，但容易证明它不是大小关系.

4. 例题的教学

例 1 是一道复习巩固复数概念的题目，首先要在变化中认识复数代数形式的结构，正确判断复数的实部、虚部，本例中复数 z 的实部为 $m+1$，虚部为 $m-1$；然后，依据复数是实数、虚数、纯虚数的条件，列方程（或不等式）求出相应的 m 的取值.

7.1.2 复数的几何意义

1. 本小节的开篇引导学生类比实数的几何意义，思考复数的几何意义，自然地引出本节的主要研究内容. 接着，在思考栏目中引导学生从复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）本质上是一对有序实

---

① 可查阅高等学校抽象代数方面的书籍.

② 同上.

③ 可查阅高等学校域论方面的书籍.

数对（a，b）出发，得到复数的一种几何表示方法：复数与平面上的点一一对应，这就是复数的一种几何意义.

2. 对于复平面，教学时应注意如下几点：

（1）复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 用复平面内的点 Z（a，b）表示. 复平面内的点 Z 的坐标是（a，b），而不是（a，$b\mathrm{i}$），也就是说，复平面内的纵坐标轴上的单位长度是 1，而不是 i；

（2）不宜强调复平面与一般坐标平面的区别；

（3）对于虚轴，重在明晰它的意义，即在说明虚轴上的点表示的数时，需要指出除原点外都表示虚数，因为原点表示实数 0，不要在“y 轴叫做虚轴”“y 轴（去除原点）叫做虚轴”哪种定义更“合理”上做文章.

3. 对于复数的向量表示，教科书仍然从复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）本质上是一对有序实数对（a，b）出发，基于有序实数对也可以看成是平面直角坐标系中向量的坐标，容易得到复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内以原点为起点的向量组成的集合也是一一对应的，这就是复数的另一种几何意义. 这里需要注意，由于数学中研究的向量是自由向量，因而我们规定相等的向量表示同一个复数. 进而从整体上认识复数的两种几何意义，即任意一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内的一点 $Z(a, b)$ 对应，复平面内任意一点 $Z(a, b)$ 又可以与以原点为起点，点 $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应. 这些对应都是一一对应，即

$$\begin{tikzcd} & z=a+b\mathrm{i} \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{一一对应}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{一一对应}"] & \\ Z(a,b) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{一一对应}"'] & & \overrightarrow{OZ} \end{tikzcd}$$

这样的综合，使我们讨论复数的运算、性质和应用时，可以在复平面内综合运用坐标法和向量方法.

4. 复数的模

由于复数与以原点为起点的平面向量是一一对应的，因而用复数对应的向量的模定义复数的模非常合理；同时，按照复数的模的定义，实数的模与实数的绝对值协调一致. 教学中应在这两方面对学生加以适当引导，以帮助他们融会贯通地认识复数的模.

需要指出的是，与上一版教科书相比，教科书中将复数的模作为由复数的平面向量表示自然派生出的一个概念，教学中切不可再作拓展.

5. 例题的教学

例 2 既复习巩固复数的两种几何意义以及复数的模，同时也为引入共轭复数进行铺垫——提供具体实例的支撑.

例 3 进一步复习巩固复数的模，并利用复数的模刻画一些常用几何图形——圆、圆形区域和环状区域.

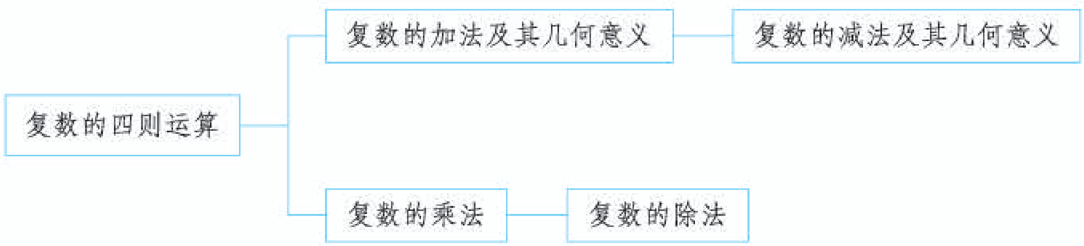
6. 共轭复数

教科书借助例 2 并结合几何直观引入共轭复数，之后通过思考栏目将例 2 中的几何直观一般化：若 z_1，z_2 是共轭复数，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$，它们在复平面内对应的点分别是（a，b），（a，$-b$），这两个点关于实轴对称. 这样的处理方式实际上也体现了《标准（2017 年

版）》中提出的形与数的融合.

7.2　复数的四则运算

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：复数代数形式的加、减、乘、除的运算法则及其运算律，复数加、减运算的几何意义.

难点：复数减法、除法的运算法则.

三、教科书编写意图及教学建议

引入一类代数对象，就要研究它的运算. 本节主要讨论复数的加法、乘法运算，并从它们的逆运算角度给出复数减法、除法的运算法则，还讨论复数加、减运算的几何意义. 本节的学习侧重提升学生的数学运算、直观想象素养.

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

1. 复数的加法法则的引入

复数的加法法则是直接规定的，教学中可以引导学生结合引入复数集的过程，即在将实数集扩充到复数集时，希望数集扩充后，在复数集中规定的加法运算、乘法运算，与实数集中规定的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律，自主探索如何“合理地”规定复数的加法法则. 具体为：

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）是任意两个复数，由于希望加法结合律成立，故 $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(bi+di)$；由于希望乘法对加法满足分配律，故 $z_1+z_2=(a+c)+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$. 这样就猜想出复数的加法法则.

当 $b=0$，$d=0$ 时，复数的加法法则与实数的加法法则一致，这说明复数系与实数系中加法运算协调一致.

通过上述过程，就能使学生较为充分地体会为什么如此规定复数的加法法则，以及法则的合理性.

引入复数的加法法则后，应引导学生与多项式的加法进行类比，以发现两者的共性. 教学

时，可以引导学生把复数 $a+bi$ 中实部和虚部 a，b 看作常数，i 看作“变元”，从而将复数 $a+bi$ 看成是“一次二项式”，进而就容易发现两个复数相加与两个一次二项式相加（合并同类项）一致．这样，可以得到两个复数相加与两个多项式相加类似，都可以看成是“合并同类项”，因此，对复数的加法法则不需要死记硬背.

2. 复数加法的交换律、结合律的证明

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，$z_3=a_3+b_3\mathrm{i}$，其中 a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，$b_3\in\mathbf{R}$.

（1）因为 $z_1+z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$,

$z_2+z_1=(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\mathrm{i}$,

又 $a_1+a_2=a_2+a_1$，$b_1+b_2=b_2+b_1$,

所以 $z_1+z_2=z_2+z_1$.

（2）因为 $(z_1+z_2)+z_3=[(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})]+(a_3+b_3\mathrm{i})=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}]+(a_3+b_3\mathrm{i})$

$=[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]\mathrm{i}$,

$z_1+(z_2+z_3)=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+b_2\mathrm{i})+(a_3+b_3\mathrm{i})]=(a_1+b_1\mathrm{i})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\mathrm{i}]$

$=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]\mathrm{i}$,

又 $(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$，$(b_1+b_2)+b_3=b_1+(b_2+b_3)$,

所以 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

3. 复数加法的几何意义

本部分的教学重点是：让学生对复数的加法与向量的加法是怎样联系起来并得到统一的过程做出探究，为此应着重从三个方面进行引导：一是复数与复平面内以原点为起点的平面向量一一对应；二是向量加法的坐标形式及其几何意义；三是复数的加法法则．这样学生的思路才能清晰连贯，进而真正领会复数加法的几何意义就是复数的加法可以按照向量的加法来进行，做到知其所以然，避免机械记忆.

4. 复数的减法

在复数减法的教学中，首先应类比实数的减法，规定复数的减法是加法的逆运算，即用两个复数的加法定义两者的差；然后依据复数的加法、复数相等的定义，通过解实系数方程，得到复数的减法法则．教学中可提醒学生，这里实际上使用的是待定系数法，它也是确定复数的一个一般方法.

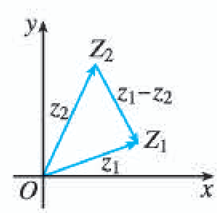


图 7-3

和复数的加法法则类似，复数的减法法则也不需要死记硬背．事实上，两个复数相减，也可以看成是“合并同类项”，类似于两个多项式相减.

类比复数加法的几何意义，容易得到复数减法的几何意义，即复数的减法可以按照向量的减法来进行，如图 7-3 所示.

5. 例题的教学

例 1 是一道复数的加减混合运算题，意在复习巩固复数加、减运算．通过例 1 引导学生进行复数代数形式的加、减法时，可以类似于多项式的加、减运算进行，这样既可不必记忆复数的加、减运算法则，还可以减少计算中的错误.

例 2 利用复数及其运算的几何意义研究复平面内两点的距离问题，将复平面内两点 Z_1，Z_2 的距离 Z_1Z_2 转化为 $|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=|z_1-z_2|$，使得几何问题代数化，是解决问题的关键．鉴于复

平面与坐标平面的高度一致性，本例实际上解决了平面解析几何中的一个基本问题——平面上两点 $Z_1(x_1, y_1)$，$Z_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式.

7.2.2 复数的乘除运算

1. 复数的乘法法则

与复数的加法法则类似，应引导学生结合引入复数集的过程，在希望保持运算律的指引下，自主探索如何“合理地”规定复数的乘法法则.

鉴于复数的乘法法则的形式较为复杂，因此，在引入复数的乘法法则后，更应引导学生加强与多项式的乘法进行类比，以发现两者的共性和差异. 具体地，将复数 $a+bi$ 看成是关于 i 的“一次二项式”，将复数的乘法按多项式的乘法进行，只要在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并即可. 因此，没有必要专门记忆复数乘法的法则.

2. 复数的乘法满足交换律、结合律，乘法对加法满足分配律. 教学中可以根据学生的实际情况，要求他们证明部分或全部运算律. 下面仅给出乘法交换律的证明：

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，其中 $a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbf{R}$.

因为 $$z_1z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i},$$
$$z_2z_1=(a_2+b_2\mathrm{i})(a_1+b_1\mathrm{i})=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)\mathrm{i},$$

又 $$a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1,\ a_1b_2+b_1a_2=a_2b_1+b_2a_1,$$

所以 $$z_1z_2=z_2z_1.$$

在复数的运算律的教学中，让学生适当进行形式化的运算，有助于培养他们的逻辑推理、数学运算素养.

3. 例 3、例 4 的教学

例 3 要求三个复数的连乘积，本例的目的有两个，一是让学生明晰，依据复数乘法的结合律，这种连乘形式有意义，可以看成左到右依次相乘；二是让学生熟悉复数的乘法. 教学中，要特别提醒学生注意 $(-2\mathrm{i})(4\mathrm{i})=8$，而不是 -8；也可以在例 3 前先安排几个两个复数相乘的题目，再进行例 3 的教学.

例 4 可以用复数的乘法法则直接计算，但这里主要是提醒学生实数系中的乘法公式在复数系中也有类似的公式，运用乘法公式可以简化运算过程.

4. 共轭复数的性质

教科书在例 4 里的旁白提出问题“若 z_1，z_2 是共轭复数，则 z_1z_2 是一个怎样的数?”目的是引导学生推广例 4 (1) 的结论，通过自主探究得到共轭复数的一个重要性质，即

设 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，则 $z\bar{z}$ 是实数，且 $z\bar{z}=a^2+b^2$.

共轭复数的这个性质也为学习复数的除法作了准备.

此外，共轭复数还有一些重要性质. 例如：

(1) 如果 $z=\bar{z}$，那么 $z\bar{z}$ 为实数；

(2) 共轭复数的和为实数，即设 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$，则 $z+\bar{z}=2a$；

(3) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$；

(4) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$；

(5) 如果实系数一元多项式方程有虚根，那么虚根以共轭复数的形式“成对”出现.

鉴于《标准（2017 年版）》对这些性质不作要求，因此教科书中没有予以呈现.

5. 复数的除法

教科书要求学生类比实数的除法是乘法的逆运算，探求复数的除法法则. 教学中可以引导学生联系复数减法法则的引入过程，规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}(a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y\in\mathbf{R},\ 且\ c+d\mathrm{i}\neq 0) \quad ①$$

的复数 $x+y\mathrm{i}$，叫做复数 $a+b\mathrm{i}$ 除以复数 $c+d\mathrm{i}$ 的商.

由①计算，可得 $\quad (cx-dy)+(cy+dx)\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$,

根据复数相等的定义，有 $\quad cx-dy=a,\ cy+dx=b.$

由此，得 $\quad x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}.$

于是 $\quad (a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\quad (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R},\ 且\ c+d\mathrm{i}\neq 0).$

6. 复数除法法则的形式比较复杂，不易准确记忆. 在实际进行复数除法运算时，按照复数的除法法则进行运算，非常烦琐，也极易出错. 教学中可以引导学生类比根式的除法，得到简便操作方法：先把两个复数相除写成“分数”形式，再把分子与分母都乘分母的共轭复数，使分母“实数化”，最后再作化简. 实际上，这种方法是进行复数除法运算的通法，依此进行复数除法运算，既简洁又不需要记忆烦琐的除法法则.

7. 例 5、例 6 的教学

例 5 是复数除法的计算题，目的是让学生熟练掌握上述复数除法的运算过程.

章引言指出，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时没有实数根. 因此，在研究代数方程的过程中，如果限于实数集，有些问题就无法解决. 在实数集扩充到复数集后，上述方程是否有解？如果有解，解是什么？例 6 与此相呼应，安排了从特殊到一般的两道小题，在复数范围内解实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$\Delta=b^2-4ac<0$）.

教科书在例 6 的基础上，梳理出在复数范围内实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的求根公式：

（1）当 $\Delta>0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

（2）当 $\Delta<0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,\mathrm{i}}{2a}$.

这样就“彻底”解决了解实系数一元二次方程的问题.

需要指出的是，鉴于已有的复数基础，例 6 的解答过程并不严密，教科书实际上默认了一元二次方程 $x^2+2=0$ 及其一般形式 $x^2+a=0(a>0)$ 的根不能超过两个这个直观事实. 要在复数范围内严密地解方程 $x^2+a=0(a>0)$（进而严密地解实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$），需要利用复数三角表示中的棣莫弗定理. 教科书在复数三角表示部分设置了选学栏目——“探究与发现　1 的 n 次方根”，以弥补这一不足.

8. 关于选学栏目“阅读与思考　代数基本定理”

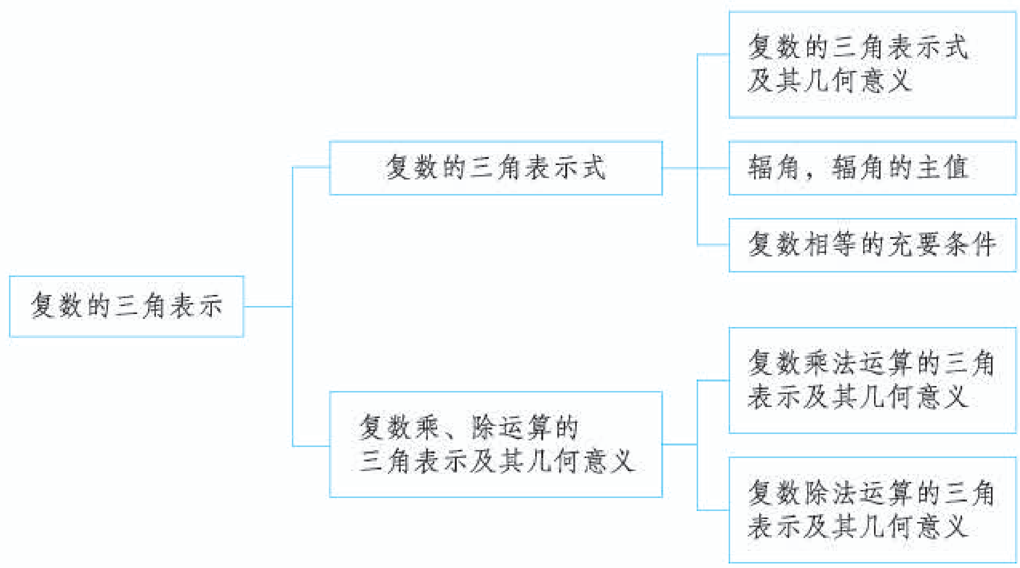
本栏目介绍代数基本定理，即：任何一元 n（$n\in\mathbf{N}^*$）次复系数多项式方程 $f(x)=0$ 至少有一个复数根. 进而，任何一元 n 次复系数多项式方程有 n 个复数根（重根按重数计）. 这说明

复数系是代数闭域，从而从解方程的角度进一步凸显出复数系的重要价值. 代数基本定理是数学中最重要的定理之一，它在代数学中起着基础性作用.

