普 通 高 中 教 科 书

教师教学用书

数 学

必 修

第四册

人民教育出版社 课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组 编著

B版

人民教育出版社
·北京·

主　　编：高存明　韩际清
副 主 编：张　鹤　闻　岩　龙正武
本册主编：秦玉波　段　峰
本册副主编：黎栋材　尹燕花　魏清泉
其他编者：孙晓俊　毕双录　孟　媛　王晓华　章　珍　孙东海　王银灿
娄　超　郝　亮　马　翠　许振兴　史兴涛　黄海龙　李振忠
李　萍　姜林林

图书在版编目（CIP）数据

普通高中教科书教师教学用书. 数学：B版：必修. 第四册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著. — 北京：人民教育出版社，2019. 12
ISBN 978-7-107-25893-0

Ⅰ. ①普…　Ⅱ. ①人…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ① G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 002068 号

普通高中教科书　教师教学用书　数学（B 版）　必修　第四册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　× × × 印刷厂
版　　次　　年　月第　版
印　　次　　年　月第　次印刷
开　　本　890 毫米 ×1 240 毫米　1/16
印　　张
字　　数　　千字
定　　价　　元

前　言

为了给在一线高中数学课堂辛勤工作的教师提供教学支持，也为了让大家更好地了解《普通高中教科书 数学(B版)》(以下简称“B版教材”)的编写特色，我们依据《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称“课标”)等有关文件，汇集了数学研究、教育研究、教育实践等多个领域的专家，编写了本套教师教学用书.

首先需要说明的是，B版教材的编写是围绕教学导向进行的. B版教材在全面覆盖课标内容的基础上，充分考虑了一线高中教师和学生的需求，为大家的教与学尽量提供了多方面的资源和建议. 例如，为了帮助教师更好地落实课标中数学学科核心素养的要求，B版教材中设置了大量的“情境与问题”，给出了丰富的数学应用情境等；设置了形式多样的“尝试与发现”，为大家开展各种教学活动打下了基础；设置了内容广泛的“探索与研究”“想一想”“拓展阅读”，为大家提供了进一步探索的空间；等等. 再例如，为了帮助学生学会学习，B版教材引用了一些数学学习的名人名言，提供了许多进行类比学习、归纳学习的机会，预留了数学表达和交流的空间，等等.

事实上，B版教材编写的总体目标是，依据课标，编写一套具有科学性、基础性、选择性，符合认知规律，易教易学的高中数学教材. 科学性是指构建较严谨的逻辑体系，概念叙述准确，文字叙述简洁；基础性是指呈现新内容时，起点低，充分照顾到基础不扎实的学生的需求；选择性是指同一内容，为有发展需求的学生指出进一步思考的方向. B版教材编写的指导思想是，以数学长期发展所形成的一些基本概念，例如集合、关系、数系通性、代数运算、向量空间、对称与变换等，作为内容编写的基点和纲，用这些基本概念沟通各知识块之间的联系，从而建立教材的逻辑体系. B版教材编写时，认真总结了以往教材的优点，以及教材使用过程中的经验与问题，力求反映数学教育教学的新思想，重视知识发生发展过程；适当关照边远和较落后地区的学校，使各级各类学校通过教材基本上都能完成教学任务；把提高学生的数学学科核心素养（数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析）作为主要目标，培养学生用数学语言表达和交流思想的能力，发展独立获取数学知识的能力；适当引导学生应用数学知识，进行数学建模，发展数学应用意识和创新意识；提高学生学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度；使学生具有一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，体会数学的美学意义，崇尚数学的理性精神，形成理性思维的习惯，形成科学的世界观.

本套教师教学用书是以章为基本单位编写的，每一章包括四部分的内容.

第一部分是“课标要求与说明”.

为了方便教师在教学时对照课标的有关要求，这一部分引用了与该章内容有关的课标要求，其中既包括课标中的“内容要求”，也包括“教学提示”“学业要求”. 需要声明的是，因为课标容许各版本教材根据自己的特色等自行安排有关内容顺序，因此每一章中我们只引用与该章内容有关的课标要求. 例如，“学业要求”中，最后提及的数学学科核心素养仅是与该章内容有关的条目. 另外，这一部分内容中，还简要阐述了教材内容的设置亮点.

第二部分是“课时安排建议”.

这是为了给大家提供建议课时数、方便大家整体安排教学进度而设置的，其中给出的课时数仅供大家参考.

第三部分是“本章内容分析与建议”.

这一部分中，针对章的内容进行了整体介绍与分析，对教材的内容从整体上进行了简要说明，还给出了该章教学内容设计的一些建议.

第四部分是“教材内容分析与教学提示”.

为了方便大家教学，实现“拿着教师教学用书就可以直接进行课堂教学”的目标，这一部分先呈现了 B 版教材的内容，然后结合教材每一页的内容，进行了阐述与说明.

书中的阐述与说明包括但不限于：(1) 名人名言的解读，名人名言教学的建议，相关人物的简介，类似名人名言的介绍；(2) 对“本章导语”相关内容的解读以及教学建议，给“本章导语”补充的相关材料，可供参考的案例；(3) 内容的有关历史背景或来源、可能存在的争议、其他类似的表述、与其他内容的联系；(4) 内容的重点、难点，内容学习所需要的基础知识或说明；(5) 不同于教材的内容呈现方式；(6) 教材内容所涉及的有关数学学科核心素养的说明；(7) 有关练习题、习题的参考答案或提示，有些题还提供了“巧法”“妙法”；(8) 对正文中各栏目的说明，包括“想一想”“探索与研究”的答案或提示；(9) 教学过程中可补充的例题、练习题以及对应的参考答案；(10) 有关内容分层教学的建议；等等.

总而言之，本套教师教学用书为大家使用 B 版教材提供了全方位的解读，意在为大家减轻一线教学时需参考课标的内容、寻找补充材料、给学生提供练习题答案等的负担. 当然，我们的这些尝试不可能满足每个人的需求，而且限于时间等因素，书中必然存在方方面面可以进一步改进的地方. 我们恳请广大读者不吝赐教（联系方式：longzw@pep.com.cn)，以使这套教师教学用书越来越完善.

编　者

2019 年 12 月

目　录

第九章　解三角形

一、课标要求与说明 …… 1
二、课时安排建议 …… 1
三、本章内容分析与建议 …… 2
四、教材内容分析与教学提示 …… 5
9.1　正弦定理与余弦定理 …… 8
9.1.1　正弦定理 …… 8
9.1.2　余弦定理 …… 18
9.2　正弦定理与余弦定理的应用 …… 28
9.3　数学探究活动：得到不可达两点之间的距离 …… 36
本章小结 …… 40

第十章　复数

一、课标要求与说明 …… 53
二、课时安排建议 …… 54
三、本章内容分析与建议 …… 54
四、教材内容分析与教学提示 …… 59
10.1　复数及其几何意义 …… 62
10.1.1　复数的概念 …… 62
10.1.2　复数的几何意义 …… 70
10.2　复数的运算 …… 78
10.2.1　复数的加法与减法 …… 78
10.2.2　复数的乘法与除法 …… 84
*10.3　复数的三角形式及其运算 …… 98
本章小结 …… 114

第十一章　立体几何初步

一、课标要求与说明 …… 121
二、课时安排建议 …… 123
三、本章内容分析与建议 …… 123
四、教材内容分析与教学提示 …… 127
11.1　空间几何体 …… 130
11.1.1　空间几何体与斜二测画法 …… 130
11.1.2　构成空间几何体的基本元素 …… 140
11.1.3　多面体与棱柱 …… 152
11.1.4　棱锥与棱台 …… 164
11.1.5　旋转体 …… 172
11.1.6　祖暅原理与几何体的体积 …… 184
11.2　平面的基本事实与推论 …… 202
11.3　空间中的平行关系 …… 212
11.3.1　平行直线与异面直线 …… 212
11.3.2　直线与平面平行 …… 220
11.3.3　平面与平面平行 …… 226
11.4　空间中的垂直关系 …… 240
11.4.1　直线与平面垂直 …… 240
11.4.2　平面与平面垂直 …… 252
本章小结 …… 266

第九章　解三角形

一、课标要求与说明

解三角形的相关内容，在课标中是作为必修平面向量的应用出现的，课标对这一部分内容的要求，只有简单的两句话，“借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理”，“能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题”，而且在“教学提示”与“学业要求”中，未再单独提到有关内容.

值得提醒的是，为了帮助大家运用所学知识解决实际测量高度的问题，体验数学建模活动的完整过程，组织学生通过分组、合作等形式，完成选题、开题、做题、结题四个环节，课标在附录中用案例（标号为 15）的形式给出了测量学校内、外建筑物的高度的任务，并同样以案例（标号为 19）的形式给出了过程性评价建议，从而体现如何让学生在交流过程中展现个性、学会交流、归纳总结、发现问题、积累经验、提升素养. 这两个案例的内容实际上都与解三角形有关.

考虑到解三角形的知识在平面几何、立体几何、解析几何等中具有广泛的应用，教材将解三角形单独列为一章，并设置了一个数学探究活动.

二、课时安排建议

本章内容的教学，建议课时数为 8，具体安排如下：

9.1　正弦定理与余弦定理	
9.1.1　正弦定理	2 课时
9.1.2　余弦定理	2 课时
9.2　正弦定理与余弦定理的应用	2 课时
9.3　数学探究活动：得到不可达两点之间的距离	1 课时
本章小结	1 课时

本章内容中，用到了平面向量数量积的有关内容，如果教师要调整相关内容的教学顺序的话，需要注意这一点.

三、本章内容分析与建议

本章的主要内容是正弦定理、余弦定理及其应用. 教材中有大量翔实的实际问题，解决它们不仅仅是为了巩固本章所学知识，更重要的是为了落实新课标中数学建模的数学学科核心素养，发展学生的数学能力，做到学以致用.

教材的“本章导语”指出了学习解三角形知识可以预测台风对城市产生影响的时间，并指出本章内容可以解决“不可达的两点之间的距离”问题. 这些内容的设置，旨在反映知识的实际背景及其应用价值，引起学生学习数学的兴趣，让学生感觉到数学就在身边和数学有用.

本章内容共分为三部分.

第一部分是正弦定理与余弦定理，呈现了这两个定理的实际背景、推导过程、简单运用.

这一部分中，教材坚持了数学知识来源于实践且高于实践的特点，因此在这一节中，教材从生活实际背景引入，逐步构建知识体系. 为了便于高中学生理解，教材通过常见的求三角形面积来推导正弦定理，证明中很自然地引入三角形的分类、构造直角三角形等想法，而这些都是初中学生耳熟能详的，比较符合学生的认知规律，更有利于学生的知识增长、思维发展和能力提高，也更容易调动学生的学习积极性.

为了降低难度，并鼓励学生在学习数学的时候动手动脑，教材在给出三角形的边与所对角的正弦值的比值为定值时，并没有直接给出这个定值与三角形外接圆半径的关系，而是在“探索与研究”栏目中提出问题，要求学生在研究的基础上自己得到结论.

余弦定理的给出，与正弦定理是相似的，也是从实际背景出发，逐步论述. 在这里为了避免重复，同时也是本着回顾旧知的想法，教材采用向量法来证明余弦定理. 教学时，应指出这种证法的思路，实质上还是向量关系的数量化. 有了这种思想，学生可以从不同的途径探求余弦定理的证明. 教材在本小节例 5 的引申中，指出了用向量证明余弦定理的另外一种方法，不过，这里只是提出问题，需要学生自主探究得到结论. 也就是说，将向量之间的关系转化为数量关系是一种通法，这种重要的数学方法可以帮助我们解决许多较为复杂的问题.

教师也可尝试单元教学方式，从一节一节课堂的单独教学跳出来. 教师可以把正弦、余弦定理作为一个整体进行教学. 这样新旧知识关联清晰，内在逻辑也清晰.

第二部分是正弦定理与余弦定理的应用，呈现了这两个定理在实际生活生产中多方面的应用案例.

本节通过实例说明解斜三角形在实际中的一些应用，特别是在解决测量问题中的应用. 通过本节的学习，要使学生掌握用正弦定理与余弦定理解任意三角形的方法，懂得解任意三角形的知识在实际中有广泛的应用，经历用正弦定理、余弦定理解决测量问题的过程，从而培养学生分析问题、

解决问题的能力.

在教学中，教师要引导学生分析题意，分清已知与所求，根据题意画出示意图. 要启发学生正确应用正弦定理和余弦定理，特别是运用它们解决“测量底部不能到达的建筑物的高度”与“测量平面上两个不能到达的地方之间的距离”的问题. 要放手让学生自主探究、分析，从定理运用的角度构造三角形. 要让学生清晰地掌握对一个具体问题至少需要设置几个测量点，哪些元素（边或角）可测，哪些元素不可测，思考以下问题：构造一个三角形能否解决问题？构造多个三角形时，要注意所构造图形是立体图还是平面图，如何运用具有公共边的三角形进行已知元素与待求元素之间的转化.

引导学生在分析、尝试、探究的基础上互相交流，总结出将实际问题数学化，进而使问题得到解决的几个环节：

（1）分析题意；

（2）画图示意；

（3）转化为数学问题；

（4）运用有关知识解决问题.

第三部分是数学探究活动，要求学生用解斜三角形的知识解决日常生活中遇到的有关测量问题.

通过探究活动，实际测量、计算，使学生了解解决实际问题的全过程，体验数学与日常生活（或其他学科）的联系，感受数学的实用价值，增强应用意识，提高实践能力.

在设计测量方案时，要引导学生因地制宜，尽可能简化方案，减少错误与误差；要让学生写出测量步骤，有计划、有目的地进行测量；要引导学生在实际操作和解决问题的过程中，学会用查询资料等手段获取信息；实际研究时，还应该让学生采取各种合作方式（如分组协作等）解决问题，培养交流和协作能力.

本章的小结中，教材还引导学生借助结构图来总结有关内容，借此来帮助学生梳理知识，构建思维的逻辑体系. 同时，在这一章的小结中，教材还指出了测量工具的重要性，引导学生查阅资料了解现有的测量工具，并鼓励学生自制测量工具，创新地解决问题.

数学在某方面类似于考古学．你也许会找到某个东西的一角，并由此判断它是有趣的．于是你开始在别处挖掘，又找到了非常相似的另一角，你会想，是否有更深的联系？你继续挖掘，最终发现了地下的结构．当某些东西最终表明有意义时，你有一种发现的激动．

——陶哲轩

第九章

解三角形

四、教材内容分析与教学提示

本章章名页引用的是著名华人数学家陶哲轩先生关于数学发现的乐趣的一段话．考虑到这是本册书的第一堂课，教学任务不是特别重，因此教师可以结合这段话，让学生谈一谈学习数学的困惑、乐趣和不懈的努力．

如果时间容许的话，教师可利用合适的时机向学生介绍一下陶哲轩先生的有关事迹．

陶哲轩先生是澳大利亚唯一荣获数学最高荣誉“菲尔兹奖”的澳籍华人数学教授，也是继1982年丘成桐之后获此殊荣的第二位华人．他是调和分析、偏微分方程、组合数学、解析数论等重要数学研究领域里的重要数学家，被誉为“数学界的莫扎特”．

陶哲轩先生1975年7月17日出生于澳大利亚阿德莱德．他还未满13岁时已赢得国际数学奥林匹克竞赛金牌，21岁获得博士学位，24岁被加利福尼亚大学洛杉矶分校聘为正教授，成为加利福尼亚大学洛杉矶分校有史以来最年轻的正教授．2006年，陶哲轩先生获得麦克阿瑟基金天才奖和菲尔兹奖．

以下是陶哲轩先生关于数学品质的一些观点．

人们都认为数学家应该努力创造“好数学”，但“好数学”该如何定义？比方说，“好数学”可以指：好的数学题解、好的数学技巧、好的数学理论、好的数学洞察、好的数学发现、好的数学应用、好的数学展示、好的数学教学、好的数学远见、好的数学品味、好的数学公关、好的元数学、严密的数学、美丽的数学、优美的数学、创造性的数学、有用的数学、强有力的数学、深刻的数学、直观的数学、明确的数学．

上述每种品质都代表了数学家们作为一个群体增进对数学的理解及运用的不同方式．至于上述品质的相对重要性或权重，并无普遍的共识．不同的数学家往往擅长不同的风格，因而适应不同类型的数学挑战．

他相信“好数学”的这种多样性和差异性对于整个数学来说是非常健康的，因为它容许数学家们在追求更多的数学进展及更好地理解数学这一共同目标上采取许多不同的方法，并开发许多不同的数学天赋．虽然上述每种品质都被普遍接受为是数学所需要的品质，但以牺牲其他所有品质为代价来单独追求其中一两种都有可能变成对一个领域的危害．

本章导语

我们在初中学过解直角三角形的有关知识：在直角三角形中，除直角外共有 5 个元素，即 3 条边和 2 个锐角，由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，就是解直角三角形.

不过，因为不是所有的三角形都是直角三角形，所以如果仅仅会解直角三角形，那么解决一般三角形问题可能就会非常麻烦.

例如，如图 1 所示，台风的破坏力非常大. 实际生活中，了解与预测台风影响的时间具有重要的意义.

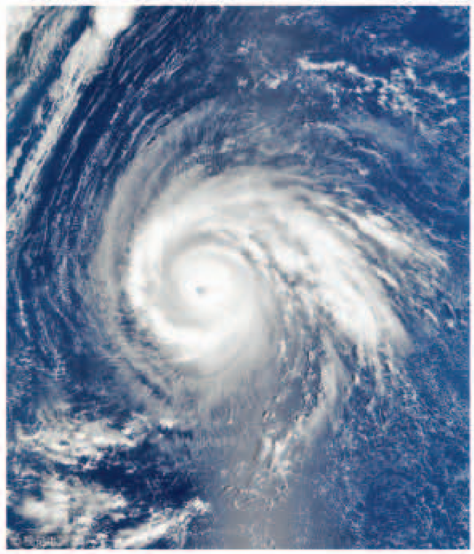


图 1

如图 2 所示，在某海滨城市 A 附近的海面出现台风活动，据监测，目前台风中心位于城市 A 的东偏南 60° 方向、距城市 A 300 km 的海面点 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 30° 方向移动. 已知该台风影响的范围是以台风中心为圆心的圆形区域，半径为 $100\sqrt{3}$ km. 如何求得城市 A 受到台风影响的时间？

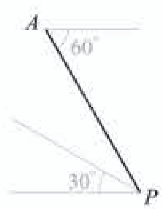


图 2

类似上述的问题，利用本章我们要学习的解一般三角形的知识就可以方便地解决.

在初中我们已经学过怎样得到不可达两点之间的距离，利用本章的内容可以解决更加复杂的问题.

★ 建议教师在课堂上引导学生阅读和理解本章导语中的内容.

本章导语中提到了初中所学的直角三角形内容，谈到了解直角三角形. 如果条件容许，教师在这里可以让学生回顾直角三角形的有关内容，并且让他们自行总结与展示，以此培养他们的数学表达和交流的能力.

★ 本章导语中提到了用直角三角形的知识去解一般三角形会很麻烦，旨在告诉学生，日常中三角形不一定是特殊的，要进一步增长数学知识，激发学生学习兴趣；另外，暗含了一般三角形的问题可以转化为直角三角形来处理，这是解决问题的一个途径，但不是最佳途径.

★ 教材引入了一个具体实例，了解与预测台风影响的时间. 实际问题的提出，让学生感受数学的实用性，产生解决问题的愿望. 需要从实际情境与问题出发，抽象出数学模型，再通过建立三角形中的边角关系解决该问题. 这就是用数学的眼光看世界，用数学的思维分析世界，这都是数学核心素养的集中体现，也是数学知识产生和发展的必经之路. 正弦定理与余弦定理是解斜三角形的重要定理，沟通了几何的“形”与代数的“数”，是用代数知识解决几何问题的典型案例.

通过实例使学生切实体会到数学知识的应用价值，生活中处处都有数学，我们要拥有善于发现的眼睛，激发学生的学习热情.

课标提出要尊重学生已有的知识和经验，倡导学生自主探究、合作探究. 在探究中学生获得了解决实际问题的喜悦，增长了学习见识与能力，发展了探索、合作精神.

本章导语内容的提出，就是建议采用探究式教学方法，以问题为教学的出发点，恰当设置问题，激发学生的学习兴趣，发挥学生的主体地位，训练从特殊到一般的思维过程，在教学中时刻渗透学科素养.

9.1　正弦定理与余弦定理

9.1.1　正弦定理

情境与问题

在现代生活中，得益于科技的发展，距离的测量能借助红外测距仪、激光测距仪等工具直接完成．不过，在这些工具没有出现以前，你知道人们是怎样间接获得两点间距离的吗？

如图 9-1-1 所示，若想知道河对岸的一点 A 与岸边一点 B 之间的距离，而且已经测量出了 BC 的长，也想办法得到了 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小，你能借助这 3 个量，求出 AB 的长吗？

图 9-1-1

为了方便起见，本书中，将$\triangle ABC$ 3 个内角 A，B，C 所对的边分别记为 a，b，c．在这样的约定下，情境中的问题可以转化为：已知 a，B，C，如何求 c？类似的问题可以通过构造直角三角形来解决，更一般地，可利用本小节我们要介绍的正弦定理来求解．

尝试与发现

（1）如图 9-1-2 所示，已知$\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=3$，$C=\frac{\pi}{3}$，你能求出这个三角形的面积吗？

（2）一般地，在$\triangle ABC$ 中，如何根据 a，b 与 C 的值，求出这个三角形的面积？

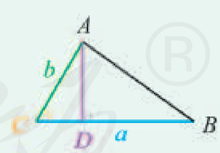


图 9-1-2

如图 9-1-2 所示，在$\triangle ABC$ 中，过点 A 作 BC 边上的高 AD，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，由正弦定义可知

$$AD=b\sin C,$$

因此所求三角形的面积为

★ 本小节内容主要包括正弦定理及其推导、三角形的面积公式、正弦定理的应用，并通过例题介绍了正弦定理可解两类三角形，可以用来证明某些结论. 结合所学内容，教材给出了分类讨论、数形结合两种重要的思想方法.

教学重点是正弦定理的推导及应用；教学难点是三角形边角关系的探究过程和初步运用.

★ 在实际教学过程中，“情境与问题”可以换成其他的相关内容，最好是能结合地方或者学生的实际特点进行举例.

在“情境与问题”中，教材通过一个富有生活气息的实际问题带领学生进入一个具体的数学情境，引发学生学习数学的兴趣，激发解决问题的欲望. 可以让学生带着兴趣去思考，进而解决问题.

解决这个问题要利用已有的数学知识，学生不难联想到解三角形. 此时教师要做两件事，一是和学生共同约定三角形的边角表示，二是让学生思考回顾三角形的有关知识. 例如，三角形的分类，如何解直角三角形，三角形全等条件，三角形的外接圆，等等. 形式可以是先组织小组讨论，再请学生代表发言，最后教师补充.

★ 教师还可根据情境设计多个问题引导学生推导正弦定理. 在三角形中已知 a，B，C，如何求 c？这个过程就是从实际问题抽象出数学模型，即数学建模的过程. 关于数学建模活动与数学探究活动，后面有专门的内容，这里不再做过多叙述.

★ “尝试与发现”体现由特殊到一般的思想方法，蕴含着数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算的数学学科核心素养. 建议教师讲解时让学生自己动手，自行归纳. 需要说明的是三角形的面积公式是适用于所有三角形的，因此分类要全，要引导学生将锐角三角形与钝角三角形转化为直角三角形，掌握通过作三角形的高实现这种转化的方法.

提醒注意的是，在探究三角形面积时，要让学生经历由特殊三角形发现结论、针对一般三角形提出猜想、对一般三角形进行验证、给出一般性的结论的过程，探究过程中要指导学生注意合作交流、共同分析和互相启迪，使学生经历并体验数学探究活动的过程，培养探索精神和创新意识.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

可以看出，上述求三角形面积的方法在 C 为锐角时都成立；而当 C 为钝角时，如图 9-1-3 所示，仍设△ABC 的 BC 边上的高为 AD，则可知

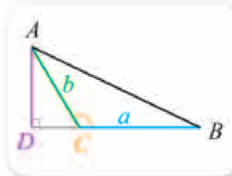


图 9-1-3

$AD=b\sin\angle ACD=b\sin(\pi-C)=$ 1 ________,

因此仍有 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$；当 C 为直角时，由 $\sin 90^\circ=1$ 可知上述面积公式仍成立.

一般地，若记△ABC 的面积为 S，则

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.}$$

由此可知 $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$，又因为 $\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$，因此可得

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

这就是**正弦定理：在一个三角形中，各边的长和它所对角的正弦的比相等.**

例 1 已知△ABC 中，$B=75^\circ$，$C=60^\circ$，$a=10$，求 c.

解 由已知可得

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ.$$

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\text{2 ________}.$$

利用例 1 的解法即可求解出前述情境中的问题．而且，例 1 也可通过构造直角三角形求解，请读者自行尝试，并总结两种解法各自的优缺点.

另外，由例 1 可知，在一个三角形中，如果已知两个角与一条边，就可以求出这个三角形的另外一个角，然后由正弦定理可求出该三角形其他的两条边．因此，确定了一个三角形的两个角与一条边之后，这个三角形就唯一确定了．事实上，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 AAS（或 ASA）一致.

习惯上，我们把三角形的 3 个角与 3 条边都称为三角形的元素，已知三角形的若干元素求其他元素一般称为**解三角形**.

例 2 已知△ABC 中，$a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，求解这个三角形.①

① 即求三角形中未知的元素，下同.

★ 三角形面积公式的记忆方法：三角形相邻两边与其夹角正弦乘积的一半.

教材由三角形面积公式的恒等变形得到正弦定理，这种证明水到渠成，易于学生理解，符合学生的认知规律. 对于正弦定理，教师可引导学生从图形语言、文字语言和符号语言三个方面进行理解.

关于正弦定理的证明，除了教材提供的方法之外，教师还可以选择性地向学生介绍一下其他方法，例如，构造直角三角形，利用三角形的外接圆，坐标法，等等.

★ 正弦定理反映的是三角形的边角关系，在具体应用时，一般写成以下形式.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}.$$

还可以进行以下变形.

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c,$$

$$a=\frac{b}{\sin B}\sin A=\frac{c}{\sin C}\sin A,$$

$$b=\frac{a}{\sin A}\sin B=\frac{c}{\sin C}\sin B,$$

$$c=\frac{a}{\sin A}\sin C=\frac{b}{\sin B}\sin C.$$

教师还可以引导学生复习与三角形边、角相关的常用关系，例如：

(1) 内角和等于 π；

(2) 大边对大角，大角对大边；

(3) 任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

★ 例 1 是正弦定理的直接应用，教师可让学生自行求解. 若学生用构造直角三角形求解，可以引导其分析两种方法的优缺点. 此题是已知三角形的两角及一边，求第三边. 因为三角形已经确定，一定有唯一解. 教师可以引导学生回顾初中所学的三角形全等的判定定理 ASA（或 AAS），还可以照应开头，解决“情境与问题”中提出的问题.

解 因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由于 $0^\circ<B<180^\circ$，所以 $B=$ **3** ________ 或 $B=$ **4** ________.

当 $B=60^\circ$ 时，有

$$C=180^\circ-A-B=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ,$$

此时$\triangle ABC$ 是直角三角形，且 c 为斜边，从而有

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4;$$

当 $B=120^\circ$ 时，有

$$C=180^\circ-A-B=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ,$$

此时$\triangle ABC$ 是等腰三角形，从而由等角对等边可知

$$c=a=2.$$

根据例 2 的解答可知，图 9-1-4 中的(1)(2)都满足例 2 的条件．事实上，这与我们初中所学的 SSA 不能作为三角形全等的判定定理一致.