这样，教科书通过“完整地”介绍解方程的过程，让学生从一个侧面对复数的来龙去脉有个初步了解，有助于他们加深对引入复数的必要性和重要性的理解，也提升了他们学习复数的兴趣.

7.3* 复数的三角表示

一、本节知识结构框图



二、重点、难点

重点：复数的三角表示式，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

难点：复数的三角表示.

三、教科书编写意图及教学建议

本节主要介绍复数的三角表示式以及复数乘、除运算的三角表示和几何意义. 复数的三角表示是复数的一种重要表示形式，它沟通了复数与平面向量、三角函数等数学分支之间的联系，可以帮助我们进一步认识复数，也为解决平面向量、三角函数和一些平面几何问题提供一种重要途径；进一步地，还为今后在大学期间进一步学习复数的指数形式、复变函数论、解析数论等高等数学知识奠定基础. 可见本节知识起着承前启后的作用. 由于复数的三角表示式与复数的向量表示、三角函数有很强的关联性，其形式也比较复杂，因而复数的三角表示是本节的教学难点. 通过本节的学习，侧重提升学生的直观想象、逻辑推理和数学运算素养.

7.3.1 复数的三角表示式

1. 复数的三角表示式的概念

教科书中的探究和思考栏目，是在学生已有的知识基础上，借助复数的几何意义，引导学生利用平面向量$\overrightarrow{OZ}$的大小和方向来表示复数. 教学时，首先应让学生回顾复数的几何意义，即复数$z=a+bi$与复平面内的点$Z(a,\ b)$一一对应，与平面向量$\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$一一对应；然后从平面向量$\overrightarrow{OZ}$由它的大小和方向唯一确定出发，得出复数$z=a+bi$也由其对应的平面向量$\overrightarrow{OZ}$的大小和方向唯一确定；接着再引导学生思考是否能用向量$\overrightarrow{OZ}$的大小和方向来表示a，b，以及如何表示，进而展开探究.

在前面的学习中，学生已经知道向量$\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$的大小用模$r(r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0)$表示，但从什么角度刻画向量的方向，需要教师引导学生借助给出的图形共同解决，得出可以借助以x轴的非负半轴为始边，以向量$\overrightarrow{OZ}$所在的射线（射线OZ）为终边的角θ来刻画$\overrightarrow{OZ}$的方向. 教科书中给出的示意图表示的是复数对应的向量$\overrightarrow{OZ}$在复平面内第一象限内的情况，对于$\overrightarrow{OZ}$在其他象限或在实轴、虚轴上的情况，教学时可借助信息技术手段，让学生观察并思考是否也有与第一象限一致的结果. 再利用$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，最终得到复数的三角表示式$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 复数的三角表示式是本节课的教学难点，教学时要充分注意复数与平面向量、三角函数之间的联系.

复数的三角表示，实质上是用一个有序实数对$(r,\ \theta)$来确定一个复数，在得出复数的三角表示后，教师应引导学生分析$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的结构特点，即：① r是复数的模，$r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$；②式中的三角函数是同一个辐角值$\theta$的余弦和正弦；③$\cos\theta$在前，$\sin\theta$在后；④ $\cos\theta$和$\mathrm{i}\sin\theta$之间用“+”连接. 因此，一个表示复数的式子是否为三角表示式，不能只看它是否含有正弦和余弦符号，还要看这个式子是否正确地给出了模、辐角及其连接符号. 例如，对于以下等式左右两边的复数形式：

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$2(\cos 90^\circ+\mathrm{i}\sin 30^\circ)=\cos 90^\circ+\mathrm{i}\sin 90^\circ,$$

$$4\left(\sin\frac{7\pi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{7\pi}{2}\right)=4(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi),$$

各式中左边的式子都不符合复数三角形式的要求，只有化为右边的形式后，才是复数的三角形式. 教学时，可利用本节教科书中课后练习2进行复数三角形式的辨析，并借助三角函数的诱导公式，将非三角形式表示的复数化为三角形式.

2. 辐角的概念

对于辐角θ，要明确三点：一是它的意义，即θ是以x轴的非负半轴为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在射线（射线OZ）为终边的角；二是它的多值性和“周期性”，即任意一个不为零的复数，其辐角的值有无数多个，且这些辐角的值相差2π的整数倍，复数辐角的多值性和“周期性”可以通过数形结合，让学生从终边相同的角相差2π的整数倍的角度加以认识；三是教科书中规定的辐角主值区间为$[0,\ 2\pi)$，但在很多文献中也规定为$[-\pi,\ \pi)$，这些规定的功效是相同的，都是保

证复数的代数形式与复数的三角形式一一对应.

对于几类特殊复数的辐角主值，要让学生在理解的基础上熟记. 例如，对于 $a\in\mathbf{R}$，且 $a>0$，$\arg a=0$，$\arg(-a)=\pi$，$\arg a\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}$，$\arg(-a\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{2}$. 对于复数 0，应从零向量的方向是任意的出发，得出复数 0 的辐角也是任意的，其辐角的主值是 $[0, 2\pi)$ 内的任意角.

3. 复数代数形式和三角形式的互化

将复数的代数形式化为三角形式，要从复数三角形式的概念出发，关键是确定两个要素，一是复数的模，二是复数的辐角. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模可直接利用公式 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 求出；其辐角的求法并不唯一，可以利用 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，先求出 $\cos\theta$，再根据复数的几何意义，由复数对应点的坐标 $z(a, b)$，确定辐角 θ 的终边所在的象限，进而求出辐角 θ；也可以利用 $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ 或 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$ 求出 $\sin\theta$ 或 $\tan\theta$，再由辐角 θ 的终边所在的象限，利用"已知三角函数值"求角的方法，求出辐角 θ. 教科书中采用的是第一种方法，这种方法简洁方便. 教学中要提醒学生，在将复数的代数形式化为三角形式时并不要求辐角取主值，只是习惯上选取辐角的主值来表示辐角.

至于将复数的三角形式转化为代数形式，直接利用三角函数公式，求出三角形式中的正余弦值即可.

在复数代数形式和三角形式的互化的教学过程中，要特别注意让学生感受复数、平面向量以及三角函数三者之间的联系性.

4. 例题的教学

例 1 要求画出复数对应的向量，并把复数的代数形式化为三角形式，一方面是让学生进一步体会复数的几何意义，感受复数和平面向量一一对应的关系；更为重要的是借助复数对应点的坐标，判断角 θ 所在的象限，体会将复数代数形式化为三角形式的基本方法. 在讲解例 1 时，应提醒学生，这里复数的几何意义起到了重要的作用.

例 2 要求指出复数的模和一个辐角，画出复数对应的向量，并把复数的三角形式化为代数形式. 其用意一是通过几何直观，帮助学生进一步认识复数的三角形式中 r，θ 的含义，进而意识到复数实质上也可以由有序实数对 (r, θ) 唯一确定，再次感受复数与平面向量的联系，教学中应予以重视；二是帮助学生掌握直接利用三角函数公式，将复数的三角形式化为代数形式的方法.

5. 复数相等

应引导学生从复数相等的含义出发，通过适当推理得出两个用三角形式表示的非零复数相等的充要条件. 教学中可以引导学生按照下面的思路进行探究：两个复数相等$\Leftrightarrow$两个复数对应的向量相同$\Leftrightarrow$两个向量的长度相等且方向相同$\Leftrightarrow$两个复数的模相等且辐角的主值相等. 通过推理，结论的得出顺理成章，且易于接受.

7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

1. 复数乘法运算的三角表示

复数乘法运算的三角表示，其出发点是复数代数形式的乘法运算法则. 事实上，复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 可以看作是特殊的代数形式，即设 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，那么 $z=$

$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=a+b\mathrm{i}$. 利用复数的乘法运算法则，将两个以三角形式给出的复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$ 相乘，再利用两角和的正弦、余弦公式，就能得出复数乘法运算法则的三角表示，即 $z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$. 显然，与代数形式的乘法运算法则相比，这个式子简单易记. 教学中，要让学生体会复数乘法运算的三角表示的简捷性. 而且在得出复数乘法运算的三角表示式后，应让学生自己尝试用文字语言表述复数乘法运算的三角表示，还应提醒学生注意，复数乘法运算三角表示中的 θ_1，θ_2 以及 $\theta_1+\theta_2$ 都不一定是辐角的主值.

2. 复数乘法运算三角表示的几何意义

复数乘法运算三角表示的几何意义是本节课的一个重点，也是难点. 复数的乘法用三角形式来表示，不只是结果简单，更重要的是其几何意义明显，即复数的乘积相当于向量的旋转及伸缩. 教学时，应让学生尝试在复平面内分别画出 z_1，z_2 以及 $z_1\cdot z_2$ 对应的向量，体会复数的乘法运算与辐角的旋转变化以及模的伸缩变化之间的关系，渗透数形结合思想.

教科书中的旁白“你能解释 $\mathrm{i}^2=-1$ 和 $(-1)^2=1$ 的几何意义吗?”意在让学生对已经熟悉的代数运算，借助复数乘法的三角表示及其几何意义，从几何的角度进一步加深认识. 事实上，由 $\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，可得 $\mathrm{i}^2=-1$ 的几何意义是“将 i 对应的向量绕点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到 -1 对应的向量”. 同样，由 $(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=(-1)\cdot(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)\cdot(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=\cos2\pi+\mathrm{i}\sin2\pi=1$，可得 $(-1)^2=1$ 的几何意义是“将 -1 对应的向量绕点 O 按逆时针方向旋转 π，得到 1 对应的向量”.

3. 复数除法运算的三角表示及其几何意义

对于复数除法运算的三角表示，教科书中是让学生根据复数除法运算是乘法运算的逆运算这一规定，由复数乘法运算的三角表示，利用“配凑”的方法推导得出的.

除了教科书给出的方法外，还可以利用共轭复数，通过“分数”运算直接得出复数除法运算的三角表示，具体如下：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

教科书中的方法利用了化归与转化的数学思想，将复数除法运算转化为乘法运算，运算过程比较简洁；上述方法则直接利用了“分数”的性质，学生比较容易想到，但计算稍复杂些，两种推导方法各有所长，教学时可以根据学生的具体情况选取适当的方法.

复数除法运算三角表示的几何意义教科书只给出了探究的问题，没有给出答案，目的是让学生自己类比复数乘法运算三角表示的几何意义，得出复数除法运算三角表示的几何意义. 实际上，复数除法运算三角表示的几何意义就是：

两个复数 z_1，z_2 相除时，可以像图 7-4 那样，先分别画出与 z_1，z_2 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$，然后把向量$\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 θ_2（如果 $\theta_2<0$，就要把$\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的$\dfrac{1}{r_2}$，得到向量$\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是商$\dfrac{z_1}{z_2}$.

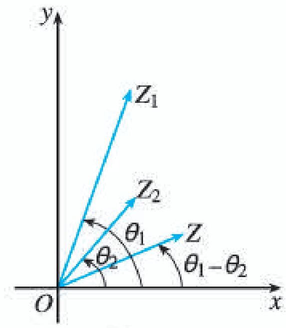


图 7-4

由复数乘、除运算三角表示的几何意义我们可以得到，复数的乘、除运算可以看作是向量的旋转和伸缩，从而为把代数问题转化为几何问题来解决提供了工具，这种转化的思想在分析问题和解决问题中经常用到，教师在教学中应注意引导学生深刻体会.

4. 例题的教学

例题 3 用来帮助学生巩固复数乘法运算三角表示及其几何意义，并培养他们的计算能力. 讲解本题时，教师应指出：如题目不作要求，复数乘法运算的计算结果可以用三角形式表示.

例题 4 利用复数乘法运算三角表示的几何意义解决一个简单问题，解决问题的关键是：一个复数 z 对应的向量绕点 O 按逆时针方向或顺时针方向旋转 θ（$\theta>0$）角后，得到的新复数，可以通过 $z\cdot(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 或 $z\cdot[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$计算得出.

例题 5 用来帮助学生巩固复数除法运算的三角表示，并培养他们的计算能力.

Ⅲ 习题解答

7.1 复数的概念

练习（第 70 页）

1. 它们的实部和虚部分别为：-2，$\frac{1}{3}$；$\sqrt{2}$，1；$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0；0，$-\sqrt{3}$；0，1；0，0.

2. 实数：$2+\sqrt{7}$，0.618，0；

虚数：$\frac{2}{7}\mathrm{i}$，i，$5\mathrm{i}+8$，$3-9\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\mathrm{i}(1-\sqrt{3})$，$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$；

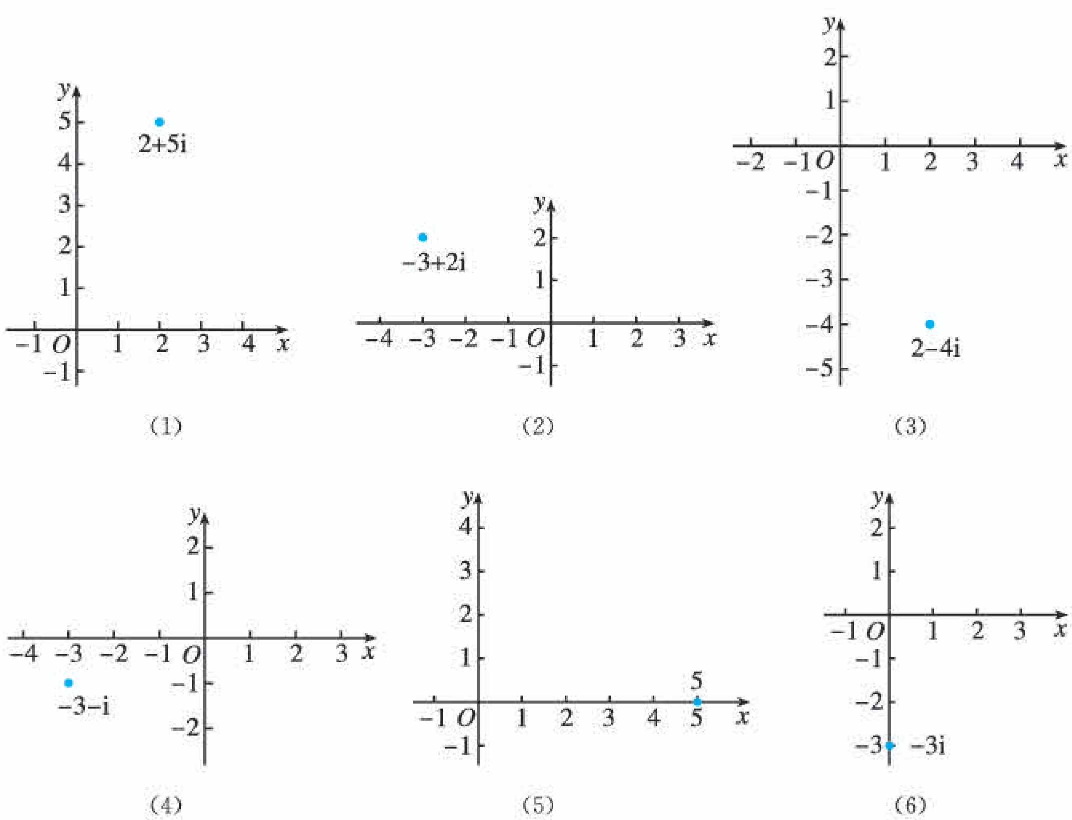
纯虚数：$\frac{2}{7}\mathrm{i}$，i，$\mathrm{i}(1-\sqrt{3})$.

3. (1) $x=4$，$y=-2$；　(2) $x=2$，$y=1$.

练习（第 73 页）

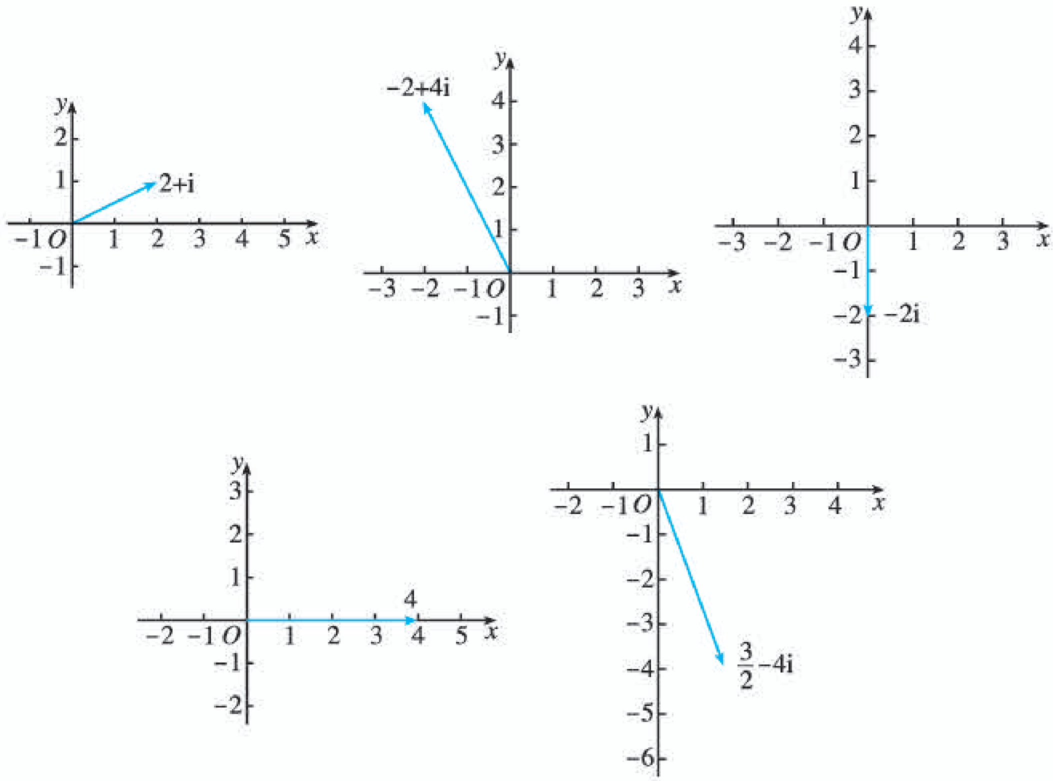
1. A：$4+3\mathrm{i}$，B：$3-3\mathrm{i}$，C：$-3+2\mathrm{i}$，D：$-3-3\mathrm{i}$，E：5，F：-2，G：$5\mathrm{i}$，H：$-5\mathrm{i}$.

2. 这些复数对应的点分别如图所示.



（第 2 题）

3. （1）这些复数对应的向量分别如图所示.



（第 3 题）

（2）$\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}$，2，4，$\frac{\sqrt{73}}{2}$.

习题 7.1

1. （1）存在，例如$-\sqrt{2}+\mathrm{i}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$，…；

   （2）存在，例如$1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，…；

   （3）存在，只能是$-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. （1）当$m^2-3m=0$，即$m=0$或$m=3$时，所给复数是实数；

   （2）当$m^2-3m\neq0$，即$m\neq0$且$m\neq3$时，所给复数是虚数；

   （3）当$\begin{cases}m^2-5m+6=0,\\ m^2-3m\neq0,\end{cases}$即$m=2$时，所给复数是纯虚数.

3. （1）由$\begin{cases}3x+2y=17,\\ 5x-y=-2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=7.\end{cases}$

   （2）由$x+y-3=0$，$x-4=0$，得$x=4$，$y=-1$.

4. （1）点P在第一象限；

   （2）点P在第二象限；

   （3）点P位于原点或虚轴的下半轴上；

   （4）点P位于实轴下方.

5. $|z_1|=5$，$|z_2|=\dfrac{3}{2}$，$|z_1|>|z_2|$.

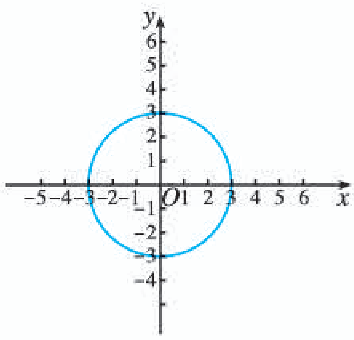
6. (1) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$即$-2<m<3$或$5<m<7$时，复数$z$对应的点位于第四象限.

(2) 当$\begin{cases}m^2-8m+15>0,\\m^2-5m-14>0,\end{cases}$或$\begin{cases}m^2-8m+15<0,\\m^2-5m-14<0,\end{cases}$即$m<-2$或$3<m<5$或$m>7$时，复数$z$对应的点位于第一或第三象限.

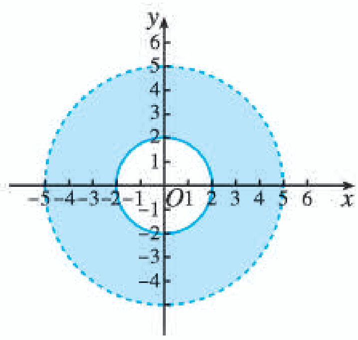
(3) 当$m^2-8m+15=m^2-5m-14$，即$m=\dfrac{29}{3}$时，复数z对应的点位于一次函数$y=x$的图象上.

7. (1) $2-\mathrm{i}$；　(2) $-2-\mathrm{i}$.

8. (1) 满足条件$|z|=3$的点Z的集合是以原点O为圆心，以3为半径的圆（图(1)）.



(1)

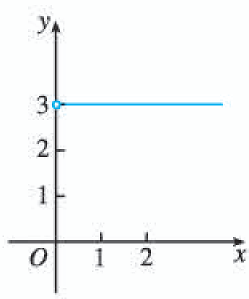


(2)

（第8题）

(2) 满足条件$2\leqslant|z|<5$的点Z的集合是以原点O为圆心，以2及5为半径的圆所夹的圆环，但不包括以5为半径的圆的边界（图(2)）.

9. 复数z对应的点位于如图所示的图形上.



（第9题）

10. 设$z=a+\sqrt{3}\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，则$a^2+(\sqrt{3})^2=4$，解得$a=\pm1$. 所以$z=\pm1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

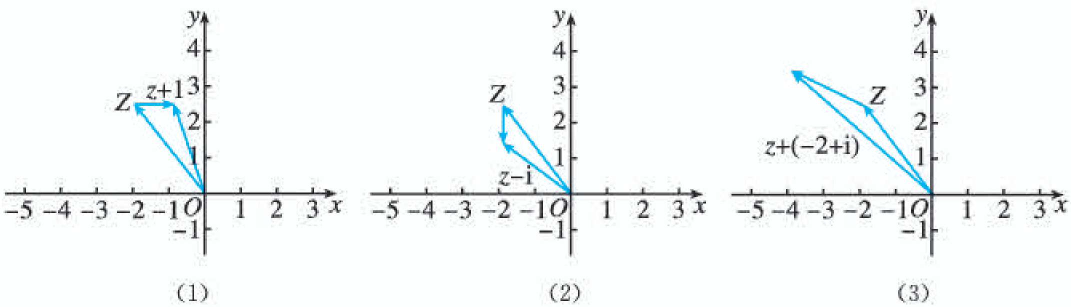
11. 因为$|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$，$|z_3|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$，$|z_4|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以，$Z_1$，$Z_2$，$Z_3$，$Z_4$这4个点都在以原点为圆心，半径为$\sqrt{5}$的圆上.

7.2　复数的四则运算

练习（第 77 页）

1. (1) 5；(2) $2-2i$；(3) $-2+2i$；(4) 0.

2. 运算结果对应的向量分别如图所示.



（第 2 题）

3. 设 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，$z_3=a_3+b_3i$，其中 a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，$b_3\in\mathbf{R}$.

因为 $z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$,

$z_2+z_1=(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)i$,

又 $a_1+a_2=a_2+a_1$，$b_1+b_2=b_2+b_1$,

所以 $z_1+z_2=z_2+z_1$.

因为 $(z_1+z_2)+z_3=[(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)]+(a_3+b_3i)=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i]+(a_3+b_3i)$

$=[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]i$,

$z_1+(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)+[(a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)]=(a_1+b_1i)+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]$

$=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]i$,

又 $(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$，$(b_1+b_2)+b_3=b_1+(b_2+b_3)$,

所以 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

4. (1) $\sqrt{5}$；　(2) 5.

练习（第 80 页）

1. (1) $-18-21i$；　(2) $6-17i$；　(3) $-20-15i$.

2. (1) -5；　(2) $-2i$；　(3) 5.

3. (1) i；　(2) $-i$；　(3) $1-i$；　(4) $-1-3i$.

4. (1) $x=\pm\dfrac{4}{3}i$；　(2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

习题 7.2

1. (1) $9-3i$；　(2) $-2+3i$；　(3) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{5}{12}i$；　(4) $0.3+0.2i$.

2. $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $(-3+4i)-(6+5i)=-9-i$，$\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $9+i$.

3. (1) $-21+24i$；　(2) $-32-i$；　(3) $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$；

(4) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;　　(5) $1+i$.

4. (1) $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$;　　(2) $\frac{18}{65}-\frac{1}{65}i$;

(3) $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$;　　(4) $1-38i$.

5. 因为向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数为 $(1+3i)-(-i)=1+4i$，向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数为 $(2+i)-(-i)=2+2i$，所以向量$\overrightarrow{BD}$对应的复数为 $(1+4i)+(2+2i)=3+6i$. 于是点 D 对应的复数为 $(-i)+(3+6i)=3+5i$.

6. (1) $x=-2\pm i$;　　(2) $x=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{4}$.

7. 由 $2(2i-3)^2+p(2i-3)+q=0$，得 $(10-3p+q)+(2p-24)i=0$.

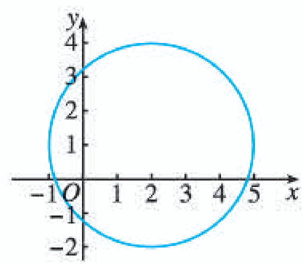
于是有 $\begin{cases}10-3p+q=0,\\2p-24=0.\end{cases}$ 解得 $p=12$，$q=26$.

8. (1) $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$;

(2) $a^4-b^4=(a+b)(a-b)(a+bi)(a-bi)$.

9. 如图，点 Z 的集合是以 (2，1) 为圆心，以 3 为半径的圆.

10. 略.



（第 9 题）

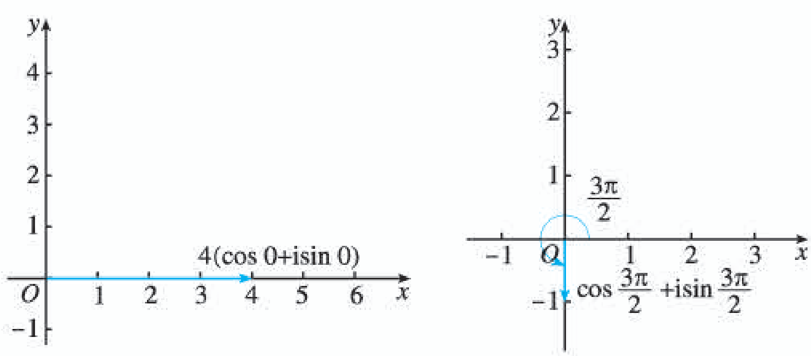
7.3* 复数的三角表示

练习（第 86 页）

1. (1) $4(\cos 0+i\sin 0)$;　　(2) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

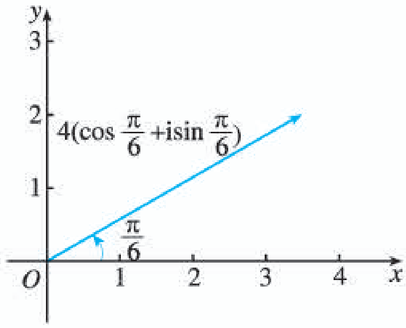
(3) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;　　(4) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

对应的向量如图所示.

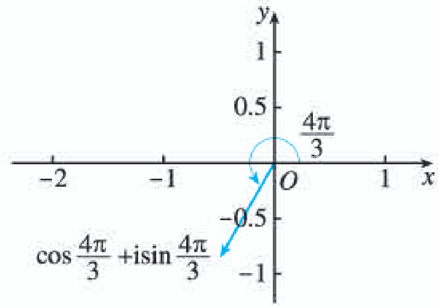


(1)　　(2)

（第 1 题）



(3)



(4)

（第 1 题）

2. （1）不是，$\frac{1}{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$；　（2）不是，$\frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$；

（3）不是，$\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$；　（4）是；

（5）不是，$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

3. （1）$-6i$；　（2）$1-\sqrt{3}i$.

练习（第 89 页）

1. （1）$16(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi)$（或$(4\sqrt{6}-4\sqrt{2})+(4\sqrt{6}+4\sqrt{2})i$）；

（2）$8(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$（或 $4\sqrt{3}+4i$）；

（3）$\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$（或$\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}i$）；

（4）-30.

2. （1）$2(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi)$（或$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}i$）；

（2）$\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos 285^\circ+i\sin 285^\circ)$（或$\frac{3-\sqrt{3}}{4}-\frac{3+\sqrt{3}}{4}i$）；

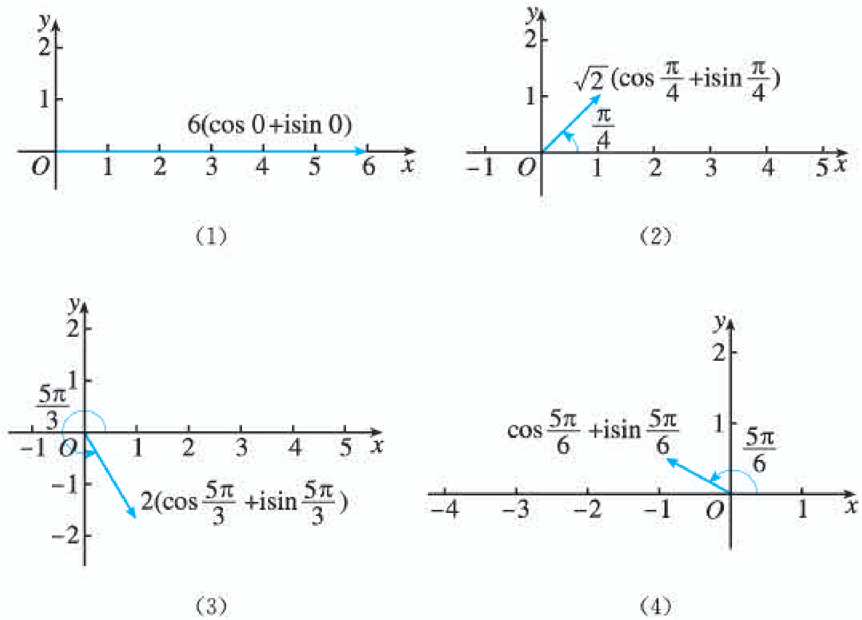
（3）$2(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)$（或$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$）；

（4）$\frac{1}{2}(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$（或$-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$）.

3. 所求的复数就是 $3-\sqrt{3}i$ 除以一个复数 z_0 的商，这个复数 z_0 的模是 1，辐角的主值是 60°，所以所求的复数是 $(3-\sqrt{3}i)\div(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=(3-\sqrt{3}i)\div(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(3-\sqrt{3}i)\cdot(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2\sqrt{3}i$.

习题 7.3

1. 复数对应的向量如图所示.



（第 1 题）

(1) $6(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$； (2) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$；

(3) $2(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3})$； (4) $\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}$.