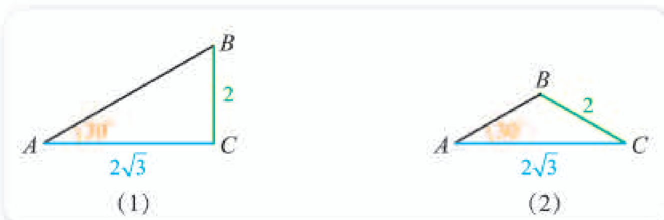


图 9-1-4

例 3 已知$\triangle ABC$ 中，$b=3\sqrt{6}$，$c=6$，$B=120^\circ$，求 A，C 及三角形的面积.

解 由 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于 $0^\circ<C<180^\circ$，所以 $C=$ **5** ________ 或 $C=$ **6** ________.

当 $C=45^\circ$ 时，

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ,$$

而

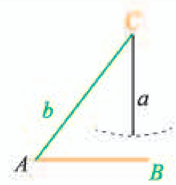
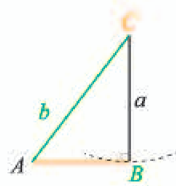
$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

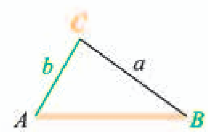
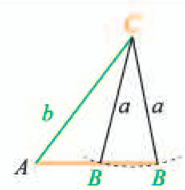
所以三角形的面积为

★ 解三角形是正弦定理的重要应用．例 1 回顾了三角形全等的判定定理，但 SSA 不能作为三角形全等的判定定理，这一点具体可通过例 2 体会．例 2、例 3、例 4 都是两边及一边的对角，此时三角形形状不确定，所以解的个数不确定．教师要注意引导学生发现两解、一解、无解的情况．题中最终有几个解是由已知条件所确定的，明确所求角的范围是解题的关键．值得教师注意的是，在培养学生的发散思维的同时，也要落实好一题多解的作答规范．

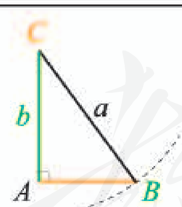
对学有余力的学生，可以进一步探究三角形解的个数的确定因素．例如，通过尺规作图法得到判定条件．供参考的作法如下．

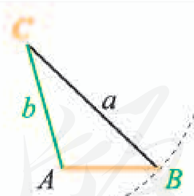
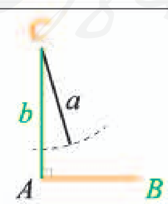
（1）A 为锐角时的情况．

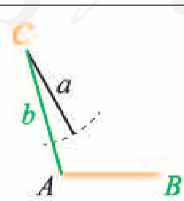
<table>
<tr><td>$a<b\sin A$
无解</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a=b\sin A$ 或 $a\geqslant b$
唯一解</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$b>a>b\sin A$
两组解</td><td>
</td></tr>
</table>

（2）A 为直角或钝角时的情况．

<table>
<tr><td>$a>b$
唯一解</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$a\leqslant b$
无解</td><td>


</td></tr>
</table>

★ 例 3 中，求出 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$后，可以采用教材中的解法，也可根据已知条件 $B=120°$，得到 $0<C<60°$，因此 $C=45°$．

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{6}\times 6\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{27-9\sqrt{3}}{2}.$$

当 $C=135^\circ$ 时，

$$A=180^\circ-B-C=180^\circ-120^\circ-135^\circ=-75^\circ,$$

不合题意，应舍去.

例 3 中的 $C=135^\circ$ 不可能成立，也可从 $b>c$，$B=120^\circ$ 以及“大边对大角”看出.

★ **例 4** 判断满足条件 $A=30^\circ$，$a=1$，$c=4$ 的△ABC 是否存在，并说明理由.

解 假设满足条件的三角形存在，则由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 可知

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{4\sin 30^\circ}{1}=2.$$

又因为 $\sin C\leqslant 1$，所以这是不可能的，因此不存在这样的三角形.

★ **例 5** 在△ABC 中，已知 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，求证：△$ABC$ 是直角三角形.

证明 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则 $k\neq 0$，且

$$\sin A=\frac{a}{k},\ \sin B=\frac{b}{k},\ \sin C=\frac{c}{k}.$$

又因为 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，所以

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}=\frac{c^2}{k^2},$$

即 $a^2+b^2=c^2$，因此由勾股定理的逆定理可知△ABC 是直角三角形.

★ **例 6** 如图 9-1-5 所示，在△ABC 中，已知 $\angle BAC$ 的角平分线 AD 与边 BC 相交于点 D，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

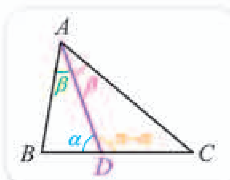


图 9-1-5

证明 如图，设 $\angle ADB=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，则由题意可知 $\angle ADC=\pi-\alpha$，$\angle CAD=\beta$.

在△ABD 和△ADC 中，分别应用正弦定理，可得

$$\frac{BD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},$$

$$\frac{DC}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{AC}{\sin\alpha},$$

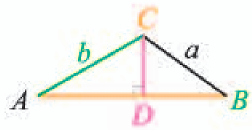
两式相除即可得 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

6 第九章 解三角形

★ 已知三角形的两边和一边对角，如何用正弦定理来确定三角形的个数，既是难点，也是易混淆点，教师要根据学生实际情况，进行符合学生认知规律的讲解.

例 4 中求得正弦值大于 1，与三角函数有界性相矛盾，显然无解. 如果学生的基础较好，教学时可以进行如下拓展.

如下图所示，若满足 $A=30^\circ$，$b=4$，$a=m$（$m>0$）的$\triangle ABC$ 存在，求 m 的取值范围.



解：如图，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，则

$$CD=b\sin 30^\circ=2.$$

因为符合条件的三角形存在，所以 $BC\geqslant CD$，即 $m\geqslant 2$.

解决此问题时，要考虑到数形结合.

★ 例 5 证明的基本方法是边角互换. 解决此类问题需要结合题目本身特点，化边为角或化角为边. 教师可在此题的基础上增添判断三角形形状的题目，根据学生实际决定补充题的难度. 供参考的题目如下.

已知在$\triangle ABC$ 中，$a^2\cdot\tan B=b^2\cdot\tan A$，判断$\triangle ABC$ 的形状.

解：由正弦定理可知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，因此

$$(2R\sin A)^2\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A},$$

即 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，化简得 $\sin 2A=\sin 2B$.

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即

$$A=B\text{ 或 }A+B=\frac{\pi}{2},$$

因此，$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

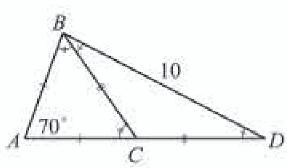
★ 例 6 是内角平分线定理的证明. 教师首先要引导学生在三角形中找到有关线段，如 BD，AB 都在$\triangle ABD$ 中，而 DC，AC 都在$\triangle ADC$ 中；其次分析这两个三角形的边角关系比；最后根据正弦定理给出证明. 此题还可以通过面积公式或者平面几何的知识进行证明.

★ **探索与研究**

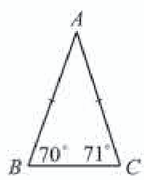
在正弦定理中，设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，研究常数 k 与 $\triangle ABC$ 外接圆的半径的关系.（提示：先考虑直角三角形.）

练习A

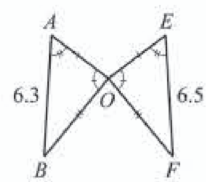
1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=10$，$C=45^\circ$，$B=60^\circ$，通过构造直角三角形求出 b 的值.
2. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$B=30^\circ$，$a=3$，求 b.
3. 求证：在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$.
4. 为了方便起见，有时可对三角形的边和角作一些标记，以表示其中的相等关系. 如图(1)中，AB 与 AC 上的标记相同，这表示 $AB=AC$. 类似地，有 $BC=CD$，$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle CBD=\angle CDB$，而且 $A=70^\circ$，$BD=10$. 图(2)(3)(4)中使用了类似的标记，判断这些图中是否存在矛盾. 如果有，请指出矛盾所在.



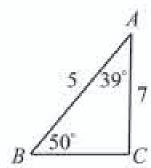
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=45^\circ$，$B=75^\circ$，$b=8$，求 a.

练习B

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3$，$b=4$，$A=30^\circ$，求 $\sin C$.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=2a$，$B=A+60^\circ$，求 A.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$A+C=2B$，求 $\sin C$.
4. 如果在 $\triangle ABC$ 中，角 A 的外角平分线 AD 与 BC 的延长线相交于点 D，求证：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.
5. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$，求 $\sin B$ 及 c 的大小.

1 $b\sin C$　2 $5\sqrt{6}$　3 60°　4 120°　5 45°　6 135°

★ “探索与研究”参考答案为：常数 k 等于$\triangle ABC$ 外接圆半径的 2 倍.

练习 A

1. $b=5\sqrt{6}$.

2. $b=\sqrt{3}$.

3. 提示：利用正弦定理证明.

4. 图（2）（3）（4）中均存在矛盾.

5. $a=8\sqrt{3}-8$.

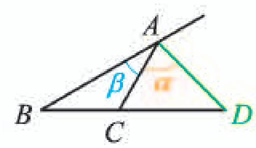
练习 B

1. $\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{5}}{6}$.

2. $A=30^\circ$.

3. $\sin C=1$.

4. 如图，设$\angle CAD=\alpha$，$\angle BAC=\beta$，则在$\triangle ABD$ 中有



$$\frac{BD}{\sin(\beta+\alpha)}=\frac{AB}{\sin D},$$

又因为 $2\alpha+\beta=\pi$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，所以$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin D}$.

同理，在$\triangle ACD$ 中，由$\dfrac{DC}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin D}$可得$\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin D}$，所以$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

5. $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$c=5$.

9.1.2 余弦定理

情境与问题

利用如图 9-1-6(1)所示的现代测量工具，可以方便地测出 3 点之间的一些距离和角，从而可得到未知的距离与角.

(1)　　　　(2)

图 9-1-6

例如，如图 9-1-6(2)所示，A，B 分别是两个山峰的顶点，在山脚下任意选择一点 C，然后使用测量仪得出 AC，BC 以及 $\angle ACB$ 的大小. 你能根据这 3 个量求出 AB 吗?

情境中的问题可以转化为：已知 a，b 和角 C，如何求 c? 类似的问题可以通过构造直角三角形来解决，也可以借助向量来求解.

如图 9-1-7 所示，注意到

$$|\overrightarrow{CA}|=b，|\overrightarrow{CB}|=a，\langle\overrightarrow{CA}，\overrightarrow{CB}\rangle=\boxed{1}\_\_\_\_\_\_\_\_，$$

所以 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos\langle\overrightarrow{CA}，\overrightarrow{CB}\rangle=ab\cos C$，

而且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，因此

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{CA}|^2$$
$$=a^2-2ab\cos C+b^2，$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}|=c$，因此

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.}$$

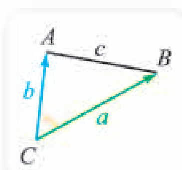


图 9-1-7

类似地，可得

$$\boxed{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A，\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B.\end{aligned}}$$

这就是**余弦定理：三角形任何一边的平方，等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的 2 倍.**

★ 本小节教材的呈现方式与正弦定理一节类似，均经历了实例引入—数学抽象—合作探究证明定理—定理应用的过程，有利于学生进行类比学习，更快地进入余弦定理的探究学习.

★ “情境与问题”中根据实际情境提出问题，引导学生使用测量仪器测出两角及其夹角，用余弦定理解决该问题.

★ 教师可以引导学生用多种方法推导余弦定理，如几何法、坐标法等. 对学有余力的学生可以引导其进行更深入的探究：正弦定理与余弦定理的证明方式很相似，那能否用正弦定理证明余弦定理呢？参考的证明方式如下.

证明：设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，则有

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

因此

$$\begin{aligned}a^2&=4R^2\sin^2 A=4R^2\sin^2(B+C)\\&=4R^2(\sin^2 B\cos^2 C+\cos^2 B\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos B\cos C)\\&=4R^2\left\{\sin^2 B(1-\sin^2 C)+(1-\sin^2 B)\sin^2 C+2\sin B\sin C[\cos(B+C)+\sin B\sin C]\right\}\\&=4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C+8R^2\sin B\sin C\cos(B+C)\\&=b^2+c^2+2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos(180^\circ-A)\\&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

从余弦定理可以看出，已知三角形两边及其夹角，可以求出该三角形的第三边.

例 1 在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=6$，$C=60°$，求c.

解 由余弦定理可知

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos 60°\\&=27,\end{aligned}$$

因此$c=$ 2 ________.

从例 1 可以看出，已知三角形的两边及其夹角时，三角形唯一确定，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 SAS 一致.

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$a=6$，$b=4$，$c=2\sqrt{7}$，求C.

解 由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$可得

$$(2\sqrt{7})^2=6^2+4^2-2\times6\times4\cos C,$$

可解得$\cos C=\dfrac{1}{2}$.

又因为$0°<C<180°$，所以$C=$ 3 ________.

由例 2 可以看出，已知三角形的 3 条边时，可以求出该三角形的 3 个角，而且该三角形也唯一确定，这与我们初中所学的三角形全等的判定定理 SSS 一致.

事实上，余弦定理可以改写为如下形式.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{aligned}}$$

例 3 在$\triangle ABC$中，已知$a\cos A=b\cos B$，试判断这个三角形的形状.

解 利用余弦定理可知

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

因此

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2),$$

即$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$，从而$(a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$，所以

$$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0,$$

因此$a^2-b^2=0$或$c^2-a^2-b^2=0$.

当$a^2-b^2=0$时，$a=b$，此时$\triangle ABC$是 4 ________三角形；

★ 例 1 中，已知两边及夹角，求第三边，三角形唯一确定，所以有唯一解．这与初中所学的三角形全等的判定定理 SAS 一致．

在利用余弦定理求边长时，有时会因为定理使用不当而产生增根，教学时教师应关注这一点．对于学有余力的学生，教师可以通过补充例题，帮助学生理解定理本质．已知三角形的两边及其中一边的对角，三角形不一定能唯一确定，这与我们初中所学的 SSA 并不能作为三角形全等的判定定理是一致的．事实上，当角为较长边所对的角时，三角形唯一确定．

★ 例 2 中，已知三边求解三角形，三角形唯一确定，所以有唯一解．这与初中所学的三角形全等的判定定理 SSS 一致．

★ 例 3 还可以借助正弦定理等进行求解．参考的解法如下．

解：设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，有 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$．

代入 $a\cos A=b\cos B$，得

$$2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B,$$

所以 $\sin 2A=\sin 2B$，因此

$$2A=2B+2k\pi \text{ 或 } 2A+2B=2k\pi+\pi\text{，其中 } k\in\mathbf{Z}.$$

又因为 A，$B\in(0,\ \pi)$，所以

$$A=B \text{ 或 } A+B=\frac{\pi}{2},$$

因此$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形．

教师可以引导学生总结三角形形状的判定方法．供参考的方法如下．

（1）锐角三角形：$\begin{cases}a^2+b^2-c^2>0,\\ a^2+c^2-b^2>0,\\ b^2+c^2-a^2>0.\end{cases}$

（2）直角三角形：$a^2+b^2=c^2$ 或 $a^2+c^2=b^2$ 或 $b^2+c^2=a^2$．

（3）钝角三角形：$a^2+b^2<c^2$ 或 $a^2+c^2<b^2$ 或 $b^2+c^2<a^2$．

当 $c^2-a^2-b^2=0$ 时，$a^2+b^2=c^2$，此时△ABC 是 5 ________ 三角形.

故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

例 3 也可借助正弦定理得到结论，请读者自行尝试.

例 4 如图 9-1-8 所示平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $B+D=180°$，$AB=2$，$BC=4\sqrt{2}$，$CD=4$，$AD=2\sqrt{5}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

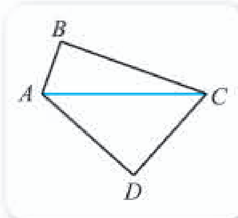


图 9-1-8

解 连接点 A，C，如图 9-1-8 所示.

在△ABC 与△ADC 中分别使用余弦定理可得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B,$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\cos D.$$

又因为 $B+D=180°$，所以 $\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B$，因此

$$2^2+(4\sqrt{2})^2-2\times2\times4\sqrt{2}\cos B=(2\sqrt{5})^2+4^2+2\times2\sqrt{5}\times4\cos B.$$

解得 $\cos B=0$，因此 $\cos D=0$，则 $B=D=$ 6 ________.

从而可知四边形的面积为

$$\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4(\sqrt{2}+\sqrt{5}).$$

例 4 说明，与平面多边形有关的问题，有时可以转化为三角形的问题来求解.

★ **例 5** 在△ABC 中，求证：$a=b\cos C+c\cos B$.

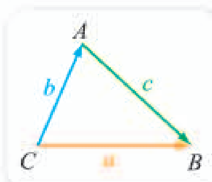


图 9-1-9

证明 如图 9-1-9 所示，

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB},$$

因此

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

又由图可知

$$|\overrightarrow{CB}|=a,\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ba\cos C,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=ca\cos B,$$

所以

$$a^2=ba\cos C+ca\cos B,$$

即 $a=b\cos C+c\cos B$.

例 5 的结果也可用向量数量积的几何意义来解释. 事实上，$b\cos C+c\cos B$ 是 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影的数量之和. 当然，由例 5 的方法同样可得

$$b=a\cos C+c\cos A,$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

利用这些结果也可推导出余弦定理，请读者自行尝试.

★ 利用例 5 的结果可证明余弦定理. 参考的证明方式如下.

证明：由例 5 可知 $a=b\cos C+c\cos B$，$b=a\cos C+c\cos A$，$c=a\cos B+b\cos A$.

在三个式子的等号两边分别同时乘以 a，b，c，可以得到

$$a^2=ab\cos C+ac\cos B，b^2=ab\cos C+bc\cos A，c^2=ac\cos B+bc\cos A.$$

将后两式整理代入第一式可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

或由 $a=b\cos C+c\cos B$，可得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2\cos^2C+c^2\cos^2B+2bc\cos B\cos C\\&=b^2(1-\sin^2C)+c^2(1-\sin^2B)+2bc(\cos B\cos C-\sin B\sin C)+2bc\sin B\sin C\\&=b^2+c^2+2bc\cos(B+C)-(b\sin C-c\sin B)^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

即得余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

在教学的过程中可补充如下题目，帮助学生体会余弦定理的应用.

1. 已知平行四边形 $ABCD$，求证：$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

2. 已知$\triangle ABC$ 中，M 为 BC 中点，求证：$4AM^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$.

参考答案为：1. 设 $AD=a$，$AB=b$，$\angle BAD=\alpha$.

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理可知 $BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

同理 $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\alpha)$.

两式相加可得 $AC^2+BD^2=2(a^2+b^2)$.

即 $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

2. 作 $CN /\!/ AB$，与 AM 的延长线交于 N.

由第 1 题结论可知 $AN^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$.

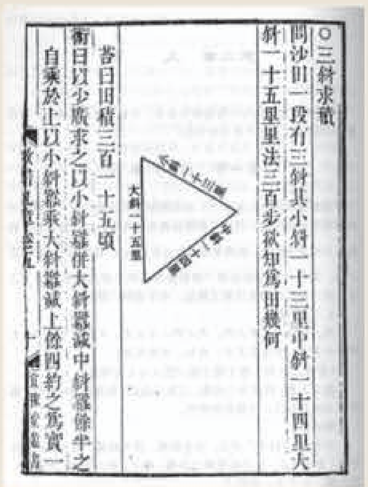
因为 $AN^2=4AM^2$，所以 $4AM^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$.

★ 拓展阅读

秦九韶的“三斜求积术”

你听说过“三斜求积术”吗？这是我国宋代的数学家秦九韶用实例的形式提出的（如图所示），其实质是根据三角形的三边长 a，b，c 求三角形面积 S，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$


○三斜求積
問沙田一段有三斜其小斜一十三里中斜一十四里大
斜一十五里里法三百步欲知爲田幾何
荅曰田積三百一十五頃
術曰以少廣求之以小斜冪并大斜冪減中斜冪餘半之
自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之爲實一

你能证明这个公式吗？

“三斜求积术”中的“三斜”指三角形的三条边，而且三条边从小到大分别称为“小斜”“中斜”“大斜”．秦九韶是用语言叙述的相关公式，即：以少广求之，以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积．

事实上，利用余弦定理等内容，也可推导出“三斜求积术”，过程如下．

$$S^2=\frac{1}{4}c^2a^2\sin^2B$$
$$=\frac{1}{4}(c^2a^2-c^2a^2\cos^2B),$$

又因为 $ca\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$，所以

$$S^2=\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right],$$

从而可知

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

练习A

1. 已知△ABC，求证：
   （1）若 $a^2+b^2=c^2$，则 C 为直角；　（2）若 $a^2+b^2>c^2$，则 C 为锐角；
   （3）若 $a^2+b^2<c^2$，则 C 为钝角．
2. 已知△ABC 中，$a=10$，$b=5$，$C=120^\circ$，求 c．
3. 已知△ABC 中，$a=6$，$b=4$，$c=2\sqrt{7}$，求角 C．
4. 已知△ABC 中，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{19}$，求角 C 以及三角形的面积．
5. 在△ABC 中，已知 $a:b:c=3:4:5$，试判断这个三角形的形状．

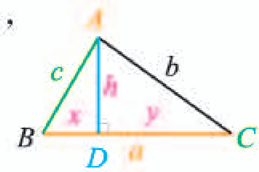
练习B

1. 求证：在△ABC 中，有
$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C).$$
2. 已知△ABC 中，$a=2$，$c=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$，求 b 及角 C．

★ 教学中，对于学有余力的学生，教师可以让其阅读“拓展阅读”内容并解决其中的问题，也可以让学生利用网络查询中国古代与正弦定理或余弦定理有关的数学内容，采取分组讨论、课堂汇报等形式展开学习，借此提高学生查阅文献和数学表达等能力，促进核心素养的形成.

秦九韶的“三斜求积术”实质是根据三角形三边长求三角形面积. 教材中用余弦定理推导了秦九韶的“三斜求积术”，然而当年秦九韶依靠商高定理（即勾股定理）推导起来要艰难得多. 参考的证明方式如下.

证明：如图，设 $a \geqslant b \geqslant c$，作 $AD \perp BC$，垂足为 D，设 $BD=x$，$CD=y$，$AD=h$，则



$$\begin{cases} x^2+h^2=c^2, \\ y^2+h^2=b^2, \\ x+y=a. \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$，$y=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$，$h=\sqrt{c^2-\dfrac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}$. 从而

$$S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

练习 A

1. 略.
2. $c=5\sqrt{7}$.
3. $C=60°$.
4. $C=120°$，$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
5. $\triangle ABC$ 为直角三角形.

练习 B

1. 略.
2. 当 $b=\sqrt{3}+1$ 时，$C=60°$；当 $b=\sqrt{3}-1$ 时，$C=120°$.

3 在$\triangle ABC$中，已知$A:B=1:2$，$a:b=1:\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的3个内角.

4 在$\triangle ABC$中，分别根据下列条件求c.

(1) $a=4$，$b=2$，$A=60^\circ$；　　(2) $a=4$，$b=3$，$A=45^\circ$.

1 C　2 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$　3 60°　4 等腰　5 直角　6 90°

习题9-1A

1 在$\triangle ABC$中，已知$a\cos A=b\cos B$，用正弦定理判断这个三角形的形状.

2 在$\triangle ABC$中，已知$a+c=2b$，$A-C=\dfrac{\pi}{3}$，求$\sin B$.

3 已知$(\sin A+\sin B):(\sin A+\sin C):(\sin B+\sin C)=4:5:6$，求$\triangle ABC$中最大的角.

4 已知$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$a=3$，求解这个三角形.

5 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(1,1)$，$B(m+4,m-4)$，$C(0,0)$，且$\cos C=-\dfrac{3}{5}$，求常数m的值.

6 分别根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状.

(1) $a^2\tan B=b^2\tan A$；　　(2) $a-b=c(\cos B-\cos A)$.

习题9-1B

1 已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别为$AB=2$，$BC=6$，$CD=AD=4$，求四边形$ABCD$的面积.

2 已知$\triangle ABC$中，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，AD为BC边上的中线，且$\angle BAD=30^\circ$，求BC的长.

3 已知三角形的两边和为4，其夹角为60°，求满足条件的三角形的最小周长.

4 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，判断这个三角形的形状并给出证明.

5 在$\triangle ABC$中，已知$A=2B$，求证：$a=2b\cos B$.

6 已知$\triangle ABC$中，$a=b\cos C+c\sin B$.

(1) 求角B；

(2) 若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

3. $A=30°$，$B=60°$，$C=90°$.

4. （1）$c=1+\sqrt{13}$；（2）$c=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{46}}{2}$.

习题 9－1A

1. $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

2. $\sin B=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$.

3. C 为$\triangle ABC$ 最大角，$C=120°$.

4. $C=75°$，$b=\sqrt{6}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$.

5. $m=-3$.

6. （1）$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形；（2）$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

习题 9－1B

1. $8\sqrt{3}$.

2. $BC=2\sqrt{21}$.

3. 当且仅当 $a=b=c=2$ 时，$\triangle ABC$ 的周长的最小值为 6.

4. $\triangle ABC$ 为等边三角形.

5. 由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$可得$\dfrac{a}{\sin 2B}=\dfrac{b}{\sin B}$，因此$\dfrac{a}{2\sin B\cos B}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $a=2b\cos B$.

6. （1）$B=45°$；（2）当 $a=c$ 时，$\triangle ABC$ 的面积有最大值$\sqrt{2}+1$.

9.2　正弦定理与余弦定理的应用

★

情境与问题

在测量工作中，经常会遇到不方便直接测量的情形．例如，如图9-2-1所示故宫角楼的高度，因为顶端和底部都不便到达，所以不能直接测量．

假设给你米尺和测量角度的工具，你能在故宫角楼对面的岸边得出角楼的高度吗？如果能，写出你的方案，并给出有关的计算方法；如果不能，说明理由．

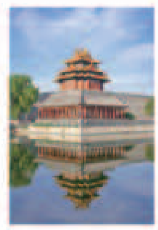


图 9-2-1

图9-2-1中角楼的高度问题可以转化为：用米尺与测量角度的仪器，怎样得到不便到达的两点之间的距离？

如图9-2-2所示，设线段 AB 表示不便到达的两点之间的距离，在能到达的地方选定位置 C 进行测量．用测量角度的仪器可以测量出 $\angle ACB$ 的大小 α，但是因为点 A，B 都不便到达，所以 $\triangle ABC$ 的3条边都无法用米尺测量．

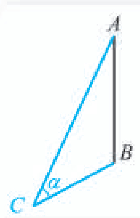


图 9-2-2

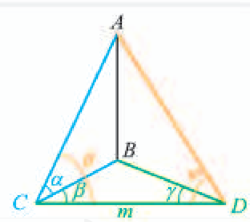


图 9-2-3

★

如图9-2-3所示，在可到达的地方再选定一点 D，并使得 CD 的长 m 能用米尺测量．用测量角度的仪器测出

$$\angle BCD=\beta,\ \angle BDC=\gamma,\ \angle ACD=\theta,\ \angle ADC=\varphi.$$

然后，利用 α，β，γ，θ，φ 以及 m 即可求出 AB 的长．首先，在 $\triangle BCD$ 中，因为 $\angle CBD=\pi-\beta-\gamma$，所以由正弦定理可得

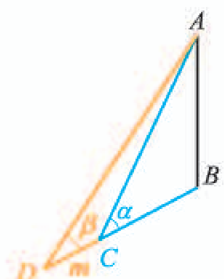
$$\frac{m}{\sin(\pi-\beta-\gamma)}=\frac{BC}{\sin\gamma},$$

★ “情境与问题”以故宫角楼的高度测量为背景，引入本小节的学习内容，有利于学生了解历史文化，增强学生的民族自豪感，使学生感受到生活中处处有数学．实际教学过程中，“情境与问题”也可以换成其他的相关内容，结合地域或者学生的特点进行举例．

教材引入先给出实际问题，因为角楼顶端和底端都不方便到达，所以高度不能直接测量．然后给出米尺和测量角度的工具，让学生自己设计测量方案．在这个过程中，教师要引导学生把实际图形转化为数学图形．考虑到若一开始就求解“情境与问题”中 A，B 不可到达的模型，对于学生可能有困难，不妨先让学生求解 A，B 两点可到达时的数学模型，再进一步变式为 A，B 两点不可到达时的数学模型．

★ 教材中给出的方法可以认为是从 C 点横着走一段距离到达 D 点，教师可以引导学生思考：还有其他方法求出建筑的高度吗？若有，请设计另外一种方法．供参考的一种方法如下．

如右图所示，沿着 BC 方向走一段距离到达 D 点，用米尺测量出 CD 的长度为 m．用测量角度的仪器测量出 $\angle ACB=\alpha$，$\angle ADC=\beta$．



在 $\triangle ADC$ 中，$\angle CAD=\alpha-\beta$，由正弦定理得

$$\frac{m}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AC}{\sin\beta},$$

因此 $AC=\dfrac{m\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中可得 $AB=AC\cdot\sin\alpha=\dfrac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$．

高度测量问题有以下两个关注点．

(1) 空间向平面的转化．高度测量问题往往是空间中的问题，为了方便观察，减小误差，需要将空间问题转化为平面问题．

(2) 解直角三角形与解斜三角形结合，全面分析所有三角形，仔细规划解题思路．

因此 $BC=\dfrac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$；同理，从$\triangle ACD$可得 $AC=$ 1 ________；最后，在$\triangle ABC$中，根据 AC，BC，α，利用余弦定理就可以得出 AB 的长.

例 1 如图 9-2-4 所示，A，B 是某沼泽地上不便到达的两点，C，D 是可到达的两点. 已知 A，B，C，D 4 点都在水平面上，而且已经测得 $\angle ACB=45^\circ$，$\angle BCD=30^\circ$，$\angle CDA=45^\circ$，$\angle BDA=15^\circ$，$CD=100$ m，求 AB 的长.

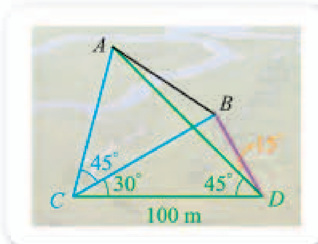


图 9-2-4

解 因为 A，B，C，D 4 点都在水平面上，所以

$$\angle BDC=\angle BDA+\angle CDA=15^\circ+45^\circ=60^\circ,$$

因此 $\angle CBD=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$，所以在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$$BC=100\cos 30^\circ=50\sqrt{3}\ (\text{m}).$$

在$\triangle ACD$中，因为 $\angle CAD=180^\circ-45^\circ-30^\circ-45^\circ=60^\circ$，所以由正弦定理可知

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ}=\frac{100}{\sin 60^\circ},$$

因此 $AC=$ 2 ________ m.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可知

$$AB^2=\left(\frac{100\sqrt{6}}{3}\right)^2+(50\sqrt{3})^2-2\times\frac{100\sqrt{6}}{3}\times 50\sqrt{3}\cos 45^\circ=\frac{12\ 500}{3},$$

从而有 $AB=$ 3 ________ m.

由例 1 可以看出，在用解三角形的知识解决实际问题时，常常需要综合利用正弦定理与余弦定理.

例 2 如图 9-2-5 所示，在某海滨城市 A 附近的海面出现台风活动. 据监测，目前台风中心位于城市 A 的东偏南 60° 方向、距城市 A 300 km 的海面点 P 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 30° 方向移动. 如果台风影响的范围是以台风中心为圆心的圆形区域，半径为 $100\sqrt{3}$ km，将问题涉及范围内的地球表面看成平面，判断城市 A 是否会受到上述台风的影响. 如果会，求出受影响的时间；如果不会，说明理由.

图 9-2-5

解 如图 9-2-6 所示，设台风的中心 x h 后到达位置 Q，且此时 $AQ=100\sqrt{3}$ km.

在$\triangle AQP$中，有 $P=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，且

$$AP=300\ \text{km},\ PQ=20x\ \text{km},$$

★ 例 1 图形较为复杂，建议教师在讲课时把$\triangle ABC$，$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 单独拿出来求解.

求解三角形中与距离有关的问题时，若所求线段在一个三角形中，则直接用正弦定理、余弦定理求解；若所求的线段在多个三角形中，则依次选择或构造适当的三角形，再利用正弦定理、余弦定理求解.

求解三角形中与距离有关的问题的关键是转化求解三角形中的边，分析出所求解三角形中哪些元素已知，还需要哪些元素，应用正弦定理、余弦定理来解决问题.

★ 例 2 讲解时需帮助学生建立数学模型，让学生学会用数学的眼光看现实世界，再应用数学知识解决实际问题.

首先引导学生提出问题：如何用数学语言描述城市 A 受台风影响？如有影响，如何用数学知识进行计算和表达？

然后通过讨论等方法得到答案：城市与台风中心间距离小于等于台风半径，便受影响；影响时间为台风经过城市的时间差.

此题还可以用余弦定理求解，参考解法如下.

解：设台风中心 x h 后到达位置 Q.

在$\triangle AQP$ 中，$P=30^\circ$，$AP=300$ km，$PQ=20x$ km，由余弦定理可得

$$AQ^2=AP^2+PQ^2-2AP\times PQ\times\cos P.$$

当 $AQ\leqslant 100\sqrt{3}$ km 时，城市 A 受到台风影响. 代入化简得

$$x^2-15\sqrt{3}x+150\leqslant 0,$$

解得 $5\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 10\sqrt{3}$.

即城市 A 会受到影响，受影响时间为 $10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ (h).

教师可以引导学生总结本小节涉及的三个实际问题，一是不能到达底部的高度问题，二是不能到达的同一水平面上两点的距离问题，三是在运动变化过程中蕴含的解三角形的问题.

因此由正弦定理可得

$$\frac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{300}{\sin Q}=\frac{20x}{\sin A}.$$

从而可解得 $\sin Q=\frac{300\sin 30^\circ}{100\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $Q=$ $\boxed{4}$ ________ 或 $Q=$ $\boxed{5}$ ________.

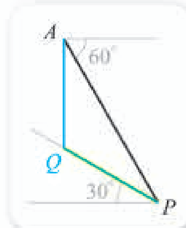


图 9-2-6

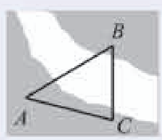
当 $Q=60^\circ$ 时，$A=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$，因此 $20x=\frac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$，$x=10\sqrt{3}$；当 $Q=120^\circ$ 时，$A=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$，因此 $20x=100\sqrt{3}$，$x=5\sqrt{3}$.

这就说明，城市 A 在 $5\sqrt{3}$ h 后会受到影响，持续的时间为

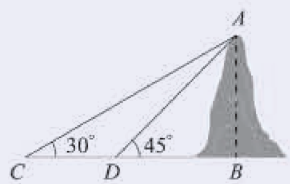
$$10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}\ (\text{h}).$$

习题9-2A

1. 如图，设 A，B 两点在河的两岸，测量者在与 A 同侧的河岸边选取点 C，测得 AC 的距离是 50 m，$\angle BAC=45^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$，求 A，B 两点间的距离.



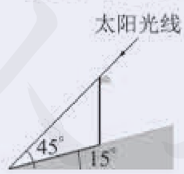
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，勘探人员朝一座山行进时，前后两次测得山顶的仰角分别为 30° 和 45°，两个观测点 C，D 之间的距离为 200 m，求此山的高度 AB(测量仪器的高度忽略不计，A，B，C，D 都在同一平面内，$\triangle ABC$ 是一个直角三角形).

3. 如图，在倾斜角等于 15° 的山坡上有一根旗杆，当太阳的仰角是 $\alpha=45^\circ$ 时，旗杆在山坡上的影子的长是 30 m，求旗杆的高.



（第 3 题）

（第 4 题）

4. 如图，在曲柄 CB 绕 C 点旋转时，活塞 A 作直线往复运动，设连杆 AB 长为 340 mm，曲柄 CB 长 85 mm，求曲柄 CB 从初始位置 CB_0 按顺时针方向旋转 60° 时，活塞 A 移动的距离 AA_0.

习题 9－2A

1. 由 $A+B+C=180^\circ$，得 $\angle ABC=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$.

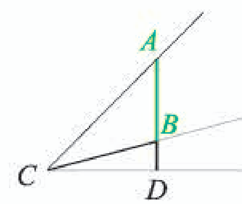
又因为 $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，即 $\dfrac{AB}{\sin 75^\circ}=\dfrac{50}{\sin 60^\circ}$.

所以 $AB=\dfrac{25\sqrt{6}+75\sqrt{2}}{3}$ (m).

2. 在 Rt$\triangle ABD$ 中，因为 $\angle ADB=45^\circ$，所以 $\angle ADB=\angle DAB=45^\circ$，因此 $AB=BD$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，由锐角三角函数的定义得 $\tan\angle ACB=\dfrac{AB}{BC}$，即 $\dfrac{AB}{AB+200}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $AB=100\sqrt{3}+100$ (m).

3. 如图，设旗杆为 AB，旗杆在山坡上的影子为 BC，延长 AB 交水平线于点 D.



由题意知 $BC=30$ m，$\angle ACD=45^\circ$，$\angle BCD=15^\circ$. 则 $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=30^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$.

在$\triangle ACB$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

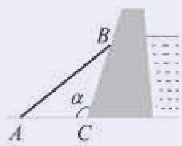
即 $\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=\dfrac{30}{\sin 45^\circ}$，解得 $AB=15\sqrt{2}$ (m).

4. 在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos\angle C$，即 $340^2=AC^2+85^2-85AC$，解得 $AC=\dfrac{85\pm85\sqrt{61}}{2}$ (舍去负值).

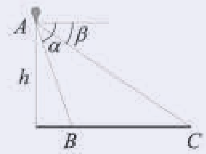
所以活塞 A 移动的距离为 $AA_0=340+85-AC\approx50.56$ (mm).

习题9-2B

1. 为了测量河堤背水坡对地面的倾斜角，用一根长为 m 的长棒 AB 靠在堤旁，C 为堤脚，现测得 $AC=n$，$BC=t$．如图所示，且图中所示各点都在同一铅垂平面内，你能用 m，n，t 表示出河堤背水坡的倾斜角 α 满足的条件吗？



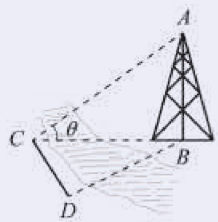
（第 1 题）



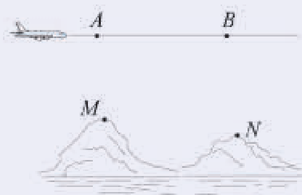
（第 2 题）

2. 如图，从高为 h 的热气球 A 上测量海平面上 B，C 两点之间的距离．现测得 B 的俯角是 α，且 C 的俯角是 β，图中各点都在同一铅垂平面内．用 α，β 和 h 表示出 BC．

3. 如图，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D．现测得 $\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，$CD=s$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ，求塔高 AB．



（第 3 题）



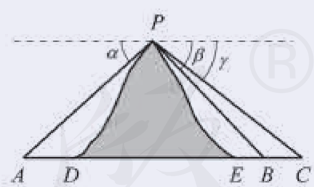
（第 4 题）

4. 为了测量两山顶 M，N 间的距离，飞机沿水平方向在 A，B 两点进行测量．已知 A，B，M，N 在同一个铅垂平面内（如图所示）．飞机能够测量的数据有俯角和 A，B 间的距离．请设计一个方案，包括

(1) 指出需要测量的数据（用字母表示，并在图中标出）；

(2) 用文字和公式写出计算 M，N 间距离的步骤．

5. 如图所示，A，B，C 为山脚两侧共线的 3 点，在山顶 P 处测得 3 点的俯角分别为 α，β，γ．计划沿直线 AC 开通穿山隧道．为求出隧道 DE 的长度，你认为还需要直接测量出 AD，EB，BC 中哪些线段的长度？根据条件，并把你认为需要测量的线段长度作为已知量，写出计算隧道 DE 长度的运算步骤．



（第 5 题）

1 $\dfrac{m\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}$ 2 $\dfrac{100\sqrt{6}}{3}$ 3 $\dfrac{50\sqrt{15}}{3}$ 4 60° 5 120°

16 第九章 解三角形

习题 9－2B

1. 由余弦定理，得 $\cos\alpha=\dfrac{n^2+t^2-m^2}{2nt}$.

2. 过 A 作 BC 的垂线，垂足为 D，$BC=CD-BD=\dfrac{h}{\tan\beta}-\dfrac{h}{\tan\alpha}$.

3. $AB=BC\tan\theta=\dfrac{s\cdot\sin\beta\cdot\tan\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

4. 参考方案如下.

(1) 需要测量的数据有：A 点到 M，N 的俯角 α_1，β_1；B 点到 M，N 的俯角 α_2，β_2；A，B 两点之间的距离 d.

(2) 计算 M，N 间距离的步骤如下.

第一步：计算 AM. 在$\triangle ABM$ 中，由正弦定理得 $AM=\dfrac{d\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步：计算 AN. 在$\triangle ABN$ 中，由正弦定理得 $AN=\dfrac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2+\beta_1)}$；

第三步：计算 MN. 在$\triangle AMN$ 中，由余弦定理得

$$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\times AN\cos(\alpha_1-\beta_1)}.$$

5. 还需要测出 $AD=m$，$EB=n$，$BC=p$.

在$\triangle BCP$ 中，由题意，得 $\angle BCP=\gamma$，$\angle BPC=\beta-\gamma$. 由正弦定理，得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BPC}=\dfrac{BP}{\sin\angle BCP}$，即 $\dfrac{p}{\sin(\beta-\gamma)}=\dfrac{BP}{\sin\gamma}$，解得 $BP=\dfrac{p\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$.

在$\triangle ABP$ 中，由题意，得 $\angle PAB=\alpha$，$\angle APB=\pi-\alpha-\beta$. 由正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{BP}{\sin\angle PAB}$，即 $\dfrac{AB}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\dfrac{p\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha}$，解得 $AB=\dfrac{p\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha}$.

所以 $DE=AB-AD-EB=\dfrac{p\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha}-m-n$.

★ 9.3 数学探究活动：得到不可达两点之间的距离

★ 1. 活动背景介绍与要求

从前面我们已经看到，借助米尺与测量角度的仪器，可以得出不可达两点之间的距离．例如，旗杆的高、两建筑物上给定两点之间的距离等，都可以借助解三角形的知识得出．

请与其他同学分工合作，确定合适的两点，利用身边的工具或制作简易工具，测量有关数据，然后利用正弦定理与余弦定理来得出选定两点之间的距离，并讨论如何减少误差等．条件允许的话，最后可借助其他手段获得给定两点的真实距离，然后进行比较．

要求活动以课题的形式完成，经历完整的选题、开题、做题、结题过程．选题是指根据活动要求选定合适对象的过程，开题是指讨论与确定活动步骤的过程，做题是指按照讨论的步骤进行实际活动并记录数据的过程，结题是指整理活动数据、总结与交流的过程．

活动过程中，要参照下表，制作类似的表格，并如实填写．

得到不可达两点之间的距离活动记录表

活动开始时间：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1) 成员与分工	
姓 名	分 工
(2) 选定的不可达两点的状态描述（可附照片，下同）	
(3) 活动方案（包括测量原理、创新点描述等）	
(4) 活动工具描述（包括自制工具的制作步骤等）	

★ 教材中的数学探究活动，是将理论知识运用于生活实际的过程，有助于学生对本章内容的学习和掌握，有利于发扬学生的团结协作精神，发展学生的核心素养.

★ 活动可分为以下步骤进行.

(1) 选题. 可由教师提出问题，例如，如何测量学校广场上旗杆的高度？也可由小组自选研究对象.

(2) 开题. 各小组在教师协助下确定活动步骤，包括小组成员的具体分工，测量的方案，以及测量仪器的准备，也可鼓励学生自制测量仪器.

(3) 做题. 进行实际测量，记录数据. 测量时可多次测量取平均值，将活动数据记录在表格中.

(4) 结题. 借助于计算器或数据处理软件的计算功能等得出结果. 教师组织各小组展示、交流研究成果. 最后对各小组的成果进行评价. 评价的方式由学生自评、互评和教师评价相结合.

教师可引导学生在以下几个方面进行评价：测量方案简易、可行；数据统计准确，误差小；熟练使用计算器、数据处理软件等计算工具；计算结果合理，符合实际；小组成员参与度高.

在实际测量之前，要让学生写出测量步骤，有计划、有目的地进行测量；要引导学生在实际操作和解决问题的过程中，学会利用查询资料等手段获取信息；实际研究时，还应该让学生采取各种合作方式（如分组协作等）解决问题，培养学生交流和协作能力.

实际测量时，教师应指导学生需要注意以下几点.

(1) 要根据所测量两点的大致距离，合理设定不同测量点之间的距离，否则所构造的三角形的三边长度差距太大，会导致最终数据误差过大. 例如，在测量几十米高的故宫角楼的高度时，如果设置的两个观测点之间的距离只有 1 米，这显然是不合适的.

(2) 可以从不同位置多测量几次，借此减少测量和计算的误差.

(3) 在可能的情况下，可以让某些待测量角为特殊角（如直角），减少计算量.

(4) 建议学生根据待测量两点所处的地理环境，选择多种方法解决问题（参考教材 9.2 节内容），并给出方法的选择理由，比较不同方法，进行合理性分析.

要让学生能做出误差分析：误差是怎么产生的？如何防止、减少误差？如何更加准确地进行测量？

续表

(5) 活动过程中记录的数据
(6) 根据数据计算结果
(7) 活动总结（包括误差分析、活动感受等）

活动结束时间：________________

2. 活动提示

活动过程中，务必注意安全.

为了得到不可达两点之间的距离，可借助的方法很多.

例如，如图 9-3-1 所示，为了得到建筑物 AB 的高，可以在水平面的 C 点处先测量仰角 α（其中 CD 是测量仪器或测量人的高），然后前进 x m 到达点 E 后再测量仰角 β 的大小，最后根据有关数据和直角三角形的知识就可得出 AB 的高.

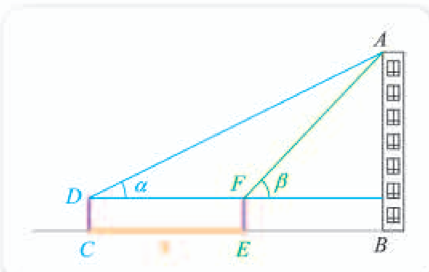


图 9-3-1

当然，在这种测量方法中，要保证 C，E，B 3 点在一条直线上，而且 AB 要与 BC 垂直，否则误差会比较大.

在实际生活中，有时并不能保证 AB 与 BC 垂直，可以进一步探讨此时怎样才能完成任务.

再例如，我们还可借助 9.2 中的方法来完成任务，请大家自行参考有关内容.

活动中的计算可借助计算器或计算机软件完成.

★ 教材中不可达两点间的距离的测量一般有以下两种情况.

(1) 测量物体高度，其解决通法是构造三棱锥.

(2) 测量地面上不可达的两点之间的距离，其解决通法是构造平面四边形.

根据书中介绍的测算方法，要尽量保证共线或者垂直，才能减小误差.

★ 过 D 点作 BC 的平行线交 AB 于点 G. 求 A，G 两点间的距离，理想状态是，当 AG 垂直于水平面，即 $AG\perp DG$，且 D，F，G 共线时，在 $\triangle ADF$ 中由正弦定理得 $\dfrac{DF}{\sin\angle DAF}=\dfrac{AF}{\sin\alpha}$，即 $AF=\dfrac{DF\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$. 在 $\triangle AGF$ 中，由正弦定理得

$$AG=\frac{DF}{\cot\alpha-\cot\beta} \qquad ①$$

分析误差时可以注意以下两个方面.

(1) 当 AG 垂直于水平面，但 D，F，G 不共线时.

如图 1 所示，$\angle ADG=\alpha$，$\angle DFG=\gamma$，$\angle AFG=\beta$，$\angle GDF=\theta$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGF$ 中，$\dfrac{AG}{FG}=\tan\beta$，$FG=AG\cot\beta$. 在 $\triangle DFG$ 中，$\angle DGF=180°-\theta-\gamma$，由正弦定理得 $\dfrac{FG}{\sin\theta}=\dfrac{DF}{\sin\angle DGF}$，即 $\dfrac{AG\cot\beta}{\sin\theta}=\dfrac{DF}{\sin(\theta+\gamma)}$，求得

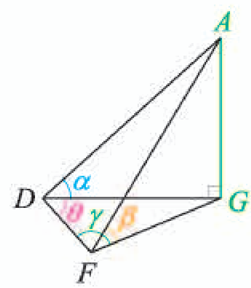


图 1

$$AG=\frac{DF\sin\theta}{\cot\beta\sin(\theta+\gamma)} \qquad ②$$

采用①的方式测算，若要准确，就必须保证 D，F，G 共线. 若②与①数值差距较大，则应根据②来估计高度. 其解决通法是构造三棱锥，需要测量四个角度和一个距离.

(2) 当 AG 不垂直于水平面时.

如图 2 所示，在过 D 点且与水平面平行的平面内取一点 D'，$\angle GDD'=\alpha$，$\angle GD'D=\varphi$，$\angle AD'G=\theta$，$\angle ADD'=\gamma$，$\angle AD'D=\beta$.

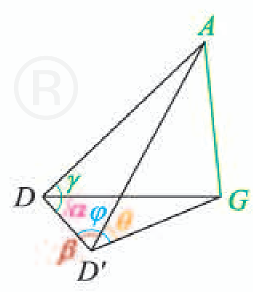


图 2

在 $\triangle ADD'$ 中，$\angle DAD'=180°-\gamma-\beta$，由正弦定理得 $\dfrac{DD'}{\sin(\gamma+\beta)}=\dfrac{AD'}{\sin\gamma}$，即 $AD'=\dfrac{DD'\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}$.

在 $\triangle DD'G$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{DD'}{\sin(\alpha+\varphi)}=\dfrac{D'G}{\sin\alpha}$，即 $D'G=\dfrac{DD'\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$

在 $\triangle AD'G$ 中，由余弦定理得 $AG=\sqrt{AD'^2+D'G^2-2AD'\times D'G\times\cos\theta}$.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先根据三角形的面积得到了正弦定理，然后由向量的数量积得到了余弦定理，最后讨论它们的应用，因此可以作出如下的知识结构图.

三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ → 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ → 解三角形

向量的数量积 → 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ → 解三角形

你能作出其他形式的知识结构图吗？试试吧！

02 课题作业

从本章内容中可以看出，在进行测量时，有关角度的测量是非常关键的．为此，人们制作了很多种测量角度的仪器.

与同学分工合作，利用网络或书籍查找已有的测角仪，并将收集的资料整理成演讲材料，然后与其他同学交流．如有可能，尝试自己制作合适的测角仪．如果有了别人没有想到过的点子，还可以申请专利哦！

03 复习题

A 组

1. 在$\triangle ABC$中，若$\angle A=105^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$b=2\sqrt{2}$，求c的大小.

2. 已知$\triangle ABC$的三边满足$a^2-(b-c)^2=bc$，求A.

3. 已知$\triangle ABC$是锐角三角形，且$a=2b\sin A$.

(1) 求$\angle B$的大小；

(2) 若$a=3\sqrt{3}$，$c=5$，求b.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=2\sin B\cos C$，试用两种方法证明这个三角形是等腰三角形.

★ 建议教师给学生充分的时间思考完成知识结构图，在绘制过程中学生要掌握全章知识点，理清各知识点之间的关联．绘制完成后，教师可以组织学生在课堂上展示、交流．

本章中的两个定理的证明采用了多种方法，不仅开阔了学生的视野，也体现了数学的系统性、关联性，为进一步的数学研究做好铺垫．

★ 本章与实际生活紧密相连，体现了数学来源于生活、服务于生活，培养了学生的数学建模核心素养．建议教师鼓励学生自主完成课题作业，整理演讲材料，自制测角仪并在课堂上展示交流．

A 组

1. $c=2$.

2. $A=\frac{\pi}{3}$.

3. （1）$B=\frac{\pi}{6}$；（2）$b=\sqrt{7}$.

4. （方法一）由 $A+B+C=180^\circ$，得 $B+C=180^\circ-A$，所以 $\sin(180^\circ-A)=\sin(B+C)$，即 $\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$.

由题意，得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$，即 $\sin B\cos C=\cos B\sin C$.

由 A，B，C 为三角形的内角，得 $\cos B\neq 0$，$\cos C\neq 0$，所以 $\tan B=\tan C$，故有 $B=C$.

所以$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

（方法二）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$.

又因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以条件 $\sin A=2\sin B\cos C$ 可转化为

$$\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

整理可得 $b^2=c^2$，即 $b=c$，因此$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

5. 已知$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{2}+1$，且$\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1) 求AB的长；

(2) 若$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{6}\sin C$，求C.

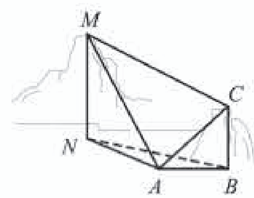
6. 在$\triangle ABC$中，已知$\tan C=3\sqrt{7}$.

(1) 求$\cos C$；

(2) 若$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

7. 已知AD是$\triangle ABC$的角平分线，且$AC=2$，$AB=3$，$A=60°$，求AD的长.

8. 如图，为测量山高MN，选择水平地面上一点A和另一座山的山顶C为测量观测点. 从A点测得M点的仰角$\angle MAN=60°$，C点的仰角$\angle CAB=45°$以及$\angle MAC=75°$；从C点测得$\angle MCA=60°$. 已知山高$BC=100$ m，求山高MN.



（第 8 题）

9. 已知平面直角坐标系中的3点$A(2,\ 2)$，$B(6,\ 0)$，$C(0,\ 0)$，求$\triangle ABC$各内角的大小.

10. 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(3,\ 4)$，$B(8,\ 6)$，$C(2,\ k)$，其中k为常数，如果$A=B$，求k的值.

B 组

1. 已知$\triangle ABC$，则下列命题中，是真命题的有哪些?

(1) 若$\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$是等腰三角形；

(2) 若$\sin A=\cos B$，则$\triangle ABC$是直角三角形；

(3) 若$\cos A\cos B\cos C<0$，则$\triangle ABC$是钝角三角形；

(4) 若$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则$\triangle ABC$是等边三角形.

2. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，且$|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=7$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值.

3. 已知$\square ABCD$中，对角线$AC=57$，它与两条邻边AB和AD的夹角分别是$30°$和$45°$，求AB和AD的长.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$c=b(1+2\cos A)$，求证：$A=2B$.

5. 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{1}{3}$.

(1) 求$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$的值；

(2) 若$a=\sqrt{3}$，求bc的最大值.

5. (1) $AB=1$；(2) $C=60°$.

6. (1) $\cos C=\frac{1}{8}$；(2) $\triangle ABC$ 的面积为$\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

7. $AD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

8. $MN=150$ m.

9. 根据平面内两点间距离公式，得 $AB=\sqrt{(6-2)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$，$AC=2\sqrt{2}$，$BC=6$. 由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{6^2+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times6\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{6^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times6\times2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

又因为 A，B，C 为三角形的内角，所以 $C=45°$，$B\approx26.57°$. 因此

$$A=180°-45°-26.57°=108.43°.$$

10. 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，以及 $A=B$，得 $a=b$（即 $BC=AC$）.

因此$\sqrt{(8-2)^2+(6-k)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(4-k)^2}$，解得 $k=\frac{55}{4}$.