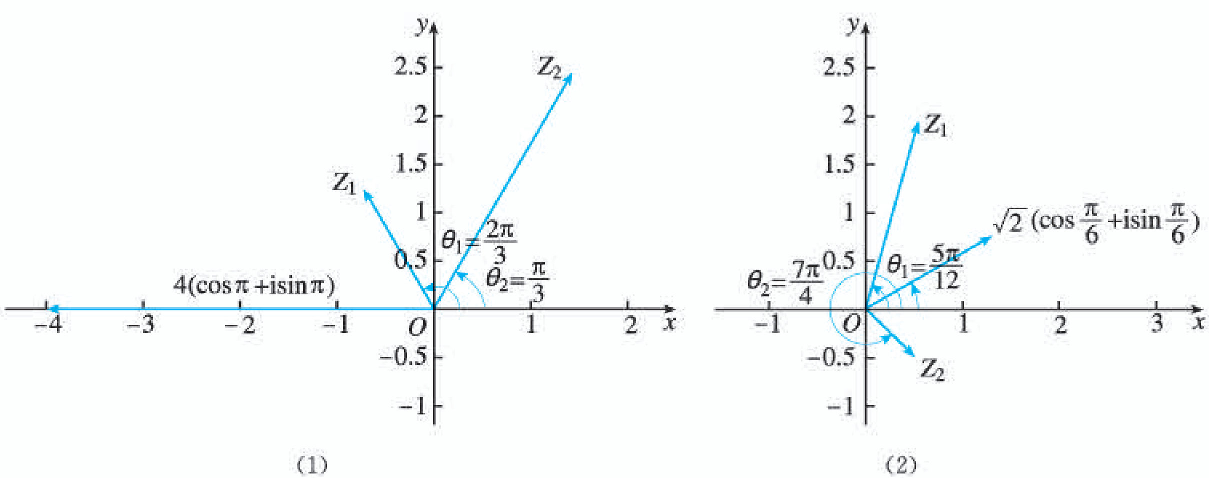
2. (1) $3+3\mathrm{i}$； (2) $4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$； (3) -9； (4) $-3-3\sqrt{3}\mathrm{i}$.

3. (1) $9\mathrm{i}$； (2) $-\sqrt{10}+\sqrt{10}\mathrm{i}$； (3) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$； (4) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

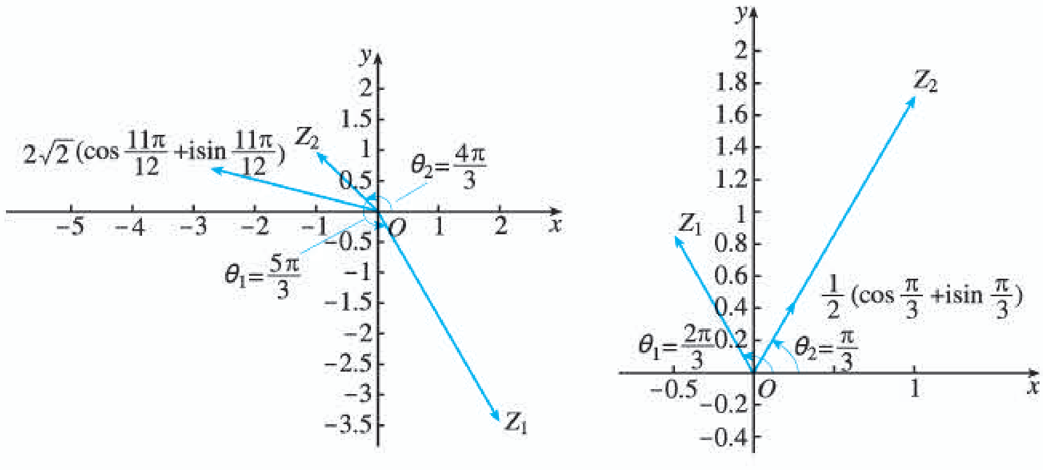
4. (1) $z=-4$； (2) $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$；

(3) $z=2\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12})$； (4) $z=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$.

几何解释如图所示.



（第 4 题）



(3)　　　　　　　　(4)

(第 4 题)

5. (1) $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta-(i\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+i\sin^2\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$;

(2) 因为$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}=\dfrac{1}{4}(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{1}{4}(\cos\dfrac{23\pi}{12}+i\sin\dfrac{23\pi}{12})$，所以$\dfrac{1}{z}$的模为$\dfrac{1}{4}$，辐角为 $2k\pi+\dfrac{23}{12}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$，所以$\dfrac{1}{z}$的模为 1，辐角为 $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}}=\cos\dfrac{7\pi}{4}-i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$，所以$\dfrac{1}{z}$的模为 1，辐角为 $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

6. (1) 原式$=\cos(75^\circ+15^\circ)+i\sin(75^\circ+15^\circ)=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$;

(2) 原式$=[\cos(2\pi-3\theta)+i\sin(2\pi-3\theta)][(\cos(2\pi-2\theta)+i\sin(2\pi-2\theta)]$

$=\cos(2\pi-3\theta+2\pi-2\theta)+i\sin(2\pi-3\theta+2\pi-2\theta)=\cos(4\pi-5\theta)+i\sin(4\pi-5\theta)$

$=\cos(-5\theta)+i\sin(-5\theta)=\cos 5\theta-i\sin 5\theta$.

7. (1) 原式$=\dfrac{\cos(7\theta+2\theta)+i\sin(7\theta+2\theta)}{\cos(5\theta+3\theta)+i\sin(5\theta+3\theta)}=\dfrac{\cos 9\theta+i\sin 9\theta}{\cos 8\theta+i\sin 8\theta}$

$=\cos(9\theta-8\theta)+i\sin(9\theta-8\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$;

(2) 原式$=\dfrac{\cos(2\pi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi)}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\cos(2\pi-\varphi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi-\varphi)$

$=\cos(2\pi-2\varphi)+i\sin(2\pi-2\varphi)=\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi$.

8. 将$\overrightarrow{OZ}$ 按逆时针方向旋转 45°，所求的复数就是$\sqrt{3}-i$ 乘一个复数 z_0 的积，这个复数 z_0 的

模是 1，辐角的主值是 45°，所以所求的复数是

$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})\cdot(\cos 45^\circ+\mathrm{i}\sin 45^\circ)=(\sqrt{3}-\mathrm{i})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

将$\overrightarrow{OZ}$按顺时针方向旋转 60°，所求的复数就是$\sqrt{3}-\mathrm{i}$除以一个复数 z_0 的商，这个复数 z_0 的模是 1，辐角的主值是 60°，所以所求的复数是

$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})\div(\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)=(\sqrt{3}-\mathrm{i})\cdot(\cos 60^\circ-\mathrm{i}\sin 60^\circ)=(\sqrt{3}-\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-2\mathrm{i}.$$

9. 由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，得$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $(2+\mathrm{i})-1=1+\mathrm{i}$，

又$\overrightarrow{AC}$ 可以看成是$\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 60°得到的，因此它对应的复数为

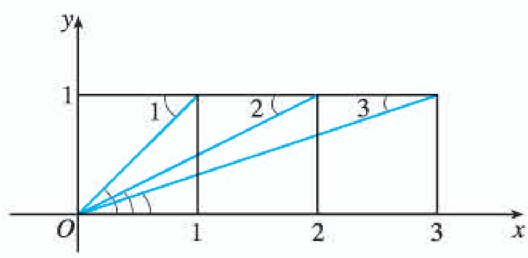
$$[\cos(-60^\circ)+\mathrm{i}\sin(-60^\circ)]=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

由$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为$\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

所以点 C 的坐标是 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. 建立如图所示的平面直角坐标系，确定复平面. 由于平行线的内错角相等，∠1，∠2，∠3 分别等于复数 $1+\mathrm{i}$，$2+\mathrm{i}$，$3+\mathrm{i}$ 的辐角的主值，这样∠1+∠2+∠3 就是 $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ 的辐角. 而

$$(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=(1+3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=10\mathrm{i},$$



（第 10 题）

其辐角的主值是$\frac{\pi}{2}$，并且∠1，∠2，∠3 都是锐角，

于是 $0<\angle 1+\angle 2+\angle 3<\frac{3\pi}{2}$，所以$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}$.

复习参考题 7

1. (1) A；　(2) B；　(3) D；　*(4) D.

2. (1) $\pm 3-4\mathrm{i}$；　(2) $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$；　(3) $9+\mathrm{i}$；　*(4) $-4+4\mathrm{i}$.

3. 设 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$，$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z|^2=a^2+b^2$，

$|\overline{z}|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z|^2=a^2+b^2$，于是 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$.

4. 由已知，设 $z=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq 0)$，则 $(z+2)^2-8\mathrm{i}=(b\mathrm{i}+2)^2-8\mathrm{i}=(4-b)+(4b-8)\mathrm{i}$.

由 $(z+2)^2-8\mathrm{i}$ 是纯虚数，得$\begin{cases}4-b^2=0,\\4b-8\neq 0,\end{cases}$解得 $b=-2$. 因此 $z=-2\mathrm{i}$.

5. (1) $4x^2+9=0$，$x^2=-\frac{9}{4}$，所以 $x=\pm\frac{3\mathrm{i}}{2}$；

(2) $x^2-8x+17=0$，因为 $b^2-4ac=64-68<0$，所以 $x=\frac{8\pm\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=\frac{8\pm 2\mathrm{i}}{2}=4\pm\mathrm{i}$.

6. 由已知可得 $z_1+z_2=8+6\mathrm{i}$，$z_1z_2=55+10\mathrm{i}$. 又 $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$，所以 $z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{55+10\mathrm{i}}{8+6\mathrm{i}}=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

7. 设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$. 由 $(1+2\mathrm{i})\overline{z}=4+3\mathrm{i}$，得 $(1+2\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$，化简得 $(a+2b)+(2a-b)\mathrm{i}=4+3\mathrm{i}$.

根据复数相等的条件，有 $\begin{cases}a+2b=4,\\2a-b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$ 于是 $z=2+\mathrm{i}$，$\overline{z}=2-\mathrm{i}$，所以 $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

8. (1)

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-\mathrm{i}$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$	1

(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+2}=-1$；$\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4n+4}=1$.

9. 由 $z_1=z_2$，得 $\begin{cases}m=2\cos\theta,\\4-m^2=\lambda+3\sin\theta.\end{cases}$

消去 m，可得 $\lambda=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4(\sin\theta-\frac{3}{8})^2-\frac{9}{16}$.

由于 $-1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，可得 $-\frac{9}{16}\leqslant\lambda\leqslant 7$.

*10. 由菱形的性质可知，向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是由 $\overrightarrow{OA}$ 按逆时针方向旋转 $60°$，$120°$ 得到的. 所以点 B 对应的复数是 $(2+\mathrm{i})(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)=(2+\mathrm{i})(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})=(1-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})\mathrm{i}$；点 C 对应的复数是 $(2+\mathrm{i})(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)=(2+\mathrm{i})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})=-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})+(\sqrt{3}-\frac{1}{2})\mathrm{i}$.

Ⅳ 教学设计案例

7.1.1　数系的扩充和复数的概念（1课时）

一、内容和内容解析

1. 内容

从实数系扩充到复数系的过程与方法，复数的概念.

2. 内容解析

复数的引入是数系的又一次扩充，也是中学阶段数系的最后一次扩充，通过复数的学习，可以使学生对于数的概念有一个更加完整的认识. 复数与平面向量、平面解析几何、三角函数等都有密切的联系，也是进一步学习数学的基础. 复数在力学、电学及其他学科中都有广泛的应用.

在数学中，数系的扩充必须遵循有关的“规则”，即扩充后的数系中规定的加法运算、乘法运算，与原数系中的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律. 从实数系向复数系扩充，同样要符合这样的规则. 复数概念的引入，从实系数一元二次方程当判别式小于0时没有实数根出发，回顾从自然数系逐步扩充到实数系、特别是有理数系扩充到实数系的过程，得到数系扩充中体现出的“规则”，进而在“规则”的引导下，考虑为使方程 $x^2+1=0$ 有解，引入新数 i，从而可以像实数一样进行加法、乘法运算并保持运算律的角度，将实数集扩充到复数集. 这一过程，通过数系扩充“规则”的归纳，提升学生的数学抽象素养；通过实数系向复数系的扩充，让学生体会类比的数学思想，提升学生的逻辑推理素养，并感受人类理性思维在数系扩充中的作用.

复数的概念是整个复数内容的基础. 复数的有关概念都是围绕复数的代数表示形式展开的，虚数单位、实部、虚部的命名，复数相等的含义，以及虚数、纯虚数等概念的理解，都是在促进对复数实质的理解，即复数 $a+bi$ 实质上是有序实数对 (a, b). 通过对复数实质的揭示，为后续复数的几何意义、复数的四则运算以及复数的三角表示的学习作准备. 因此，复数的概念，对本章具有奠基性的作用.

基于以上分析，确定本节课的教学重点：从实数系扩充到复数系的过程与方法，复数的概念.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解引入复数的必要性；

（2）了解数系扩充的一般“规则”，了解从实数系扩充到复数系的过程，感受数系扩充过程中人类理性思维的作用，提升数学抽象、逻辑推理素养；

（3）理解复数的代数表示式，理解复数的有关概念，理解复数相等的含义.

2. 目标解析

达成上述目标的标志是：

（1）能够通过方程的解，感受引入复数的必要性，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运

算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用.

（2）学生能够从自然数系逐步扩充到实数系的过程中，归纳出数系扩充的一般“规则”，体会扩充的合理性及人类理性思维在数系扩充中的作用.

（3）学生能说明虚数 i 的由来，能够明晰复数代数表示式的基本结构，会对复数进行分类，会用 Venn 图表示复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系；知道两个复数相等的含义，能利用复数概念和复数相等的含义解决相关的简单问题.

三、教学问题诊断分析

学生在学习本节课内容之前，在义务教育阶段已经经历了从自然数到实数的扩充过程，对数系的扩充有了一定的认识，知道数系扩充后，新的数系能够解决在原有数系中无法解决的一些解方程问题（如引入无理数，把有理数系扩充到实数系后，可以解决方程 $x^2-2=0$ 的解这样的问题等），因此当遇到像 $x^2+1=0$ 这样的方程的解问题时，通过引导启发，学生能够联想到对现有的实数系进行进一步扩充，从而使方程 $x^2+1=0$ 有解. 学生在前面的学习中，也已多次利用过类比的方法来研究数学问题，这为本节课类比有理数系扩充到实数系的过程和方法，将实数系扩充到复数系提供了可能.

学生在学习时可能出现的障碍为：

（1）因为现实生活中没有任何事物支持虚数，学生可能会怀疑引入复数的必要性，在教学中，如果单纯地讲解或介绍复数的概念会显得枯燥无味，学生不易接受.

（2）由于知识储备和认知能力的限制，学生对数系扩充的一般规则并不熟悉，对虚数单位的引入，以及虚数单位和实数进行形式化运算的理解会出现一定困难.

（3）学生以前学习过的数都是单纯的一个数，而复数的代数形式是两项和的形式，学生比较陌生，因此理解上会存在一定困难.

本节课的教学难点是：复数系扩充过程的数学基本思想，复数的代数表示. 突破难点的策略：

（1）适当介绍数的发展简史，增强学生学习的生动性.

（2）通过解方程问题引导，借助已有的数系扩充的经验，特别是从有理数系扩充到实数系的经验，从特殊到一般，帮助学生梳理出数系扩充过程中体现的“规则”，进而在“规则”的引导下进行从实数系到复数系的扩充，感受引入复数的必要性和合理性.

（3）引导学生按照“规则”自主探究出复数集中可能存在的各种数，并归纳总结出复数的一般表示方法，经历复数形式化的过程.