（注：本题也可以直接用等腰三角形的判定定理与性质得到 $a=b$.）

B 组

1. (1) 假命题，例如，$A=60°$，$B=30°$符合题设，但$\triangle ABC$ 不是等腰三角形；

(2) 假命题，例如，$A=110°$，$B=20°$符合题设，但$\triangle ABC$ 不是直角三角形；

(3) 真命题，因为 $\cos A\cos B\cos C<0$，所以 $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ 三数中必然有一个为负数，不妨设 $\cos A<0$，又因为 A，B，C 为三角形的内角，所以 A 为钝角，即$\triangle ABC$ 为钝角三角形；

(4) 真命题，因为 A，B，C 为三角形的内角，所以

$$A-B\in(-\pi,\ \pi),\ B-C\in(-\pi,\ \pi),C-A\in(-\pi,\ \pi),$$

即 $\cos(A-B)\in(-1,\ 1]$，$\cos(B-C)\in(-1,\ 1]$，$\cos(C-A)\in(-1,\ 1]$. 又因为

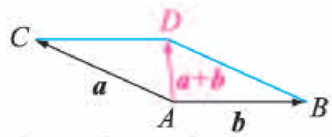
$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1,$$

所以 $\cos(A-B)=1$，$\cos(B-C)=1$，$\cos(C-A)=1$，则

$$A-B=0,\ B-C=0,\ C-A=0.$$

因此 $A=B=C$，即$\triangle ABC$ 是等边三角形.

2. 如图，设 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，根据向量加法的平行四边形法则，作出平行四边形 $ABDC$，则 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



在△ACD 中，由余弦定理得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\times\cos\angle CAD$，即 $7^2=8^2+AD^2-2\times8\times AD\times\cos 60°$，整理可得 $AD^2-8AD+15=0$，解得 $AD=3$ 或 $AD=5$. 即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$ 或 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$.

当 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$ 时，因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=12,$$

且

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=64+56\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle,$$

所以 $64+56\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=12$，解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\frac{13}{14}$.

当 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$ 时，因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=20,$$

且

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=64+56\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle,$$

所以 $64+56\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=20$，解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\frac{11}{14}$.

综上，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $-\frac{13}{14}$ 或 $-\frac{11}{14}$.

3. 由平行四边形 $ABCD$，得 $\angle ACB=\angle DAC=45°$.

在△ABC 中，由 $\angle ABC+\angle ACB+\angle CAB=180°$，得 $\sin(180°-\angle ABC)=\sin(\angle ACB+\angle CAB)$.

因此 $\sin\angle ABC=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，即 $\frac{57}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{AB}{\sin 45°}=\frac{BC}{\sin 30°}$，解得

$$AB=57\sqrt{3}-57,\ AD=BC=\frac{57(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}.$$

4. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，将其代入 $c=b(1+2\cos A)$，得 $\sin C=\sin B(1+2\cos A)$.

又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin B(1+2\cos A)$，则有

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin B(1+2\cos A),$$

整理得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$，即 $\sin(A-B)=\sin B$.

因此 $A-B=B+2k\pi$ 或 $A-B+B=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

又因为 A，B，C 为三角形的内角，所以 $A=2B$.

5.（1）因为 $A+B+C=\pi$，$\cos A=\frac{1}{3}$，所以

$$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1-\cos(B+C)}{2}+2\cos^2 A-1=\frac{1+\cos A}{2}+2\cos^2 A-1=-\frac{1}{9}.$$

（2）由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $3=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{3}\geqslant 2bc-\frac{2}{3}bc=\frac{4}{3}bc$，因此 $bc\leqslant\frac{9}{4}$，当且仅当 $b=c=\frac{3}{2}$ 时取等号.

即 bc 的最大值为 $\frac{9}{4}$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，已知 $\angle BAD+\angle ACB=90^\circ$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

7. 在四边形 $ABCD$ 中，$B=D=90^\circ$，$A=60^\circ$，$AD=5$，$AB=4$，求 AC 的长以及 $\dfrac{BC}{CD}$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$.

(1) 若 $\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，求 a，c；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的最大角.

9. 已知 D 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点，$AB=AD$，记 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

(1) 求证：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值.

10. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求证：$\tan A=2\tan B$；

(2) 若 $AB=3$，求 AB 边上的高.

11. 根据三角形的 3 边长 a，b，c 求三角形面积 S，既可以用我国宋代数学家秦九韶提出的“三斜求积术”，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

也可以用海伦公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. 证明上述两个公式等价.

C 组

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90^\circ$.

(1) 若 $PB=\dfrac{1}{2}$，求 PA；

(2) 若 $\angle APB=150^\circ$，求 $\tan\angle PBA$.

2. 已知$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分$\angle BAC$，且$\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$；

(2) 若 $AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

6. 因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC$，所以

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle DAC}.$$

设$\triangle ABC$在BC边上的高长为h，由$BD=DC$，得$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot DC\cdot h}=1$，所以$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle DAC}=1$，即$AB\sin\angle BAD=AC\sin\angle DAC$.

由$\angle BAD+\angle ACB=90^\circ$，知$\angle ABC+\angle DAC=90^\circ$. 因此

$$\sin\angle BAD=\cos\angle ACB，\sin\angle DAC=\cos\angle ABC，$$

可得$AB\cos\angle ACB=AC\cos\angle ABC$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得$AB=2R\sin\angle ACB$，$AC=2R\sin\angle ABC$.

因此$2R\sin\angle ACB\cos\angle ACB=2R\sin\angle ABC\cos\angle ABC$，从而

$$\sin 2\angle ACB=\sin 2\angle ABC,$$

可得$2\angle ACB=2\angle ABC+2k\pi$或$2\angle ACB+2\angle ABC=2k\pi+\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$.

又因为$\angle ACB$，$\angle ABC\in(0,\pi)$，所以$\angle ACB=\angle ABC$或$\angle ACB+\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，因此$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

7. 利用余弦定理，得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos 60^\circ=21$，解得$BD=\sqrt{21}$.

因为$B=D=90^\circ$，所以四边形$ABCD$为圆内接四边形，且外接圆的圆心为AC的中点.

在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{BD}{\sin A}=\frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ}=2R$，所以$2R=2\sqrt{7}$（即$AC=2\sqrt{7}$）.

利用勾股定理，得$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{3}$，所以$\frac{BC}{CD}=2$.

8.（1）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，代入$\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，得$\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{13}}$. 又因为$a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$，解方程可得$a=\sqrt{13}$，$c=4$或$a=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$c=\frac{12}{13}$.

因为$2c-3>0$，所以$a=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$c=\frac{12}{13}$不符合题意，舍去. 因此$a=\sqrt{13}$，$c=4$.

（2）由$a^2-a=2(b+c)$和$a+2b=2c-3$可得$a^2=4c-3$，$a^2-2a-3=4b$，因此

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+\left(\frac{a^2-2a-3}{4}\right)^2-\left(\frac{a^2+3}{4}\right)^2}{2a\times\frac{a^2-2a-3}{4}}$$

$$=\frac{16a^2+(a^2-2a-3)^2-(a^2+3)^2}{8a(a^2-2a-3)}=\frac{16a^2+(2a^2-2a)(-2a-6)}{8a(a^2-2a-3)}$$

$$=\frac{4a^2+(a^2-a)(-a-3)}{2a(a^2-2a-3)}=\frac{4a^2-a^3-2a^2+3a}{2a(a^2-2a-3)}=\frac{-a^3+2a^2+3a}{2a(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2},$$

即 $C=120^\circ$. 因此三角形中的最大角为 C，且为 120°.

9. (1) 由题意可知$\angle DAB=\pi-2\beta$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle DAB=2\beta-\frac{\pi}{2}$.

因此 $\sin\alpha=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=-\cos 2\beta$，则 $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$.

(2) 在$\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}$，即$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin\beta}$，所以

$$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

由 (1)，得 $\sin\alpha=-\cos 2\beta=-1+2\sin^2\beta$，与上式联立解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍).

由题意，知 $\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

10. 由题意，得

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{1}{5}$.

因此 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=3(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\frac{3}{5}$，可得

$$2\sin A\cos B=4\cos A\sin B.$$

由 A，B，C 为锐角三角形的内角，知 $\cos A\neq 0$，$\cos B\neq 0$，所以$\frac{\sin A}{\cos A}=2\frac{\sin B}{\cos B}$，即 $\tan A=2\tan B$.

(2) 由锐角三角形，知$\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，由 $\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，可得

$$\cos(A+B)=\sqrt{1-\sin^2(A+B)}=-\frac{4}{5},$$

因此 $\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=-\frac{3}{4}$，即$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3}{4}$.

将 $\tan A=2\tan B$ 代入，可解得 $\tan B=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$. 因为 B 是锐角，所以 $\tan B=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

因此 $\tan A=2\tan B=2+\sqrt{6}$.

设 AB 边上的高为 CD，垂足为 D，由锐角三角函数，得 $AD=\frac{CD}{\tan A}$，$BD=\frac{CD}{\tan B}$，因此 $AB=AD+BD=\frac{CD}{\tan A}+\frac{CD}{\tan B}=\frac{3CD}{2\tan B}$.

又因为 $AB=3$，所以 $CD=\frac{2AB\tan B}{3}=2+\sqrt{6}$.

11. $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(ca+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)\left(ca-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2}\right)\left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{16}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}$.

因为 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，所以 $a+c-b=2p-2b$，$a+b-c=2p-2c$，$b+c-a=2p-2a$，因此

$$S=\sqrt{\frac{1}{16}\times 2p\times(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

C 组

1. (1) 因为在 Rt$\triangle PBC$ 中，$BC=1$，$PB=\frac{1}{2}$，所以$\angle PBC=60^\circ$，$\angle PBA=90^\circ-\angle PBC=30^\circ$.

在$\triangle PBA$ 中，由余弦定理，得 $PA^2=AB^2+PB^2-2AB\times PB\times\cos\angle PBA$，即

$$PA^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\cos 30^\circ=\frac{7}{4},$$

所以 $PA=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2) 设$\angle PBA=\alpha$，则$\angle PBC=90^\circ-\alpha$，$\angle PAB=180^\circ-150^\circ-\alpha=30^\circ-\alpha$.

在 Rt$\triangle PBC$ 中，由 $BC=1$，得

$$PB=BC\cos\angle PBC=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

在$\triangle PBA$ 中，由正弦定理，得

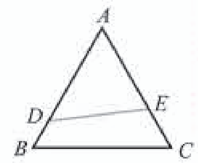
$$\frac{PB}{\sin\angle PAB}=\frac{AB}{\sin\angle APB}，即\frac{\sin\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ},$$

所以$\sin\alpha=2\sqrt{3}(\sin 30^\circ\cos\alpha-\cos 30^\circ\sin\alpha)$，即 $4\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. 如图，公园里有一块边长为 2 的等边三角形草坪（记为 $\triangle ABC$），图中 DE 把草坪分成面积相等的两部分，D 在 AB 上，E 在 AC 上.

（1）设 $AD=x$，$DE=y$，求 y 关于 x 的函数关系式；

（2）如果要沿 DE 铺设灌溉水管，则水管最短时 DE 的位置应在哪里？说明理由.



（第 3 题）

2. (1) 因为$\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\times AD\times\sin\angle BAD$，$\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AC\times AD\times\sin\angle CAD$，且$\angle BAD=\angle CAD$，所以$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB}{AC}=2$.

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，所以$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为$\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}BD\times AD\times\sin\angle ADB$，$\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}DC\times AD\times\sin\angle ADC$，且$\angle ADB=\pi-\angle ADC$，所以

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD\sin(\pi-\angle ADC)}{DC\sin\angle ADC}=\frac{BD}{DC}=2.$$

又因为 $DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BD=2DC=\sqrt{2}$.

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\times BD\times\cos\angle ADB=3-2\sqrt{2}\cos\angle ADB.$$

同理在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得

$$AC^2=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\cos\angle ADC.$$

又因为$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以

$$3-2\sqrt{2}\cos(\pi-\angle ADC)=4\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\cos\angle ADC\right),$$

即 $3+2\sqrt{2}\cos\angle ADC=6-4\sqrt{2}\cos\angle ADC$，解得 $\cos\angle ADC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

因此 $AC^2=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\cos\angle ADC=1$，则 $AC=1$.

3. (1) 由题意，$\triangle ADE$ 的面积为$\triangle ABC$ 面积的一半，又因为

$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AD\times AE\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x\times AE$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times AC\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x\times AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $AE=\dfrac{2}{x}$.

由 $AE\in(0,\ 2]$，得 $x\geqslant 1$.

在$\triangle ADE$ 中，由余弦定理，得

$$DE^2=AD^2+AE^2-2AD\times AE\times\cos\angle DAE,$$

即 $y^2=x^2+AE^2-AE\times x=x^2+\dfrac{4}{x^2}-2$，所以

$$y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2},\ x\in[1,\ 2].$$

(2) $y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2}\geqslant\sqrt{2\sqrt{x^2\times\frac{4}{x^2}}-2}=\sqrt{2}$.

当且仅当 $x^2=\frac{4}{x^2}$，即 $x=\sqrt{2}$时，上式取等号，此时 $AE=\frac{2}{x}=\sqrt{2}$.

故当 $DE/\!/BC$，且 $AD=\sqrt{2}$时铺设管道，水管最短且长度为$\sqrt{2}$.

第十章　复数

一、课标要求与说明

复数的内容在课标中是必修“主题三　几何与代数”的第二个单元，出现在平面向量及其应用之后．复数的有关内容，最突出的变化是从选修调到了必修，而且增加了复数的三角形式这一内容，但是标有星号．

关于复数的定位以及学习价值等，课标中提到：

复数是一类重要的运算对象，有广泛的应用．本单元的学习，可以帮助学生通过方程求解，理解引入复数的必要性，了解数系的扩充，掌握复数的表示、运算及其几何意义．

课标中指出的主要内容包括：

复数的概念、复数的运算、* 复数的三角表示．

（1）复数的概念

①通过方程的解，认识复数．

②理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义．

（2）复数的运算

掌握复数代数表示式的四则运算，了解复数加、减运算的几何意义．

（3）* 复数的三角表示

通过复数的几何意义，了解复数的三角表示，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系，了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义．

在“教学提示”中，课标指出：

在复数的教学中，应注重对复数的表示及几何意义的理解，避免烦琐的计算与技巧训练．对于学有余力的学生，可以安排一些引申内容，如复数的三角表示等．可以适当融入数学文化，让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用．

值得提醒的是，为了帮助大家了解复数概念形成的重要发展阶段，体会其中的理性思维、创新精神和数学文化，课标在附录中以案例（标号为 10）的形式呈现了复数产生的大致过程，教师在

教学过程中可以参考使用.

需要注意的是，教材在引入复数的相关内容时，也是从有关数学史实出发的，这与一般的简单规定 $x^2+1=0$ 的解为 i 不同.

在“学业要求”中，课标指出：

能够理解复数的概念，掌握复数代数表示式的四则运算.

重点提升直观想象、逻辑推理、数学运算和数学抽象素养.

二、课时安排建议

本章内容的教学，建议课时数为 8，具体安排如下：

10.1 复数及其几何意义	
10.1.1 复数的概念	1 课时
10.1.2 复数的几何意义	1 课时
10.2 复数的运算	
10.2.1 复数的加法与减法	1 课时
10.2.2 复数的乘法与除法	2 课时
10.3 复数的三角形式及其运算	2 课时
本章小结	1 课时

本章内容的教学顺序，可以根据需求进行调整. 但需要注意的是，本章内容用到了平面向量和三角恒等变换的知识.

三、本章内容分析与建议

本章内容主要是为了落实课标中“主题三　几何与代数”而编写的，课标的教学提示中要求“在复数的教学中，应注重对复数的表示及几何意义的理解，避免烦琐的计算与技巧训练. 对于学有余力的学生，可以安排一些引申内容，如复数的三角表示等. 可以适当融入数学文化，让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用”. 学业要求仅仅为“能够理解复数的概念，掌握复数代数表示式的四则运算”. 可见课标对本章教学在难度方面要求较低. 但教师在教学中应当在控制难度的同时，加强理性思维的训练. 教材编写的主线是通过数系扩充得到复数的概念，再研究复数的运算及其几何意义，涉及数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养.

虚数是在数学自身发展过程中由内部抽象出的数学对象，在很长一段时间里它的实际意义并没有被充分地理解，带给了人们很多的困惑. 对复数有深入研究的欧拉曾说：“一切形如 $\sqrt{-1}$，

$\sqrt{-2}$的数学式，都是不可能的、不可想象的，因为它们所表示的是负数的平方根．对于这类数，我们只能断言：它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么．它们纯属虚幻．”但是后来随着对复数的几何意义的研究和复变函数理论的建立，复数成为了解决很多技术问题的有力工具，在物理学、工程学等领域有着广泛的应用，如在分析交流电路时，复数作为一种强有力的计算方法，被用来分析电压和电流．

教材的“本章导语”回顾了通过对数系逐步扩充得到实数及其运算的过程，每一次数系的扩充都与人们生产生活的发展密切相关，这里体现了数学来源于生活，并终将应用于生活．由此引出本章内容，对实数进一步扩充，在引入虚数后，将其扩充成复数．讲述中在引导学生重视数值的同时，强调了在扩充过程中应注意保持运算律，旨在让学生体会数系扩充过程中理性思维的作用．另外，还提到了复数的应用，用分形图来激发学生学习复数的兴趣．

本章内容共分为三部分：复数及其几何意义、复数的运算、复数的三角形式及其运算．

第一部分是复数及其几何意义，呈现了复数的概念、复数的几何意义．

与原教材不同的是，新教材将数系的扩充放在了“本章导语”中，在复数的引入环节中，用历史上对三次方程的根的研究过程讲述定义虚数单位的必要性，通过这些历史背景知识很好地渗透了数学文化．

定义了虚数单位后，需要定义实数与虚数单位之间的运算，定义的运算还需保持原来实数运算所满足的运算律．教材中“尝试与发现”环节的设置使得复数的代数形式的引入变得更加自然．这一节中，还给出了实部和虚部的符号表示，研究了复数的分类、复数的相等与不等．

在这部分内容的教学中，教师可以根据情况进行一些补充说明，激发学生学习兴趣．例如，关于两个不全是实数的复数不能比较大小的问题，教材上没有要求给出证明，它的证明超出中学数学要求的范围，但这个问题是学生在学习中感兴趣的一个问题，可在学生知识允许的范围内举例作些说明．应注意强调在复数集中虽没有大小之分，但有等与不等之分．

在“复数的几何意义”一节中，类比实数的几何意义的研究过程，用复平面上的点或向量来描述复数，从而实现数与形之间的转化，为很多平面几何问题的求解提供一种新的工具．

在这部分内容的教学中，应鼓励学生多类比、多思考、多质疑，让学生体验用类比的方法研究新的数学对象的过程，感受到虚数虽然是“想象”出来、看似“虚幻”的数，但也有其存在的合理性和必要性，也为将来利用复数解决相关问题奠定基础．

第二部分是复数的运算，包括复数的加、减、乘、除四则运算．

原教材中，直接给出了四种运算的定义结果，再提示学生可验证其保持了运算律．与原教材不同的是，新教材设置了问题情境，启发学生自己去思考如何定义复数的运算，同时要使其保持相应的运算律．这样的设计有利于打开学生的思路，要求学生不仅“知其然”，更要“知其所以然”，思考“何以知其所以然”．让学生在不同定义方式的对比中深刻理解复数四则运算定义的合理性，并

掌握运算法则.

在“复数的加法与减法”一节中，由复数加减法的几何意义，即向量加减法，给出了复数加减法的三角不等式，这里可以与实数加减法的三角不等式进行比较，实质上是由一维到二维的推广，同时提示学生关注等号成立的条件.

在“复数的乘法与除法”一节中，增加了对“实系数一元二次方程在复数范围内的解集”的讨论. 这里还可以向学生介绍历史上数学家们对 n 次代数方程的解的探索过程. 事实上，挪威数学家阿贝尔证明了高于 4 次的一般方程不能用根号解出. 法国数学家伽罗瓦还找出了方程能用根号解出来的充分必要条件.

第三部分是复数的三角形式及其运算.

这部分内容是新课标增加的内容，虽然不作为考查要求，但从复数理论的完整性及学生未来学习需要的角度来看是值得讲授的. 通过复数的几何意义，结合三角函数的知识，容易得到复数的三角表示. 在此基础上，复数的乘除法也有了相应的几何意义，从而在处理平面几何中的旋转问题时可以由形到数，转化为复数的乘除法运算来解决.

本章教材还设置了两个拓展阅读.

一是“利用复数产生分形图”，解释了“本章导语”中分形图的产生过程，即先定义一类多项式复变函数，再利用计算机对不同形态的收敛点和发散点进行不同的着色. 可让学生在课下查阅资料，了解“分形几何”的相关理论；也可以让学生自己去尝试定义一类复变函数和着色规则，生成一种新的分形图.

另一个是“四元数简介”，这是对复数的一种推广. 德国数学家克罗内克曾说“上帝创造了正整数，其他数都是人造的”. 四元数在纯数学、应用数学及物理中都有重要的应用，如描述三维空间的旋转等. 可以让学生进一步查阅资料，了解“为什么不定义三元数?”“四元数还能进一步推广吗?”等问题，进一步进行理性思维的训练.

此外，教师还可以根据教学情况补充以下拓展阅读材料.

历史上，丹麦数学家韦塞尔、瑞士人阿尔冈和德国数学家高斯都对复数的几何表示作出了贡献. 现在我们知道所有实数能用一条数轴表示，同样，虚数也能用一个平面上的点来表示. 在直角坐标系中，横轴上取对应实数 a 的点 A，纵轴上取对应实数 b 的点 B，并过这两点引平行于坐标轴的直线，它们的交点 C 就表示复数 $a+b\mathrm{i}$. 像这样，各点都对应复数的平面叫做“复平面”. 由于高斯的工作对于人们普遍接受复数概念影响更大，为了纪念他，复平面有时也被称作“高斯平面”. 高斯用实数组(a, b)代表复数 $a+b\mathrm{i}$. 并建立了复数的某些运算，使得复数的某些运算也像实数一样地“代数化”. 他把数轴上的点与实数一一对应，扩展为平面上的点与复数一一对应. 他不仅把复数看作平面上的点，而且还看作是一种向量，并利用复数与向量之间一一对应的关系，阐述了复数的几何加法与乘法. 至此，复数理论才比较完整和系统地建立起来了.

本章的小结中，教材引导学生自己借助知识结构图来总结有关内容，建立知识之间的内在联系，理清相互的生成关系，有利于学生掌握本章知识，增强逻辑思维能力.

同时，这一章的小结中，作为课堂内容的延伸，要求学生对比复数与向量的相关知识，研究复数为什么不能比大小等问题，并以小论文或小报告的形式与其他同学交流、分享，进一步拓展课堂所学知识，挖掘复数概念的内涵，培养严谨的数学表达的能力.

本章内容中数系的扩充对于学生来说并不陌生，这是对数的认识逐步深入的过程. 学生从小学开始至今一直在经历这个过程，所以教师可以尝试多设置问题情境，组织数学活动，充分调动学生自己去思考和发现复数的概念及运算.

本章教材中，复数的概念、复数的代数表示方法是整个内容的出发点，复数的加、减、乘、除运算是本章的中心内容，也是本章教材的重点.

复数的概念（如复数相等的条件）、复数的向量表示、复数的模都与以前学过的实数概念中的相关内容不尽相同，这些内容学生不易接受和掌握，是本章中的难点.

我觉得自学能力是人生的第一重要素质，这点在离开学校之后表现得尤其突出．学校只教基础知识，到工作岗位之后，为适应专业或进一步的知识更新，全靠自学．缺乏这种能力的人，从学校毕业也就“彻底”毕业了．

——陈木法

第十章 复数

四、教材内容分析与教学提示

本章章名页引用的是我国著名数学家、中国科学院院士陈木法先生关于自学能力重要性的一段论述. 陈木法先生是中国最杰出的概率论学者之一，他所领导的北京师范大学概率论研究团队是国家自然科学基金委资助的数学方面的一个创新研究群体. 陈木法先生所取得的科研成果、严谨的治学风格、非凡的自学能力都与其自身成长紧密相关，他强调在学校的学习是基础性的学习，而走出学校之后拥有自学能力尤其重要，这样才能达到终身学习.

考虑到本章的教学难度较低，但理性思维要求较强，因此教师可以利用这段话先跟学生谈一谈数学的自学，或者引导学生通过学习教材内容，尝试用理性思维去思考内容背后的严谨性.

如果时间容许，教师可利用合适的时机向学生介绍一下陈木法先生的有关事迹.

陈木法先生 1946 年生于福建惠安，在求学之路上他孜孜不倦，在儿时就注重自己自学能力的培养. 他在初中时就自学高中数学，读《数学小丛书》，再往后自学微积分. 高考结束后的那个暑假，他读起了苏联的《概率论教程》，这可是大学三年级的课程. 考入北京师范大学后，陈木法先生在大一时就提前自学了费勒的《概率论及其应用》，用三个月时间就读完了全书，并完成了书中的全部习题. 上大学之前陈木法先生学习的是俄语，上大学后开始自学英语，阅读各种英文书籍，从未间断. 陈木法先生 1969 年毕业于北京师范大学数学系，1980 年从该校研究生毕业，1983 年被授予该校博士学位. 2003 年，陈木法先生当选为中国科学院院士.

而探寻陈木法先生的治学之道，更能发现：自学始终是一条主线.

1972 年 5 月，陈木法先生被分配到贵阳师范学院附属中学（今贵州师范大学附属中学）教书. 他在教学过程中非常注重学生自学能力的培养，把自学的理念贯穿课堂. 那时候，每天上两堂数学课，陈木法先生的做法是：先拿出一节课让同学们自己看书、做题，而第二节课再答疑释惑.

这样的教学，在当时无疑显得十分另类，不仅备受同行质疑，学生们一开始也很不答应，“全造反了，课堂乱得像一锅粥”. 但是慢慢地，就从自学中寻找到了乐趣，后来的地区统考，这个班的成绩特别优异.

有人问陈木法先生秘诀何在，他回答：自学的时候最安静，最有可能静心思考、潜心钻研、细细体会，而一旦领略到了数学之美，就会越学越带劲.

本章导语

我们所熟悉的实数及其运算，实质上是在描述和解决问题的过程中逐步扩充得来的：

首先，人们从物品计数等过程中抽象出了正整数 1，2，3，…，从物品增多等过程中抽象出了正整数的加法，从物品减少等过程中抽象出了正整数的减法，并在此基础上引入了正整数的乘法与除法（加、减、乘、除简称四则运算）；

其次，人们从均分物品与进行除法操作的基础上，引入了正分数，还从表示“亏欠”与进行减法操作的基础上，引入了负数（包括负整数与负分数）；

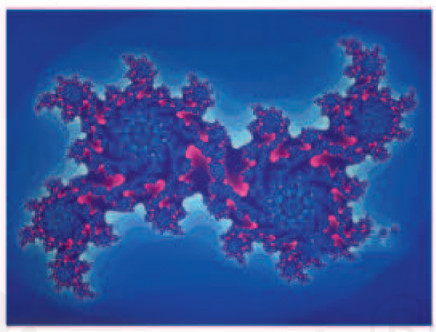
再次，人们从表示“无”出发引入了数 0，这样一来，按照数的符号就把数分成了正数、负数与 0 三类；

最后，人们从描述边长为 1 的正方形对角线长等过程中，引入了无理数，并给出了无理数参与四则运算的方法.

★ 值得注意的是，在上述数的扩充过程中，有关运算的运算律是始终保持的. 例如，正整数运算的分配律

$$(a+b)c=ac+bc,$$

在引入了分数、负数、0 以及无理数之后，也都成立. 也就是说，这个分配律对所有实数都成立.



实数还可以进一步扩充. 本章我们将引入一种新的数——虚数，从而将实数扩充成复数.

复数在数学、流体力学、电学等学科中都有广泛的应用. 例如，利用复数可以得到如图所示的分形图.

★ 教师可以在课堂上让学生自己阅读和理解本章导语中的内容．也可以和学生一起回顾人类对“数”的认识过程，这也是人类文明发展史的一部分．数系的扩充，一方面是解决人类生活生产实际问题的需要，另一方面也是解决数学自身发展所遇到矛盾的需要．

德国数学家克莱因说过，数学的生命，数学的最重要的动力，数学在各方面的作用，却完全有赖于应用，即取决于那些纯逻辑内容和其他一切领域之间的相互关系．

在回顾数系扩充的过程中，教师可以设置问题，让学生从解决实际问题和数学自身发展两个角度去思考为什么要不断地加入新的数，新的数是如何定义的．

★ 这里特别要强调我们需要一个具有一定关系和规律的数的系统，所以要求在数系扩充的过程中，仍然保持有关运算的运算律，即加法和乘法都保持交换律、结合律，乘法对加法满足分配律．

教师可以在这里布置拓展作业，让学生自己查阅资料，了解复数的应用，包括其在数学中的应用及在其他学科中的应用，在本章结束后一起与学生交流．

教师也可以根据教学情况补充以下阅读材料．

16 世纪意大利学者卡尔丹在 1545 年出版的《大术》一书中，公布了三次方程的一般解法，被后人称为“卡尔丹公式”．他是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家，并且在讨论是否可以把 10 分成两部分，使它们的乘积等于 40 时，他把答案写成 $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$. 尽管他认为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 这两个表示式是没有意义的、想象的、虚无缥缈的，但他还是把 10 分成了两部分，并使它们的乘积等于 40．虚数的概念起源于法国数学家笛卡儿的著作，他在《几何学》（1637 年出版）中使“虚的”与“实的”相对应，从此，虚数这一概念才流传开来．

10.1　复数及其几何意义

10.1.1　复数的概念

★ **情境与问题**

数的扩充过程，也可以从方程是否有解的角度来理解：

因为类似 $x+4=3$ 的方程在自然数范围内无解，所以人们引入了负数并将自然数扩充成整数，使得类似 $x+4=3$ 的方程在整数范围内有解；

因为类似 $2x=5$ 的方程在整数范围内无解，所以人们引入了分数并将整数扩充成有理数，使得类似 $2x=5$ 的方程在有理数范围内有解；

因为类似 $x^2=7$ 的方程在有理数范围内无解，所以人们引入了无理数并将有理数扩充成实数，使得类似 $x^2=7$ 的方程在实数范围内有解.

我们已经知道，类似 $x^2=-1$ 的方程在实数范围内无解. 那么，能否像前面一样，引入一种新的数，使得这个方程有解并将实数进行扩充呢？

★ 人们早在 16 世纪就发现，可以通过公式

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

来求方程 $x^3=px+q$（p，q 均为正实数）的正根. 例如，方程 $x^3=9x+28$ 的正根为

$$x=\sqrt[3]{14+\sqrt{14^2-3^3}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{14^2-3^3}}=4.$$

如果方程是 $x^3=15x+4$，则由公式可得

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}},$$

当时人们已经知道 $x=4$ 是 $x^3=15x+4$ 的唯一正根，因此

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=4$$

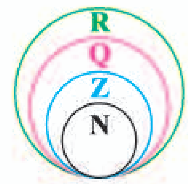
应该成立.

但是，$\sqrt{-1}$ 表示的应该是平方为 -1 的数，实数范围内这样的数是不存在的，这该如何解释呢？后来，人们发现，如果规定 $(\sqrt{-1})^2=-1$，并将

★ 遵循课标要求，本节的“情境与问题”是从方程的解的角度来切入的．教师可以让学生在阅读的过程中，参照如下思路形成知识网络体系．

数系的扩充

计数的需要	自然数（正整数与零）
表示相反意义的量 解方程 $x+4=3$	整数
测量、分配中的等分 解方程 $2x=5$	有理数
度量的需要 解方程 $x^2=7$	实数
$x^2=-1$?	?



★ 教材正文部分是从三次方程的根切入的．学生不了解三次方程，教师在讲解时可以直接让学生代入三次方程的求根公式．教材选择了两个三次方程 $x^3=9x+28$ 与 $x^3=15x+4$，这两个方程都有一个正根 4．于是学生通过简单的计算会得到第一个方程的解 $x=\sqrt[3]{14+\sqrt{14^2-3^3}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{14^2-3^3}}=4$，而由第二个方程得到 $x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=4$，这如何解释？由此激发学生探究的欲望，也让他们感受复数引入的必要性．

学生可能会对这两个三次方程是否只有一个正根 4 存在疑惑，教师可以引导学生分解因式，观察方程的其他根的情况，$x^3-9x-28=(x-4)(x^2+4x+7)$，二次方程 $x^2+4x+7=0$ 无实数解；而 $x^3-15x-4=x^3-16x+x-4=x(x^2-16)+(x-4)=(x-4)(x^2+4x+1)$，二次方程 $x^2+4x+1=0$ 有两个负实根．

教材中由 $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=4$ 引出 $\sqrt{-1}$ 如何解释的问题．在实数范围内这样的数是不存在的，为后面引入复数打好了基础．在此，教师在教学过程中，需要注意实数范围有无解的问题．

$\sqrt{-1}$ 按照类似实数的运算法则进行形式计算，则可以给上述结论一个圆满的解释：

因为

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3+3\times 2^2\times\sqrt{-1}+3\times 2\times(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3 \\
&= 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1},
\end{aligned}
$$

所以可以认为 $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$.

类似地，可以认为 $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$.

从而形式上就有

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

这里的 $\sqrt{-1}$ 历史上被认为是一个“虚幻”的数，它与下面我们要介绍的虚数有关.

一般地，为了使得方程 $x^2=-1$ 有解，人们规定 i 的平方等于 -1，即

$$\mathrm{i}^2=-1,$$

并称 i 为**虚数单位**.①

值得注意的是，从本质上来说，虚数单位 i 与上述 $\sqrt{-1}$ 表示的意义是一样的，但是，为了避免混淆，如不特别声明，以后我们不再使用类似 $\sqrt{-1}$ 这样的表达式. 也就是说，在 $\sqrt{a}$ 中，还是要求 $a\geqslant 0$，请大家务必注意这一点.

不难想到，引进虚数单位 i 后，需要定义虚数单位与实数之间的运算，而且这种运算还得保持以前的运算律（如加法交换律、乘法交换律等）均成立.

尝试与发现

（1）你认为可以怎样表示 2 与 i 的和？又该怎样表示 3 减去 i？

（2）你认为 5 与 i 的乘积可以怎样表示？这个数具有什么性质？

实数 a 与 i 的和记作 $a+\mathrm{i}$，且实数 0 与 i 的和为 i；实数 b 与 i 的积记作 $b\mathrm{i}$，且实数 0 与 i 的积为 0，实数 1 与 i 的积为 i.

一般地，当 a 与 b 都是实数时，称 $a+b\mathrm{i}$ 为**复数**. 复数一般用小写字母 z 表示，即

$$z=a+b\mathrm{i}\ (a,\ b\in\mathbf{R}),②$$

其中 a 称为 z 的**实部**，b 称为 z 的**虚部**，分别记作

$$\mathrm{Re}(z)=a,\ \mathrm{Im}(z)=b.$$

① 在印刷时，为了表示 i 为虚数单位，i 总是印成正体.

② 以下如不特别声明，谈到 $z=a+b\mathrm{i}$ 等类似表达式时，均默认为 a，$b\in\mathbf{R}$.

★ 教师在这里可以让学生自己进行推导，感受 $(\sqrt{-1})^2=-1$ 的作用，以及为什么说$\sqrt{-1}$是一个“虚幻”的数．在历史上人们认为$\sqrt{-1}$是一个并不存在的数，是想象出来的“虚幻”的数(imaginary number)．欧拉首先用 i（imaginary 的首字母）来表示$\sqrt{-1}$，极大地方便了运算．

教师也可以在黑板上带领学生一起推导$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$，让学生自己推导$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$．因为学生对 $(\sqrt{-1})^2=-1$ 不熟悉，所以在推导过程中容易出现问题，特别是对于 $(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$更容易存在理解上的疑惑．教师在这里要注意学生的反应，及时给学生答疑解惑．在推导$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$的过程中更需要注意正负号问题，在这里花一点时间让学生推导是必要的．

★ 教材呼应“情境与问题”中方程 $x^2=-1$ 的求解问题，引出了虚数单位 i，即 $\mathrm{i}^2=-1$．i 是学生刚接触的新的符号，教师应该适当给学生留出记忆时间．这里要提醒学生注意，规定 $\mathrm{i}^2=-1$，但-1 有两个平方根，即 i 和$-\mathrm{i}$，而$\sqrt{-1}=\mathrm{i}$．还需提醒学生，以后不再使用类似$\sqrt{-1}$这样的表达形式，在$\sqrt{a}$中，还是要求 $a\geqslant 0$．

★ 针对“尝试与发现”中的问题，教师可以让学生自己书写结果，也可以再让学生举几个例子，例如，你认为可以怎样表示 i 减去 3？你认为可以怎样表示 2 与 5i 的乘积？教师可以板书上述问题的答案，引导学生发现其中数的特点．这些都可以写成形如 $a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$ 的形式，而 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$ 即为复数的代数形式，它是由实数和虚数复合而成的数，所以叫“复数”(complex number)．实部和虚部是易错的概念，这里要强调实部 a 和虚部 b 都是实数，虚部不是 $b\mathrm{i}$．这里可以让学生自己给出一个复数，并说出其实部与虚部．教师也可以举几个例子，让学生熟悉复数，例如，说出 i^2，$-\mathrm{i}+2$ 的实部与虚部．

容易发现，一个复数可由其实部和虚部完全确定．与原教材不同的是，这里还给出了实部和虚部的记号，这两个记号来源于英文单词（real part 和 imaginary part)．对实部与虚部的理解为后续研究复数的几何意义奠定基础．“尝试与发现”以及复数概念的给出，不建议教师引导学生过度研究，这个研究一定要跟下一节的复数的运算区别开．

提醒学生注意页脚的注解①②．特别是不特别声明时，默认取值范围为 **R**．

所有复数组成的集合称为**复数集**，复数集通常用大写字母 $\mathbf{C}$ 表示，因此

$$\mathbf{C}=\{z \mid z=a+b\mathrm{i},\ a,\ b\in\mathbf{R}\}.$$

例如，$2+(-3)\mathrm{i}\in\mathbf{C}$，这是一个实部为 2 且虚部为 -3 的复数，为了简单起见，$2+(-3)\mathrm{i}$ 通常简写为 $2-3\mathrm{i}$；再例如，$-1-2\mathrm{i}\in\mathbf{C}$，这是一个实部为 1 ______ 且虚部为 2 ______ 的复数.

不难看出，任意一个复数都由它的实部与虚部唯一确定，虚部为 0 的复数实际上是一个实数．特别地，称虚部不为 0 的复数为**虚数**，称实部为 0 的虚数为**纯虚数**.

例如，复数 3 是一个实数，复数 $1-\mathrm{i}$ 是一个虚数，而复数 $-2\mathrm{i}$ 是一个纯虚数.

例 1 分别求实数 x 的取值，使得复数 $z=(x-2)+(x+3)\mathrm{i}$

(1) 是实数； (2) 是虚数； (3) 是纯虚数.

分析 因为 x 是实数，所以 z 的实部是 $x-2$，虚部是 $x+3$．然后由复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 是实数、虚数与纯虚数的条件可以确定 x 的值.

解 (1) 当

$$x+3=0,$$

即 $x=-3$ 时，复数 z 是实数.

(2) 当

$$x+3\neq 0,$$

即 $x\neq -3$ 时，复数 z 是虚数.

(3) 当

$$x-2=0 \text{ 且 } x+3\neq 0,$$

即 $x=2$ 时，复数 z 是纯虚数.

两个复数 z_1 与 z_2，如果实部与虚部都对应相等，我们就说这**两个复数相等**，记作 $z_1=z_2$.

这就是说，如果 a，b，c，d 都是实数，那么

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

特别地，当 a，b 都是实数时，$a+b\mathrm{i}=0$ 的充要条件是

3 ______.

应当注意，两个不相等的实数，一定有大小之分（从而也就一定能用大于号或小于号连接），但是两个复数，如果不全是实数，一般不规定它们之间的大小，只能说它们相等或不相等．例如，$2+\mathrm{i}$ 与 $3+\mathrm{i}$，2 与 $2\mathrm{i}$ 之间都不规定大小．特别地，不能将虚数与 0 比较大小，因此也就不能说虚数是正数还是负数.

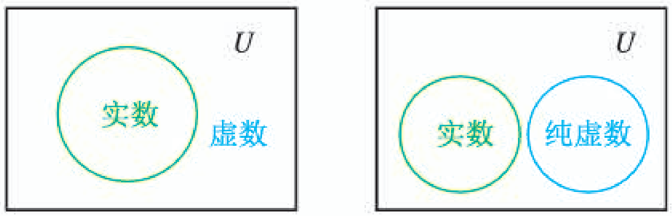
例 2 分别求满足下列关系的实数 x 与 y 的值.

(1) $(x+2y)-\mathrm{i}=6x+(x-y)\mathrm{i}$；

(2) $(x+y+1)-(x-y+2)\mathrm{i}=0$.

★ 定义了复数后，可以类比实数来研究复数．在此特别要注意提醒学生复数与实数的联系与区别．

复数集用大写字母 **C** 表示，取自英文单词“complex”的首字母．这里可提问学生：实数集 **R** 与复数集 **C** 的关系是什么？实数集由所有虚部为 0 的复数组成，**R** 是 **C** 的真子集．虚数集与实数集没有交集，并集为复数集，而纯虚数集是虚数集的真子集，它是由实部为 0 的虚数构成，由此进一步引出复数的分类．全集 U 为复数集，用维恩图表示复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系如下所示．



★ 例 1 是对复数分类后产生的新概念的巩固．求解（3）时学生容易忽略纯虚数的虚部不等于 0 这个条件．应强调纯虚数是一种特殊的虚数，即实部为 0 的虚数，但其首先应满足虚数的条件，即虚部不等于 0．这里应该强调，当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时：①$z=a+b\mathrm{i}$ 是实数$\Leftrightarrow b=0$；②$z=a+b\mathrm{i}$ 是虚数$\Leftrightarrow b\neq 0$；③$z=a+b\mathrm{i}$ 是纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$．教师可以给出更多例子进行强化训练，也可以让学生自己分别举出一个虚数、纯虚数、复数的例子．

★ 复数相等是一个学生容易理解但不容易想到的定义，这对学生理性思维的养成有很大帮助．教师可以让学生同时回顾集合相等的定义，从而认识到数学中定义的严谨性．教材给出的 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 与 $a+b\mathrm{i}=0$ 的条件是解决复数问题的关键．

★ 两个虚数之间、虚数和实数之间，只能说它们相等不相等，是没有大小关系的，只有实数才可以比较大小．因为虚数与 0 没有大小关系，所以虚数没有正数和负数之说．可以让学生尝试比较 0，i，1 三个特殊量的关系，要注意引导学生进行理性思维．很多学生会认为与实数一样，复数也应该有大小关系．有的还尝试去定义复数的大小，如实部大的复数更大，这里应鼓励学生自主思考，但同时要提示他们两个复数不全是实数不能比较大小，不论怎样定义两个复数之间的一个关系（序），都不能使其同时满足实数集中大小关系的所有性质．例如，假设 $\mathrm{i}>0$，则 $\mathrm{i}\times\mathrm{i}>0\times\mathrm{i}$，即 $\mathrm{i}^2>0$，$-1>0$，矛盾；假设 $\mathrm{i}<0$，则 $-\mathrm{i}>0$，所以 $\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})<0\times(-\mathrm{i})$，即 $-\mathrm{i}^2<0$，$1<0$，矛盾．

解 (1) 根据复数相等的定义，得
$$\begin{cases}x+2y=6x,\\-1=x-y,\end{cases}$$
解这个方程组，得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{5}{3}$.

(2) 由复数等于 0 的充要条件，得
$$\begin{cases}x+y+1=0,\\-(x-y+2)=0,\end{cases}$$
解这个方程组，得 $x=$ **4** ______，$y=$ **5** ______.

练习A

1. 下列各数中，哪些是实数？哪些是虚数？哪些是纯虚数？
$$\sqrt{3}，\sqrt{2}\mathrm{i}，0，\mathrm{i}，6+5\mathrm{i}，2-\sqrt{2}\mathrm{i}，\sqrt{7}-4\mathrm{i}，-3-\mathrm{i}.$$
2. 写出实数集 **R** 与复数集 **C** 之间的关系，并用维恩图表示 **N**，**Z**，**Q**，**R**，**C** 之间的关系.
3. 分别写出下列各复数的实部与虚部.
(1) $-3+2\mathrm{i}$； (2) $3-5\mathrm{i}$； (3) -7； (4) $8\mathrm{i}$.
4. 已知 $(x-2)+y\mathrm{i}=0$，求实数 x 与 y 的值.
5. 已知 z_1 的实部是 1，z_2 的实部为 0，则 $z_1=z_2$ 可能成立吗？为什么？

练习B

1. 根据以下复数 z 的值，分别写出 $\mathrm{Re}(z)$ 与 $\mathrm{Im}(z)$.
(1) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$； (2) $z=-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$.
2. 分别求实数 m 的取值范围，使得复数 $z=(m+2)+(m-6)\mathrm{i}$
(1) 是实数； (2) 是虚数； (3) 是纯虚数.
3. 分别求满足下列关系的实数 x 与 y 的值.
(1) $(x+y-3)+(x-y-1)\mathrm{i}=3+3\mathrm{i}$；
(2) $(x+y+1)-(x-2y+1)\mathrm{i}=0$.
4. 写出复数是正实数的一个充要条件.
5. 记所有虚数组成的集合为 I，所有纯虚数组成的集合为 P，分别写出下列集合之间的关系，并作出对应的维恩图.
(1) I 与 P； (2) I 与 **C**； (3) I，**R** 与 **C**.

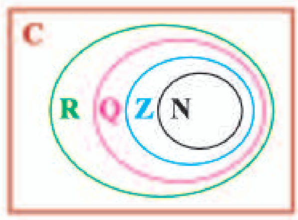
1 -1 **2** -2 **3** $a=0$ 且 $b=0$ **4** $-\frac{3}{2}$ **5** $\frac{1}{2}$

★ 例 2 用于巩固复数相等的定义，两个复数相等等价于其实部与虚部分别对应相等，所以可转化为方程问题予以解决.

练习 A

1. 实数：$\sqrt{3}$，0；虚数：$\sqrt{2}$i，i，6+5i，2−$\sqrt{2}$i，$\sqrt{7}$−4i，−3−i；纯虚数：$\sqrt{2}$i，i.

2. $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$. 参考图示如下.



3. （1）Re(−3+2i)=−3，Im(−3+2i)=2；（2）Re(3−5i)=3，Im(3−5i)=−5；

（3）Re(−7)=−7，Im(−7)=0；（4）Re(8i)=0，Im(8i)=8.

4. $x=2$，$y=0$.

5. 不可能. 因为两个复数 z_1 与 z_2，只有实部与虚部都对应相等才能说它们相等.

练习 B

1. （1）$\operatorname{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{Im}(z)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\operatorname{Re}(z)=-\dfrac{1}{3}$，$\operatorname{Im}(z)=-\dfrac{1}{5}$.

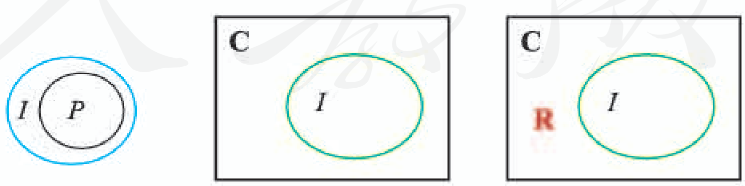
2. （1）$m=6$；（2）$m\neq6$；（3）$m=-2$.

3. （1）$\begin{cases}x=5,\\y=1;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x=-1,\\y=0.\end{cases}$

4. 复数是正实数的一个充要条件是：复数的实部为正实数且虚部等于零.

5. （1）$P\subsetneqq I$；（2）$I\subsetneqq\mathbf{C}$；（3）$I\cup\mathbf{R}=\mathbf{C}$.

参考图示如下.



（1）　　（2）　　（3）

10.1.2 复数的几何意义

情境与问题

我们知道，实数与数轴上的点一一对应，也就是说，数轴可以看成实数的一个几何模型．那么，能否为复数找一个几何模型呢？怎样建立起复数与几何模型中点的一一对应关系？

一方面，根据复数相等的定义，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$ 被它的实部与虚部唯一确定，即复数 z 被有序实数对 $(a,\ b)$ 唯一确定；另一方面，有序实数对 $(a,\ b)$ 在平面直角坐标系中对应着唯一的点 $Z(a,\ b)$．因此不难发现，可以在复数集与平面直角坐标系的点集之间建立一一对应关系，即

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i} \leftrightarrow \text{点 } Z(a,\ b).$$

例如，复数 $1+2\mathrm{i}$ 对应的点为 $A(1,\ 2)$，复数 3 对应的点为 $B(3,\ 0)$，而点 $C(0,\ -1)$ 对应的复数为 [1]______，如图 10-1-1 所示．

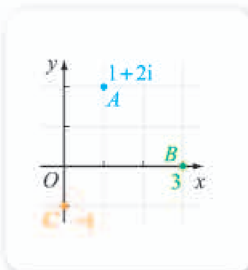


图 10-1-1

建立了直角坐标系来表示复数的平面也称为**复平面**．在复平面内，x 轴上的点对应的都是实数，因此 x 轴称为**实轴**；y 轴上的点除了原点外，对应的都是纯虚数，为了方便起见，称 y 轴为**虚轴**．

尝试与发现

设 $3+\mathrm{i}$ 与 $3-\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点分别为 A 与 B，则 A，B 两点位置关系是怎样的？一般地，当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点有什么位置关系？

一般地，如果两个复数的实部相等，而虚部互为相反数，则称这两个复数互为**共轭复数**．复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，因此，当 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$ 时，有

$$\bar{z}=a-b\mathrm{i}.$$

显然，在复平面内，表示两个共轭复数的点关于实轴对称；反之，如果表示两个复数的点在复平面内关于实轴对称，则这两个复数互为共轭复数．

复数还有另外一种几何意义：因为平面直角坐标系中的点 $Z(a,\ b)$ 能唯一确定一个以原点 O 为始点、Z 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$，所以复数也可用向

★ “情境与问题”引导学生类比实数与数轴的关系，探索复数的几何模型. 教师可以提示学生先比较实数与复数的形式，再运用学习平面向量和解析几何的经验，尝试建立复数的几何模型.

进一步教师可以引导学生回顾复数相等的定义，以及有序实数对与平面直角坐标系中点的一一对应关系. 从而在复数集与平面直角坐标系的点集之间建立一一对应关系，即复数 $z=a+bi \leftrightarrow$ 点 $Z(a, b)$.

★ 介绍复平面的定义后举例复数 3 对应的点和点 $(0, -1)$ 对应的复数，介绍实轴、虚轴. 实轴上的点对应的复数虚部为 0，虚轴上的点对应的复数实部为 0，特别强调虚轴上的点除原点外，对应的都是纯虚数. 各象限的点对应的复数，实部、虚部都不为 0.

这里要提醒学生注意我们用小写字母 z 表示复数，用大写字母 Z 表示复数对应的点. 复数 $z=a+bi$ 对应的点不是 $Z(a, bi)$，而是 $Z(a, b)$. 虚轴的单位长度不是 i，而是 1.

★ “尝试与发现”得到实部相等、虚部互为相反数的两个复数对应的点关于 x 轴对称，这样的两个复数叫作共轭复数. 在讲授共轭复数概念时，要提示学生从数和形两方面去理解，与复数 $z=a+bi$ 对应的点 $Z(a, b)$ 关于实轴对称的点 $Z'(a, -b)$，其对应的复数是 $\overline{z}=a-bi$. 注意实数的共轭复数是其自身.

在讲解共轭复数的概念时，可以给学生补充下面的结论：$z=\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.

★ 下面介绍了复数的另一种几何意义：由于复数 z 能与平面直角坐标系内的点 Z 建立一一对应关系，而平面直角坐标系内的点 Z 能唯一确定一个以原点 O 为始点、Z 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$，从而复数与向量之间也可以建立一一对应关系.

在历史上，一直到 18 世纪，也就是意大利数学家卡尔丹提出虚数二百余年后，人们才给出了复数的几何解释. 这使得复数变得更加真实，同时也沟通了复数与平面几何之间的联系，使得复数成为一个解决平面几何问题的有力工具.

量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示，这样一来也就能在复数集与平面直角坐标系中以 O 为始点的向量组成的集合之间建立一一对应关系，即

$$\text{复数 } z=a+b\mathrm{i} \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OZ}=(a,\ b).$$

因此我们也就能借助向量来描述复数．一般地，向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,\ b)$ 的长度称为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的**模**（或**绝对值**），复数 z 的模用 $|z|$ 表示，因此

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

可以看出，当 $b=0$ 时，

$$|z|=\sqrt{a^2}=\boxed{2}\_\_\_\_\_\_,$$

这说明复数的模是实数绝对值概念的推广．

例如，复数 $z_1=3+\mathrm{i}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}=(3,\ 1)$，复数 $z_2=3-\mathrm{i}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_2}=(3,\ -1)$，而且此时有

$$|3+\mathrm{i}|=|3-\mathrm{i}|=\sqrt{10},$$

如图 10-1-2 所示．

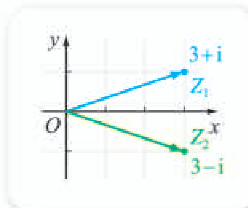


图 10-1-2

一般地，两个共轭复数的模相等，即

$$|z|=|\overline{z}|.$$

例 1 设复数 $z_1=3+4\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 Z_1，对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$；复数 z_2 在复平面内对应的点为 Z_2，对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$．已知 Z_1 与 Z_2 关于虚轴对称，求 z_2，并判断 $|\overrightarrow{OZ_1}|$ 与 $|\overrightarrow{OZ_2}|$ 的大小关系．

解 由题意可知 $Z_1(3,4)$，又因为 Z_1 与 Z_2 关于虚轴对称，所以 $Z_2(-3,\ 4)$，从而有 $z_2=-3+4\mathrm{i}$，因此

$$|z_2|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$$

又因为

$$|\overrightarrow{OZ_1}|=|z_1|=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_,\quad |\overrightarrow{OZ_2}|=|z_2|=5,$$

所以 $\boxed{4}$______．

例 2 设复数 z 在复平面内对应的点为 Z，说明当 z 分别满足下列条件时，点 Z 组成的集合是什么图形，并作图表示．

(1) $|z|=2$；　　(2) $1<|z|\leqslant 3$.

解 (1) 由 $|z|=2$ 可知向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度等于 2，即点 Z 到原点的距离始终等于 2，因此点 Z 组成的集合是圆心在原点、半径为 2 的圆．如图 10-1-3(1)所示．

(2) 不等式 $1<|z|\leqslant 3$ 等价于不等式组

$$\begin{cases}|z|\leqslant 3,\\ |z|>1.\end{cases}$$

又因为满足 $|z|\leqslant 3$ 的点 Z 的集合，是圆心在原点、半径为 3 的圆及

★ 复数可以用向量来表示，这样能在复数集和平面直角坐标系中以 O 为始点的向量组成的集合之间建立一一对应关系：$z=a+b\mathrm{i} \leftrightarrow$ 点 $Z(a, b) \leftrightarrow \overrightarrow{OZ}=(a, b)$. 学生已经学习了平面向量的几何表示和坐标表示，不难理解这种对应关系.

★ 教师可以引导学生类比实数绝对值及其几何意义来研究复数的绝对值（或模），实质上是由一维到二维的推广：实数的绝对值是实数在数轴（实轴）上对应的点到原点的距离；复数的绝对值是复数在复平面上对应的点到原点的距离. 复数的模的计算公式对实数有效，即当 $b=0$ 时，就回到了实数的绝对值. 此处要注意复数的模是非负实数，是可以比较大小的.

★ 两个共轭复数的模相等，可以引导学生从数和形两个角度理解.

在讲授例 1 前，可以增加练习，由学生自己说出一些复数，再在复平面上画出其对应的点，并求出其共轭复数及模.