四、教学过程设计

（一）创设情境，引出研究内容

创设情境：我们知道，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时没有实数根. 因此，在研究代数方程的过程中，如果限于实数集，有些问题就无法解决. 事实上，数学家在研究解方程问题时早就遇到了负实数的开平方问题，但他们一直在回避. 直到 1545 年，数学家在研究实系数一元三次方程的求根公式时，用求根公式、因式分解法两种方法同时求解一些特殊的一元三次方程时，得到了无法理解的结果，于是再也无法回避这个问题了. 例如，求解 $x^3=15x+4$ 时，利用三次方程的求根公式可以得出三个根 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+$

$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$；而通过因式分解，得 $(x-4)(x^2+4x+1)=0$，因此方程的三个根为 $x_1=4$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=-2-\sqrt{3}$，于是就得到 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$ 这个在当时无法理解的等式，数学家们就去尝试研究诸如 $\sqrt{-121}$ 的问题．在解决这些问题的过程中，他们遇到的最大困扰就是，负实数到底能不能开平方？如何开平方？负实数开平方的意义是什么？

师生活动：以教师引导为主，主要介绍历史上，数学家们经过了反复的研究探索，将实数系进一步扩充，引入了一种新的数——复数，从而将实数系扩充到复数系，解决了负数开平方的问题，本章我们就来研究复数．本节课我们先类比自然数集逐步扩充到实数集的过程和方法，研究如何把实数集扩充到复数集，学习复数的有关概念，后续我们还要继续研究复数的几何意义，复数的四则运算以及复数的三角表示等．

设计意图：通过对复数发展历史的简要介绍，特别是三次方程根的问题的介绍，引发学生的认知冲突，激发学生对数系扩充过程的兴趣，并点出本节课的主要内容，进而简要介绍本章的学习内容，使学生对本章的知识脉络有个大致认识．

（二）归结为方程求解，梳理数系扩充的“规则”

问题 1：从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2=-a(a>0)$ 是否有解，也就是 $x^2+a=0$ 是否有解的问题．思考一下，能不能把这类问题再进一步简化，最终转化为最简单的方程 $x^2+1=0$ 是否有解的问题呢？

师生活动：学生思考、演算，教师引导：将方程 $x^2+a=0$ 两边同除以 a，可得 $\frac{x^2}{a}+1=0$，即 $(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1=0$．令 $y=\frac{x}{\sqrt{a}}$，则 $x^2+a=0$ 可以转化为 $y^2+1=0$．因此，$x^2+a=0$ 有没有解，就可以归结为 $x^2+1=0$ 有没有解．

追问：我们知道，$x^2+1=0$ 在实数集中无解，联系从自然数集到实数集的扩充过程，是否能引入新数，适当扩充实数集，使这个方程在新数集中有解呢？

师生活动：教师进一步引导：下面，我们就类比从自然数集到实数集的扩充过程，尝试引入新数，适当扩充实数集，使这个方程在新数集中有解．引入什么数，如何扩充实数集？这就是我们今天所要研究的问题．

设计意图：通过问题 1，将历史上的负数能否开平方的问题转化为方程 $x^2+1=0$ 是否有解的问题，为后续从解方程的角度研究数系的扩充作好铺垫，同时也让学生认识到数学中的复杂问题都可以通过转化与化归的方法，转化为基本问题．通过追问，点出本节课的主要任务，以及研究的思路和方法．

问题 2：我们把一个数集连同规定的运算以及满足的运算律叫做一个数系．回顾从自然数系逐步到实数系的扩充过程，每一次数系扩充的主要原因是什么？分别解决了什么实际问题和数学问题？你能借助下面的方程，从解方程的角度加以说明吗？

（1）在自然数集中求方程 $x+1=0$ 的解；

（2）在整数集中求方程 $2x-1=0$ 的解；

（3）在有理数集中求方程 $x^2-2=0$ 的解；

师生活动：教师提出问题，学生分组讨论，从两个角度思考问题，可让一半学生侧重讨论解

决的实际问题，另一半学生侧重讨论解决的数学问题，教师参加到讨论之中，对学生讨论中的不足之处教师补充说明，讨论后，学生交流互动，师生共同归纳总结出结论.

预设答案：(1) 从社会实践来看，数系的扩充是为了满足生活和生产实践的需要. 计数的需要产生了自然数，有了自然数系；自然数系中不能刻画具有相反意义的量，于是引入了负整数，将自然数系扩充到了整数系；整数系中不能解决测量中的一些等分等问题，于是引入了分数，将整数系扩充到了有理数系；有理数系中无法解决边长为 1 的正方形对角线长的度量等问题，于是引入了无理数，这样便将有理数系扩充到了实数系. (2) 从数学发展本身来看，数系的扩充也是数学本身发展的需要. 方程 $x+1=0$ 在自然数集 $\mathbf{N}$ 内无解，引入负整数后，它在整数集 $\mathbf{Z}$ 内便有解 $x=-1$；方程 $2x-1=0$ 在整数集 $\mathbf{Z}$ 内无解，引入分数后，它在有理数集 $\mathbf{Q}$ 内便有解 $x=\frac{1}{2}$；方程 $x^2-2=0$ 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 内无解，引入无理数后，它在实数集 $\mathbf{R}$ 内便有解 $x=\sqrt{2}$.

教师板书：

$$\text{自然数集}\mathbf{N}\xrightarrow[\text{负整数}]{\text{引入}}\text{整数集}\mathbf{Z}\xrightarrow[\text{分数}]{\text{引入}}\text{有理数集}\mathbf{Q}\xrightarrow[\text{无理数}]{\text{引入}}\text{实数数集}\mathbf{R}$$

设计意图：通过梳理数的发展历史，抓住知识的“生长点”和学生的“最近发展区”，使学生了解数的产生以及数系的不断扩充是基于两方面原因：社会生产实践的需要和数学自身发展的需要.

问题 3：可以看出，数集的每一次扩充，都是在原来数集的基础上添加“新数”得到的，引入新数就要引入新运算，如果没有运算，数集中的数只是一个个孤立的符号. 加法和乘法运算是上述数系中最基本的运算（减法、除法运算分别可以转化成加法、乘法运算）. 梳理从自然数系逐步扩充到实数系的过程，数系的每一次扩充，加法和乘法运算满足的" 性质" 有一致性吗？由此你能梳理数系扩充遵循的“规则”吗？

师生活动：教师引导分析，从自然数集扩充到整数集时，原来在自然数集中规定的加法和乘法运算法则和运算律在整数集中仍然成立；进而学生小组讨论，探求从整数集到有理数集以及从有理数集到实数集的扩充中，加法和乘法满足的“性质”，教师要特别强调从有理数集扩充到实数集满足的“性质”. 师生共同总结这些性质的一致性，得出数系扩充的“规则”：数集扩充后，在新数集中规定的加法运算和乘法运算，与原来数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律.

教师继续板书：

$$\begin{array}{ccccccc}\text{自然数集}\mathbf{N} & \xrightarrow[\text{负整数}]{\text{引入}} & \text{整数集}\mathbf{Z} & \xrightarrow[\text{分数}]{\text{引入}} & \text{有理数集}\mathbf{Q} & \xrightarrow[\text{无理数}]{\text{引入}} & \text{实数数集}\mathbf{R} \\ + & & + & & + & & + \\ \times & & \times & & \times & & \times\end{array}$$

设计意图：梳理数系扩充过程和方法的“一致性”，总结数系扩充的一般“规则”，为后续实数系的进一步扩充提供方法，进而突破本节课的难点.

（三）依据规则，扩充实数集，引入复数

问题 4：方程 $x^2+1=0$ 在实数系中无解，类比从自然数系扩充到实数系的过程，特别是从

有理数系扩充到实数系的过程，你能设想一种方法，使这个方程有解吗？

师生活动：学生思考回答：可以添加新数，对实数集进行扩充，并且添加新数后的新的数集中的加法和乘法运算，与实数集中加法和乘法运算协调一致，并且运算律保持不变.

追问：引入一个什么样的数呢？

师生活动：教师通过信息技术制作的课件介绍虚数的引入历史，并给出虚数单位的概念. 我们可以引入一个数“i”，使 $i^2=-1$，这样 $x=i$ 就是方程 $x^2+1=0$ 的解. 因为历史上，新数 i 是瑞士著名数学家欧拉在 1777 年首次提出的，他用了“imaginary”一词的首字母，本意是这个数是虚幻的. 所以，我们把这个数称为“虚数单位”.

设计意图：教师介绍与虚数单位 i 有关的历史，激发学生的学习兴趣，强化对 i 的认识.

问题 5：把新引进的数 i 添加到实数集中后，我们希望按照前面总结的数系扩充的“规则”，对实数系进行进一步扩充. 那么，实数系经过扩充后，得到的新数系由哪些数组成？

师生活动：教师引导，可以类比有理数系扩充到实数系的过程与方法，以及实数系中新数的形式，如 $2\sqrt{2}$，$2+\sqrt{3}$ 等. 学生思考回答，可能会说出类似 $3i$，$1+i$，$3-i$，$2+3i$，$\frac{1}{i}$ 等具体的数. 教师引导学生归纳：新数集中的数是由原来的实数和新引入的虚数 i 经过适当“组合”而成的，构成的方法就是将实数和 i 进行运算，组成新数，这里主要进行的是 i 和实数之间的加法、乘法运算，因为按照我们前面总结的规则：新数集中规定的加法和乘法运算，与原来数集中规定的加法和乘法运算协调一致，并且运算律仍然成立. 这样我们就可以把实数 a 与新引入的数 i 相加，得到 $a+i$；把实数 b 与 i 相乘，得到 bi；把实数 a 与实数 b 和 i 相乘的结果相加，得到 $a+bi$. 因为我们是要得到新数集中所有数的基本表示形式（即 $a+bi$ 的形式），所以这里都只进行最基本的形式上的运算即可，至于 $\frac{1}{i}$ 等形式，它们不是最基本的形式，在后续的复数运算中再去研究，它们也能化为 $a+bi$ 的形式.

追问（1）：你能写出一个形式，把刚才大家所说的数都包含在内，并说明理由吗？

师生活动：学生思考回答，所有新数集中的数都可以写成 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）的形式，因为 $a=a+0i$，$bi=0+bi$，$i=0+1i$，$a+i=a+1i$.

追问（2）：你能写出新数集的集合吗？

师生活动：学生口述，教师板书：$\mathbf{C}=\{a+bi\mid a，b\in\mathbf{R}\}$.

设计意图：通过问题 5 和追问（1）（2），引导学生类比自然数系到实数系不断扩充过程中所遵循的规则，根据“运算”和“运算律”，由特殊到一般，抽象概括出复数的代数形式和复数集，让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用，以及数学形式化、符号化的过程，突破本节课的难点，提升学生逻辑推理、抽象概括素养.

问题 6：阅读教科书，回答以下问题：

（1）复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）的虚数单位、实部、虚部分别是指什么？

（2）什么是虚数和纯虚数？试举出具体例子.

师生活动：教师提出问题，学生独立阅读教科书，阅读之后回答问题.

（1）学生口答：a 是复数的实部，b 是复数的虚部. 教师强调应注意限制条件 a，$b\in\mathbf{R}$，另外复数 $a+bi$ 的虚部是 b 而不是 bi.

（2）学生口答，当 $b\neq 0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 是虚数；当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，$b\mathrm{i}$ 是纯虚数.

设计意图：通过问题引导，指导学生阅读教科书，思考并回答问题，明确复数的基本概念，培养阅读教科书的习惯和阅读理解能力.

问题 7：我们知道复数集是由形如 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的数组成的，为了保证集合中元素的互异性（确定性），我们需要明确集合中两个元素相等的含义，请阅读教科书，说说两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）相等的含义.

师生活动：学生阅读教科书后作答. 教师引导：一个复数由实部和虚部唯一确定，所以判断两个复数是否相等，就要考虑它们的实部和虚部是否分别相等. 进而教师给出两个复数相等的定义并板书. 复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

追问（1）：由复数相等的含义知，两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部都分别相等，也就是：复数由它的实部和虚部唯一确定. 回忆一下，复数的这个特征与你以前遇到过的什么数学对象类似？由此，你能进一步刻画复数的特征吗？

师生活动：教师引导，学生思考、讨论，得出：复数的这个特征与平面上点的坐标，平面向量的坐标等类似，因此复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），可以看成是一个有序实数对（a，b）.

追问（2）：复数是实数的充要条件是什么？$a+b\mathrm{i}=0$ 的充要条件是什么？

师生活动：学生思考回答，教师补充完善. 对于复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），易得当且仅当 $b=0$ 时，它是实数；$a+b\mathrm{i}=0$ 即 $a+b\mathrm{i}=0+0\mathrm{i}$，由复数相等的含义，推导可得：当且仅当 $a=0$，$b=0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}=0$. 教师总结：实际上，复数相等的含义，不仅是判断两个复数相等的依据，也是求某些复数值的依据，即利用复数相等的定义，可以得到关于实数的方程（组），通过解方程（组）得到 a，b 的值. 教师在此处也可以指出：一般来说，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小，只有当两个复数都是实数时才能比较大小.

设计意图：从保证集合中元素的互异性（确定性）出发，引出在实数集中引入新对象后，要研究两个新数相等的含义，进而给出两个复数相等的含义，并由复数相等的定义，得到复数实质上是一个有序实数对，为研究复数的几何意义以及复数的三角表示奠定基础.

问题 8：我们已经将实数集扩充到复数集，那么复数集 $\mathbf{C}$ 和实数集 $\mathbf{R}$ 之间有什么关系？你能对复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）进行分类，并用 Venn 图表示吗？

师生活动：学生思考并写在练习本上，教师巡视指导，学生用多媒体等设备交流展示. 教师指出实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集，也体现了数系扩充的规律之一：新数集包含原来的数集.

设计意图：引导学生弄清楚复数集和实数集之间的关系以及复数的分类，深化学生对复数集是实数集的“扩充”以及对复数的理解.

（四）精选例题，强化理解应用

例 1 请你说出下列集合之间的关系：$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$.

例 2 写出下列复数的实部与虚部，并指出哪些是实数，哪些是虚数，哪些是纯虚数.

$$0，\mathrm{i}，0.618，2+\sqrt{7}，-\sqrt{3}\mathrm{i}，-2+\frac{1}{3}\mathrm{i}，5\mathrm{i}+8，\mathrm{i}(1-\sqrt{3}).$$

例 3 当实数 m 取什么值时，复数 $z=m+1+(m-1)\mathrm{i}$ 是下列数？

（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数.

例 4 已知 $(x+y)+(y-1)\mathrm{i}=(2x+3y)+(2y+1)\mathrm{i}$，求实数 x，y 的值.

师生活动：教师用PPT展示例题. 例1，例2学生思考、口答，教师点评. 例3，例4，学生思考，独立完成后用多媒体交流展示，教师点评并规范解题步骤.

设计意图：例1主要让学生巩固数集之间的关系，完善认知结构；例2、例3主要是巩固复数的分类标准，加深对复数概念的理解；例4主要是强化复数相等的含义. 让学生在解决问题的过程中内化复数有关概念，起到及时反馈、学以致用的功效.

（五）反思总结，提炼学习收获

问题9：通过本节课的学习，你有哪些收获？试从知识、方法、数学思想、经验等方面谈谈.

师生活动：学生思考回答，教师补充完善.

预设答案：知识方面：了解了数系扩充的基本"规则"，复数的基本概念（复数、实部、虚部、虚数、纯虚数等）、两个复数相等的含义、复数的分类等；思想方法方面：实数系扩充到复数系运用了类比的研究方法，解决复数相等问题运用了转化的数学思想等；经验：研究新的数学问题可以类比已学过的问题.

设计意图：通过对数系扩充规则、扩充过程以及复数相关概念等知识和方法的总结，使学生对本节课的学习有一个全面、系统的认识，一方面深化对复数知识的理解，另一方面总结研究方法，积累研究数学问题的经验.

（六）布置作业

教科书习题7.1第1，2，3题.

五、目标检测设计

1. $a=0$ 是复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数的（　　）.

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

设计意图：考查学生对复数概念的理解.

2. 当实数 m 取什么值时，复数 $z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)\mathrm{i}$ 是下列数？

（1）实数；（2）纯虚数；（3）0.

设计意图：考查学生对复数基本概念和复数相等含义的理解.

3. 求适合下列方程的实数 x 与 y 的值：

（1）$(x+y-3)+(x-4)\mathrm{i}=0$；

（2）$(x+y)+(x-2y)\mathrm{i}=(2x-5)+(3x+y)\mathrm{i}$.

设计意图：考查学生利用两个复数相等的含义解决简单数学问题的能力.