★ 通过例 1 的学习，学生要会利用复数对应的点的对称关系，写出复数之间的关系. 复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点为 Z_1，复数 z_2 在复平面上对应的点为 Z_2. 若 Z_1，Z_2 关于实轴对称，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$；若 Z_1，Z_2 关于虚轴对称，则 $z_2=-a+b\mathrm{i}$；若 Z_1，Z_2 关于原点对称，则 $z_2=-a-b\mathrm{i}$. 三种对称的两个向量的模都相等.

在讲授完例 1 后，可让学生进一步思考：能否再写出一个复数 z_3，使得 z_3 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_3}$ 与 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模相等？将不同学生写出的复数 z_3 写在黑板上，引导学生猜想并证明这些复数对应的点应符合的几何条件.

★ 通过例 2 的学习，学生要会利用复数模的等式或不等式求复数对应的点的集合所表示的图形，知道圆的复数方程. 提醒学生注意数与形之间的转化，结合复数的模的定义帮助学生理解何种情况下图形是圆，何种情况下图形是圆面或圆环，是否包含边界等问题.

其内部，而满足 $|z|>1$ 的点 Z 的集合，是圆心在原点、半径为[5]的圆的外部，所以满足条件的点 Z 组成的集合是一个圆环（包括外边界但不包括内边界）．如图 10-1-3(2)所示．

图 10-1-3

练习A

1. 分别写出下列复数在复平面内对应的点的坐标．
   (1) $2+5\mathrm{i}$；　(2) $-3+2\mathrm{i}$；　(3) $3-2\mathrm{i}$；　(4) $-2\mathrm{i}-4$；
   (5) 3；　(6) $-3\mathrm{i}$；　(7) $4\mathrm{i}$；　(8) -2．
2. 判断下列命题的真假．
   (1) 在复平面内，实轴上的点都表示实数；
   (2) 在复平面内，实轴与虚轴的交点对应复数 0．
3. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，求 $\bar{z}$ 与 $|z|$．
4. 写出“复数 z 的共轭复数是它本身”的一个充要条件．

练习B

1. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$在复平面内对应的点为 $Z(a,\ b)$，分别写出 a，b 必须满足的条件，使得点 Z 位于
   (1) 实轴上；　(2) 虚轴上；
   (3) 上半平面（不包括实轴）；　(4) 右半平面（不包括虚轴）．
2. 求下列各式的值．
   (1) $|3+4\mathrm{i}|$；　(2) $|2+2\mathrm{i}|$；　(3) $\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$．
3. 如果两个复数的模相等，那么这两个复数一定互为共轭复数吗？为什么？
4. 用“$>$”、“$<$”或“$=$”填空．
   (1) 复数 $z_1=4-3\mathrm{i}$，$z_2=4+3\mathrm{i}$，则 $|z_1|$ ________ $|z_2|$；
   (2) 复数 $z_1=5-12\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{6}+3\mathrm{i}$，则 $|z_1|$ ________ $|z_2|$．
5. 设复数 z 在复平面内对应的点为 Z，说明当 z 分别满足下列条件时，点 Z 组成的集合是什么图形，并作图表示．
   (1) $|z|=1$；　(2) $|z|<1$；　(3) $|z|\geqslant 1$；　(4) $1<|z|<2$．

练习 A

1. (1) (2，5)；(2) (−3，2)；(3) (3，−2)；(4) (−4，−2)；

(5) (3，0)；(6) (0，−3)；(7) (0，4)；(8) (−2，0).

2. (1) 真命题；(2) 真命题.

3. $\bar{z}=-1+\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

4. z 是实数.

练习 B

1. (1) $b=0$；(2) $a=0$；(3) $b>0$；(4) $a>0$.

2. (1) $|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$；

(2) $|2+2\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$；

(3) $\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

3. 如果两个复数的模相等，这两个复数不一定互为共轭复数. 因为此时这两个复数在复平面上对应的点一定在以原点为圆心的同一个圆上，但不一定关于实轴对称. 例如，$3+4\mathrm{i}$ 与 $-3+4\mathrm{i}$ 的模相等，但两者不是共轭复数.

4. (1) $|z_1|=|z_2|$；(2) $|z_1|>|z_2|$.

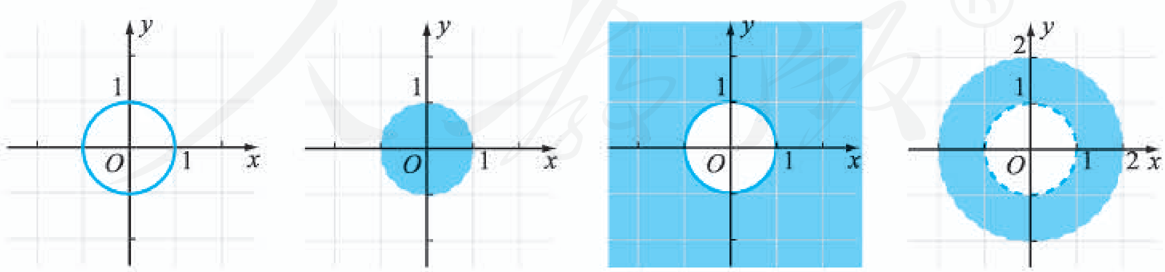
5. (1) 以原点为圆心、半径为 1 的圆；

(2) 以原点为圆心、半径为 1 的圆的内部（不包括边界）；

(3) 以原点为圆心、半径为 1 的圆的外部（包括边界）；

(4) 以原点为圆心、半径为 1 的圆和半径为 2 的圆所夹的圆环（不包括内外边界）.

参考图示如下.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

1 $-\mathrm{i}$　2 $|a|$　3 $\sqrt{3^2+4^2}=5$　4 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$　5 1

习题10-1A

1. 已知复数$(2m-1)-(m+3)\mathrm{i}$的虚部为2，求实数m的值.
2. 求满足下列条件的实数x与y的值.
   (1) $(3x-4)+(2y+3)\mathrm{i}=0$；
   (2) $(3x+2y)+(5x-y)\mathrm{i}=17-2\mathrm{i}$.
3. 已知$(m+2)+(m^2+m-6)\mathrm{i}$是纯虚数，求实数$m$的值.
4. 若复数$z_1=a+b\mathrm{i}$与复数$z_2=c+d\mathrm{i}$在复平面内所对应的点分别满足下列条件，试探究实数a，b，c，d之间应该满足的关系.
   (1) 关于实轴对称；　(2) 关于虚轴对称；　(3) 关于直线$y=x$对称.
5. 已知在复平面内，O是坐标原点，复数$z=2+\mathrm{i}$对应的点是Z，如果点Z_1与点Z关于虚轴对称，点Z_2与点Z关于原点对称，分别求$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$对应的复数.
6. 若复数$z=3+4\mathrm{i}$与其共轭复数所对应的向量分别为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，求$\triangle OAB$的面积.
7. 分别写出“复数z对应的点在实轴上”与“复数z对应的点在虚轴上”的一个充要条件.

习题10-1B

1. 已知$2x^2-5x+2+(x^2-x-2)\mathrm{i}=0$，求实数$x$的值.
2. 分别求实数m的取值范围，使得复数$(m-1)+(m+1)\mathrm{i}$对应的点
   (1) 在第三象限；　(2) 在第二象限或第四象限.
3. 已知实数x与y满足$(x+y)-xy\mathrm{i}=-5+24\mathrm{i}$，求$x$与$y$的值.
4. 已知$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，若z_1的实部与$\overline{z_2}$的实部互为相反数，则实数a，b，c，d应满足什么关系？
5. 若复数$z_1=4-3\mathrm{i}$，$z_2=4+3\mathrm{i}$所对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$，求$\triangle OZ_1Z_2$的周长.
6. 已知复数z的实部与虚部互为相反数，且$|z|=3\sqrt{2}$，求z.
7. 已知复数$z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的共轭复数的模为5，且$3a=4b$，求$\overline{z}$.

习题 10－1A

1. 由$-(m+3)=2$可知，$m=-5$.

2. (1) $x=\frac{4}{3}$，$y=-\frac{3}{2}$；(2) $x=1$，$y=7$.

3. 所求实数 m 的值为-2.

4. (1) $a=c$，$b=-d$；(2) $a=-c$，$b=d$；(3) $a=d$，$b=c$.

5. $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是$-2+\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是$-2-\mathrm{i}$.

6. $\triangle OAB$ 的面积为 12.

7. “复数 z 对应的点在实轴上”的一个充要条件是“z 的虚部为零”或“z 是实数”；“复数 z 对应的点在虚轴上”的一个充要条件是“z 的实部为零”.

习题 10－1B

1. $x=2$.

2. (1) $m<-1$；(2) $-1<m<1$.

3. $x=-8$，$y=3$ 或 $x=3$，$y=-8$.

4. $a=-c$.

5. $\triangle OZ_1Z_2$ 的周长为 16.

6. $z=3-3\mathrm{i}$ 或 $z=-3+3\mathrm{i}$.

7. 由已知得$\begin{cases}a^2+b^2=25,\\3a=4b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4,\\b=-3,\end{cases}$从而 $\overline{z}=4-3\mathrm{i}$ 或 $\overline{z}=-4+3\mathrm{i}$.

10.2　复数的运算

10.2.1　复数的加法与减法

1. 复数的加法

我们知道，任意两个实数都可以相加，而且实数中的加法运算还满足交换律与结合律，即 a，b，$c\in\mathbf{R}$ 时，必定有

$$a+b=b+a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

那么，复数中的加法应该如何规定，才能使得类似的交换律与结合律都成立呢?

尝试与发现

设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=2-2\mathrm{i}$，$z_3=-2+3\mathrm{i}$，你认为 z_1+z_2 与 $(z_1+z_2)+z_3$ 的值应该等于多少？由此尝试给出任意两个复数相加的运算规则.

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，称 z_1+z_2 为 z_1 与 z_2 的**和**，并规定

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})\\&=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

显然，两个复数的和仍然是复数. 而且容易证明，复数的加法运算满足交换律与结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

例如，对于上述尝试与发现中的三个复数来说，有

$$z_1+z_2=(1+\mathrm{i})+(2-2\mathrm{i})=(1+2)+(1-2)\mathrm{i}=3-\mathrm{i},$$

类似地，可以算出

$$(z_1+z_2)+z_3=(3-\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=\boxed{1}\underline{\qquad}.$$

由复数和的定义可知，两个共轭复数的和一定是实数，证明留作练习.

★ 教学中可先引导学生写出实数的加法运算律，进而引发学生思考，应如何规定复数中的加法，使其满足类似的运算律.

★ “尝试与发现”让学生通过具体的复数尝试进行复数的加法运算，尝试之后再给出复数加法运算的规定，这样更有利于学生接受. 类比于实数的加法运算，教材规定了复数加法的运算法则.

★ 两个复数的和仍然是复数，但两个虚数的和不一定是虚数，可以让学生举例说明.

复数加法的交换律和结合律的证明可让学生自己尝试，培养学生先设复数的意识，以及运用已知探求未知的能力.

教师还可以从以下角度介绍两个复数的和.

复数集与平面直角坐标系中以 O 为始点的向量组成的集合之间可以建立一一对应关系，因此可以借助向量来描述复数. 那么，对应复数 z_1 的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与对应复数 z_2 的向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的和向量 $\overrightarrow{OZ}$，其对应的复数 z 与复数 z_1，z_2 又有怎样的关系呢？不难发现：复数 z 的实部，就是复数 z_1，z_2 实部的和；复数 z 的虚部，就是复数 z_1，z_2 虚部的和. 于是我们可以得到：

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），则 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$.

三个及以上复数相加可以转化为两个复数的加法进行，还可以运用交换律或结合律简化运算.

两个共轭复数的和一定是实数：$z+\overline{z}=(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a\in\mathbf{R}$.

教师可以考虑补充部分例题，以下题目供参考.

1. 已知复数 z 满足 $z+\overline{z}=2$，其中 $\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，$|z|=2$，则复数 z 的虚部为（　　）.

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(D) $\pm\sqrt{3}$

2. 已知复数 $z_1=a+\mathrm{i}$，$z_2=1+b\mathrm{i}$，a，b 是实数，i 为虚数单位. 若 $z_1+z_2=\mathrm{i}$，求复数 z_1，z_2.

参考答案为：1. D.

2. $z_1=-1+\mathrm{i}$，$z_2=1$.

尝试与发现

设 $z_1=2+2\mathrm{i}$，$z_2=-1-4\mathrm{i}$，求出 z_1+z_2，并在复平面内分别作出 z_1，z_2，z_1+z_2 所对应的向量，猜想并归纳复数加法的几何意义.

由复数与向量之间的对应关系可以得出复数加法的几何意义：如果复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，则当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线时，以 OZ_1 和 OZ_2 为两条邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，则 z_1+z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图 10-2-1 所示.

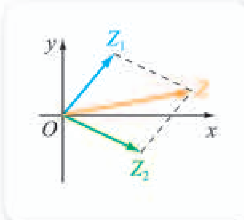


图 10-2-1

由复数加法的几何意义可以得出

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

2. 复数的减法

在实数中，减去一个数可以看成加上这个数的相反数. 例如，因为 3 的相反数为 -3，因此 $8-3=8+(-3)=5$.

在复数中是否可以用类似方法来定义两个复数的减法呢?

尝试与发现

设 $z_1=5+8\mathrm{i}$，$z_2=5-3\mathrm{i}$，猜测 z_2 的相反数以及 z_1-z_2 的值.

一般地，复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的**相反数**记作 $-z$，并规定

$$-z=-(a+b\mathrm{i})=-a-b\mathrm{i}.$$

复数 z_1 减去 z_2 的**差**记作 z_1-z_2，并规定

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

例如上述尝试与发现中 z_2 的相反数为

$$-z_2=-(5-3\mathrm{i})=-5+3\mathrm{i},$$

因此

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(5+8\mathrm{i})+(-5+3\mathrm{i})=\boxed{2}\_\_\_\_\_.$$

一般地，如果 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），则

$$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

显然，两个复数的差仍然是复数. 而且，同实数中的情况类似，两个复数的差一般也不满足交换律，即一般来说，$z_1-z_2\neq z_2-z_1$.

由复数与向量之间的对应关系同样可以得出复数减法的几何意义：如果

34　第十章　复数

★ “尝试与发现”要让学生动手操作，小组合作. 如果学生遇到困难，可以通过提问进行引导：以 z_1，z_2 对应的向量为邻边作平行四边形，观察它与 z_1+z_2 对应的向量有什么联系.

由复数与向量之间的对应关系可以很容易得出复数加法的几何意义，从而复数的加法可以用向量的加法表示，向量的加法可以用复数的加法表示. 这就为我们进行复数运算提供了几何方法. 教师还可以让学生用复数加法的几何意义来验证加法的交换律与结合律.

★ 利用复数加法的几何意义证明复数的绝对值不等式 $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，要用到初中学习的三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，这里可以让学生去探究发现等号成立的条件.

★ 复数的减法的研究事实上是重现了学生初中阶段对实数减法的研究过程，教师应让学生在回顾实数减法相关知识的过程中思考复数的减法应该怎样去做. 这里也应鼓励学生自己去探索，并让学生讲清自己是怎么想到的，巩固通过类比研究新问题的方法.

教材中先回顾了实数减法的运算，然后提出能否用类似的方法定义复数的减法，引发学生思考. “尝试与发现”让学生猜测已知复数的相反数，然后猜测两个复数的差，在此基础上规定了复数的相反数和复数的减法运算，有利于学生理解接受.

★ 复数减法的运算规则可以表述为“实部与实部相减，虚部与虚部相减”，与多项式的减法类似.

两个复数的差仍然是复数，但两个虚数的差不一定是虚数，让学生举例说明.

此处可适当补充题目进行训练，下列题目可供参考.

1. 复平面内有 A，B，C 三点，点 A 对应的复数是 $2+\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 $-1-2\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数是 $3-\mathrm{i}$，求 C 点在复平面内的坐标.

2. 如果复数 z 满足 $\left|z+\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}\right|=1$，求 $|z|$ 的最大值与最小值.

参考答案为：1. C 点在复平面内的坐标为 $(4，-2)$.

2. $|z|$ 的最大值为 3，最小值为 1.

复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，设点 Z 满足

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{Z_2Z_1},$$

则 z_1-z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图 10-2-2 所示.

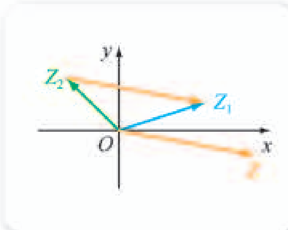


图 10-2-2

由复数减法的几何意义可以得出

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

因为复数相加、相减之后的结果都还是复数，所以当然可以进行有限个复数的加减运算，也可以进行加、减法的混合运算，下面以实例进行说明.

例 1 计算 $(2-5\mathrm{i})+(3+7\mathrm{i})-(5+4\mathrm{i})$.

解 根据定义有

$$\begin{aligned}&(2-5\mathrm{i})+(3+7\mathrm{i})-(5+4\mathrm{i})\\=&(2+3-5)+(-5+7-4)\mathrm{i}\\=&-2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 2 判断命题“两个共轭复数的差一定是纯虚数”的真假，并说明理由.

解 这是假命题，理由如下.

设 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,\ b\in\mathbf{R})$，则

$$\overline{z}=\boxed{3}\_\_\_\_\_\_,$$

从而有

$$z-\overline{z}=(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=2b\mathrm{i}.$$

当 $b=0$ 时，$z-\overline{z}=0$，这不是纯虚数.

探索与研究

根据 z_1-z_2 的几何意义讨论下列各式的几何意义.

(1) $|z-(1+\mathrm{i})|=2$；　　(2) $|z+1|+|z-1|=2$.

练习A

1. 已知 z 是复数，判断下列等式是否成立.

(1) $0+z=z$；　　(2) $z-0=z$.

2. 已知 $z_1=3+2\mathrm{i}$，$z_2=1-4\mathrm{i}$，计算 z_1+z_2，z_1-z_2.

3. 计算下列各式的值.

(1) $(5-4\mathrm{i})+0$；　　(2) $3+(4+2\mathrm{i})$；　　(3) $5\mathrm{i}+(3+7\mathrm{i})$.

★ 由复数与向量之间的对应关系，以及复数加法的几何意义，很容易得出复数减法的几何意义. 复数减法是加法的逆运算，两个复数的差 z_1-z_2 与连接它们对应向量终点的向量对应，并指向被减向量.

利用复数减法的几何意义证明复数的绝对值不等式 $\left||z_1|-|z_2|\right|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，要用到初中学习的三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，这里可以让学生去探究发现等号成立的条件.

★ 可以对例 1 进行进一步说明：复数加、减法的混合运算，只需对实部和虚部分别进行计算，与合并同类项类似.

★ 例 2 是一个全称量词命题，如果要判定其为真命题，需对任意复数进行证明，如果要判定其为假命题，只需举出一个反例即可. 这里还要提示学生判断真假之前首先要关注概念，回顾共轭复数、纯虚数的定义. 还可进一步补充相似命题让学生判断真假，如：两个共轭复数的和一定是实数；差是纯虚数的两个复数一定是共轭复数；和是实数的两个复数一定是共轭复数；和是实数且差是纯虚数的两个复数一定是共轭复数.

★ 教材中以“探索与研究”的形式给出了复平面上一个圆（以 $1+\mathrm{i}$ 对应的点为圆心，半径是 2）和一条线段（以 -1 和 1 对应的点为端点）的方程. 问题（1）可利用复数减法的几何意义和圆的定义解答，问题（2）可增加变式如把等式右边的 2 改为 1，供学生思考. 教师也可以先给出复平面上两点间距离公式 $d=|z_2-z_1|$，然后根据学生实际情况，有选择地带领学生探索复平面上直线（$|z-z_1|=|z-z_2|$）和三类圆锥曲线（$|z-c|+|z+c|=2a$，$\left||z-c|-|z+c|\right|=2a$，$\mathrm{Re}(z)+\frac{p}{2}=\left|z-\frac{p}{2}\right|$）的方程.

练习 A

1. （1）成立；（2）成立.
2. $z_1+z_2=4-2\mathrm{i}$，$z_1-z_2=2+6\mathrm{i}$.
3. （1）$5-4\mathrm{i}$；（2）$7+2\mathrm{i}$；（3）$3+12\mathrm{i}$.

❹ 计算下列各式的值.

(1) $5-(3+2i)$；　(2) $(4+5i)-3$；　(3) $0-(4-5i)$.

❺ 求证：两个共轭复数的和是实数.

练习B

❶ 计算下列各式的值.

(1) $(-3+2i)-(5-i)+(4+7i)$；

(2) $(1+i)-(1-i)-(5-4i)+(-3+7i)$.

❷ 如果复数 z_1，z_2 的和 z_1+z_2 是实数，那么 z_1 与 z_2 一定互为共轭复数吗？为什么？

❸ 求证：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$；　(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

❹ 已知复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 所对应的复数.

❺ 如果不相等的两个复数 z_1，z_2 在复平面内所对应的点分别为 Z_1 与 Z_2，且 Z 为线段 Z_1Z_2 的中点，用 z_1，z_2 表示点 Z 对应的复数.

1 $1+2i$　2 $11i$　3 $a-bi$

10.2.2 复数的乘法与除法

1. 复数的乘法

我们知道，两个实数的乘法对加法来说满足分配律，即 a，b，$c\in\mathbf{R}$ 时，有

$$(a+b)c=ac+bc,$$

而且，实数的正整数次幂满足

$$a^m a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn},\ (ab)^n=a^n b^n,$$

其中 m，n 均为正整数. 那么，复数的乘法应该如何规定，才能使得类似的运算法则仍成立呢？

4. (1) $2-2\text{i}$；(2) $1+5\text{i}$；(3) $-4+5\text{i}$.

5. 设 $z=a+b\text{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则 $\overline{z}=a-b\text{i}$，$\overline{z}+z=2a\in\mathbf{R}$. 命题得证.

练习 B

1. (1) $-4+10\text{i}$；(2) $-8+13\text{i}$.

2. 不一定. 若复数 $z_1=a+b\text{i}$，$z_2=c-b\text{i}$ (a，b，$c\in\mathbf{R}$)，则 $z_1+z_2=a+c$ 是实数，但 a 和 c 不一定相等，故 z_1，z_2 不一定互为共轭复数.

3. 设 $z_1=a+b\text{i}$，$z_2=c+d\text{i}$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，则 $\overline{z_1}=a-b\text{i}$，$\overline{z_2}=c-d\text{i}$.

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+c)+(b+d)\text{i}}=(a+c)-(b+d)\text{i}$，$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a+c)-(b+d)\text{i}$，故 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{(a-c)+(b-d)\text{i}}=(a-c)-(b-d)\text{i}$，$\overline{z_1}-\overline{z_2}=(a-c)-(b-d)\text{i}$，故 $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

4. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $3+9\text{i}$，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $9+\text{i}$.

5. 点 Z 对应的复数为 $\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

★ 介绍复数的乘法，教材中首先给出了两个实数的乘法以及实数的正整数次幂满足的运算法则（主要是指交换律、结合律以及对加法的分配律），然后提出：“那么，复数的乘法应该如何规定，才能使得类似的运算法则仍成立呢?”这个问题有一定难度，教师在教学过程中可以根据学生情况进行一些铺垫，例如，先提出下一页“尝试与发现”中的问题，或者，在给出两个实数的乘法以及实数的正整数次幂满足的运算法则之前提出问题：我们研究完了复数的加法和减法运算，那么复数的乘法，你想到怎么算了吗？你想到的算法符合实数乘法相关的运算法则吗？

尝试与发现

设 $z_1=3$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，$z_3=-5\mathrm{i}$，你认为 z_1z_2 的值与 z_2z_3 的值分别等于多少？由此尝试给出任意两个复数相乘的运算规则.

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），称 z_1z_2（或 $z_1\times z_2$）为 z_1 与 z_2 的**积**，并规定

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\\&=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

这就是说，为了算出两个复数的积，只需要按照多项式乘法的方式进行，并利用 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可.

例如，对于上述尝试与发现中的三个复数来说，有

$$z_1z_2=3(1-2\mathrm{i})=3-6\mathrm{i},$$

$$z_2z_3=(1-2\mathrm{i})(-5\mathrm{i})=-5\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2=\boxed{1}\underline{\qquad}.$$

显然，两个复数的积仍然是复数. 可以证明，复数的乘法运算满足交换律与结合律，且对加法满足分配律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

$$z_1z_2=z_2z_1,\ (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\ z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

例 1 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：

$$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2.$$

证明 根据复数乘法的定义有

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})&=a^2-ab\mathrm{i}+ba\mathrm{i}-b^2\mathrm{i}^2\\&=a^2+b^2.\end{aligned}$$

例 1 的结论可以总结为

$$\forall z\in\mathbf{C},\ z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2.$$

n 个相同的复数 z 相乘时，仍称为 z 的 n 次**方**（或 n 次**幂**），并记作 z^n，即

$$z^n=\underbrace{z\times z\times\cdots\times z}_{n\text{个}}.$$

可以验证，当 m，n 均为正整数时，

$$z^mz^n=z^{m+n},\ (z^m)^n=z^{mn},\ (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n.$$

由此可知

$$(5\mathrm{i})^2=5^2\times\mathrm{i}^2=-25,$$

$$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=\boxed{2}\underline{\qquad},$$

$$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}^2=(-1)\times(-1)=1.$$

需要说明的是，以前我们所学过的和平方公式、平方差公式等，对于复数来说也是成立的，即

★ 学生可以先通过“尝试与发现”中的问题，从特殊情形入手尝试、探索复数的乘法. 先考虑实数与虚数、纯虚数与虚数的乘积，然后再通过观察尝试去探索一般情形的运算规则，遵循了从特殊到一般的认知规律. 知识形成之后就可以让学生在课下验证复数的乘法运算仍然满足交换律、结合律和对加法的分配律.

另外，教材前面给出复数的加法、减法、模的运算都联系到平面向量的运算，但是乘法法则和平面向量数量积不同，可以考虑引导学生先排除平面向量的数量积的干扰. 两个向量的数量积不再是向量，而是实数；而我们要求的复数的乘法要满足实数乘法的运算法则，运算结果也应该是一个复数. 两个向量的数量积不满足乘法运算的结合律.

★ 例 1 证明了两个共轭复数的乘积等于其模的平方，也就是乘积的结果变成了一个实数. 这个结论对于后续研究复数的除法非常重要. 在证明的过程中，也可以让学生观察、体验多项式代数公式的应用，此处平方差公式仍然适用，只是由于 $\mathrm{i}^2=-1$ 将公式中的“$-$”变成了“$+$”.

★ 这里也可以让学生推导 $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$. 参考的证明方式如下.

证明：$\overline{z_1z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$，因此

$$\overline{z_1}\ \overline{z_2}=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i},$$

即

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

★ 由于复数乘法运算满足交换律和结合律，在两个复数乘积的基础上可以定义多个复数的乘积，进而定义其特殊情况复数的乘方 z^n. 不难推得正整数次幂的乘方运算满足教材中给出的运算法则. 但是，对于复数而言，也仅仅是正整数次幂的乘方运算满足这些运算法则，尽管在研究指数运算时，对于底为正实数的情形，我们已经将指数推广到任意实数.

复数的乘法在计算过程中还是按照多项式乘法的方式进行，因此以前熟练掌握的代数公式和计算规律都是适用的，鼓励学生在计算过程中总结和利用规律，提升运算技能.

$$(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2,$$
$$z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2).$$

例如，例 1 也可按如下方式计算.

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

例 2 计算 $(1+i)^2$ 与 $(1-i)^2$ 的值.

解 $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=2i$.

$(1-i)^2=$ 3 ________.

可以验证，以前所学的等式性质仍然成立. 例如，等式两边同时乘上一个复数，等式仍成立，即当 $z_1=z_2$ 时，必定有 $z_1z=z_2z$.

2. 复数的除法

我们知道，在实数中，如果 $a\neq 0$ 且 $ax=b$，那么

$$x=\frac{b}{a}.$$

下面我们用类似的方法给出两个复数相除的定义.

如果复数 $z_2\neq 0$，则满足 $zz_2=z_1$ 的复数 z 称为 z_1 除以 z_2 的**商**，并记作

$$z=\frac{z_1}{z_2}\ (\text{或 } z=z_1\div z_2),$$

而且同以前一样，z_1 称为被除数，z_2 称为除数①.

利用复数除法的定义可以证明，当 w 为非零复数时，有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1w}{z_2w},\quad \frac{z_1+z_2}{w}=\frac{z_1}{w}+\frac{z_2}{w}.$$

尝试与发现

设实数 a，b 满足

$$(a+bi)(1+2i)=1,$$

利用方程组求 a，b 的值，并思考是否有其他方法可以求出 $\frac{1}{1+2i}$.

上述尝试与发现的式子可以改写为

$$a+bi=\frac{1}{1+2i},$$

为了求出 a，b 的值，我们将上述等式右边看成一个分式. 这样一来，就只要想办法把 $1+2i$ 变成一个实数即可，注意到

① 如不特别声明，以后总是默认为除数不能为 0.

★ 介绍例 1 的多种计算方法，旨在说明复数的乘法运算只需要按照多项式乘法的方式进行，其中多项式运算中的代数公式（如平方差公式、完全平方公式）也适用于复数的乘法．这个过程将新授知识与原有知识建立联系，帮助学生快速地掌握运算技巧．

由于复数的加法、乘法运算仍然保持相应的运算律，所以容易得到与实数情形相同的复数的乘法公式及等式性质．但值得注意的是，未必所有的实数中的结论都可以推广到复数情形．例如，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$x^2=|x|^2$；但 $z\in\mathbf{C}$ 时，z^2 与 $|z|^2$ 未必相等（前者可能为虚数，后者必为实数）．再如，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$x^2\geqslant0$；但 $z\in\mathbf{C}$ 时，$z^2\geqslant0$ 未必成立．因此在复数的乘法运算中也要突出复数与实数、平面向量运算中的区别，防止概念和计算方式的混淆．

★ 例 2 也是复数中常见的数值计算，可以应用完全平方公式．例 2 后介绍了等式的性质，即在复数等式两侧同时乘上一个复数等式仍然成立，这一结论显而易见．这里将复数的运算过程和前面的内容进行联系，更有利于学生理解和接受复数的运算法则．

★ 教材中给出了关于复数除法运算的两个性质，接下来的证明过程和计算都将利用这两个性质．这两个性质供参考的证明方式如下．

证明：设$\dfrac{z_1}{z_2}=m$，则 $z_1=mz_2$，因此 $z_1\omega=mz_2\omega$，即$\dfrac{z_1\omega}{z_2\omega}=m=\dfrac{z_1}{z_2}$；

设$\dfrac{z_1}{\omega}=m$，$\dfrac{z_2}{\omega}=n$，则 $z_1=m\omega$，$z_2=n\omega$，因此 $z_1+z_2=(m+n)\omega$，即$\dfrac{z_1+z_2}{\omega}=m+n=\dfrac{z_1}{\omega}+\dfrac{z_2}{\omega}$.

以上这两个证明充分利用定义转化，看似简单，但对定义理解的要求较高，教师可以适当地进行引导．

★ “尝试与发现”中先让学生考虑“被除数为 1”的特殊情形，即复数的倒数．可以先设出商的代数形式，通过复数的乘法运算及复数相等的定义来求出商的实部与虚部，类似的做法在定义复数的减法时用到过．可以引导学生进行计算，体验计算过程，同时思考是否有其他简便算法．较为简洁的做法是“分母实数化”，将分母的复数转化为实数，需用到前面例题中证过的共轭复数乘积为实数的结论．最后给出两种方法的对比，加深对知识的理解和比较记忆．

$$(1+2i)(1-2i)=1^2-(2i)^2=5,$$

因此

$$a+bi=\frac{1}{1+2i}=\frac{1\times(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$$

上面这种方法通常称为“分母实数化”.

一般地，给定复数 $z\neq 0$，称 $\frac{1}{z}$ 为 z 的**倒数**. z_1 除以 z_2 的商 $\frac{z_1}{z_2}$ 也可以看成 z_1 与 z_2 的倒数之积. 显然，利用“分母实数化”可以求出任意一个非零复数的倒数，以及任意两个复数的商（除数不能为 0）.

例 3 求 $(1+2i)\div(3-4i)$ 的值.

解 $(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$$=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

同实数类似，可以定义非零复数的 0 次幂与负整数次幂，即当 z 为非零复数且 n 是正整数时，规定

$$z^0=1,\ z^{-n}=\frac{1}{z^n}.$$

例如，$(1+i)^{-2}=\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{2i}=\frac{i}{2i^2}=-\frac{i}{2}$.

3. 实系数一元二次方程在复数范围内的解集

尝试与发现

我们已经知道，虚数单位 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个解，还有其他复数是这个方程的解吗？如果实数 $a>0$，那么方程 $x^2=-a$ 在复数范围内的解集是什么？

因为

$$i^2=(-i)^2=-1,$$

所以方程 $x^2=-1$ 在复数范围内的解集为 4 ______.

类似地，可以看出，当实数 $a>0$ 时，方程 $x^2=-a$ 在复数范围内的解集为 $\{\sqrt{a}\,i,\ -\sqrt{a}\,i\}$.

例 4 在复数范围内求方程 $x^2+2x+3=0$ 的解集.

解 因为

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2,$$

★ 这里给出了复数除法的计算方法——“分母实数化”．教学时可以提前回顾前面的知识 $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2\in\mathbf{R}$，为学习分母实数化做好铺垫．

教材没有给出复数除法的一般计算公式：

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

这个公式的推导过程其实就是我们的计算过程．教师可以向学生演示公式的推导过程．此外，为方便学生掌握，也可以联系之前学过的“分母有理化”过程，让学生体会类比的学习方法．

★ 例 3 帮助学生巩固除法的运算法则，教师可以根据实际情况补充一些例题，也可以利用教材中的习题或编制一组练习题进行限时训练．

在定义了复数除法的基础上，可以类比实数，定义非零复数的 0 次幂及负整数次幂，这样就把复数的乘方推广到了任意整数次幂．这里应该强调的是幂运算从实数到复数的推广，而非运算本身．复数的开方问题在教材第 49 页的习题中有涉及，学生仅限于了解即可，不必作为重点学习．

★ 引入复数后，任意实系数一元二次方程总有解．“尝试与发现”引导学生从最简单的一元二次方程 $x^2=-1$ 出发，逐步推广到一般，研究复数集内一元二次方程根的问题．这个过程是先借助于 $i^2=-1$，然后借助于前面复数的乘法性质将任意小于零的实数进行开方，供参考的知识的形成过程如下．

由 $i^2=(-i)^2=-1$，当 $a>0$ 时，可得 $(\sqrt{a}i)^2=(-\sqrt{a}i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=-a$，这样就得到了 $x^2=-a$ 在复数范围内的解集为 $\{\sqrt{a}i, -\sqrt{a}i\}$，为接下来的解方程做好铺垫．

★ 例 4 使用了对二次项配方再开方的方法解一元二次方程．教师可以帮助学生复习求根公式推导的过程，同时也可以引导学生发现通过配方将方程转化成了 $x^2=-a$ $(a>0)$ 的形式，回到了对负数开方的问题．

所以原方程可以化为 $(x+1)^2=-2$，从而可知

$$x+1=\sqrt{2}\mathrm{i} \text{ 或 } x+1=-\sqrt{2}\mathrm{i},$$

因此 $x=-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，所求解集为

$$\{-1+\sqrt{2}\mathrm{i},\ -1-\sqrt{2}\mathrm{i}\}.$$

★ 在例 4 中，如果我们记 $x^2+2x+3=0$ 在复数范围内的两个解分别为 x_1，x_2，则 $\overline{x_1}=x_2$ 且 $\overline{x_2}=x_1$，还可算得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-2,\\ x_1x_2=3.\end{cases}$$

当 a，b，c 都是实数且 $a\neq 0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 称为**实系数一元二次方程**，这个方程在复数范围内总是有解的，而且

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有两个互为共轭的虚数根.

★ **探索与研究**

证明上述关于实系数一元二次方程解的结论，并证明：如果 x_1，x_2 为实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，那么

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

★ **拓展阅读**

利用复数产生分形图

以前我们学过的函数，定义域都是实数集的子集．但函数概念还可以推广：定义域是复数集的子集的函数称为复变函数．类似地，我们还可以得到多项式复变函数的概念．例如，$f(z)=z^2$ 就是一个多项式复变函数．此时

$$f(\mathrm{i})=\mathrm{i}^2=-1,\ f(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}.$$

给定多项式复变函数 $f(z)$ 之后，对任意一个复数 z_0，通过计算公式 $z_{n+1}=f(z_n)$，$n\in\mathbf{N}$ 可以得到一列值

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots.$$

如果存在一个正数 M，使得 $|z_n|<M$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立，则称 z_0 为 $f(z)$ 的收敛点；否则，称 z_0 为 $f(z)$ 的发散点．$f(z)$ 的所有收敛点组成的集合称为 $f(z)$ 的充满茹利亚集．

例如，当 $f(z)=z^2$ 时，如果 $z_0=\mathrm{i}$，则得到的一列值是

$$\mathrm{i},\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots;$$

如果 $z_0=1+\mathrm{i}$，则算出的一列值是

$$1+\mathrm{i},\ 2\mathrm{i},\ -4,\ \cdots,\ 2^{2^{n-1}},\ \cdots.$$

显然，对于 $f(z)=z^2$ 来说，i 为收敛点，

★ 将例 4 的解题过程推广到一般，即可得到实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，对 Δ 的符号进行分类即可得到根的情况. 提醒学生注意虚根一定是成对出现的，而且互为共轭复数. 利用求根公式容易证明韦达定理仍然成立.

★ 要注意的是，如果 x_1，x_2 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根，我们可以令

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a(x-x_1)(x-x_2)\\&=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2,\end{aligned}$$

很容易得到

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

但当 x_1，x_2 是虚数时，这种做法就不太恰当了. 因为这里，我们用到了函数的观念，而定义域是复数集的函数，也就是复变函数，现在还是未知的. 有这种想法的学生，教师可以酌情将上述观点告诉他.

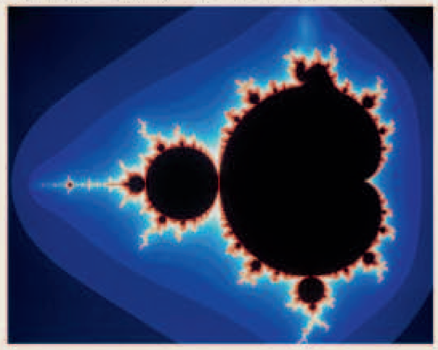
另外本部分内容也要向学生强调此类方程的系数均为实数，而且解方程需要在复数范围内才会存在以上情形.

这里可以补充介绍代数基本定理，即一般的 n 次代数方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ $(a_0\neq0)$在复数范围内有 n 个根. 在很长一段时间里，求解代数方程都是代数学研究的中心问题，这个结论的得出是很不容易的. 这里可以请感兴趣的学生课下查阅资料，从 16 世纪的塔塔利亚、卡尔丹对三次方程求根公式的研究到 1799 年高斯在其博士论文中对代数基本定理的证明，历史上有很多伟大的数学家都对求解方程的问题进行了不断的探索.

★ “拓展阅读”与本章导语相呼应，介绍了分形图产生的过程. 可以安排学生自己阅读，并在课下进一步查阅资料，了解分形理论及其应用. 还可以让感兴趣的学生自己构造一个复变函数，并用计算机生成一个自己的分形图.

$1+\mathrm{i}$ 为发散点．事实上，利用 $|z^2|=|z|^2$ 可以证明，$f(z)=z^2$ 的充满茹利亚集是一个单位圆盘（即由满足 $|z|\leqslant 1$ 的所有 z 组成的集合）．

让人惊讶的是，当 $f(z)=z^2+c$ 时，对于某些复数 c 来说，$f(z)$ 的充满茹利亚集是非常复杂的．如果利用计算机对不同形态的收敛点和发散点进行不同的着色，就可以得到与本章导语所示类似的分形图．而且，如果按照一定的规则对 c 进行分类，并进行着色，可以得到如图所示的芒德布罗分形图．



练习A

1. 计算下列各式的值．

(1) $(4-8\mathrm{i})\mathrm{i}$； (2) $-\mathrm{i}(11-2\mathrm{i})$； (3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$；

(4) $(3-2\mathrm{i})^2$； (5) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$； (6) $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$．

2. 计算 i^{28}，i^{37}，i^{42}，i^{90} 的值，并总结出 i^n（$n\in\mathbf{N}$）的取值规律．

3. 举例说明一般情况下，$\dfrac{w}{z_1+z_2}\neq\dfrac{w}{z_1}+\dfrac{w}{z_2}$．

4. 已知 $1+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+2=0$ 的根，求实数 a 的值．

练习B

1. 计算下列各式的值．

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$； (2) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$．

2. 在复数范围内求方程 $x^2+10x+40=0$ 的解集．

3. 已知 $z_1=5+10\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$，求 z．

4. 已知 $\dfrac{1+a\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+(4-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+b\mathrm{i}$，求实数 a，b 的值．

5. 求证：

(1) $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$； (2) $z=\dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$； (3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$； (4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$．

1 $-10-5\mathrm{i}$　2 $-\mathrm{i}$　3 $1^2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-2\mathrm{i}$　4 $\{\mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$

练习 A

1. (1) $8+4\mathrm{i}$；(2) $-2-11\mathrm{i}$；(3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；(4) $5-12\mathrm{i}$；(5) 2；(6) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

2. $\mathrm{i}^{28}=\mathrm{i}^{4\times7}=(\mathrm{i}^4)^7=1^7=1$；$\mathrm{i}^{37}=\mathrm{i}^{4\times9+1}=(\mathrm{i}^4)^9\times\mathrm{i}=1^9\times\mathrm{i}=\mathrm{i}$；

$\mathrm{i}^{42}=\mathrm{i}^{4\times10+2}=(\mathrm{i}^4)^{10}\times\mathrm{i}^2=1^{10}\times(-1)=-1$；$\mathrm{i}^{90}=\mathrm{i}^{4\times22+2}=(\mathrm{i}^4)^{22}\times\mathrm{i}^2=1^{22}\times(-1)=-1$.

一般地，$\mathrm{i}^n=\begin{cases}1,\ n=4k,\\ \mathrm{i},\ n=4k+1,\\ -1,\ n=4k+2,\\ -\mathrm{i},\ n=4k+3,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}$.

3. 例如，当 $z_1=z_2=\omega=1$ 时，$\frac{\omega}{z_1+z_2}=\frac{1}{2}$，但是$\frac{\omega}{z_1}+\frac{\omega}{z_2}=2$.

4. $a=2$.

练习 B

1. (1) i；(2) $-\mathrm{i}$.

2. $\{-5-\sqrt{15}\mathrm{i},\ -5+\sqrt{15}\mathrm{i}\}$.

3. $z=5-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

4. $a=-\frac{26}{5}$，$b=\frac{8}{5}$.

5. 设 $z=a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，那么

(1) $z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$\overline{z^2}=a^2-b^2-2ab\mathrm{i}$，$\overline{z}^2=a^2-b^2-2ab\mathrm{i}$，故 $\overline{z^2}=\overline{z}^2$；

(2) $\frac{|z|^2}{\overline{z}}=\frac{a^2+b^2}{a-b\mathrm{i}}=\frac{(a^2+b^2)(a+b\mathrm{i})}{(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})}=\frac{(a^2+b^2)(a+b\mathrm{i})}{a^2+b^2}=a+b\mathrm{i}=z$.

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，则 $\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$，那么

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$；

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left[\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\right]}=\overline{\left[\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right]}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$，

$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{(a-b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}{(c-d\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\frac{(ac+bd)+(-bc+ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$，故$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

习题10-2A

1. 计算下列各式的值.

(1) $(4+3i)+(5+7i)$；　　(2) $(-5+i)-(3-2i)$；

(3) $(3+2i)+(-3-2i)$；　　(4) $(6-3i)-(-3i-2)$.

2. 求证：若复数 $z\neq 0$，则 z 为纯虚数的充要条件是 $z+\overline{z}=0$.

3. 计算下列各式的值.

(1) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$；

(2) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

4. 计算下列各式的值.

(1) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$；

(2) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

5. 计算下列各式的值.

(1) $\frac{2-i}{4-i}$；　　(2) $\frac{2+i}{7+4i}$.

6. 已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$z_1z_2=0$，求证：z_1，z_2 中至少有一个是 0.

7. 已知 $|z_1|=3$，$|z_2|=5$，分别求 $|z_1+z_2|$ 与 $|z_1-z_2|$ 的最大值与最小值.

习题10-2B

1. 计算下列各式的值.

(1) $\frac{1}{(1-i)^2}$；　　(2) $(1+i)^{2\,000}$；　　(3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$；　　(4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$.

2. 已知复数 $z_1=1+2i$，$z_2=-2+i$，$z_3=-1-2i$ 在复平面上对应的点是一个正方形的 3 个顶点，求这个正方形的第 4 个顶点对应的复数.

3. 证明 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ 对任意复数 z_1，z_2 都成立，并算出 $z=(3+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ 的模.

4. 计算下列各式的值.

(1) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$；　　(2) $\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}}$.

5. 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-x+7=0$ 的两个根，求 $|x_1-x_2|^2$ 的值.

6. 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ 对任意复数 z_1，z_2 都成立，并给出这个等式的一个几何意义.

7. 已知 $z^2=5-12i$，求 z.

42　第十章　复数

习题 10－2A

1. (1) $9+10\text{i}$；(2) $-8+3\text{i}$；(3) 0；(4) 8.

2. (1) 充分性：设 $z=a+b\text{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，则 $\overline{z}=a-b\text{i}$，因为 $z+\overline{z}=0$，故 $2a=0$，即 $a=0$. 又因为 $z\neq0$，所以 $b\neq0$，故 z 是纯虚数；

(2) 必要性：若 z 是纯虚数，则可设 $z=b\text{i}$ ($b\in\mathbf{R}$)，且 $b\neq0$，则 $\overline{z}=-b\text{i}$，显然 $z+\overline{z}=0$.

综上可得，若复数 $z\neq0$，则 z 是纯虚数的充要条件是 $z+\overline{z}=0$.

3. (1) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{5}{12}\text{i}$；(2) $2b+2a\text{i}$.

4. (1) -25i；(2) $(a^2+b^2)^2$.

5. (1) $\dfrac{9}{17}-\dfrac{2}{17}\text{i}$；(2) $\dfrac{18}{65}-\dfrac{1}{65}\text{i}$.

6. 设 $z_1=a+b\text{i}$，$z_2=c+d\text{i}$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，则 $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)\text{i}$. 因为 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=|z_1||z_2|$，若 $z_1z_2=0$，则 $|z_1z_2|=0$，因此 $|z_1||z_2|=0$，即 $|z_1|$，$|z_2|$ 中至少有一个为 0，故 z_1，z_2 中至少有一个是 0.

7. $|z_1+z_2|$ 与 $|z_1-z_2|$ 的最大值都是 8，最小值都是 2.

习题 10－2B

1. (1) $\dfrac{1}{2}\text{i}$；(2) $2^{1\,000}$；(3) -1；(4) 1.

2. $2-\text{i}$.

3. 证明略；$|z|=\sqrt{13}$.

4. (1) $\dfrac{1}{2}$；(2) $-1+\text{i}$.

5. 27.

6. 设 $z_1=a+b\text{i}$，$z_2=c+d\text{i}$ (a，b，c，$d\in\mathbf{R}$)，则

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2\\&=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2.\end{aligned}$$

该等式的一个几何意义为：平行四边形的两条对角线长的平方和等于四边长的平方和.

7. $3-2\text{i}$ 或 $-3+2\text{i}$.

*10.3 复数的三角形式及其运算

1. 复数的三角形式

尝试与发现

设复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 Z，

(1) 写出点 Z 的坐标，并在图 10-3-1 中描出点 Z 的位置，作出向量 $\overrightarrow{OZ}$；

(2) 记 r 为向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，θ 是以 x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的一个角，求 r 的值，并写出 θ 的任意一个值，探讨 r，θ 与 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的实部、虚部之间的关系.

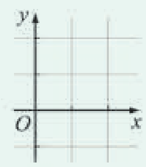


图 10-3-1

一般地，如果非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应点 $Z(a,b)$，且 r 为向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，θ 是以 x 轴正半轴为始边、射线 OZ 为终边的一个角，则

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

根据任意角余弦、正弦的定义可知

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

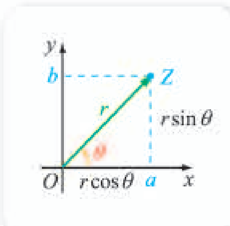


图 10-3-2

因此 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，如图 10-3-2 所示，从而

$$z=a+b\mathrm{i}=(r\cos\theta)+(r\sin\theta)\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

上式的右边称为非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的**三角形式**（对应地，$a+b\mathrm{i}$ 称为复数的**代数形式**），其中的 θ 称为 z 的**辐角**.

显然，任何一个非零复数 z 的辐角都有无穷多个，而且任意两个辐角之间都相差 2π 的整数倍. 特别地，在 $[0,2\pi)$ 内的辐角称为 z 的**辐角主值**，记作 $\arg z$.

为了求出一个非零复数的三角形式，只要求出这个复数的模，然后再找

★ “复数的三角形式及其运算”是本版教材新增加的内容，这部分内容在课标中用“*”标注，是选学内容. 复数的三角形式的依据是复数的几何意义、三角函数的定义以及向量的有关概念，是数与形结合的产物. 让学生了解三角形式，可以帮助其更好地体会复数的乘除运算的几何意义，同时也为未来学习和应用复数奠定基础.

★ 课前可以提前布置学生复习三角函数的诱导公式、任意角三角函数的定义等内容，为本节内容的学习做准备. 课堂引入可以先复习前面已经学过的复数的代数形式，复数的几何意义，复数加法、减法运算的几何意义. 复习后提出问题：复数的乘法和除法是否有几何意义？若有，几何意义是什么？接着提出，要解决这些问题，需要学习复数的三角形式，从而引出课题.

★ “尝试与发现”中的（1）可以让学生在教材给出的坐标系中画出. （2）中 θ 的值不唯一，可以让学生展示自己的结论，如 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{7\pi}{3}$ 等，并引导学生得出 θ 的所有取值：$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 可以让学生通过思考和讨论，自己找出 r，θ 与复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的实部、虚部的关系，在此基础上，教师总结给出复数的三角形式的定义以及复数的三角形式与代数形式的关系，即 r，θ 与 a，b 的关系，并给出辐角和辐角主值的定义.

★ 对于复数三角形式的结构特征，教师需要提醒学生注意以下几点.

（1）复数的实部是 $r\cos\theta$，虚部是 $r\sin\theta$.

（2）$r\geqslant0$.

（3）$\cos\theta$，$\sin\theta$ 分别是同一个角的余弦值和正弦值.

（4）$\cos\theta$ 与 $\mathrm{i}\sin\theta$ 之间用“+”相连.

（5）用同一个辐角 θ，但不一定要求是辐角主值.

另外要注意提醒学生非零复数 z 的辐角并不唯一，但它们的终边重合，即射线 OZ，所以不同的辐角相差 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）. 为了研究方便，规定 $[0, 2\pi)$ 范围内的辐角为非零复数 z 的辐角主值. 非零复数 z 的辐角主值是唯一的. 0 的辐角不确定. 符号“arg”取自辐角的英文单词“argument”. 此外，有的书上也将辐角主值的范围设定为 $(-\pi, \pi]$.

出复数的一个辐角（比如辐角主值）即可．例如，对于复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 来说，因为

$$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \cos\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以可取 $\theta=\arg z=\frac{\pi}{3}$，从而 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角形式为

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

这也可以通过如下方式得到.

$$\begin{aligned}z&=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\mathrm{i}\right]\\&=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

因为

$$0=0(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 θ 可以为任意值，所以我们也称上式为复数 0 的三角形式．这样一来，任意复数都可以写成三角形式了.

例 1 把下列复数的代数形式改写成三角形式.

(1) $1-\mathrm{i}$； (2) $2\mathrm{i}$； (3) -1.

解 (1) 由题意可知

$$\begin{aligned}1-\mathrm{i}&=\sqrt{1^2+(-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\mathrm{i}\right]\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

(2) 因为 $2\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点在 y 轴正半轴上，所以易知

$$|2\mathrm{i}|=2,\ \arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},$$

从而可知

$2\mathrm{i}=$ 1 ________.

(3) 因为 -1 在复平面内所对应的点在 x 轴负半轴上，所以易知

$$|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi,$$

从而可知

$-1=$ 2 ________.

★ 教学的重点和难点是复数的辐角和辐角主值．教材以复数 $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 为例讲解如何将复数的代数形式转化为三角形式，提供了两个思路．思路一是先求得复数的模，接着由三角函数值的定义，得到辐角的正弦值、余弦值，再由三角函数值求得辐角主值，进而可写出复数的三角形式；思路二类似于研究正弦型函数时用到的“辅助角公式”，先提出复数的模（直角三角形中的“斜边”），再找辐角，最后写出三角形式．

需注意在由三角函数值求辐角主值时，首先要根据 a，b 的正负号确定辐角主值所在的象限，再根据 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ 求出 $\theta\in[0,2\pi)$ 的值．

★ 复数 0 的特殊性：一方面，前面对 r 的约束可以扩展为 $r\geqslant 0$；另一方面，0 的辐角主值可以是任意的，这与零向量的方向是任意的保持一致．

还可以将教材中的 $z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 变式为 $z=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，$z=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，$z=-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，通过三种形式对比学习，强化学生对辐角主值的理解．

★ 例 1 的（2）和（3）中复数的辐角均为终边在坐标轴上的角，可以先在复平面中定位该复数所对应的点，通过数形结合让问题简化．

求复数的辐角，一方面要掌握终边相同的角的概念，另一方面也要掌握常用特殊角的三角函数值．这些内容，都应当让学生进行适当训练．课堂上可以考虑补充如下内容．

（1）如果 $\arg z=\theta$，则复数 z 的辐角构成集合 $\{\alpha\,|\,\alpha=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$．

（2）当 a 为正实数时，有 $\arg a=0$，$\arg(-a)=\pi$，$\arg(a\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}$，$\arg(-a\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{2}$．

教师还可以补充如下例题，练习将复数的三角形式改写为代数形式．

写出下列复数的代数形式．

（1）$4\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$；（2）$6\left[\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)\right]$；（3）$\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$．

参考答案为：（1）$2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$；（2）$-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,\mathrm{i}$；（3）$-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$．

对于学有余力的学生，可让其进一步探索代数形式与三角形式互化的一般公式：

$$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)，其中\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta,\end{cases}且\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2},\\ \tan\theta=\dfrac{b}{a}\ (a\neq 0).\end{cases}$$

2. 复数三角形式的乘除法

尝试与发现

设$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，试求出$z_1z_2$.

对于上述尝试与发现中的两个复数来说，显然有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\boxed{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].}$$

这就是说，由两个复数z_1，z_2的三角形式可以便捷地得到z_1z_2的三角形式：z_1的模乘以z_2的模等于z_1z_2的模，z_1的辐角与z_2的辐角之和是z_1z_2的辐角．由此还能得到两个复数相乘的几何意义：设z_1，z_2对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，将$\overrightarrow{OZ_1}$绕原点旋转θ_2，再将$\overrightarrow{OZ_1}$的模变为原来的r_2倍，如果所得向量为$\overrightarrow{OZ}$，则$\overrightarrow{OZ}$对应的复数即为z_1z_2，如图 10-3-3 所示.

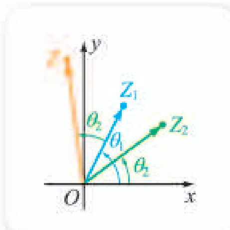


图 10-3-3

例如，

$$\begin{aligned}&2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\\=&2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\=&\ \boxed{3}\ \underline{\qquad\qquad}.\end{aligned}$$

又因为$\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，所以一个复数与 i 相乘，从向量的角度来说，就相当于把这个复数对应的向量绕原点沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$，如图 10-3-4 所示.