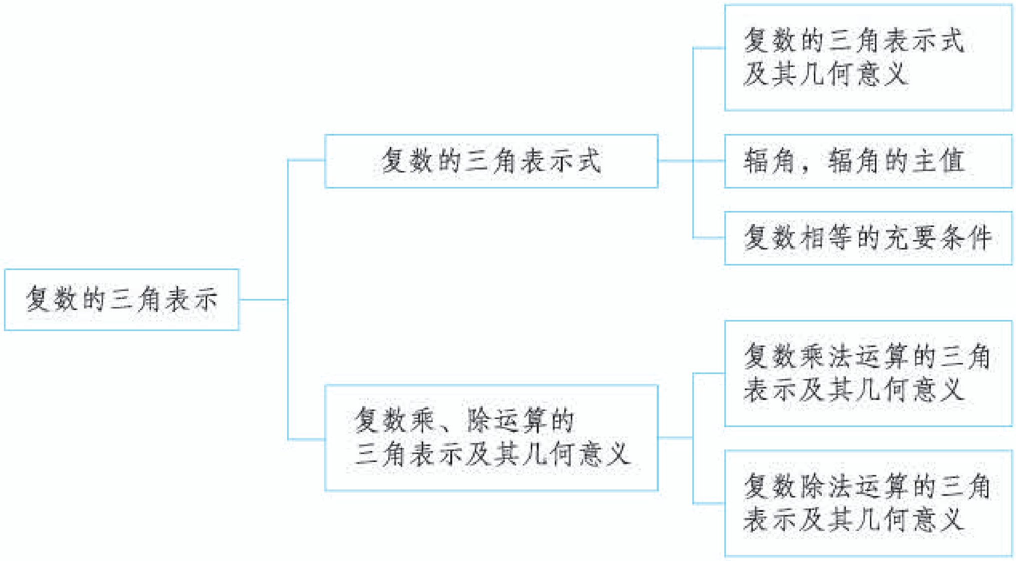
7.3* 复数的三角表示（2课时，单元教学设计）

一、内容和内容解析

1. 内容

复数的三角表示式，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

本单元的知识结构框图：



本单元建议用 2 课时：第一课时，复数的三角表示式；第二课时，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

2. 内容解析

复数的三角表示是复数的一种重要表示形式，复数的三角表示式、复数乘、除运算的三角表示及其几何意义，是复数代数形式及其乘除运算等知识的延续和深化. 复数的三角表示沟通了复数与平面向量、三角函数等知识的联系，为解决平面向量、三角函数和平面几何问题提供了一种重要途径，同时为学生今后在大学期间进一步学习复数的指数形式、复变函数论、解析数论等高等数学知识奠定基础. 可见本单元的内容在高中数学乃至大学数学课程中起着承前启后的作用.

复数的三角表示，实际上是用有序数对（r，θ）来确定一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$，并把它表示成 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的形式. 复数的三角形式与代数形式有着紧密联系，可以借助三角函数的知识，将三角形式和代数形式进行互化；基于复数的三角表示，按照复数的乘法运算法则，并利用三角恒等变换知识，就能推导得出复数乘法运算的三角表示，因此复数的三角表示是本单元的基础. 由复数乘法运算的三角表示可以推导出复数除法运算的三角表示. 复数乘、除运算的三角表示不仅形式简洁，给复数的乘、除运算带来了便利，而且它们的几何意义明显. 实际上，复数乘、除运算三角表示的几何意义就是平面向量的旋转和伸缩. 借助复数乘、除运算三角表示的几何意义，可以将一些复数、三角和平面几何问题转化为向量问题去解决. 因此，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义在本单元中具有重要地位.

本单元内容突出了复数的三角表示和乘、除运算的几何意义，体现了形与数的融合. 如复数的三角表示是从向量出发，通过数形结合，利用三角函数知识推导得出的；复数的乘、除运算可以借助三角表示的几何意义转化为向量的旋转和伸缩变换等. 此外，本单元的知识也蕴含了化归与转化的数学思想，如复数的三角形式和代数形式可以互相转化，复数除法运算的三角表示可以转化为复数乘法运算的三角表示，某些复数问题可以转化为平面向量问题去解决，某些平面向量问题也可以转化成复数问题去解决等. 再有，本单元在研究过程中也运用了类比的研究方法，如三角形式的两个复数相等的充要条件是类比代数形式两个复数相等的充要条件得到的，复数除法三角表示的几何意义是类比复数乘法三角表示的几何意义得到的等. 运用好本单元的相关知识素

材，让学生体会这些数学思想和方法，有助于提升他们的直观想象和逻辑推理素养.

基于以上分析，确定本单元的教学重点：复数的三角表示式，复数乘、除运算的三角表示及其几何意义，以及这些内容所体现的数形结合、化归与转化、类比等数学思想方法.

二、目标和目标解析

1. 目标

（1）了解复数三角表示式的推导过程，了解复数的三角表示式.

（2）了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，会进行复数三角形式和代数形式之间的互化，了解两个用三角形式表示的复数相等的条件.

（3）了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义.

（4）在知识的探究和发现中，感受数形结合、化归与转化、类比等数学思想方法，提升直观想象、逻辑推理和数学运算素养.

2. 目标解析

达成上述目标的标志是：

（1）通过复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 的一一对应，学生能够用刻画向量大小的模 r 和刻画向量方向的角 θ 表示复数 z，得到复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角表示式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. 能把握 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角表示式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的结构特点：①r 是复数的模，$r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$；②式中的三角函数是同一个辐角值 θ 的余弦和正弦；③$\cos\theta$ 在前，$\sin\theta$ 在后；④$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 之间用“+”连接，并能据此辨别给出的复数是否为三角形式. 能够说出辐角的概念，解释辐角的多值性，知道辐角主值的范围，以及非 0 复数辐角主值的唯一性. 会画出三角形式表示的复数对应的向量.

（2）学生能根据运算的需要，将复数的三角形式和代数形式进行互化；能够类比复数代数形式表示的两个复数相等的充要条件得出三角形式表示的两个复数相等的充要条件，并会判断两个用三角形式表示的复数是否相等.

（3）学生能根据复数的乘法法则以及两角和的正弦、余弦公式推导出复数乘法运算的三角表示式，并能用文字语言阐述其含义；能根据复数乘法运算的三角表示，得出复数乘法的几何意义；会类比复数乘法运算的三角表示及其几何意义得出复数除法运算的三角表示及其几何意义；会依据复数乘、除运算的三角表示及其几何意义进行相关的计算，能解决简单的复数、三角和平面向量问题.

（4）在教师的引导下，学生能够运用数形结合的思想，探究复数三角表示式和复数乘、除运算的几何意义；在复数除法运算三角表示的推导过程中，能体会化归与转化的思想；能够运用类比的方法，探究两个三角表示的复数相等的充要条件，探究复数除法运算三角表示的几何意义；在复数三角形式和代数形式的互化过程中，能感受事物之间在一定条件下可以互相转化的辩证唯物主义观点.

三、教学问题诊断分析

在知识储备上，学生已经经历了数系扩充的过程，学习了复数的概念及其几何意义，知道复数 $a+b\mathrm{i}$ 和平面上的点 $Z(a,b)$ 以及向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应；掌握了复数乘、除运算的运算法则，这为本单元学习复数的三角表示奠定了基础. 但从复数的几何意义出发探究得出复数的三角表示式，从思维角度看学生还缺乏经验；并且复数的三角表示式与复数的向量表示、三角函数有很强

的关联性，其形式也比较复杂，而且有些学生会错误地认为，只要复数的表达式中含有正弦和余弦函数就是复数的三角表示式. 因此，探究和理解复数的三角表示式有一定难度.

在能力基础方面，学生通过高一上学期的学习，对高中数学学习中常用的基本数学思想方法已经有所了解，有运用数形结合、化归与转化等数学思想方法解决数学问题的意识，也知道类比是研究数学问题的一种常用的方法，但在实际应用中，学生运用起来还不够熟练，而且往往很难针对具体问题的特点选择合适的数学思想方法解决问题. 所以在运用类比的方法探究三角形式表示的两个复数相等的充要条件，利用数形结合、类比等方法探究复数乘、除运算几何意义的过程中，学生可能会遇到障碍.

在学习态度上，由于高考不涉及本单元的内容，所以学生在重视程度上可能不够，需要教师设置比较好的问题情境，并指出学习本节内容的重要意义和价值，从而激发学生的学习兴趣和学习主动性.

综上所述，本单元的教学难点为：

（1）探究、理解复数的三角表示式；

（2）对复数乘、除运算三角表示的几何意义的理解.

对于难点（1），在讲解本单元的第一课时前，可提前布置一些预习作业，让学生为新课的学习做好知识准备，或者在课上先复习平面向量和复数的几何意义等相关知识，再进行新课的学习和探究，探究时要充分注意复数与平面向量和三角函数的联系性，这是突破难点的一个重要举措；探究出复数的三角表示式后，让学生明晰复数三角表示式的基本结构特征，这样有助于学生理解复数的三角表示式.

对于难点（2），可以借助信息技术工具，分别画出复数 z_1，z_2 和 $z_1 \cdot z_2$（或$\frac{z_1}{z_2}$）表示的向量，让学生观察 $z_1 \cdot z_2$（或$\frac{z_1}{z_2}$）的模和辐角与 z_1，z_2 的模和辐角的关系，进而得出相应的几何意义. 也可以先给出几个具体的例子，让学生观察规律，再归纳总结得出一般性结论. 这样就能帮助学生理解复数乘、除运算三角表示的几何意义，从而有效地突破这个难点.

四、教学支持条件分析

利用信息技术工具有助于探究并理解辐角 θ. 例如，可以使用信息技术工具画出平面向量$\overrightarrow{OZ}$表示的复数 $z=a+bi$，让学生通过观察、比较，初步确定可以用以 x 轴的非负半轴为始边，以向量$\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角 θ 刻画平面向量的方向；然后改变复数对应的平面向量的位置（在不同象限或在实轴、虚轴上），进行动态演示，感受选择 θ 来刻画平面向量方向的一般性和合理性. 也可以通过上述图形，让学生直观感受复数 $a+bi$ 与平面向量$\overrightarrow{OZ}$ 的对应关系，体会辐角的多值性和辐角主值的唯一性.

在复数乘、除运算的三角表示几何意义的教学中，也可使用信息技术工具，使学生感受两个复数 z_1，z_2 相乘（或相除）时，模和辐角的变化情况，从而加深学生对几何意义的理解.

五、教学过程设计

第一部分　复数的三角表示式

引言：前面我们已经学习了复数 $a+bi$ 及其四则运算，本节我们来研究复数的另一种重要表

示——复数的三角表示．复数的三角表示的形式是什么？它又有哪些作用？让我们一起来探究吧．

（一）温故知新，奠定基础

问题 1：前面我们学习了复数的概念、复数的几何意义，请同学们回忆一下它们分别是什么．

师生活动：学生思考、回答，指出 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）称为复数，以及复数的两种几何意义：复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内的点 $Z(a,\ b)$ 一一对应；复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$ 一一对应．

追问（1）：你能在复平面内用平面向量表示 $z=a+b\mathrm{i}$ 吗？

师生活动：学生回答，教师利用信息技术工具或在黑板上画出复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 对应的平面向量 $\overrightarrow{OZ}$．

追问（2）：已知平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$，能唯一确定与之对应的复数 z 吗？复数 z 的表达式是什么？为什么？

师生活动：学生思考并回答：由于复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$ 一一对应，所以已知平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$ 能唯一确定与之对应的复数 z，其表达式为 $z=a+b\mathrm{i}$．教师总结，复数 z 可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标（a，b）唯一确定．

设计意图：复数的几何意义是得出复数三角表示式的基础．温故知新，激活学生已有的知识储备，为本课时从复数的向量表示出发探究复数的三角表示奠定基础．

（二）引导探究，得出概念

问题 2：我们知道复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标（a，b）唯一确定，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 既可以由它的坐标（a，b）唯一确定，也可以由它的大小和方向唯一确定，观察分析图 1，能否借助向量的大小和方向这两个要素来表示复数呢？你认为如何表示？

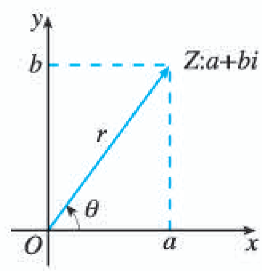


图 1

追问（1）：为了解决问题 2，首先应研究什么？

师生活动：学生在教师的引导下，观察图形、思考、讨论，发现解决问题 2 的首要环节是，应定量刻画向量的大小和方向这两个要素，并且向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的大小可以用复数的模 r 来表示，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的方向可以借助角角 θ 来表示．

追问（2）：如何用文字语言表述角 θ 呢？

师生活动：学生思考回答，可能给出的表述不很确切，教师逐渐引导纠正，逐步得出：角 θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角．

设计意图：利用教科书上的探究问题，借助复数的几何意义，引导学生尝试定量刻画向量的大小和方向，为得出复数的三角表示式奠基，这也是得出复数三角表示式的第一个关键环节．

追问（3）：你能用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，以及以 x 轴的非负半轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角 θ 来表示复数 z 吗？

师生活动：让学生分组讨论．学生利用复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的向量表示的图形（图 1），容易得出 $\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta.\end{cases}$ 所以复数 $a+b\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$．

设计意图：要求学生进一步借助图形，得出模 r 和角 θ 与平面向量的坐标 (a, b) 的关系，从中感受复数和平面向量的关系以及数形结合的思想. 这是得出复数三角表示式的另一个关键环节.

追问（4）：刚才我们画的图形（图 1），角 θ 的终边落在第一象限，得到 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，这个式子是否具有一般性呢？即若角 θ 的终边落在第二、三、四象限，这个式子成立吗？若点 Z 在实轴或虚轴上，即角 θ 的终边落在实轴或虚轴上时，这个式子也成立吗？

师生活动：教师借助信息技术工具，改变平面向量$\overrightarrow{OZ}$的位置，让学生观察分析，得出结论：不管角 θ 的终边落在什么位置，都有 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 教师指出 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称为三角形式，并板书复数的三角表示式，介绍辐角的概念，说明辐角既可以用弧度表示，也可以用角度表示. 最后指出为了与三角形式区分开，把 $a+bi$ 叫做复数的代数表示式，简称代数形式.

设计意图：让学生分析角 θ 的终边落在各个象限或实轴、虚轴的情况，由具体到抽象，由特殊到一般，归纳出复数的三角表示式，感受数学的严谨性，培养抽象概括能力.

问题 3：一个复数的辐角的值有多少个？

师生活动：学生结合图 1，观察思考回答. 利用终边相同的角的特点，容易得出：任何一个不为零的复数的辐角的值有无限多个.

追问（1）：这些辐角的值之间有什么关系呢？

师生活动：学生思考回答，因为任一与角 θ 终边相同的角，都可以表示成角 θ 与整数个周角的和，所以这些辐角的值之间相差 2π 的整数倍.

追问（2）：若复数为 0，它的辐角是哪个角？

师生活动：教师引导学生分析，对于复数 0，因为它对应着零向量，而零向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的，而不是 0.

设计意图：让学生由平面直角坐标系中终边相同的角的特点，得出复数辐角的多值性，以及这些值之间相差 2π 的整数倍；类比零向量，了解复数为 0 时辐角的任意性.

问题 4：在研究问题时，复数辐角的多值性有时会给我们带来不便，为了使任意一个非 0 复数有唯一确定的“值”作为其所有辐角值的代表，你认为规定这种“值”在哪个范围内比较合适？

师生活动：学生借助图形思考问答. 教师总结：我们规定在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的值的代表，就能使每个非零复数有唯一确定的“辐角的值”. 接下来，教师给出辐角主值的定义，称在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的主值（principal value of an argument），通常记作 $\arg z$，从而 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

追问：一个非零复数辐角的主值有多少个？

师生活动：学生思考回答，一个非零复数的辐角主值有且只有一个. 教师总结：每一个非零复数有唯一的模与辐角的主值.

设计意图：给出辐角的主值的概念和取值范围. 让学生了解规定辐角的主值，保证了其唯一性，从而为一些表述和研究带来便利.

（三）概念辨析，加深理解

问题 5： $\frac{1}{2}(\sin\frac{5\pi}{12}+i\cos\frac{5\pi}{12})$ 是三角表示式吗？说出你的理由.

师生活动： 学生观察回答. 有可能答错，若答错，教师引导学生进一步仔细观察，研究复数三角表示式的结构特征.

追问： 观察复数的三角表示式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，你能总结出它的结构特点吗？

师生活动： 教师引导学生分析并得出 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的结构特点：①r 是复数的模，$r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$；②是同一个辐角值 θ 的余弦和正弦；③$\cos\theta$ 在前，$\sin\theta$ 在后；④$\cos\theta$ 和 $i\sin\theta$ 之间用“+”连接.

设计意图： 由学生容易出错的问题，通过具体事例引出对复数三角表示式的辨析，通过对复数三角表示式结构特点的分析，得出复数三角表示式的结构特征，进而根据结构特点对复数的三角表示式作出判断.

例 1 判断下列复数是不是三角形式？如果不是，把它们表示成三角形式.

(1) $\frac{1}{2}(\sin\frac{5\pi}{12}+i\cos\frac{5\pi}{12})$； (2) $-\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3})$.