图 10-3-4

★ 复数的三角形式为复数乘除法的计算提供了便利，也赋予了复数的乘除法以几何意义．课前可以布置学生复习两角和与差的正弦、余弦公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

★ 可以让学生自己尝试对两个三角形式的复数进行乘法运算．这里的难点是运算过程较为烦琐，但是利用两角和与差的正弦、余弦公式化简后的结果是很简洁的．引导学生用自然语言表述得到的乘法公式，理解三角形式的复数乘法的运算法则，例如，两个复数相乘，只需将其模相乘，再将它们的辐角相加．要注意的是，这里面用到的是辐角，而不是辐角主值．

★ 引导学生在复平面内发现复数乘法的几何意义．这里需提醒学生注意旋转的方向：若 $\theta_2>0$，则按逆时针方向旋转 θ_2；若 $\theta_2<0$，则按顺时针方向旋转 $|\theta_2|$．复数的乘法是刻画旋转的重要工具．

教师还需要提醒学生，使用复数三角形式的乘法运算法则，前提是复数 z_1 与复数 z_2 是三角形式，如果不是，需先写出三角形式再进行乘法运算．教师可以考虑补充例题进行训练，以下题目供参考．

1. 已知 $z_1=\cos 15^\circ-\mathrm{i}\sin 15^\circ$，$z_2=\sin 15^\circ+\mathrm{i}\cos 15^\circ$，求 z_1z_2．

2. 求证：$(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)-\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$．

参考答案为：1. 由题意，$z_1=\cos(-15^\circ)+\mathrm{i}\sin(-15^\circ)$，$z_2=\cos 75^\circ+\mathrm{i}\sin 75^\circ$．

因此 $z_1z_2=\cos(75^\circ-15^\circ)+\mathrm{i}\sin(75^\circ-15^\circ)=\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$．

2. $(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta)=[\cos(-\alpha)+\mathrm{i}\sin(-\alpha)][\cos(-\beta)+\mathrm{i}\sin(-\beta)]$

$=\cos[(-\alpha)+(-\beta)]+\mathrm{i}\sin[(-\alpha)+(-\beta)]=\cos[-(\alpha+\beta)]+\mathrm{i}\sin[-(\alpha+\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)-\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$．

不难看出，上述两个复数三角形式的乘法及其几何意义，可以推广到有限个复数的三角形式相乘. 特别地，如果 $n\in\mathbf{N}_+$，则

$$\boxed{[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)].}$$

尝试与发现

如果非零复数 z 的三角形式为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

利用两个共轭复数在复平面内对应的点关于 x 轴对称，写出 $\overline{z}$ 的三角形式，并求出 $z\overline{z}$ 的值.

一般地，如果非零复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，那么 $-\theta$ 是 $\overline{z}$ 的一个辐角，因此 $\overline{z}=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$，而且

$$\begin{aligned}z\overline{z}&=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\times r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]\\&=r^2[\cos(\theta-\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta-\theta)]=r^2,\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{r^2}$，即

$$\frac{1}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

这样一来，如果 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$（$z_2\neq0$），则

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=z_1\times\frac{1}{z_2}=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\times\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].}$$

由此可知，由两个复数 z_1，z_2（$z_2\neq0$）的三角形式可以迅速地得到 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的三角形式：z_1 的模除以 z_2 的模等于 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的模，z_1 的辐角减去 z_2 的辐角是 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的辐角. 类似地，由此还能得到两个复数相除的几何意义. 例如，任意一个复数除以 i，从向量的角度来说，就相当于把这个复数对应的向量绕原点沿顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$.

例 2 求 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值.

★ 将复数三角形式的乘法推广到有限个复数相乘，所得复数的乘方计算公式又叫作棣莫弗公式. 公式可以描述为：复数的 n（n 为自然数）次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍. 利用这个公式不仅可以很方便地求出 z^n（$n\in\mathbf{N}$），而且还可以用来求复数的开方，同时还能用于证明许多三角恒等式.

有条件的话，可以进一步研究复数的 n（n 为正整数）次方根的计算，并得到结论：复数的 n（n 为正整数）次方根是 n 个复数，这些 n 次方根的模都等于这个复数的模的 n 次方根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0，1，2，…，$n-1$ 倍的和的 n 分之一.

★ 教材中“尝试与发现”提到由共轭复数 $\overline{z}$ 与 z 在复平面内关于 x 轴的对称关系求 $\overline{z}$ 的三角形式，可以由学生自主思考并解释. 教师可以带领学生尝试推导 $\overline{z}z=r^2$.

★ 复数三角形式的除法的运算法则也可以通过如下方式推导.

记$\dfrac{z_1}{z_2}$为两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$（$z_2\neq0$)的商. 因为

$$\frac{z_1}{z_2}\times z_2=z_1,\ 即\frac{z_1}{z_2}\times r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$

显然，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{r_1}{r_2}$，$\dfrac{z_1}{z_2}$的辐角的一个值是 $\theta_1-\theta_2$，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

这个推导的思路是，除法是乘法的逆运算，和复数三角形式的开方运算的推导方法是一致的. 也可以直接用“分母实数化”的方法，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{r_1r_2[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]}{r_2^2}=\frac{r_1}{r_2}\ [\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

推导过程可鼓励学生自己完成，提升其逻辑推理和数学运算素养.

★ 对于复数除法的几何意义，可以让学生对比乘法自己总结. 注意复数除法与乘法之间的区别与联系.

解 因为

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

所以

$$\text{原式}=\frac{(\sqrt{2})^3\times 2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 3-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 3-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2+2\mathrm{i}.$$

例 2 说明，利用复数的三角形式进行乘除运算，有时可简化计算过程.

例 3 如图 10-3-5 所示，已知平面内并列的三个相等的正方形，利用复数证明 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

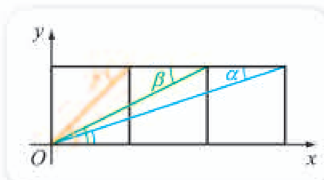


图 10-3-5

证明 假设每个正方形的边长为 1，建立如图 10-3-5 所示平面直角坐标系，确定复平面. 由平行线的内错角相等可知，α，β，γ 分别等于复数 $3+\mathrm{i}$，$2+\mathrm{i}$，$1+\mathrm{i}$ 的辐角主值，因此 $\alpha+\beta+\gamma$ 应该是 $(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的一个辐角. 又因为

$$(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=(5+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=10\mathrm{i},$$

而 $\arg(10\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$，所以存在整数 k，使得 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 注意到 α，β，γ 都是锐角，于是 $k=0$，从而

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

拓展阅读

四元数简介

数学中的数，除了实数、复数之外，还有四元数. 一般地，形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的数为四元数，其中 a，b，c，d 都是实数，i，j，k 都是虚数单位，这些虚数单位满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1.$$

给定两个四元数，可以进行同复数类似的加法和减法运算，例如

$$(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})+(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})$$
$$=8+10\mathrm{i}+12\mathrm{j}+14\mathrm{k}.$$

不过，对于两个四元数相乘来说，情况就比复数相乘复杂得多. 因为此时，除了会出现 i^2，j^2，k^2 之外，还会出现 ij，ik，jk，ji，ki，kj 等. 一般地，两个四元数相乘时，规定

★ 例 2 帮助学生巩固复数三角形式的乘除法的运算法则，提醒学生需先将所有复数写成三角形式，再按照法则进行运算. 当然，这里也可以用前面学过的复数代数形式的乘除法法则进行运算. 用三角形式进行乘除法运算常常可简化计算过程. 运算的结果最好写成代数形式，这样表示复数形式更简洁.

★ 例 3 是复数乘法在平面几何证明中的一个应用，将几何问题转化为代数问题予以解决，体现了形与数之间的转化. 在解决问题的过程中，首先需建立坐标系以引入复数，将 α，β，γ 视为三个复数的辐角；再把所需证明的结论代数化，注意到这里是辐角之和的形式，所以想到应求三个复数的乘积. 还可以让学生探索其他解法，并与复数的方法进行对比. 本题旨在让学生体会复数的乘法的几何意义在代数中的体现. 在本题的解答中，一定要强调：判断、证明角相等的时候，要考虑终边相同角的存在，必须说明角的范围来确定角的值.

★ 教师可以让学生进一步去查阅资料，了解四元数的发现与应用. 以下内容供参考. ①

四元数也是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系. 它本身虽无广泛的应用，但它对于代数学的发展来说是革命性的，从此数学家们可以更加自由地构造新的数系，通过减弱、放弃或替换普通代数中的不同定律和公理（如交换律、结合律等），就为众多代数系的研究开辟了道路.

关于四元数的发现，哈密顿本人后来曾作过这样一个生动的描述：

“明天是四元数的第 15 个生日. 1843 年 10 月 16 日，当我和哈密顿太太步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候，它们就来到了人世间，或者说出生了，发育成熟了. 这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i，j，k 之间的基本方程，恰恰就是我后来使用它们的那个样子. 我当场抽出笔记本（它还保存着），将这些思想记录下来. 与此同时，我感到也许值得花上未来的至少 10 年或许 15 年的劳动. 但当时已完全可以说，我感到一个问题就在那一刻已经解决了，智力该缓口气了，它已经纠缠着我至少 15 年了.”

据说，他当时还取出随身带的一把小刀，将四元数所满足的规律刻在了那座桥的石栏上.

① 李文林. 数学史概论（第二版）[M]. 北京：高等教育出版社，2002：215.

$$ij=-ji=k,$$
$$jk=-kj=i,$$
$$ki=-ik=j.$$

例如，

$$\begin{aligned}&(2+3i+4j+5k)(6+7i+8j+9k)\\=&(12-21-32-45)+\\&(14+18+36-40)i+\\&(16+24+35-27)j+\\&(18+30+24-28)k\\=&-86+28i+48j+44k.\end{aligned}$$

由此也可以看出，四元数的乘法是不满足交换律的.

不过，有意思的是，与复数的乘法能够表示平面直角坐标系中的旋转类似，四元数的乘法能够表示空间中的旋转. 因此，四元数在描述三维旋转、姿态方面有一些独特的优点，人们经常使用四元数去描述飞行器、机器人等的姿态. 感兴趣的同学请自行查阅有关资料.

顺带提及的是，有同学可能会想：既然能有四元数，那有没有三元数呢？能不能规定形如 $a+bi+cj$ 的数为三元数呢？其中 a，b，c 都是实数，i，j 都是虚数单位. 对这个问题感兴趣的同学，可以考虑一下此时 i 与 j 的积 ij 的结果是什么，由此是否出现矛盾，等等.

习题10-3A

1. 把下列复数化为代数形式.

(1) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $9(\cos\pi+i\sin\pi)$；　　(4) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. 已知实数 $a>0$，写出下列复数的辐角主值.

(1) a；　(2) ai；　(3) $-a$；　(4) $-a$i.

3. 把下列复数化为三角形式.

(1) 5；　(2) -2i；　(3) -3；　(4) 6i.

4. 把下列复数化为三角形式.

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$；　(3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

5. 计算下列各式的值（结果写成三角形式）.

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. 已知 θ 是 $3+4i$ 的一个辐角，求 $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ 的值.

7. 设 $-1+i$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，把 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点按逆时针方向旋转 120°，得到向量 $\overrightarrow{OZ'}$，求 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数（用代数形式表示）.

习题 10－3A

1. (1) $3+3\mathrm{i}$；(2) $4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$；(3) -9；(4) $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. (1) $\arg a=0$；(2) $\arg(a\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$；(3) $\arg(-a)=\pi$；(4) $\arg(-a\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}$.

3. (1) $5(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$；(2) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$；

(3) $3(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$；(4) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

4. (1) $\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$；(2) $\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}$；(3) $\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$.

5. (1) $16\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$；(2) $12\left(\cos\frac{13\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}\right)$.

6. 因为 θ 是 $3+4\mathrm{i}=5\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$ 的一个辐角，所以 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，从而 $\tan\theta=\frac{4}{3}$.

7. 把 $-1+\mathrm{i}$ 对应的向量绕原点按逆时针方向旋转 120° 得到的向量对应的复数，即为 $-1+\mathrm{i}$ 乘以一个模为 1 且辐角主值为$\frac{2\pi}{3}$的复数，因此，向量 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数为

$$(-1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=(-1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

应提醒学生灵活选择复数的两种形式解题. 亦可用三角形式做，但需处理好角$\frac{17\pi}{12}$.

$$(-1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}\right)$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

习题10-3B

1. 等式 $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ 成立吗？为什么？
2. 把下列复数化为三角形式.

   (1) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$；　　(2) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

   (3) $-3-3\mathrm{i}$；　　(4) $-5+5\mathrm{i}$.
3. 证明：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$ 对任意 $n\in\mathbf{Z}$ 都成立.
4. 求证：$(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta$.
5. 计算 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2}$.

习题10-3C

1. 在复平面内，已知等边三角形的两个顶点所表示的复数分别为 2 和 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求第 3 个顶点所表示的复数.
2. 给定复数 z 以及正整数 n，如果复数 w 满足 $w^n=z$，则称 w 为 z 的一个 n 次方根. 证明非零复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根有 n 个，且分别是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

并求出 1 的所有 3 次方根.

1 $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　　2 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$　　3 $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

习题 10－3B

1. $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$不一定成立. 因为 $\arg(z_1)\in[0,\ 2\pi)$，$\arg(z_2)\in[0,\ 2\pi)$，所以 $\arg(z_1)+\arg(z_2)\in[0,\ 4\pi)$，而 $\arg(z_1z_2)\in[0,\ 2\pi)$. 例如，设 $z_1=z_2=-\mathrm{i}$，则 $\arg(z_1z_2)=\arg(-1)=\pi$，$\arg(z_1)+\arg(z_2)=\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}=3\pi$.

2. (1) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$；

(2) $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$；

(3) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$；

(4) $5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

3. 当 $r=0$ 时，结论显然成立.

当 $r>0$ 时，如果 $n\in\mathbf{N}$，则显然$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$. 下面证明 $n\in\mathbf{Z}$ 且 $n<0$ 时，$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$成立. 此时，设 $n=-n_0$，$n_0\in\mathbf{N}$，则

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n&=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^{-n_0}\\&=\frac{1}{[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^{n_0}}\\&=\frac{\cos 0+\mathrm{i}\sin 0}{r^{n_0}[\cos(n_0\theta)+\mathrm{i}\sin(n_0\theta)]}\\&=r^{-n_0}[\cos(-n_0\theta)+\mathrm{i}\sin(-n_0\theta)]\\&=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)].\end{aligned}$$

当 $r<0$ 时，注意到

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n&=\{(-r)[\cos(\theta+\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\pi)]\}^n\\&=(-r)^n[\cos(n\theta+n\pi)+\mathrm{i}\sin(n\theta+n\pi)]\\&=(-r)^n(-1)^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]\\&=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)].\end{aligned}$$

综上所述，当 $n\in\mathbf{Z}$ 时，$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]$成立.

4. 因为

$$\begin{aligned}(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)&=[\cos(-3\theta)+\mathrm{i}\sin(-3\theta)][\cos(-2\theta)+\mathrm{i}\sin(-2\theta)]\\&=\cos(-3\theta-2\theta)+\mathrm{i}\sin(-3\theta-2\theta)\\&=\cos(-5\theta)+\mathrm{i}\sin(-5\theta)\\&=\cos 5\theta-\mathrm{i}\sin 5\theta,\end{aligned}$$

故等式成立.

5. $$\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}=\frac{\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]^2}$$

$$=16\left[\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=16(\cos 6\pi+\mathrm{i}\sin 6\pi)$$

$$=16.$$

习题 10－3C

1. 记等边三角形的三个顶点分别为 Z_1，Z_2，Z_3，它们对应的复数分别为 z_1，z_2，z_3，不妨设 $z_1=2$，$z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 z_3 即为所求.

设向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$，$\overrightarrow{Z_2Z_3}$ 对应的复数分别为 z_a，z_b，那么

$$z_a=z_1-z_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$z_b=z_a\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

故

$$z_b=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\sqrt{3}\mathrm{i}\text{ 或 }z_b=\sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right]=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

又因为 $z_b=z_3-z_2$，所以 $z_3=z_b+z_2$，故 $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，或 $z_3=2+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

2. 设复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的一个 n 次方根的三角形式为 $\omega=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，显然

$$\omega^n=[\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

从而 $\rho^n=r$，$n\varphi=\theta+2k\pi$，即 $\rho=\sqrt[n]{r}$，$\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$，$k\in\mathbf{Z}$，故

$$\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

当 k 取 0，1，2，…，$n-1$ 各值时，就可以得到 n 个复数值；由于正弦函数和余弦函数的周期都是 2π，当 k 取 n，$n+1$ 以及其他各个整数值时，又重复出现 k 取 0，1，2，…，$n-1$ 各值时的结果.

所以，复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根有 n 个，分别是

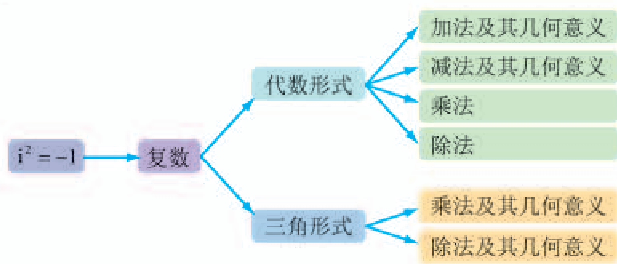
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

由上式可得，1 的 3 次方根有 3 个，分别为 $\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$，$\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，$\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$，即 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们首先将实数扩充成了复数，并学习了复数的几何意义；然后利用复数的代数形式进行了加、减、乘、除运算，还探讨了复数加、减运算的几何意义；最后还了解了复数的三角形式，并利用复数的三角形式研究了复数乘法与除法的几何意义．由此可作出知识结构图如下．



充分发挥自己的想象力和创造力，为本章知识设计不同于上述图表的独特知识结构图，并与其他同学分享．

02 课题作业

（1）复数与向量之间有很多相似的地方，但是也有很多不同之处，总结复数与向量各自的优点，整理成演讲材料后与其他同学交流．

（2）从保持不等式性质的角度去探讨能不能规定复数的相对大小，选定一个角度整理成小论文，并与其他同学交流．

03 复习题

A 组

1. 判断下列命题的真假．

（1）实数不是复数；　　（2）有理数都是复数；

（3）$\sqrt{2}i$ 是无理数；　　（4）$1+\sqrt{3}i$ 不是纯虚数；

（5）$3+i$ 的共轭复数是 $3-i$；　　（6）$i^4+5i^2+4=0$；

★ 可以让学生自己总结本章所学的知识与方法，使其逐渐形成归纳小结的意识与习惯．设计知识结构图，有利于厘清知识之间的内在联系，加深对核心概念的理解，巩固本章所学内容．供参考的知识结构图如下．

- 复数
  - 复数的概念
    - 实部，虚部；模，辐角；共轭复数
    - 复数的分类
    - 复数相等的概念
    - 复平面
  - 复数的运算
    - 复数的加法
      - 法则：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
      - 满足的运算律：交换律，结合律
      - 几何意义：对应向量相加
    - 复数的减法
      - 法则：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
      - 几何意义：对应向量相减
    - 复数的乘法
      - 法则一：按多项式乘法计算，利用 $i^2=-1$
      - 法则二：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
      - 满足的运算律：交换律，结合律，分配律
      - 几何意义：对应向量旋转
    - 复数的除法
      - 法则一：按多项式乘法计算，利用 $i^2=-1$
      - 法则二：$\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
      - 几何意义：对应向量旋转

★ “课题作业”是课堂内容的延伸和拓展，应鼓励学生积极参与，激发他们学习数学的兴趣，在交流与分享中传递思想，增强用数学进行沟通与表达的能力．除了教材给出的题目外，还可以布置如“复数概念的形成与发展”“复数的指数形式——欧拉公式”“四元数的应用”等小课题，让感兴趣的学生去查阅资料，进行研究．

A 组

1．(1) 假命题；(2) 真命题；(3) 假命题；(4) 真命题；(5) 真命题；(6) 真命题；(7) 真命题．

(7) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$，$(z_1-z_2)^2=z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$.

2. 求下列各式的值.

(1) $(7+5\mathrm{i})+(4+3\mathrm{i})$；　　(2) $(8-5\mathrm{i})-(4-3\mathrm{i})$；

(3) $(2-5\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})$；　　(4) $2\mathrm{i}\div(1-\mathrm{i})$.

3. 已知复数 $z=\dfrac{m+2}{m}-(m-m^2)\mathrm{i}$，则

(1) 当实数 m 取什么值时，z 是实数？

(2) 当实数 m 在什么范围时，z 在复平面内对应的点在第二象限？

4. 已知实数 x，y 满足 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$，求 $|x+y\mathrm{i}|$.

5. 分别写出下列各复数的实部与虚部.

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3}$；　　(2) $2+\mathrm{i}^2$；　　(3) $(1+\mathrm{i})^2$；　　(4) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$.

6. 计算 $4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\div\left[2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

7. 化简 $\dfrac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2}{[\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\varphi)][\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta-\varphi)]}$.

8. 把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量绕原点沿顺时针方向旋转 $60°$，求所得向量对应的复数.

9. 设复数 z 满足 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，求 z.

10. 当 $a>0$ 时，用 $\sqrt{-a}$ 表示平方为 $-a$ 且虚部为正的复数. 在这样的约定下，数学家欧拉曾经认为

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=2.$$

这个结果对吗？为什么？

B 组

1. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，求 $|z|$.

2. 已知 z 是虚数，分别根据下列条件求 z.

(1) $z+|\overline{z}|=2+\mathrm{i}$；　　(2) $z^2=\overline{z}$.

3. 已知复数 z 满足 $3z+\overline{z}=1+\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，求 $|z|$.

4. 设 z_1，z_2 是两个复数，已知 $|z_1|=5$，$z_2=3+4\mathrm{i}$，且 z_1z_2 是纯虚数，求 z_1.

5. 已知 $z_1=2$，$z_2=2\mathrm{i}$，$|z|=2\sqrt{2}$ 且 $|z-z_1|=|z-z_2|$，求 z.

6. 把下列复数化为三角形式.

(1) $\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $-\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(3) $\sin\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\dfrac{3\pi}{4}$.

2. (1) $11+8i$；(2) $4-2i$；(3) $23-14i$；(4) $-1+i$.

3. (1) $m=1$；(2) $-2<m<0$.

4. $\sqrt{2}$.

5. (1) 实部为$\frac{1}{3}$，虚部为$\frac{1}{3}$；(2) 实部为 1，虚部为 0；

(3) 实部为 0，虚部为 2；(4) 实部为$\frac{1}{2}$，虚部为$-\frac{1}{2}$.

6. $2i$.

7. 1.

8. $-2\sqrt{3}i$.

9. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

10. 不对. 由题设可知$\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=i\times(2i)=2i^2=-2$.

B 组

1. $|z|=1$.

2. (1) $\frac{3}{4}+i$；(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

4. $4+3i$ 或$-4-3i$.

5. $2+2i$ 或$-2-2i$.

6. (1) $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$；(2) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$；(3) $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$.

7. 已知 $z+\frac{4}{z}$ 为实数，且 $|z-2|=2$，求 z 的值.

8. 计算下列各式的值.

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{3}$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{3}$；　　(3) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{6}$.

9. 化简下列各式.

(1) $\frac{\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}$；　　(2) $\frac{(\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$.

10. 将复数 $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 化为三角形式.

11. 若 $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根，求 b，c 的值.

12. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$BC=\frac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 $EC=2AE$. 用复数证明：$\angle CBE+\angle CBA=\frac{3\pi}{4}$.

13. 设 z 是模为 1 的复数，求 $z^2+\frac{1}{z^2}$ 的最小值.

C 组

1. 下列关于方程 $4x^2+mx+1=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 的结论中，正确的有________.

① 方程的两根互为共轭复数；② 如果方程的两根互为共轭复数，则 $m=0$；③ 若 x 为方程的一个虚根，则 $\overline{x}$ 也为方程的根；④ 若 $m<0$，则方程的两根一定都为正数.

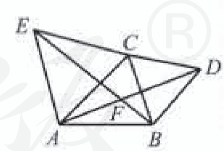
2. 已知复数 z_1，z_2，z_1+z_2 在复平面上对应的点分别为 A，B，C，且 O 为复平面的坐标原点.

(1) 若 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点逆时针旋转 90° 且模变为原来的 2 倍后与向量 $\overrightarrow{OC}$ 重合，求 z_2 的值.

(2) 若 $z_1-z_2=2\mathrm{i}(z_1+z_2)$，试判断四边形 $OACB$ 的形状.

3. 如图，分别以 $\triangle ABC$ 的两边 AC，BC 为边向外作正三角形 $\triangle ACE$ 及 $\triangle BCD$，设 AD，BE 交于 F. 用复数证明：

$$AD=BE \text{ 且 } \angle AFE=60^\circ.$$



（第 3 题）

7. 4，$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 或 $1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

8. (1) 1；(2) 1；(3) -64.

9. (1) $\dfrac{\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}=\dfrac{\cos(-\varphi)+\mathrm{i}\sin(-\varphi)}{\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}=\cos(-2\varphi)+\mathrm{i}\sin(-2\varphi)=\cos 2\varphi-\mathrm{i}\sin 2\varphi$；

(2) $\dfrac{(\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}=\dfrac{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}=1$.

10. $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

当 $\cos\dfrac{\alpha}{2}\geqslant 0$ 时，复数 $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 的三角形式为 $2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$；

当 $\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$ 时，复数 $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 的三角形式为$\left(-2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\pi+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

11. 因为 $1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 是实系数一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根，所以该方程的另一个根为 $1-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$，因此 $b=-(1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}+1-\sqrt{2}\,\mathrm{i})=-2$，$c=(1+\sqrt{2}\,\mathrm{i})(1-\sqrt{2}\,\mathrm{i})=3$.

12. 以 B 为原点，$\overrightarrow{BC}$ 的方向为实轴正方向，建立复平面，取 $BC=1$.

则点 E 对应的复数 $z_E=1+2\mathrm{i}$，点 A 对应的复数 $z_A=1+3\mathrm{i}$，且 $\angle CBE=\arg z_E$，$\angle CBA=\arg z_A$.

因为 $z_Ez_A=(1+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})=-5+5\mathrm{i}$，所以 $\arg(z_Ez_A)=\dfrac{3\pi}{4}$. 显然 $\arg z_A$，$\arg z_E$ 都是锐角，因此 $\angle CBE+\angle CBA=\arg z_E+\arg z_A=\arg(z_Ez_A)=\dfrac{3\pi}{4}$.

13. 由已知，可设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则

$z^2+\dfrac{1}{z^2}=\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta+\dfrac{1}{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}=\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta+\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta=2\cos 2\theta\geqslant -2$，

所以 $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ 的最小值是 -2.

C 组

1. ①③.

2. (1) 由已知得 $z_1\times 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=z_1+z_2$，即 $z_2=z_1\times 2\mathrm{i}-z_1$，所以

$$z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)2\mathrm{i}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}.$$

(2) 易知四边形 $OACB$ 是平行四边形.

由题意知，z_1-z_2 和 z_1+z_2 在复平面上对应的向量分别是 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{OC}$. 由 $z_1-z_2=2\mathrm{i}(z_1+z_2)$ 可知 $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OC}$，且 $|\overrightarrow{BA}|=2|\overrightarrow{OC}|$，由此可知四边形 $OACB$ 是菱形.

3. 以 C 为原点建立复平面，设 E，B 对应的复数分别为 z_1，z_2，则向量 $\overrightarrow{EB}$ 对应的复数为 z_2-z_1.

点 A，D 对应的复数分别为 $z_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$，$z_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

向量 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $z_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)-z_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=(z_2-z_1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

故知向量 $\overrightarrow{AD}$ 可看作向量 $\overrightarrow{EB}$ 逆时针旋转 60°得到的，所以 $AD=BE$ 且$\angle AFE=60^\circ$.