师生活动： 学生在练习本上独立完成，教师巡视并进行个别指导，学生都完成后进行反馈交流，教师帮助更正错误，指导学生依据复数三角表示式的结构特征进行反思，并总结：熟练应用三角函数的诱导公式进行恒等变换，是将复数的非三角表示式转化为三角表示式的一个关键环节.

设计意图： 辨析复数的三角表示式，帮助学生进一步理解三角表示式的概念，学会将复数的非三角表示式化为三角表示式的方法.

（四）概念应用，巩固新知

例 2 画出下列复数对应的向量，并把这些复数表示成三角形式：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$； (2) $1-i$.

师生活动： 先由学生思考发言，师生共同总结解题的基本思路，教师板书第（1）小题，学生书写第（2）小题完整的解题步骤.

教师总结解题思路：复数的几何意义是解决此类问题的关键，要通过数形结合解决问题. 只要确定复数的模和一个辐角，就能将复数的代数形式转化为三角形式. 而利用 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 即可求得模，先借助向量的坐标判断辐角的终边所在的象限，再利用 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$ 的值求辐角.

设计意图： 一方面是让学生进一步体会复数的几何意义，感受复数和平面向量一一对应的关系；另一方面是借助与复数对应的点的坐标，判断角 θ 的终边所在的象限，体会将复数代数形式化为三角形式的基本方法.

例 3 分别指出下列复数的模和一个辐角，画出它们对应的向量，并把这些复数表示成代数形式：

(1) $\cos\pi+i\sin\pi$； (2) $6(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

师生活动： 学生在练习本上独立完成，教师巡视并给予个别指导，学生都完成后请学生展示

交流. 教师指导学生反思：应注意辐角的值不只一个，写出的辐角可以是辐角的主值，也可以不是，它们相差 2π 的整数倍.

设计意图：本例有两个用意，一是通过几何直观，帮助学生进一步认识复数三角形式中 r，θ 的含义，进而认识到复数实质上可以由有序实数对 (r, θ) 来唯一确定，再次感受复数与平面向量的联系；二是帮助学生掌握直接利用三角函数公式，将复数的三角形式化为代数形式的方法.

问题 6：两个用代数形式表示的非零复数相等的条件是什么？两个用三角形式表示的非零复数在什么条件下相等呢？

师生活动：引导学生利用类比的方法思考、回答. 教师可以引导学生按照下面的思路进行探究：两个复数相等⇔两个复数对应的向量相同⇔两个向量的长度相等且方向相同⇔两个复数的模相等且辐角主值相等. 通过推理，顺理成章地得出结论.

设计意图：让学生运用类比的研究方法，得出两个三角形式的非零复数相等的充要条件，体会推理的严谨性.

（五）目标检测设计

1. 画出下列复数对应的向量，并把这些复数表示成三角形式：

(1) $-\mathrm{i}$；　(2) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

设计意图：考查学生将复数的代数形式化为三角形式的能力.

2. 下列复数是不是三角形式？如果不是，把它表示成三角形式.

(1) $\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$；　(2) $\cos\dfrac{7\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{5}$；　(3) $2(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$.

设计意图：考查学生对复数三角形式的掌握程度.

3. 将下列复数表示成代数形式：

(1) $6(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2})$；　(2) $2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3})$.

设计意图：考查学生将复数的三角形式化为代数形式的能力.

第二部分　复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

引言：在 7.2 节中，我们研究了复数代数形式的四则运算，上节课又学习了复数的另一种重要的表示形式——三角形式，很自然地，我们想知道复数的四则运算是否能用三角形式表示？下面我们就一起来研究这个问题.

（一）知识回顾

问题 1：我们知道，复数可以进行加、减、乘、除运算，请回忆一下，复数代数形式加法和乘法运算的法则是什么？

师生活动：学生回忆后回答：

设 $a, b, c, d\in\mathbf{R}$，则

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

设计意图：复数加法、乘法运算的法则是研究复数加法、乘法运算三角表示的出发点，提出这个问题，激活学生已有的认知基础，为本节课研究复数乘法运算的三角表示进行铺垫.

（二）复数乘法运算的三角表示及几何意义的探究及应用

问题 2：上节课，我们学习了复数一种新的表示方法——三角形式，那么复数的加法和乘法运算是否能用三角形式来表示呢？

追问（1）：如果把复数 z_1，z_2 分别写成三角形式 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，你能计算 z_1+z_2 和 z_1z_2 并将结果分别表示成三角形式吗？

师生活动：教师给学生充分的自主活动的时间，学生经过独立思考和演算后，由学生汇报交流，教师及时补充或纠正错误，师生共同完成复数加法和乘法是否能用三角形式表示的探究过程. 探究的结论是：一般来说复数的加法不便表示成三角形式；复数乘法能表示成三角形式，其三角表示公式为

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

教师板书复数乘法的三角表示公式.

追问（2）：复数的减法运算是加法运算的逆运算，复数的减法运算是否能用三角形式来表示？

师生活动：教师侧重引导学生，将复数的减法运算转化为加法运算，学生类比探究复数的加法是否能用三角形式表示的过程，容易发现：一般说来复数的减法不便表示成三角形式.

设计意图：让学生独立思考、自主探究，侧重经历复数乘法的三角表示公式得出的过程，从中进一步体会复数和三角之间的紧密联系.

问题 3：你能用文字语言来表述复数乘法的三角表示公式吗？

师生活动：学生回答，教师补充完善，得出：两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和，可以简述为“模相乘，辐角相加”.

设计意图：培养学生的语言表达能力，帮助学生进一步加深对复数乘法运算三角表示公式的理解.

问题 4：我们知道复数的加、减运算具有几何意义，那么复数乘法很可能也具有几何意义. 请你由复数乘法运算的三角表示进行探索、尝试.

师生活动：学生用纸笔画出草图，分组讨论交流. 教师借助几何画板画出 z_1 和 z_2 对应的向量，演示乘法运算的过程，学生归纳得出复数乘法运算三角表示的几何意义（图 2）.

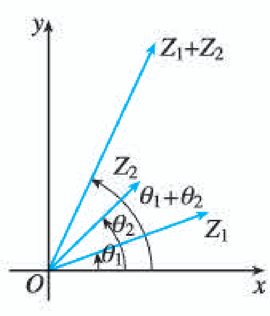


图 2

设计意图：让学生借助图形进行分析，探究得出复数乘法三角表示的几何意义，体会数形结合思想，同时也培养学生的自主学习能力和合作意识.

问题 5：你能解释 $i^2=-1$ 和 $(-1)^2=1$ 的几何意义吗？

师生活动：学生思考并陈述结论，教师归纳总结：$i^2=-1$ 可以写为 $i\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=-1$，其几何意义是“将 i 对应的向量绕点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到 -1 对应的向量”；

$(-1)^2=1$ 可以写为 $(-1)\cdot(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=1$，其几何意义是“将 -1 对应的向量绕点 O 按逆时针方向旋转 π，得到 1 对应的向量”.

设计意图：让学生利用复数乘法运算三角表示及其几何意义，进一步理解熟悉的乘法运算的基本结论.

例 1 已知 $z_1=\frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$，$z_2=2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$，求 z_1z_2，请把结果化为代数形式，并做出几何解释.

师生活动：学生独立做题，教师巡视答疑，学生完成后利用多媒体进行交流展示. 教师指导学生反思：运用复数乘法的三角表示式进行运算的前提是，给出的复数必须都是三角形式，然后才能利用“模数相乘，辐角相加”的算法进行运算. 教学中应提醒学生：当不要求把计算结果化为复数的代数形式时，也可以直接用三角形式表示结果.

设计意图：让学生运用复数乘法的三角表示公式进行运算，进一步熟悉算理和复数乘法运算三角表示的几何意义.

例 2 如图 3，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数为 $1+\mathrm{i}$，把 $\overrightarrow{OZ}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 120°，得到 $\overrightarrow{OZ'}$. 求与向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数（用代数形式表示）.

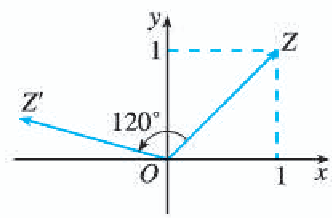


图 3

师生活动：教师和学生共同分析解题思路：根据复数乘法的几何意义，向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数是复数 $1+\mathrm{i}$ 与 z_0 的积，其中复数 z_0 的模是 1，辐角的主值是 120°. 然后由学生完成解题过程并反馈交流，教师指导学生反思：平面向量和复数有着非常紧密的联系，向量的旋转问题或模长伸缩问题可以转化为复数的乘法运算问题；反之亦然.

设计意图：让学生了解利用复数乘法的几何意义可以解决某些与向量旋转、伸缩有关的复数运算问题，体会利用复数乘法的几何意义解决问题的便捷性.

（三）复数除法运算的三角表示及几何意义的探究与应用

问题 6：除法运算是乘法运算的逆运算. 根据复数乘法运算的三角表示，你能得出复数除法运算的三角表示吗？你能用文字语言加以表述吗？

师生活动：教师引导，学生讨论，得出将复数除法运算转化为乘法运算的方法（配凑法），学生自己推导得出复数除法运算三角表示公式，教师板书公式：

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

用文字语言可表述为：两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

追问：你还有其他的推导方法吗？

师生活动：教师引导，学生思考回答. 也可以通过“分数”运算直接推导得出：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)\ +\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]}{r_2(\cos^2\theta_2+\mathrm{i}\sin^2\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

设计意图：在复数乘法运算三角表示的基础上，引导学生借助已有知识和运算技巧推导复数除法运算的三角表示，体会化归与转化和类比的数学思想，提升数学运算素养.

问题 7：类比复数乘法的几何意义，由复数除法运算的三角表示，你能得出复数除法的几何意义吗?

师生活动：教师引导 $\theta_1-\theta_2=\theta_1+(-\theta_2)$，进而由学生自己画图并观察图形，得出复数除法运算的几何意义，教师借助几何画板演示（图4).

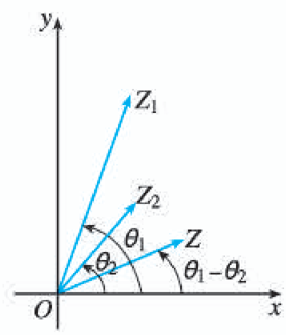


图 4

设计意图：通过复数除法三角表示几何意义的自主探究，让学生进一步感受乘法和除法相互转化的关系，感受向量与复数之间的联系，同时感受数形结合、化归与转化思想在研究数学问题中的作用.

问题 8：如果复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 对应的向量，绕点 O 按逆时针方向旋转角 α，模不变，所得向量对应的新复数是什么?

师生活动：学生思考、讨论后回答：对应的新复数是

$$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=r[\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\theta+\alpha)].$$

追问（1)：若按顺时针方向旋转角 α 呢?

师生活动：学生思考口答：新复数是 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)[\cos(-\alpha)+\mathrm{i}\sin(-\alpha)]$，即 $r[\cos(\theta-\alpha)+\mathrm{i}\sin(\theta-\alpha)]$；或 $\dfrac{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}=r[\cos(\theta-\alpha)+\mathrm{i}\sin(\theta-\alpha)]$.

追问（2)：若模伸长或缩短 r' 倍呢?

师生活动：学生思考回答，教师借助几何画板演示，帮助学生理解. 教师总结：利用复数乘、除运算的几何意义，可以把平面向量的旋转和伸缩问题转化为复数的乘、除运算问题；反之亦然.

设计意图：让学生思考复数乘、除运算几何意义的反向应用，培养逆向思维能力，进一步感受平面向量和复数之间可以互相转化的关系.

例 3　计算 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$，并把结果化为代数形式.

师生活动：学生独立完成后反馈交流.

设计意图：让学生利用复数除法运算的三角表示公式进行运算，进一步熟悉算理. 指导学生反思：首先要确保复数 z_1，z_2 均为三角形式，然后才能运用复数除法运算的三角表示公式进行运算.

（四）课堂练习

1. 教科书第 89 页练习 1（1)（3).
2. 教科书第 89 页练习 2（1)（2).

（五）单元小结

1. 回顾并叙述得出复数三角形式的研究思路和基本过程，并说说研究方法.
2. 复数三角表示式的基本结构特点是什么? 辐角和辐角的主值的概念和特点是什么?

3. 三角形式表示的两个复数相等的充要条件是什么？它是怎么得出的？

4. 复数乘法运算和除法运算的三角表示公式及其几何意义分别是什么？它们是如何推导出来的，试简述研究思路和方法.

5. 简述复数的代数形式和三角形式的区别与联系，它们在运算上各有什么优势？分别适合哪些运算？

师生活动：教师提出问题，学生思考、讨论、回答，互相补充，教师进行点评，帮助完善.

设计意图：帮助学生梳理本单元的重点知识以及主要的研究思路和方法. 具体分别为：

(1) 复数三角形式得出的研究思路和基本过程为：复数 $z=a+bi$ 与平面向量$\overrightarrow{OZ}=(a, b)$一一对应，平面向量$\overrightarrow{OZ}=(a, b)$ 可以由其大小和方向唯一确定，所以复数可以由平面向量$\overrightarrow{OZ}$的大小和方向唯一确定. 平面向量$\overrightarrow{OZ}$ 的大小为平面向量的模 $z=\sqrt{a^2+b^2}$，其方向可以用以 x 轴的非负半轴为始边，以向量$\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线（射线OZ）为终边的角 θ 来刻画，由三角函数的定义得 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，所以 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 研究的主要方法是利用复数的几何意义，通过数形结合进行探究. 回顾研究过程和研究方法有利于培养学生思维的严谨性，积累基本的数学活动经验.

(2) 让学生进一步理解复数三角表示式和辐角、辐角的主值等核心概念，使学生对概念形成清晰的认识，有利于复数三角形式的后续应用.

(3) 让学生进一步明确两个复数相等的充要条件，体会类比的研究方法.

(4) 让学生进一步明确复数乘、除运算的三角表示及其几何意义，进一步体会类比、化归与转化、数形结合等数学思想方法，有利于提升学生直观想象、逻辑推理等素养.

(5) 通过比较，让学生体会复数代数形式和三角形式各自的特点，体会复数的三角形式给复数的乘、除运算带来的便利，以及复数三角形式与平面向量、三角函数之间的紧密联系.

（六）布置作业

教科书习题 7.3 第 1～6，8 题.

（七）目标检测设计

1. 计算下列各式，并做出几何解释：

(1) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\times\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$；

(2) $3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\times 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)\times 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$；

(3) $2\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(4) $-i\div[2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)]$.

设计意图：考查学生对复数乘除运算的三角表示式及其几何意义的掌握程度.

2. 在复平面内，把与复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量绕原点 O 按顺时针方向旋转 30°，求与所得的向量对应的复数（用代数形式表示）.

设计意图：考查学生对复数除法运算几何意义的了解和应用.

V 评价建议与测试题

一、本章学业要求

能够理解复数的概念，掌握复数代数表示式的四则运算；

*能够了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义；

能够在本章的学习中，逐步提升直观想象、数学运算和数学抽象素养.

二、本章评价建议

为落实本章的学业要求，以下从核心知识评价要求、思想方法评价要求和关键能力评价要求等三个维度，提出具体的评价建议.

1. 核心知识评价要求

依据本章的学习目标和学业要求，可列出本章的 8 个核心知识，分为了解、理解、掌握的三个认知层次，且高一级的层次要求包含低一级的层次要求. 具体评价要求详见表 1.

表 1

<table>
<tr><th rowspan="2">主题</th><th rowspan="2" colspan="2">知识单元</th><th rowspan="2">核心知识</th><th colspan="3">评价要求</th><th rowspan="2">个数</th></tr>
<tr><th>了解</th><th>理解</th><th>掌握</th></tr>
<tr><td rowspan="8">几何与代数</td><td rowspan="8">复数</td><td rowspan="3">复数的概念</td><td>复数的概念</td><td>√</td><td></td><td></td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>复数的代数表示及其几何意义</td><td></td><td>√</td><td></td></tr>
<tr><td>复数相等</td><td></td><td>√</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">复数的运算</td><td>复数代数表示式的四则运算</td><td></td><td></td><td>√</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>复数加、减运算的几何意义</td><td>√</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">*复数的三角表示</td><td>复数的三角表示</td><td>√</td><td></td><td></td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>复数的代数表示与三角表示之间的关系</td><td>√</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>复数乘、除运算的三角表示及其几何意义</td><td>√</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">总　计</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>8</td></tr>
</table>

对数学知识技能的评价，本章应关注学生是否了解数系扩充的必要性，是否理解复数的代数表示式，是否知道复数的几何意义，是否知道两个复数相等的含义；是否掌握复数的四则运算法则并能熟练应用；是否知道复数加、减运算的几何意义；是否知道复数三角表示式的基本结构及其几何意义，是否会进行复数代数表示式和三角表示式的互化；是否知道复数乘、除运算的三角表示及其几何意义；等.

为此，我们对本章 8 个核心知识的评价要求，分别按照了解、理解和掌握三个层次的具体含义进行细化解析，使其对教学具有有效的评价和指导作用.

（1）**了解复数的概念**：能类比有理数系扩充到实数系的过程和方法，通过方程的解，认识复数.

（2）**理解复数的代数表示及其几何意义**：能描述复数代数表示式的结构特征，正确判断复数

的实部、虚部，知道复数集、实数集、虚数集与纯虚数集之间的关系；能类比实数的几何意义，描述复数的几何意义，知道复数与有序数对以及平面向量之间一一对应的关系，能画出复数对应的点和向量；知道复数的模的含义，会求复数的模；知道共轭复数的含义，会求一个复数的共轭复数.

(3) **理解复数相等**：能说明两个复数相等的含义，会根据复数相等的含义判断两个复数是否相等.

(4) **掌握复数代数表示式的四则运算**：能描述复数加法的运算法则及交换律、结合律；能类比实数的减法运算，得出复数减法的运算法则；能描述复数乘法的运算法则及交换律、结合律和乘法对加法的分配律；能描述复数除法运算法则，会利用共轭复数将复数除法运算转化为乘法运算；会根据复数的运算法则和运算律熟练进行复数的四则运算.

(5) **了解复数加、减运算的几何意义**：知道复数的加法和减法可以按照向量的加法和减法进行，会用向量表示复数的加法和减法运算，会利用向量的模求出复数的模.

(6)* **了解复数的三角表示**：能根据复数的几何意义，得出复数的三角表示式；知道复数三角表示式的基本结构特征，知道辐角和辐角主值的概念.

(7)* **了解复数的代数表示与三角表示之间的关系**：会进行复数三角表示式和代数表示式之间的互化，知道两个三角表示的复数相等的条件.

(8)* **了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义**：能根据复数的乘、除运算法则和三角恒等变换的知识得出复数乘、除运算的三角表示式，并能利用其进行简单的运算和证明；知道复数乘、除运算三角表示的几何意义，并能利用几何意义解决简单的复数、三角和向量等问题.

2. 思想方法评价要求

本章的数学思想方法主要包括数形结合的思想、化归与转化的思想 2 种，具体评价要求详见表 2.

表 2

思想方法	评价要求
数形结合	在复平面内，能作出与复数对应的点和向量，能借助图形，说出复数 $z=a+bi$ 和点 $Z(a, b)$ 以及向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间一一对应的关系；会根据向量的模求出复数的模；能用向量的加、减运算来进行复数的加、减运算. * 能在复平面内，作出复数三角表示式和复数乘、除运算三角表示的几何解释；* 能利用复数乘、除运算三角表示的几何意义解决简单的复数、三角或向量等问题.
化归与转化	能将复数的减法运算转化为加法运算；能将复数的除法运算转化为乘法运算；能将复数的代数表示式和三角表示式进行互化. * 能将除法运算的三角表示转化为乘法运算的三角表示；* 能利用复数乘、除运算三角表示的几何意义，将一些复数、三角等运算问题转化为向量旋转和伸缩问题，进而求解.

对数学思想方法的评价，要特别关注学生能否运用数形结合的思想方法分析问题和解决问题. 如学生能否在复平面内正确画出表示复数的点或向量，能否理解复数代数表示式的加、减运

算的几何意义，*能否在复平面内作出复数乘、除运算的几何表示，*能否借助复数乘、除运算的几何意义解决复数、三角以及向量中的一些问题等.

3. 关键能力评价要求

本章的关键能力主要包括推理论证能力、运算求解能力和直观想象能力等 3 个，

具体评价要求详见表 3.

表 3

关键能力	评价要求
推理论证	能类比有理数扩充到实数的过程和方法，研究实数集的扩充问题；能够类比实数与数轴上的点一一对应得出复数的几何意义；能类比实数四则运算的法则和运算律得出复数四则运算的法则和运算律；*能综合运用复数的几何意义（点、向量）和三角函数知识，得出复数的三角表示式；*能类比两个用代数形式表示的复数相等的充要条件得出两个用三角形式表示的复数相等的充要条件；*能根据复数乘法法则和除法法则，分别推导得出复数乘法运算和除法运算的三角表示；*能类比复数乘法运算三角表示的几何意义得出复数除法运算三角表示的几何意义；等等.
运算求解	能熟练利用复数代数表示式的四则运算法则和运算律进行复数的四则运算；会求复数的模；*能进行复数代数表示式和三角表示式的互化；*能利用复数乘、除运算的三角表示进行复数运算；*能利用复数乘、除运算的几何意义解决简单的复数或三角、向量和平面几何问题.
直观想象	能利用向量表示复数；知道复数代数表示式的加、减运算和模可以转化为向量的加、减运算和模；能利用复数加、减运算的几何意义解决简单的复数运算问题；*能借助复数的几何意义，研究复数的三角表示；*能利用复数乘、除运算三角表示的几何意义，解决简单的复数、三角、向量和平面几何问题，形成数学直觉，感悟数形结合的思想.

对关键能力的评价，要特别关注以下两点：

（1）学生能否利用类比的方法研究问题. 例如，学生能否类比有理数系扩充到实数系的方法来研究实数系的扩充问题，能否类比实数四则运算的法则和运算律得出复数四则运算的法则和运算律，能否类比复数加法运算的几何意义得出复数减法运算的几何意义，*能否类比代数形式的两个复数相等的充要条件得出三角形式的两个复数相等的充要条件，*能否类比复数乘法运算三角表示的几何意义得出复数除法运算三角表示的几何意义等.

（2）学生直观想象能力的提升. 例如，学生是否理解复数的几何意义，是否理解复数加、减运算的几何意义就是向量的加、减运算，是否能够用向量表示复数，*是否能够借助复数乘、除运算三角表示的几何意义解决简单的复数、三角、向量和平面几何问题等.

三、本章命题建议

本章学业水平测试的命题，要以学业要求的达成为目标，以核心知识为基础、以问题情境为载体、以思想方法为依托、以关键能力为特征，综合体现数学学科核心素养的落实.

1. 本章学业水平测试的命题意图

（1）以复数的核心知识为素材，突出评价学生对复数的代数表示式、复数的模、复数相等、

共轭复数等概念的理解水平以及进行复数四则运算的熟练程度. * 以复数的三角表示式为载体，评价学生对复数三角表示与代数表示的互化，复数乘、除运算的三角表示，以及利用复数乘、除运算三角表示的几何意义解决简单的复数、三角和向量等问题的掌握水平.

（2）以复数的基本问题为载体，突出评价学生利用复数解决数学问题的一般方法，注重结合具体情境评价数形结合、化归与转化等数学思想，避免烦琐的计算，淡化特殊技巧.

（3）以复数的简单应用为特征，突出问题情境中要蕴含数学关键能力的评价，要将复数的核心知识、思想方法和实际应用有机结合起来，重在评价学生的运算求解能力、直观想象能力，以及综合运用本章知识解决复数、向量和三角等问题的能力.

2. 本章学业水平测试题的双向多维细目表

依据上述要求，我们设计了本章学业水平测试题的双向多维细目表（详见表 4），编制了一套示范性学业水平测试题，并给出了参考答案，以供教学时选用.

表 4

题型	题号	问题情境	核心知识	评价要求	思想方法	关键能力
选择题	1	数学（A）	复数的概念	理解	化归与转化	运算求解
	2	数学（A）	复数加法运算法则及其几何意义	掌握	数形结合	直观想象
	3	数学（A）	复数减法运算法则及其几何意义	掌握	数形结合	直观想象
	4	数学（A）	复数加、减运算法则、复数相等	掌握	化归与转化	运算求解
	5	数学（A）	复数乘、除运算法则	掌握	化归与转化	运算求解
填空题	6	数学（A）	共轭复数、复数的乘、除运算法则	掌握	化归与转化	运算求解
	7	数学（A）	共轭复数、复数相等和四则运算	掌握	化归与转化	运算求解
	8	数学（B）	复数的模、复数相等	掌握	化归与转化	运算求解
	9	数学（B）	复数相等、复数的四则运算法则	掌握	化归与转化	运算求解
解答题	10	数学（A）	复数的四则运算法则	掌握	化归与转化	运算求解
	11	数学（B）	复数加、减运算法则及其几何意义	理解	数形结合	直观想象
	12	数学（C）	复数的概念、复数的四则运算	掌握	化归与转化	运算求解
附加题	1	数学（A）	复数的三角表示	了解	化归与转化	运算求解
	2	数学（B）	复数乘、除运算的三角表示及其几何意义	了解	数形结合	直观想象

需要特别指出的是，虽然复数的三角表示是选学内容，但应倡导并鼓励学生学习，要让学生关注复数与平面向量、三角之间的联系性，体会复数三角表示的工具作用.

本章学业水平测试题

（时间：45 分，满分：100 分）

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. $b\neq 0$ 是复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为虚数的（　　）.

（A）必要非充分条件　　（B）充分非必要条件

（C）充要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

2. 设 $z=3-4\mathrm{i}$，$z_2=-2+3\mathrm{i}$，则 z_1+z_2 在复平面内对应的点位于（　　）.

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

3. 设 O 是原点，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3\mathrm{i}$，$-3+2\mathrm{i}$，那么向量$\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是（　　）.

（A）$-5+5\mathrm{i}$　　（B）$-5-5\mathrm{i}$

（C）$5+5\mathrm{i}$　　（D）$5-5\mathrm{i}$

4. 若 $(1-\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$（$a$，$b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位），则 a，b 的值分别等于（　　）.

（A）3，-2　　（B）3，2

（C）3，-3　　（D）-1，4

5. 已知复数 z 满足 $(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）.

（A）$-2-\mathrm{i}$　　（B）$-2+\mathrm{i}$

（C）$2-\mathrm{i}$　　（D）$2+\mathrm{i}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请将答案填在对应题号的位置上.）

6. 复数$\dfrac{5}{3+4\mathrm{i}}$的共轭复数为____________.

7. 若复数 z 满足 $3z+\bar{z}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$____________.

8. 若 $x\in\mathbf{C}$，则方程 $x+|x|=1+3\mathrm{i}$ 的解为____________.

9. 若复数 $2+3\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+2px+q=0$（p，$q\in\mathbf{R}$）的一个根，则 p，q 的值分别为____________.

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 20 分，共 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

10. 计算：(1) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$；

(2) $\left[(1+2\mathrm{i})\cdot \mathrm{i}^5+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3\right]^2-\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{10}$.

11. 在复平面内，正方形 $ABCD$ 的两个顶点 A，B 对应的复数分别为 $1+\mathrm{i}$，$2-3\mathrm{i}$. 求另外两个顶点 C，D 对应的复数.

12. 设 z_1 是虚数，z_2 是$=z_1+\dfrac{1}{z_1}$实数，且 $-1\leqslant z_2\leqslant 1$.

(1) 求 $|z_1|$ 的值以及 z_1 的实部的取值范围；

(2) 若 $\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}$，求证 ω 为纯虚数；

(3) 求 $z_2-\omega^2$ 的最小值.

附加题（共两题，满分 10 分.）

1.（4 分）

复数 $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$ 的辐角主值是（　　）.

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{3\pi}{4}$　　(C) $\frac{5\pi}{4}$　　(D) $\frac{4\pi}{4}$

2.（6 分）

把复数 z_1 和 z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别绕点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{3}$ 后，这两个向量完全重合. 已知 $z_2=-1-\sqrt{3}i$，求复数 z_1 的代数表示式.

参考答案

1. C. 本题主要评价学生对一个数为虚数的充要条件的理解程度.

2. D. 本题主要评价学生对复数加法运算法则的掌握程度和对复数几何意义的理解程度，同时评价数形结合的思想方法.

3. D. 本题主要评价学生对复数减法几何意义的了解程度，评价学生对复数减法运算法则的掌握程度，同时评价数形结合的思想方法.

4. B. 本题主要评价学生对复数相等的充要条件的理解程度和复数加法运算的掌握程度.

5. C. 本题主要评价学生对复数代数表示式四则运算法则和运算律的掌握程度，同时评价数学运算能力.

6. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. 本题主要评价学生对共轭复数概念的理解程度和复数代数表示式乘、除运算的掌握程度.

7. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$. 本题主要评价学生对共轭复数概念、复数相等条件的理解程度和复数四则运算的掌握程度，同时评价运算求解能力.

8. $-4+3i$. 本题主要评价学生对复数模的概念、复数相等条件的理解程度，同时评价运算求解能力.

9. -26. 本题主要评价学生对实系数方程根、复数相等条件的理解程度和对复数代数表示式四则运算的掌握程度，同时评价运算求解能力.

10. (1) $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2\ (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-1$；

(2) $[(1+2i)\cdot i^5+(\frac{1-i^3}{1+i})]^2-(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{10}=[(1+2i)\cdot i+(-1)^3]^2-i^5=-9i$.

本题主要评价学生对复数代数表示式四则运算的掌握程度，同时评价运算求解能力.

11. 设点 D 坐标为 (x, y)，则点 D 对应的复数为 $x+y\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OD}=(x, y)$ 根据题意，得

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2, -3)-(1, 1)=(1, -4)$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(x, y)-(1, 1)=(x-1, y-1)$.

因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，所以 $(x-1)-4(y-1)=0$.

因为 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$，所以 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{17}$. 于是 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=2.\end{cases}$

故点 D 对应的复数为 -3 或 $5+2\mathrm{i}$，从而 $\overrightarrow{AD}=(-4, -1)$ 或 $(4, 1)$

又 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，即 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OB}=(-2, -4)$ 或 $(6, -2)$，

所以，点 C，D 对应的复数分别为 $-2-4\mathrm{i}$，-3；或 $6-2\mathrm{i}$，$5+2\mathrm{i}$.

本题主要评价学生对复数加、减运算几何意义的理解程度和对复数加、减运算的掌握程度，同时评价运算求解能力.

12. (1) 设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$(a, b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq0)$，则 $z_2=z_1=\dfrac{1}{z_1}=(a+\dfrac{a}{a^2+b^2})+(b-\dfrac{b}{a^2+b^2})\mathrm{i}$.

因为 z_2 是实数，$b\neq0$，于是 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant1$，得 $-1\leqslant 2a\leqslant1$，解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围是 $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.

(2) $\omega=\dfrac{1-z_1}{1+z_1}=\dfrac{1-a-b\mathrm{i}}{1+a+b\mathrm{i}}=\dfrac{1-a^2-b^2-2b\mathrm{i}}{(1+a)^2+b^2}=-\dfrac{b}{a+1}\mathrm{i}$.

因为 $a\in[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$，$b\neq0$，所以 ω 是纯虚数.

(3) $z_2-\omega^2=2a-(-\dfrac{b}{a+1}\mathrm{i})^2=2a+\dfrac{1-a^2}{(a+1)^2}=2a-1+\dfrac{2}{a+1}=2(a+1)+\dfrac{2}{a+1}-3$，

由于 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$，$a+1>0$，所以当 $2(a+1)=\dfrac{2}{a+1}$，$a=0$ 时，$z_2-\omega^2$ 取得最小值 1.

本题主要评价学生对复数代数表示式四则运算的掌握程度，对复数的模、实部、虚部等概念的理解程度，以及数学运算能力和推理论证能力.

附加题

1. D. 本题主要评价学生对复数的三角表示和幅角主值概念的了解程度.

2. 由复数乘法的几何意义，得 $z_1(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})=z_2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3})$.

又 $z_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3})$，所以 $z_1=\dfrac{2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3})\cdot(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3})}{\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

本题主要评价学生对复数乘法几何意义、复数的三角表示和代数表示的互化以及复数三角表示的乘、除运算的了解程度，同时评价运算求解能力.